



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**EFFECTO DE LA MODIFICACIÓN DE LA FORMA
DEL CILINDRO INTERIOR EN EL FLUJO DE
TAYLOR-COUPETTE**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO MECÁNICO**

PRESENTA :

JUÁREZ GUZMÁN RICARDO



**DIRECTOR DE TESIS:
M. MILTON CARLOS ÁLVAREZ SÁNCHEZ**

Ciudad universitaria CD. MX. 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Cada fracaso le enseña al hombre algo que necesitaba aprender.

Charles Dickens

Es imposible vivir sin fracasar en algo, al menos que vivas tan cautelosamente que podrías no haber vivido en lo absoluto, en cuyo caso, habrías fracasado por defecto.

J.K. Rowling.

Agradecimientos

Este trabajo de tesis realizado en la Universidad Autónoma de México es un esfuerzo en el cual, directa e indirectamente participaron diversas personas, este trabajo me ha permitido aprovechar la competencia y la experiencia de muchas personas que deseo agradecer en este apartado.

En primer lugar, a mi director de tesis, M. Milton Carlos Álvarez Sánchez, mi más amplio agradecimiento por su valiosa dirección en este camino y llegar a la culminación de este trabajo, cuya experiencia y conocimiento ha sido ejemplo durante este tiempo.

A todos mis amigos, estén donde estén, se merecen muchas y buenas palabras ya que con ellos he compartido mis fracasos y triunfos, por todo el tiempo que me han dado, por todas aquellas charlas en las que siempre me han dejado algo, por el respaldo y la amistad. Gracias

Por escucharme por los buenos y malos momentos. Porque siempre estuvieron hay en lo bueno y en lo malo y sobre todo por aguantarme en aquellos momentos de grandes frustraciones y desaires.

Un especial agradecimiento a Dora Lilia Guzmán Villagómez, a Guillermo Juárez Ramírez y a Ulises Juárez Guzmán ya que todo esto nunca hubiera sido posible sin el amparo incondicional y el cariño que me otorgan, a mis padres quienes son los cimientos de quien soy y quienes de forma incondicional entendieron mis malos momentos, quienes siempre estuvieron a mi lado para saber la evolución de mi proceso. Las palabras nunca serán suficientes para dar testimonio de mi aprecio y me agradecimiento.

A todas aquellas personas a quienes no he mencionado, pero que con entusiasmo me han brindado su compañía y su apoyo.

A todos ustedes, mi mayor reconocimiento y gratitud.

*Lo más importante es no dejar
de cuestionarse las cosas.*

Albert Einstein.

ÍNDICE.

Efecto de la modificación de la forma del cilindro interior en el flujo de Taylor-Couette.

Capítulo 1.

Introducción.

1.1 Introducción.

1.2 Propiedades de los fluidos.

1.3 Trabajo de Couette.

1.4 Trabajo de Taylor.

1.5 Efecto de la viscosidad en el experimento de Taylor y variables que intervienen.

Capítulo 2.

Ecuaciones de transporte.

2.1 Introducción.

2.2 Ecuación de Navier-Stokes en su forma cartesiana.

2.3 Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas.

Capítulo 3.

Solución de las ecuaciones diferenciales (Metodología de solución).

3.1 Introducción.

3.2 Métodos de elementos finitos.

3.3 Ecuación general.

3.3.1 Término temporal.

3.3.2 Término fuente.

3.3.3 Término Difusivo.

3.3.4 Término convectivo.

Capítulo 4.

Resultados numéricos.

4.1 Introducción.

4.2 Configuración geométrica.

4.3 Casos de estudio.

4.4 Resultados numéricos.

4.4.1 Caso liso.

4.4.2 Configuraciones aletadas.

Capítulo 5.

Conclusiones.

Apéndice.

Bibliografía.

CAPITULO 1.

INTRODUCCIÓN.

1.1 Introducción.

La mecánica de fluidos es una rama de la física que se dedica al estudio del movimiento de los fluidos, tanto gases como líquidos, así como las fuerzas que provocan su movimiento. La característica principal de los fluidos es la incapacidad de resistir a esfuerzos cortantes por lo que no cuentan con una forma definida.

1.2 Propiedades de los fluidos.

Los fluidos cuentan con ciertas propiedades importantes, tales como la densidad, la compresibilidad, la tensión superficial, temperatura, la energía interna, el calor específico, la conductividad térmica, la capilaridad entre otras más. Sin embargo es necesario para el estudio de los fluidos, dentro de la mecánica de los fluidos conocer quizás una de las propiedades más importantes, la viscosidad.

La viscosidad está definida como la oposición de un fluido a las deformaciones tangenciales, y está es plenamente identificable en fluidos que se encuentran en movimiento, los fluidos que no cuentan con esta propiedad son llamados fluidos ideales. Aunque en realidad todos los fluidos conocidos presentan algo de viscosidad, siendo así los fluidos ideales son tan solo modelos, que son referidos a la viscosidad nula, por lo que son solo una buena aproximación para ciertas aplicaciones.

De tal manera que para conocer el comportamiento viscoso de un líquido es necesario determinar el esfuerzo de corte y la rapidez de deformación, estas cantidades dependen del área de contacto y de la fuerza necesaria para mover la parte superior del fluido a una velocidad constante, así como también dependen de la distancia entre la parte superior y su base en casos específicos. Esto permite tener dos clasificaciones generales: un fluido newtoniano, en el cual la viscosidad permanece constante o en otras palabras la relación entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación tiene un carácter lineal; por el otro lado existen los fluidos no newtonianos en los cuales esta linealidad se pierde.

Para fluidos no newtonianos, como los adelgazantes (también conocidos como pseudoplásticos) la viscosidad (que es la pendiente de la curva del esfuerzo de corte contra la deformación) disminuye al incrementarse la rapidez de deformación. El caso contrario se presenta en el fluido dilatante (conocido como plástico), cuya viscosidad se incrementa al aumentar la rapidez de deformación. Otro caso especial es el famoso fluido de Bingham el cual se considera como un fluido no newtoniano por el hecho de necesitar un esfuerzo crítico para comenzar a fluir, seguido de un comportamiento newtoniano.

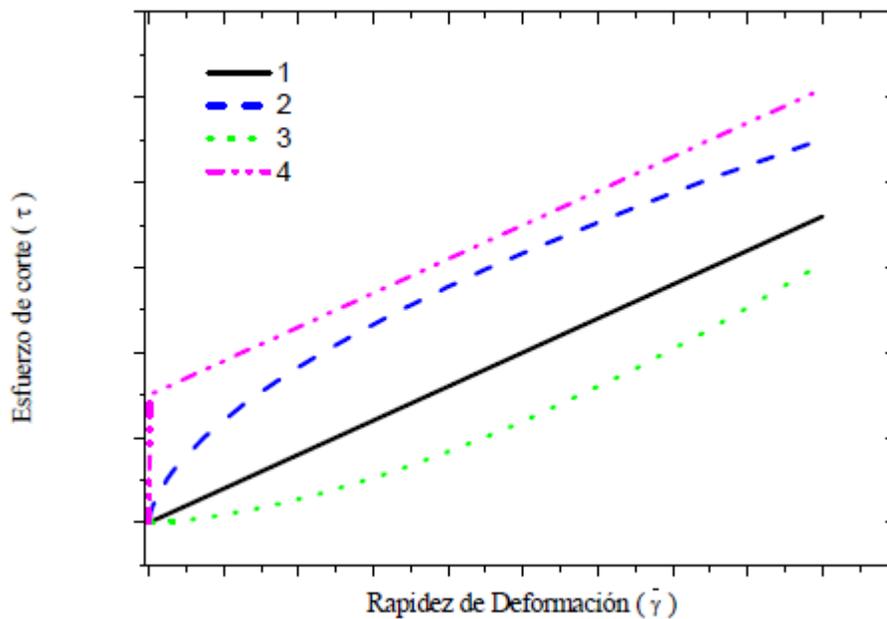


Figura 1.1 Representación de curvas de flujo para diferentes fluidos 1) fluido newtoniano. 2) fluido newtoniano adelgazante. 3) fluido no newtoniano dilatante. 4) fluido de Bingham. [1].

1.3 trabajo de Couette.

Una de las personas más interesadas en el área de la reología fue Maurice Marie Alfred Couette quien en 1889 oficialmente registro su tesis doctoral “Estudios de la fricción en líquidos” [1] bajo la supervisión del premio Nobel Gabriel Lippmann.

Maurice Couette en su trabajo de tesis doctoral inicio con el estudio de la viscosidad dando origen al cuestionamiento de, cómo medir la viscosidad. Gracias a este trabajo que realizó bajo la tutela de Lippmann, Couette se concentró en

hacer el análisis del flujo anular en estado laminar, diseñando un dispositivo que contenía un fluido entre cilindros concéntricos.

Alrededor de 1885 en París, Maurice Couette comenzaba a construir y experimentar con viscosímetros de cilindros concéntricos. En un extenso estudio sobre la viscosidad mostró que para velocidades angulares pequeñas del cilindro interior, la curva obtenida de la comparación del torque-velocidad, permanecía constante hasta que se alcanzaba una velocidad crítica de rotación, a partir de ahí la relación torque-velocidad deja de ser lineal.

1.4 Trabajo de Taylor.

Couette interpretó el comportamiento mencionado con anterioridad como el comienzo de la turbulencia. Casi treinta años después, Geoffrey Ingram Taylor descubrió la aparición de inestabilidades en el flujo, dando pie a que estudiara teóricamente, la primera de ellas utilizando la teoría de estabilidad lineal. Los resultados teóricos y experimentales mostraron total acuerdo.

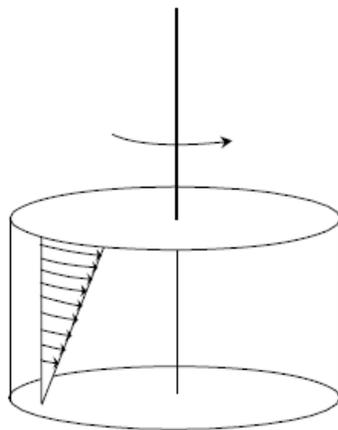


Figura 1.2 Representación de un viscosímetro de placas paralelas con sentido y dirección del flujo [2].

En la mayoría de los casos, el equipo se diseña de manera que los dos cilindros sean suficientemente pequeños como para que la velocidad de deformación sea aproximadamente constante a lo largo del espacio anular, al igual que el esfuerzo de deformación, dando origen al flujo de Couette el cual en general se refiere a un flujo laminar de un fluido viscoso que se encuentra en medio de dos planos

paralelos, esta condición cumple tanto para las placas planas como para el reómetro de cilindros concéntricos de Couette [III].

El flujo Taylor-Couette es un problema clásico de inestabilidad hidrodinámica, debido a que su geometría es simple, se conocen las ecuaciones que gobiernan el flujo y el parámetro de control; mientras que las condiciones de experimentación estén bien definidas, se gobierna con relativa facilidad y los patrones de flujo pueden observarse a simple vista [III].

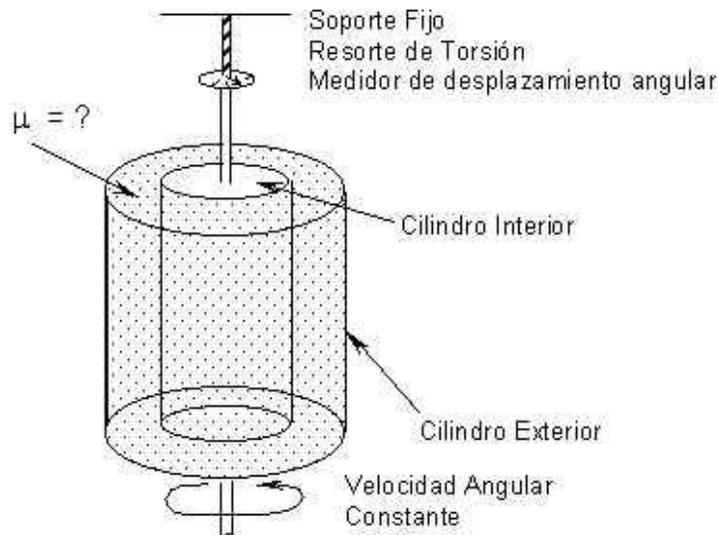


Figura 1.3 se muestran las principales partes del experimento de Couette, donde μ (μ) se refiere a la viscosidad del líquido en estudio. [3].

Desde su descubrimiento, el flujo de Taylor-Couette ha atraído el interés de gran variedad de estudiosos de muy diversos campos, desde ingenieros de lubricación hasta matemáticos puros, no solo por la belleza de los impresionantes patrones formado por los flujos, sino porque posee características que lo hacen fácil de reproducir, controlar, y permite estudiar flujos completamente distintos con sólo variar las condiciones de frontera. Por mencionar algunos aspectos sobresalientes, el estudio de este flujo permite acercarse a las ideas fundamentales de la teoría no lineal, la cual tiene múltiples utilidades en diversos campos de aplicación una de estas aplicaciones es la dispersión de alúmina [IV], lo que hace posible el estudiar las bifurcaciones. Mantener una constante interacción entre teoría y experimentación, plantear y probar nuevas simulaciones

numéricas y tratamientos teóricos quizás de manera más “simple”, gracias a la simetría del sistema. Ha demostrado que es posible encontrar una gran variedad de comportamientos en su camino a la turbulencia, y muchos de los conceptos de la teoría del caos han visto en el su realización de forma experimental. De hecho, las experiencias en el flujo de Taylor-Couette mostraron las primeras evidencias contundentes de la existencia del comportamiento caótico [V].

El movimiento de fluidos entre superficies que rotan están presentes en numerosas aplicaciones de ingeniería [IV], donde el campo del flujo rotante está dominado por la inestabilidad centrifuga y la evolución de estructuras de vórtices a lo largo de la superficie [VI]. El conocimiento del movimiento de fluidos entre cilindros puede ayudar en la predicción de torques, transferencia de masa y calor, la predicción del comienzo de las inestabilidades que pueden resultar en la aparición de nuevos patrones de flujo o en turbulencia, y su dependencia con los parámetros de flujo es una herramienta fundamental en el mejoramiento de diversos procesos tecnológicos.

La estabilidad del flujo de Couette fue investigado por Taylor en un artículo de vanguardia para su época [VII], por lo que ha sido una piedra angular en el desarrollo de la teoría de estabilidad hidrodinámica. Se demostró que cuando la velocidad angular del cilindro interno se incrementa hasta un cierto umbral o crítico, el flujo de Couette se vuelve inestable y surge un estado secundario estacionario [VIII], caracterizado por vórtices toroidales, conocidos como vórtices de Taylor [IX]. Los incrementos subsiguientes de la velocidad angular del cilindro dan como resultados estados de mayor complejidad del espacio temporal. Por lo tanto el flujo de Taylor-Couette ha sido uno de los componentes básicos de la teoría de formación.

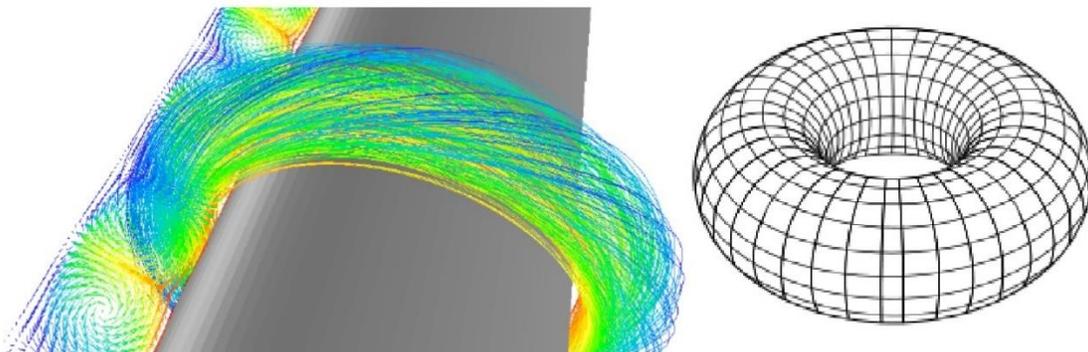


Figura 1.4 Esta figura hace un comparativo de lo que es un toroide matemático del lado derecho y lo que se espera que se forme del lado izquierdo, como es posible observar el toroide matemático es estático mientras que lo que esperamos encontrar tiene arte una rotación en el cuerpo que lo conforma.

1.5 Efecto de la viscosidad en el experimento de Taylor y variables que intervienen.

Taylor investigo el efecto de la viscosidad y demostró que ésta retrasa el inicio de la inestabilidad centrifuga. Sus cálculos numéricos mostraron que cuando el cilindro exterior está en reposo y la velocidad del cilindro interior excede un valor crítico o umbral, el flujo de Couette circular se vuelve inestable a perturbaciones axisimétricas infinitesimales [X]. Los cálculos numéricos de Taylor estaban en excelente acuerdo con sus propias mediciones experimentales.

También es importante recordar que los vórtices de Taylor que se forman en los cilindros, son directamente dependientes de algunos parámetros controlables como:

La distancia entre cilindros:

Este parámetro es influyente, ya que si la separación en los cilindros concéntricos aumenta es necesario que el cilindro interior aumente las revoluciones a las que deberá girar para así alcanzar la velocidad crítica de formación.

Velocidad de rotación:

Esta es una de las variables indispensable para el estudio de los vórtices de Taylor, ya que en base a la velocidad de rotación del cilindro interior se produce la formación del patrón de flujo (vórtices).

Viscosidad:

Por definición la viscosidad es la oposición de un fluido a las deformaciones tangenciales, lo cual es debido a las fuerzas de cohesión moleculares. Por lo que todos los fluidos conocidos presentan algo de viscosidad. La viscosidad solo se manifiesta en líquidos en movimiento y esta es definida como la relación existente entre el esfuerzo cortante y el gradiente de la velocidad.

Si tenemos un bloque solido (sin fluir) sometido a una fuerza tangencial, el material solido opone una resistencia a la fuerza aplicada, pero se deforma, tanto

más cuanto menor sea la rigidez. Si imaginamos a que el bloque está formado por delgadas capas unas sobre otras, el resultado de la deformación es el desplazamiento relativo de unas capas respecto de la adyacente.

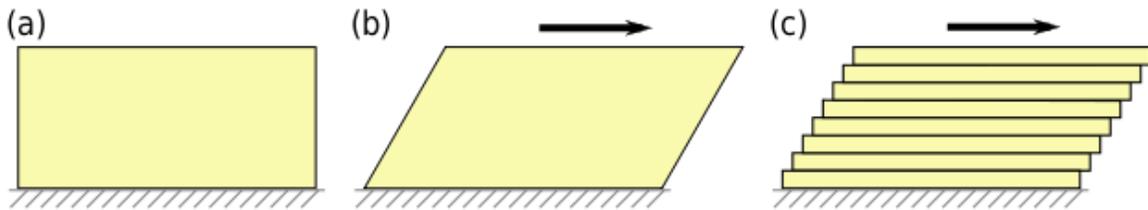


Figura 1.5 Esta imagen muestra un sólido diseccionado en capas al cual se le aplica una fuerza tangencial, ya que las capas del solido transmiten el esfuerzo cortante mediante la interacción molecular este se va debilitando a medida que la altura del solido crece.

Por lo que en los líquidos, el pequeño rozamiento que existe entre capas adyacentes se denomina viscosidad. Esa pequeña magnitud es la que le confiere al fluido sus propiedades características.

Por lo que si se arrastra la superficie de un líquido con algún otro cuerpo como se hacía con el bloque las capas inferiores no tendrán prácticamente movimiento o lo harán de manera muy lenta a comparación de la superficie ya que estas son arrastradas por la pequeña fuerza tangencial (opuesta al movimiento) mientras que las capas superiores fluirán con facilidad.

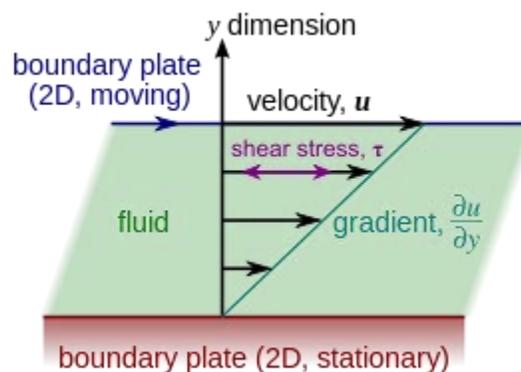


Figura 1.5.1 Por medio de esta figura se muestra cómo es que el fluido es perturbado mediante un gradiente tangencial.

Esta es una variable de gran interés ya que es directamente proporcional a la formación de los vórtices, puesto que de esta dependen del incremento de la velocidad de rotación del cilindro interior, por lo que entre mayor viscosidad

contenga el fluido mayor tendrá que ser la velocidad con que rota el cilindro interior, por la resistencia que presenta el fluido al desplazamiento. Esto se debe a las fuerzas intermoleculares que interactúan entre ellas para darle al fluido cierta resistencia al desplazamiento.

Por lo que es posible decir que la velocidad de rotación del cilindro interno es dependiente tanto de la viscosidad como de la distancia entre los cilindros concéntricos, haciendo que sea directamente proporcional al incremento en la distancia entre cilindros y al aumento de la viscosidad del fluido.

En este trabajo se analizará el flujo de Taylor-Couette para lo cual se propone modificar la forma del cilindro interior la cual proporciona el movimiento al fluido. La propuesta del proyecto es introducir un aletado en el cilindro interior y variar la altura de la aleta, esto con la finalidad de perturbar el flujo y así obtener una velocidad crítica de formación menor a la del caso liso.

El trabajo será realizado por un software comercial de mecánica de fluidos computacional aplicando diferentes condiciones de frontera las cuales simulen el fenómeno, estas condiciones serán explicadas en capítulos posteriores.

La relevancia de este proyecto radica en la aplicabilidad del fenómeno, aplicaciones como procesos de mezclado en los cuales los tiempos de residencia del fluido pueden ser minimizados.

CAPITULO 2.

ECUACIONES DE TRANSPORTE.

2.1 Introducción.

En este capítulo se presentarán las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos, mediante un análisis diferencial. Esto se puede hacer aplicando las cuatro leyes básicas de conservación, a un sistema de fluido infinitesimal. En cualquier caso, los resultados proporcionan las ecuaciones diferenciales básicas del movimiento de los fluidos.

2.2 Ecuaciones de Navier-Stokes en su forma cartesiana.

Aquí se presentan las ecuaciones de Navier-Stokes, llamadas así en honor de C. L. M. H. Navier (1785-1836) y Sir. George G. Stokes (1819-1903), por haber sido los primeros en deducirlas. Son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden y no lineales (el desarrollo de las ecuaciones de transporte se pueden encontrar en el apéndice). Sorprendentemente se han encontrado soluciones a una variedad de problemas viscosos de interés.

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\delta}{\delta x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] + \frac{\delta}{\delta y} \left[\mu \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) \right] + \frac{\delta}{\delta z} \left[\mu \left(\frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \right) \right] \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{\delta p}{\delta y} + \frac{\delta}{\delta y} \left[\mu \left(2 \frac{\delta v}{\delta y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] + \frac{\delta}{\delta z} \left[\mu \left(\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \right) \right] + \frac{\delta}{\delta x} \left[\mu \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) \right] \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{\delta p}{\delta z} + \frac{\delta}{\delta z} \left[\mu \left(2 \frac{\delta w}{\delta z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] + \frac{\delta}{\delta x} \left[\mu \left(\frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \right) \right] + \frac{\delta}{\delta y} \left[\mu \left(\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \right) \right]\end{aligned}$$

La alternativa más común al sistema cartesiano son las coordenadas cilíndricas, las cuales se muestran en la figura 2.4. Un punto arbitrario P está definido por la distancia z a lo largo del eje, la distancia radial r desde el eje y el ángulo θ teta de rotación alrededor del eje. Las tres componentes independientes de la velocidad son la componente axial v_z , la componente radial v_r y la componente circunferencial v_θ , la cual se considera positiva en sentido contrario al de giro de las agujas del reloj, esto quiere decir, que en la dirección de las θ son crecientes. En general todas las componentes de la velocidad, así como la presión y la densidad y otras propiedades son funciones continuas de r, θ, z y t .

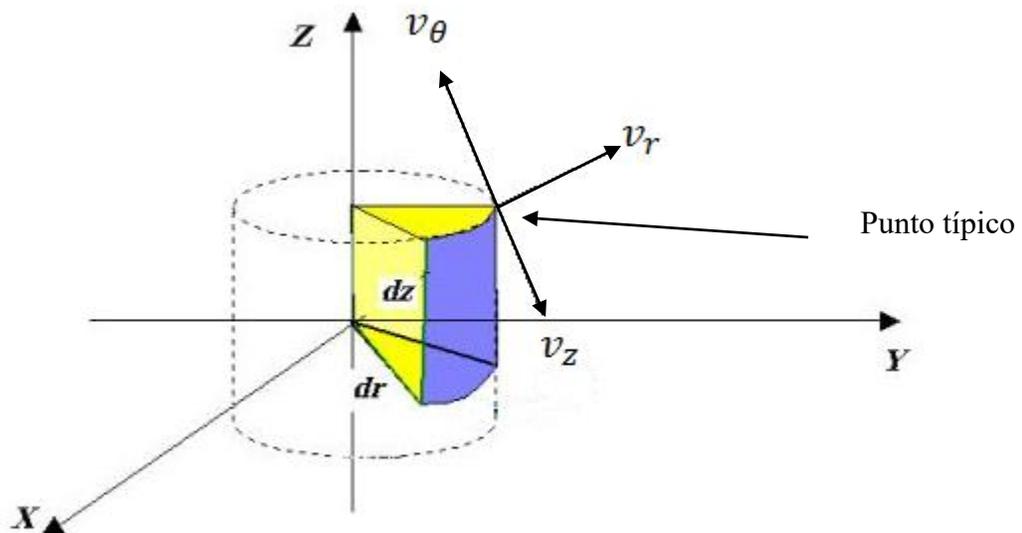


Figura 2.4 Esquema que muestra la conversión de coordenadas cartesianas a cilíndricas.

De tal manera que si la ecuación de continuidad.

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \nabla * (\rho V) = 0$$

Ecuación (2.4)

Si se le aplican la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas quedaría de la siguiente manera.

$$\frac{1}{r} \frac{\delta(rV_r)}{\delta r} + \frac{1}{r} \frac{\delta V_\theta}{\delta \theta} + \frac{\delta V_z}{\delta z} = 0$$

Ecuación (2.27)

2.3 Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas.

Las ecuaciones de Navier-Stokes, después de haber aplicado las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas al sistema de coordenadas cilíndricas quedarían de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\delta V_r}{\delta t} + V_r \frac{\delta V_r}{\delta r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\delta V_r}{\delta \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\delta V_r}{\delta z} \right. \\ & \quad \left. = F_r - \frac{\delta p}{\delta r} + \mu \left(\frac{\delta^2 V_r}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta V_r}{\delta r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 V_r}{\delta \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\delta V_\theta}{\delta \theta} + \frac{\delta^2 V_r}{\delta z^2} \right) \right] \\ & \rho \left[\frac{\delta V_\theta}{\delta t} + V_r \frac{\delta V_\theta}{\delta r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\delta V_\theta}{\delta \theta} - \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\delta V_\theta}{\delta z} \right. \\ & \quad \left. = F_\theta - \frac{\delta p}{\delta \theta} + \mu \left(\frac{\delta^2 V_\theta}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta V_\theta}{\delta r} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 V_\theta}{\delta \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\delta V_r}{\delta \theta} + \frac{\delta^2 V_\theta}{\delta z^2} \right) \right] \\ & \rho \left[\frac{\delta V_z}{\delta t} + V_r \frac{\delta V_z}{\delta r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\delta V_z}{\delta \theta} + V_z \frac{\delta V_z}{\delta z} = F_z - \frac{\delta p}{\delta r} + \mu \left(\frac{\delta^2 V_z}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta V_z}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 V_z}{\delta \theta^2} + \frac{\delta^2 V_z}{\delta z^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Ecuación (2.28)

En particular para este experimento se usaran las ecuaciones de Navier-Stokes, así como la ecuación de la continuidad, en coordenadas cilíndricas. Ya que para el estudio que se realizará en los cilindros concéntricos, los cálculos resultarán más sencillos, además de que como se verá más adelante gracias al manejo de las coordenadas cilíndricas el tipo de malla y el mallado será más adecuado a la forma del modelo en estudio.

Para el caso de esta tesis se usa un programa comercial para el cálculo de elementos finitos, el cual da solución al modelo matemático. Cabe señalar que este desarrollo es un proceso que bajo los esquemas de un ordenador comercial aun con características de alto rendimiento (año 2015), las horas de cálculo para cada simulación realizada radica en alrededor de entre 30 y 40 horas por cada simulación.

CAPITULO 3

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

(METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN.)

3.1 Introducción.

En este capítulo se dará solución a las ecuaciones diferenciales mencionadas en los capítulos anteriores, de tal manera que estas tengan más de una solución usando como medio el método de volúmenes finitos. Podemos partir de una forma general de la ecuación de transporte que permitirá un gran número de horizontes como solución. Cada ecuación determinará la solución adecuada, basada en las variables y constantes que se tengan y aquellas que se puedan despreciar.

Cabe mencionar que dependiendo de las suposiciones hechas para cada caso, estas reducirán o mantendrán el número de variables y o constantes que se ocuparan en la ecuación, haciendo de esta una ecuación característica para los flujos que cumplan con las características asumidas.

3.2 Métodos de volúmenes finitos.

El método de volúmenes finitos permite discretizar y resolver numéricamente ecuaciones diferenciales.

Para el método se debe considerar una malla de discretización del espacio fluido. En torno a esta malla se construye un volumen de control que no se traslapa con los puntos vecinos. De esta forma el volumen total del fluido resulta ser igual a la suma de los volúmenes de control considerados. La ecuación diferencial a resolver se integra sobre cada volumen de control, lo cual entrega como resultado una versión discretizada de dicha ecuación. Para realizar la integración se requiere especificar perfiles de variación de la variable dependiente entre los puntos de malla, de modo que se puedan evaluar las integrales resultantes. La principal propiedad del sistema de ecuaciones discretizadas resultante, es que la solución obtenida satisface en forma exacta las ecuaciones de conservación consideradas, independientemente del tamaño de malla.

El fluido está regido por la siguiente ecuación:

$$\frac{\delta(\rho\varphi)}{\delta t} + \nabla(\rho\varphi v) - \nabla(\Gamma_\varphi \nabla_\varphi) = S_\varphi$$

Ecuación (3.1)

Por lo que las variables independientes son; x, y y z ; φ es la variable dependiente de la ecuación diferencial y esta representa $u, v, w, h, k, \mathcal{E}$, ρ es la densidad del fluido, y Γ_φ es el coeficiente de difusividad de φ ; las cuales son propiedades del fluido.

La ecuación anterior es la ecuación de transporte, donde φ es el término dependiente, y el cual estará cambiando dependiendo de las condiciones. Sin embargo los términos Γ y ρ son propiedades del fluido las cuales pueden calcularse a partir de las variables dependientes.

La ecuación anterior de transporte se puede seccionar en tres partes antes del símbolo de igualdad numerando de izquierda a derecha tenemos en primer lugar, el término temporal, el siguiente es el término convectivo y por último tenemos el término difusivo.

Término temporal $\frac{\delta(\rho\varphi)}{\delta t}$ es el que aloja las variaciones locales con respecto al tiempo de $\rho\varphi$.

Término convectivo $\nabla(\rho\varphi v)$ este término traslada la propiedad φ entre dos puntos cercanos del dominio, esto mediante la velocidad.

Término difusivo $-\nabla(\Gamma_\varphi \nabla_\varphi)$ este término representa la tendencia al equilibrio del mismo, esto se logra mediante los gradientes de φ . Dada la cantidad de movimiento este término puede considerarse como consecuencia de la ley de Newton.

Un último término que no es el que está después de la igualdad, es el término fuente S_φ el cual representa todos aquellos términos que no están incluidos en esta ecuación.

3.3 Ecuación general.

Es posible discretizar mediante el método de volúmenes finitos el volumen de control predispuesto. Gracias a este método toda la región que comprende el volumen de control es fragmentado en pequeños volúmenes de control (imagen 3.1) y cada pequeño volumen de control está asociado a un punto nodal, mientras que el tiempo es discretizado, de manera similar a los volúmenes finitos se llama a cada sección del tiempo intervalo temporal. La ecuación que resulta es integrada en cada volumen de control así como en cada intervalo temporal, por lo que resulta una ecuación, la cual esta discretizada y relaciona el termino φ para cierto grupo de términos nodales.

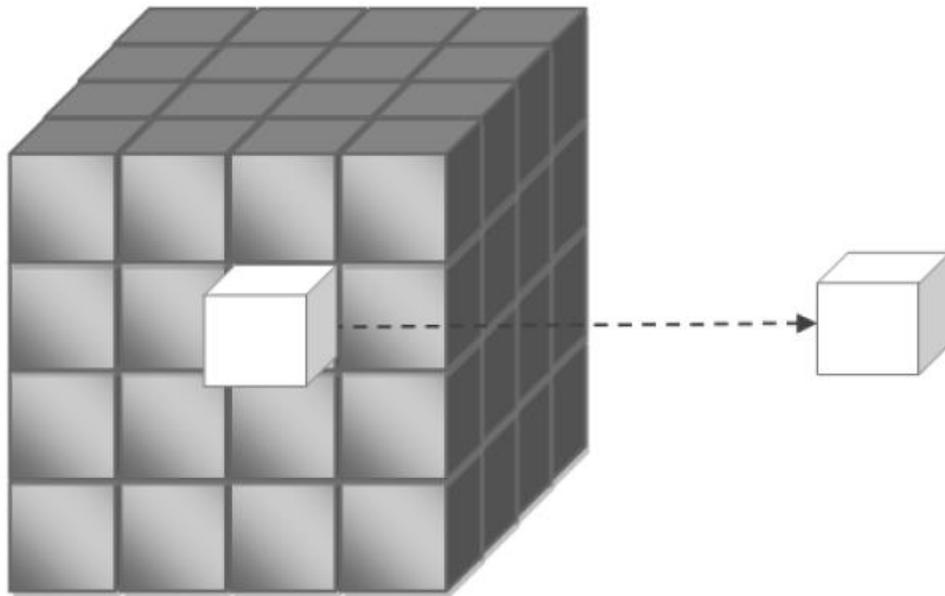


Figura. 3.1 representación del sistema discretizado de volúmenes finitos.

En este caso se tiene un dominio que esta discretizado en mallas las cuales tiene las mismas características, sin embargo cada celda tiene seis celdas vecinas como se muestra a continuación.

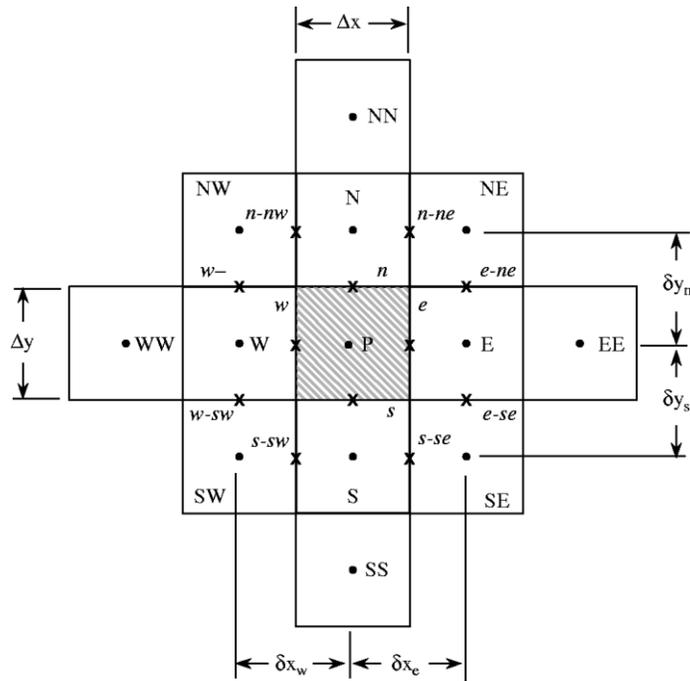


Figura. 3.2 nomenclatura de malla en la celda P.

La discretización de esta ecuación como ya se mencionó está basada en la integración de la misma, término a término. En la integración, el valor de φ se supondrá constante en toda la celda a lo largo de todo el paso temporal.

$$\int_{\Delta t} \int_{V_P} \left(\frac{\delta(\rho\varphi)}{\delta t} + \nabla(\rho\varphi\vec{v}) - \nabla(\Gamma_\varphi\nabla\varphi) \right) dVdt = \int_{\Delta t} \int_{V_P} S_\varphi dVdt$$

Ecuación (3.2)

Para mayor simplicidad es posible dividir la ecuación anterior por Δt .

3.3.1 Termino temporal.

Una vez que la ecuación anterior es dividida por Δt la integración del termino temporal es más simple, la derivada es sustituida al final y al principio por el dividendo del paso temporal.

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_P &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \int_{V_P} \frac{\delta(\rho\varphi)}{\delta t} dV dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \int_{V_P} \frac{\delta(\rho\varphi)}{\delta t} dt dV = \frac{1}{\Delta t} \int_{V_P} \left[\frac{(P_P\varphi_P - P_T\varphi_T)}{\Delta t} \Delta t \right] dV \\ &= \frac{V_P}{\Delta t} (\rho_P\varphi_P - \rho_T\varphi_T)\end{aligned}$$

Ecuación (3.3)

3.3.2 Termino fuente.

En este caso el término fuente se supondrá lineal, tomando en cuenta que $S_\varphi = C(V - \varphi)$ permitirá la convergencia en el método iterativo. C y V pueden ser variables. φ Será una constante tanto en la celda como en el espacio temporal. Por lo que quedaría de la siguiente manera.

$$\mathfrak{S}_P = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \int_{V_P} S_\varphi dV dt = V_P \cdot C \cdot (V - \varphi_P)$$

Ecuación (3.4)

Dónde:

C: es un coeficiente.

V: es un valor.

3.3.3 Termino difusivo.

Para abordar esta ecuación se recomienda la transformación de la integral de volumen en una integral de superficie sobre las caras de la misma. Esto es posible gracias a la aplicación del teorema de Gauss.

Por fines prácticos se omitirá la integración en el tiempo ($\int_{\Delta t} dt$).

$$\mathcal{D}_P = - \int_{V_P} \nabla(\Gamma \nabla \varphi) = - \int_{S_P} \Gamma \nabla \varphi dS = - \sum_i^n [\Gamma \nabla \varphi \vec{n} A]_{cara}$$

Ecuación (3.5)

\vec{n} Es la normal.

i Representa el número de caras máximo, según la forma de la celda.

Para calcular el término difusivo es necesario obtener el coeficiente de difusión.

3.3.4 Termino convectivo.

Al igual que en el caso anterior el termino convectivo también es transformado en una integral de superficie, la cual se extiende a lo largo de las caras de la celda mediante la aplicación del teorema de Gauss. Por lo que se requiere conocer los siguientes términos; ρ , φ y \vec{v} en la cara.

$$\mathcal{C}_P = \int_{V_P} \nabla(\rho \vec{v} \varphi) dV = \int_{S_P} (\rho \vec{v} \varphi) dS = \sum_i^n [\rho \vec{v} \varphi A \vec{n}]_{caras}$$

Ecuación (3.6)

Si se sustituye lo obtenido de la discretización de cada termino, es posible obtener una ecuación algebraica, que aparente una ecuación lineal, la cual relaciona los valores de φ en la celda P, a su vez también relaciona los valores de las celdas vecinas y en si misma pero con el paso temporal anterior.

$$(a_P + V_p C)\varphi_P = a_w\varphi_w + a_E\varphi_E + a_T\varphi_T + V_p CV$$

Ecuación (3.61)

Donde a se usa para presentar el significado de multiplicadores de φ .

Si se discretiza la ecuación de continuidad y con algunos movimientos algebraicos de los coeficientes de a permite llegar a la conclusión de que el coeficiente a_p es la suma de los coeficientes de las celdas vecinas. Por lo que:

$$a_P = a_E + a_w + a_T$$

Ecuación (3.62)

Por lo que en el caso tridimensional el valor de φ en la celda P, puede expresarse como una combinación lineal de los valores de φ en las celdas vecinas, pero en el paso temporal anterior. Por lo que la ecuación quedaría de la siguiente manera:

$$\varphi_P = \frac{\sum_{vecinas} a_i \varphi_i + a_T \varphi_T + V_p C \cdot V}{a_P + V_p \cdot V}$$

Ecuación (3.63)

La ecuación (3.63) sería la ecuación que se tiene que resolver, ya que cada celda está conformada por su propia ecuación, en vez de estar tratando una sola ecuación se está tratando un sistema de ecuaciones formado por las celdas.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS.

4.1 Introducción.

En este capítulo se presentan los resultados numéricos que simulan el flujo de Taylor-Couette en tres dimensiones, en este caso se analizará el efecto de una modificación sobre la superficie del cilindro interior. Para la simulación del flujo entre cilindros se emplearon las ecuaciones de Navier-Stokes y el método de volúmenes finitos (capítulo 2 y 3).

El modelo numérico fue representado por medio de un cilindro exterior estático y un cilindro interior el cual presenta un aletado anular. Dentro de la cavidad existente entre los cilindros, es contenido un fluido newtoniano cuyas propiedades se presentan a continuación.

$$\rho = 960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$
$$\mu = 0.0087 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Para la simulación del flujo, se definió una condición de no deslizamiento sobre la superficie interior del cilindro exterior, y una condición de constante de rotación sobre la superficie aletada del cilindro interior como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} r = b &\rightarrow v = 0 \\ r = a, r = a + h &\rightarrow u = \omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.2 Configuración geométrica.

El sistema fue simulado en coordenadas cilíndricas con una longitud total (l) en la dirección axial de 0.20 [m] y 0.025 [m] en la dirección radial. Además, una malla de $120 \times 40 \times 600$ celdas (dirección angular, radial y axial, respectivamente) fue empleada, figura 4.1.

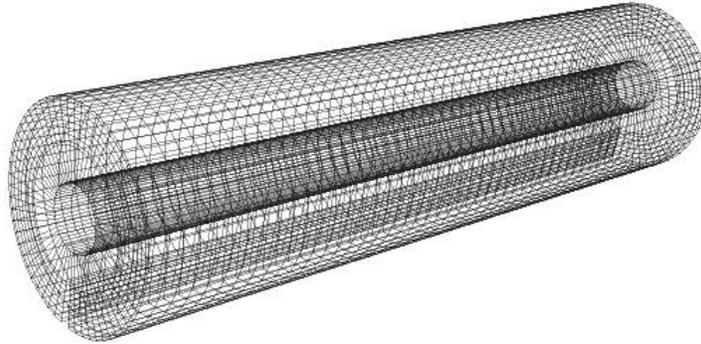


Figura 4.1 malla numérica.

La malla anterior fue seleccionada por medio de un análisis de la variación de la velocidad a lo largo de la dirección axial, en donde la malla empleada presentó errores menores del 2%, figura 4.2.

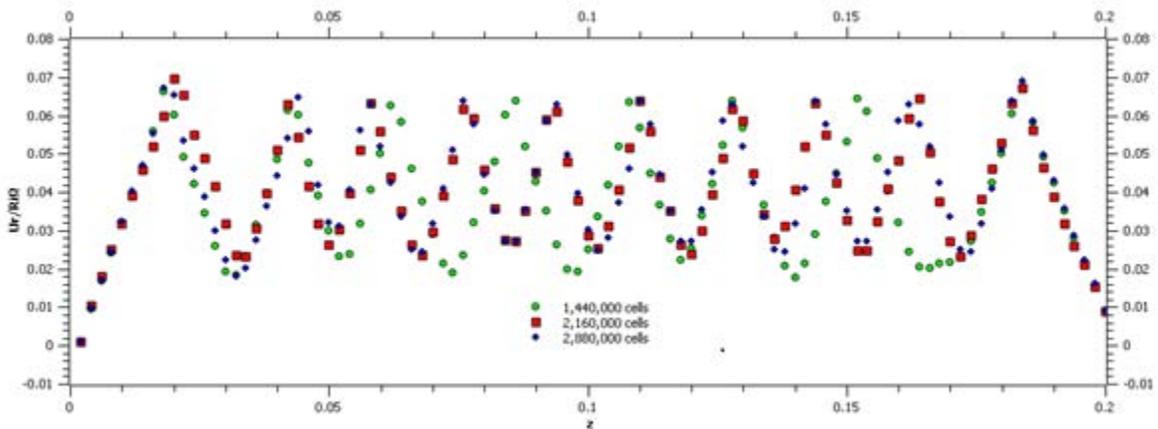


Figura 4.2 Gráfica de comparación de los distintos tamaños de malla.

Para la caracterización de este flujo es empleado el número de Taylor (ecuación 4.2).

$$Ta_m = \frac{\Omega r_m^{.5} (R_{ext} - R_{int})^{1.5}}{\nu} \quad (4.2)$$

Dónde:

$r_m = \frac{a+b}{2}$ Es el radio medio.

$R_{int} = 0.015[m]$ Es el radio del cilindro interior.

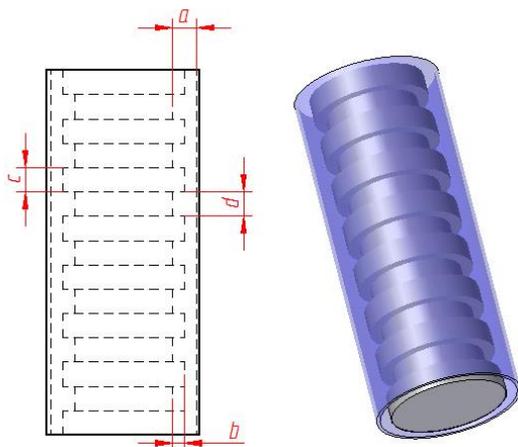
$R_{ext} = 0.025[m]$ Es el radio del cilindro exterior.

ν Es la viscosidad cinemática del fluido.

Ω Es la velocidad angular.

4.3 Casos de estudio.

En este trabajo se estudia el efecto sobre el flujo de Taylor-Couette que provoca la introducción de aletas anulares en el cilindro interior, específicamente, se concentrará en el efecto de la altura del aletado. Para este estudio se propone una modificación en la superficie del cilindro interior como se muestra en la figura 4.3. La configuración aletada está definida por tres parámetros geométricos (b , c y d) además de un parámetro general del sistema (a).



- (a) Distancia entre cilindros.
- (b) Altura de la aleta.
- (c) Ancho de la aleta.
- (d) Espacio entre aletas.

Figura 4.3 configuración aletada.

De acuerdo a la figura 4.3, $a=0.01$ m, $b=0.0-0.00875$ m, $c= 0.015$ m y $d=0.015$ m corresponde a la separación entre el cilindro exterior e interior, altura de la aleta, ancho de la aleta y separación entre aletas, respectivamente.

Los parámetros que definen el sistema aletado fueron adimensionalizados como se muestra en las siguientes expresiones.

$$a' = \frac{a}{a}, b' = \frac{b}{a}, c' = \frac{c}{a}, d' = \frac{d}{a}$$

Ecuación (4.2)

Este estudio se concentrará en analizar el efecto de la altura de la aleta, para lo que se hará una variación del parámetro como muestra la tabla 1.

CASO	ALTURA DE LA ALETA (b')
Caso liso	0.000
Caso 1	0.125
Caso 2	0.250
Caso 3	0.375
Caso 4	0.500
Caso 5	0.625
Caso 6	0.750
Caso 7	0.875

Tabla 4.1 Casos de estudio.

4.4 Resultados numéricos.

A continuación se presentan los resultados numéricos del flujo de Taylor-Couette con aletas anulares. La figura 4.4 muestra la tridimensionalidad del flujo y la posición del aletado.

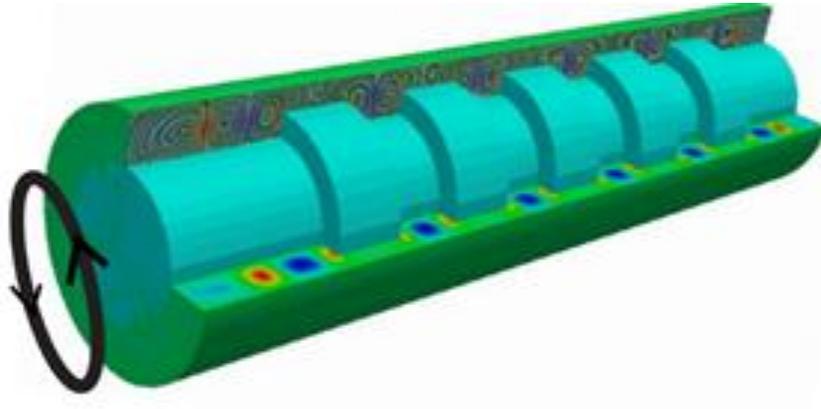


Figura 4.4 Flujo de Taylor-Couette.

Por medio de las simulaciones tridimensionales, se confirmó que el flujo de Taylor Couette tiene un carácter axisimétrico, razón por la cual de aquí en adelante los resultados se mostrarán en un plano radial-azimutal.

4.4.1 Caso liso.

Caso liso.

El caso liso representa el caso clásico del flujo entre cilindros y muchas investigaciones se han hecho sobre el mismo [XI]. Dadas estas investigaciones, es de esperarse la formación de 10 pares de vórtices a lo largo de la dirección azimutal para un número de Taylor crítico aproximado de 104.85 para las condiciones de este proyecto.

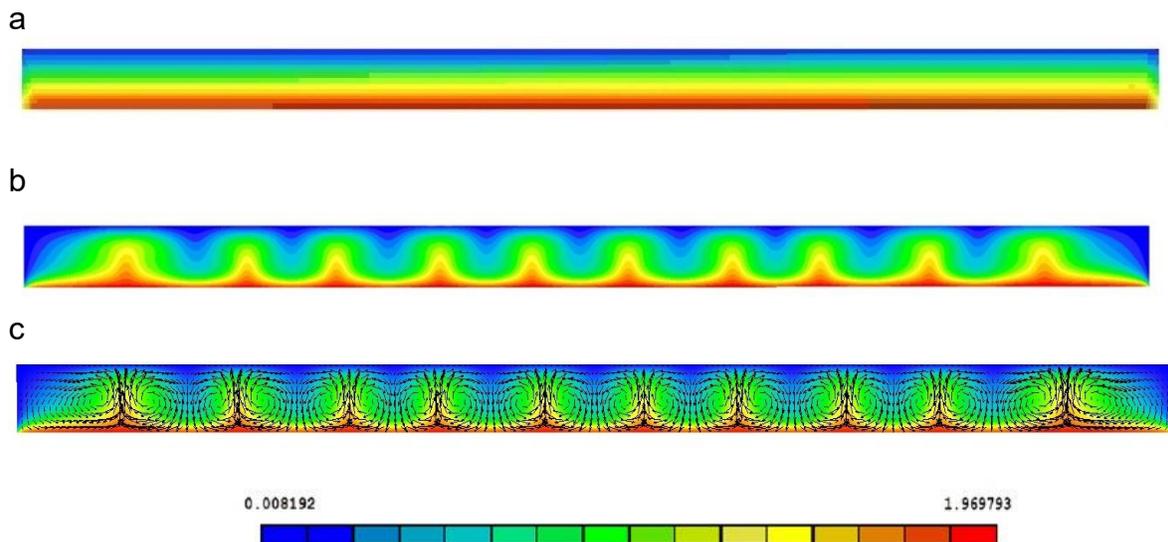


Figura 4.5 Perfil de velocidades.

En la figura 4.5 a, se muestra el caso liso con condiciones de rotación por debajo del Taylor crítico, como era de esperarse el flujo tiene un comportamiento laminar. En este perfil, las mayores velocidades se encuentran en la pared inferior que representa la pared del cilindro interior. Por otro lado, las menores velocidades se encuentran en la parte superior o pared interna del cilindro exterior al cual se impuso una condición de no deslizamiento.

Cuando la condición de rotación crítica es alcanzada el perfil laminar se ve distorsionado, formándose un perfil ondulatorio representado en la figura 4.5 b. Como fue dicho anteriormente, para el sistema propuesto en este trabajo es esperada la formación de 20 vórtices regulares a lo largo de la longitud axial y en la figura 4.5 c se puede observar la formación de los mismos.

Por medio de la ecuaciones 4.3 y 4.4 es posible calcular el número de vórtices máximo que pueden existir en una longitud (l) dada.

$$\lambda = 2(R_{ext} - R_{int})$$

Ecuación (4.3)

$$\lambda = 2(0.025-0.015) \text{ [m]} = 0.02 \text{ [m]}.$$

$$2\left(\frac{l}{\lambda}\right) = x$$

Ecuación (4.4)

$$\left(\frac{0.2\text{[m]}}{0.02\text{[m]}}\right) 2 = 20[1]$$

Dónde:

l = Longitud del cilindro.

x = Es el número de vórtices que se puede formar con esa longitud.

Con lo anterior se corrobora el número de vórtices obtenidos en las simulaciones del caso liso.

A continuación son mostrados los resultados obtenidos para el perfil de la velocidad en la componente radial y el perfil de velocidades en el plano axial.

a



b

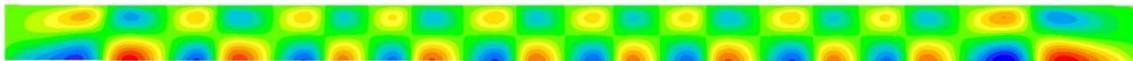


Figura 4.6. Componentes de la velocidad.

En la figura 4.6 a en donde se presenta la componente radial de la velocidad, zonas alternadas de velocidades positivas y negativas aparecen a lo largo de la longitud axial. Este patrón de velocidad indica la rotación de los vórtices, la cual a su vez fue mostrada en la figura 4.5 c. Un fenómeno similar ocurre en la dirección axial en donde dos líneas alternadas se presentan en el perfil, figura 4.6 b.

En la figura 4.7, se observan a detalle dos pares de vórtices. En esta figura se aprecia el sentido de rotación alternado (horario y anti-horario) característico de este tipo de vórtices.

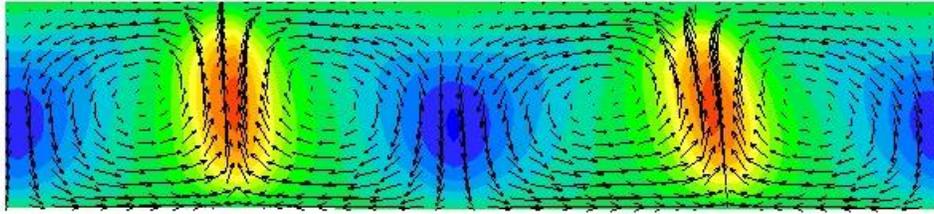


Figura 4.7 Acercamiento al vórtice en la velocidad radial, demarcado mediante vectores.

Sin embargo estas estructuras no solamente tienen la rotación mostrada anteriormente, sino que además se encuentran rotando alrededor del cilindro interior como lo muestra tridimensionalmente la figura 4.8.

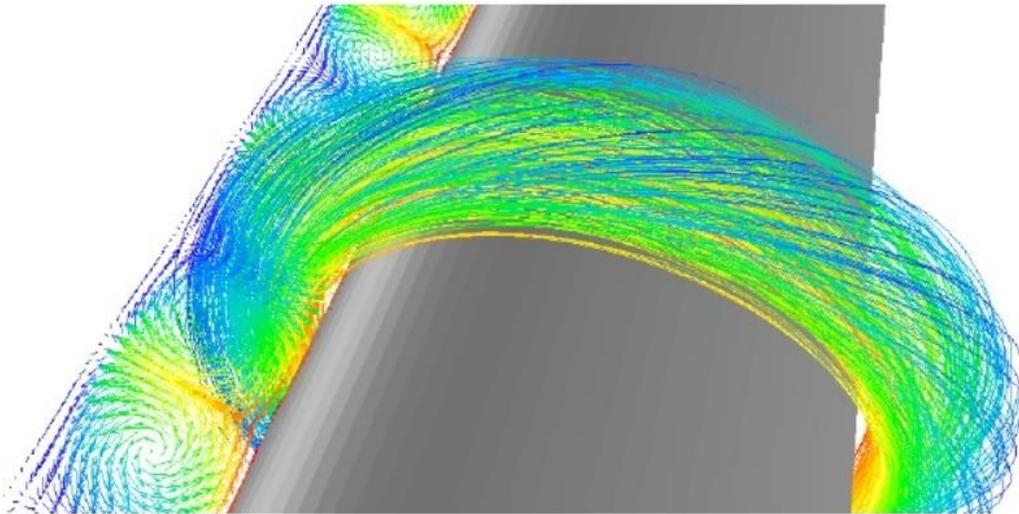


Figura 4.8 Muestra de rotación en tres dimensiones.

4.4.2 configuraciones aletadas.

A continuación, se presentan los resultados de los perfiles de velocidad de los diferentes casos propuestos en la tabla 1.

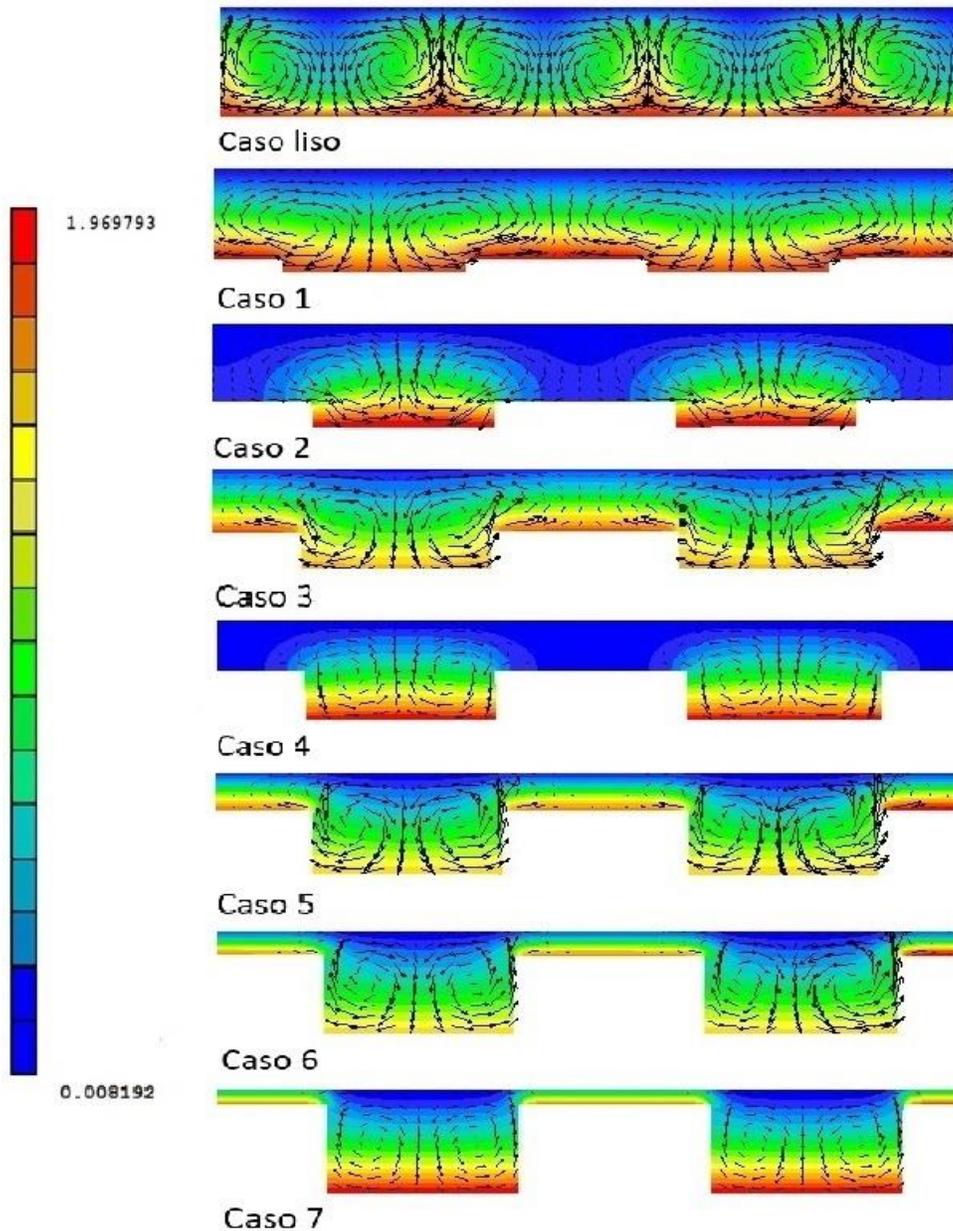


Figura 4.9 comparación de los casos.

En la figura 4.10 se muestra como la introducción de aletas anulares en el cilindro liso provoca un cambio en la longitud de onda, en la velocidad crítica de formación y en la forma de los vórtices de Taylor, de tal manera que estos, pueden llegar a ocupar la longitud total del cilindro con un menor número de vórtices. Esto puede ser observado claramente en la figura siguiente.

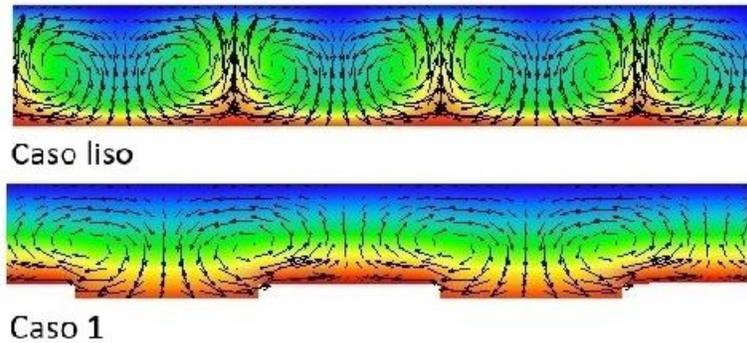


Figura 4.10 Comparación del caso liso con el primer caso con aletas.

Comparando el caso 1 con el caso liso, es muy fácil observar, como la aleta interfiere con la formación del vórtices, provocando que este tenga un crecimiento de su longitud de onda (λ), esto implica un menor número de vórtices en la longitud del cilindro (l). Sin embargo con el aumento del número de Taylor los vórtices presentan cambios, con un número de Taylor de 57.2 (para el caso 6), se puede obtener la siguiente configuración de vórtices figura 4.11.

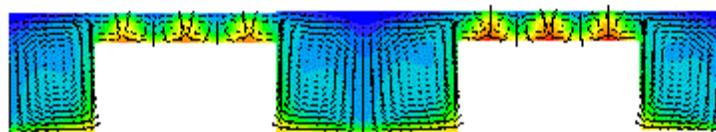


Figura 4.11 División de los vórtices para el caso 6

Los resultados que se obtuvieron al aumentar la velocidad del cilindro interior son presentados mediante la figura 4.11, en esta figura se destaca la formación de pequeños vórtices alojados en la parte superior de la aleta, debido a las condiciones de formación, estos difieren tanto en tamaño como en cantidad con respecto a los obtenidos en el espacio entre aletas, por lo que estos vórtices formados por encima de las aletas depende tanto de la altura de la aleta como del número de Taylor.

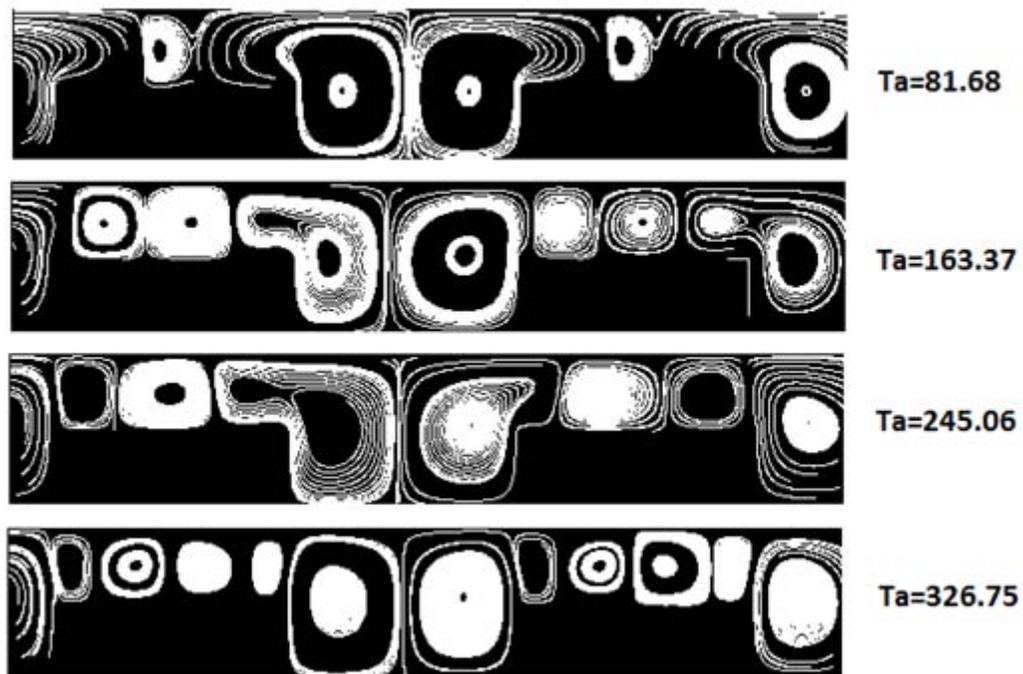


Figura 4.12 Comparativo de un solo caso con distintos números de Taylor.

En la figura 4.12 se presentan los resultados que se obtuvieron debido al aumento de la velocidad, se nota como los vórtices que se encuentran en la parte superior de la aleta, se van dividiendo conforme el número de Taylor aumenta, hasta ocupar la longitud total de ésta.

En el comparativo siguiente se tiene la línea de tendencia de la comparación del Taylor crítico contra la altura de la aleta, este último dato se encuentra en términos adimensionales, referidos en la tabla 4.1 con la cual mediante la ecuación 4.2 se adimensionalizó la altura de la aleta.

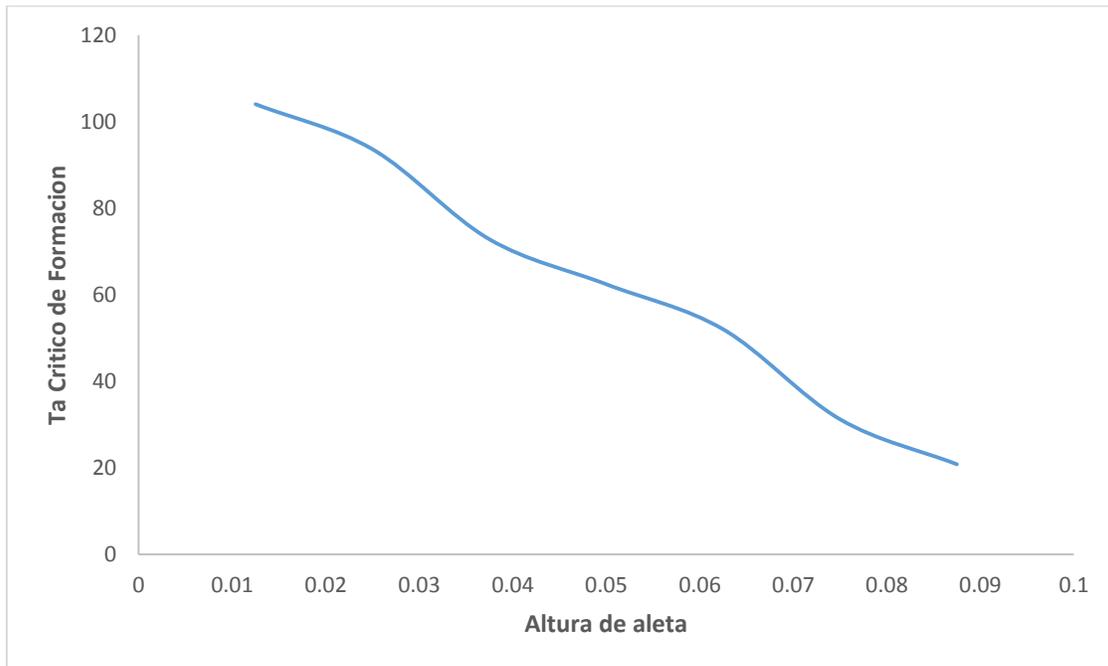


Figura 4.13 gráfica de comparación de velocidad contra altura de la aleta.

Mediante el comparativo anterior es posible darse cuenta que conforme la altura de la aleta va en aumento, la velocidad necesaria para la formación de los vórtices tiende a ir en decremento, haciendo que la velocidad necesaria para la formación de los vórtices sea menor.

CAPITULO 5. CONCLUSIONES.

Por medio de este trabajo fue posible comprobar el comportamiento del fluido con la introducción de un sistema de aletas con distintos tamaños de altura, se estudiaron 8 casos de los cuales fueron, 1 caso base o caso liso y 7 casos con un sistema de aletas. Conforme se hicieron las simulaciones fue posible darse cuenta que con la introducción de las aletas en el medio liso se provoca una perturbación en el fluido lo cual repercute directamente en la velocidad crítica de formación de los vórtices de Taylor-Couette, pues estos presentan deformaciones en comparación con el caso base, así mismo, los vórtices parecen fusionarse para formar un vórtice más grande haciendo que la longitud del vórtice sea casi dos veces la del caso base, esto para los casos del 1 al 4.

Es notable que a partir del caso 5, existe una separación de vórtices en dos grupos, grandes y pequeños: los más grandes son aquellos que están alojados en el espacio entre aletas y unos más pequeños que se encuentran en la parte superior de la aleta. Esto está condicionado al tamaño de la aleta y la velocidad de rotación del cilindro interno, sin embargo, es posible darse cuenta que la altura de la aleta es la que influye en la formación de ambos tamaños de vórtices.

Gracias al comparativo de la gráfica 4.6, es posible darse cuenta claramente de que la velocidad crítica de formación para los vórtices es inversamente proporcional al crecimiento en altura de la aleta, esto es provocado por la introducción de la aleta en el sistema, ya que representa una perturbación extra para el flujo, dando como resultado que los vórtices se presenten de manera anticipada en relación con su caso anterior inmediato.

APÉNDICE

2.1 Ecuación de movimiento.

En su forma más básica, esas ecuaciones diferenciales del movimiento tienen un alto grado de complejidad, y se conoce muy poco acerca de sus propiedades matemáticas. Sin embargo se pueden mostrar ciertos aspectos. Aun sin solucionar la ecuación, se puede observar en esta los parámetros adimensionales que rigen el movimiento de los fluidos. También es posible encontrar un gran número de soluciones útiles si se hacen dos simplificaciones: (1) estado estacionario y (2) fluido incompresible. Una tercera y más drástica simplificación es el flujo no viscoso, hace que sea válida la ecuación de Bernoulli la cual proporciona una gran variedad de soluciones ideales posibles, esto es posible ya que la ecuación es de primer orden lo que hace que las soluciones numéricas no sean tan complicadas de obtener.

Estos flujos idealizados se deben tratar de manera cuidadosa e indagar si las soluciones obtenidas de las ecuaciones son una buena aproximación al comportamiento del flujo real. Finalmente, la dificultad general de las ecuaciones diferenciales se lleva a cabo mediante la utilización de técnicas aproximadas, conocidas como análisis numérico, por medio de las cuales las derivadas se sustituyen por relaciones algebraicas en un número finito de puntos en el campo del fluido y se resuelven por medio del calculador digital.

2.2 Volumen de control y flujo másico en las ecuaciones.

Todas las ecuaciones diferenciales básicas se pueden obtener considerando un volumen de control elemental o un sistema elemental. Un volumen de control apropiado para el sistema cartesiano infinitesimal y finito es $(\delta x, \delta y, \delta z)$ como en la figura 2.1. Consideremos que el flujo en cada cara del elemento es aproximadamente unidimensional y la relación de la conservación de la masa es:

$$\iiint_{vc} \frac{d}{dt} \rho dv + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{sal} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{ent} = 0$$

Ecuación (1)

El elemento es tan pequeño que la integral de volumen se puede reducir al término diferencial:

$$\iiint_{vc} \frac{d}{dt} \rho dv \approx \frac{d\rho}{dt} dx dy dz$$

Ecuación (2)

Los términos del flujo másico aparecen en las seis caras, tres de entrada y las tres de salida. Haciendo uso de un concepto que nos dice que, las propiedades fluidas se consideran descritas por funciones que varían uniformemente con el tiempo y la posición, tal como $\rho = \rho(x, y, z, t)$ entonces si T es la temperatura en la cara izquierda del elemento de la figura 2.1, la cara derecha deberá tener una temperatura ligeramente diferente $T + (\delta T / \delta x) \delta x$. Para la conservación de la masa, si ρv es conocido en la cara izquierda, el valor de este producto en la cara derecha es $\rho v + (\delta \rho v / \delta x) \delta x$.

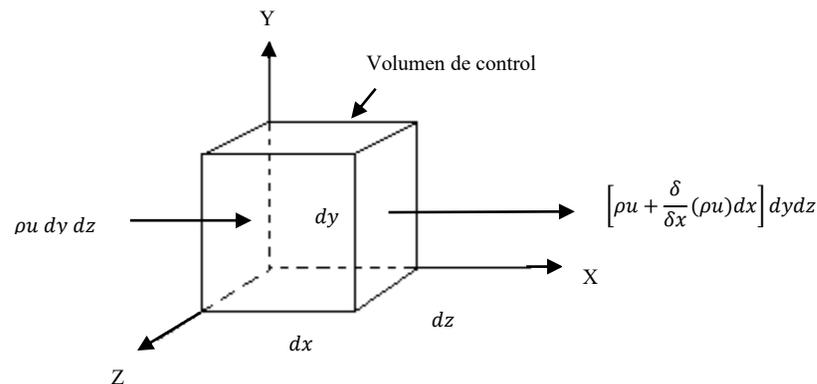


Figura 2.1 Volumen de control infinitesimal fijo en coordenadas cartesianas mostrando los flujos másicos de entradas y salidas en las caras perpendiculares al eje x.

Enlistando los seis flujos que son usados por su intervención directa en el volumen de control, quedaría de la siguiente manera:

Tabla 2.1 Flujo de másico en caras.

caras	Flujo másico de entrada	Flujo másico de salida
x	$\rho u \, dy \, dz$	$\left[\rho u + \frac{\delta}{\delta x} (\rho u) dx \right] dy dz$
y	$\rho v \, dx \, dz$	$\left[\rho v + \frac{\delta}{\delta y} (\rho v) dy \right] dx dz$
z	$\rho w \, dx \, dy$	$\left[\rho w + \frac{\delta}{\delta z} (\rho w) dz \right] dx dy$

Si se introducen estos términos en la ecuación anterior (2) esta ecuación nos quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{d\rho}{dt} dx \, dy \, dz + \frac{d}{dx} (\rho u) dx \, dy \, dz + \frac{d}{dy} (\rho v) dx \, dy \, dz + \frac{d}{dz} (\rho w) dx \, dy \, dz = 0$$

Ecuación (2.1)

La diferencial de volumen desaparece de todos los términos, quedando solo la ecuación diferencial la cual relaciona las derivadas parciales de la densidad y las derivadas parciales de la velocidad. Quedando la siguiente ecuación:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d}{dx} (\rho u) + \frac{d}{dy} (\rho v) + \frac{d}{dz} (\rho w) = 0$$

Ecuación (2.2)

2.3 Ecuación de la continuidad.

Este resultado es el esperado para la conservación de la masa para un volumen de control infinitesimal. A menudo es llamada ecuación de la continuidad, puesto que esta ecuación no requiere más que la suposición de la continuidad de las funciones que dan la densidad y la velocidad. Esto quiere decir que el flujo puede ser estacionario o no, viscoso o sin fricción, compresible o incompresible, sin embargo las ecuaciones se pueden suponer continuas.

El operador gradiente nos permite escribir la ecuación de la continuidad en una forma más compacta, quedando de la siguiente manera.

$$\frac{d}{dx}(\rho u) + \frac{d}{dy}(\rho v) + \frac{d}{dz}(\rho w) \equiv \nabla \cdot (\rho V)$$

Ecuación (2.3)

De modo que la forma más compacta quedaría así:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Ecuación (2.4)

En esta forma vectorial. La ecuación es bastante general lo que nos permite que ésta sea utilizada en otros sistemas de coordenadas distintos al cartesiano.

2.4 Aplicación del volumen de control en la ecuación de movimiento.

Utilizando el mismo volumen de control elemental de la figura 2.1, podemos obtener una forma más apropiada de la ecuación de movimiento la cual quedaría de la siguiente manera:

$$\sum F = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{vc} V \rho \, dv \right) + \sum (\dot{m}_i V_i)_{sal} - \sum (\dot{m}_i V_i)_{ent}$$

Ecuación (1.2)

De la misma forma que en las ecuaciones anteriores aquí también aparecen flujos de cantidad de movimiento en las seis caras, tres de entrada y tres de salida. Tomando como base nuevamente la figura 2.1, podemos hacer una tabla con los flujos de cantidad de movimiento de forma análoga a la usada para obtener flujo másico.

Tabla 2.2 Cantidad de movimiento en caras.

caras	Flujo de cantidad de movimiento en la entrada	Flujo de cantidad de movimiento en la salida
x	$\rho u V \, dy \, dz$	$\left[\rho u V + \frac{\delta}{\delta x} (\rho u V) dx \right] dy dz$
y	$\rho v V \, dx \, dz$	$\left[\rho v V + \frac{\delta}{\delta y} (\rho v V) dy \right] dx dz$
z	$\rho w V \, dx \, dy$	$\left[\rho w V + \frac{\delta}{\delta z} (\rho w V) dz \right] dx dy$

Introduciendo estos términos a la ecuación anterior (1.2), podemos obtener una ecuación intermedia la cual quedaría así.

$$\sum F = dx dy dz \left[\frac{d}{dt}(\rho V) + \frac{d}{dx}(\rho u V) + \frac{d}{dy}(\rho v V) + \frac{d}{dz}(\rho w V) \right]$$

Ecuación (2.11)

Esta ecuación se puede simplificar para quedar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\rho V) + \frac{d}{dx}(\rho u V) + \frac{d}{dy}(\rho v V) + \frac{d}{dz}(\rho w V) \\ = & V \left[\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho V) \right] + \rho \left(\frac{dV}{dt} + u \frac{dV}{dx} + v \frac{dV}{dy} + w \frac{dV}{dz} \right) \end{aligned}$$

Ecuación (2.12)

Por lo que el término entre corchetes del segundo miembro es nulo (ya que la variación de la densidad con respecto al tiempo se puede considerar que es invariante, y considerando que la derivada de una constante es cero, este término se puede considerar nulo), mientras que el término entre paréntesis nos da la aceleración total de la partícula que ocupa en ese instante el volumen de control, quedando de la siguiente manera ya reducido.

$$\sum F = \rho \frac{dV}{dt} dx dy dz$$

Ecuación (2.13)

2.5 Tipos de fuerzas y esfuerzos.

La ecuación anterior (2.13) indica que la fuerza neta sobre el volumen de control debe ser diferencial y proporcional al elemento de volumen. Estas fuerzas son de dos tipos, fuerzas másicas y fuerzas de superficie. Las fuerzas másicas son debido a los campos externos (gravitatorios, magnéticos, eléctricos) que actúan sobre toda la masa del volumen elemental. En este caso solo ocuparemos las fuerzas gravitatorias sobre una masa diferencial $\rho, \delta x, \delta y$ y δz dentro del volumen de control, que sería:

$$dF_{grav} = \rho g \, dx \, dy \, dz$$

Ecuación (2.14)

Las fuerzas de superficie son debido a los esfuerzos en las caras de la superficie de control. Estos esfuerzos, son la suma de la presión hidrostática y de los esfuerzos viscosos del tensor ij que aparecen en el movimiento con gradientes de velocidad.

$$\sigma_{ij} = \begin{matrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{matrix}$$

Ecuación (2.15)

La notación con sub índices se puede mostrar en la figura:

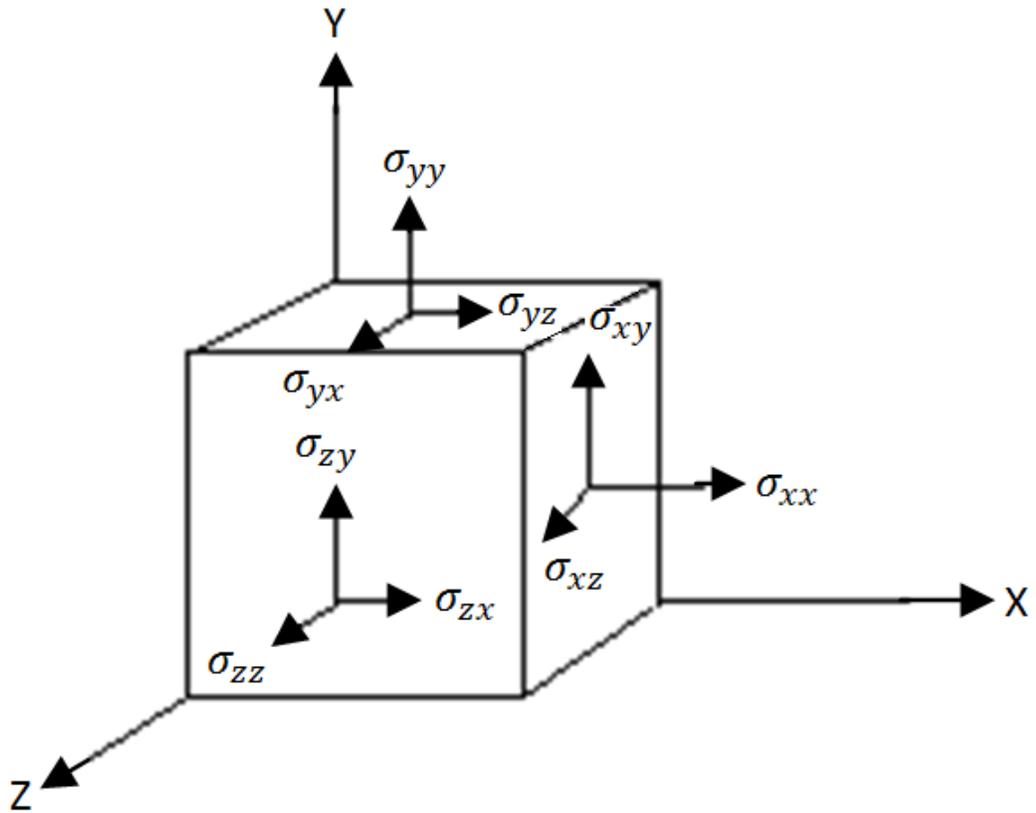


Figura 2.2 Notación para los esfuerzos.

No son estos esfuerzos, si no sus gradientes o diferencias, los que originan una fuerza neta sobre la superficie total del volumen de control infinitesimal esto se muestra en la figura siguiente, solo para esquematizar.

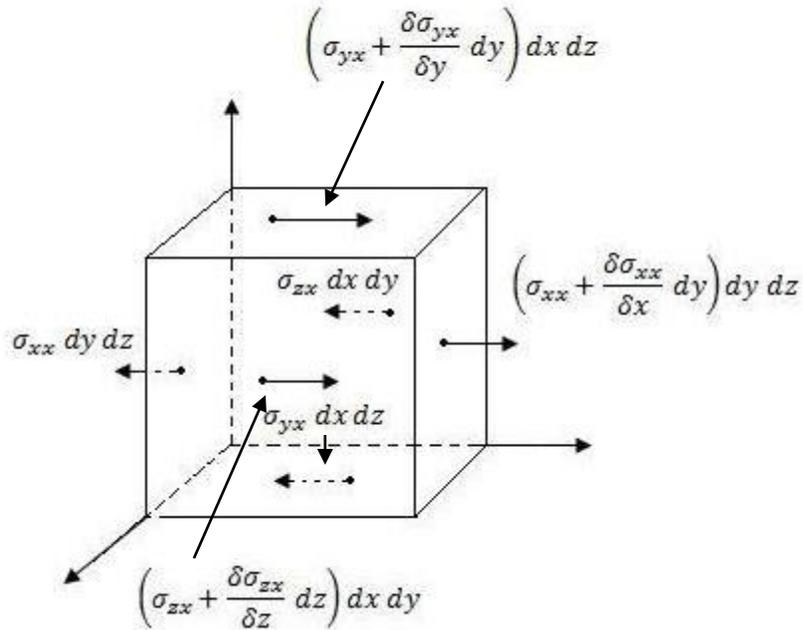


Figura 2.3 Volumen de control infinitesimal fijo en coordenadas cartesianas mostrando solo la componente x de las fuerzas de superficie.

De forma análoga podemos obtener las fuerzas, por unidad de volumen sobre las superficies del volumen de control, en las direcciones de los ejes y, y z.

$$\frac{dF_y}{d\vartheta} = -\frac{\delta p}{\delta y} + \frac{\delta}{\delta x}(\tau_{xy}) + \frac{\delta}{\delta y}(\tau_{yy}) + \frac{\delta}{\delta z}(\tau_{zy})$$

$$\frac{dF_z}{d\vartheta} = -\frac{\delta p}{\delta z} + \frac{\delta}{\delta x}(\tau_{xz}) + \frac{\delta}{\delta y}(\tau_{yz}) + \frac{\delta}{\delta z}(\tau_{zz})$$

Ecuación (2.16)

Si ahora se multiplican las dos ecuaciones anteriores por i, j y k respectivamente, y, y las sumamos para obtener $(\delta f)_{\text{sup}}$, combinándolas con $(\delta f)_{\text{grav}}$ y sustituyéndola en la ecuación (2.13) para obtener la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento. Pero las fuerzas de superficie tienen una expresión demasiado larga,

sin embargo se puede reducir observando que los términos de los esfuerzos viscosos obtenidos en la figura 2.3 son equivalentes a la divergencia de un vector cuyas componentes son los elementos de la fila superior del tensor de esfuerzos viscosos. Por lo que si definimos el vector de la siguiente manera:

$$\tau_x = i\tau_{xx} + j\tau_{yx} + k\tau_{zx}$$

Ecuación (2.17)

Y tomando en cuenta la notación de esfuerzos de la figura 2.2 se pueden deducir una ecuación que quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{dF_x}{d\vartheta} = -\frac{\delta p}{\delta x} + \nabla \cdot \tau_x$$

Ecuación (2.18)

De igual manera la ecuación (2.18) se puede reescribir como:

$$\frac{dF_y}{d\vartheta} = -\frac{\delta p}{\delta y} + \nabla \cdot \tau_y$$

$$\frac{dF_z}{d\vartheta} = -\frac{\delta p}{\delta z} + \nabla \cdot \tau_z$$

Ecuación (2.19)

Donde τ_y y τ_z , son vectores que representan respectivamente, las filas intermedia y superior del tensor de esfuerzos viscosos. Si consideramos al tensor de esfuerzos completo τ_{ij} como la suma de las tres filas de vectores, la cual es demasiado larga, así que se usará notación tensorial para describirla quedando de la siguiente manera:

$$\tau_{ij} = i\tau_x + j\tau_y + k\tau_z$$

Ecuación (2.20)

Se pueden multiplicar las ecuaciones (2.18) y (2.20) por los vectores unitarios y sumarlos para obtener la fuerza neta en forma compacta.

$$\left(\frac{dF}{d\vartheta}\right)_{sup} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij}$$

Ecuación (2.21)

La fuerza de superficie es entonces la suma del vector gradiente de presión y la divergencia del tensor de esfuerzos viscosos. Sustituyendo en la ecuación (2.13) y usando la ecuación (2.14) tenemos la ecuación de cantidad de movimiento en su forma diferencial.

$$\rho g - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} = \rho \frac{dV}{dt}$$

Ecuación (2.22)

Dónde:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\delta V}{\delta t} + u \frac{\delta V}{\delta x} + v \frac{\delta V}{\delta y} + w \frac{\delta V}{\delta z}$$

Ecuación (2.22) segunda parte (2.23)

En otras palabras esta ecuación representa “la fuerza gravitatoria por unidad de volumen, más la fuerza de presión por unidad de volumen, más la fuerza viscosa por unidad de volumen y esto da como resultado la densidad por la aceleración.”

La ecuación (2.22) es tan breve y compacta que su inherente complejidad queda oculta a la vista. Si se desarrolla toda la ecuación podemos ver que es una ecuación vectorial, y que cada una de sus componentes tiene nueve términos. Si

escribimos las tres componentes en forma explícita quedaría de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \rho g_x - \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xx}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{zx}}{\delta z} &= \rho \left(\frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} + w \frac{\delta u}{\delta z} \right) \\ \rho g_y - \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yy}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{zy}}{\delta z} &= \rho \left(\frac{\delta v}{\delta t} + u \frac{\delta v}{\delta x} + v \frac{\delta v}{\delta y} + w \frac{\delta v}{\delta z} \right) \\ \rho g_x - \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{zz}}{\delta z} &= \rho \left(\frac{\delta w}{\delta t} + u \frac{\delta w}{\delta x} + v \frac{\delta w}{\delta y} + w \frac{\delta w}{\delta z} \right) \end{aligned}$$

Ecuación (2.24)

2.6 Ecuación de movimiento en términos diferenciales.

Esta es la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento de manera extensa, la cual es idéntica a la forma compacta. Esta es válida para cualquier flujo con cualquier movimiento, aun cuando cada fluido este caracterizado por términos viscosos particulares. Obsérvese que los últimos sumandos del segundo miembro de la ecuación anterior son no lineales, por lo que su análisis resulta complicado.

Para un fluido newtoniano los esfuerzos viscosos son, proporcionales a la velocidad de deformación y al coeficiente de viscosidad. Para los flujos incompresibles en el caso tridimensional podemos decir que:

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\delta u}{\delta x} \\
\tau_{yy} &= 2\mu \frac{\delta v}{\delta y} \\
\tau_{zz} &= 2\mu \frac{\delta w}{\delta z} \\
\tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) \\
\tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \right) \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \right)
\end{aligned}$$

Ecuación (2.25)

Donde μ es el coeficiente de viscosidad. Si se sustituye la ecuación anterior en la ecuación (2.24), esta dará como resultado, la ecuación de la cantidad de movimiento para un fluido newtoniano de densidad y viscosidad constantes, la cual quedaría de la siguiente forma:

$$\rho g_x - \frac{\delta p}{\delta x} + \mu \left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} \right) = \rho \frac{du}{dt}$$

$$\rho g_y - \frac{\delta p}{\delta y} + \mu \left(\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} \right) = \rho \frac{dv}{dt}$$

$$\rho g_z - \frac{\delta p}{\delta z} + \mu \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta z^2} \right) = \rho \frac{dw}{dt}$$

Ecuación (2.26)

La ecuación (2.26) tiene cuatro incógnitas: ρ, u, v y w . Por lo que debe combinarse con la ecuación de la continuidad para fluidos incompresibles, de esta manera tenemos una cuarta ecuación y cuatro incógnitas, por lo que se le puede buscar solución al sistema de ecuaciones con sus respectivas condiciones de frontera.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS.

BIBLIOGRAFÍAS.

Yanusa A. Cengel, John M. Cimbala. *Mecánica de fluidos: fundamentos y aplicaciones*. Cuarta edición. México: McGraw-Hill, 2006. 956 pág.

Frank M. White; traducción Concepción Paz Penín, Antonio Eirís Barca, Eduardo Suárez Porto. *Mecánica de fluidos*. Segunda edición. Madrid: McGraw-Hill, 2008. 864 pág.

J Williams; versión en español Hernán Pérez Castellanos. *Mecánica de Fluidos*. México: Limusa, 1997. 143 pág.

Mataix Claudio. *Mecánica de fluidos y maquinas hidráulicas*. Segunda edición actualizada. Madrid: Ediciones del castillo, 1982. 660 pág.

Paul E. Tippens; traducción Ángel Carlos Gonzáles Ruiz. *Física conceptos y aplicaciones*. Sexta edición. México McGraw-Hill, 2002. 943 pág.

Meyer-Spasche, Rita. *Pattern formation in viscous flows : the Taylor-Couette problem and Raleigh-Benard convection*. Basel : Birkhäuser Verlag, c1999

Koschmieder, E.I. *Benard cells and taylor vortices*. Cambridge, [england] : Cambridge University Press, 1993

Anil W. Date, *Introduction to Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2005, 377pp.

Jiyuan Tu, Guan Heng Yeoh, Chaoqun Liu, *Computational Fluid Dynamics: A practical approach*, Elsevier, 2008, 459pp.

E. L. Koschmieder, *Bénard Cells and Taylor Vortices*, Cambridge University Press, 1993, 337pp.

ARTICULOS DE REFERENCIA

- [I] Maurice Marie Alfred Couette, *Estudios de la fricción en líquidos*. Universidad Católica del Oeste, 1889
- [II] Hua-Shu Dou, Boo Cheong Khoo, Khoon Seng Yeo, *Instability of Taylor–Couette flow between concentric rotating cylinders*, International Journal of Thermal Sciences 47 (2008).
- [III] Rensheng Deng, Davis Yohanes Arifin, Mak Ye Chyn, Chi-Hwa Wang, *Taylor vortex flow in presence of internal baffles*, Chemical Engineering Science 65 (2010).
- [IV] Takashi Ogihara and Mamoru Nomura, *Continuous Synthesis of Monodispersed Alumina Particles by the Hydrolysis of Metal Alkoxide Using a Taylor Vortex*, KONA Editorial Committee, 2002.
- [V] Biage, M. and Campos, J.C.C. *Visualization study and quantitative velocity measurements in turbulent Taylor-Couette flow by phantom flow tagging: a description of the transition to turbulence*.
- [VI] Laurette S. Tuckerman. *Taylor Vortices versus Taylor columns*. J. Fluid Mech. (2014), vol. 750, pp. 1–4. c Cambridge University Press 2014
- [VII] Geoffrey Ingram, *Turbulent motion in fluids*, 1915.
- [VIII] COLES, D. 1965 *Transition in circular Couette flow*. J. Fluid Mech. 21, 385–425.
- [IX] Marc Boada Ferrer, *Celula Couette-Taylor*. Taller y ciencia, 2008, octubre, 86-88, Ejemplar 385.
- [X] Trevelyan, David J. and Zaki, Tamer A. *Wavy Taylor vortices in molecular dynamics simulation of cylindrical Couette flow*. American Physical Society, 2016, april.
- [XI] Marcus, Philip S. *Simulation of Taylor-Couette flow. Part I. Numerical methods and comparison with experiment*. Journal of Fluid Mechanics, 1984, september.

REFERENCIAS DE IMAGENES.

- [1] Determinación de la viscosidad de fluidos newtonianos y no newtonianos
<http://www.journal.lapen.org.mx/>
- [2] Técnicas reométricas <http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3626/1/tema5RUA.pdf>
- [3] <http://fluidos.eia.edu.co/fluidos/propiedades/viscosidad/rotacionvis.html>