



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS  
ÓPTICA MATEMÁTICA

ROTACIONES Y GIRACIONES EN PANTALLAS  
CARTESIANAS RECTANGUALRES

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICAS)

PRESENTA:  
ALEJANDRO RICARDO URZÚA PINEDA

DR. KURT BERNARDO WOLF BOGNER  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

DR. NATIG ATAKISHIYEV MEKHDIYEV  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

DR. OCTAVIO CASTAÑOS GARZA  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D. F. MAYO 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Resumen

---

La finalidad de este trabajo es elucidar la acción del grupo de Fourier  $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$  en los espacios de representación discretos del álgebra  $\mathfrak{so}(\mathbf{4})$  de dimensión  $N_x \times N_y$ , ocupados para modelar imágenes (bidimensionales) pixeladas rectangulares. Se muestra que, efectivamente, la acción de este grupo de Fourier genera giraciones y rotaciones de manera unitaria y reversible. Este trabajo fue desarrollado luego de que se probara errónea la hipótesis de que una pantalla rectangular puede ser mapeada a una pantalla anular de manera directa mediante el acoplamiento de funciones rectangulares cartesianas con los coeficientes de Clebsch-Gordan y distribuidas sobre un arreglo anular de píxeles. Los resultados de probar errónea la hipótesis anterior llevó a concluir que era necesario construir funciones rectangulares cartesianas con momento angular definido, seguido entonces se introdujeron rotaciones y giraciones de modos cartesianos rectangulares. Previamente [2], K.B. Wolf y T. Alieva mostraron, de manera particularizada al caso presentado aquí, que esta misma acción de  $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$  sobre espacios de representación cuadrados de dimensión  $N^2$  de  $\mathfrak{so}(\mathbf{4})$ , producen giraciones y rotaciones de imágenes pixeladas cuadradas de manera unitaria y reversible.

El capítulo 1 introduce el álgebra abstracta de oscilador mediante los postulados geométrico y dinámico de los paréntesis de Poisson para los vectores continuos de posición y momento. Además se muestra la *cuantización* de estas funciones en espacio-fase para obtener operadores en un espacio de Hilbert, regidas por el paréntesis de Lie.

El capítulo 2 contiene, en primera instancia, la teoría del oscilador finito unidimensional de  $\mathfrak{su}(\mathbf{2})$ , construida a partir de la deformación del álgebra de oscilador cuántico  $\mathfrak{osc}_1$ . En segunda instancia, se presenta la teoría del oscilador finito bidimensional en coordenadas Cartesianas, donde resaltan sus funciones de onda discretas. En última instancia se presenta al grupo de Fourier  $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$  y su acción sobre  $\mathfrak{so}(\mathbf{4})$ , destacando las rotaciones y giraciones hechas sobre las funciones de onda.

El capítulo 3 hace uso de la teoría desarrollada en el Cap. 2 para realizar rotaciones de imágenes monocromáticas en pantallas pixeladas, mostrando que, las rotaciones son reversibles y unitarias, además que la concatenación de rotaciones es igualmente reversible y unitaria, es decir, conserva la información de la imagen original bajo estas transformaciones.

El capítulo 4 presenta las conclusiones de este trabajo.

Finalmente, el apéndice A muestra detalladamente el algoritmo computacional desarrollado para lograr las rotaciones de imágenes pixeladas presentadas en el trabajo.

## Productos derivados de esta tesis

Artículo en revista internacional indizada:

**Alejandro R. Urzúa** and Kurt Bernardo Wolf, *Unitary rotation and gyration of pixelated images on rectangular screens*. Journal of the Optical Society of America A, Vol. **33**, Iss. 4 (April 2016) DOI: [10.1364/JOSAA.33.000642](https://doi.org/10.1364/JOSAA.33.000642)

# Índice general

---

Resumen . . . . .	II
<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Postulados y álgebra del oscilador . . . . .	3
1.1.1. Postulados geométrico y dinámico . . . . .	3
1.1.2. Álgebra abstracta del oscilador . . . . .	4
<b>2. Sistemas de oscilador finito</b>	<b>5</b>
2.1. Ante: Oscilador armónico cuántico . . . . .	5
2.2. Oscilador finito unidimensional . . . . .	5
2.2.1. Álgebra dinámica $\mathfrak{u}(\mathbf{2})$ . . . . .	6
2.2.2. Eigenbases de posición y modo . . . . .	7
2.2.3. Funciones de Kravchuk del oscilador finito . . . . .	8
2.3. Oscilador finito bidimensional . . . . .	10
2.3.1. Estados de posición, modos y funciones de onda . . . . .	10
2.4. Grupo de Fourier $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$ . . . . .	14
2.4.1. Álgebra $\mathfrak{u}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$ . . . . .	14
<b>3. Transformaciones en pantallas</b>	<b>16</b>
3.1. Rotaciones y giraciones de modos cartesianos . . . . .	17
3.1.1. Rotaciones . . . . .	17
3.1.2. Completación del grupo $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{K}}$ . . . . .	20
3.1.3. Giraciones . . . . .	21
3.2. Rotación de imágenes . . . . .	25
<b>4. Conclusiones</b>	<b>30</b>

<b>Apéndices</b>	<b>32</b>
<b>A. Algoritmo de rotación de imágenes</b>	<b>32</b>
A.1. Entradas . . . . .	33
A.2. Cálculo de las funciones de transformación . . . . .	34
A.2.1. Matrices de Kravchuk . . . . .	34
A.2.2. Kernel de rotación . . . . .	35
A.2.3. $d$ 's pequeñas de Wigner . . . . .	35
A.2.4. Funciones angulares rectangulares de Laguerre-Kravchuk . . . . .	37
A.3. Rotación de la imagen . . . . .	38
A.4. Reconstrucción de la imagen rotada . . . . .	39
<b>B. Funciones de onda del oscilador</b>	<b>40</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>42</b>

## Índice de figuras

---

2.1. Funciones del oscilador finito unidimensional . . . . .	9
2.2. Arreglo esquemático rectangular de posiciones y modos . . . . .	11
2.3. Funciones de onda del oscilador finito bidimensional . . . . .	13
2.4. Esfera del álgebra $\mathbf{su}(2)$ . . . . .	15
3.1. Rotaciones de modos cartesianos rectangulares seleccionados . . . . .	19
3.2. Giraciones de modos cartesianos rectangulares seleccionados . . . . .	22
3.3. Modos rectangulares de Laguerre-Kravchuk . . . . .	24
3.4. Rotación de la letra “F” . . . . .	28
3.5. Rotación de la letra “A” . . . . .	29



# Introducción

---

El análisis de señales discretas, en particular aquellas versiones finitas de  $N$  puntos, puede realizarse en términos de los eigenestados de sistemas Hamiltonianos discretos que son construidos en base a álgebras y grupos de Lie. Estos sistemas están en correspondencia, a través de un proceso de “cuantización discreta,” con potenciales cuadráticos provenientes de la mecánica clásica. Uno de los potenciales cuadráticos más estudiados, el del oscilador armónico, es discretizado para lograr una versión finita del mismo que conserve sus propiedades más importantes como el equiespaciamiento entre eigenvalores de energía, así como la posibilidad de realizarlo tanto en coordenadas cartesianas como radiales.

En el estado del arte actual, la teoría del oscilador discreto finito ha sido desarrollada casi en su totalidad, para tal efecto se tiene documentado el trabajo realizado principalmente por K.B. Wolf, *et. al* [3, 4, 5, 6, 7]. A partir de lo anterior, L.E. Vicent [8] extendió el uso de esta teoría al análisis de señales discretas finitas en una y dos dimensiones. Es posible, como se mostrará posteriormente, tomar un arreglo de píxeles bidimensional que porta información de una imagen monocromática ya sea cuadrada o rectangular y codificar ésta en los modos cartesianos de las funciones de Kravchuk, para posteriormente ser actuada por las transformaciones del grupo de Fourier.

---

## Nomenclatura

Símbolo	Descripción
$\mathbf{q}, \mathbf{p}$	Funciones o vectores en espacio fase clásico
$\bar{Q}, \bar{P}$	Operadores continuos en un espacio de Hilbert
$Q, P$	Operadores discretos/Matrices de representación
$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}$	Paréntesis de Poisson entre funciones, vectores u operadores continuos
$[A, B] = AB - BA$	Paréntesis de Lie (conmutador) entre operadores o matrices

## Postulados y álgebra del oscilador

### Postulados geométrico y dinámico

La evolución de una partícula clásica dentro de un potencial de oscilador armónico  $\frac{1}{2}\omega^2|\mathbf{q}|^2$  está dada por el par de ecuaciones de Hamilton para  $h = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 + \omega^2\mathbf{q}^2)$  con  $\omega = 1$ ,

$$\{h, \mathbf{q}\} = -\mathbf{p}, \quad (1.1a)$$

$$\{h, \mathbf{p}\} = \mathbf{q}, \quad (1.1b)$$

La primera ecuación (1.1a) representa la geometría del sistema al definir el vector de momento con dirección en la tangente de la trayectoria, mientras que la segunda ecuación (1.1b) desarrolla la dinámica del oscilador. Como se muestra en [3], es posible trabajar en  $D$  dimensiones; para esto, se define el tensor de segundo rango anti-simétrico de momento angular  $\mathbf{m} := \mathbf{q} \times \mathbf{p} = (q_j p_k - q_k p_j)$ . El paréntesis de Poisson con  $h$  resulta en  $\{h, \mathbf{m}\} = 0$ , por tanto, las componentes de momento angular se conservan.

Es decir, genera rotaciones en los espacios  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$

$$\{m_{j,k}, q_l\} = \delta_{j,l}q_k - \delta_{k,l}q_j, \quad (1.2a)$$

$$\{m_{j,k}, p_l\} = \delta_{j,l}p_k - \delta_{k,l}p_j, \quad (1.2b)$$

con  $j, k = 1, 2, \dots, D$ . Finalmente, las componentes de momento angular cierran un álgebra de Lie  $so(D)$  bajo los paréntesis de Poisson, esta es la clásica álgebra de rotaciones en  $D$  dimensiones

La cuantización *a-la-Schrödinger* reemplaza el paréntesis de Poisson de funciones cuadráticas en el espacio fase clásico, por conmutadores de operadores en un espacio de Hilbert. Para el oscilador armónico, el par de ecuaciones (1.1) resultan en

$$[\bar{H}, \bar{Q}] = -i\bar{P}, \quad (1.3a)$$

$$[\bar{H}, \bar{P}] = i\bar{Q}, \quad (1.3b)$$

donde el conjunto de operadores  $(\bar{H}, \bar{Q}, \bar{P})$  denotan el Hamiltoniano, el operador de posición y el operador de momento respectivamente. Las dos ecuaciones (1.3) denotan de nuevo la separación entre la geometría y la dinámica del sistema de oscilador, ahora

cuántico. Una correcta cuantización de  $\mathfrak{m}$  produce un operador de momento angular  $\bar{M} := \bar{Q} \times \bar{P}$  que, con el paréntesis de Lie genera las rotaciones de  $\bar{Q}$  y  $\bar{P}$  de la forma

$$[M_{j,k}, Q_l] = i(\delta_{j,l}Q_k - \delta_{k,l}Q_j), \quad (1.4a)$$

$$[M_{j,k}, P_l] = i(\delta_{j,l}P_k - \delta_{k,l}P_j), \quad (1.4b)$$

además de conmutar con  $\bar{H}$ , es decir,  $[\bar{H}, M_{j,k}] = 0$ .

Entre estas  $\frac{1}{2}D(D+1)$  componentes de momento angular, el paréntesis de Lie entre las componentes de  $\bar{M}$  son

$$[M_{j,k}, M_{l,n}] = i(\delta_{j,l}M_{k,n} + \delta_{n,j}M_{j,l} + \delta_{n,j}M_{l,k} + \delta_{l,k}M_{n,j}), \quad (1.5)$$

y definen el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(\mathbf{D})$  que, a diferencia de aquella álgebra que encierran los paréntesis de Poisson, ésa es independiente de la realización de los generadores.

### Álgebra abstracta del oscilador

Si se pide que los operadores  $(\bar{H}, \bar{Q}, \bar{P})$ , además del operador unidad  $\bar{1}$ , cierren un álgebra asociativa, entonces este conjunto de cuatro operadores deben satisfacer la identidad de Jacobi

$$[\bar{X}, [\bar{Y}, \bar{Z}]] + [\bar{Y}, [\bar{Z}, \bar{X}]] + [\bar{Z}, [\bar{X}, \bar{Y}]] = 0.$$

Destacando del par de ecuaciones (1.3), la identidad de Jacobi para los operadores  $\bar{X} = \bar{H}$ ,  $\bar{Y} = \bar{Q}$  y  $\bar{Z} = \bar{P}$ , requiere que

$$[\bar{H}, [Q_j, Q_k]] = 0, \quad [\bar{H}, [P_j, P_k]] = 0, \quad [\bar{H}, [Q_j, P_k]] = 0. \quad (1.6)$$

Es posible, entonces, elegir los conmutadores  $[Q_j, Q_k]$ ,  $[P_j, P_k]$  y  $[Q_j, P_k]$  consistentemente tal que cierren en la misma álgebra, resultando en

$$[Q_j, Q_k] = iM_{j,k}, \quad [P_j, P_k] = iM_{j,k}, \quad [Q_j, P_k] = if(\bar{H}, \bar{C}), \quad (1.7)$$

donde  $f(\bar{H}, \bar{C})$  se elige como una función lineal del Hamiltoniano  $\bar{H}$  y del operador de Casimir  $\bar{C}$  propio del álgebra.

## Sistemas de oscilador finito

---

### Ante: Oscilador armónico cuántico

El sistema de oscilador finito lineal en una dimensión surge de la deformación del álgebra  $\mathbf{osc}_1$  que caracteriza al oscilador armónico cuántico unidimensional ( $D = 1$ ) §1.1.

Sean  $\bar{Q}$  y  $\bar{P}$  operadores de Schrödinger para la posición y momento en el modelo continuo. Considerando, además, el operador de número del oscilador definido como  $\bar{N} := \frac{1}{2}(\bar{P}^2 + \bar{Q}^2 - \bar{1})$ , cuyo espectro en el espacio de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  es el conjunto de puntos  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Estos tres operadores, más el operador unidad, satisfacen las tradicionales relaciones de conmutación de Heisenberg

$$\mathbf{osc}_1 : \quad [\bar{N}, \bar{Q}] = -i\bar{P}, \quad [\bar{N}, \bar{P}] = i\bar{Q}, \quad [\bar{Q}, \bar{P}] = i\bar{1}, \quad (2.1)$$

además de los conmutadores nulos  $[\bar{Q}, \bar{Q}] = 0$ ,  $[\bar{P}, \bar{P}] = 0$ .

Como se muestra en las ecuaciones (1.1) y (1.3), los primeros dos conmutadores de (2.1) son las relaciones geométrica y dinámica de las ecuaciones de Hamilton, el tercer conmutador distingue al modelo continuo tratado.

### Oscilador finito unidimensional

En el modelo de oscilador finito unidimensional existe sólo un operador de posición  $Q$ , su operador conjugado de momento  $P$ , y el Hamiltoniano  $H$ . Naturalmente sus eigenvalores serán los observables de posición, momento y modo, respectivamente.

### Álgebra dinámica $\mathfrak{u}(2)$

El álgebra de Lie en la cual subyacerán los observables del oscilador finito será  $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{su}(2)$ . Los generadores,  $J_j := -i\epsilon_{jkl}(x_k\partial_{x_l} - x_l\partial_{x_k})$ ,<sup>1</sup> están comúnmente asociados al momento angular cuántico y realizados mediante operadores diferenciales de primer orden en un espacio de funciones analíticas  $\mathcal{A}_3$  de  $\{x_k\} \in \mathbf{R}^3$ . Estos generadores obedecen las reglas de conmutación dadas por el paréntesis de Lie

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l. \quad (2.2)$$

Existe, además, un cuarto operador de número definido por  $E_J := \sum_{k=1}^3 x_k\partial_{x_k} = j\hat{1}$ , cuyo paréntesis de Lie con cualquiera de los operadores en (2.2) resulta

$$[E_J, J_k] = 0, \quad (2.3)$$

este operador porta un espectro de eigenvalores  $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,<sup>2</sup> el cual separa el espacio de representación  $\mathfrak{so}(3)$  en representaciones irreducibles finitas con dimensión  $2j + 1$  [13, 18]. El operador  $E_J$ , junto con (2.2), completan el álgebra de la forma  $\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2) = \mathfrak{u}(2)$ , además determinan al operador de Casimir de  $\mathfrak{su}(2)$  de la forma

$$C := J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = E_J(E_J + 1), \quad (2.4)$$

con eigenvalores  $j(j + 1)$  dados en el espacio de las funciones armónicas sobre la esfera. El espectro de cada generador  $J_k$  de  $\mathfrak{su}(2)$  está en  $m \in \{-j, -j + 1, \dots, j\}$  [13, 20].

Introduciendo una reinterpretación física que da lugar a una nueva identificación de los generadores de  $\mathfrak{su}(2)$  y sus eigenvalores, para satisfacer las ecuaciones del oscilador armónico  $\mathbf{osc}_1$  (2.1) en toda representación irreducible finita etiquetada por  $j = \frac{1}{2}N$ , se propone que

$$\text{posición:} \quad \bar{Q} \rightarrow Q \equiv J_1 \quad q \in \{-j, -j + 1, \dots, j\}, \quad (2.5a)$$

$$\text{-momento:} \quad -\bar{P} \rightarrow -P \equiv J_2 \quad p \in \{-j, -j + 1, \dots, j\}, \quad (2.5b)$$

$$\text{Hamiltoniano:} \quad \bar{H} \rightarrow H \equiv J_3 + j + \frac{1}{2} \quad h \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, 2j + \frac{1}{2} \right\}, \quad (2.5c)$$

<sup>1</sup> $\partial_{x_k} := \partial/\partial x_k$

<sup>2</sup>Valores semi-enteros de  $j \in \{1/2, 3/2, 5/2, \dots\}$  ocurren en el espacio de espines y pueden ser tratados abstractamente.

además es posible identificar el operador de número como  $H - \frac{1}{2} = J_3 + j =: N$  con un espectro en  $n \in \{0, 1, \dots, N := 2j\}$ .

El conmutador entre los operadores de posición y momento en el modelo de oscilador finito resulta ser

$$[J_1, J_2] = i(H - E_J - \frac{1}{2}1) = iH - i(j + \frac{1}{2})1, \quad (2.6)$$

con lo cual se obtiene que las posiciones y momentos son intrínsecamente discretos y finitos.

### Eigenbases de posición y modo

En la representación de  $\mathfrak{su}(2)$ , con  $j = \frac{1}{2}N$ , el oscilador finito consiste de  $N + 1$  puntos equidistantes a los cuales se asocian  $N + 1$  eigenestados de Kronecker. Esto da lugar a la base de posiciones caracterizada por los eigenkets

$$Q|N, q\rangle_1 = q|N, q\rangle_1, \quad q|_{-j}^j, \quad (2.7a)$$

$$J^2|N, q\rangle_1 = \frac{1}{2}N(\frac{1}{2}N + 1)|N, q\rangle_1. \quad (2.7b)$$

Un oscilador finito de  $N + 1$  puntos, además, contiene  $N + 1$  eigenestados de modo del Hamiltoniano  $H$ , el cual contiene un estado base y un estado máximo localizable, es decir, tiene un espectro finito.

Introduciendo la segunda base de modos definida por

$$H|N, n\rangle_H = (n + \frac{1}{2})|N, n\rangle_H, \quad n|_0^{2j} \quad (2.8a)$$

$$J^2|N, n\rangle_H = \frac{1}{2}N(\frac{1}{2}N + 1)|N, n\rangle_H. \quad (2.8b)$$

El número de modo  $n$  está relacionado con los eigenvalores de  $J_3$ ,  $\mu|_{-j}^j$ , a través de las relaciones  $n = j + \mu$  y  $\mu = n - \frac{1}{2}N$ .

En la cadena de álgebras  $\mathfrak{su}(2) \supset \mathfrak{u}(1)_1$  y  $\mathfrak{su}(2) \supset \mathfrak{u}(1)_3$ , es útil denotar sus eigenkets abstractos mediante paréntesis redondos, de forma que las relaciones entre las bases son de la forma

$$|j, m\rangle_3 := |2j, j + m\rangle_H, \quad J_3|j, m\rangle_3 = \mu|j, m\rangle_3, \quad m|_{-j}^j, \quad (2.9a)$$

$$|N, n\rangle_H := |\frac{1}{2}N, n - j\rangle_3, \quad J^2|j, m\rangle_3 = j(j + 1)|j, m\rangle_3. \quad (2.9b)$$

Las bases anteriores están relacionadas mediante el intercambio de fase de  $J_2$  de la forma

$$e^{-i\frac{1}{2}\pi J_2} J_3 = J_1 e^{-i\frac{1}{2}\pi J_2} \quad \mapsto \quad |N, q\rangle_1 = e^{-i\frac{1}{2}\pi J_2} |N, j+1\rangle_H. \quad (2.10)$$

El *traslape* entre ambas bases es una función nativa de rotación, una “*d*-pequeña” de Wigner [4],

$$\begin{aligned} d_{m,m'}^j(\beta) &:= {}_3(j, m | e^{-i\beta J_2} | j, m')_3 = d_{m,m'}^j(-\beta) \\ &= \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!} \times \\ &\quad \sum_k (-1)^k \frac{(\cos \frac{1}{2}\beta)^{2j-2k+m+m'} (\sin \frac{1}{2}\beta)^{2k-m+m'}}{k!(j-m+k)!(j-m'-k)!(m'-m+k)!}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

### Funciones de Kravchuk del oscilador finito

Las funciones de onda del oscilador finito son los traslapes de los eigenkets de las bases de posición  $Q$  y modo  $N$ . Del conjunto de ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11), se tiene que éstas son [21]

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(j)}(q) &:= {}_1\langle N, q | N, n \rangle_H = {}_H\langle N, j+q | e^{i\frac{1}{2}\pi J_2} | N, n \rangle_H \\ &= d_{q,n-j}^j(-\frac{1}{2}\pi) = d_{n-j,q}^j(\frac{1}{2}\pi) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^j} \sqrt{\binom{2j}{n} \binom{2j}{j+q}} K_n(j+q; \frac{1}{2}, 2j), \end{aligned} \quad (2.12)$$

para  $N = 2j$ ,  $n_0^{2j}$ ,  $q_{-j}^j$ .

La ecuación (2.12), con la raíz cuadrada del producto de dos distribuciones binomiales y un *polinomio simétrico de Kravchuk*<sup>1</sup> en  $j+q$  es la expresión explícita de las funciones de oscilador finito que, están definidas de manera directa por una función hipergeométrica de la forma [3]

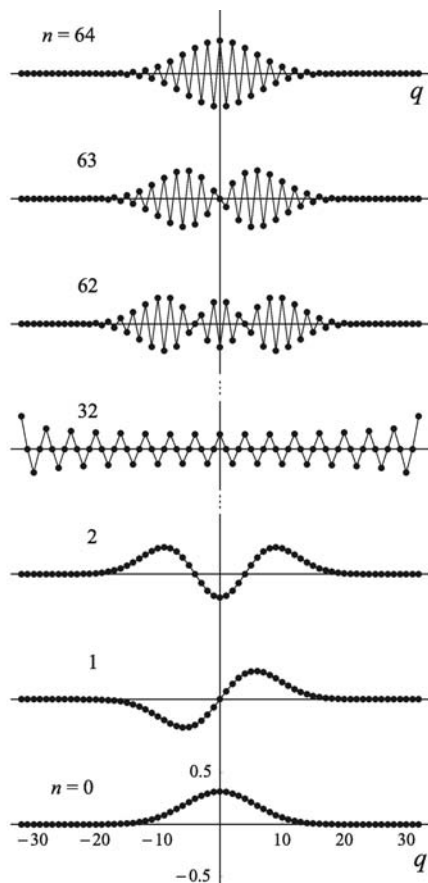
$$K_n(x; \frac{1}{2}, N) := {}_2F_1(-n, -x; -N; 2) = K_x(n; \frac{1}{2}, N),$$

donde la auto-dualidad es notable para ambos índices  $x$  y  $n$  enteros en el intervalo  $[0, N]$ .

<sup>1</sup>Los polinomios de Kravchuk son un conjunto completo y ortogonal de funciones discretas sobre  $N+1$  puntos, con una medida acotada por la distribución binomial  $\binom{N}{q}$  [9].



En la figura 2.1 se muestran las funciones de onda del oscilador finito unidimensional, para los tres estados más bajos, el estado intermedio y los tres estados más altos.



**Figura 2.1:** Funciones de Kravchuk del oscilador finito unidimensional para  $j = 16$ . Se muestran, de abajo hacia arriba, los tres estados más bajos  $n = 0, 1, 2$ , el estado intermedio  $n = 2j$  y los tres estados más altos  $n = 62, 63, 64$ . Se nota que los tres estados más altos reproducen a los tres estados más bajos pero adquiriendo un signo que alterna entre puntos adyacentes.

Las funciones de onda  $\Phi_n^{(j)}(q)$  en (2.12) son las llamadas *funciones de Kravchuk*. Estas funciones no satisfacen ninguna ecuación diferencial, sino una ecuación de recurrencia de tres términos sucesivos, véase apéndice B. Estas funciones forman *multipletes* en el álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  [3, 4], y muestran propiedades deseables de los modos continuos de Hermite-Gauss (HG). Para  $n$ 's bajas, las curvas de (2.12) se asemejan a las curvas continuas de las funciones de HG, mientras que para  $n$ 's altas, estas alternan de signo entre puntos adyacentes,

$$\Phi_{2j-n}^{(j)}(q) = (-1)^q \Phi_n^{(j)}(q). \quad (2.13)$$

## Oscilador finito bidimensional

La generalización completa de un oscilador finito unidimensional, Sec. 2.2, es un arreglo rectangular de  $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$  puntos. Esta generalización está soportada por el álgebra compuesta de dos subálgebras mutuamente conmutantes e independientes, (2.7), (2.8) y (2.9), para las coordenadas  $x$  y  $y$ ; además de una subálgebra central para cada una de estas coordenadas,  $E_J^{(x)} = \frac{1}{2}N_x 1$  y  $E_J^{(y)} = \frac{1}{2}N_y 1$ . La suma directa de éstas resulta en  $\mathfrak{u}(\mathbf{1})_x \oplus \mathfrak{u}(\mathbf{1})_y \oplus \mathfrak{su}(\mathbf{2})_x \oplus \mathfrak{su}(\mathbf{2})_y = \mathfrak{so}(\mathbf{4})$ .

A diferencia de la generalización simple hecha por K.B. Wolf y T. Alieva [2], aquí no se restringe a la forma simétrica de la subálgebras de  $\mathfrak{so}(\mathbf{4})$ , es decir, los operadores de Casimir de  $\mathfrak{so}(\mathbf{3})$  son independientes

$$\left(\mathbf{J}^{(x)}\right)^2 = E_J^{(x)} \left(E_J^{(x)} + 1\right), \quad (2.14a)$$

$$\left(\mathbf{J}^{(y)}\right)^2 = E_J^{(y)} \left(E_J^{(y)} + 1\right). \quad (2.14b)$$

Con lo cual, cada coordenada del oscilador finito bidimensional contiene una serie de modos finitos e independientes.

### Estados de posición, modos y funciones de onda

#### Eigenbase de posiciones

Es posible generar las eigenbases de Kronecker para la posición de manera directa extendiendo (2.7a) y (2.7b) para un arreglo rectangular de la forma

$$Q_x |N_x, q_x\rangle_1 = q_x |N_x, q_x\rangle_1, \quad q_x |_{-j_x}^{j_x}, \quad (2.15a)$$

$$\left(\mathbf{J}^{(x)}\right)^2 |N_x, q_x\rangle_1 = \frac{1}{2}N_x \left(\frac{1}{2}N_x + 1\right) |N_x, q_x\rangle_1, \quad (2.15b)$$

$$Q_y |N_y, q_y\rangle_1 = q_y |N_y, q_y\rangle_1, \quad q_y |_{-j_y}^{j_y}, \quad (2.15c)$$

$$\left(\mathbf{J}^{(y)}\right)^2 |N_y, q_y\rangle_1 = \frac{1}{2}N_y \left(\frac{1}{2}N_y + 1\right) |N_y, q_y\rangle_1. \quad (2.15d)$$

$$(2.15e)$$

En la Fig. 2.2, izquierda, se muestra el arreglo esquemático de los  $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$  puntos de posiciones.

### Eigenbase de modos

Similarmente, se pueden construir los *modos* de un oscilador finito bidimensional como el producto directo  $|N_x, N_y; n_x, n_y\rangle_{\text{H}} = |N_x, q_x\rangle_{\text{H}_x} |N_y, q_y\rangle_{\text{H}_y}$ , donde la base está dada por

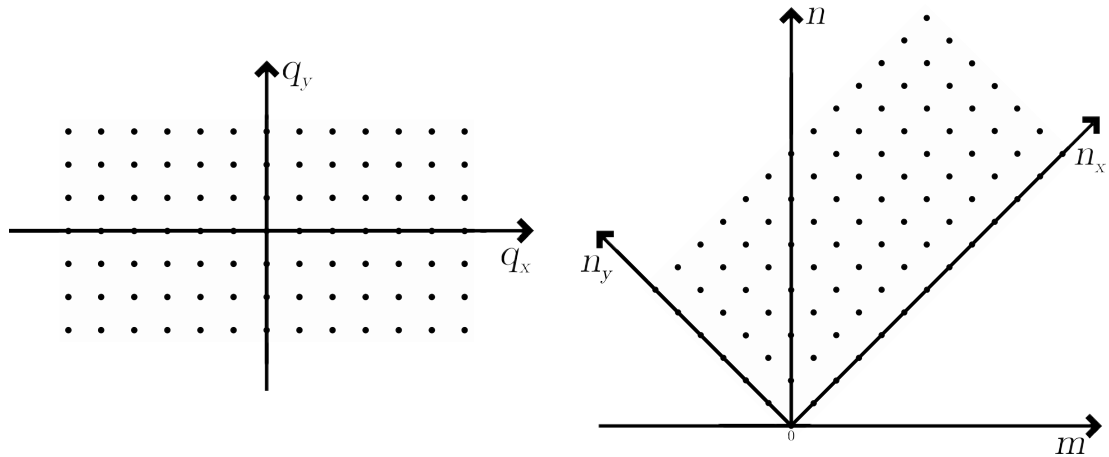
$$\text{H}_x |N_x, N_y; n_x, n_y\rangle_{\text{H}_x} = (n_x + \frac{1}{2}) |N_x, N_y; n_x, n_y\rangle_{\text{H}_x}, \quad n_x |0\rangle_0^{2j_x}, \quad (2.16a)$$

$$\text{H}_y |N_x, N_y; n_x, n_y\rangle_{\text{H}_y} = (n_y + \frac{1}{2}) |N_x, N_y; n_x, n_y\rangle_{\text{H}_y}, \quad n_y |0\rangle_0^{2j_y}. \quad (2.16b)$$

Estos modos,  $n_x$  y  $n_y$ , pueden ser acomodados en un arreglo romboidal, el eje vertical se toma como el número total de modo,

$$n := n_x + n_y, \quad \text{H} |N_x, N_y; n_x, n_y\rangle_{\text{H}} = (n + 1) |N_x, N_y; n_x, n_y\rangle_{\text{H}}, \quad \text{H} := \text{H}_x + \text{H}_y, \quad (2.17)$$

y el eje horizontal cuenta como la diferencia de modo,  $n_x - n_y$ . Este arreglo de  $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$  puntos está esquematizado en la Fig. 2.2, derecha; es de notar que la forma *romboidal* acomoda más modos en el eje que domine, es decir, cuando el tamaño de la representación en una coordenada es mayor que la otra, en este caso tomamos  $j_x > j_y$ . Cuando  $j_x = j_y$  el número de puntos es el mismo y se recupera la forma de rombo perfecto [6].



**Figura 2.2:** Arreglo esquemático rectangular de posiciones y modos. Izquierda: Posiciones para  $-j_x \leq q_x \leq j_x$  y  $-j_y \leq q_y \leq j_y$ . Derecha: Modos clasificados por (eje vertical)  $n = n_x + n_y$  y (eje horizontal)  $m = n_x - n_y$ .

Las funciones onda de los *modos cartesianos rectangulares* del oscilador finito bidimensional son simplemente el producto de dos funciones de onda unidimensionales

(funciones de Kravchuk) sin la restricción de que cuenten con el mismo número finito de puntos:

$$\Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) := {}_1 \langle N_x, N_y; q_x, q_y | N_x, N_y, n_x, n_y \rangle_{\text{H}} = \Phi_{n_x}^{(j_x)}(q_x) \Phi_{n_y}^{(j_y)}(q_y), \quad (2.18)$$

$$q_x |_{-j_x}^{j_x}, \quad n_x |_0^{N_x}, \quad q_y |_{-j_y}^{j_y}, \quad n_y |_0^{N_y}.$$

Cabe destacar que estas funciones (2.18) son puramente reales:  $\text{Im} \left( \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) \right) = 0$ . Existen entonces  $N_x \times N_y$  funciones bidimensionales de Kravchuk que se acomodan en el arreglo romboidal. Debido a que estos son eigenkets de los operadores conmutantes en el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(4)$ , los modos cartesianos de (2.18) son ortonormales y completos bajo el producto interno

$$\sum_{n_x, n_y} \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) * \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q'_x, q'_y) = \delta_{q_x, q'_x} \delta_{q_y, q'_y}, \quad (2.19a)$$

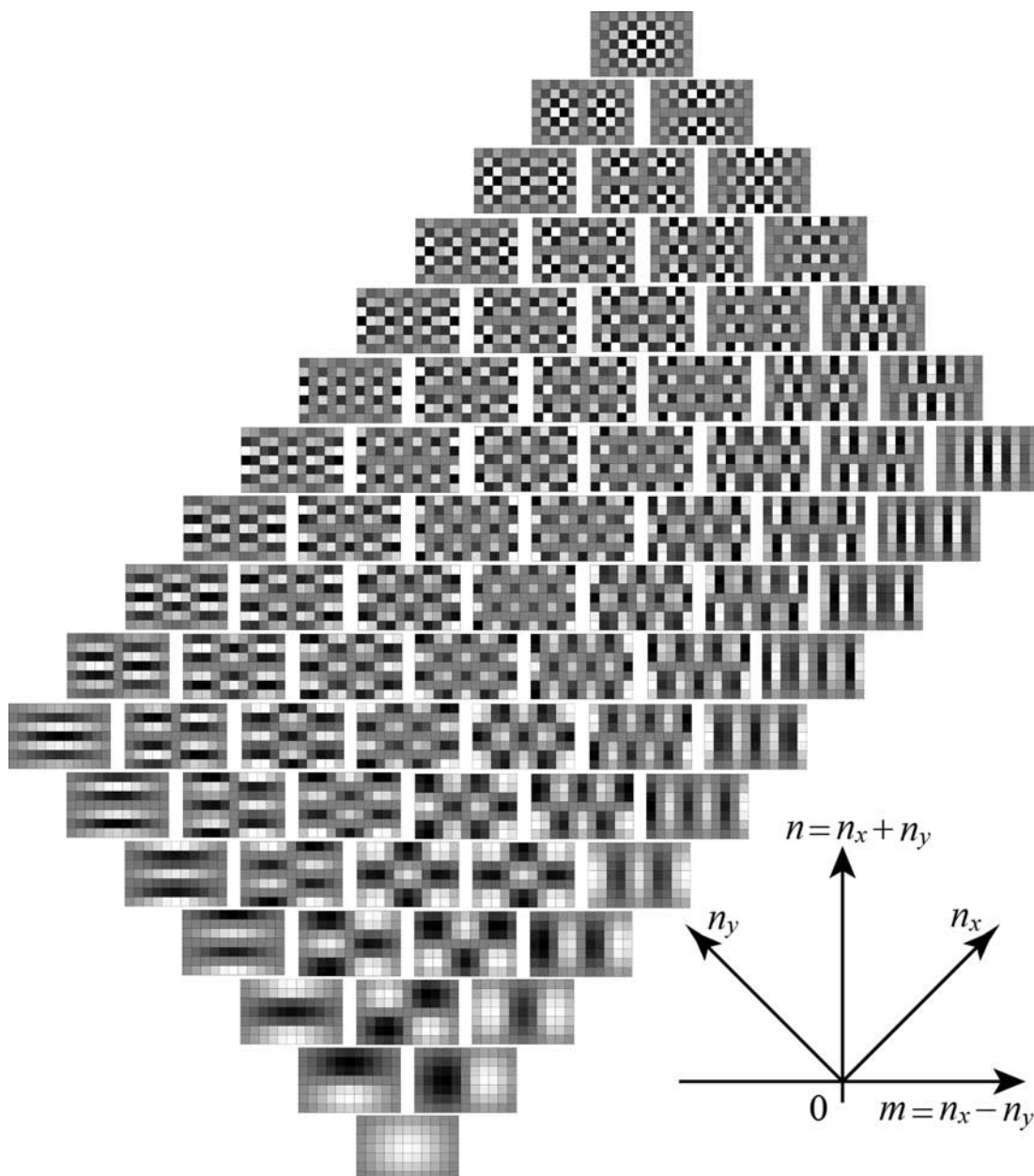
$$\sum_{q_x, q_y} \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) * \Phi_{n'_x, n'_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) = \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y}. \quad (2.19b)$$

Un análisis detallado del romboide de modos de la Fig. 2.3 es necesario para aclarar las nuevas características que presenta. Es de notar, en primera instancia, que el rombo se compone de tres partes; dos triángulos, superior e inferior, además de una parte central.<sup>1</sup> El triángulo inferior de modos se cuenta para  $0 \leq n \leq 2j_y$ ; en cada uno de estos niveles se tienen  $n_x$  y  $n_y$  nodos, es decir, cambios de signo (tono) entre pixeles adyacentes. En la parte central del rombo,  $2j_y < n < 2j_x$ , el número de nodos que se pueden acomodar entre el extremo izquierdo  $n_y = n \leq N_y - 1$  y el extremo derecho  $n_x = n \leq N_x - 1$  no presenta un ordenamiento con simetría, es decir, los nodos horizontales del extremo izquierdo no pasan todos a ser nodos horizontales en el extremo derecho. Finalmente, el triángulo superior,  $2j_x \leq n \leq 2(j_x + j_y)$ , cuenta con los mismos nodos que el triángulo inferior. De la Ec. (2.13), se sigue que

$$\Phi_{2j_x - n_x, 2j_y - n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) = (-1)^{q_x + q_y} \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y), \quad (2.20)$$

con lo cual el triángulo superior reproduce al inferior con un cambio alternante de signo entre pixeles adyacentes, es decir, antepone un tipo de patrón de *tablero de ajedrez* a cada modo inferior.

<sup>1</sup>En el caso cuando  $j_x = j_y = j$ , la parte central no aparece y existe un traslape en el nivel  $n = 2j$ , este nivel pertenece tanto al triángulo inferior como superior del rombo.



**Figura 2.3:** Eigenfunciones del oscilador finito bidimensional con  $N_x = 11$  ( $j_x = 5$ ) y  $N_y = 7$  ( $j_y = 3$ ),  $\Phi_{n_x, n_y}^{(5,3)}(q_x, q_y)$ ; arreglados por modos  $n_x|_0^{10}$  y  $n_y|_0^6$  tal que se cumpla  $n = n_x + n_y$  y  $m = n_x - n_y$ . En cada modo, los píxeles están numerados por las coordenadas  $(q_x|_{-5}^5, q_y|_{-3}^3)$ . El rango de color está en la escala de grises con valores entre  $+1$  para blanco y  $-1$  para negro.

Cualquier imagen sobre una pantalla pixelada rectangular de tamaño  $N_x \times N_y$ , con valores dados por  $F(q_x, q_y)$ , puede ser codificada en los modos cartesianos rectangulares (2.19) mediante el desarrollo

$$\begin{aligned} F_{n_x, n_y} &= \sum_{q_x, q_y} F(q_x, q_y) \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y), \\ F(q_x, q_y) &= \sum_{n_x, n_y} F_{n_x, n_y} \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y), \end{aligned} \quad (2.21)$$

que está garantizada por la linealidad y completéz de la base de funciones unidimensionales de Kravchuk.

## Grupo de Fourier $\mathbf{U}(2)_{\mathbf{F}}$

La cuantización de Schrödinger usual de las coordenadas del espacio fase clásico lleva directo al modelo paraxial de la óptica ondulatoria o a la mecánica cuántica oscilatoria. En una dimensión, los generadores de la doble cobertura del grupo  $\mathbf{Sp}(2, \mathbf{R})$  de transformadas canónicas lineales [10] actúan en funciones del espacio de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ . En dos dimensiones, la cuantización de Schrödinger porta los generadores de  $\mathbf{Sp}(4, \mathbf{R})$ , del cual su subgrupo de Fourier es generado por los operadores cuadráticos  $\bar{F}_0$ ,  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$  y  $\bar{F}_3$ , que son operadores diferenciales de segundo orden actuando en un espacio de Hilbert. La cuantización finita, por otro lado, asigna matrices autoadjuntas de dimensión  $N_x \times N_y$  a las coordenadas del espacio fase.

### Álgebra $\mathfrak{u}(2)_{\mathbf{F}}$

En dos dimensiones, con las coordenadas  $(q_x, q_y) \in \mathbf{R}^2$  y sus correspondientes momentos  $(p_x, p_y) \in \mathbf{R}^2$ , es posible construir diez funciones cuadráticas independientes

$$q_i q'_i, \quad q_i p'_i, \quad p_i p'_i, \quad i, i' \in \{x, y\}, \quad (2.22)$$

que cierran dentro del álgebra simpléctica real  $\mathfrak{sp}(4, \mathbf{R})$ . Cuatro combinaciones lineales de estas funciones generan transformaciones que incluyen la transformada fraccional de

Fourier (TF), de interés en el procesamiento de imágenes,

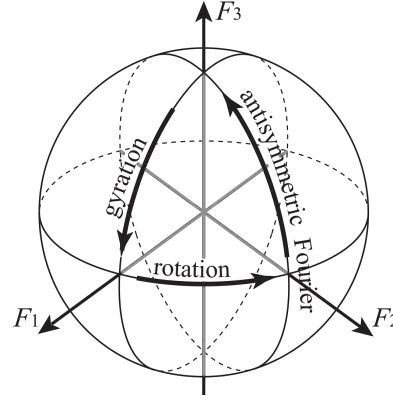
$$\text{TF isotr\u00f3pica} \quad \bar{F}_0 := \frac{1}{4} (p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2), \quad (2.23a)$$

$$\text{TF anisotr\u00f3pica} \quad \bar{F}_1 := \frac{1}{4} (p_x^2 - p_y^2 + q_x^2 - q_y^2), \quad (2.23b)$$

$$\text{giraci\u00f3n} \quad \bar{F}_2 := \frac{1}{2} (p_x p_y + q_x q_y), \quad (2.23c)$$

$$\text{rotaci\u00f3n} \quad \bar{F}_3 := \frac{1}{2} (q_x p_y - q_y p_x) = \frac{1}{2} \bar{M}, \quad (2.23d)$$

donde  $\bar{M} = 2\bar{F}_3$  es el operador de momento angular f\u00edsico y  $\bar{F}_1^2 + \bar{F}_2^2 + \bar{F}_3^2 = \bar{F}_0^2$ .



**Figura 2.4:** Esfera del \u00e1lgebra  $\mathbf{su}(\mathbf{2})$  con los ejes dados por los generadores  $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\}$ . El giro alrededor del eje  $\bar{F}_1$  de manera horaria genera la transformada de Fourier isotr\u00f3pica; el giro alrededor del eje  $\bar{F}_1$  de manera antihoraria genera la transformada de Fourier anisotr\u00f3pica; el giro alrededor del eje  $\bar{F}_2$  de manera antihoraria genera giraciones; y, el giro alrededor del eje  $\bar{F}_3$  de manera antihoraria genera rotaciones.

Sus par\u00e9ntesis de Poisson cierran de la forma,

$$\{\bar{F}_i, \bar{F}_j\} = \epsilon_{ijk} \bar{F}_k; \quad \{\bar{F}_0, \bar{F}_i\} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

y caracterizan el \u00e1lgebra de Fourier  $\mathbf{u}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}} = \mathbf{u}(\mathbf{1})_{\mathbf{F}} \oplus \mathbf{su}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$ , con  $\bar{F}_0$  como centro de la misma. Esta es el sub\u00e1lgebra maximal compacta,  $\mathbf{u}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}} \subset \mathbf{sp}(4, \mathbf{R})$ . En la Fig. 2.4 se muestran las transformaciones generadas por (2.23b) - (2.23d) sobre el espacio lineal del \u00e1lgebra  $\mathbf{su}(\mathbf{2})$ , que deja invariante la esfera  $\bar{F}_1^2 + \bar{F}_2^2 + \bar{F}_3^2 = \bar{F}_0^2$ .

El grupo de Fourier cl\u00e1sico  $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$  de la \u00f3ptica lineal ser\u00e1 empatado por el grupo de "Fourier-Kravchuk"  $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{K}}$  actuando en el espacio de posiciones del arreglo de p\u00edxeles del modelo oscilador finito bidimensional.

## Transformaciones en pantallas

---

En el modelo continuo del oscilador bidimensional, las funciones de onda de Hermite-Gauss pueden ser acomodadas en un arreglo similar al de la Fig. 2.3, solo que en este caso tiene una forma de pirámide invertida, cuenta con el mismo vértice en el estado más básico cuando  $n_x = n_y = 0$ , pero no está acotado por arriba, es decir, el modo total  $n = n_x + n_y$  crece indefinidamente. Ya que el operador  $\bar{F}_0$  conmuta con todos los generadores (2.23b) - (2.23d) del álgebra  $\mathbf{u}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$ , las funciones que porten el mismo número de modo  $n$  se transformarán linealmente entre si bajo la acción de todo el grupo de Fourier  $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$ . Las funciones con el mismo número de modo  $n$  forman multipletes del álgebra  $\mathbf{su}(\mathbf{2})$ , donde el espaciamiento horizontal está dado en saltos de dos unidades definido por  $n_x - n_y =: m|_{-n}^n$ . Esto es equivalente a tener multipletes de spin  $\lambda := \frac{1}{2}n$ , con  $\mu := \frac{1}{2}m$  tomando el papel de la proyección de momento angular en el eje propio de  $\bar{F}_1$ .

En el modelo finito, sin embargo, los generadores del álgebra  $\mathbf{su}(\mathbf{2})_x \oplus \mathbf{su}(\mathbf{2})_y$  pueden ascender o descender de modos sólo en sus direcciones propias, es decir, sólo entre  $n_x$ 's o  $n_y$ 's, pero no horizontalmente; los saltos permitidos son entonces dados por cada  $\mu$  a sus vecinos. En este punto se realiza una *importación de simetría* desde el modelo continuo al modelo discreto [11, 12], para así, poder realizar transformaciones lineales no posibles en este último, esto mediante el uso de coeficientes de combinación lineales propios del caso continuo.



## Rotaciones y giraciones de modos cartesianos

### Rotaciones

De la ecuación (2.23d) se observa que el operador de momento angular físico  $\bar{M}$  es *doméstico* en  $\mathfrak{so}(4)$ , es decir pertenece al álgebra. De la descomposición de subálgebras  $\mathfrak{su}(2)_x \oplus \mathfrak{su}(2)_y$ , las combinaciones de los generadores de Fourier 2.23,  $\bar{F}_0 + \bar{F}_1$  y  $\bar{F}_0 - \bar{F}_1$  son, a su vez, *domésticos* a  $\mathfrak{so}(4)$ , mientras que el generador de rotaciones  $2\bar{F}_3$  es *foráneo* a esta álgebra. Debido a que no se puede completar un grupo discreto de Fourier-Kravchuk  $\mathbf{U}(2)_K$  totalmente doméstico en correspondencia con el grupo de Fourier  $\mathbf{U}(2)_F \subset \mathbf{Sp}(4, \mathbf{R})$ , es necesario *importar* del modelo continuo la transformación faltante.

Ahora se construye el grupo de rotaciones en el arreglo cartesiano rectangular de modos, Ecs. (2.17) - (2.19), importando la transformación del grupo continuo  $\mathbf{SU}(2)$  [13]. La rotación de imágenes debe respetar cada modo  $n = n_x + n_y$  en la base conjunta (2.21), y debe transformar imágenes de entradas reales a salidas reales, esto mientras realiza la combinación lineal de manera correcta de los eigenvalores  $\mu := \frac{1}{2}(n_x - n_y)$ , horizontalmente a través del rombo de estados, Fig. 2.3.

En el modelo continuo, el operador que genera rotaciones está definido como

$$\bar{R}(\theta) := \exp(-i\theta\bar{M}), \quad \bar{M} = 2\bar{F}_3;$$

la importación se hace simplemente pasando los operadores continuos a discretos, es decir

$$\bar{F}_i \rightarrow F_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad \Rightarrow \quad \bar{M} \rightarrow M, \quad \bar{R} \rightarrow R.$$

Se observa entonces que  $R(\theta)$  genera una rotación alrededor del eje de  $\bar{F}_3$  en la esfera de la figura 2.4 por un *doble ángulo*  $2\theta$ . Los eigenvalores de  $F_0$  son invariantes bajo la acción de  $R(\theta)$ ; además, los  $2\lambda + 1$  eigenvalores de  $F_1$ , caracterizados por  $\mu$ , serán combinados linealmente mediante coeficientes de combinación dados por las funciones *d pequeñas* de Wigner,  $d_{\mu,\mu}^\lambda(2\theta)$  [3, 13, 14].

La acción del operador  $R$  sobre los estados del oscilador finito  $\Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}$  de la Ec. (2.19) debe hacerse acorde con el conteo adecuado de los modos en el romboide de la

Fig. 2.4. Se define entonces, como una *conjetura*, esta acción como

$$\mathbf{R}(\theta) : \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) := \sum_{n'_x + n'_y = n} d_{\mu, \mu'}^{\lambda(n)}(2\theta) \Phi_{n'_x, n'_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y), \quad (3.1)$$

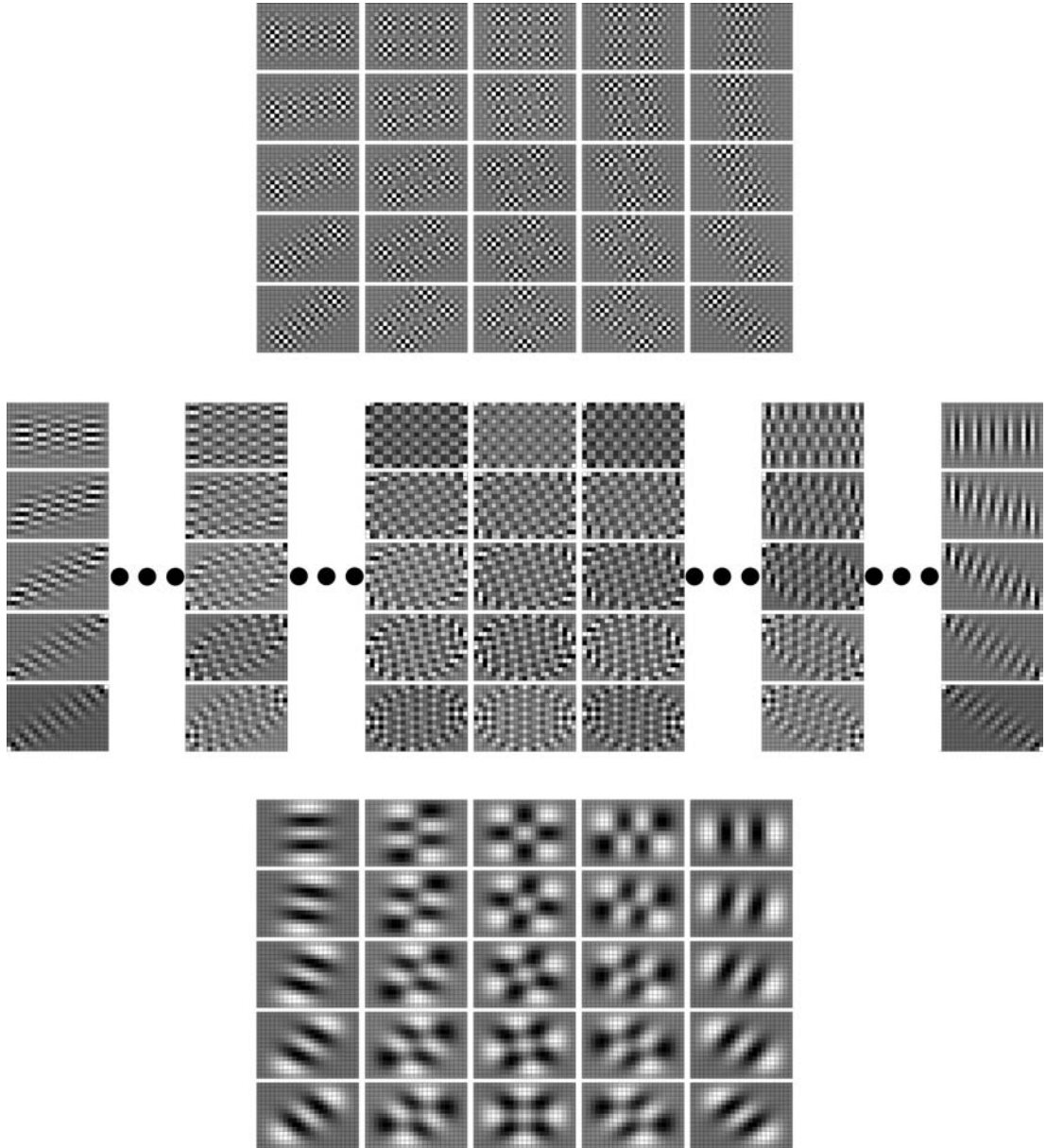
donde los valores de spin  $\lambda(n)$  y sus respectivas proyecciones  $\mu(j_x, j_y; n_x, n_y)$  deben ser examinados y definidos cuidadosamente. El romboide de modos contiene tres distintivos intervalos para el nivel  $n$  que deben estar en concordancia con el momento angular correcto  $\lambda$  de todos los multipletes horizontales importados de  $\mathfrak{su}(2)$ .

Asumiendo que  $j_x > j_y$ ,<sup>1</sup> las siguientes condicionales sobre  $\lambda(n)$ ,  $\mu$  y  $\mu'$  son establecidas:

$$\begin{aligned} \text{triángulo inferior:} & \quad \begin{cases} \lambda(n) = \frac{1}{2}n, \\ \mu = \frac{1}{2}(n_x - n_y), \\ \mu' = \frac{1}{2}(n'_x - n'_y), \end{cases} \\ 0 \leq n \leq 2j_y, & \\ \\ \text{romboide medio:} & \quad \begin{cases} \lambda(n) = j_y, \\ \mu = j_y - n_y, \\ \mu' = j_y - n'_y, \end{cases} \\ 2j_y < n < 2j_x, & \\ \\ \text{triángulo superior:} & \quad \begin{cases} \lambda(n) = j_x + j_y - \frac{1}{2}n, \\ \mu = \frac{1}{2}(n_x - n_y) - j_x + j_y, \\ \mu' = \frac{1}{2}(n'_x - n'_y) - j_x + j_y. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Los primeros dos casos se traslapan, en realidad, para  $n = 2j_y$  y los segundos dos casos se traslapan para  $n = 2j_x$ , donde se decidió que los triángulos cargaran con estos modos. Cuando  $j_x = j_y$ , sólo los dos triángulos están presentes y se traslapan para  $n = 2j_x = 2j_y = 2j$  [6]. En la Figura 3.1 se muestra la rotación de modos cartesianos rectangulares seleccionados  $\Phi_{n_x, n_y}^{(5,3)}$  bajo la acción de  $\mathbf{R}(\theta)$  para  $\theta = 0, \frac{1}{8}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi$ . De abajo hacia arriba, rotación de los modos  $n = 4$ ,  $n = 18$  y  $n = 32$ . Se nota que para rotaciones de modos en el triángulo inferior, la rotación sucede en sentido horario; para el rombo medio, la rotación sucede para modos en la mitad izquierda en sentido antihorario, para modos en la mitad derecha en sentido horario; para el triángulo superior, la rotación sucede en sentido antihorario. En la sección §3.2 se realizará la transferencia de imágenes reales a la base de modos cartesianos rectangulares (2.21), para posteriormente aplicarle rotaciones mediante  $\mathbf{R}(\theta)$ .

<sup>1</sup>El caso  $j_y > j_x$  es su análogo espejo, es decir, basta con hacer el intercambio  $j_x \leftrightarrow j_y$ ,  $n_x \leftrightarrow n_y$ .



**Figura 3.1:** Rotaciones de modos cartesianos rectangulares seleccionados de  $\Phi_{n_x, n_y}^{(5,3)}$  bajo la acción de  $R(\theta)$  para  $\theta = 0, \frac{1}{8}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi$ . De abajo hacia arriba, rotación de los modos  $n = 4, n = 18$  y  $n = 32$ . En cada bloque, de arriba hacia abajo: rotaciones sucesivas de  $\theta$ ; de izquierda a derecha: modos acomodados de  $m = -n$  hasta  $m = n$ .

### Completación del grupo $\mathbf{U}(2)_{\mathbf{K}}$

Habiendo importado la representación unitaria del grupo de rotaciones en los modos cartesianos rectangulares, y teniendo identificado al grupo doméstico de transformadas fraccionales de Fourier, ahora es posible completar el grupo de Fourier-Kravchuk  $\mathbf{U}(2)_{\mathbf{K}}$ .

En el modelo continuo, los operadores de número para cada coordenada,  $\bar{N}_x$  y  $\bar{N}_y$ , generan transformaciones fraccionales de Fourier [4] a través de la acción de

$$\bar{\mathcal{F}}_k(\beta_k) := \exp(-i\beta_k \bar{N}_k), \quad k = x, y,$$

sobre las funciones base de Hermite-Gauss del oscilador continuo. Esta acción multiplica por una fase  $\exp(-in_k\beta_k)$  a estas funciones. En el caso del modelo finito, existen dos formas de crear transformaciones fraccionales de Fourier, una *simétrica* y otra *anti-simétrica*; la transformada fraccional simétrica de Fourier-Kravchuk está dada por la acción de

$$\mathbf{K}_S(\chi) := \exp(-2i\chi F_0), \quad (3.3)$$

la cual es generada por  $F_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{H}_x + \mathbf{H}_y)$ , Ec. (2.23a). Entonces  $\mathbf{K}_S$  actúa en los modos cartesianos rectangulares de la forma

$$\mathbf{K}_S(\chi) : \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) = \exp[-i\chi(n_x + n_y)] \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y), \quad (3.4)$$

es decir, sólo multiplica por una fase a la función original y además conmuta con todas las transformaciones del grupo de Fourier.

Por otra parte, una rotación de doble ángulo  $2\beta$  alrededor del eje propio de  $F_1$  es generada por  $F_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{H}_x - \mathbf{H}_y)$ , Ec. (2.23b). La acción de este generador

$$\mathbf{K}_A(\beta) := \exp(-2i\beta F_1), \quad (3.5)$$

es la transformada fraccional anti-simétrica de Fourier-Kravchuk que, aplicada a los modos cartesianos rectangulares resulta

$$\mathbf{K}_A(\beta) : \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) = \exp[-i\beta(n_x - n_y)] \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y). \quad (3.6)$$

Tanto  $\mathbf{K}_S(\chi)$  como  $\mathbf{K}_A(\beta)$  son *domésticos* en el subálgebra  $\mathbf{su}(2)_x \oplus \mathbf{su}(2)_y$  pero se combinan adecuadamente con el grupo de rotaciones importado.

## Giraciones

### Caso continuo

En el modelo continuo del oscilador, las *giraciones* por un ángulo  $\gamma$  alrededor del eje propio de  $\bar{F}_2$  son generadas por la Ec. (2.23c). Para el caso cuando  $\gamma = \frac{1}{4}\pi$ , esta transformación intercambia los modos de cartesianos Hermite-Gauss por los modos radiales de Lagurre-Gauss y que pueden ser realizados con arreglos ópticos simples en el régimen paraxial [15, 16, 17]. Detalladamente, se trata de la serie de transformaciones sobre la esfera del álgebra  $\mathbf{su}(2)$ ; primero rotación por un ángulo de  $\frac{1}{2}\pi$  alrededor del eje propio de  $\bar{F}_3$ , segundo, una transformada fraccional anti-simétrica de Fourier por un ángulo  $\gamma$  alrededor del nuevo eje propio de  $\bar{F}_1$  y, finalmente, una transformada fraccional anti-simétrica inversa de Fourier por  $-\frac{1}{2}\pi$  alrededor del nuevo eje propio de  $\bar{F}_3$ ,

$$\bar{G}(\gamma) := \bar{F}_A \left( \frac{1}{4}\pi \right) \bar{R}(\gamma) \bar{F}_A \left( -\frac{1}{4}\pi \right). \quad (3.7)$$

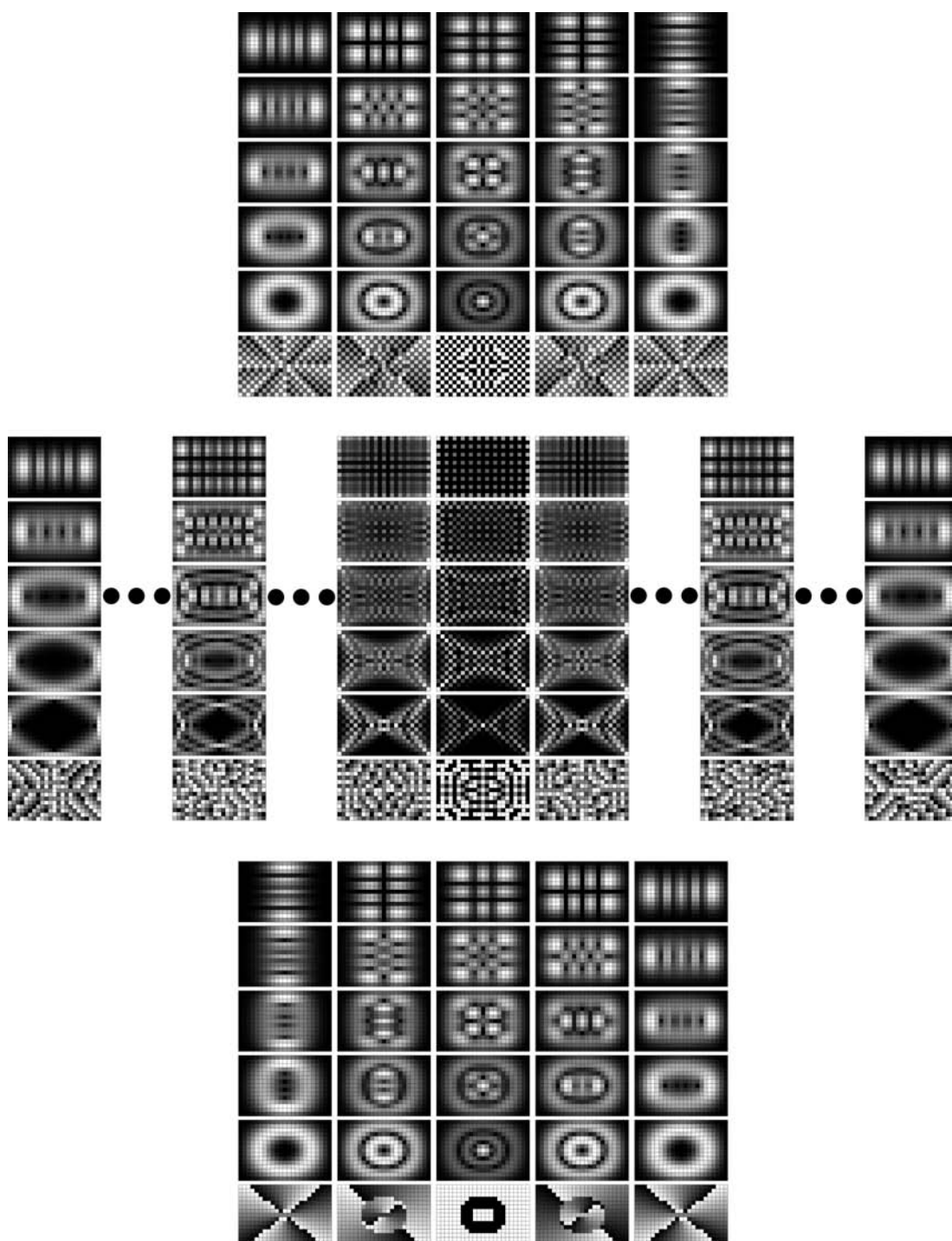
### Caso finito

Ahora se puede *importar* las giraciones al modelo finito a través del reemplazo  $\bar{F}_A \rightarrow F_A$ , Ecs. (3.5) y (3.6) [2]. La acción de la giración en los modos cartesianos rectangulares está dado entonces por

$$G(\gamma) : \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) := e^{-i\frac{1}{4}\pi(n_x - n_y)} \sum_{n'_x + n'_y = n} d_{\mu, \mu'}^{\lambda(n)}(2\gamma) e^{+i\frac{1}{4}\pi(n'_x - n'_y)} \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y), \quad (3.8)$$

donde  $\lambda(n)$ ,  $\mu$  y  $\mu'$  obedecen las mismas reglas de combinación que la rotación de modos, Ec. (3.2). Este conjunto de funciones (3.8) forma, al igual que en el caso cartesiano rectangular (2.19), una base completa y ortonormal para representar cualquier imagen pixelada. En la Figura 3.2 se muestra la giración de modos cartesianos rectangulares seleccionados  $\Phi_{n_x, n_y}^{(5,3)}(q_x, q_y)$  bajo la acción de  $G(\gamma)$  para  $\gamma = 0, \frac{1}{16}\pi, \frac{1}{8}\pi, \frac{3}{16}\pi, \frac{1}{4}\pi$ . De abajo hacia arriba, giración de los modos  $n = 4, n = 18$  y  $n = 32$ . Para  $\gamma = \frac{1}{4}\pi$ , se muestran las fases y valores absolutos del modo.

Cuando  $\gamma = \frac{1}{4}\pi$ , la Ec. (3.8) define funciones caracterizadas por el modo total  $n = n_x + n_y$  y un número entero que identificamos como un “momento angular (rectangular)”  $m = 2\mu = n_x - n_y$ , tal que está constreñido de la forma  $|\mu| < \lambda(n)$  por las reglas de



**Figura 3.2:** Giraciones de modos cartesianos rectangulares seleccionados de  $\Phi_{n_x, n_y}^{(5,3)}$  bajo la acción de  $G(\gamma)$  para  $\gamma = 0, \frac{1}{16}\pi, \frac{1}{8}\pi, \frac{3}{16}\pi, \frac{1}{4}\pi$ . De abajo hacia arriba, giración de los modos  $n = 4$ ,  $n = 18$  y  $n = 32$ . Para cuando  $\gamma = \frac{1}{4}\pi$ , se muestran las fases y valores absolutos del modo.

combinación de (3.2). Estas nuevas funciones discretas *angulares* se definen como

$$\begin{aligned}\Lambda_{n,m}^{(j_x,j_y)}(q_x, q_y) &:= e^{(-i\frac{1}{4}\pi(n_x-n_y))} \sum_{n'_x+n'_y=n} d_{\mu,\mu'}^{\lambda(n)} \left(\frac{1}{2}\pi\right) e^{(+i\frac{1}{4}\pi(n'_x-n'_y))} \Phi_{n_x,n_y}^{(j_x,j_y)}(q_x, q_y) \\ &= \Lambda_{n,-m}^{(j_x,j_y)}(q_x, q_y)^*.\end{aligned}\tag{3.9}$$

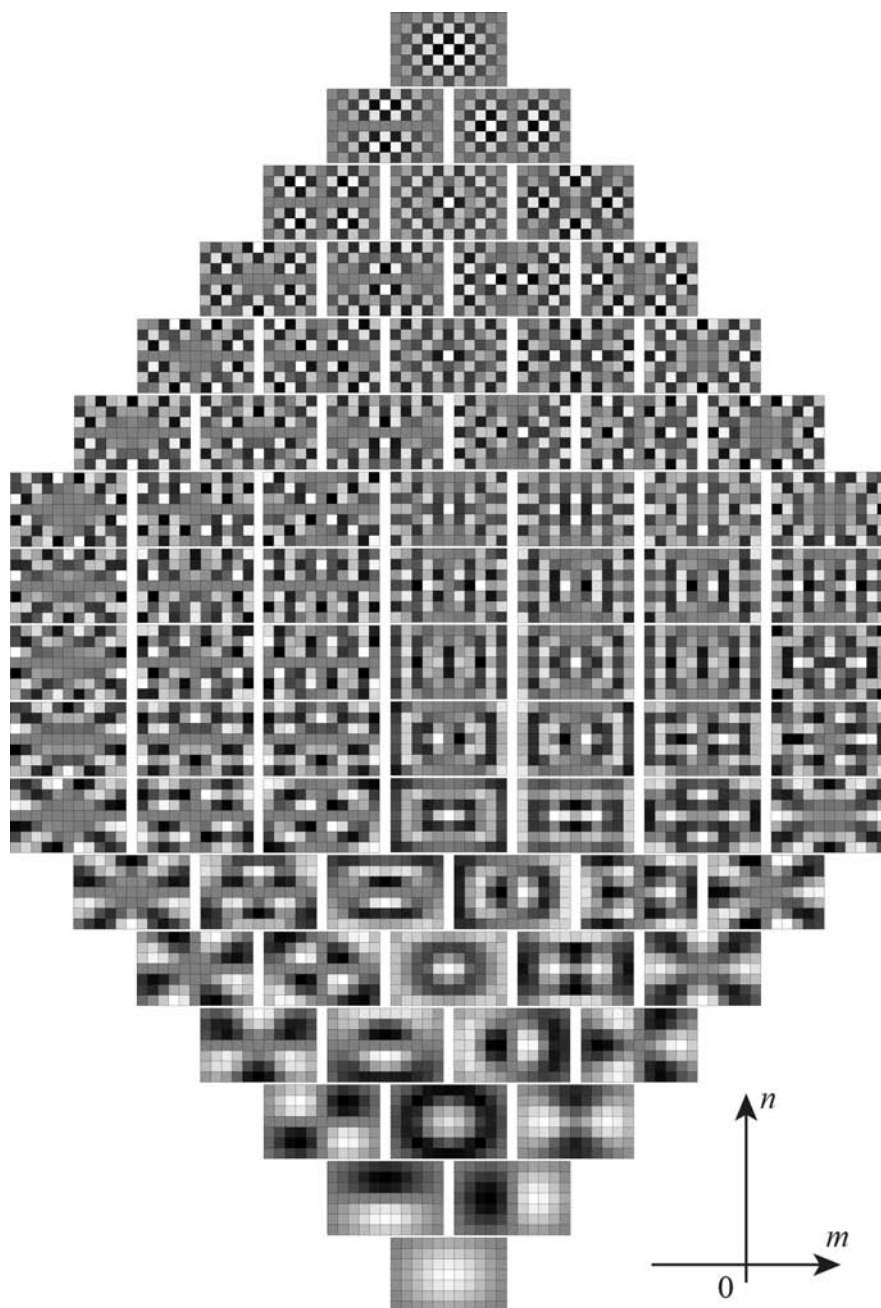
Este conjunto de funciones, (3.9), a diferencia de las funciones de Kravchuk (2.18), son evaluadas complejas.

En el caso cuando  $j_x = j_y = j$ , estas funciones se reducen al caso cuadrado  $\Lambda_{n,m}^{(j)}(q_x, q_y)$ , llamadas funciones de Laguerre-Kravchuk [2] y, cuya contraparte continua son los conocidos modos de Laguerre-Gauss. Estas nuevas funciones (3.9) también son ortogonales y completas sobre las pantallas rectangulares

$$\sum_{n,m} \Lambda_{n,m}^{(j_x,j_y)}(q_x, q_y)^* \Lambda_{n,m}^{(j_x,j_y)}(q'_x, q'_y) = \delta_{q_x,q'_x} \delta_{q_y,q'_y},\tag{3.10a}$$

$$\sum_{q_x,q_y} \Lambda_{n,m}^{(j_x,j_y)}(q_x, q_y)^* \Lambda_{n',m'}^{(j_x,j_y)}(q_x, q_y) = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'},\tag{3.10b}$$

debido a que son obtenidas de los modos cartesianos rectangulares a través de transformaciones unitarias (y reversibles) de  $\mathbf{su}(2)_{\mathbf{F}}$ . Claramente, a pesar de que la noción de un momento angular bien definido no es del todo válido como aquellos descritos en [2] para el caso cuadrado, la figura 3.3 muestra una cara reconocible de estos modos acomodados en un patrón romboidal que, a su vez, contiene los tres intervalos descritos por las reglas (3.2).



**Figura 3.3:** Modos rectangulares de Laguerre-Kravchuk  $\Lambda_{n,m}^{(5,3)}(q_x, q_y)$  acomodados en forma romboidal por el número de modo  $n$  y el “momento angular”  $m$ . Debido a que estos modos son nativamente complejos, la parte derecha, para  $m \geq 0$  muestra la parte real y, la parte izquierda, para  $m < 0$ , muestra la parte imaginaria. Los modos con  $m = 0$  son intrínsecamente reales.



## Rotación de imágenes

El modelo de oscilador finito en dos dimensiones permite representar campos de onda bidimensionales discretos y finitos, es decir, imágenes *pixeladas*. Dada una imagen discreta, su descomposición en términos de las funciones de onda cartesianas rectangulares de momento permite, en particular, la generación de un algoritmo de rotación unitaria de la imagen. Este algoritmo de rotación, propio de **su(2)** §3.1.1, está basado fundamentalmente en la teoría de álgebras de Lie, constituye, además, una alternativa computacional a los métodos existentes de rotación digital de imágenes basados en métodos de interpolación hechos a partir de la transformada rápida de Fourier [22] o convoluciones [23].

En esta sección se detalla esta implementación. Existen dos variantes: una primera basada en la rotación de la base cartesiana de la ecuación (3.1); una segunda que se obtiene mediante la rotación de la base cartesiana angular de la ecuación (3.9).

### Kernel de rotación

#### Base cartesiana

El comportamiento de las funciones onda cartesianas  $\Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}$  bajo la acción del operador  $R$  en (3.1), sugiere un mecanismo para la rotación de una señal bidimensional discreta: Inicialmente la señal de entrada se descompone en una combinación lineal de las funciones de onda cartesianas, es decir se cambia de base. Cada componente del desarrollo es transformada acorde al operador de rotación  $R$ . Finalmente se reconstruye la señal a partir de estas componentes *rotadas*.

Suponiendo un campo  $F(q_x, q_y)$  como una imagen monocromática discreta y finita, es decir, un arreglo rectangular de números reales que representa una escala de grises en la cuál está codificada la imagen original sin rotar. La descomposición de esta imagen en términos de las funciones de onda cartesianas implica el cálculo de los coeficientes dados por la ecuación (2.21), que se reproduce aquí

$$F_{n_x, n_y} = \sum_{q_x, q_y} F(q_x, q_y) \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y),$$

la cuál aplicando el operador de rotación  $R(\theta)$  resulta en

$$R(\theta) : F_{n_x, n_y} = \sum_{q_x, q_y} \sum_{n'_x + n'_y = n} F(q_x, q_y) d_{\mu, \mu'}^{\lambda(n)}(2\theta) \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) =: F_{n_x, n_y}^{(\theta)}, \quad (3.11)$$

donde  $\mu(n_x, n_y)$  es la forma de contar modos introducida en (3.2). De (3.11) se obtiene la información codificada de la imagen rotada en el espacio de modos  $\{n_x, n_y\}$ . Esta imagen se reconstruye en el espacio de posiciones  $\{q_x, q_y\}$  de la forma

$$\begin{aligned} F^{(\theta)}(q_x, q_y) &= \sum_{n_x + n_y = n} \sum_{q_x, q_y} \sum_{n'_x + n'_y = n} F(q_x, q_y) \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) d_{\mu, \mu'}^{\lambda(n)}(2\theta) \Phi_{n'_x, n'_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y), \\ &= \sum_{n_x + n_y = n} F_{n_x, n_y}^{(\theta)} \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y). \end{aligned} \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) se identifica entonces como el *kernel de rotación* de imágenes en el subgrupo de Fourier  $\mathbf{su}(2)_{\mathbf{F}}$  en (2.23).

De las ecuaciones (2.21), (3.11) y (3.12) se deduce que la información contenida en cada pixel de la imagen rotada  $F^{(\theta)}(q_x, q_y)$  depende de la información de todos y cada uno de los pixeles de la imagen original  $F(q_x, q_y)$ ; exceptuando algunos casos para  $\theta = 0, \frac{1}{2}\pi, 2\pi, \frac{3}{2}\pi$ , donde las  $d$ 's de Wigner son diagonales o antidiagonales. De modo que, bajo la rotación, la información completa original sólo es 'redistribuida' dentro del arreglo de pixeles, pero no pierde información pues es reversible.

La rotación de imágenes propuesta también es unitaria, esto como consecuencia de la ortonormalidad de las funciones de onda cartesianas, ecuaciones (2.19).

### Base cartesiana angular

A diferencia de la rotación (3.11) que rota directamente los modos cartesianos mediante combinaciones lineales de funciones  $d$ 's pequeñas de Wigner, la segunda variante de rotación es obtener los modos cartesianos angulares de la imagen  $F(q_x, q_y)$  mediante la expansión

$$\hat{F}_{n, m} = \sum_{q_x, q_y} F(q_x, q_y) \Lambda_{n, m}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y), \quad (3.13)$$

al aplicar el operador de rotación  $R(\theta)$  a (3.13), sólo se multiplica a la función por una

fase dependiente del ángulo de rotación  $\theta$  de la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\theta) : \hat{F}_{n,m} &= \sum_{q_x, q_y} F(q_x, q_y) \exp(-i(2F_3)\theta) \Lambda_{n,m}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) \\
&= \exp(-im\theta) \sum_{q_x, q_y} F(q_x, q_y) \Lambda_{n,m}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) \\
&= \exp(-im\theta) \hat{F}_{n,m} := \hat{F}_{n,m}^{(\theta)}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

De (3.14) se obtiene la información codificada de la imagen rotada en el espacio de modos angulares  $\{n, m\}$ . Esta imagen se reconstruye en el espacio de posiciones  $\{q_x, q_y\}$  de la forma

$$F^{(\theta)}(q_x, q_y) = \sum_{n,m} \hat{F}_{n,m}^{(\theta)} \Lambda_{n,m}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y). \tag{3.15}$$

Es posible entonces tomar cualquiera de las dos variantes de rotación de imágenes, Ecs. (3.12) y (3.15), y generar un algoritmo de rotaciones funcional.

Además, la rotación de imágenes es concatenable, es decir, para  $n$  rotaciones sucesivas estas se componen de la forma

$$\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\theta') : \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) = \mathbf{R}(\theta + \theta') : \Phi_{n_x, n_y}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y), \tag{3.16}$$

$$\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\theta') : \Lambda_{n,m}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y) = \mathbf{R}(\theta + \theta') : \Lambda_{n,m}^{(j_x, j_y)}(q_x, q_y), \tag{3.17}$$

tanto en las funciones de onda cartesianas rectangulares o angulares.

El costo computacional de esta rotación es alto, debido a que involucra cuatro sumas anidadas, además la evaluación de las funciones de Kravchuk y de las funciones  $d$ 's de Wigner necesarias para cada coeficiente de (3.12).

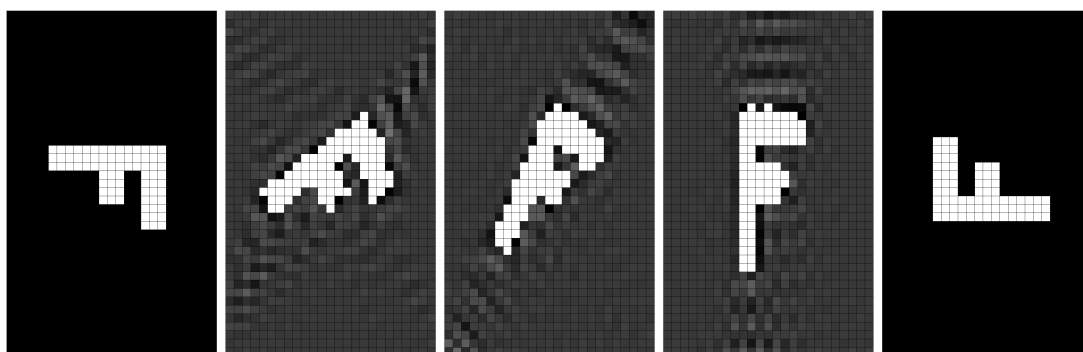
El kernel de rotación es un arreglo tetradimensional de números reales, que corresponden al ángulo  $\theta$  para una imagen de tamaño  $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ . El orden del costo de cálculo es  $\mathcal{O}(N_x^2 \times N_y^2)$ . En el Apéndice A se detalla más profundamente el algoritmo computacional, su costo de cálculo y su rendimiento en la máquina de procesamiento ocupada.

En las figuras 3.4 y 3.5 se muestran las rotaciones concatenadas de dos letras. En la primera figura, 3.4, se muestra la rotación de una letra “F” en una pantalla de

tamaño  $(41 \times 25)$ ;<sup>1</sup> esta imagen está en ‘alto contraste’, es decir, originalmente sólo contiene píxeles de valor 0 para el color negro y píxeles de valor 1 para el color blanco en la escala de grises. Las sucesivas rotaciones se obtuvieron concatenando los ángulos de rotación  $\theta = \frac{1}{6}\pi \rightarrow \theta' = \frac{1}{3}\pi \rightarrow \theta'' = \frac{1}{2}\pi \rightarrow \theta''' = \pi$ , es decir, se obtuvo la imagen final extremo derecha de la cadena de concatenaciones

$$\begin{aligned}
 (1) & F^{(0)}(q_x, q_y) \rightarrow \\
 (2) & F^{(\pi/6)}(q_x, q_y) = R(\frac{1}{6}\pi) : F^{(0)}(q_x, q_y) \rightarrow \\
 (3) & F^{(\pi/3)}(q_x, q_y) = R(\frac{1}{6}\pi) : F^{(\pi/6)}(q_x, q_y) \rightarrow \\
 (4) & F^{(\pi/2)}(q_x, q_y) = R(\frac{1}{3}\pi) : F^{(\pi/3)}(q_x, q_y) \rightarrow \\
 (5) & F^{(\pi)}(q_x, q_y) = R(\frac{1}{2}\pi) : F^{(\pi/2)}(q_x, q_y),
 \end{aligned}$$

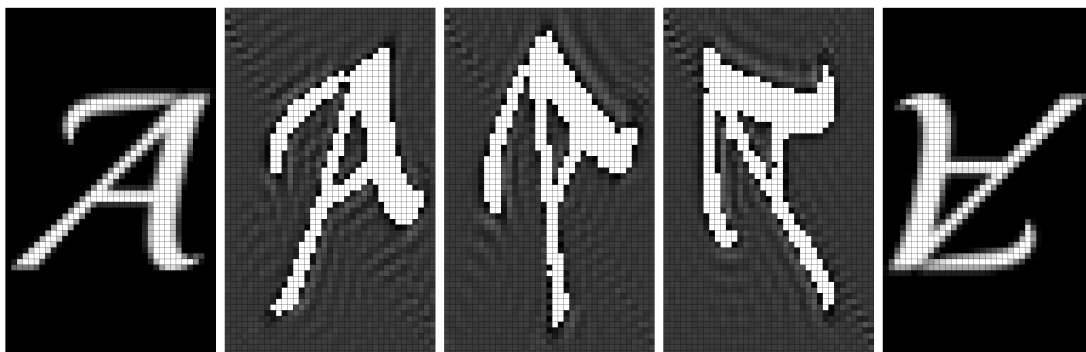
que resultaría idéntico a realizar la rotación  $F^{(\pi)}(q_x, q_y) = R(\pi) : F^{(0)}(q_x, q_y)$ . La reconstrucción final en  $\pi$  sería imposible de lograr con cualquier algoritmo de rotación interpolativo. En  $\frac{1}{2}\pi$  se nota una letra ‘F’ *comprimida* en el eje horizontal y *expandida* en el eje vertical, debido a que debe acomodar la información original en un cambio de escala. Se notan además las intrínsecas oscilaciones tipo Gibbs propias del método de rotación, estas oscilaciones contienen píxeles con valores negativos, es decir, para los ángulos  $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi$ , la escala de grises se ajustó para que el color negro sea al valor mínimo absoluto y el color blanco sea el valor máximo absoluto; todo valor entre éstos será un tono de gris.



**Figura 3.4:** Rotación de la letra “F” de tamaño  $(41 \times 25)$ . De izquierda a derecha, se concatenaron los operadores de rotación para los ángulos  $\theta = 0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi$ .

<sup>1</sup>El eje  $x$  es vertical y el eje  $y$  horizontal, esto debido a que el software utilizado para general las rotaciones toma las filas como el eje  $x$  y las columnas como el eje  $y$ .

En la figura 3.5 se muestra la rotación de una letra “A” estilizada de tamaño  $(61 \times 37)$  en ‘bajo contraste’, es decir, existen píxeles con valores de la imagen original en la escala de grises entre 0 y 1, visiblemente posicionados en los bordes. La rotación concatenada cumple exactamente con el análisis hecho de la letra “F”.



**Figura 3.5:** Rotación de la letra “A” de tamaño  $(61 \times 37)$ . De izquierda a derecha, se concatenaron los operadores de rotación para los ángulos  $\theta = 0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi$ .

Del análisis numérico de las imágenes anteriores rescatamos que para todas las rotaciones el valor absoluto al cuadrado de la suma de los valores del campo, píxeles, que componen la imagen se conserva, es decir

$$\begin{aligned} \sum_{q_x, q_y} |F^{(0)}(q_x, q_y)|^2 &= \sum_{q_x, q_y} |F^{(\pi/6)}(q_x, q_y)|^2 = \\ \sum_{q_x, q_y} |F^{(\pi/3)}(q_x, q_y)|^2 &= \sum_{q_x, q_y} |F^{(\pi/2)}(q_x, q_y)|^2 = \sum_{q_x, q_y} |F^{(\pi)}(q_x, q_y)|^2. \end{aligned}$$

La conservación de información cuantificada de la forma anterior es una manera directa de probar que la transformación de imágenes presentada es unitaria. Existen otros métodos, basados en cálculo de entropía de la información, que seguramente probarían lo mismo desde otro punto de vista propio de la teoría de la información [26].

## Conclusiones

---

Se estudió la acción del grupo de Fourier  $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$  sobre los espacios de representación discretos del álgebra  $\mathfrak{so}(\mathbf{4})$  mediante la importación de las simetrías del modelo continuo al modelo discreto.

Se introdujeron exitosamente dos nuevas bases de funciones de onda rectangulares, las funciones cartesianas de Kravchuk (2.18) y las funciones de “momento angular” cartesianas de Laguerre-Kravchuk (2.19). Ambas son generalización de los casos cuadrados, tanto continuos (Hermite y Laguerre-Gauss) como discretos [6]. Aunque la generalización es directa, no es trivial, debido a la forma seccionada de contar los modos, Ec. (3.2). Con las nuevas bases introducidas, se completó el grupo de Fourier sobre bases discretas a partir de la importación de las simetrías del modelo continuo.

En sistemas continuos, los elementos del grupo de Fourier  $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}} = \mathbf{U}(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{SU}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$  pueden ser parametrizados por un ángulo  $\chi$  de la subálgebra  $\mathbf{U}(\mathbf{1})$ , que corresponde a la transformada fraccional simétrica de Fourier, la cuál conmuta con todas las transformaciones de  $\mathbf{SU}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$ , parametrizado por los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \phi)$  como

$$\bar{D}(\chi; \psi, \theta, \phi) = \exp(-i\chi\bar{L}_0) \exp(-i\psi\bar{L}_3) \exp(-i\theta\bar{L}_2) \exp(-i\phi\bar{L}_2). \quad (4.1)$$

En sistemas finitos (pantallas pixeladas), el grupo  $\mathbf{U}(\mathbf{2})_{\mathbf{F}}$  corresponde a la realización del subgrupo doméstico de Fourier-Kravchuk, además de la importación de rotaciones y giraciones de  $\mathfrak{su}(\mathbf{2})$

$$\begin{aligned} D(\chi; \phi, \theta, \phi) &= K_s\left(\frac{1}{2}\chi\right) K_A\left(\frac{1}{2}\psi\right) G\left(\frac{1}{2}\theta\right) K_A\left(\frac{1}{2}\psi\right) \\ &= K_s\left(\frac{1}{2}\chi\right) K_A\left(\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{4}\pi\right) R\left(\frac{1}{2}\theta\right) K_A\left(\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{2}\pi\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se comprobó que la acción del grupo de Fourier sobre todas las imágenes en pantallas

---

rectangulares es unitaria y reversible, por tanto, no hay pérdida de información bajo estas transformaciones. El algoritmo presentado para rotar imágenes, se insiste, no es el más rápido, de hecho, es el más lento debido a la dependencia de cada pixel transformado respecto de todos los pixeles en la imagen original (vease el Apéndice A para un detallado análisis del rendimiento computacional). Esta forma de rotar, al ser unitaria, involucra oscilaciones tipo Gibbs que se distribuyen sobre la pantalla. En experimentos donde se muestree perfiles de intensidad rectangulares sobre sensores CCD, las funciones discretas parecen ser más adecuadas para el análisis que aquellas aproximaciones de funciones de HG [24].

La introducción de las funciones de “momento angular” rectangulares de Laguerre-Kravchuk predice un mapeo unitario entre diferentes modelos de oscilador, cartesiano y radial. Cuando la pantalla original es cuadrada, el mapeo lleva a una pantalla circular [25], cuando la pantalla original es rectangular, el mapeo se estimaba que llevaría a una pantalla anular. Esta conjetura basada en la hipótesis de que un acoplamiento covariante entre la base rectangular de modos cartesianos de Kravchuk (2.19) y coeficientes de Clebsch-Gordan  $C_{\mu,\mu',m}^{j_x,j_y,\rho}$ . Se proponía que era suficiente generar el mapeo uno a uno entre ambos espacios de representación del oscilador, cartesiano rectangular a radial anular, ya que ambas representaciones tienen el mismo número de pixeles, que sería el análogo directo del caso cuadrado-circular. Al comprobarse que esta hipótesis, aunque era covariante y computacionalmente viable, no reproducía imágenes fielmente y no era posible la reducción al caso cuadrado-circular, se concluyó que era necesario introducir las funciones de onda rectangulares con momento angular definido (Laguerre-Kravchuk) (3.9), conclusión que dio paso a toda la investigación y resultados presentados en este trabajo.

## Algoritmo de rotación de imágenes

---

En este apéndice se detalla la elaboración del algoritmo de rotación de imágenes pixeladas en pantallas rectangulares. El algoritmo está basado en la ecuación (3.15).

El software ocupado fue *Wolfram Mathematica*® en su versión 10. Se ocupó este software debido a su entorno de programación amigable y a su alta capacidad de graficación, además de que su *kernel de cálculo* pueden ser optimizado para distribuir la carga computacional en paralelo sobre los procesadores de la PC con que se cuenta.

La máquina sobre la cuál se realizó todo el proyecto computacional está estructurada en su parte de prestaciones de cálculo numérico de la siguiente forma: 1 procesador Intel Core i7-4770 con 4 núcleos reales y 8 núcleos virtuales; 16 GB de memoria RAM DDR3; 1 tarjeta de video NVidia GeForce GTX 750Ti con 2 GB de RAM.

Según estimaciones hechas durante los cálculos de las rotaciones de las figuras 3.4 y 3.5, los tiempos de cálculo para cada rotación fueron:

- 12.5 horas para el arreglo rectangular de  $41 \times 25$  pixeles de la figura 3.4,
- 78 horas para el arreglo rectangular de  $61 \times 37$  pixeles de la figura 3.5,

con lo cual se observa que el tiempo de cálculo crece aproximadamente como se estimaba: del orden de  $\mathcal{O}(N_x^2 \times N_y^2)$ . Cada rotación consumió alrededor de 5 GB de memoria durante todo el proceso, además de requerir entre 32 % y 63 % de CPU en sus 16 núcleos, tanto reales como virtuales. El consumo de CPU se programó para que fuera *Mathematica* quien decidiera en que momento exigir más o menos del poder de procesamiento de los núcleos. Al ser una máquina de trabajo diversificada y no un clúster de cómputo dedicado, era muy arriesgado exigirle un consumo de 100 % del CPU en todo momento.



## Entradas

Los únicos parámetros de entrada necesarios son los tamaños de la imagen dados por  $j_x = N_x/2$ ,  $j_y = N_y/2$ ; el ángulo (fijo) para las funciones  $d$ -pequeñas de Wigner,  $\beta = \pi/2$ ; el ángulo de rotación  $\theta$ ; y dos cantidades definidas como  $\eta = j_x + j_y$  y  $\nu = j_x - j_y$ .

```

jx = Nx/2;
jy = Ny/2;
beta = pi/2;
theta = angulo a rotar;
eta = jx + jy;
nu = jx - jy;

```

Toda imagen que se rote está definida por una matriz con entradas reales de valores en una escala de grises, entre 0 y 1, de la forma

$$F = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,N_y} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N_x,1} & f_{N_x,2} & \cdots & f_{N_x,N_y} \end{pmatrix}, \quad f_{i,j} \in [0,1] \quad (\text{A.1})$$

donde las filas representan el eje  $x$  de la imagen y las columnas el eje  $y$ , por tanto, si tomamos  $j_x > j_y$ , la imagen será un rectángulo vertical.

Se importa entonces la imagen desde un archivo externo con formato `.dat` que contiene las filas y columnas con los valores (A.1).

```
img = Import["Name_of_F.dat", "Table"];
```

Con lo anterior la imagen queda guardada en la memoria RAM y está lista para ser transformada.

## Cálculo de las funciones de transformación

### Matrices de Kravchuk

Para el cálculo de las matrices de Kravchuk para cada coordenada se hace uso de las relaciones de recursión de las funciones de Kravchuk,

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= 2^{j_z} \sqrt{\binom{2j_z}{j_z + z}} \\
\Phi_2 &= \frac{2z}{\sqrt{2j_z}} \Phi_1 = \frac{2^{j_z+1/2} z}{\sqrt{j_z}} \sqrt{\binom{2j_z}{j_z + z}} \\
&\vdots \\
\Phi_k &= \frac{2z}{\sqrt{(2+2j_z-k)(-1+k)}} \Phi_{k-1} - \sqrt{\frac{(3+2j_z-k)(-2+k)}{(2+2j_z-k)(1-k)}} \Phi_{k-2}, \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

con  $z \in \{x, y\}$ . Para cada valor de  $z$  existen  $2j_z + 1$  valores calculados, es decir, se genera un arreglo cuadrado de  $(2j_z + 1)^2$  valores en la matriz de Kravchuk.

Entonces se crean dos matrices cuadradas  $K_x(a, b)$  y  $K_y(a, b)$ , con  $a$  las filas y  $b$  las columnas de la matriz; en seguida se almacenan los valores calculados.

```

Kx = Array[PHIx, {2 jx + 1, 2 jx + 1}];
Ky = Array[PHIy, {2 jy + 1, 2 jy + 1}];

For[z = -jz, z <= jz, z++,
  Clear[ph];
  ph[k_] :=
  ph[k] =
  N[(2 z)/Sqrt[(2 + 2 jz - k) (-1 + k)]] ph[k - 1] -
  N[Sqrt[((3 + 2 jz - k) (-2 + k))/((2 + 2 jz - k) (-1 + k))]]
  ph[k - 2];
  ph[1] = N[2^-jz Sqrt[Binomial[2 jz, jz + z]]];
  ph[2] = N[(2 z)/Sqrt[2 jz] ph[1]];
  For[i = 1, i <= 2 jz + 1, i++, PHIZ[z + jz + 1, i] = ph[i]]
]

```

El cálculo de estas matrices se hace de manera muy rápida, del orden de 0.15s a 0.65s para tamaños de arreglos de entre  $j_x = 5$ ,  $j_y = 3$  hasta  $j_x = 32$ ,  $j_y = 20$ .

## Kernel de rotación

### *d*'s pequeñas de Wigner

Para el cálculo de las *d*'s pequeñas de Wigner se hace uso de las dos relaciones de de recursión de tres términos de éstas

$$\begin{aligned}
d_{1,1} &= \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \\
d_{2,1} &= \sqrt{n}(-1 + \cos(\beta)) \csc(\beta) d_{1,1} \\
&\vdots \\
d_{k+1,1} &= \frac{2\left(-\frac{n}{2} - \left(-1 + k - \frac{n}{2}\right) \cos(\beta)\right) \csc(\beta)}{\sqrt{k(1-k+n)}} d_{k,1} - \sqrt{\frac{(k-1)(n+2-k)}{k(n+1-k)}} d_{k-1,1} \\
&\vdots \\
d_{k,l+1} &= \frac{2\left(1 - k + \frac{n}{2} + \left(-1 + l - \frac{n}{2}\right) \cos(\beta)\right) \csc(\beta)}{\sqrt{k(1-k+n)}} d_{k,l} - \sqrt{\frac{(l-1)(n+2-l)}{l(n+1-l)}} d_{k,l-1}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Para cada sección del romboide que define la ecuación (3.2), se debe calcular un kernel de rotación que será ensamblado al final. Se crean unas matrices nulas de tamaño  $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ , {imgRD, imgRM, imgRU}, donde se almacenarán los valores de la imagen transformada.<sup>1</sup>

```

Complex imgR_[2 jx + 1][2 jy + 1];
For [p = 1, p <= 2 jx + 1, p++,
  For [q = 1, q <= 2 jy + 1, q++,
    imgR_[p][q] = 0;
  ]
];

```

---

<sup>1</sup>En el algoritmo se denotarán por imgR\_, donde el guión bajo  denotará a que parte del romboide pertenece: D para el inferior, M para el intermedio, U para el superior.

En cada sección los contadores que dominan son el valor del modo total  $n$  y el valor del momento angular  $m$ . El cálculo del kernel de rotación comienza entonces de la forma

```

For [n = nmin, n <= nmax, n++,
For [m = mmin, m <= mmax, m += 2,

d_[1][1] = N[Cos[\[Beta]/2]^n];
d_[2][1] = N[\[Sqrt]n (-1 + Cos[\[Beta]]) Csc[\[Beta]]
              d_[1][1]];

For [k = 2, k < kmax, k++,

      d_[k + 1][1] =
(2 (-n/2) - (-1 + k - n/2) Cos[\[Beta]]) Csc[\[Beta]] /
Sqrt [k (1 - k + n)] d_[k][1] -
Sqrt [(k - 1) (n + 2 - k)] / (k (n + 1 - k)) d_[k - 1][1]
      ];

For [k = 1, k <= kmax, k++,
      For [l = 1, l < lmax, l++,

          d_[k][l + 1] =
(2 (1 - k + n/2 + (-1 + l - n/2) Cos[\[Beta]]) Csc[\[Beta]]) /
Sqrt [l (1 - l + n)] d_[k][l] -
Sqrt [(l - 1) (n + 2 - l)] / ((n + 1 - l) (l)) d_[k][l - 1]
          ]
      ];

```

donde los límites de  $n$  están determinados para cada sección del romboide de la forma

$$n \rightarrow \begin{cases} 0 \leq n \leq 2j_y & \text{triángulo inferior,} \\ 2j_y + 1 \leq n \leq 2j_x & \text{rombo intermedio,} \\ 2j_x \leq n \leq 2(j_x + j_y) & \text{triángulo superior.} \end{cases}$$

Los límites de  $m$  se determinan en función de  $n$  y se cuentan en pasos de dos de la forma

$$m \rightarrow \begin{cases} -n \leq m \leq n, \\ -2j_y \leq m \leq 2j_y, \\ -(2\eta - n) \leq m \leq 2\eta - n. \end{cases}$$

Existen dos sumas para crear las  $d$ 's; la primera suma simplemente toma las  $k$ -filas y calcula la recursión; la segunda toma de nuevo estas  $k$ -filas y suma para cada una de ellas sobre las  $l$ -columnas para completar las matrices. Denotando por  $k_1$  la  $k$  de la primera suma y por  $k_2$  la  $k$  de la segunda suma, entonces

$$k \rightarrow \begin{cases} 2 \leq k_1 \leq n+1; & 1 \leq k_2 \leq n+1, \\ 2 \leq k_1 \leq n+1; & 1 \leq k_2 \leq n+1, \\ 2 \leq k_1 \leq 1-n+2\eta; & 1 \leq k_2 \leq 1-n+2\eta, \end{cases}$$

$$l \rightarrow \begin{cases} 1 \leq l \leq n+1, \\ 1 \leq l \leq n+1, \\ 1 \leq l \leq 1-n+2\eta. \end{cases}$$

Las  $d$ 's generadas se denotan en el algoritmo como  $\{dD, dM, dU\}$ , dependiendo si pertenecen a la parte inferior, intermedia o superior del rombo.

### Funciones angulares rectangulares de Laguerre-Kravchuk

Para construir las funciones angulares rectangulares de Laguerre-Kravchuk, se utiliza el desarrollo en serie de los factores  $e^{-i(n_x-n_y)/4}$  y  $e^{-i(n'_x-n'_y)/4}$ , esto es

$$\Lambda_{x,y} = (-1)^{\frac{1}{2}(|m|-m)} \sum_{n_x=\text{lím inf}}^{\text{lím sup}} K_x(x, b_x) K_y(y, b_y) i^{n-n_x} d_-(n_x+1, \chi), \quad (\text{A.4})$$

con una implementación computacional dada por

```

For [x = 1, x <= 2 jx + 1, x++,
  For [y = 1, y <= 2 jy + 1, y++,
    PHI_[x][y] = (-1)^(1/2(Abs[m] - m))
    Sum[Kx[[x, b_x]]Ky[[y, b_y]](-I)^(n - nx)d_ [nx + 1][\ [Chi]] ,
      {nx, liminf, limsup}]
  ]
];

```

Los límites inferior y superior de la suma, para cada sección del rombo son

$$(\text{lím inf} \leq n_x \leq \text{lím sup}) \rightarrow \begin{cases} 0 \leq n_x \leq n, \\ n - 2j_y \leq n_x \leq n, \\ 0 \leq n_x \leq 2\eta - n. \end{cases}$$

Los contadores columnas de las matrices de Kravchuk,  $K_x(a_x, b_x)$ ,  $K_y(a_y, b_y)$ , están definidos por

$$b_x \rightarrow \begin{cases} n_x + 1, \\ n_x + 1, \\ (\eta - n_x) + 1 + \nu. \end{cases}$$

$$b_y \rightarrow \begin{cases} (n - n_x) + 1, \\ (n - n_x) + 1, \\ (n_x - \eta + n) + 1 - \nu. \end{cases}$$

El contador de columnas para las  $d$ 's en cada sección del rombo está definido por

$$\chi \rightarrow \begin{cases} (m + n)/2 + 1, \\ m/2 + j_x + 1, \\ (m + 2\eta - n)/2 + 1. \end{cases}$$

Entonces  $\Lambda_{x,y}$  genera una matriz de dimensiones  $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$  que contiene todos los coeficientes necesarios para transformar cualquier imagen a un espacio de representación de número de modo  $n$  y momento angular  $m$ .

## Rotación de la imagen

Una vez calculadas las funciones (A.4), se procede a realizar la rotación aplicando la fase  $\exp(-im\theta)$  de la forma

$$F_{x,y}^{(\theta)} = \Lambda_{x,y}^* \sum_{p=1}^{2j_x+1} \sum_{q=1}^{2j_y+1} \exp(-im\theta) F_{q,p}, \quad (\text{A.5})$$

donde  $F_{q,p}$  es la matriz de la imagen original (A.1).

La rutina que genera la rotación en el espacio  $\{n, m\}$  está dada por

```

For [x = 1, x <= 2 jx + 1, x++,
For [y = 1, y <= 2 jy + 1, y++,
  Fr_ [x] [y] =
    Conjugate [PHI_ [x] [y]]
    Sum [Exp [-I m \ [Theta]] PHI_ [p] [q] F [[p]] [[q]],
      {p, 1, 2 jx + 1}, {q, 1, 2 jy + 1}]
  ]
];

```

donde  $Fr\_$  se refiere a la imagen rotada para la sección del romboide inferior (FrD), intermedio(FrM) o superior (FrU). A su vez,  $PHI\_$  se refiere a la matriz de Kravchuk (A.2) para  $x$  (PHIx) o  $y$  (PHIy).

## Reconstrucción de la imagen rotada

La reconstrucción de la imagen rotada se hace mediante la combinación recursiva de los elementos originales con los elementos rotados obtenidos, para cada sección del romboide esto es

$$FR_{-x,y} = FR_{-x,y} + Fr_{-x,y}. \quad (A.6)$$

Donde  $FR_{-x,y}$  denota la contribución de cada sección del romboide a la imagen rotada,  $\{FRD_{x,y}, FRM_{x,y}, FRU_{x,y}\}$ . La rutina que calcula la reconstrucción está definida por

```

For [x = 1, x <= 2 jx + 1, x++,
  For [y = 1, y <= 2 jy + 1, y++,
    FR_[x][y] = FR_[x][y] + Fr_[x][y]
  ]
];

```

La imagen rotada resultante es entonces la suma por elementos de las tres secciones

$$FR = FRD_{x,y} + FRM_{x,y} + FRU_{x,y}, \quad (A.7)$$

que se calcula de la forma

```

FR =
If [jx == jy ,
  Table[Re[FRD[ ii ][ jj ] + FRU[ ii ][ jj ]],
  {ii , 1, 2 jx + 1}, {jj , 1, 2 jy + 1}],
  Table[Re[FRD[ ii ][ jj ] + Re[FRM[ ii ][ jj ] + Re[FRU[ ii ][ jj ]],
  {ii , 1, 2 jx + 1}, {jj , 1, 2 jy + 1}]];

```

Es entonces que FR contiene toda la información de la imagen rotada. Se agregó el condicional si  $j_x = j_y$ , para que sólo tomen las sumas de las funciones  $FRD_{x,y}$  y  $FRU_{x,y}$  ya que FRM es nula para este caso. Si  $j_x \neq j_y$ , se tomarán todas la sumas.

## Funciones de onda del oscilador

---

Un polinomio de Kravchuk es un conjunto completo y ortogonal de funciones discretas sobre  $N + 1$  puntos. El polinomio tiene un grado dado por el valor  $0 \leq n \leq N$  definido sobre la variable  $x|_0^N$ , además de un parámetro real  $p$ ; este polinomio está definido mediante una función hipergeométrica de la forma

$$K_n(x; p, N) := (-1)^n p^n \binom{N}{n} {}_2F_1(-n, -x; -N; p^{-1}), \quad (\text{B.1})$$

donde  $\binom{N}{n}$  es el coeficiente binomial. Estos polinomios surgen como una generalización de los polinomios de Hermite. Además, pueden ser definidos como aquellos polinomios que satisfacen la relación de recurrencia de tres términos

$$(x - n - p(N - 2n))K_n(x; p, N) = (n + 1)K_{n+1}(x; p, N) + p(1 - p)(N - n + 1)K_{n-1}(x; p, N). \quad (\text{B.2})$$

Las *funciones* de Kravchuk  $\Phi_n(x; p, N)$  se definen como [1]

$$\Phi_n(x; p, N) := \frac{\sqrt{p^{x+pN}(1-p)^{N-x-pN} \binom{N}{x+pN}}}{\sqrt{p^n(1-p)^n \binom{N}{n}}} K_{nx+pN}; p, N, \quad (\text{B.3})$$

para  $x$  en el intervalo  $[-pN, (1-p)N]$ . Las funciones de Kravchuk son polinomios de Kravchuk normalizados. Por tanto, las funciones (B.3) cumplen la relación de ortogonalidad

$$\sum_{l=0}^N \Phi_m(x_l; p, N) \Phi_n(x_l; p, N) = \delta_{m,n},$$

respecto de los  $N + 1$  puntos equidistantes  $x_l = l - pN$ , conformando una colección



---

ortonormal de  $N + 1$  funciones.

Las funciones (B.3) satisfacen la relación de recurrencia de tres términos

$$\begin{aligned}
((1 - 2p)x - n + 2p(1 - p)N)\Phi_n(x; p, N) = \\
\sqrt{p(1 - p)} \left( \sqrt{(x + pN)((1 - p)N - x + 1)} \right) \Phi_n(x - 1; p, N) + \\
\left( \sqrt{(x + 1 + pN)((1 - p)N - x + 2)} \right) \Phi_n(x + 1; p, N).
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Tomando el valor particular  $p = \frac{1}{2}$  en la relación de recurrencia (B.4) para los polinomios de Kravchuk, se obtienen los polinomios *simétricos* de Kravchuk determinados por

$$K_n(x; \frac{1}{2}, N) = \frac{(-1)^n}{2^n} \binom{N}{n} {}_2F_1(-n, -x; -N; 2). \tag{B.5}$$

Los polinomios simétricos de Kravchuk (B.5) satisfacen una relación de recurrencia dada por la particularización de la relación de recurrencia en (B.2) de la forma

$$(2x - N)K_n(x; \frac{1}{2}, N) = 2(n + 1)K_{n+1}(x; \frac{1}{2}, N) + \frac{1}{2}(N - n + 1)K_{n-1}(x; \frac{1}{2}, N). \tag{B.6}$$

Las funciones simétricas de Kravchuk  $\Phi_n^{(N/2)}(x)$  se obtienen a partir de las funciones (B.3) para  $p = \frac{1}{2}$

$$\Phi_n^{(N/2)}(x) := \Phi_n(x; \frac{1}{2}, N) = 2^n \sqrt{2^{-N} \binom{N}{n} \binom{N}{x + \frac{1}{2}N}}. \tag{B.7}$$

Estas funciones, (B.7), satisfacen la relación de recurrencia particularizada de la relación (B.4) para  $p = \frac{1}{2}$  de la forma

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2}N - n)\Phi_n^{(N/2)}(x) = \\
\frac{1}{2} \left( \sqrt{(\frac{1}{2}N + x)(\frac{1}{2}N - x + 1)} \Phi_n^{(N/2)}(x - 1) + \right. \\
\left. \sqrt{(\frac{1}{2}N + x + 1)(\frac{1}{2}N - x + 2)} \Phi_n^{(N/2)}(x + 1) \right).
\end{aligned} \tag{B.8}$$

## Bibliografía

---

- [1] N.M. Atakishiyev y S.K. Suslov, Difference analogs of the harmonic oscillator, *Theor. Math. Phys.* **85**, 1055–1062 (1991) [40](#)
- [2] K.B. Wolf y T. Alieva, Rotation and gyration of finite two-dimensional mode systems, *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 365–370 (2008) [ii](#), [10](#), [21](#), [23](#)
- [3] N.M. Atakishiyev, G.S. Pogosyan y K.B. Wolf, Finite models of the oscillator, *Physics of Particles and Nuclei Suppl.* **3** **36**, 521–555 (2005) [1](#), [3](#), [8](#), [9](#), [17](#)
- [4] N.M. Atakishiyev y K.B. Wolf, Fractional Fourier-Kravchuk transform, *J. Opt. Soc. Am.* **14**, 1467–1477 (1997) [1](#), [8](#), [9](#), [20](#)
- [5] N.M. Atakishiyev, L.E. Vicent y K.B. Wolf, Continuous versus discrete fractional Fourier transforms, *J. Comput. Appl. Math.* **107**, 73–95 (1999) [1](#)
- [6] N.M. Atakishiyev, G.S. Pogosyan, L.E. Vicent y K.B. Wolf, Finite two-dimensional oscillator: I. The cartesian model, *J. Phys. A. Math. Gen.* **34**, 9381–9398 (2001) [1](#), [11](#), [18](#), [30](#)
- [7] N.M. Atakishiyev, G.S. Pogosyan, L.E. Vicent y K.B. Wolf, Finite two-dimensional oscillator: I. The radial model, *J. Phys. A. Math. Gen.* **34**, 9399–9415 (2001) [1](#)
- [8] L.E. Vicent. (2007). *Análisis de señales discretas finitas mediante el modelo de oscilador finito de  $su(2)$* . (Tesis doctoral). Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Cuernavaca, Morelos. [1](#)

- 
- [9] M. Kravchuk. Sur une généralisation des polynômes d’Hermite, *Comptes Rendus Mathématique*. **189**, 620–622 (1929) [8](#)
- [10] M. Moshinsky y C. Quesne, Linear canonical transformations and their unitary representation, *J. Math. Phys.* **12**, 1772–1779 (1972) [14](#)
- [11] L. Barker, Ç. Çandan, T. Hakioglu, y H.M. Ozaktas, The discrete harmonic oscillator, Harper’s equation, and the discrete fractional Fourier transform, *J. Phys. A* **33**, 2209–2222 (2000) [16](#)
- [12] L. Barker, Continuum quantum systems as limits of the discrete quantum systems: II. State functions, *J. Phys. A* **34**, 4673–4682 (2001) [16](#)
- [13] L.C. Biedenharn y J.D. Louck, Angular momentum in quantum mechanics. En *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Editor G.-C. Rota, Addison-Wesley, 1981 [6](#), [17](#)
- [14] L.E. Vicent, Unitary rotation of square-pixelated images, *Appl. Math. Comput.* **211**, 111–117 (2009) [17](#)
- [15] M.J. Bastiaans y T. Alieva, First-order optical systems with unimodular eigenvalues, *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 1875–1883 (2006) [21](#)
- [16] T. Alieva y M.J. Bastiaans, Orthonormal mode sets for the two-dimensional fractional Fourier transform, *Opt. Lett.* **32**, 1226–1228 (2007) [21](#)
- [17] J.A. Rodrigo, T. Alieva y M.L. Calvo, Gyration transform: properties and applications, *Opt. Express* **15**, 2190–2203 (2007) [21](#)
- [18] A.R. Edmonds, *Angular momentum in quantum mechanics*, Princeton University Press, 1996 [6](#)
- [19] M. Moshinsky y Yu.F. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics*, Amsterdam: Harwood Academic Publisher, 1996

- [20] D.A. Varshalovic, A.N. Moskalev y V.K. Khersonskii, Quantum theory of angular momentum, Singapore: World Scientific, 1998 [6](#)
- [21] N.M. Atakishiyev y S.K. Suslov, Difference analogs of the harmonic oscillator, *Theor. Math. Phys.* **85**, 1055–1062 (1991) [8](#)
- [22] R.W. Cox y R. Tong, Two- and three-dimensional image rotation using the FFT, *IEEE Trans. Im. Proc.* **8**, 1297–1299 (1999) [25](#)
- [23] M. Unser, P. Thévenaz y L. Yaralovasky, Convolution-bases interpolation for fast, high-quality rotation of images, *IEEE Trans. Im. Proc.* **4**, 1371–1381 (1995) [25](#)
- [24] L.E. Vicent y K.B. Wolf, Analysis of digital images into energy-angular momentum modes, *J. Opt. Soc. Am. A* **34**, 9399–9415 (2011) [31](#)
- [25] L.E. Vicent y K.B. Wolf, Unitary transformation between cartesian- and polar-pixellated screens, *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 1875–1884 (2008) [31](#)
- [26] D.Y. Tasi, Y. Lee y E. Matsuyama, Information entropy measure for evaluation of image quality, *Journal of Digital Imaging* **21-3**, 338–347 (2008) [29](#)