Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

Una Introducción a la Integración Estocástica con Aplicación a los Mercados Financieros

T E S I S

Como Requisito para Obtener el Título de:

Matemático

P R E S E N T A:

Emmanuel Reyes Hernández

Director de Tesis:
Dra. María Emilia Caballero Acosta

2015

Ciudad Universitaria, Ciudad de México.

1. Datos del Alumno:
Reyes
Hernández
Emmanuel
55 11 86 65 32
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
41100062-4

2. Datos del Tutor:
Dra.
María Emilia
Caballero
Acosta

3. Datos del Sinodal 1:
Dr.
Gilberto
Calvillo
Vives

4. Datos del Sinodal 2:
Act.
Jaime
Vázquez
Alamilla

5. Datos del Sinodal 3:
Dr.
Fernando
Guerrero
Poblete

6. Datos del Sinodal 4:
M. en C.
Jorge Humberto
Del Castillo
Spíndola

7. Datos del Trabajo Escrito:
Una Introducción a la Integración Estocástica con Aplicación a los Mercados Financieros
92 p.
2016

Índice general

Introducción

Durante los últimos 50 años el impacto de la integral estocástica en la matemática tanto teórica como aplicada ha sido inmenso, en particular el cálculo estocástico desarrollado por Kiyosi Itô quien fue galardonado con el "Premio Gauss para Aplicaciones Matemáticas" por sentar las bases de la teoría de **Ecuaciones Diferenciales y Análisis Estocástico**; a pesar de que él mismo se consideraba un matemático puro.

Kiyosi Itô es un matemático japonés nacido en 1915. Durante 1942 mientras trabajaba en la Oficina de Estadística del Gobierno de Japón logró un gran avance en la teoría de los procesos de Markov, dichos resultados fueron publicados en japonés bajo el título **Diálogo de Matemáticas a Nivel Mundial** (Zenkoku Sizyo Sugaku Danwakai-si). Entre los años 1944 y 1951 en Japón se publicaron extensiones de estos primeros resultados, los cuales sentaron las bases de lo que más tarde llegaría a ser conocido como **Análisis Estocástico**. Posteriormente en las "Memorias de la Sociedad Americana de Matemáticas" se publicó una explicación sistemática bajo el título **Ecuaciones Diferenciales Estocásticas**, esto gracias a JL Doob, quien inmediatamente reconoció la importancia del trabajo de Itô.

En esta tesis estudiaremos ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales son expresiones de la forma:

$$X_t(\omega) = x + \int_0^t \sigma(X_s(\omega))\mathrm{d}W_s(\omega) + \int_0^t b(X_s(\omega))\mathrm{d}s$$

Lo cual es un problema particularmente difícil, Wiener y otros demostraron que la trayectoria de un movimiento browniano es continua pero es no diferenciable casi donde quiera. En particular, una trayectoria browniana no es de variación acotada y por tanto no es integrable en el sentido de Lebesgue-Stieltjes. Con el propósito de dar sentido a la ecuación anterior, es necesario establecer lo que hoy se conoce como la teoría de integración estocástica.

Este trabajo trata la construcción de la Integral Estocástica, es decir, la Integral con respecto del Movimiento Browniano, estas integrales son comúnmente llamadas integrales estocásticas o integrales de Itô. La estructura principal de este trabajo es la siguiente:

El primer capítulo se centra en el movimiento browniano, se da una breve reseña histórica, su definición y algunas propiedades que nos serán de utilidad para los posteriores capítulos.

En el segundo se introduce la integral estocástica o integral con respecto del movimiento browniano. El capítulo comienza construyendo la integral estocástica para integrandos deterministas, es decir, para funciones que dependen únicamente del tiempo y no de factores aleatorios, esta integral es conocida como la integral de Paley-Wiener. Posteriormente se construye la integral estocástica para integrandos simples, es decir, para procesos estocásticos simples o elementales. Finalmente el capítulo termina con la extensión de la integral estocástica sobre la cerradura del conjunto de procesos estocásticos simples que son integrables.

En el tercer capítulo se introducen las fórmulas de Itô las cuales pueden entenderse como un análogo de la fórmula de integración por partes para integrales estocásticas.

Finalmente se estudia una aplicación de la integral estocástica, el cálculo estocástico de Itô aplicado a las finanzas matemáticas deduciendo de manera estocástica la fórmula de Black-Scholes.

La mayor parte de esta tesis se ha basado en el curso de Seminario de Aplicaciones Actuariales (Integración Estocástica) impartido por la Dra. María Emilia Caballero Acosta en el Instituto de Matemáticas durante el semestre 2015-1. Dicho curso fue basado principalmente en los libros de Evans [1] y Øksendal [2].

Capítulo 1

Movimiento Browniano

1.1. Breve Reseña Histórica

Figura 1.1: Robert Brown

Londres, 1827, mientras el médico y botánico escocés Robert Brown (1773-

1858) examinaba partículas de polen de **Clarkia Pulchella** en el microscopio, observó que cuando estas se encontraban suspendidas en agua o en otros líquidos se movían sin cesar en forma errática. En un principio, Brown pensó que las partículas tenían movimiento propio e incluso vida. Posteriormente, el fenómeno se asoció no sólo con partículas de polen, sino también con partículas de materia inorgánica como el polvo fino de algunos materiales (vidrio, carbón, roca, etc.). Su investigación "A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies" fue publicada en el "Edinburgh New Philosophical Journal", July-September (1828), pp. 358-371.

Figura 1.2: Clarkia Pulchella

No fue sino hasta principios del siglo XX, cuando se demostró que el movimiento irregular de la partículas de polen se debía al golpeteo constante de las moléculas invisibles del agua sobre las moléculas visibles de las partículas de polen. En 1905, el físico Albert Einstein (1879-1955) escribe un artículo sobre mecánica estadística que proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se deriva que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en un líquido, en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo.

En 1900, el matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) en su tesis "Theorie de la spéculation" sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la bolsa de París, se anticipó a Einstein con la formulación matemática del movimiento Browniano, abordando un problema completamente diferente al de la mecánica estadística o al del movimiento errático partículas de polen suspendidas en agua. Sin embargo, su trabajo no fue reconocido como una contribución relevante por sus profesores y compañeros en la "Sorbonne" de París. Su vida transcurrió en el anonimato, hasta la fecha po-

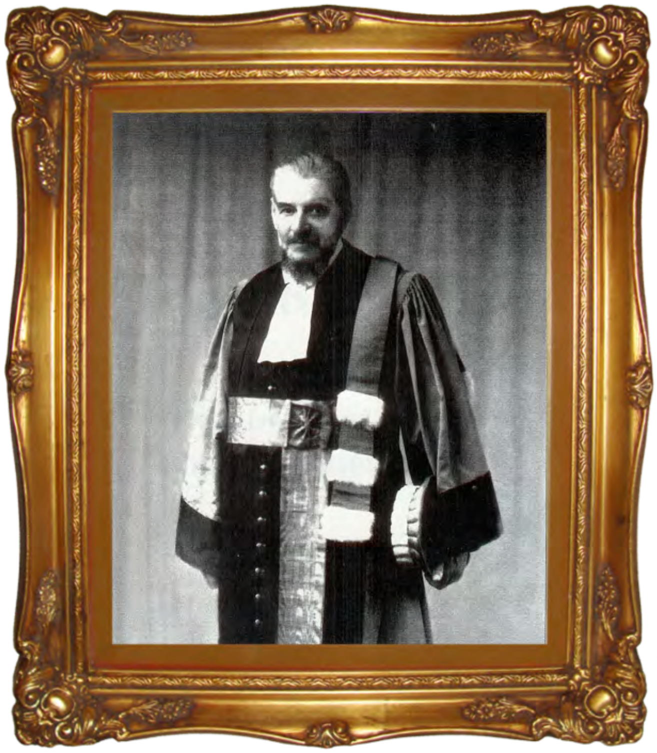

Figura 1.3: Louis Bachelier

co se sabe de este enigmático y misterioso personaje. La relevancia del trabajo de Bachelier fue reconocida hasta 1960, tristemente después de su muerte. El movimiento Browniano, así como sus aspectos teóricos y prácticos, es objeto de numerosos estudios en muchas y muy diversas áreas de las finanzas. Sin lugar a dudas, el movimiento Browniano se encuentra implícita o explícitamente en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo en ambientes estocásticos.

Otro destacado matemático asociado con el movimiento Browniano, es Norbert Wiener (1894-1964), de origen estadounidense, nacido en Columbia, Missouri. Wienner obtuvo su doctorado en Harvard en 1912, a la edad de 18 años, presentado una tesis sobre lógica matemática. Al concluir sus estudios en Harvard se fue a Cambridge, Inglaterra, donde fue alumno de Bertrand Russel y G. H. Hardy. Y posteriormente, en 1914, se trasladó a Göttingen, Alemania, a trabajar bajo la dirección de David Hilbert y Edmund Landau. Es importante destacar que Norbert Wiener también ha sido reconocido como el padre de la cibernética.

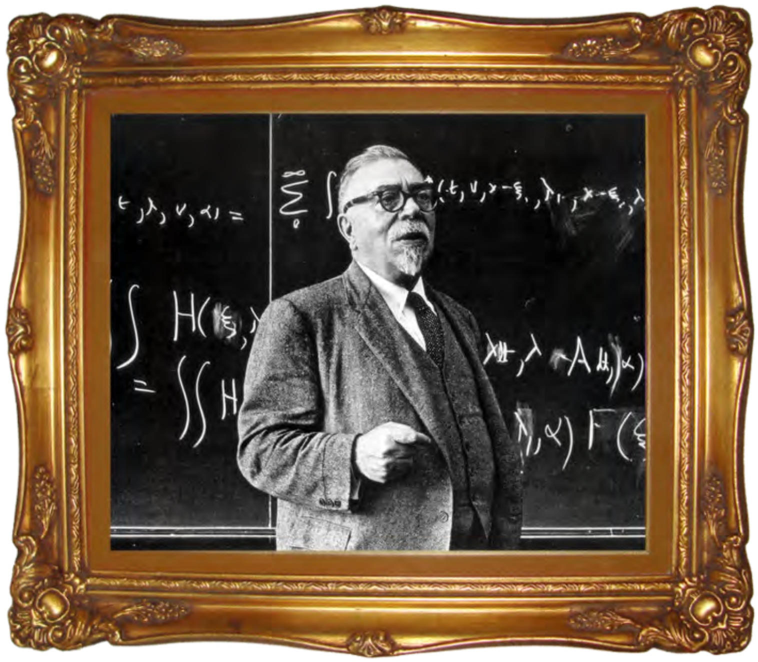

Figura 1.4: Norbert Wiener

1.2. Movimiento Browniano

1.2.1. Definición y Propiedades Básicas

Definición 1.2.1. ***(Movimiento Browniano)*** *Un proceso estocástico de valores reales* $(W_t)_{t\geq 0}$ *es llamado* ***Movimiento Browniano*** *o* ***Proceso de Wiener*** *si:*

1. $W_0 = 0$ *casi seguramente*
2. $W_t - W_s$ *es* $N(0, t-s)$ *para todo* $t \geq s \geq 0$
3. *Para cualesquiera tiempos* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$*, las variable aleatorias* $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *son independientes ("incrementos independientes").*

Lema 1.2.2. *Si $W = (W_t)_{t\in T}$ es un proceso de Wiener, entonces:*

$$C(s,t) := Cov[W_s, W_t] = s \wedge t$$

[1]

Demostración. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $s \leq t$, entonces gracias a la propiedad de incrementos independientes del movimiento browniano y que este es un proceso gaussiano de media cero tenemos que

$$\begin{aligned} C(t,s) &= \mathbb{E}[W_t W_s] - \mathbb{E}[W_t]\,\mathbb{E}[W_s] \\ &= \mathbb{E}[W_t W_s] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s + W_s)\,W_s] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)\,W_s] + \mathbb{E}\left[W_s^2\right] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s]\,\mathbb{E}[W_s] + \mathbb{E}\left[W_s^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[W_s^2\right] \\ &= s \end{aligned}$$

De igual manera si $t \leq s$ tenemos que $C(t,s) = t$ con lo que queda demostrado el lema.

□

1.3. Teorema de Continuidad de Kolmogorov-Čentsov

Teorema 1.3.1. ***(Teorema de Continuidad de Kolmogorov-Čentsov 1956)*** *Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico tal que existen $\alpha, \beta > 0, C > 0$ para los cuales*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^\beta\right] \leq C\,|t-s|^{1+\alpha} \tag{1.1}$$

Entonces existe una versión $\widetilde{X} = \left(\widetilde{X}_t\right)_{t\geq 0}$ del proceso X tal que $t \to \widetilde{X}_t(\omega)$ es γ-Hölder continua en $\mathbb{R}^+$, donde $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ para casi toda $\omega \in \Omega$, es decir que para casi toda $\omega \in \Omega$ existe una constante $K = K(\omega, \gamma, T)$ tal que:

$$\left|\widetilde{X}_t(\omega) - \widetilde{X}_s(\omega)\right| \leq K\,|t-s|^\gamma \quad 0 \leq s,t \leq T \tag{1.2}$$

[1] Donde denotaremos $s \wedge t$ como el mínimo entre los números s y t, matemáticamente $s \wedge t = \text{mín}\{s,t\}$.

Una demostración rigurosa de dicho teorema puede consultarse en *Karatzas-Shreve. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Segunda edición. Springer-Verlag (p. 53-55)* [3].

Corolario 1.3.2. *Si* $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ *es un movimiento browniano, entonces existe una modificación* $\widetilde{W} = \left(\widetilde{W}_t\right)_{t\geq 0}$ *de* W *con trayectorias* γ*-Hölder continuas para cualquier* $\gamma < \frac{1}{2}$*.*

Demostración. Para $\beta > 2$ y $0 \leq s < t$ calcularemos la siguiente esperanza

$$\mathbb{E}\left[|W_t - W_s|^\beta\right] = \mathbb{E}\left[|W_{t-s}|^\beta\right] = \int_{\mathbb{R}} |x|^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} \mathrm{d}x$$

Al ser $|x|^\beta$ una función simétrica con respecto al cero al igual que la función de densidad normal con media cero, tenemos que se cumple la siguiente igualdad

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi\,(t-s)}} \int_0^\infty x^\beta e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} \mathrm{d}x \tag{1.3}$$

Resolviendo esta integral bajo el siguiente cambio de variable:

$$\left(u = \tfrac{x^2}{2(t-s)} \quad \mathrm{d}u = \tfrac{x}{t-s}\mathrm{d}x\right)$$

Tenemos que (1.3) es igual a lo siguiente

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi\,(t-s)}} \int_0^\infty (2u)^{\frac{\beta}{2}} (t-s)^{\frac{\beta}{2}} e^{-u} \frac{\sqrt{t-s}}{\sqrt{2u}} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (2u)^{\frac{\beta}{2}} (t-s)^{\frac{\beta}{2}} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u \\
&= \frac{(t-s)^{\frac{\beta}{2}} 2^{\frac{\beta}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}} e^{-u} \mathrm{d}u \\
&= \frac{(t-s)^{\frac{\beta}{2}} 2^{\frac{\beta}{2}}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^\infty u^{\frac{\beta+1}{2}-1} e^{-u} \mathrm{d}u}_{=\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Utilizando la definición de la función Gamma $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ tenemos que

$$= |t-s|^{\frac{\beta}{2}} \underbrace{\frac{2^{\frac{\beta}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}_{=:C(\beta)} = |t-s|^{\frac{\beta}{2}}\ C(\beta)$$

Considerando $\beta = 2m$ y $\alpha = m - 1$ para m cualquier número natural mayor o igual que 2, tenemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema de Kolmogorov-Čentsov (1.1), es decir:

$$\mathbb{E}\left[|W_t - W_s|^\beta\right] \leq C\,|t-s|^{1+\alpha}$$

Entonces el proceso W tiene una modificación γ-Hölder continua para cada exponente γ que satisfaga:

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m-1}{2m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \qquad \text{para toda } m \geq 2$$

Por lo tanto, para casi toda ω y cualquier $T > 0$, la trayectoria $t \mapsto W(t,\omega)$ es uniformemente Hölder continua sobre $[0, T]$ para cada exponente $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

□

Gracias a este resultado, al trabajar con movimientos Brownianos, siempre podemos suponer la hipótesis de la continuidad de Hölder en sus trayectorias.

1.4. Filtraciones y Martingalas

Definición 1.4.1. *Una* ***filtración*** *sobre algún espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *es una familia* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ *de* σ*-álgebras* $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$ *tal que* $\{\mathscr{F}_t\}$ *es creciente, es decir:*

$$\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t \text{ para todo } 0 \leq s \leq t$$

Una filtración puede ser pensada como una estructura de información dinámica. La interpretación es que $\mathscr{F}_t$ representa la información disponible al tiempo t. El hecho de que la filtración esté aumentando significa que hay más y más información conocida conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida.

Definición 1.4.2. *Un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *se dice que es* ***completo*** *si cada vez que se tenga la situación* $A \subseteq B$ *con* $B \in \mathscr{F}$ *y* $P(B) = 0$*, entonces también se tiene que* $A \in \mathscr{F}$ *y* $P(A) = 0$.

En otras palabras, un espacio de probabilidad es completo si todos los subconjuntos de eventos nulos son también eventos nulos.

Definición 1.4.3. *Si* $(W_t)_{t\geq 0}$ *es un movimiento browniano en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *completo, se define la* ***filtración browniana*** *como:*

$$\mathscr{F}_t^W := \sigma\left(W_s : 0 \leq s \leq t\right)$$

Si $\mathscr{N}$ *es la clase de eventos* $B \in \mathscr{F}$ *tales que* $P\left(B\right) = 0$*, se define la* ***filtración browniana aumentada*** *como:*

$$\mathscr{F}_t := \sigma\left(\mathscr{F}_t^W \vee \mathscr{N}\right)$$

En este caso $\mathscr{F}_0^W$ contiene sólo conjuntos de probabilidad cero o uno. Claramente, si $s \leq t$ entonces $\mathscr{F}_s^W \subseteq \mathscr{F}_t^W$.

Además, basta que $\mathscr{F}_t := \sigma\left(\mathscr{F}_t^W \vee \mathscr{N}\right)$ se defina únicamente para $t = 0$, ya que si $\mathscr{F}_0 := \sigma\left(\mathscr{F}_0^W \vee \mathscr{N}\right)$, entonces $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_t$ para toda $t \geq 0$.

Definición 1.4.4. *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *un espacio de probabilidad, y* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ *una filtración en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*. Decimos que la filtración* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ *tiene las* ***condiciones habituales*** *si:*

1. $\mathscr{F}_t = \bigcap_{\epsilon>0} \mathscr{F}_{t+\epsilon}$ *(Es continua por la derecha)*
2. $\mathscr{F}_0$ *es completa, es decir,* $\mathscr{F}_0$ *contiene a todos los conjuntos de* P*-medida nula.*

Es posible demostrar que la filtración browniana así definida es una filtración con las condiciones habituales, sin embargo, para fines de este trabajo usaremos como hipótesis este hecho.

Definición 1.4.5. *Un* ***espacio de probabilidad filtrado*** *es la cuarteta* $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, P\right)$ *donde* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *es un espacio de probabilidad y* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ *es una filtración sobre dicho espacio de probabilidad.*

En lo sucesivo, usaremos espacios de probabilidad filtrados donde la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ es la filtración browniana.

Definición 1.4.6. *Un proceso estocástico* $\{M_t\}_{t\geq 0}$ *sobre algún espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *con una filtración* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ *es llamado una* ***martingala*** *con respecto a la filtración* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ *y con respecto a* P *si:*

1. M_t *es* $\mathscr{F}_t$*-medible para todo* t
2. $\mathbb{E}\left[|M_t|\right] < \infty$ *para todo* t
3. $\mathbb{E}\left[M_t \middle| \mathscr{F}_s\right] = M_s$ *para todo* $t \geq s$

Es importante mencionar que la a definición de martigala depende tanto de la medida como de la filtración, en lo sucesivo a menos que se mencione lo contrario las martingalas serán consideradas con respecto a la filtración natural browniana.

Teorema 1.4.7. *Sea* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *es un movimiento browniano sobre* $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, P\right)$ *un espacio de probabilidad filtrado, entonces* W *es una martingala.*

Demostración. Gracias a que $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ es la filtración browniana, el proceso W es adaptado y por un desarrollo similar al del corolario 1.3.2, tenemos que para todo t

$$\mathbb{E}\left[|W_t|\right] = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty$$

Falta demostrar que para todo $s \leq t$:

$$\mathbb{E}\left[W_t \middle| \mathscr{F}_s\right] = W_s$$

La propiedad de incrementos independientes de W implica que las variables aleatorias $W_t - W_s$ y W_s son independientes, lo cual nos conduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[W_t \middle| \mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[W_t - W_s + W_s \middle| \mathscr{F}_s\right]\\ &= \mathbb{E}\left[W_t - W_s \middle| \mathscr{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[W_s \middle| \mathscr{F}_s\right]\\ &= \mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] + W_s\\ &= W_s\end{aligned}$$

Por lo tanto, el movimiento browniano es una martingala.

$\square$

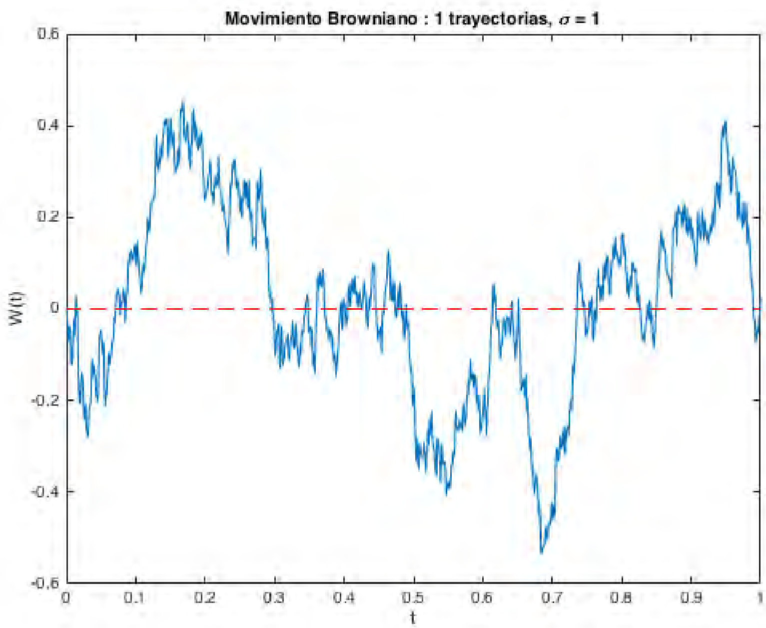

Figura 1.5: Simulación de una Trayectoria Browniana.

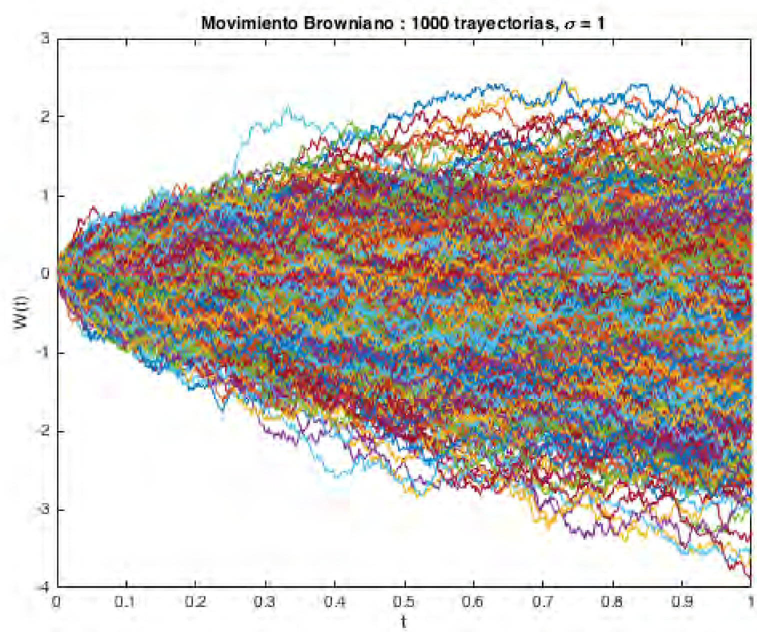

Figura 1.6: Simulación de 1000 Trayectorias Brownianas.

1.5. Movimiento Browniano Geométrico

Observemos que como el movimiento browniano puede tomar valores negativos, usar al movimientos browninao como un modelo de precios de acciones es cuestionable. Esta es la razón por la cual el movimiento browniano no es un modelo apropiado para modelar precios de acciones.

Para resolver el problema mencionado anteriormente, se introduce en esta sección una variación no negativa del movimiento browniano, llamado *Movimiento Browniano Geométrico* al cual denotaremos por $S = (S_t)_{t\geq 0}$.

Definición 1.5.1. ***(Movimiento Browniano con Deriva)*** *Sean* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *un movimiento Browniano estándar sobre* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*, entonces el proceso* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *definido como*

$$X_t = \mu t + \sigma W_t$$

donde μ *es una constante real* ***(deriva)*** *y* σ *es una constante positiva* ***(volatilidad)*** *es llamado* ***Movimiento Browniano con Deriva***

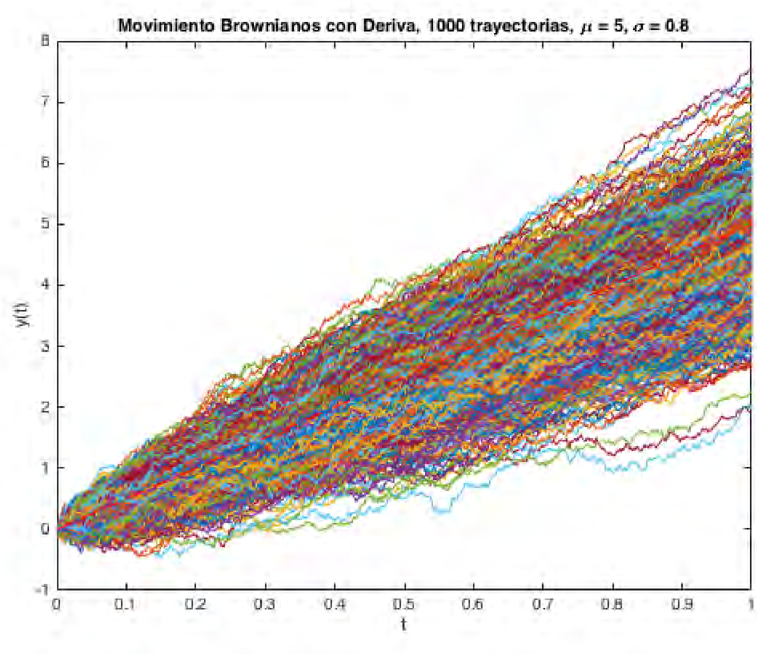

Figura 1.7: Simulación de una Trayectoria Browniana con Deriva. [2]

Definición 1.5.2. ***(Movimiento Browniano Geométrico)*** *Sean* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *un movimiento Browniano estándar sobre* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un movimiento browniano con deriva, es decir,* $X_t = \mu t + \sigma W_t$, *donde* μ *es una constante real* ***(deriva)***, σ *es una constante positiva* ***(volatilidad)*** *y* $S_0 > 0$ *es un valor no aleatorio* ***(valor inicial)***, *entonces el proceso* $S = (S_t)_{t\geq 0}$:

$$S_t := S_0 e^{X_t} = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

es llamado ***Movimiento Browniano Geométrico***

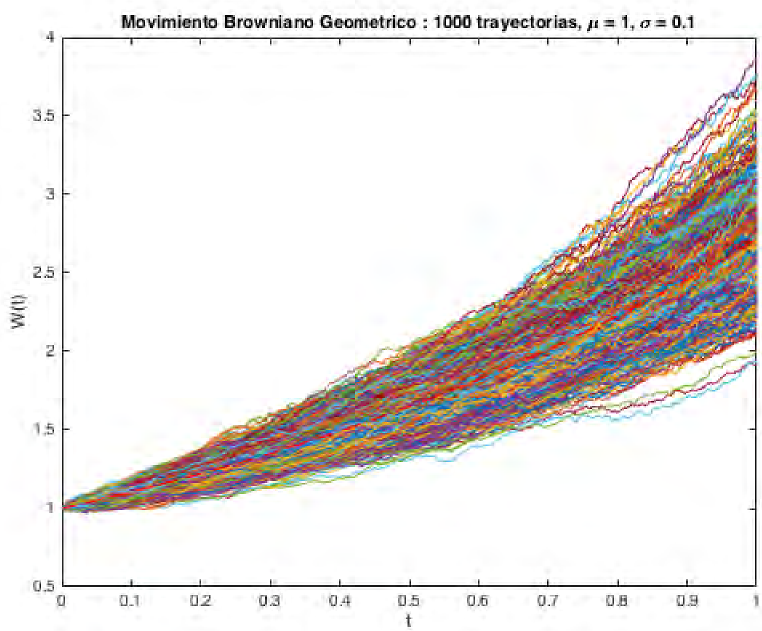

Figura 1.8: 1000 Trayectorias de un Movimiento Browniano Geométrico. [3]

El movimiento browniano geométrico se obtiene por la transformación exponencial del movimiento browniano con deriva.

[2]Simulación de una trayectoria browniana con Deriva de parámetros $\mu = 5$ y $\sigma = 0.8$, por medio una aproximación de caminatas aleatorias en MATLAB.

[3]Simulación de 1000 trayectorias brownianas geométricas por medio la paquetería de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDE) de MATLAB.

Teorema 1.5.3. *Sea* $S = (S_t)_{t\geq 0}$ *un movimiento browniano geométrico definido sobre* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*, donde:*

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

Entonces S *es martingala si y sólo si* $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$

Demostración. Primero observemos que S es un proceso adaptado e integrable por lo que basta demostrar que si $0 \leq s < t$ entonces $\mathbb{E}\left[M_t \middle| \mathscr{F}_s \right] = M_s$. Gracias a la propiedad de incrementos independientes tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t \middle| \mathscr{F}_s \right] &= \mathbb{E}\left[S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} \middle| \mathscr{F}_s \right] \\
&= S_0 e^{\mu s + \sigma W_s} \mathbb{E}\left[e^{\mu(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} \middle| \mathscr{F}_s \right] \\
&= S_0 e^{\mu s + \sigma W_s} e^{\mu(t-s)} \mathbb{E}\left[e^{\sigma(W_t - W_s)} \middle| \mathscr{F}_s \right]
\end{aligned}$$

Sabiendo que esta última esperanza es igual a la función generadora de momentos de $W_t - W_s$ que es una variable aleatoria gaussiana centrada de varianza $t - s$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t \middle| \mathscr{F}_s \right] &= S_0 e^{\mu s + \sigma W_s} e^{\mu(t-s)} \mathbb{M}_{W_t - W_s}(\sigma) \\
&= S_0 e^{\mu s + \sigma W_s} e^{\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2 (t-s)}
\end{aligned}$$

Lo cual implica que para que $\mathbb{E}\left[S_t \middle| \mathscr{F}_s \right] = S_s$ es condición necesaria y suficiente que: $e^{\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} = 1$.
Que se satisface justo cuando $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$.

□

Capítulo 2

Integral Estocástica

2.1. Integral de Paley-Wiener

En este capítulo comenzaremos definiendo la integral estocástica con respecto del movimiento browniano para cierta clase de proceso estocásticos, una de las primeras ideas que uno podría pensar sería definir este tipo de integrales como sumas de Riemann, dicho proceso no puede realizarse mediante las técnicas tradicionales de integración ya que el movimiento browniano tiene variación infinita.

Una de las primeras integrales que desarrollaremos en este trabajo será la integral para funciones deterministas (no aleatorias), esta integral es la *integral de Paley-Wiener* y está definida mediante la fórmula de integración por partes para funciones deterministas $g(s)$ que cumpla ciertas condiciones.

Definición 2.1.1. *Sea $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ una función tal que:*

1. $g(0) = g(T) = 0$
2. $g \in \mathcal{C}^1[0, T]$

En tal caso, se define la ***integral de Paley-Wiener*** *de g con respecto a $W = (W_t)_{t\geq 0}$ como:*

$$\int_0^T g(t)\mathrm{d}W_t := -\int_0^T W_t g'(t)\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

El siguiente teorema nos permite escribir la integral de Paley-Wiener de una función g, en forma similar al límite una suma de de Riemann.

Teorema 2.1.2. *Sean* $g : [0,T] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{C}^1$ *una función determinista tal que* $g(0) = 0 = g(T)$, $(W_t)_{t\geq 0}$ *un movimiento browniano estándar en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, *y* $\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m_n} = T\}$ *una sucesión de particiones del intervalo* $[0,T]$ *tal que si* n *tiende a* ∞, *la norma de la partición tiende a* 0 *entonces:*

$$\int_0^T g(s)\mathrm{d}W_s = \lim_{||\Delta_n||\to 0} \sum_{i=1}^{m_n-1} g(t_i)\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) \tag{2.2}$$

Donde el límite anterior es en el sentido de convergencia casi segura.

Demostración. Por simplicidad en los cálculos, en vez de escribir m_n, solamente escribiremos n.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} g(t_i)\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) \\
&= g(t_1)\left(W_{t_2} - W_{t_1}\right) + g(t_2)\left(W_{t_3} - W_{t_2}\right) + \cdots + g(t_{n-2})\left(W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}\right) \\
&\quad + g(t_{n-1})\left(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right) \\
&= -W_{t_1}g(t_1) - W_{t_2}\left(g(t_2) - g(t_1)\right) - \cdots - W_{t_{n-1}}\left(g(t_{n-1}) - g(t_{n-2})\right) \\
&\quad - W_{t_n}\left(-g(t_{n-1})\right) \\
&= -W_{t_1}\left(g(t_1) - g(t_0)\right) - W_{t_2}\left(g(t_2) - g(t_1)\right) - \cdots - W_{t_{n-1}}\left(g(t_{n-1}) - g(t_{n-2})\right) \\
&\quad - W_{t_n}\left(g(t_n) - g(t_{n-1})\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} -W_{t_{i+1}}\left(g_{t_{i+1}} - g_{t_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} W_{t_i}\Delta g_i
\end{aligned}$$

La cual es una suma de Riemann-Stieltjes pues por hipótesis tenemos que la función $g(s)$ tiene primer derivada continua. Tomando el límite trayectoria por trayectoria casi seguramente de $-\sum_{i=1}^{n} W_{t_i}\Delta g_i$ tenemos:

$$\lim_{||\Delta||\to 0} -\sum_{i=1}^{n} W_{t_i}\Delta g_i = -\int_0^T W_s\mathrm{d}g(s) = -\int_0^T W_s g'(s)\mathrm{d}s$$

Finalmente por la definición (2.1) tenemos que:

$$-\int_0^T W_s g'(s)\mathrm{d}s =: \int_0^T g(s)\mathrm{d}W_s$$

Con lo cual queda demostrado (2.2).

□

Observemos que la integral de Paley-Wiener es una variable aleatoria y por tanto podemos demostrar algunas propiedades importantes de dicha integral.

Teorema 2.1.3. *Sea g una función que satisface la definición de la integral de Paley-Wiener, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *El mapeo* $g \to \int_0^T g(s)\mathrm{d}W_s$ *es lineal*
2. $\mathbb{E}\left[\int_0^T g(s)\mathrm{d}W_s\right] = 0$
3. *Propiedad de isometría:*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g(s)\mathrm{d}W_s\right)^2\right] = \int_0^T g^2(s)\mathrm{d}s \tag{2.3}$$

Demostración. (1) Sean g, h funciones Paley-Wiener integrables y a, b números reales, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^T (ag(s) + bh(s))\,\mathrm{d}W_s &= -\int_0^T W_t\,(ag(t) + bh(t))'\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^T W_t\,(ag'(t) + bh'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= -a\int_0^T W_t g'(t)\mathrm{d}t - b\int_0^T W_t h'(t)\mathrm{d}t \\
&= a\int_0^T g(s)\mathrm{d}W_s + b\int_0^T h(s)\mathrm{d}W_s
\end{aligned}$$

(2) Gracias al teorema de Fubini se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T g(s)\mathrm{d}W_s\right] &= \mathbb{E}\left[-\int_0^T g'(s)W_s\mathrm{d}s\right] \\
&= -\int_0^T \mathbb{E}\left[g'(s)W_s\right]\mathrm{d}s \\
&= -\int_0^T g'(s)\mathbb{E}\left[W_s\right]\mathrm{d}s \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que se satisface 2.

(3) De manera similar, tenemos que:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g(s)\mathrm{d}W_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(-\int_0^T g'(s)W_s\mathrm{d}s\right)^2\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g'(t)W_t\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_0^T g'(s)W_s\mathrm{d}s\right)\right]$$

Nuevamente por el teorema de Fubini:

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T g'(t)g'(s)W_tW_s\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right] = \int_0^T\int_0^T \mathbb{E}\left[g'(t)g'(s)W_tW_s\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^T\int_0^T g'(t)g'(s)\mathbb{E}\left[W_tW_s\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_0^T\int_0^T g'(t)g'(s)(t\wedge s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^T g'(s)\left[\int_0^s g'(t)\,(t\wedge s)\,\mathrm{d}t + \int_s^T g'(t)\,(t\wedge s)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^T g'(s)\left[\underbrace{\int_0^s tg'(t)\mathrm{d}t}_{:=a} + \underbrace{\int_s^T sg'(t)\mathrm{d}t}_{:=b}\right]\mathrm{d}s \tag{2.4}$$

Ahora para resolver (a), aplicamos integración por partes bajo los siguientes cambios de variable:

$$\begin{pmatrix} u = t & \mathrm{d}v = g'(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & v = g(t) \end{pmatrix}$$

Y obtenemos:

$$\int_0^s tg'(t)\mathrm{d}t = [tg(t)]_0^s - \int_0^s g(t)\mathrm{d}t = sg(s) - \int_0^s g(t)\mathrm{d}t \tag{2.5}$$

Para resolver (b):

$$\int_s^T sg'(t)\mathrm{d}t = s\int_s^T g'(t)\mathrm{d}t = s\left[g\left(T\right) - g\left(s\right)\right] = -sg\left(s\right) \tag{2.6}$$

Sustituyendo (2.5) y (2.6) en (2.4) obtenemos lo siguiente:

$$= \int_0^T g'(s)\left[sg(s) - \int_0^s g(t)\mathrm{d}t - sg(s)\right]\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^T g'(s)\left[-\int_0^s g(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s \tag{2.7}$$
$$= -\int_0^T g'(s)\left[\int_0^s g(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s$$

Nuevamente resolvemos esta última integral por integración por partes bajo los siguientes cambios de variable:

$$\begin{pmatrix} u = \int_0^s g(t)\mathrm{d}t & \mathrm{d}v = g'(s)\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}u = g(s)\mathrm{d}s & v = g(s) \end{pmatrix}$$

Obtenemos que (2.7) es igual a:

$$= -\left\{\left[g(s)\int_0^s g(t)\mathrm{d}t\right]_0^T - \int_0^T g^2(s)\mathrm{d}s\right\} = \int_0^T g^2(s)\mathrm{d}s$$

Con lo cual se satisface (2.3) y con ello quedan demostradas las propiedades enunciadas de la integral de Paley-Wiener.

□

Esta integral suele ser bastante útil, sin embargo, no basta para nuestros propósitos, pues es una integral definida para funciones deterministas y nosotros necesitamos integrar funciones aleatorias, es decir, procesos estocásticos, por ello es necesario construir la integral estocástica de Itô.

Supongamos que si g es una función en el espacio $L^2[0,T]$ de todas las funciones $f:[0,T]\to\mathbb{R}$ cuadrado integrables, entonces podemos tomar $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}^1[0,T]$ tales que:

$$\int_0^T (g_n - g)^2\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0 \qquad i.e. \qquad \|g_n - g\|^2_{L^2(\lambda_T)} \longrightarrow 0$$

Gracias a la propiedad de isometría (2.3) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g_m\mathrm{d}W - \int_0^T g_n\mathrm{d}W\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (g_m - g_n)\,\mathrm{d}W\right)^2\right] \\ &= \int_0^T (g_m - g_n)^2\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0\end{aligned}$$

es decir, la sucesión de variables aleatorias $\left(\int_0^T g_n\mathrm{d}W\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $L^2(\Omega)$. Por ello, es razonable definir la siguiente integral:

$$\int_0^T g\mathrm{d}W := L^2(P) - \lim_{n\to\infty}\int_0^T g_n\mathrm{d}W$$

Dicha extensión satisface las condiciones del *teorema 2.1.3* y además es una definición razonable de $\int_0^T g\mathrm{d}W$, salvo que esta integral sólo se extiende para funciones en el espacio $L^2[0,T]$ y no para procesos estocásticos. Nosotros deseamos extender a una integral de la forma:

$$\int_0^T B(X,s)\,\mathrm{d}W$$

donde el integrando $B(X,s)$ es un proceso estocástico y la definición anterior no es suficiente para este propósito.

Debemos encontrar una definición de integral estocástica adecuada para una clase más amplia de integrandos.

Para continuar nuestro estudio sobre la integral estocástica para integrandos aleatorios, pensemos en lo que podría ser una apropiada definición para:

$$\int_0^T W \mathrm{d}W$$

Donde W es un Movimiento Browniano estándar. Un procedimiento razonable sería construir una aproximación mediante *sumas de Riemann*, y en medida de lo posible tomar *limites*.

2.2. Variación Cuadrática

Definición 2.2.1. (1) *Una **partición** Δ sobre el intervalo $[0,T]$ es una colección finita de puntos en $[0,T]$:*

$$\Delta := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$$

(2) *La **norma de la partición** de Δ es:*

$$|\Delta| := \max_{0\leq k\leq m-1} |t_{k+1} - t_k|$$

Definición 2.2.2. *Sean $\left(\Delta^k\right)_k$ una sucesión de particiones de $[0,T]$, tal que si k tiende a ∞ la norma de la partición tiende a 0, $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un proceso estocástico sobre $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Si para todo $0 \leq t \leq T$, el limite:*

$$\langle X\rangle_t := L^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\leq t} \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)^2$$

*existe, entonces el proceso estocástico $\langle X\rangle$ es llamado la **variación cuadrática** de X.*

En adelante, utilizaremos como notación Gamma (Γ) para calcular la convergencia de la variación cuadrática de algunos procesos estocásticos. Esto no debe causar confusión con la función Gamma tradicional, mencionada en el primer capítulo.

Teorema 2.2.3. ***(Variación Cuadrática)*** *Si $(W_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, dada $\left(\Delta^k\right)_k$ una sucesión de particiones de $[0,T]$, tal que si k tiende a ∞ la norma de la partición tiende a 0, entonces se cumple que:*

$$\Gamma_k := \sum_{i=1}^{n(k)} \left(W_{t_i^k} - W_{t_{i-1}^k}\right)^2 \xrightarrow[\substack{|\Delta^k|\to 0 \\ k\to\infty}]{L^2} T \tag{2.8}$$

Donde $\Delta^k : 0 = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{n(k)}^k = T$

Demostración. Observe primero que $\mathbb{E}\left[\Gamma_k - T\right] = 0$, ya que:

$$\mathbb{E}\left[\Gamma_k\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n(k)} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n(k)} \left(t_i - t_{i-1}\right) = T$$

Gracias a esto, tenemos que:

$$\mathbb{E}\left[\left(\Gamma_k - T\right)^2\right] = Var\left(\Gamma_k - T\right) = Var\left(\Gamma_k\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n(k)} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right)$$

Por la propiedad de incrementos independientes del m.b. se tiene lo siguiente:

$$= \sum_{i=1}^{n(k)} Var\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n(k)} \left(\mathbb{E}\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^4\right] - \left(\mathbb{E}\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right]\right)^2\right)$$

Además, si $X \sim N\left(0, a\right)$ entonces $\mathbb{E}\left[X^4\right] = 3a^2$, y con ello:

$$= \sum_{i=1}^{n(k)} \left\{3\left(t_i - t_{i-1}\right)^2 - \left(t_i - t_{i-1}\right)^2\right\} = 2\sum_{i=1}^{n(k)} \left(t_i - t_{i-1}\right)^2$$

$$\leq 2|\Delta^k| \sum_{i=1}^{n(k)} \left(t_i - t_{i-1}\right) = 2|\Delta^k|T \xrightarrow[\substack{|\Delta^k|\to 0 \\ k\to\infty}]{} 0$$

Por tanto tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n(k)} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 - T\right)^2\right] \xrightarrow[\substack{|\Delta^k|\to 0 \\ k\to\infty}]{} 0$$

Es decir Γ_k converge a T en L^2 conforme k tiende a ∞, con lo cual se satisface (2.8) .

□

Corolario 2.2.4. *Sean* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un movimiento browniano en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*, y* Δ^k*,* $k = 1, 2, \ldots$ *una sucesión de particiones de* $[0, T]$ *tal que si* k *tiende a* ∞ *la norma de la partición tiende a* 0*, entonces existe un conjunto* N *en* $\mathscr{F}$ *tal que* $P[N] = 0$ *y una sub sucesión de particiones* Δ^{k_m} *tal que:*

$$\Gamma_{k_m}(\omega) \xrightarrow[\substack{|\Delta^{k_m}|\to 0 \\ k_m\to\infty}]{} T$$

Para todo ω *elemento de* $\Omega \setminus N$

Demostración. Por el *Teorema 2.2.3* tenemos que Γ_k converge en L^2 a T cuando k tiende a ∞ y por los teoremas de convergencia, existe una subsucesión de particiones Δ^{k_m} tal que Γ_{k_m} converge casi seguramente a T cuando k_m tiende a ∞, esto es, existe un conjunto N en $\mathscr{F}$ de P-medida nula donde:

$$\lim_{\substack{|\Delta^{k_m}|\to 0 \\ k_m\to\infty}} \Gamma_{k_m}(\omega) = T$$

Para todo ω en $\Omega \setminus N$, como se quería demostrar.

□

En el siguiente lema se presenta la aproximación correspondiente por sumas de Riemann de $\int_0^T W \mathrm{d}W$.

Lema 2.2.5. *Sean* $\Delta_n = \left\{0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \cdots < t_{m_n}^n = T\right\}$ *una sucesión de particiones del intervalo* $[0, T]$ *tal que si* n *tiende a* ∞*, la norma de la partición tiende a* 0 *y sea* $0 \leq \lambda \leq 1$ *fijo, definimos:*

$$R_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} W_{\tau_k^n}\left(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}\right)$$

Donde $\tau_k^n := (1-\lambda)\, t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$ *Entonces:*

$$R_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} W_{\tau_{t_k}^n}\left(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}\right) \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0 \\ n\to\infty}]{L^2} \frac{W_T^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T \qquad (2.9)$$

Demostración. Considere las siguientes sumas:

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} W_{\tau_k^n}\left(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W_{t_{k+1}^n}^2 - W_{t_k^n}^2\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m_n-1} \left[W_{\tau_k^n} \left(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n} \right) - \frac{1}{2} \left(W^2_{t_{k+1}^n} - W^2_{t_k^n} \right) \right]$$

Primero veamos que pasa con un sumando de la suma anterior, esto es:

$$W_{\tau_k^n} \left(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n} \right) - \frac{1}{2} \left(W^2_{t_{k+1}^n} - W^2_{t_k^n} \right)$$

Observe que $\frac{1}{2} W^2_{t_k^n} = W^2_{t_k^n} - \frac{1}{2} W^2_{t_k^n}$, entonces:

$$= W_{\tau_k^n} W_{t_{k+1}^n} - W_{\tau_k^n} W_{t_k^n} - \frac{1}{2} W^2_{t_{k+1}^n} + W^2_{t_k^n} - \frac{1}{2} W^2_{t_k^n}$$

Ahora sumamos y restamos los términos $W_{t_{k+1}^n} W_{t_k^n}$ y $W^2_{\tau_k^n}$:

$$= \left(W^2_{\tau_k^n} + W^2_{t_k^n} - W_{\tau_k^n} W_{t_k^n} \right) + \left(-\frac{1}{2} W^2_{t_{k+1}^n} - \frac{1}{2} W^2_{t_k^n} + W_{t_{k+1}^n} W_{t_k^n} \right)$$

$$+ W_{\tau_k^n} W_{t_{k+1}^n} - W_{t_{k+1}^n} W_{t_k^n} - W^2_{\tau_k^n}$$

De manera análoga, como $-W_{\tau_k^n} W_{t_k^n} = -2 W_{\tau_k^n} W_{t_k^n} + W_{\tau_k^n} W_{t_k^n}$ tenemos que:

$$= -\frac{1}{2} \left(W^2_{t_{k+1}^n} + W^2_{t_k^n} - 2 W_{t_{k+1}^n} W_{t_k^n} \right) + \left(W^2_{\tau_k^n} + W^2_{t_k^n} - 2 W_{\tau_k^n} W_{t_k^n} \right)$$

$$+ W_{\tau_k^n} W_{t_{k+1}^n} - W_{t_{k+1}^n} W_{t_k^n} - W^2_{\tau_k^n} + W_{\tau_k^n} W_{t_k^n}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n} \right)^2 + \left(W_{\tau_k^n} - W_{t_k^n} \right)^2 + W_{t_{k+1}^n} \left(W_{\tau_k^n} - W_{t_k^n} \right)$$

$$- W_{\tau_k^n} \left(W_{\tau_k^n} - W_{t_k^n} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n} \right)^2 + \left(W_{\tau_k^n} - W_{t_k^n} \right)^2 + \left(W_{t_{k+1}^n} - W_{\tau_k^n} \right) \left(W_{\tau_k^n} - W_{t_k^n} \right)$$

Por lo tanto tenemos que las variables aleatorias R_n pueden escribirse como sigue:

$$R_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} W_{\tau_{t_k^n}} \left(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W^2_{t_{k+1}^n} - W^2_{t_k^n} \right)}_{= \frac{1}{2} W_T^2} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k} \right)^2}_{:= A_n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W_{\tau_{t_k}} - W_{t_k} \right)^2}_{:= B_n}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W_{t_{k+1}} - W_{\tau_{t_k}} \right) \left(W_{\tau_{t_k}} - W_{t_k} \right)}_{:= C_n}$$

O de manera equivalente:

$$R_n = \frac{W_T^2}{2} - A_n + B_n + C_n$$

Por el *Teorema 2.2.3* tenemos que:

$$A_n \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0\\ n\to\infty}]{L^2} \frac{T}{2} \tag{2.10}$$

Dado el desarrollo anterior, probaremos las siguientes afirmaciones:

1. $B_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W_{\tau_{t_k}} - W_{t_k}\right)^2 \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0\\ n\to\infty}]{L^2} \lambda T$
2. $C_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W_{t_{k+1}} - W_{\tau_{t_k}}\right)\left(W_{\tau_{t_k}} - W_{t_k}\right) \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0\\ n\to\infty}]{L^2} 0$

Procediendo de forma análoga al *Teorema 2.2.3* se demuestra la primer proposición ya que dada una n, si $\Delta_n = \left\{0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \cdots < t_{m_n}^n = T\right\}$ definimos a π_n como:

$$\pi_n := \lambda\Delta_n = \left\{0 = \lambda t_0^n < \lambda t_1^n < \lambda t_2^n < \cdots < \lambda t_{m_n}^n = \lambda T\right\}$$

Es decir, $(\pi_n)_n$ es una sucesión de particiones de $[0, \lambda T]$, y al estar definida $\tau_k^n := (1-\lambda)\, t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$ tenemos la siguiente igualdad:

$$\tau_k^n - t_k^n = \lambda t_{k+1}^n - \lambda t_k^n$$

Y con ello podemos concluir lo siguiente:

$$B_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W_{\tau_k^n} - W_{t_k^n}\right)^2 = \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W_{\lambda t_{k+1}^n} - W_{\lambda t_k^n}\right)^2 \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0\\ n\to\infty}]{L^2} \lambda T \tag{2.11}$$

Para demostrar 2, utilizando la desigualdad del triángulo tenemos :

$$\mathbb{E}\left[|C_n|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(W_{t_{k+1}} - W_{\tau_{t_k}}\right)\left(W_{\tau_{t_k}} - W_{t_k}\right)\right|^2\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(W_{t_{k+1}} - W_{\tau_{t_k}}\right)^2\left(W_{\tau_{t_k}} - W_{t_k}\right)^2\right]$$

Por la propiedad de incrementos independientes del m.b.:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\left(W_{t_{k+1}} - W_{\tau_{t_k}}\right)^2\right]\mathbb{E}\left[\left(W_{\tau_{t_k}} - W_{t_k}\right)^2\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\left(t_{k+1} - \tau_{t_k}\right)\left(\tau_{t_k} - t_k\right)$$

De la definición de $\tau_k^n := (1-\lambda)\,t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$ tenemos que $\tau_k^n - t_k^n = \lambda\left(t_{k+1}^n - t_k^n\right)$ y con ello:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - \tau_{t_k})\,\lambda\,(t_{k+1} - t_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta^n| \lambda\,(t_{k+1} - t_k) = \lambda T |\Delta^k| \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0\\ n\to\infty}]{} 0$$

Es decir:

$$C_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W_{t_{k+1}} - W_{\tau_{t_k}}\right)\left(W_{\tau_{t_k}} - W_{t_k}\right) \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0\\ n\to\infty}]{L^2} 0 \tag{2.12}$$

Utilizando (2.10), (2.11), (2.12) y por la propiedad de linealidad de la convergencia en L^2 tenemos la convergencia en L^2 de la siguiente suma:

$$-A_n + B_n + C_n \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0\\ n\to\infty}]{L^2} -\frac{T}{2} + \lambda T + 0 = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T$$

Con esto concluimos que se cumple (2.9) como se quería demostrar.

□

En respuesta a la pregunta planteada anteriormente, tenemos que la aproximación a $\int_0^T W\mathrm{d}W$ mediante el límite de R_n la cual es una suma de Riemann, depende de la elección de los puntos intermedios $t_k^n \leq \tau_k^n \leq t_{k+1}^n$, donde $\tau_k^n = (1-\lambda)t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$; y dichos puntos intermedios depende del valor elegido λ. Resulta que la definición de la *integral de Itô* de $\int_0^T W\mathrm{d}W$ corresponde a la elección de $\lambda = 0$. Esto es:

$$\int_0^T W\mathrm{d}W = \frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2}$$

O de manera general:

$$\int_s^r W\mathrm{d}W = \frac{W_r^2 - W_s^2}{2} - \frac{(r-s)}{2} \qquad \text{para todos } \ 0 \leq s \leq r$$

Esto no es lo que uno podría adivinar. Una definición alternativa, debida a *Stratonovich*, es tomando $\lambda = \frac{1}{2}$; esto es:

$$\int_0^T W\mathrm{d}W = \frac{W_T^2}{2}$$

Dadas las definiciones anteriores de la integral del Itô y la de Stratonovich es común preguntarse lo siguiente: ¿Cuáles son las ventajas de la integral de Itô (elegir $\lambda = 0$)?. La primer ventaja y la más importante es que la construcción de esta aproximación por sumas de Riemann se realiza evaluando el integrando en el lado izquierdo del intervalo $\left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$

2.3. Integrandos Simples

En esta sección desarrollaremos la integral estocástica para procesos simples y también probaremos algunas propiedades importantes de dicha integral, los procesos simples son necesarios para posteriormente extender dicha integral para otra clase de procesos estocásticos.

Definición 2.3.1. *Sean* $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T\}$ *una partición del intervalo* $[0,T]$ *y* $Y_0, Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1} \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *variables aleatorias tales que* Y_i *es* $\mathscr{W}_{t_i}$ *− medible para toda* i *donde* $\mathscr{W}_{t_i} = \sigma\left(\sigma\left(W_s : s \leq t_i\right) \cup \mathscr{N}\right)$. *Definimos al proceso* $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ *como:*

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} Y_0(\omega) & si\ t \in [t_0, t_1) \\ Y_1(\omega) & si\ t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ Y_{n-1}(\omega) & si\ t \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

O de manera equivalente:

$$Y_t(\omega) := \sum_{i=0}^{n-1} Y_i(\omega)\, \mathbb{I}_{[t_i, t_{i+1})}(t) \tag{2.13}$$

En tal caso, decimos que Y *es un* ***proceso simple (continuo por la derecha).*** *Denotaremos por* $\mathcal{S}_T$ *a la familia de todos los procesos simples sobre* $[0,T]$.

Habiendo definido a los procesos simples definiremos la integral estocástica adecuada para este tipo de procesos, la cual se define como sigue.

Definición 2.3.2. *Sean* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *un movimiento browniano estándar sobre* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *y* $Y \in \mathcal{S}_T$, *entonces:*

$$Y \cdot W_T := \sum_{j=1}^{n} Y_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \tag{2.14}$$

Es llamada la ***integral estocástica de*** $Y \in \mathcal{S}_T$. *En lugar de* $Y \cdot W_T$ *también suele escribirse* $\int_0^T Y_s \mathrm{d}W_s$

Observe que como (2.14) es lineal, entonces esta no depende de la representación elegida del proceso simple Y

Teorema 2.3.3. *Sean* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *un movimiento browniano,* $Y \in \mathcal{S}_T$*, entonces:*

1. *El mapeo* $Y \mapsto Y \cdot W_T$ *es lineal*
2. $\mathbb{E}\left[Y \cdot W_T\right] = 0$
3. *Propiedad de isometría:*

$$\mathbb{E}\left[\left(Y \cdot W_T\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[Y^2\right] \mathrm{d}t \tag{2.15}$$

Demostración. Para el primer punto, se tiene que si $a, b \in \mathbb{R}$ y $X, Y \in \mathcal{S}_T$, entonces por (2.13) tenemos que el proceso $aX + bY$ también está en $\mathcal{S}_T$, y por tanto está bien definida la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
(aX + bY) \cdot W_T &= \sum_{j=1}^{n} \left(aX_{j-1} + bY_{j-1}\right)\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} aX_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) + \sum_{j=1}^{n} bY_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \\
&= a\sum_{j=1}^{n} X_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) + b\sum_{j=1}^{n} Y_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \\
&= a\left(X \cdot W_T\right) + b\left(Y \cdot W_T\right)
\end{aligned}$$

Ahora demostraremos el segundo punto.

$$\mathbb{E}\left[Y \cdot W_T\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} Y_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[Y_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)\right]$$

Haciendo uso del teorema de la Esperanza Iterada y que las variables aleatorias Y_j son $\mathscr{F}_{t_i}$-medibles para toda i:

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_{j-1}}\right]\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[Y_{j-1}\,\mathbb{E}\left[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\middle|\mathscr{F}_{t_{j-1}}\right]\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[Y_{j-1}\,\mathbb{E}\left[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right]\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[Y_{j-1}\right]\,\mathbb{E}\left[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right] = 0$$

Por último, definimos las variables aleatorias:

$$X_i := Y_{i-1}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)$$

De aquí se tiene que:

$$\mathbb{E}\left[(Y \cdot W_T)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i<j} 2X_iX_j\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i^2\right] + 2\sum_{i<l} \mathbb{E}\left[X_iX_j\right] \tag{2.16}$$

Ahora veamos que para con cada uno de los siguientes casos utilizando el *teorema de la esperanza iterada*, que el proceso Y es simple y algunas propiedades del movimiento browniano:

(a) Para $i = 1, \ldots, n$:

$$\mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_i^2 \middle| \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_{i-1}^2\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 \middle| \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[Y_{i-1}^2 \mathbb{E}\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right]\right] = \mathbb{E}\left[Y_{i-1}^2\right] \mathbb{E}\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[Y_{i-1}^2\right](t_i - t_{i-1}) \tag{2.17}$$

(b) Si $i < j$:

$$\mathbb{E}\left[X_iX_j\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_iX_j \middle| \mathscr{F}_{t_{j-1}}\right]\right] = \mathbb{E}\left[X_i\ \mathbb{E}\left[X_j \middle| \mathscr{F}_{t_{j-1}}\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[Y_{i-1}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) \mathbb{E}\left[Y_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \middle| \mathscr{F}_{t_{j-1}}\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[Y_{i-1}Y_{j-1}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) \mathbb{E}\left[\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[Y_{i-1}Y_{j-1}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\right] \mathbb{E}\left[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right] = 0 \tag{2.18}$$

Con (2.17) y (2.18) tenemos que (2.16) es igual a:

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[Y_{i-1}^2\ \right](t_i - t_{i-1}) = \int_0^T \mathbb{E}\left[Y^2\right] \mathrm{d}t$$

La cual es una integral de Riemann dado que:

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] := \begin{cases} \mathbb{E}\left[Y_0^2\right] & \text{si } t \in [t_0, t_1) \\ \mathbb{E}\left[Y_1^2\right] & \text{si } t \in [t_1, t_2) \\ \quad\vdots & \qquad\vdots \\ \mathbb{E}\left[Y_{n-1}^2\right] & \text{si } t \in [t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

Es decir, se satisface la ecuación (2.15). $\square$

La ecuación (2.15) es una *isometría* entre $\left(\mathcal{S}_T, \|\cdot\|_{L^2(\lambda_T \otimes P)}\right)$ y un subespacio de $L^2(P)$, dicha ecuación también suele escribirse como:

$$\|Y \cdot W_T\|^2_{L^2(P)} = \| Y\|^2_{L^2(\lambda_T \otimes P)}$$

Dado un proceso simple Y, es natural estudiar al mapeo $T \mapsto Y \cdot W_T = \int_0^T Y_s \mathrm{d}W_s$ como una función del tiempo, por lo tanto podemos definir al siguiente proceso estocástico.

Definición 2.3.4. *Sean $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar sobre $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ y $Y \in \mathcal{S}_T$, entonces para todo $0 \leq t \leq T$ existe k tal que $t_k \leq t < t_{k+1}$ y con ello definimos al proceso $Z = (Z_t)_{t\leq T}$ como sigue:*

$$Z_t(\omega) := \sum_{j=1}^{k} Y_{j-1}(\omega)\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)(\omega) + Y_k(\omega)\left(W_t - W_{t_k}\right)(\omega) \tag{2.19}$$

En otras palabras tenemos que $Z_t(\omega) := (Y \cdot W_t)(\omega)$ para todo $0 \leq t \leq T$.

De manera análoga a la demostración del *teorema 2.3.3* se demuestra que el proceso $Z = Y \cdot W$ satisface las mismas propiedades para todo $t \geq 0$ y además, el proceso Z es una martingala.

Teorema 2.3.5. *Sean $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar sobre $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ y $Y \in \mathcal{S}_T$, entonces el proceso $Z = (Y \cdot W_t)_{t\leq T}$ es una L^2 martingala continua con respecto de la filtración browniana $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$.*

Demostración. Si $0 \leq s < t \leq T$ y $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T\}$, tenemos que considerar 2 casos:

1. Existe k tal que $t_k \leq s < t < t_{k+1}$
2. Existen $i < k$ tales que $t_i \leq s < t_{i+1} < t_k \leq t < t_{k+1}$

La idea en la demostración de cada caso es análoga y por ello sólo demostraremos el caso 2. Definamos las siguientes variables aleatorias:

$$X_j := Y_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \quad , \quad X_k^t := Y_k\left(W_t - W_{t_k}\right)$$

Con ello podemos escribir al proceso Z como $Z_t = \sum_{j=1}^{k} X_j + X_k^t$ y con esto tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_t|\mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{k} X_j + X_k^t \middle| \mathscr{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{i} X_j + X_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{k} X_j + X_k^t \middle| \mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}\left[X_j|\mathscr{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[X_{i+1}|\mathscr{F}_s\right] + \sum_{j=i+2}^{k} \mathbb{E}\left[X_j|\mathscr{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[X_k^t\middle|\mathscr{F}_s\right]
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Ahora veamos que pasa en cada uno de los siguientes 3 casos:

(a) Si $j < i+1$:
Como $t_i \leq s < t_{i+1}$ tenemos que X_j es $\mathscr{F}_s$-medible ya que Y_{j-1} al igual que $\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)$ lo son, entonces:

$$\mathbb{E}\left[X_j|\mathscr{F}_s\right] = X_j \tag{2.21}$$

(b) Si $j = i+1$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{i+1}|\mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[Y_i\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\middle|\mathscr{F}_s\right] = Y_i\, \mathbb{E}\left[\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\middle|\mathscr{F}_s\right] \\
&= Y_i\left(\mathbb{E}\left[W_{t_{i+1}}\middle|\mathscr{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[W_{t_i}|\mathscr{F}_s\right]\right) = Y_i\left(W_s - W_{t_i}\right) = X_i^s
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

(c) Si $j > i+1$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_j|\mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[Y_{j-1}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)\middle|\mathscr{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Y_{j-1}|\mathscr{F}_s\right]\mathbb{E}\left[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right] = 0
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

De manera análoga al *caso (c)* se demuestra que $\mathbb{E}\left[X_k^t|\mathscr{F}_s\right] = 0$. Gracias a (2.21), (2.22) y (2.23) tenemos que que (2.20) es igual a:

$$= \sum_{j=1}^{i} X_j + X_i^s + 0 =: Z_s$$

Con lo cual se satisface el teorema. □

Cabe mencionar que al igual que antes, los resultados antes mencionados siguen siendo válidos para $T = \infty$ y $[0, \infty)$, por simplicidad, en este trabajo nos restringimos al caso $T < \infty$.

Dicha integral a pesar de que se extiende a procesos simples sigue sin ser suficiente para nuestros propósitos pues sigue presentando dificultades ya que nos impide realizar integrales de la forma $\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$. En donde H_s es un proceso progresivamente medible.

2.4. ¿Quién es la cerradura de $\mathcal{S}_T$?

En la sección siguiente extenderemos la integral estocástica a la cerradura de $\mathcal{S}_T$, para ello, en esta sección veremos como es este espacio. Para esto necesitamos algunos preliminares.

Definición 2.4.1. *Denotaremos por $\mathcal{L}_T^2$ a la cerradura $\bar{\mathcal{S}}_T$ de la clase de procesos simples $\mathcal{S}_T$ con respecto de la norma en $L^2(\lambda_T \otimes P)$.*

Definición 2.4.2. *Sean $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar y $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtración browniana. Un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\geq 0}$ es* ***progresivamente medible*** *con respecto a la filtración browniana si para cada $t \geq 0$ y $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, el conjunto:*

$$\{(s,\omega)\,; 0 \leq s \leq t, \omega \in \Omega, X_s(\omega) \in A\}$$

pertenece al producto de σ-álgebras $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$; en otras palabras, el mapeo:

$$(s,\omega) \mapsto X_t(\omega) : ([0,t] \times \Omega, \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

es medible, para cada $t \geq 0$. Por $\Gamma^2(\lambda_T \otimes P)$ denotaremos a la clase de procesos progresivamente medibles en $L^2(\lambda_T \otimes P)$.

Observe que por el *teorema 2.2.3* tenemos que el movimiento browniano pertenece a $\Gamma^2(\lambda_T \otimes P)$.

Lema 2.4.3. *Sea $T > 0$. Entonces $\left(\Gamma^2(\lambda_T \otimes P), \|\cdot\|_{L^2(\lambda_T \otimes P)}\right)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Por definición tenemos que $\Gamma^2(\lambda_T \otimes P) \subset L^2(\lambda_T \otimes P)$ es un subespacio y $L^2(\lambda_T \otimes P)$ es un espacio de Hilbert con la norma $\|\cdot\|_{L^2(\lambda_T \otimes P)}$. Es por ello que basta demostrar que para una sucesión de procesos $(Z_n)_{n\geq 0} \subset \Gamma^2(\lambda_T \otimes P)$ tal que $L^2(\lambda_T \otimes P) - \lim_{n\to\infty} Z_n = Z$, entonces el límite Z pertenece a $\Gamma^2(\lambda_T \otimes P)$.

Como el proceso Z_n converge en L^2 a Z, entonces por el *teorema 2.2.4* tenemos que existe una subsucesión $(Z_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que:

$$Z_{n_k}(t,\omega) \longrightarrow Z(t,\omega) \quad \text{para casi todo } (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$$

Entonces Z preserva la propiedades de medibilidad de los procesos Z_n. Por lo tanto Z es un proceso progresivamente medible, es decir, $Z \in \Gamma^2(\lambda_T \otimes P)$ como se quería demostrar.

Por lo tanto, $\left(\Gamma^2(\lambda_T \otimes P), \|\cdot\|_{L^2(\lambda_T \otimes P)}\right)$ es un espacio de Hilbert.

□

Nuestro objetivo es demostrar que $\mathcal{L}_T^2 = \Gamma^2(\lambda_T \otimes P)$. Para ello necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.4.4. ***(Lema Determinista)*** *En el espacio $L^2[0,T]$ de todas las funciones $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ cuadrado integrables, definimos al operador $P_n : L^2[0,T] \to L^2[0,T]$ por:*

$$P_n f(t) = \sum_{j=1}^{n} \left[\xi_{j-1} \mathbb{I}_{[t_{j-1}, t_j)}(t)\right] \tag{2.24}$$

donde

$$\xi_0 = 0 \quad y \quad \xi_{j-1} = \frac{n}{T} \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} f(s)\mathrm{d}s \ , \quad j \geq 2 \tag{2.25}$$

con $(t_j)_{j=0}^n$ la partición uniforme de $[0,T]$: $\left(t_j = \frac{jT}{n}\right)$. Entonces:

1. *Para ϕ continua sobre $[0,T]$:*

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n\phi - \phi\|_{L^2(\lambda_T)} = 0$$

2. *Si $\varphi \in L^2[0,T]$ entonces existe una sucesión $(G_n)_n$ de funciones elementales sobre $[0,T]$ tales que:*

$$\lim_{n\to\infty} \|G_n - \varphi\|_{L^2(\lambda_T)} = 0$$

Demostración. Dado que $(t_j)_{j=0}^n$ es la partición uniforme de $[0,T]$, podemos escribir a la ecuación (2.25) como sigue:

$$\xi_{j-1} = \frac{n}{T} \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} \phi(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{t_{j-1} - t_{j-2}} \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} \phi(s)\mathrm{d}s$$

Ahora, por la continuidad de ϕ podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales, es decir, para cada $j \geq 2$ existe $t_{j-2} < \tau_{j-1}^n < t_{j-1}$ tal que:

$$\int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} \phi(s)\mathrm{d}s = \phi\left(\tau_{j-1}^n\right)(t_{j-1} - t_{j-2})$$

es decir:

$$\xi_{j-1} = \frac{1}{t_{j-1} - t_{j-2}} \phi\left(\tau^n_{j-1}\right)(t_{j-1} - t_{j-2}) = \phi\left(\tau^n_{j-1}\right)$$

Lo cual nos permite escribir al operador P_n como sigue:

$$P_n \phi = \sum_{j=1}^{n} \left[\xi_{j-1} \mathbb{I}_{[t_{j-1}, t_j)}\right] = \sum_{j=1}^{n} \left[\phi\left(\tau^n_{j-1}\right) \mathbb{I}_{[t_{j-1}, t_j)}\right] \tag{2.26}$$

Además, la continuidad de ϕ sobre $[0, T]$ implica también que ϕ es uniformemente continua sobre $[0, T]$, lo cual implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|u - v| < \delta$, entonces $|\phi(u) - \phi(v)| < \varepsilon$. Para poder hacer uso de esta propiedad, es decir:

$$\left|\phi\left(\tau^n_{j-1}\right) - \phi(s)\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{T}}$$

necesitamos que $\tau^n_{j_1}$ y s disten una cantidad menor a δ, el problema es que $\tau^n_{j_1}$ pertenece al intervalo $[t_{j-2}, t_{j-1}]$ cuando s pertenece a $[t_{j-1}, t_j]$.Por otro lado la propiedad arquimediana implica que para cada $\kappa > 0$ existe un natural N tal que $\frac{1}{N} < \kappa$; considerando $\kappa = \frac{\delta}{2T}$ tenemos que existe N tal que si $n > N$, entonces:

$$\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2T} \implies 2\frac{T}{n} < \delta$$

es decir, la longitud de dos intervalos consecutivos de la partición uniforme Δ_n tienen una longitud menor a δ; con lo que podemos concluir lo siguiente:

$$\int_0^T |P_n\phi(s) - \phi(s)|^2 \, \mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left|\phi\left(\tau^n_{j-1}\right) - \phi(s)\right|^2 \mathrm{d}s < \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{T}(t_{j-1} - t_j) = \varepsilon$$

es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |P_n\phi(s) - \phi(s)|^2 \, \mathrm{d}s = 0$$

Con lo cual queda demostrada la primera parte de este lema.

Ahora sea $\varphi \in L^2[0, T]$, entonces por *(Rudin - Real and Complex Analysis - Teorema 3.14)* el conjunto $C_{s.c.}[0, T]$ de las funciones continuas de soporte compacto es denso en $L^2[0, T]$ con respecto de la norma $L^2(\lambda_T)$, entonces existe una función $\psi \in C_{s.c.}[0, T]$ tal que:

$$\|\varphi - \psi\|_{L^2(\lambda_T)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.27}$$

y para esa ψ, existe un natural n tal que:

$$\|\psi - P_n\psi\|_{L^2(\lambda_T)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.28}$$

Finalmente, por las ecuaciones (2.27), (2.28) y por la desigualdad del triángulo tenemos lo siguiente:

$$\|\varphi - P_n\psi\|_{L^2(\lambda_T)} \le \|\varphi - \psi\|_{L^2(\lambda_T)} + \|\psi - P_n\psi\|_{L^2(\lambda_T)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto, si definimos para cada n a $G_n := P_n\psi$ se cumple la segunda parte del lema, es decir:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |G_n\phi(s)-\phi(s)|^2\,\mathrm{d}s = 0$$

Como se quería demostrar.

$\square$

Teorema 2.4.5. *La cerradura de $\mathcal{S}_T$ con respecto a la norma $L^2(\lambda_T\otimes P)$ es $\Gamma^2(\lambda_T\otimes P)$.*

Demostración. Claramente $\mathcal{S}_T\subset\Gamma^2(\lambda_T\otimes P)$. Por el *lema 2.4.3*, tenemos que la clase $\Gamma^2(\lambda_T\otimes P)$ es cerrada bajo la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_T^2}$, entonces $\bar{\mathcal{S}}_T=\mathcal{L}_T^2\subset\Gamma^2(\lambda_T\otimes P)$. Ahora falta demostrar que $\Gamma^2(\lambda_T\otimes P)\subset\mathcal{L}_T^2$.

Para ello, sea $H\in\Gamma^2(\lambda_T\otimes P)$, por el teorema de la convergencia dominada podemos ver que el proceso truncado $H_n := -n\vee H\wedge n$ converge en $L^2(\lambda_T\otimes P)$ a H cuando n tiende a ∞. Por lo tanto podemos asumir que el proceso H es acotado.

Definimos para cada ω una sucesión de procesos simples $G_n(t,\omega)$ como en el *lema 2.4.4*, es decir:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |G_n(s,\omega)-H(s,\omega)|^2\,\mathrm{d}s = 0$$

Además como H es acotada también lo es G_n y con ello, el teorema de la convergencia dominada nos implica lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_0^T |G_n(s,\omega)-H(s,\omega)|^2\,\mathrm{d}s\right]=0$$

o de manera equivalente:

$$L^2(\lambda_T\otimes P)-\lim_{n\to\infty}G_n = H$$

Así, como $G_n\in\mathcal{S}_T$ tenemos por la cerradura de $\mathcal{S}_T$ que $H\in\mathcal{L}_T^2$. Con ello queda demostrado que la cerradura de $\mathcal{S}_T$ es $\Gamma^2(\lambda_T\otimes P)$.

$\square$

2.5. Extensión de la integral estocástica a $\mathcal{L}_T^2$

En esta sección extenderemos la integral estocástica a la cerradura de $\mathcal{S}_T$, con respecto de la norma en $L^2(\lambda_T \otimes P)$. También demostraremos algunas propiedades de esta integral, las cuales son heredadas de las propiedades de la integral en $\mathcal{S}_T$.

Para poder definir la integral estocástica en $\mathcal{L}_T^2$ necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.5.1. *Sea W un movimiento browniano y $\{H_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}_T$ una sucesión con límite $H \in \mathcal{L}_T^2$, entonces para cada $0 \leq t \leq T$, el siguiente límite:*

$$L^2(P) - \lim_{n\to\infty} H_n \cdot W_t \tag{2.29}$$

existe y no depende de la sucesión aproximante.

Demostración. Gracias a la propiedad de isometría para procesos simples (2.15) tenemos que para toda sucesión $\{H_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}_T$ con límite $H \in \mathcal{L}_T^2$:

$$\begin{aligned}
\|H_n \cdot W_T - H_m \cdot W_T\|_{L^2(P)}^2 &= \|(H_n - H_m)\cdot W_T\|_{L^2(P)}^2 \\
&= \mathbb{E}\left[((H_n - H_m)\cdot W_T)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T |H_n(s,\cdot) - H_m(s,\cdot)|^2 \,\mathrm{d}s\right] \\
&= \|H_n - H_m\|_{L^2(\lambda_T\otimes P)}^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

De manera análoga, se satisface la prueba para cada $0 \leq t \leq T$, lo cual demuestra la existencia del límite ya que el espacio $\left(\mathcal{S}_T, \|\cdot\|_{L^2(\lambda_T\otimes P)}\right)$ es un espacio de Hilbert.

Ahora supongamos que $\{H_n\}_{n\geq 1}$ y $\{L_n\}_{n\geq 1}$ son dos sucesiones distintas en $\mathcal{S}_T$, ambas con límite $H \in \mathcal{L}_T^2$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|H_n \cdot W_T - L_n \cdot W_T\|_{L^2(P)}^2 &= \|H_n - L_n\|_{L^2(\lambda_T\otimes P)}^2 \\
&= \|H_n - H + H - L_n\|_{L^2(\lambda_T\otimes P)}^2
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\|H_n - H\|_{L^2(\lambda_T\otimes P)} + \|L_n - H\|_{L^2(\lambda_T\otimes P)}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Es decir:

$$L^2(P) - \lim_{n\to\infty} H_n \cdot W_t = L^2(P) - \lim_{n\to\infty} L_n \cdot W_t$$

Con lo cual queda demostrado el lema. □

Definición 2.5.2. *Sea W un movimiento browniano y $H \in \mathcal{L}_T^2$ la **integral estocástica** o **integral de Itô** se define como:*

$$H \cdot W_t = \int_0^t H(s)\,\mathrm{d}W_s := L^2(P) - \lim_{n\to\infty} H_n \cdot W_t \tag{2.30}$$

Para todo $0 \leq t \leq T$, donde $\{H_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}_T$ es cualquier sucesión que converge a $H \in \mathcal{L}_T^2$ con la norma $L^2(\lambda_T \otimes P)$.

La integral estocástica así definida se construye de tal manera que las propiedades de los teoremas 2.3.3 y 2.3.5 son heredadas para la integral de Itô de $H \in \mathcal{L}_T^2$.

Teorema 2.5.3. *Sea $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento browniano, $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración browniana y $H \in \mathcal{L}_T^2$, entonces para todo $t \leq T$:*

1. *$H \mapsto H \cdot W$ es un mapeo lineal*
2. *$\mathbb{E}[H \cdot W_t] = 0$*
3. *Isometría de Itô:*

$$\|H \cdot W_T\|_{L^2(P)}^2 = \mathbb{E}\left[(H \cdot W_T)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H^2(s)\,\mathrm{d}s\right] = \|\ H\|_{L^2(\lambda_T\otimes P)}^2 \tag{2.31}$$

4. *El proceso estocástico $Z := \{H \cdot W_t\}_{t\leq T}$ es una L^2 martingala continua con respecto a la filtración browniana.*

Demostración. A lo largo de la prueba, fijaremos $H \in \mathcal{L}_T^2$ y alguna sucesión $H_n \in \mathcal{S}_T$ tal que $L^2(\lambda_T \otimes P) - \lim_{n\to\infty} H_n = H$. Claramente, todos las afirmaciones son ciertas para $H_n \cdot W$ y solo tenemos que ver que el límite en L^2 preserva dichas propiedades también.

(1) Es inmediato por el *teorema 2.3.3 1* y la linealidad de la convergencia en $L^2(\lambda_T \otimes P)$.

(2) Por la desigualdad de Jensen tenemos lo siguiente:

$$(\mathbb{E}[H_n \cdot W_t - H \cdot W_t])^2 \leq \mathbb{E}\left[(H_n \cdot W_t - H \cdot W_t)^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

lo cual implica:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[H \cdot W_t - H_n \cdot W_t\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}\left[H \cdot W_t\right] - \mathbb{E}\left[H_n \cdot W_t\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[H \cdot W_t\right]
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Pero este límite no depende de n, por lo tanto $\mathbb{E}\left[H \cdot W_t\right] = 0$.

(3). Es una consecuencia del *teorema 2.3.3*. Como $L^2\left(\lambda_t \otimes P\right) - \lim_{n\to\infty} H_n = H$, por el *Corolario 2.2.4* tenemos que existe una subsucesión n_k tal que $H_{n_k} \cdot W_t$ converge casi seguramente a $H \cdot W_t$ cuando k tiende a ∞, es decir:

$$\left(H_{n_k} \cdot W\right)_t \xrightarrow[k\to\infty]{L^2} H \cdot W_t \quad y \quad \left(H_{n_k} \cdot W\right)_t \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} H \cdot W_t$$

Por *Royden - Real Analysis pp 118* [7] tenemos que:

$$\left(H_{n_k} \cdot W\right)_t \xrightarrow[k\to\infty]{L^2} H \cdot W_t \Longleftrightarrow \left\|\left(H_{n_k} \cdot W\right)_t\right\|_{L^2(P)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \left\|H \cdot W_t\right\|_{L^2(P)} \tag{2.33}$$

Además, aplicando la propiedad de isometría para procesos simples (2.15), tenemos que:

$$\left\|\left(H_{n_k} \cdot W\right)_t\right\|_{L^2(P)} = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_{n_k}^2 \mathrm{d}s\right] \tag{2.34}$$

Ahora analizaremos la convergencia de la esperanza de esta ecuación, para ello observemos que:

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[\int_0^t H_{n_k}^2 \mathrm{d}s\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^t H^2 \mathrm{d}s\right]\right| &= \left|\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(H_{n_k}^2 - H^2\right) \mathrm{d}s\right]\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \left|H_{n_k}^2 - H^2\right| \mathrm{d}s\right]
\end{aligned} \tag{2.35}$$

y como:

$$\left|H_{n_k}^2 - H^2\right| \leq \left|H_{n_k} - H\right|^2 + 2\left|H\right|\left|H_{n_k} - H\right|$$

obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\left|\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(H_{n_k}^2 - H^2\right) \mathrm{d}s\right]\right| \leq \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|H_{n_k} - H\right|^2 \mathrm{d}s\right]}_{=:A_k} + 2\underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|H\right|\left|H_{n_k} - H\right| \mathrm{d}s\right]}_{=:B_k} \tag{2.36}$$

Por otro lado, la desigualdad de Cauchy-Schwartz nos conduce a:

$$\int_0^t \left|H\right|\left|H_{n_k} - H\right| \mathrm{d}s \leq \sqrt{\int_0^t \left|H\right|^2 \mathrm{d}s}\ \sqrt{\int_0^t \left|H_{n_k} - H\right|^2 \mathrm{d}s} \tag{2.37}$$

y aplicando el operador esperanza:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |H|\,|H_{n_k}-H|\,\mathrm{d}s\right] \leq \mathbb{E}\left[\sqrt{\int_0^t |H|^2\,\mathrm{d}s}\,\sqrt{\int_0^t |H_{n_k}-H|^2\,\mathrm{d}s}\right] \tag{2.38}$$

Nuevamente por la desigualdad de Cauchy-Schwartz aplicada a la esperanza:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&\left[\sqrt{\int_0^t |H|^2\,\mathrm{d}s}\,\sqrt{\int_0^t |H_{n_k}-H|^2\,\mathrm{d}s}\right]\\ &\leq \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H^2\mathrm{d}s\right)^2\right]}}_{\alpha}\,\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |H_{n_k}-H|^2\,\mathrm{d}s\right)^2\right]}\end{aligned} \tag{2.39}$$

Por otro lado, la desigualdad de Jensen nos conduce a lo siguiente:

$$\left(\int_0^t |H_{n_k}-H|^2\,\mathrm{d}s\right)^2 \leq \int_0^t |H_{n_k}-H|^2\,\mathrm{d}s \tag{2.40}$$

y con ello:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |H_{n_k}-H|^2\,\mathrm{d}s\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t |H_{n_k}-H|^2\,\mathrm{d}s\right] \tag{2.41}$$

Finalmente, de las ecuaciones tenemos una cota para B_k, es decir:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |H|\,|H_{n_k}-H|\,\mathrm{d}s\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H^2\mathrm{d}s\right)^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[\int_0^t |H_{n_k}-H|^2\,\mathrm{d}s\right]} \tag{2.42}$$

Y gracias a este hecho podemos escribir a (2.36) como:

$$\left|\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(H_{n_k}^2-H^2\right)\mathrm{d}s\right]\right| \leq A_k + 2\left(\alpha\,\sqrt{A_k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \tag{2.43}$$

Esta convergencia se debe a que A_k tiende a 0 cuando k tiende a ∞ pues por definición H_n converge a H en la norma $L^2\left(\lambda_T\right)$. Retomando la ecuación (2.34) y tomando límtes tenemos que:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\left(H_{n_k}\cdot W\right)_t\right\|_{L^2(P)} = \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_0^t H_{n_k}^2\mathrm{d}s\right]$$

la cual converge por (2.33) y (2.43) a la propiedad de isometría:

$$\|H\cdot W_t\|_{L^2(P)} = \mathbb{E}\left[\int_0^t H^2\mathrm{d}s\right] \tag{2.44}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(H\cdot W_t)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\lim_{k\to\infty}(H_{n_k}\cdot W_t)^2\right] = \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left[(H_{n_k}\cdot W_t)^2\right] \\
&= \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_0^t H_{n_k}^2 \mathrm{d}s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H^2 \mathrm{d}s\right]
\end{aligned}
$$

(4) Como $\{H_n\}_{n\geq 1}\subset \mathcal{S}_T^2$ es una sucesión con limite $H\in\mathcal{L}_T^2$, entonces:

$$
\lim_{n\to\infty}\|H_n\cdot W_t - H\cdot W_t\|_{L^2(P)} = 0
$$

En particular veamos que para una subsucesión n_k:

$$
\lim_{k\to\infty}\|H_{n_k}\cdot W_t - H\cdot W_t\|_{L^2(P)} = 0 \quad \text{para casi toda } \omega \tag{2.45}
$$

Por otro lado, como $H_{n_k}\cdot W$ es continua casi seguramente tenemos que:

$$
\lim_{k\to\infty}\|H_{n_k}\cdot W_s - H_{n_k}\cdot W_t\|_{L^2(P)} = 0 \quad \text{para casi toda } \omega \tag{2.46}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\|H\cdot W_s - H\cdot W_t\|_{L^2(P)} &\leq \|H\cdot W_s - H_{n_k}\cdot W_s\|_{L^2(P)} + \|H_{n_k}\cdot W_s - H\cdot W_s\|_{L^2(P)} \\
&\leq \|H\cdot W_s - H_{n_k}\cdot W_s\|_{L^2(P)} + \|H_{n_k}\cdot W_s - H_{n_k}\cdot W_t\|_{L^2(P)} \\
&\quad + \|H_{n_k}\cdot W_t - H\cdot W_t\|_{L^2(P)} \\
&\xrightarrow[k\to\infty]{} 0
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

Lo cual muestra que $s\mapsto H\cdot W_s$ es continua. Ahora, para cada $0\leq s\leq T$ tenemos que si $s<t$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[H\cdot W_t|\mathscr{F}_s\right] &= L^2(P) - \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[H_n\cdot W_t|\mathscr{F}_s\right] \\
&= L^2(P) - \lim_{n\to\infty} H_n\cdot W_s \\
&= H\cdot W_s
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Por lo tanto $H\cdot W$ es una martingala continua.

□

Capítulo 3

Fórmula de Itô y Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Usualmente una integral de Riemann no es calculada mediante su definición, si no que en lugar de ello se utilizan una serie de fórmulas conocidas que agilizan y simplifican los cálculos. Una situación similar se presenta para el caso de las integrales estocásticas. En lo sucesivo, la función $f(x,t)$, real de variables reales, a la que nos referiremos pertenecerá al espacio $\mathcal{C}^2$, es decir, que posee segundas derivadas continuas.

3.1. Kiyosi Itô

Kiyosi Itô es uno de los pioneros de la teoría de la probabilidad, y el creador del cálculo de Itô. Publicada por primera vez en 1942 en Japón, esta teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas describen evoluciones no deterministas y aleatorias.

La llamada fórmula de Itô ha encontrado aplicaciones en otras ramas de las matemáticas, así como en varios otros campos incluyendo por ejemplo la teoría conforme de campos en la física, la teoría de control estocástico en ingeniería, genética de poblaciones de la biología, y mas recientemente en las finanzas matemáticas.

La cita de la Academia Nacional de Ciencias afirma:

Si se descalifica el Teorema de Pitágoras de la contienda, es difícil pensar en un resultado matemático que es más conocido y más ampliamente aplicado en el mundo de hoy que el "Lema de Itô". Este resultado mantiene la misma posición

Figura 3.1: Kiyosi Itô en la conferencia en honor a su octogésimo cumpleaños, Universidad de Kyoto, septiembre de 1995.

en el análisis estocástico que el teorema fundamental de Newton sostienen en el análisis clásico.

Además de ser conocido por sus brillantes logros matemáticos durante una larga y productiva carrera que abarca más de sesenta años, Itô ha sido un maestro verdaderamente inspirador para muchos matemáticos en Japón y en el resto del mundo. Ha recibido numerosos premios y distinciones nacionales e internacionales, incluyendo en 1987 al premio en matemáticas de la fundación Wolf, en 1998 al premio Kyoto en ciencias básicas y en 2003 al Premio al Mérito Cultural de Japón. En el año 2006 Itô fue galardonado con el primer Premio Carl Friedrich Gauss para Aplicaciones de la Matemática.

3.2. Reglas Básicas de Diferenciación Estocástica

En esta sección se ilustra un ejemplo de la integral estocástica, aunque es muy sencillo, constituye la regla esencial del cálculo estocástico. Consideremos un movimiento Browniano $W = (W_s)_{0\leq s\leq t}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, y una sucesión $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ de particiones del intervalo $[0,t]$ donde $\Delta_n := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m_n} = t\}$, tal que la norma de la partición $\|\Delta\|$ tiende a cero. Considere la siguiente sucesión de variables aleatorias:

$$\Gamma_n = \sum_{i=1}^{m_n} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Gracias al *teorema de variación cuadrática* tenemos que:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[(\Gamma_n - t)^2\right] = 0 \tag{3.1}$$

Por dicha razón, parece razonable escribir:

$$\int_0^t (\mathrm{d}W_s)^2 := L^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} (\Delta W_{t_i})^2 = L^2 - \lim_{n\to\infty} \Gamma_n = t$$

Donde, de acuerdo con (3.1), la convergencia es en media cuadrática, es decir, en $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. En otras palabras:

$$\int_0^t (\mathrm{d}W_s)^2 = t \tag{3.2}$$

Por ello, con cierto abuso de notación (3.2) se puede escribir en forma diferencial como:

$$(\mathrm{d}W_s)^2 = \mathrm{d}t \tag{3.3}$$

En términos estrictos, los objetos de estudio del cálculo estocástico son integrales y no diferenciales. Cuando se escribe una ecuación diferencial estocástica, realmente se está pensando en un integral estocástica. Así pues, la ecuación (3.3) es una notación simplificada de (3.2). La regla central del cálculo estocástico, que hace la distinción con el cálculo de variables reales, es que el cuadrado de una cantidad infinitesimal y aleatoria es significativa.
De manera análoga, podemos demostrar que:

$$\int_0^t (\mathrm{d}s)\,(\mathrm{d}W_s) := L^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} (\Delta W_{t_i})\,(\Delta t_i) = L^2 - \lim_{n\to\infty} = 0$$

Lo cual equivale, en notación diferencial a:

$$(\mathrm{d}t)\,(\mathrm{d}W_t) = 0 \tag{3.4}$$

En el cálculo de variables reales, si t es una variable independiente, se tiene que el cuadrado de una cantidad infinitesimal, $(\mathrm{d}t)^2$, es una cantidad despreciable y se escribe:

$$(\mathrm{d}t)^2 = 0 \tag{3.5}$$

Así pues, las reglas básicas de diferenciación estocástica, (3.3), (3.4) y (3.5), también llamadas reglas empíricas de diferenciación estocástica, se resumen en el cuadro siguiente:

$\bullet$	$\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}W_t$
$\mathrm{d}t$	0	0
$\mathrm{d}W_t$	0	$\mathrm{d}t$

Tabla 3.1: Reglas básicas de diferenciación estocástica

3.3. Proceso de Itô

Antes de estudiar las fórmulas de Itô, definiremos en esta sección a los proceso de Itô mencionando algunos ejemplos, posteriormente definiremos la integral estocástica con respecto de un proceso de Itô.

Definición 3.3.1. ***(Proceso de Itô)*** *Sean $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano estándar sobre $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ y $X = (X_t : t \geq 0)$ un proceso estocástico tal que:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u\,(s,\omega\,)\,\mathrm{d}s + \int_0^t v\,(s,\omega\,)\,\mathrm{d}W_s \tag{3.6}$$

O de manera equivalente:

$$\mathrm{d}X_t = u_t\mathrm{d}t + v_t\mathrm{d}W_t \tag{3.7}$$

Donde X_0 es no aleatorio, u, v son procesos estocásticos adaptados a la filtación natural del movimiento browniano que respectivamente verifican:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t v^2\,(s,\omega\,)\,\mathrm{d}s\right] < \infty \quad , \quad \mathbb{E}\left[\int_0^t |u\,(s,\omega\,)|\,\mathrm{d}s\right] < \infty \tag{3.8}$$

Decimos que (3.6) y (3.7) son respectivamente la forma integral y diferencial del proceso X. En tal caso, decimos que X es un ***proceso de Itô****.*

A continuación veremos algunos ejemplos de procesos estocásticos que son procesos de Itô.

Ejemplo 3.3.2. *Como primer ejemplo veremos que el movimiento browniano es un proceso de Itô, es facil ver que podemos escribir a W_t como sigue:*

$$W_t = \int_0^t \mathrm{d}W_s$$

lo cual equivale a lo siguiente:

$$W_t = W_0 + \int_0^t \underbrace{0}_{u(s,\omega)} \mathrm{d}s + \int_0^t \underbrace{1}_{v(s,\omega)} \mathrm{d}W_s$$

Y al ser $u\,(s,\omega\,)$ y $v\,(s,\omega\,)$ constantes, se satisfacen las condiciones (3.8), con lo cual concluimos que el movimiento browniano es un proceso de Itô.

Ejemplo 3.3.3. *De acuerdo al Lema 2.2.5, tenemos la integral de Itô:*

$$\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s = \frac{W_t^2}{2} - \frac{1}{2}t$$

por consiguiente, dado que $W_0 = 0$, esta ecuación equivale a:

$$\frac{W_t^2}{2} = \frac{W_0^2}{2} + \int_0^t \underbrace{\frac{1}{2}}_{u(s,\omega)} \mathrm{d}s + \int_0^t \underbrace{W_s}_{v(s,\omega)} \mathrm{d}W_s$$

o bien:

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}W_t^2\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}t + W_t \mathrm{d}W_t$$

Donde los procesos $u(s,\omega\,) = \frac{1}{2}$ y $v(s,\omega\,) = W_s(\omega)$ así definidos satisfacen las condiciones (3.8). Con esto concluimos que $\frac{1}{2}W^2$ es un proceso de Itô.

Ahora se definen las integrales estocásticas para procesos adaptados con respecto de un proceso de Itô.

Definición 3.3.4. ***(Integral con respecto de un proceso de Itô)*** *Sean $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Itô como en (3.6), es decir:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u\,(s,\omega\,)\,\mathrm{d}s + \int_0^t v\,(s,\omega\,)\,\mathrm{d}W_s$$

donde los proceso u y v satisfacen las condiciones (3.8) ,y $H = (H_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado a la filtración browniana tal que para cada $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 v_s^2 \mathrm{d}s\right] < \infty \quad y \quad \int_0^t |H_s u_s|\,\mathrm{d}s < \infty$$

Definimos las integral de H con respecto del proceso de Ito X como:

$$\int_0^t H_s \mathrm{d}X_s := \int_0^t H_s v_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t H_s u_s \mathrm{d}s$$

3.4. Fórmulas de Itô

Esta sección la dedicaremos a deducir las fórmulas de Itô utilizando las herramientas de integración estocástica desarrolladas en el capítulo anterior.

Teorema 3.4.1. ***(1ª Fórmula de Itô)*** *Sean $f \in \mathcal{C}^2_{ac}(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x un número real y W un movimiento Browniano, entonces pata toda $t \geq 0$:*

$$f(x+W_t) = f(x) + \int_0^t f'(x+W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(x+W_s)\,\mathrm{d}s \tag{3.9}$$

Demostración. Debido a la regla $(\mathrm{d}W_s)^2 = \mathrm{d}t$, es conveniente calcular la diferencial de $f(W_t)$ considerando los términos de segundo orden en una expansión en serie de Taylor:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + R_2$$

Considerando $x = a+h$ se tiene:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \frac{1}{2}f''(a)(h)^2 + R_2$$

Sustituyendo $a = x + W_{t_j}$ y $h = \Delta W_{t_j} := W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ tenemos lo siguiente:

$$f\left(x+W_{t_j}+\Delta W_{t_j}\right) = f\left(x+W_{t_j}+W_{t_{j+1}}-W_{t_j}\right) = f\left(x+W_{t_{j+1}}\right)$$

$$= f\left(x+W_{t_j}\right) + f'\left(x+W_{t_j}\right)\left(\Delta W_{t_j}\right) + \frac{1}{2}f''\left(x+W_{t_j}\right)\left(\Delta W_{t_j}\right)^2 + R_{2,j}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f\left(x+W_{t_{j+1}}\right) - f\left(x+W_{t_j}\right) &= \\ f'\left(x+W_{t_j}\right)\left(\Delta W_{t_j}\right) &+ \frac{1}{2}f''\left(x+W_{t_j}\right)\left(\Delta W_{t_j}\right)^2 + R_{2,j} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Además, si $\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m_n} = t\}$ es una sucesión de particiones de $[0,t]$ tal que si n tiende a infinito, la norma de la partición $|\Delta_n|$ tiende a cero, entonces:

$$f(x+W_t) - f(x) = \sum_{j=0}^{m_n-1}\left\{f\left(x+W_{t_{j+1}}\right) - f\left(x+W_{t_j}\right)\right\} \tag{3.11}$$

Sustituyendo (3.10) en (3.11) tenemos que:

$$f\left(x+W_t\right)-f\left(x\right)= \underbrace{\sum_{j=0}^{m_n-1} f'\left(x+W_{t_j}\right)\left(\Delta W_{t_j}\right)}_{\Gamma_n}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m_n-1} f''\left(x+W_{t_j}\right)\left(\Delta W_{t_j}\right)^2}_{V_n}+\underbrace{\sum_{j=0}^{m_n-1} R_{2,j}}_{\rho_n} \tag{3.12}$$

Como la sucesión $\left\{W_n\right\}_{n\geq 0}$ de procesos estocásticos:

$$W_n\left(s,\omega\right):=\begin{cases} W_0\left(\omega\right) & \text{si } s\in\left[0,t_1\right) \\ W_{t_1}\left(\omega\right) & \text{si } s\in\left[t_1,t_2\right) \\ W_{t_2}\left(\omega\right) & \text{si } s\in\left[t_2,t_3\right) \\ \vdots & \vdots \\ W_{t_{m_n-1}}\left(\omega\right) & \text{si } s\in\left[t_{m_n-1},t\right] \end{cases}$$

Es una sucesión de procesos simples que converge en media cuadrática al movimiento Browniano y por ello también converge en probabilidad. Como f' es continua , la sucesión de procesos simples $\left\{f'\left(x+W_n\right)\right\}_n$ converge en probabilidad al proceso $f'\left(x+W\right)$, y al ser f' acotada, también se da esta convergencia en media cuadrática. Finalmente por el *teorema de variación cuadrática* tenemos que:

$$\Gamma_n \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0\\ n\to\infty}]{L^2} \int_0^t f'\left(x+W_s\right)\mathrm{d}W_s \tag{3.13}$$

Por otro lado, al ser f acotada:

$$\begin{aligned} f''\left(x+W_{t_j}\right)\left(\Delta W_{t_j}\right)^2-f''\left(x+W_{t_j}\right)\Delta t_j &= f''\left(W_{t_j}\right)\left(\left(\Delta W_{t_j}\right)^2-\Delta t_j\right) \\ &\leq M\left(\left(\Delta W_{t_j}\right)^2-\Delta t_j\right) \end{aligned}$$

Lo cual implica, por el *teorema de variación cuadrática* que:

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{m_n-1} f''\left(x+W_{t_j}\right)\left(\Delta W_{t_j}\right)^2-\sum_{j=0}^{m_n-1} f''\left(x+W_{t_j}\right)\Delta t_j\right|^2\right]\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Es decir:

$$V_n \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0\\ n\to\infty}]{L^2} \int_0^t f''\left(x+W_s\right)\mathrm{d}s \tag{3.14}$$

Ahora, por el teorema de Taylor tenemos que el residuo $R_{k,j}$ satisface la condición $R_{k,j}=o\left(\left|\Delta W_{t_j}\right|^k\right)$, es decir:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{R_{k,j}}{\left|\Delta W_{t_j}\right|^k}=0$$

Y con ello tenemos que existe una constante $c > 0$ tal que $|R_{2,j}| < c\left|\Delta W_{t_j}\right|^2$ lo que conduce a:

$$\left|\sum_{j=0}^{m_n-1} R_{2,j}\right|^2 \leq \sum_{j=0}^{m_n-1} |R_{2,j}|^2 + 2\sum_{i<j} |R_{2,i}|\,|R_{2,j}|$$

$$< \sum_{j=0}^{m_n-1} c^2\left|\Delta W_{t_j}\right|^4 + 2\sum_{i<j} c^2\left|\Delta W_{t_i}\right|^2\left|\Delta W_{t_j}\right|^2$$

Tomando esperanzas tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{m_n-1} R_{2,j}\right|^2\right] < c^2\sum_{j=0}^{m_n-1}\mathbb{E}\left[\left|\Delta W_{t_j}\right|^4\right] + 2c^2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[\left|\Delta W_{t_i}\right|^2\right]\cdot\mathbb{E}\left[\left|\Delta W_{t_j}\right|^2\right]$$

$$= c^2\sum_{j=0}^{m_n-1} 3\left(\Delta t_j\right)^2 + 2c^2\sum_{i<j}(\Delta t_i)\cdot(\Delta t_j) \leq 5c^2 t\,|\Delta_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Es decir:

$$\rho_n \xrightarrow[\substack{|\Delta^n|\to 0\\ n\to\infty}]{L^2} 0 \tag{3.15}$$

De los resultados (3.13), (3.14) y (3.15) tenemos que tomando el límite en media L^2 a la ecuación (3.12), esta es igual a (3.9) como se quería demostrar. □

Teorema 3.4.2. ***(2^a Fórmula de Itô)*** *Sean $f(t,y) \in \mathcal{C}^2([0,T]\times\mathbb{R})$, $f : [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x un número real y $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano, si para toda $t \geq 0$, $Y_t := x + W_t$, entonces:*

$$f(t,Y_t) = f(0,x) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} f(s,Y_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,Y_s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(s,Y_s)\,\mathrm{d}s \tag{3.16}$$

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema 3.4.1, es decir, considere la expasión de Taylor de segundo orden para $f(s, x + W_s)$:

$$f(t+h, y+k) = f(t,y) + h\frac{\partial}{\partial t} f(t,y) + k\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{h^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,y) + 2hk\frac{\partial^2}{\partial t\partial y} f(t,y) + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(t,y)\right\} + R_2$$

Sustituyendo $t = t_j$ y $h = \Delta t_j := t_{j+1} - t_j$, $y = Y_{t_j} = x + W_{t_j}$ y $k = \Delta W_{t_j} := W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ tenemos lo siguiente:

$$f\left(t_j + \Delta t_j, Y_{t_j} + \Delta W_{t_j}\right) - f\left(t_j, Y_{t_j}\right) =$$

$$\Delta t_j \frac{\partial}{\partial t} f\left(t_j, Y_{t_j}\right) + \Delta W_{t_j} \frac{\partial}{\partial y} f\left(t_j, Y_{t_j}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{(\Delta t_j)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} f\left(t_j, Y_{t_j}\right) + 2\left(\Delta t_j\right)\left(\Delta W_{t_j}\right) \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} f\left(t_j, Y_{t_j}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\Delta W_{t_j}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f\left(t_j, Y_{t_j}\right)\right\} + R_{2,j}$$

Con este resultado, si $\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m_n} = t\}$ es una sucesión de particiones de $[0, t]$ tal que si n tiende a infinito, la norma de la partición $|\Delta_n|$ tiende a cero, entonces:

$$f(t, Y_t) - f(0, x) = \sum_{j=0}^{m_n-1} \left\{f\left(t_{j+1}, Y_{t_{j+1}}\right) - f\left(t_j, Y_{t_j}\right)\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{m_n-1} \frac{\partial}{\partial t} f\left(t_j, Y_{t_j}\right)(\Delta t_j) + \sum_{j=0}^{m_n-1} \frac{\partial}{\partial y} f\left(t_j, Y_{t_j}\right)\left(\Delta W_{t_j}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m_n-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f\left(t_j, Y_{t_j}\right)(\Delta t_j)^2 + \sum_{j=0}^{m_n-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} f\left(t_j, Y_{t_j}\right)(\Delta t_j)\left(\Delta W_{t_j}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m_n-1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f\left(t_j, Y_{t_j}\right)\left(\Delta W_{t_j}\right)^2 + \sum_{j=0}^{m_n-1} R_{2,j}$$

Por el teorema de Taylor para funciones de dos variables, tenemos que el residuo $R_{k,j}$ satisface la condición $R_{k,j} = o\left(\sqrt{\left(\left|\Delta W_{t_j}\right| + |\Delta t_j|\right)^k}\right)$ lo cual conduce a la siguiente igualdad tomando el límite en media cuadrática:

$$f(t, Y_t) - f(0, x) =$$

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, Y_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} f(s, Y_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(s, Y_s)\,\mathrm{d}s$$

Con lo cual queda demostrado el teorema.

$\square$

Teorema 3.4.3. ***(3ª Fórmula de Itô)*** *Sea X un proceso de Itô tal que para todo $t > 0$:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s \mathrm{d}s + \int_0^t v_s \mathrm{d}W_s \longleftrightarrow \mathrm{d}X_t = u_t \mathrm{d}t + v_t \mathrm{d}W_t \tag{3.17}$$

y $g(t,x) \in \mathcal{C}^2\left[[0,\infty) \times \mathbb{R}\right]$. Entonces $Y_t := g(t, X_t)$ es un proceso integrable tal que:

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\partial}{\partial t} g(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial}{\partial x} g(t, X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(t, X_t)\,(\mathrm{d}X_t)^2 \tag{3.18}$$

Donde por las reglas de diferenciación estocástica se satisface que:

$$(\mathrm{d}X_t)^2 = (u_t \mathrm{d}t + v_t \mathrm{d}W_t)^2 = v_t^2 \mathrm{d}t$$

Demostración. Procediendo de manera análoga al *teorema 3.4.2*, la expansión de Taylor de segundo orden del proceso $Y_t := g(t, X_t)$ conduce a:

$$\begin{aligned}
Y_t - Y_0 &= g(t, X_t) - g(0, X_0) \\
&= \sum_{j=0}^{m_n - 1} g\left(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}\right) - g\left(t_j, X_{t_j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m_n - 1} \frac{\partial}{\partial t} g(t, X_t)\,(\Delta t_j) + \sum_{j=0}^{m_n - 1} \frac{\partial}{\partial x} g(t, X_t)\left(\Delta X_{t_j}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m_n - 1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g\left(t_j, X_{t_j}\right)(\Delta t_j)^2 + \sum_{j=0}^{m_n - 1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} g\left(t_j, X_{t_j}\right)(\Delta t_j)\left(\Delta X_{t_j}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m_n - 1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g\left(t_j, X_{t_j}\right)\left(\Delta X_{t_j}\right)^2 + \sum_{j=0}^{m_n - 1} R_{2,j}
\end{aligned}$$

Ya que X es un proceso de Itô, podemos sustituir $\Delta X_{t_j} := u_{t_j}\Delta t_j + v_{t_j}\Delta W_{t_j}$ en dicha ecuación, y con ello tenemos que:

$$Y_t - Y_0 = \sum_{j=0}^{m_n - 1} \frac{\partial}{\partial t} g(t, X_t)\,(\Delta t_j) + \sum_{j=0}^{m_n - 1} \frac{\partial}{\partial x} g(t, X_t)\left(u_{t_j}\Delta t_j + v_{t_j}\Delta W_{t_j}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m_n - 1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g\left(t_j, X_{t_j}\right)(\Delta t_j)^2 + \sum_{j=0}^{m_n - 1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} g\left(t_j, X_{t_j}\right)(\Delta t_j)\left(u_{t_j}\Delta t_j + v_{t_j}\Delta W_{t_j}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m_n - 1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g\left(t_j, X_{t_j}\right)\left(u_{t_j}\Delta t_j + v_{t_j}\Delta W_{t_j}\right)^2 + \sum_{j=0}^{m_n - 1} R_{2,j}$$

De tal forma que aplicando el límite en L^2 tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
Y_t - Y_0 = & \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} g(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} g(s, X_s)\, u_s \mathrm{d}s \\
& + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} g(s, X_s)\, v_s \mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(s, X_s)\, v_s^2 \mathrm{d}s \\
= & \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} g(s, X_s)\,(u_s \mathrm{d}s + v_s \mathrm{d}W_s) \\
& + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(s, X_s)\left(v_s^2 \mathrm{d}s\right)
\end{aligned}
$$

Nuevamente, como X es un proceso de Itô tenemos que $\mathrm{d}X_s = u_s \mathrm{d}s + v_s \mathrm{d}W_s$ y por las reglas de diferenciación estocástica $(\mathrm{d}X_s)^2 = v_s^2 \mathrm{d}s$ lo cual implica que:

$$
= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} g(s, X_s)\,(\mathrm{d}X_s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(s, X_s)\,(\mathrm{d}X_s)^2
$$

□

Ejemplo 3.4.4. ***Aplicación al Movimiento Briwniano Geométrico*** *Ya que el movimiento browniano es un proceso de Itô, una aplicación del teorema 3.4.3 es que considerando la función $f(t,x) = S_0 e^{\mu t + \sigma x}$, con $S_0 > 0$, obtenemos lo siguiente:*

$$
\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \mu S_0 e^{\mu t + \sigma x} = \mu f(t,x) \qquad \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \sigma S_0 e^{\mu t + \sigma x} = \sigma f(t,x)
$$

$$
\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} = \sigma^2 S_0 e^{\mu t + \sigma x} = \sigma^2 f(t,x)
$$

Y por el teorema 3.4.3:

$$
\begin{aligned}
f(t, W_t) - f(0,0) &= \int_0^t \mu f(s, W_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma f(s, W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 f(s, W_s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) f(s, W_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma f(s, W_s)\,\mathrm{d}W_s
\end{aligned}
$$

En otras palabras, el movimiento browniano geométrico, es un proceso de Itô. Lo cual equivale en notación diferencial a lo siguiente:

$$
\mathrm{d}f(t, W_t) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) f(t, W_t)\,\mathrm{d}t + \sigma f(t, W_t)\,\mathrm{d}W_t \tag{3.19}
$$

Además como $f(t, W_t) = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ para toda $0 \leq t \leq T$, entonces el proceso estocástico $S = \{f(t, W_t)\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano geométrico, entonces podemos escribir a la ecuación diferencial estocástica (3.19) como:

$$\mathrm{d}S_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$$

Además de las fórmulas de Itô anteriormente presentada existe otra generalización a estas fórmulas, la cual se demuestra de manera análoga a estas.

Teorema 3.4.5. *Sean X y Y dos procesos de Itô tales que para todo $t > 0$:*

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t h_1 \mathrm{d}s + \int_0^t g_1 \mathrm{d}W_s \longleftrightarrow \mathrm{d}X_t = h_1 \mathrm{d}t + g_1 \mathrm{d}W_t \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t h_2 \mathrm{d}s + \int_0^t g_2 \mathrm{d}W_s \longleftrightarrow \mathrm{d}Y_t = h_2 \mathrm{d}t + g_2 \mathrm{d}W_t \end{aligned} \tag{3.20}$$

y $f(t, x, y) \in \mathcal{C}^2\left[[0, \infty) \times \mathbb{R}^2\right]$. Entonces $Z_t := f(t, X_t, Y_t)$ es un proceso integrable tal que:

$$\begin{aligned} Z_t = Z_0 &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(t, X_t, Y_t)\, \mathrm{d}t + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(t, X_t, Y_t)\, \mathrm{d}X_t + \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} f(t, X_t, Y_t)\, \mathrm{d}Y_t \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, X_t, Y_t) (\mathrm{d}X_t)^2 + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(t, X_t, Y_t) (\mathrm{d}X_t)(\mathrm{d}Y_t) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(t, X_t, Y_t) (\mathrm{d}Y_t)^2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Donde gracias a las reglas de diferenciación estocástica se satisface que:

$$(\mathrm{d}X_t)^2 = g_1^2 \mathrm{d}t \quad , \quad (\mathrm{d}Y_t)^2 = g_2^2 \mathrm{d}t$$

$$(\mathrm{d}X_t)(\mathrm{d}Y_t) = g_1 g_2 \mathrm{d}t$$

Demostración. La demostración de este teorema es similar a las demostraciones de las reglas de Itô, es decir, consideramos la expansión de segundo orden de Taylor de la función f, sustituimos este resultado en el desarrollo de la suma telescópica de f y finalmente vemos la convergencia en L^2 de estos términos.

□

Corolario 3.4.6. ***(Regla del Producto)*** *Sean X y Y dos procesos de Itô tales que para todo $t > 0$:*

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \mu_t \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_t \mathrm{d}W_s \longleftrightarrow \mathrm{d}X_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t \nu_t \mathrm{d}s + \int_0^t \rho_t \mathrm{d}W_s \longleftrightarrow \mathrm{d}Y_t = \nu_t \mathrm{d}t + \rho_t \mathrm{d}W_t \end{aligned} \tag{3.22}$$

Entonces:

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_t \mathrm{d}Y_t + \int_0^t Y_t \mathrm{d}X_t + \int_0^t \sigma_t \rho_t \mathrm{d}t$$

de manera equivalente:

$$\mathrm{d}\left(X_t Y_t\right) = X_t \mathrm{d}Y_t + Y_t \mathrm{d}X_t + \sigma_t \rho_t \mathrm{d}t$$

Demostración. Consideremos a la función $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(t, x, y) = xy$, entonces obtenemos las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = y \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} f = x \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = 1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} f = 0$$

Por el teorema 3.4.5 y las condiciones (3.22) tenemos que:

$$\begin{aligned} X_t Y_t &= X_0 Y_0 + \int_0^t X_t \mathrm{d}Y_t + \int_0^t Y_t \mathrm{d}X_t + \int_0^t 1 \left(\mathrm{d}X_t\right)\left(\mathrm{d}Y_t\right) \\ &= X_0 Y_0 + \int_0^t X_t \mathrm{d}Y_t + \int_0^t Y_t \mathrm{d}X_t + \int_0^t \sigma_t \rho_t \left(\mathrm{d}W_t\right)^2 \\ &= X_0 Y_0 + \int_0^t X_t \mathrm{d}Y_t + \int_0^t Y_t \mathrm{d}X_t + \int_0^t \sigma_t \rho_t \mathrm{d}t \end{aligned}$$

que es justo lo que se deseaba demostrar.

□

Capítulo 4

Aplicación a los Mercados Financieros

En este capítulo mostraremos una aplicación de la integral estocástica o integral de Itô, en concreto deduciremos de manera estocástica la fórmula general de Black-Scholes utilizando los resultados obtenidos en los anteriores capítulos. Este capítulo está basado principalmente en los trabajos de *R.J. Williams, Introduction to the Mathematics of Finance* [10].

4.1. Mercados financieros y Derivados

En esta sección repasaremos algunos conceptos básicos en la teoría de las finanzas matemáticas de la economía, esta sección se basó en el trabajo de *R.J. Williams, Introduction to the Mathematics of Finance* [10].

Un **mercado financiero** se negocian valores tales como acciones, bonos, divisas, materias primas, o incluso de índices.

Una de las razones para la existencia de mercados financieros es que facilitan el flujo de capital. Por ejemplo, si una empresa quiere financiar la construcción de una nueva planta de producción, esta podría vender acciones a los inversores quienes compran estas acciones esperando recibir futuras recompensas, tales como dividendos o un aumento en el precio de las acciones.

Actualmente una gran variedad de modelos estocásticos se utiliza en el modelado de los precios de acciones. Todos estos modelos se enfrentan el habitual "trade off", es decir, los modelos más complejos suelen proporcionar un mejor ajuste a los datos (aunque existe el peligro de sobreajuste), mientras que los modelos más simples son generalmente más manejables y a pesar de su simplicidad a veces pueden proporcionar útil información cualitativa. Encontrar un buen equilibrio entre una visión realista y un modelo manejable es parte de la técnica de modelación estocástica.

Un **derivado** o **derecho contingente** es un título cuyo valor depende del valor de algún otro activo conocido como subyacente.

Los subyacentes pueden ser desde algún activo financiero (acciones, índices bursátiles, bonos, etc.), una variable de mercado (divisas, tasas de interés, índices fraccionarios), activos para consumo (agrícolas, ganaderos, energéticos, insumos industriales, metales, etc.), hasta otros instrumentos derivados e incluso eventos (climatológicos, crediticios, etc.)

Estos productos derivados se utilizan con diversos fines, pero los inversionistas que negocian con ellos persiguen básicamente tres objetivos:

(a) Cobertura de Riesgo (Hedging).
Se busca reducir el riesgo de una inversión, considerando las variables que determinan los cambios entre el precio actual y el futuro de la compra o venta de subyacentes; esto es, reducir riesgos tales como: crédito, liquidez, de mercado, entre otros.

(b) Especulación.
Consiste en apostar o suponer algún comportamiento futuro del mercado y establecer estrategias encaminadas a obtener ganancias del mismo, en caso de que se presente.

(c) Arbitraje.
El concepto de arbitraje es crucial en la valuación de instrumentos financieros derivados. En el común de los casos, las estrategias de arbitraje consisten en la compra y venta simultanea de activos que presentan una valoración errónea o incongruente entre sí en el mercado. Sin embargo, paradójicamente estas oportunidades son transitorias, pues cuando los agentes empiezan a explotarlas presionan los precios hacia su justa valoración, haciendo que desaparezca la disparidad que inicialmente dio origen a la oportunidad.

La diversidad de participantes que persiguen diversos fines hace que los mercados de derivados sean muy líquidos, puesto que generalmente es factible encontrar una contraparte para realizar transacciones para los inversionistas que desean tomar posiciones en los contratos derivados.

4.2. Principales Instrumentos Derivados

En esta sección repasaremos algunos ejemplos de derivados son contratos forward, contratos futuros, opciones, etc. Definiremos a continuación estos estos derivados de manera general, aunque se puede encontrar una definición más detallada en *John C. Hull. Options, Futures and Other Derivatives. Octava edición. Prentice Hall.* [9]

4.2.1. Fordwards y Futuros

Un **contrato forward** o simplemente **forward** es un acuerdo para comprar o vender un determinado activo (subyacente) a un cierto momento futuro por un precio determinado.

Estos contratos son comercializados **over the counter**, es decir, son contratos personalizados, negociados entre compradores y vendedores individuales.

Estos instrumentos permiten construir posiciones futuras sobre cierto subyacente partiendo de su precio actual y del costo de financiamiento.

En un contrato forward habla de dos posiciones básicas:

(1) Posición Larga. El participante adquiere la obligación de comprar el activo subyacente en un precio específico y dentro de un plazo determinado.

(2) Posición corta. El participante adquiere la obligación de vender el activo subyacente en un precio específico y dentro de un plazo determinado.

De forma similar a los contratos forward, los futuros se refieren a contratos celebrados por dos contrapartes que acuerdan intercambiar un activo subyacente a cierto precio establecido de antemano en alguna fecha futura.

Los forwards son contratos a la medida y tienen un carácter privado entre las partes, por lo que el mercado secundario para ellos es poco líquido, es decir, es más difícil revenderlos; de ahí que las partes en ocasiones esperen al vencimientos para realizar la ganancia o pérdida; o bien, opten por el cierre anticipado, posiblemente tomando la posición contraria.

Un **contrato futuro** es como un contrato forward con la característica adicional de que un procedimiento de pago llamado "mark to market″ es seguido en cada día de negociación. En resumen, en este procedimiento el depósito inicial de un inversor se ajusta cada día de operaciones para reflejar las ganancias o pérdidas en los precios futuros para ese día.

A diferencia de los forward, los futuros se negocian en bolsa de derivados, de modo que el tamaño del contrato, los plazos al vencimiento y los precios de entrega del subyacente se establecen de forma estandarizada.

Los contratos forward están sujetos, además del riesgo de mercado, a cierto riesgo de crédito o "default″; es decir, al celebrarse entre dos contrapartes privadas, alguna de ellas (la que se encuentre en desventaja) puede tener incentivos para no cumplir con su parte en el contrato. Este riesgo de incumplimiento es prácticamente nulo en los contratos futuros, pues las bolsas de derivados en las que se negocian establecen mecanismo como el "mark to market"para garantizar que ambas partes contractuales cumplan sus obligaciones a través de una cámara de compensación.

Por otra parte, al existir en los Futuros un mercado secundario que otorga liquidez a las operaciones, si alguna de las partes quiere cerrar su posición o dar el contrato por terminado antes de la fecha de vencimiento, únicamente deberá vender el contrato previamente comprado bien comprar el contrato previamente vendido. Así, generalmente los contratos futuros no llegan a su fecha de vencimiento, dado que las partes suelen liquidar sus posiciones anticipadamente.

4.2.2. Opciones

Una **opción** es un contrato que da a su comprador el derecho, mas no la obligación, de comprar o vender un determinado valor subyacente a un precio determinado (llamado precio de ejercicio o precio strike) en un plazo de tiempo fijo $[0, T]$. De igual forma, el vendedor adquiere la obligación de vender o comprar en las condiciones pactadas sobre dicho subyacente.

Existen dos tipos de derechos, los cuales originan dos tipos diferentes de contratos:

1. El primero se refiere al derecho de compra, dando lugar a una opción de compra (*call*)
2. El segundo es el derecho de venta, dando lugar a una opción de venta (*put*)

Por otra parte en las opciones existen dos contrapartes: por un lado, el comprador que toma la posición larga, es decir, el que compra la opción, y en la otra parte se encuentra el vendedor o emisor, quien toma la posición corta, es decir, ha vendido o emitido la opción.

En función del momento cuando se puede hacer efectivo el derecho de una opción, éstas se pueden clasificar en dos: Europeas y Americanas. En las opciones Europeas sólo se puede ejecutar la opción en la fecha de ejercicio (T), mientras que en las opciones americanas el derecho se puede ejecutar en cualquier momento desde que se contrata hasta la fecha de ejercicio.

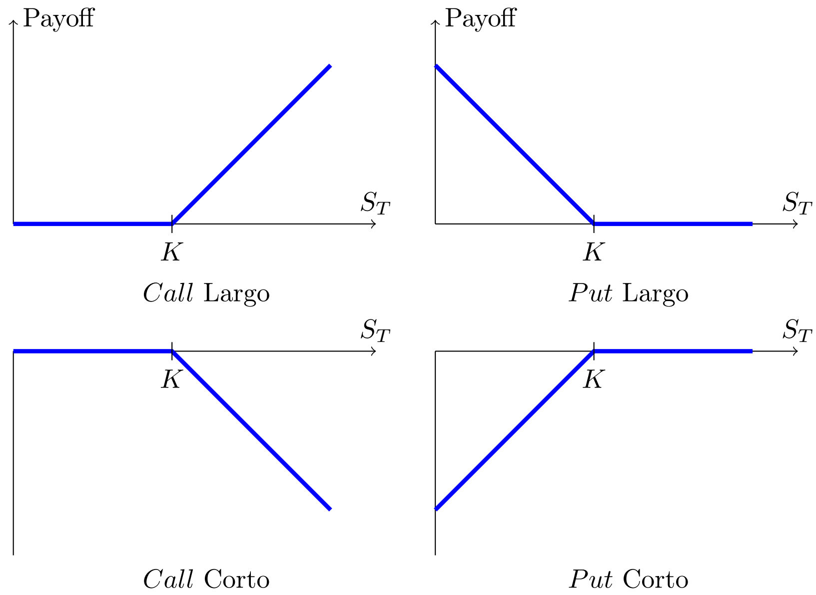

Tabla 4.1: Compra y venta de opciones *put* y *call*

4.3. Modelo de Black-Scholes

En esta sección daremos una introducción del modelo de Black-Scholes, también repasaremos las definiciones necesarias para poder demostrar los teoremas fundamentales de la valuación de precios de los productos financieros derivados.

Consideremos un mercado financiero con un solo activo libre de riesgo sin pago de dividendos. Nuestro modelo de Black-Scholes consiste de dos bienes (activos), uno riesgoso con proceso de precios:

$$S = (S_t)_{t\in[0,T]}$$

y uno libre de riesgo (bono) con proceso de precios:

$$B = (B_t)_{t\in[0,T]}$$

Bajo el modelo de Black-Scholes, estos procesos de precios están dados como sigue:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \qquad t \in [0,T] \tag{4.1}$$

$$B_t = e^{rt} \qquad t \in [0,T] \tag{4.2}$$

donde $r > 0$ es la tasa de interés libre de riesgo[1], $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $S_0 > 0$. El parámetro σ es llamado **volatilidad**.

Sabemos por el teorema 1.5.3 que el proceso $\{e^{-\mu t}S_t\}_{t\in[0,T]}$ es una L^2-martingala bajo la medida de probabilidad P.

Los procesos S y B son continuos, adaptados y satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales casi seguramente bajo P.

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t \qquad t \in [0,T] \tag{4.3}$$

$$\mathrm{d}B_t = rB_t \mathrm{d}t \qquad t \in [0,T] \tag{4.4}$$

Definición 4.3.1. *Una* ***estrategia de inversión*** *(acción-bono) es un proceso estocástico de dos dimensiones:*

$$\phi = \{\phi_t = (\alpha_t, \beta_t)\}_{t\in[0,T]}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. $\phi : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es progresivamente medible ($\mathscr{B}[0,T] \times \mathscr{F}_T$-medible)*

2. ϕ *es adaptado a la filtración browniana*

3. *Casi seguramente bajo la medida de probabilidad P:*

$$\int_0^T \alpha_t^2 \mathrm{d}t < \infty \quad y \quad \int_0^T |\beta_t|\, \mathrm{d}t < \infty$$

La última condición asegura que casi seguramente bajo P, las siguientes integrales:

$$\int_0^t \alpha_s^2 \mathrm{d}S_s \quad \text{y} \quad \int_0^t \beta_s \mathrm{d}B_s$$

sean finitas y además cuando se consideran como funciones del tiempo t, estas definen un proceso estocástico adaptado.

En este capítulo, a α_t los interpretaremos como el número de acciones adquiridas al tiempo t y a β_t como el número de bonos adquiridos al tiempo t.

[1] La tasa libre de riesgo es una tasa bajo la cual un inversor obtiene un rendimiento seguro, en México se considera la tasa de rendimiento de un CETE (Certificado de la Tesorería) como la tasa libre de riesgo, debido a que se considera que la probabilidad de no pago de un bono emitido por el gobierno mexicano es prácticamente nula.

Definición 4.3.2. *Sea ϕ una estrategia de comercio.*

1. *El portafolio asociado a ϕ es aquel que en el tiempo t únicamente posee una cantidad α_t de acciones y una cantidad β_t de bonos para todo $0 \leq t \leq T$.*

2. *El **valor** al tiempo t **del portafolio** asociado a ϕ está dado por:*

$$V_t(\phi) = \alpha_t S_t + \beta_t B_t \tag{4.5}$$

Definición 4.3.3. *Una estrategia de inversión ϕ se dice que es **auto-financiada** P casi seguramente si:*

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s \mathrm{d}S_s + \int_0^t \beta_s \mathrm{d}B_s \qquad t \in [0,T] \tag{4.6}$$

en otras palabras:

$$\mathrm{d}V_t(\phi) = \alpha_t \mathrm{d}S_t + \beta_t \mathrm{d}B_t \qquad t \in [0,T] \tag{4.7}$$

En nuestro modelo no se nos permite agregar o retirar capital al portafolio, por esta razón, la condición de auto-financiamiento puede interpretarse como que los cambios en el valor del portafolio únicamente dependen de los cambios en el valor de los activos que conforman el portafolio.

Sea ϕ una estrategia de comercio. El proceso de descuento de las acciones y el proceso de valor descontado asociado a ϕ, están dados respectivamente por:

$$S_t^* = \frac{S_t}{B_t} = e^{-rt} S_t \qquad t \in [0,T] \tag{4.8}$$

$$V_t^*(\phi) = \frac{V_t(\phi)}{B_t} = e^{-rt} V_t(\phi) \qquad t \in [0,T] \tag{4.9}$$

Por la regla del producto 3.4.6 aplicada a la ecuación (4.8) y la ecuación diferencial estocástica (4.3) podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
S_t^* &= S_0 + \int_0^t e^{-rs} \mathrm{d}S_s + \int_0^t -re^{-rs} S_s \mathrm{d}s + \int_0^t -re^{-rs} (\mathrm{d}s)(\mathrm{d}S_s) \\
&= S_0 + \int_0^t e^{-rs} \mathrm{d}S_s + \int_0^t -re^{-rs} S_s \mathrm{d}s + \int_0^t -re^{-rs} \mathrm{d}s \left(\mu S_s \mathrm{d}s + \sigma S_s \mathrm{d}W_s\right) \\
&= S_0 + \int_0^t e^{-rs} \left(\mu S_s \mathrm{d}s + \sigma S_s \mathrm{d}W_s\right) + \int_0^t -re^{-rs} S_s \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= S_0 + \int_0^t \mu S_s^* \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma S_s^* \mathrm{d}W_s + \int_0^t -r S_s^* \mathrm{d}s \\
&= S_0 + \int_0^t (\mu - r) S_s^* \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma S_s^* \mathrm{d}W_s
\end{aligned}
$$

Lo cual equivale en notación diferencial a lo siguiente:

$$
\mathrm{d}S_t^* = (\mu - r) S_t^* \mathrm{d}t + \sigma S_t^* \mathrm{d}W_t \qquad t \in [0, T] \tag{4.10}
$$

Lema 4.3.4. *Una estrategia de inversión ϕ es auto-financiada si y sólo si P-casi seguramente:*

$$
V_t^* (\phi) = V_0 (\phi) + \int_0^t \alpha_s \mathrm{d}S_s^* \tag{4.11}
$$

o bien:

$$
\mathrm{d}V_t^* (\phi) = \alpha_t \mathrm{d}S_t^*
$$

Demostración. Primero suponemos que ϕ es una estrategia de inversión auto-financiada, entonces por la regla del producto 3.4.6 aplicada a la ecuación (4.9) y las ecuaciones (4.5) y (4.7) tenemos que para cada t en $[0, T]$:

$$
\begin{aligned}
V_t^* (\phi) &= V_0 (\phi) + \int_0^t -r e^{-rs} V_s (\phi) \mathrm{d}s + \int_0^t e^{-rs} \mathrm{d}V_s (\phi) + \int_0^t (\mathrm{d}V_s (\phi)) (\mathrm{d}s) \\
&= V_0 (\phi) + \int_0^t -r e^{-rs} V_s (\phi) \mathrm{d}s + \int_0^t e^{-rs} \mathrm{d}V_s (\phi) \\
&= V_0 (\phi) + \int_0^t -r e^{-rs} (\alpha_s S_s + \beta_s B_s) \mathrm{d}s + \int_0^t e^{-rs} (\alpha_s \mathrm{d}S_s + \beta_s \mathrm{d}B_s)
\end{aligned}
$$

sustituyendo las ecuaciones (4.3) y (4.4) en el resultado anterior podemos concluir lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
V_t^* (\phi) = V_0 (\phi) &+ \int_0^t -r e^{-rs} (\alpha_s S_s + \beta_s B_s) \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t e^{-rs} (\alpha_s (\mu S_s \mathrm{d}s + \sigma S_s \mathrm{d}W_s) + \beta_s r B_s \mathrm{d}s) \\
= V_0 (\phi) &+ \int_0^t -r e^{-rs} (\alpha_s S_s) \mathrm{d}s + \int_0^t e^{-rs} (\alpha_s (\mu S_s \mathrm{d}s + \sigma S_s \mathrm{d}W_s))
\end{aligned}
$$

finalmente por el desarrollo obtenido en (4.10) sustituido en la expresión anterior podemos concluir que para cada t en $[0,T]$:

$$\begin{aligned} V_t^*(\phi) &= V_0(\phi) + \int_0^t e^{-rs}\alpha_s(\mu-r)S_s\mathrm{d}s + \int_0^t e^{-rs}\alpha_s\sigma S_s\mathrm{d}W_s \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s(\mu-r)S_s^*\mathrm{d}s + \int_0^t \alpha_s\sigma S_s^*\mathrm{d}W_s \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s\mathrm{d}S_s^* \end{aligned}$$

De manera inversa, si suponemos válida la expresión (4.11) en forma diferencial:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_t^*(\phi) &= \alpha_s\mathrm{d}S_t^* \\ &= \alpha_t\left((\mu-r)S_t^*\mathrm{d}t + \sigma S_t^*\mathrm{d}W_t\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Aplicando la regla del producto 3.4.6 a la expresión $V_t(\phi) = B_tV_t^*(\phi)$ tenemos lo siguiente:

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t B_s\ \mathrm{d}V_s^*(\phi) + \int_0^t V_s^*(\phi)\,\mathrm{d}B_s$$

Sustituyendo (4.4) y (4.12) en la anterior expresión obtenemos que:

$$\begin{aligned} V_t(\phi) &= V_0(\phi) + \int_0^t B_s\alpha_s\left((\mu-r)S_s^*\mathrm{d}s + \sigma S_s^*\mathrm{d}W_s\right) + \int_0^t V_s^*(\phi)\,rB_s\mathrm{d}s \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s\left((\mu-r)S_s\mathrm{d}s + \sigma S_s\mathrm{d}W_s\right) + \int_0^t V_s(\phi)\,r\mathrm{d}s \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s\left((\mu-r)S_s\mathrm{d}s + \sigma S_s\mathrm{d}W_s\right) + \int_0^t (\alpha_sS_s + \beta_sB_s)\,r\mathrm{d}s \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s\left(\mu S_s\mathrm{d}s + \sigma S_s\mathrm{d}W_s\right) + \int_0^t \beta_sB_sr\mathrm{d}s \end{aligned}$$

finalmente, ya que los procesos S y B satisfacen (4.3) y (4.4) respectivamente, podemos concluir lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_t(\phi) &= V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s\left(\mu S_s\mathrm{d}s + \sigma S_s\mathrm{d}W_s\right) + \int_0^t r\beta_sB_s\mathrm{d}s \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s\mathrm{d}S_s + \int_0^t \beta_s\mathrm{d}B_s \end{aligned}$$

Es decir, la estrategia ϕ es auto-financiada, con lo que queda demostrado el lema.

$\square$

Definición 4.3.5. *Una estrategia auto-financiada ϕ es una **oportunidad de arbitraje** si:*

$$V_0(\phi) = 0 \quad , \quad V_T(\phi) \geq 0 \quad , \quad \mathbb{E}[V_T(\phi)] > 0 \tag{4.13}$$

El siguiente es un ejemplo concreto de una estrategia.

Ejemplo 4.3.6. *Consideremos el modelo de Black-Scholes con $r = 0$, $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Entonces:*

$$B_t = 1 \qquad y \qquad \mathrm{d}S_t = S_t \mathrm{d}W_t \qquad\qquad t \in [0, T] \tag{4.14}$$

Definimos al proceso estocástico I como sigue:

$$I_t := \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-s}} \mathrm{d}W_s \qquad\qquad \textit{para todo } 0 \leq t \leq T \tag{4.15}$$

Entonces la variación cuadrática del proceso I es la siguiente:

$$\langle I \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{T-s} \mathrm{d}s = \log\left(\frac{T}{T-t}\right)$$

Ahora definamos para $a > 0$:

$$\tau_a := \text{ínf}\{t \in [0, T] : I_t = a\} \wedge T$$

y sea $\phi = \{(\alpha_t, \beta_t)\}_{t \in [0,T]}$ donde para cada $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
\alpha_t &= \frac{1}{\sqrt{T-t}} \cdot \frac{1}{S_t} \mathbb{I}_{\{t \leq \tau_a\}} \\
\beta_t &= I_{t \wedge \tau_a} - \alpha_t S_t
\end{aligned}$$

Entonces, el proceso de valor asociado a la estrategia ϕ está dado por:

$$V_t(\phi) = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$$

Además el resultado (4.14) nos conduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
V_t(\phi) &= \alpha_t S_t + I_{t \wedge \tau_a} - \alpha_t S_t \\
&= I_{t \wedge \tau_a} \\
&= \int_0^{t \wedge \tau_a} \frac{1}{\sqrt{T-s}} \mathrm{d}W_s \\
&= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-s}} \frac{1}{S_s} \mathrm{d}S_s
\end{aligned}$$

$$= \int_0^t \alpha_s \mathrm{d}S_s$$

Donde en efecto, gracias a que $r = 0$ se satisface que $\mathrm{d}S_s = \mathrm{d}S_s^*$, entonces se satisface la ecuación (4.11) ya que $V_0(\phi) = 0$, es decir, la estrategia ϕ es auto-financiada.
Por otro lado:

$$V_T(\phi) = I_{\tau_a} = a$$

Con lo que concluimos que ϕ es también una oportunidad de arbitraje.

4.4. Medida Martingala Equivalente

En esta sección explicaremos la importancia de algunos conceptos de la teoría de la medida que juegan un papel fundamental en esta teoría de las finanzas matemáticas.

Definición 4.4.1. *Dos medidas de probabilidad P y Q sobre $(\Omega, \mathscr{F})$ son **equivalentes** (o mutuamente absolutamente continuas) si:*

$$P(A) = 0 \quad \textit{es equivalente a} \quad Q(A) = 0 \qquad \textit{para cada } A \in \mathscr{F} \tag{4.16}$$

Definición 4.4.2. *Una **medida martingala equivalente**, también llamada **medida de riesgo neutral** es una medida de probabilidad P^* sobre $(\Omega, \mathscr{F})$ tal que*

1. *P^* es equivalente a P*
2. *El proceso $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ es una $\mathscr{F}_t$-martingala bajo P^**

En esta sección mostraremos que la medida de probabilidad P^* existe, para ello observemos que:

$$S_t^* = S_0 \exp\left(\left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right) \tag{4.17}$$

lo cual implica que P-casi seguramente:

$$\mathrm{d}S_t^* = (\mu - r) S_t^* \mathrm{d}t + \sigma S_t^* \mathrm{d}W_t \qquad t \in [0, T] \tag{4.18}$$

Al integrar el segundo término de la derecha en (4.18) se obtiene una martingala bajo P. Nosotros buscamos una medida de probabilidad P^* equivalente a P tal que el proceso de precios descontado S^* satisfaga una ecuación diferencial estocástica como en (4.18) pero sin el término de deriva $(\mu - r) S_t^* \mathrm{d}t$. Para ello usamos la forma simple de la transformación de Girsanov para cambiar la deriva del movimiento browniano.

Teorema 4.4.3. *Sean θ un número real, W un movimiento browniano sobre $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, definimos para toda $0 \leq t \leq T$ al proceso Λ como:*

$$\Lambda_t = \exp\left(-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t^2\right) \qquad t \in [0, T]$$

Entonces el proceso $\Lambda = \{\Lambda_t\}_{t\in[0,T]}$ es una $\mathscr{F}_t$-martingala positiva bajo P.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Lambda_t | \mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t^2\right)\middle| \mathscr{F}_s\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 t^2\right)\ \mathbb{E}\left[\exp\left(-\theta\left(W_t - W_s\right) - \theta W_s\right)|\mathscr{F}_s\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 t^2\right) \exp\left(-\theta W_s\right)\ \mathbb{E}\left[\exp\left(-\theta\left(W_t - W_s\right)\right)|\mathscr{F}_s\right]
\end{aligned}$$

Ahora, si $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, entonces $\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta X\right)\right] = \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)$ y con esto podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Lambda_t | \mathscr{F}_s\right] &= \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 t^2\right) \exp\left(-\theta W_s\right) \exp\left(\frac{1}{2}\left(t - s\right)\theta^2\right) \\
&= \exp\left(-\theta W_s - \frac{1}{2}\theta^2 s^2\right) \\
&= \Lambda_s
\end{aligned}$$

Que es lo que bastaba demostrar.

□

Entonces podemos definir una nueva medida de probabilidad P^* como sigue:

$$P^*\left(A\right) := \mathbb{E}^P\left[\mathbb{I}_A \Lambda_T\right] \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{4.19}$$

es decir,

$$\frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}P} = \Lambda_T \qquad \text{sobre } \mathscr{F} \tag{4.20}$$

Aquí agregamos el superíndice P al operador esperanza $\mathbb{E}$ para enfatizar el hecho de que la esperanza es calculada bajo la medida de probabilidad P. Similarmente, escribiremos $\mathbb{E}^{P^*}$ para denotar al operador esperanza bajo P^*.

Teorema 4.4.4. *P^* definida como en* (4.19) *es en efecto una medida de probabilidad que además es equivalente a P.*

Demostración. Gracias al teorema 4.4.3, el proceso Λ es una martingala positiva, entonces para todo evento $A \in \mathscr{F}$, $P^*(A) \geq 0$ y también:

$$\begin{aligned} P^*(\Omega) &:= \mathbb{E}^P[\mathbb{I}_\Omega \Lambda_T] \\ &= \mathbb{E}^P[\Lambda_T] \\ &= \mathbb{E}^P\left[\mathbb{E}^P[\Lambda_T|\mathscr{F}_0]\right] \\ &= \mathbb{E}^P[\Lambda_0] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Además, si A_n es una sucesión de eventos disjuntos entre si:

$$\begin{aligned} P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &:= \mathbb{E}^P\left[\mathbb{I}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\Lambda_T\right] = \mathbb{E}^P\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{I}_{A_n}\right)\Lambda_T\right] \\ &= \mathbb{E}^P\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{I}_{A_n}\Lambda_T\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}^P[\mathbb{I}_{A_n}\Lambda_T] = \sum_{n=1}^{\infty}P^*(A_n) \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado que P^* es una medida de probabilidad, ahora para demostrar que esta es equivalente a P, sea $A \in \mathscr{F}$ tal que $P^*(A) = 0$, entonces:

$$0 = \mathbb{E}^P[\mathbb{I}_A\Lambda_T] = \int_A \Lambda_T \mathrm{d}P$$

lo que implica que bajo P, A es un conjunto de medida nula. Análogamente si suponemos que $P(A) = 0$, entonces:

$$0 = \int_A \Lambda_T \mathrm{d}P = \mathbb{E}^P[\mathbb{I}_A\Lambda_T] = P^*(A)$$

Que es justo lo que se quería demostrar. □

Teorema 4.4.5. ***Teorema de Girsanov*** *Sean W un movimiento browniano sobre* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *y* $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$, *entonces el proceso estocástico $\widetilde{W}$ definido para cada* $t \in [0, T]$ *como:*

$$\widetilde{W}_t := W_t + \theta t$$

es un movimiento browniano sobre $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$. *Donde P^* es la medida de probabilidad equivalente a P definida en* (4.19)

Demostración. Una prueba de forma rigurosa de este teorema se puede ver en Revuz & Yor. [5] □

Todo lo que hemos construido en esta sección es para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.4.6. *El proceso de descontado de las acciones S^* es una martingala bajo P^*.*

Demostración. Sea W un movimiento browniano bajo P, sea $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ definimos al proceso $\widetilde{W}$ como sigue:

$$\widetilde{W}_t := W_t + \theta t \qquad t \in [0, T] \tag{4.21}$$

Por el teorema de Girsanov tenemos que el proceso $\widetilde{W} = \left\{\widetilde{W}_t\right\}_{t\in[0,T]}$ es un movimiento browniano estándar bajo P^*. Entonces para cada $0 \leq t \leq T$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
S_t^* &= S_0 \exp\left(\left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \\
&= S_0 \exp\left(\left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\left(\widetilde{W}_t - \theta t\right)\right) \\
&= S_0 \exp\left(\left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\widetilde{W}_t - \sigma\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)t\right) \\
&= S_0 \exp\left((\mu - r)\,t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\widetilde{W}_t - (\mu - r)\,t\right)
\end{aligned}$$

es decir:

$$S_t^* = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\widetilde{W}_t\right) \tag{4.22}$$

así, P^*-casi seguramente:

$$\mathrm{d}S_t^* = \sigma S_t^* \mathrm{d}\widetilde{W}_t \tag{4.23}$$

Finalmente como $\widetilde{W}$ es un movimiento browniano bajo P^*, por el teorema 1.5.3 tenemos que el proceso S^* es una L^2-martingala continua bajo P^*. □

4.5. Derivados Europeos

En esta sección demostraremos el primer teorema fundamental de valuación de productos financieros derivados de tipo europeo, es decir, son derivados que únicamente pueden ser ejecutados en la fecha de ejercicio T.

Definición 4.5.1. *Una* ***estrategia admisible*** *es una estrategia de inversión auto-financiada ϕ tal que el proceso:*

$$V^*(\phi) = \{V_t^*(\phi)\}_{t\in[0,T]}$$

es una martingala bajo la medida equivalente P^*

Denotaremos a un **derivado europeo** como X una variable aleatoria $\mathscr{F}_T$-medible.

Definición 4.5.2. *Una* ***estrategia de réplica*** *de un derivado europeo $X \in \mathscr{F}_T$ es una estrategia admisible ϕ tal que $V_T(\phi) = X$*

Definición 4.5.3. *Una variable aleatoria $\tau : \Omega \to [0,T] \cup \{+\infty\}$ es un* ***tiempo de paro*** *si:*

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathscr{F}_t \qquad \textit{para cada } t \in [0,T] \tag{4.24}$$

Definición 4.5.4. *Un proceso estocástico de valores reales $M = \{M_t\}_{t\in[0,T]}$ es una* ***martingala local*** *bajo P^* si es continua por la derecha, adaptado, y existe una sucesión creciente $\{\tau_n\}_n$ de tiempos de paro que toma valores en $[0,T] \cup \{+\infty\}$ tal que:*

$$P^*(\tau_n \geq T \quad \textit{para alguna } n \textit{ suficientemente grande}) = 1 \tag{4.25}$$

y para cada n, el proceso $M^n = \{M_{t\wedge\tau_n}\}_{t\in[0,T]}$ es una martingala bajo P^*.

Teorema 4.5.5. ***(Teorema de Representación Martingala)*** *Supongamos que $M = \{M_t\}_{t\in[0,T]}$ es una martingala local bajo P^*. Entonces existe una proceso adaptado y progresivamente medible $\eta = \{\eta_t\}_{t\in[0,T]}$ tal que $\int_0^T \eta_s^2 \mathrm{d}s < \infty$ P^*-casi seguramente y*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \eta_s \mathrm{d}\widetilde{W}_s \qquad \textit{para todo } t \in [0,T] \tag{4.26}$$

En particular M tiene una versión continua.

Demostración. Una prueba de forma rigurosa se puede ver en Revuz & Yor, Teorema V3.5. [5] □

Lema 4.5.6. *Sea X es una variable aleatoria $\mathscr{F}_T$-medible en $L^1(P^*)$, es decir, $\mathbb{E}^{P^*}[|X|] < \infty$. Entonces el proceso estocástico $M = \{M_t\}_{t\in[0,T]}$ definido para $0 \leq t \leq T$ como:*

$$M_t := \mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_t\right] \tag{4.27}$$

es bajo P^* una martingala.

Demostración. Tenemos por hipótesis que $X \in L^1(P^*)$, lo cual nos conduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{P^*}[|M_t|] = \mathbb{E}^{P^*}\left[\left|\mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_t\right]\right|\right] &\leq \mathbb{E}^{P^*}\left[\mathbb{E}^{P^*}\left[\left|\frac{X}{B_T}\right|\middle|\mathscr{F}_t\right]\right] \\ = \mathbb{E}^{P^*}\left[\left|\frac{X}{B_T}\right|\right] &= \frac{1}{B_T}\mathbb{E}^{P^*}[|X|] < \infty\end{aligned}$$

Por otro lado, si $0 \leq s \leq t \leq T$ gracias a la propiedad de torre de la esperanza condicional podemos concluir que:

$$\mathbb{E}^{P^*}[M_t|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}^{P^*}\left[\mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_t\right]\middle|\mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_s\right] = M_s$$

Que es justo lo que teníamos que demostrar. □

Teorema 4.5.7. *Supongamos que X es una variable aleatoria $\mathscr{F}_T$-medible tal que $\mathbb{E}^{P^*}[|X|] < \infty$. Entonces existe una estrategia de réplica ϕ para X. Además, P^*-casi seguramente:*

$$V_t^*(\phi) = \mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_t\right] \tag{4.28}$$

Demostración. Para demostrar la existencia de la estrategia ϕ, definimos al proceso:

$$M_t := \mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_t\right] \tag{4.29}$$

Entonces por (Revuz & Yor - Teorema II.2.9 V.3.5), el proceso $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ es bajo P^* una martingala continua por la derecha con un versión continua. Denotaremos por M a la versión continua de dicho proceso. Además si $\{\tau_n\}_n$ es una sucesión de tiempos de paro como en la definición 4.5.4 donde $\tau_n = +\infty$, entonces tenemos que M es una martingala local.

Ahora por el teorema de representación martingala (teorema 4.5.5), existe un proceso estocástico adaptado $\eta = \{\eta_t\}_{t\in[0,T]}$ que satisface las condiciones del teorema 4.5.5 tal que bajo la medida de probabilidad P^*:

$$M_t = M_0 + \int_0^t \eta_s \mathrm{d}\widetilde{W}_s \qquad \text{para todo } t \in [0,T]$$

Entonces definimos:

$$\alpha_t = \frac{\eta_t}{\sigma S_t^*} \qquad \text{para todo } t \in [0,T]$$

$$\beta_t = M_t - \alpha_t S_t^* \qquad \text{para todo } t \in [0,T]$$

Al ser los proceso estocásticos η y S^* progresivamente medibles, también lo es el proceso $\alpha = \{\alpha_t\}_{t\in[0,T]}$, y además el proceso η satisface $\int_0^T \eta_s^2 \mathrm{d}s < \infty$ P^*-casi seguramente, entonces:

$$\int_0^T \alpha_t^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{\sigma^2 \left(\text{ínf}_{t\in[0,T]} S_t^*\right)^2} \int_0^T \eta_t^2 \mathrm{d}t < \infty$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\beta_t|\, \mathrm{d}t &\leq \int_0^T |M_t|\, \mathrm{d}t + \int_0^T |\alpha_t S_t^*|\, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^T \sup_{t\in[0,T]} |M_t|\, \mathrm{d}t + \int_0^T |\alpha_t| \left(\sup_{t\in[0,T]} S_t^*\right) \mathrm{d}t \\
&= T \sup_{t\in[0,T]} |M_t| + \int_0^T |\alpha_t| \left(\sup_{t\in[0,T]} S_t^*\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\beta_t|\, \mathrm{d}t &\leq T \sup_{t\in[0,T]} |M_t| + \left(\int_0^T \left(\sup_{t\in[0,T]} S_t^*\right)^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \alpha_t^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T \sup_{t\in[0,T]} |M_t| + \sqrt{T} \sup_{t\in[0,T]} S_t^* \left(\int_0^T \alpha_t^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

Ahora sea $\phi = \{(\alpha_t, \beta_t)\}_{t\in[0,T]}$, veamos que en efecto ϕ así definida es una estrategia de réplica, para ello veamos primero que el proceso $V^*(\phi)$ es una martingala, entonces para cada $0 \leq t \leq T$:

$$V_t^*(\phi) = \frac{V_t(\phi)}{B_t} = \frac{\alpha_t S_t + \beta_t B_t}{B_t} = \alpha_t S_t^* + \beta_t = \alpha_t S_t^* + M_t - \alpha_t S_t^* = M_t$$

En segundo lugar demostraremos que la estrategia ϕ es auto-financiada

$$\begin{aligned}
V_t^*(\phi) = M_t = V_0(\phi) + \int_0^t \eta_s \mathrm{d}\widetilde{W}_s \\
&= V_0(\phi) + \int_0^t \sigma\alpha_s S_t^* \mathrm{d}\widetilde{W}_s \\
&= V_0(\phi) + \int_0^t \sigma\alpha_s S_t^* (\mathrm{d}W_s + \theta \mathrm{d}t) \\
&= V_0(\phi) + \int_0^t \sigma\alpha_s S_t^* \mathrm{d}W_s + \int_0^t \sigma\alpha_s S_t^* \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) \mathrm{d}t \\
&= V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s \left[(\mu - r) S_t^* \mathrm{d}t + \sigma S_t^* \mathrm{d}W_s\right] \\
&= V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s \mathrm{d}S_s^*
\end{aligned}$$

Finalmente considerando $t = T$ en la definición (4.29) y ya que la variable aleatoria X es $\mathscr{F}_T$-medible podemos concluir que ϕ replica a X ya que:

$$V_T^*(\phi) = M_T := \mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_T\right] = \frac{X}{B_T} \tag{4.30}$$

Lo que implica que $V_T(\phi) = X$ con lo que queda demostrada la existencia de una estrategia de réplica ϕ para X. Para finalizar la demostración del teorema veremos que P^*-casi seguramente se satisface la ecuación (4.28). Por la propiedad de réplica de ϕ tenemos que el proceso $V^*(\phi)$ es una martingala bajo P^*, entonces por (4.30):

$$\begin{aligned}
V_t^*(\phi) &= \mathbb{E}^{P^*}\left[V_T^*(\phi)|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_t\right]
\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado el teorema. □

4.6. Proceso de Precios Libre de Arbitraje

En esta sección demostraremos el segundo teorema fundamental de valuación de productos financieros derivados.

Consideremos un derivado Europeo $X \in \mathscr{F}_T$ tal que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Para determinar el proceso de precios libre de arbitraje de este derivado, necesitamos la noción de estrategia admisible, bonos y derivados.

Asumimos que dado un proceso $C = \{C_t\}_{t\in[0,T]}$ que represente el valor de un derivado Europeo X es un proceso continuo por la derecha, adaptado, donde C_t representa el precio del derivado Europeo al tiempo t.

(Que sea adaptado es la mínima hipótesis que nosotros esperamos sobre este proceso y continuidad por la derecha es una hipótesis razonable que regularmente se pide)

Definición 4.6.1. *Sea X un derivado europeo con proceso de precios C, Definimos a Ψ_C como la clase de **estrategias admisibles para** X como el conjunto de procesos de tres dimensiones $\psi = \{\psi_t = (\alpha_t, \beta_t, \gamma_t)\}_{t\in[0,T]}$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $\psi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ *es progresivamente medible.*

(ii) ψ *es adaptado a la filtración browniana, es decir, para cada* $t \in [0,T]$, $\psi_t \in \mathscr{F}_t$.

(iii) Casi seguramente bajo P^**:*

$$\int_0^T \alpha_t^2 \mathrm{d}t < \infty \quad , \quad \int_0^T |\beta_t| \,\mathrm{d}t < \infty \quad , \quad \int_0^T \gamma_t^2 \left(\alpha_t^*\right)^2 \mathrm{d}t < \infty$$

(iv) Para cada $t \in [0,T]$*, casi seguramente bajo* P^**:*

$$\begin{aligned} V_t(\psi) &:= \alpha_t S_t + \beta_t B_t + \gamma_t C_t \\ &= V_0(\psi) + \int_0^t \alpha_s \mathrm{d}S_s + \int_0^t \beta_s \mathrm{d}B_s + \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}C_s \end{aligned} \tag{4.31}$$

(v) El proceso estocástico $\{V_t^*(\psi) = e^{-rt} V_t(\psi)\}_{t\in[0,T]}$ *es una* P^**-martingala.*

Las propiedades (i), (ii) y (iii) nos garantizan que las integrales (4.31) están bien definidas. La propiedad (iv) es conocida como la propiedad de **autofinanciamiento** para ψ.

Definición 4.6.2. *Dado un proceso de precios C para un derivado, una **oportunidad de arbitraje** de acción-bono-derivado es una estrategia admisible $\psi \in \Psi_C$ tal que:*

$$V_0(\psi) = 0 \quad , \quad V_T(\psi) > 0 \quad , \quad \mathbb{E}^{P^*}\left[V_T(\psi)\right] > 0$$

En el siguiente teorema, por unicidad nos referimos a que dos procesos estocásticos son indistinguibles.

Teorema 4.6.3. *El único proceso de precios libre de arbitraje para un derivado europeo X bajo P^*, es una versión continua de:*

$$\left\{e^{rt}\ \mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_t\right]\right\}_{t\in[0,T]}$$

Demostración. Sea $C=\{C_t\}_{t\in[0,T]}$ el proceso de precios de un derivado europeo X. Por el teorema 4.5.7 existe $\bar{\phi}=\left(\bar{\alpha},\bar{\beta}\right)$ una estrategia de réplica para X, entonces tenemos que al tiempo $t=T$, $V_T\left(\bar{\phi}\right)=X$ y $C_T=X$, lo cual implica que:

$$C_T=\alpha_T S_T+\beta_T B_T \tag{4.32}$$

Y además el proceso:

$$\left\{\mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_t\right]\right\}_{t\in[0,T]}$$

es una martingala continua por la derecha con una versión continua, lo cual implica que podemos construir un proceso:

$$\left\{e^{rt}\ \mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_t\right]\right\}_{t\in[0,T]}$$

con una versión continua llamada $\left\{V_t\left(\bar{\phi}\right)\right\}_{t\in[0,T]}$. Ahora supongamos que:

$$P^*\left(C_t\neq V_t\left(\phi\right)\quad \text{para algunal } t\in[0,T]\right)>0 \tag{4.33}$$

Ahora como el proceso C es continuo por la derecha y $V\left(\phi\right)$ es continuo, existe $t_0\in[0,T]$ tal que:

$$P^*\left(C_{t_0}\neq V_{t_0}\left(\phi\right)\right)>0$$

Por tanto podemos definir a los conjuntos $A=\left\{\omega\in\Omega: C_{t_0}\left(\omega\right)>V_{t_0}\left(\bar{\phi}\right)\left(\omega\right)\right\}$ y $B=\left\{\omega\in\Omega: C_{t_0}\left(\omega\right)<V_{t_0}\left(\phi\right)\left(\omega\right)\right\}$. Entonces ya sea que $P^*\left(A\right)>0$ o bien $P^*\left(B\right)>0$, primero supongamos que $P^*\left(A\right)>0$, como la estrategia de réplica tiene la forma $\bar{\phi}=\left(\bar{\alpha},\bar{\beta}\right)$ definimos a $\psi=\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ para todo $0\leq t\leq T$ como sigue:

$$\psi_t:=\begin{cases}(0,0,0) & \text{si}\ \ t<t_0\\ (0,0,0) & \text{si}\ \ t\geq t_0\ ,\ \omega\in A^c\\ \left(\bar{\alpha}_t\left(\omega\right),\bar{\beta}_t\left(\omega\right)+\frac{C_{t_0}(\omega)-V_{t_0}\left(\bar{\phi}\right)(\omega)}{B_{t_0}},-1\right) & \text{si}\ \ t\geq t_0\ ,\ \omega\in A\end{cases}$$

De esta definición tenemos el proceso de valor asociado a ψ es igual a cero para todo $0 \leq t < t_0$ De esta definición tenemos para todo $0 \leq t < t_0$ el proceso de valor asociado a ψ es igual a cero, en particular para $t = 0$:

$$V_0(\psi) = \alpha_0 S_0 + \beta_0 B_0 + \gamma_0 C_0 = 0 \cdot S_0 + 0 \cdot B_0 + 0 \cdot C_0 = 0 \tag{4.34}$$

De manera similar, el proceso de valor al tiempo $t = T$ es igual a cero para todo ω en A^c. También, como $\bar{\phi}$ es una estrategia de réplica para X por el desarrollo (4.32) tenemos que para todo ω en A el valor del proceso de precios está dado por:

$$\begin{aligned} V_T(\psi) &= \alpha_T S_T + \beta_T B_T + \gamma_T C_T \\ &= \bar{\alpha}_T S_T + \left(\bar{\beta}_T + \frac{C_{t_0} - V_{t_0}(\bar{\phi})}{B_{t_0}}\right) B_T + (-1) C_T \\ &= \bar{\alpha}_T S_T + \bar{\beta}_T B_T + \frac{C_{t_0} - V_{t_0}(\bar{\phi})}{B_{t_0}} B_T - C_T \\ &= \frac{C_{t_0} - V_{t_0}(\bar{\phi})}{B_{t_0}} B_T \end{aligned}$$

el cual es positivo por definición del conjunto A, entonces tenemos que:

$$V_T(\psi) \geq 0 \tag{4.35}$$

y en consecuencia también obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^*}[V_T(\psi)] &= \int_\Omega V_T(\psi)\, \mathrm{d}P^* = \int_{A^c} V_T(\psi)\, \mathrm{d}P^* + \int_A V_T(\psi)\, \mathrm{d}P^* \\ &= \int_{A^c} 0 \ \mathrm{d}P^* + \int_A \frac{C_{t_0} - V_{t_0}(\bar{\phi})}{B_{t_0}} B_T \ \mathrm{d}P^* > 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Lo cual es una contradicción pues las condiciones (4.34) ,(4.35) y (4.36) implican que la estrategia ψ es una oportunidad de arbitraje lo que contradice nuestra hipótesis de que $V(\psi)$ es el precio libre de arbitraje.

De forma similar, si suponemos que $P^*(B) > 0$, entonces definimos a $\psi = (\alpha, \beta, \gamma)$ para todo $0 \leq t \leq T$ como sigue:

$$\psi_t := \begin{cases} (0,0,0) & \text{si } \ t < t_0 \\ (0,0,0) & \text{si } \ t \geq t_0 \ , \ \omega \in B^c \\ \left(-\bar{\alpha}_t(\omega), -\bar{\beta}_t(\omega) + \frac{V_{t_0}(\bar{\phi})(\omega) - C_{t_0}(\omega)}{B_{t_0}}, 1\right) & \text{si } \ t \geq t_0 \ , \ \omega \in B \end{cases}$$

con lo que podemos concluir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
V_T(\psi) &= \alpha_T S_T + \beta_T B_T + \gamma_T C_T \\
&= -\bar{\alpha}_T S_T + \left(-\bar{\beta}_T + \frac{V_{t_0}(\bar{\phi}) - C_{t_0}}{B_{t_0}}\right) B_T + C_T \\
&= -\bar{\alpha}_T S_T + -\bar{\beta}_T B_T + \frac{V_{t_0}(\bar{\phi}) - C_{t_0}}{B_{t_0}} B_T + C_T \\
&= \frac{C_{t_0} - V_{t_0}(\bar{\phi})}{B_{t_0}} B_T
\end{aligned}$$

Que de nuevo implica que ψ es una oportunidad de arbitraje.

Deduciendo que el supuesto (4.33) es falso y con esto podemos concluir que el único posible proceso de precios (salvo procesos indistinguibles) está dado por $C_t = V_t(\bar{\phi})$ para todo $0 \leq t \leq T$.

A continuación demostraremos que en efecto este es el único proceso de precios libre de arbitraje. Por contradicción, supongamos que con este proceso de precios existe ψ elemento de Ψ_C que es una oportunidad de arbitraje, es decir, es tal que:

$$V_0(\psi) = 0 \quad , \quad V_T(\psi) > 0 \quad , \quad \mathbb{E}^{P^*}[V_T(\psi)] > 0$$

Ahora, por el supuesto de que ψ es una estrategia admisible tenemos que el proceso de valor descontado $V^*(\psi)$ es una martingala bajo P^* lo cual nos conduce a lo siguiente:

$$0 = V_0(\psi) = \mathbb{E}^{P^*}[V_T^*(\psi)] = e^{-rT}\mathbb{E}^{P^*}[V_T(\psi)] > 0$$

Lo que es una contradicción. Por lo tanto no puede existir una oportunidad de arbitraje con este proceso de precios.

□

4.7. Opciones Call Europeas

En esta sección aplicaremos los teoremas de valuación de derivados construidos a lo largo de este capítulo para calcular el proceso de precios libre de arbitraje de una opción Call europea y también podremos identificar una estrategia de réplica para dicha opción.

Sea $X = (S_T - K)_+$ una opción Call europea con precio strike K y fecha de expiración T. Denotaremos a los siguientes procesos descontados por:

$$C_t^* = \frac{C_t}{B_t} = e^{-rt} C_t \qquad t \in [0, T]$$
$$K^* = \frac{K}{B_T} = e^{-rT} K$$

Lema 4.7.1. *Sea $X \sim N\left(m, s^2\right)$. Entonces para a y b cuales quiera números reales:*

$$\mathbb{E}\left[e^{aX} \middle| X \geq b\right] = e^{am + \frac{1}{2}a^2 s^2} \Phi(d)$$

donde $d = \frac{-b+m+as^2}{s}$ y Φ es la función de distribución de una normal estándar.

Demostración. Tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{E}\left[e^{aX} \middle| X \geq b\right] = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty e^{ax} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} \mathrm{d}x \tag{4.37}$$

Ahora consideremos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
ax - \frac{(x-m)^2}{2s^2} &= \frac{2s^2 ax}{2s^2} - \frac{x^2 + m^2 - 2mx}{2s^2} \\
&= \frac{-x^2 - m^2 + 2x\left(m + s^2 a\right)}{2s^2} \\
&= \frac{-x^2 - m^2 + 2x\left(m + s^2 a\right) - s^4 a^2 - 2ms^2 a + s^4 a^2 + 2ms^2 a}{2s^2} \\
&= \frac{-x^2 + 2x\left(m + s^2 a\right) - \left(m + s^2 a\right)^2 + s^4 a^2 + 2ms^2 a}{2s^2} \\
&= am + \frac{1}{2}a^2 s^2 - \frac{\left(x - \left(m + s^2 a\right)\right)^2}{2s^2}
\end{aligned}$$

Sustituyendo este desarrollo en (4.37) tenemos que:

$$\mathbb{E}\left[e^{aX} \middle| X \geq b\right] = e^{am + \frac{1}{2}a^2 s^2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty e^{-\frac{\left(x - \left(m + s^2 a\right)\right)^2}{2s^2}} \mathrm{d}x$$

Considerando el cambio de variable $z := \frac{x-m-as^2}{s}$ y que $d = -z(b) = \frac{-b+m+as^2}{s}$:

$$\begin{aligned}
e^{am + \frac{1}{2}a^2 s^2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z &= e^{am + \frac{1}{2}a^2 s^2} \left(1 - \Phi(-d)\right) \\
&= e^{am + \frac{1}{2}a^2 s^2} \Phi(d)
\end{aligned}$$

Que es lo que se deseaba.

$\square$

Teorema 4.7.2. *Sea* $X = (S_T - K)_+$ *una opción Call Europea con precio strike* K *y fecha de expiración* T*. El proceso de precios libre de arbitraje para esta opción está dado por* $\{e^{rt}C_t^*\}_{t\in[0,T]}$*, donde para cada* $t \in [0, T)$*:*

$$C_t^* = S_t^* \ \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t^*}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) - K^* \ \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t^*}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right)$$

Demostración. Sea $X = (S_T - K)_+$ una opción Europea con precio strike K y fecha de expiración T. Observemos que $0 \le X \le S_T$ y $\mathbb{E}^{P^*}[S_T] = S_0 < \infty$. Por lo tanto, por el teorema 4.6.3, el proceso de precios libre de arbitraje $\{C_t\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso continuo y adaptado tal que para cada $t \in [0,T]$, si $C_t^* = C_t e^{-rt}$, entonces tenemos que casi seguramente bajo P^*:

$$C_t^* = \mathbb{E}^{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathscr{F}_t\right] = \mathbb{E}^{P^*}\left[(S_T^* - K^*)_+\middle|\mathscr{F}_t\right] \tag{4.38}$$

donde $K^* = e^{-rT}K$. Se sigue de la ecuación 4.22 que casi seguramente bajo P^*, para cada $0 \le t \le T$:

$$\frac{S_T^*}{S_t^*} = \frac{S_0\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\widetilde{W}_T\right)}{S_0\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\widetilde{W}_t\right)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma\widetilde{W}_{(T-t)}\right) \tag{4.39}$$

con lo que podemos obtener la siguiente expresión para S_T^*:

$$S_T^* = S_t^* \exp\left(\sigma\widetilde{W}_{(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right) \tag{4.40}$$

Sustituyendo esta expresión en el desarrollo 4.38, obtenemos que para cada $0 \le t \le T$, casi seguramente bajo P^*:

$$C_t^* = \mathbb{E}^{P^*}\left[\left(S_t^*\exp\left(\sigma\widetilde{W}_{(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right) - K^*\right)_+\middle|\mathscr{F}_t\right] \tag{4.41}$$

Utilizando el hecho de que S_t^* es $\mathscr{F}_t$-medible y que $\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t$ es una variable aleatoria normal con media cero y varianza $T-t$ que bajo P^* es independiente a $\mathscr{F}_t$, se sigue que casi seguramente bajo P^*, para cada $0 \le t < T$:

$$
\begin{aligned}
C_t^* &= \mathbb{E}^{P^*}\left[\left(S_t^* \exp\left(\sigma \widetilde{W}_{(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right) - K^*\right) \mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}} \middle| \mathscr{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{P^*}\left[\left(S_t^* \exp\left(\sigma \widetilde{W}_{(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right)\right) \mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}} - K^* \, \mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}} \middle| \mathscr{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{P^*}\left[\left(S_t^* \exp\left(\sigma \widetilde{W}_{(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right)\right) \mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}} \middle| \mathscr{F}_t\right] \\
&\quad - K^* \, \mathbb{E}^{P^*}\left[\mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}} \middle| \mathscr{F}_t\right] \\
&= S_t^* \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right) \mathbb{E}^{P^*}\left[\exp\left(\sigma \widetilde{W}_{(T-t)}\right) \mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}} \middle| \mathscr{F}_t\right] \\
&\quad - K^* \, \mathbb{E}^{P^*}\left[\mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}} \middle| \mathscr{F}_t\right] \\
&= S_t^* \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right) \underbrace{\mathbb{E}^{P^*}\left[\exp\left(\sigma \widetilde{W}_{(T-t)}\right) \mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}}\right]}_{e_1} \\
&\quad - K^* \, \underbrace{\mathbb{E}^{P^*}\left[\mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}}\right]}_{e_2}
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Ahora consideremos el siguiente desarrollo:

$$
\begin{aligned}
S_T^* > K^* &\iff S_t^* \exp\left(\sigma \widetilde{W}_{(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right) > K^* \\
&\iff \exp\left(\sigma \widetilde{W}_{(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right) > \frac{K^*}{S_t^*} \\
&\iff \sigma \widetilde{W}_{(T-t)} > \log\left(\frac{K^*}{S_t^*}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) \\
&\iff \widetilde{W}_{(T-t)} > \underbrace{\frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{K^*}{S_t^*}\right) + \frac{1}{2}\sigma (T-t)}_{:=b}
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

De acuerdo a la notación del lema anterior tenemos que para e_1:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{-b + \sigma (T-t)}{\sqrt{T-t}} = \frac{-\frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{K^*}{S_t^*}\right) - \frac{1}{2}\sigma (T-t) + \sigma (T-t)}{\sqrt{T-t}} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S_t^*}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

Ahora, utilizando el lema 4.7.1 aplicado a la esperanza e_1 tenemos lo siguiente:

$$
\mathbb{E}^{P^*}\left[\exp\left(\sigma \widetilde{W}_{(T-t)}\right) \mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}}\right] = \exp\left(\sigma(0) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right) \Phi\left(d_1\right)
$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right) \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t^*}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) \tag{4.44}$$

de manera similar aplicamos el lema a la esperanza e_2:

$$d_2 = \frac{-b}{\sqrt{T-t}} = \frac{-\frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{K^*}{S_t^*}\right) - \frac{1}{2}\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}} = \frac{\log\left(\frac{S_t^*}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

y con ello podemos deducir que:

$$\mathbb{E}^{P^*}\left[\mathbb{I}_{\left\{S_T^* > K^*\right\}}\right] = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t^*}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) \tag{4.45}$$

Sustituyendo los desarrollos 4.44 y 4.45 en la expresión 4.42 nos conduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned} C_t^* &= S_t^* \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right) \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t^*}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) \\ &\quad - K^* \ \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t^*}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) \\ &= S_t^* \ \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t^*}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) - K^* \ \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t^*}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) \end{aligned} \tag{4.46}$$

Que es justo lo que se quería demostrar.

□

Observemos en particular que si $t = 0$, entonces:

$$C_0 = C_0^* = S_0 \ \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right) - K^* \ \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K^*}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right)$$

la cual es la famosa fórmula de Black-Scholes.

4.8. Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes

Para concluir este capítulo, deduciremos que la función que representa el precio de un derivado europeo también satisface la ecuación de calor, la cual es una ecuación diferencial parcial de tipo parabólica.

Teorema 4.8.1. ***(Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes)*** *Sea $f(t,x) \in \mathcal{C}^2([0,T] \times \mathbb{R})$ que denote el precio al tiempo t de un derivado de estilo Europeo sobre una acción (por ejemplo una Opción Call Europea), con fecha de expiración T, cuando $S_t = x$, donde $S = \left\{S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}\right\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano geométrico que modela el precio de la acción subyacente. Entonces f debe satisfacer la ecuación diferencial parcial:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} r x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 = r f$$

Demostración. En nuestra prueba replicaremos el payoff de la opción mediante la creación de un portafolio que contenga acciones subyacentes y cuentas libres de riesgo, reajustando el portafolio a través del tiempo. Haciendo esto, veremos que f satisface la EDP en cuestión.
Tenemos dos procesos en tiempo continuo:

1. El precio de la acción subyacente:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

La Ecuación Diferencial Estocástica para este Movimiento Browniano Geométrico es:

$$\mathrm{d}S_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$$

2. La cuenta libre de riesgo (CETES por ejemplo) $b_t = e^{rt}$, una función determinista que depende de t, donde $r > 0$ es la tasa de interés; la Ecuación Diferencial para este proceso es:

$$\mathrm{d}b_t = r b_t \mathrm{d}t$$

Queremos construir un portafolio (α_t, β_t) donde α_t denote el número de acciones subyacentes y β_t denote la cantidad de dinero en la cuenta libre de riesgo, tal que para cada instante de tiempo $t \in [0,T]$ el valor del este portafolio debe coincidir con el precio de la opción.

Para cada tiempo $t \in [0,T]$ el valor de nuestro portafolio está dado por:

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t b_t \tag{4.47}$$

Nuestro objetivo es comprar al tiempo $t = 0$ la cantidad inicial (α_0, β_0) y continuar ajustando nuestro portafolio de tal forma que:

$$V_t = f(t, S_t) \qquad \text{para todo} \quad t \in [0,T]$$

En particular, el precio de la opción al tiempo $t = 0$ será: $C_0 = V_0 = \alpha_0 S_0 + \beta_0$.

Es importante recordar que no se nos permite insertar o extraer cantidad de subyacente o dinero de la cuenta libre de riesgo, a lo largo de la vida del derivado. Asumimos una estrategia auto-financiada, matemáticamente lo expresamos como:

$$dV_t = \alpha_t \mathrm{d}S_t + \beta_t \mathrm{d}b_t$$

En forma integral, esta condición se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \int_0^t \alpha_s \mathrm{d}S_s + \int_0^t \beta_s \mathrm{d}b_s \\ &= \alpha_0 S_0 + \beta_0 + \underbrace{\int_0^t \alpha_s \mathrm{d}S_s}_{=:I_1} + \underbrace{\int_0^t \beta_s \mathrm{d}b_s}_{=:I_2} \end{aligned} \tag{4.48}$$

Retomando el ejemplo 3.4.4, tenemos que S es un proceso de Itô, y como el proceso α es un proceso adaptado, entonces la integra (I_1) está definida por:

$$\int_0^t \alpha_s \mathrm{d}S_s := \int_0^t \alpha_s \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_s \mathrm{d}s + \int_0^t \alpha_s \sigma S_s \mathrm{d}W_s \tag{4.49}$$

Además (I_2) es una integral de Riemann-Stieltjes, entonces:

$$\int_0^t \beta_s \mathrm{d}b_s = \int_0^t \beta_s b_s' \mathrm{d}s = \int_0^t \beta_s r b_s \mathrm{d}s \tag{4.50}$$

Sustituyendo (4.49) y (4.50) en (4.48), tenemos que el valor del portafolio está dado como sigue:

$$\begin{aligned} V_t &= \alpha_0 S_0 + \beta_0 + \int_0^t \alpha_s \mathrm{d}S_s + \int_0^t \beta_s \mathrm{d}b_s \\ &= \alpha_0 S_0 + \beta_0 + \int_0^t \alpha_s \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_s \mathrm{d}s + \int_0^t \alpha_s \sigma S_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t \beta_s r b_s \mathrm{d}s \\ &= \alpha_0 S_0 + \beta_0 + \int_0^t \left[\alpha_s \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_s + \beta_s r b_s\right] \mathrm{d}s + \int_0^t \alpha_s \sigma S_s \mathrm{d}W_s \end{aligned} \tag{4.51}$$

Estamos buscando factores α_t y β_t tales que para todo $0 \leq t \leq T$:

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t b_t = f(t, S_t)$$

Para ello aplicamos la fórmula de Itô sobre $f(t, S_t)$, exactamente como en el ejemplo 3.4.4:

$$\begin{aligned}
f\left(t, S_t\right) &= f\left(0, S_0\right) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}S_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\mathrm{d}S_s\right)^2 \\
&= f\left(0, S_0\right) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} \left(\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_s \mathrm{d}s + \sigma S_s \mathrm{d}W_s\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 S_s^2 \mathrm{d}s \\
&= f\left(0, S_0\right) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 S_s^2\right] \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} \sigma S_s \mathrm{d}W_s
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Igualando los integrandos de $\mathrm{d}W_s$ de (4.51) y (4.52), tenemos que:

$$\alpha_t \sigma S_t = \frac{\partial f}{\partial x} \sigma S_t$$

con lo que podemos concluir que:

$$\alpha_t = \frac{\partial}{\partial x} f\left(t, S_t\right) \tag{4.53}$$

Análogamente, igualando los integrandos de $\mathrm{d}s$:

$$\begin{aligned}
\alpha_t \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t + \beta_t r b_t &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha_t \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2
\end{aligned}$$

deducimos que:

$$\beta_t = \frac{1}{r b_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} f\left(t, S_t\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(t, S_t\right) \sigma^2 S_t^2\right] \tag{4.54}$$

Remplazando los valores de α_t y β_t de (4.53) y (4.54) en la expresión (4.47):

$$\begin{aligned}
f\left(t, S_t\right) &= V_t = \alpha_t S_t + \beta_t b_t \\
&= \frac{\partial f\left(t, S_t\right)}{\partial x} S_t + \left(\frac{1}{r b_t} \left[\frac{\partial f\left(t, S_t\right)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f\left(t, S_t\right)}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2\right]\right) b_t \\
&= \frac{\partial f\left(t, S_t\right)}{\partial x} S_t + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial f\left(t, S_t\right)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f\left(t, S_t\right)}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo en esta expresión que $S_t = x$:

$$r f = \frac{\partial f}{\partial x} r x + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 x^2$$

Que es justo lo que queremos demostrar.

□

Con cierto abuso de notación, si denotamos el precio del derivado con la letra V y en vez de la variable x utilizamos S, podemos escribir la ecuación diferencial de Black-Scholes como:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Desde un punto de vista matemático, la teoría de Black-Scholes supuso un acercamiento del mundo financiero a un tipo de matemáticas nada triviales. Por otra parte, existen profundas similitudes entre esta teoría y una en particular: la ecuación de calor y los procesos de difusión, iniciada por Joseph Fourier a mediados del siglo XIX. En un artículo de Albert Einstein de principios de siglo, se formula el movimiento browniano en términos de ecuaciones diferenciales de difusión, esencialmente equivalentes a la de Black-Scholes. El movimiento browniano, que se puede encontrar ya mencionado en los trabajos de Darwin sobre el origen de las especies, se ocupa de describir los movimientos erráticos de partículas (Brown lo estudió para el movimiento de partículas de polvo). Como dijo el premio Nobel de Física Richard Feynman, *la razón de la efectividad de las matemáticas es que las mismas ecuaciones tienen las mismas soluciones*, lo cual permite que problemas tan dispares como estudiar partículas de polvo, la difusión del calor, o la gestión de productos financieros, se reduzcan, por pura abstracción matemática, al mismo problema.

Bibliografía

[1] L. C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, AMS, Berkeley (2013).

[2] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Heidelberg-New York (2003).

[3] I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York-Berlin (1998).

[4] D. Sonderman, S. Shreve, *Introduction to Stochastic Calculus for Finance*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (2006).

[5] D. Revuz, M. Yor, *Continous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1991).

[6] H. Foellmer, *On Kiyosi Itô's Work and its Impact*, European Mathematical Society, (2014).

[7] H.L. Royden, P.M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, Pearson, Berlin-Heidelberg (1991).

[8] R. Brown, *A brief account of microscopical observations*, (London), (1781).

[9] John C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, Toronto (2012).

[10] R.J. Williams, *Introduction to the Mathematics of Finance*, American Mathematical Society, New York (2006).

[11] H. Foellmer, *Calcul d'Itô sans probabilité*, Springer Lect., (1981).

[12] H. del Castillo, *Notas de Productos Financieros Derivados*, notas de curso en proceso, Facultad de Ciencias, UNAM.

[13] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York (1987).

[14] J. Jacod, P. Protter, *Probability Essentials*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2004).

[15] K. Sigman, *Geometric Brownian motion, modeling stock prices in continuous time, Black-Scholes option pricing formula*, notas del curso Financial Engineering, Department of Industrial Engineering and Operations Research, Columbia University in the City of New York. http://www.columbia.edu/ ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-GBM.pdf .