UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
Historia de la ciencia

UNA MIRADA HISTÓRICA DE LA NOCIÓN DE NÚMERO NATURAL

TRABAJO DE GRADUACIÓN
Que para optar por el grado de
Maestra en Filosofía de la Ciencia

PRESENTA
Andrea Arredondo de la Torre

TUTOR
Dr. Alejandro Ricardo Garciadiego Dantan
Facultad de Ciencias, UNAM

Ciudad Universitaria, CDMX Junio 2016

A David,

mi luz, mi brújula.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco profundamente a Alejandro por el apoyo incondicional que me ha dado en los últimos nueve años. Sin duda alguna, mi experiencia en la UNAM y mi crecimiento en estos años no serían lo mismo sin su gran ejemplo, su cariño y sus consejos.

Agradezco enormemente a Ana María Sánchez por su tiempo, su interés y por los cariñosos comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo. Por su disposición y apoyo para la finalización y enriquecimiento de esta investigación agradezco también a José Marquina, a Ivonne Pallares y a Francisco Hernández.

Al Posgrado de Filosofía de la Ciencia, le agradezco por darme la oportunidad de estudiar esta maestría y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme una beca en los dos años de duración de mi maestría (agosto 2011 – julio 2013).

A María y a Semati, muchas gracias por las risas y las pláticas en estos años. Su amistad y su apoyo han alegrado mi camino académico.

Por último, a mi mamá, a mi papá y a mi hermana, muchas gracias por ser mi apoyo en todo momento. Ustedes son mi mejor ejemplo de vida.

Tabla de contenidos

Introducción

A finales del siglo XIX, David Hilbert escribió que las matemáticas de ese siglo se habían desarrollado “bajo el signo del número” [Hilbert 1897, ix]. Esta afirmación tiene que ver con la importancia que la noción de número y, en particular, la de número natural cobraron en esa época. Más aun, los números naturales parecen haberse convertido en un concepto *natural* durante este tiempo.

De hecho, el término ‘número natural’ parece haber surgido específicamente en el norte de los entonces Estados Alemanes a través de un proceso largo y complejo que involucra no sólo al contexto matemático del siglo XIX, sino también al panorama cultural y político que tuvo lugar en aquella época.

Por un lado, los matemáticos empezaron a enfrentarse con problemas que demandaban de una minuciosa definición de los conceptos más básicos y de un manejo más cuidadoso de los razonamientos. Esto llevaría, en última instancia, al giro de las matemáticas hacia un enfoque más abstracto en el que la aritmética obtendría un nuevo estatus.

Por otro lado, las universidades del norte de la Alemania decimonónica pasaron por varias reformas que culminaron en la adopción de una visión neohumanista en la que la promoción de la búsqueda del conocimiento por sí mismo y los conceptos abstractos se convirtieron en prioridad. Ante este panorama también se institucionalizó la profesión científica y matemática, y con ello, se definieron las líneas que marcarían la investigación de varios de los matemáticos más importantes de la época.

En este trabajo se explorarán las ideas anteriores con el objetivo de tratar de dar una explicación a por qué los números enteros positivos adquirieron el adjetivo ‘natural’. Para desarrollar la investigación, el trabajo se ha divido en tres secciones principales.

En la primera sección se abordará la transición de las matemáticas hacia el llamado enfoque conceptual que tuvo lugar a principios del siglo XIX y se examinará el pensamiento de los principales exponentes de esta nueva tendencia. El estudio de este giro resulta fundamental no sólo para situarnos en el contexto en el que los números se convirtieron en el principal actor de las matemáticas y en el panorama en que apareció el término ‘número natural’, sino también para entender la naturalidad misma de los enteros positivos.

La segunda sección se centrará en los casos de Martin Ohm y Peter Gustav Lejeune Dirichlet, quienes consolidaron aspectos esenciales de las matemáticas decimonónicas y quienes además se convirtieron en grandes influencias para aquellos que nombraron a los enteros positivos como naturales.

La tercera sección analiza directamente las publicaciones en las que parece haber aparecido por primera vez el término en cuestión. Además, en esta sección se podrá vislumbrar cómo el adjetivo ‘natural’ encajó perfectamente en la tendencia dominante de las matemáticas del siglo XIX. Por último, en la sección final, se mostrarán algunas observaciones finales a manera de conclusión y se tratarán algunas de las áreas que pueden abordarse en investigaciones futuras.

Capítulo I

El enfoque conceptual

Durante el siglo XIX, varios de los matemáticos más renombrados de la época mostraron preocupación por establecer las matemáticas sobre una base firme y dedicaron sus obras al tema de los fundamentos de las matemáticas. Sin embargo, esto no significa que sus predecesores hayan sido indiferentes al objetivo de aclarar los conceptos básicos de las matemáticas sino que los estándares de formalismo que utilizaban como base de las demostraciones eran diferentes.

Hasta el siglo XVIII, la geometría era considerada la fuente esencial del conocimiento matemático. Las pruebas geométricas representaban el modelo primordial de rigor y sus conceptos eran la base sobre la que los demás conceptos se construían. En particular, los números estaban asociados al concepto de cantidad geométrica que se venía usando desde las matemáticas griegas. Las cantidades, según las categorías de Aristóteles, se dividían en discretas y continuas [Studtmann 2013]. Esta división se mantuvo en las matemáticas de los siglos posteriores y, en general, se consideraba que las cantidades discretas eran tanto concretas como abstractas y que las cantidades continuas eran dadas geométricamente por segmentos de rectas. Sólo los números enteros positivos eran entendidos como números por sí mismos [αριθμός], los demás objetos numéricos eran entendidos de manera geométrica [Schubring 2005, 16].

Sin embargo, el concepto de número empezó a diferenciarse poco a poco de la noción de cantidad y no fue sino hasta las últimas décadas del siglo XVIII que esta separación fue definitiva. La redefinición y la importancia que el concepto de número cobró para el siglo XIX resultó en una revalorización de la aritmética que la llevó incluso a establecerse como el nuevo fundamento de las matemáticas. Esta transición generó un cambio radical tanto en la práctica matemática como en la concepción de las matemáticas mismas y es generalmente considerada por matemáticos y filósofos como un proceso paradigmático en el desarrollo de las matemáticas modernas [Boniface 2007, 316].

El origen de este cambio tuvo que ver principalmente con la aparición de las geometrías no euclideanas y con el desarrollo que la teoría de funciones empezó a tener a finales del siglo XVIII, cuando la necesidad de definir de una manera más rigurosa los conceptos básicos empezaba a ser ineludible. Ambas áreas trajeron consigo nuevas problemáticas que los conceptos dominantes y tradicionales de la geometría ya no podían resolver. Sólo a partir de la transición a un nuevo entendimiento de algunos conceptos –en particular de la noción de número–, fue posible encontrar soluciones a problemas que anteriormente demandaban respuesta. De acuerdo con Schubring [2005, 482]

> La "solución" a estos problemas, por lo tanto, se abrió camino hacia un concepto abstracto de número que ya no estaba subordinado al concepto demasiado general de cantidad. Sin embargo, esto implicaba un cambio fundamental en el edificio completo de los sistemas conceptuales en matemáticas, es decir, un cambio de paradigma. Tal cambio sí ocurrió: el giro a las llamadas "matemáticas puras".

El cambio al que Schubring se refiere ocurrió entre los años de 1800 y 1820. Es importante notar que aunque pueden encontrarse rastros del giro hacia las matemáticas puras en países como Inglaterra (después de 1820 con el surgimiento del álgebra simbólica) y Francia (en donde antes las matemáticas estaban orientadas a las aplicaciones), los orígenes de esta transición se remontan específicamente al norte de Alemania (entonces Prusia) bajo el contexto de las recién implementadas reformas internas. Así, para finales del siglo XVIII la comunidad matemática estaba dividida en torno a conceptos básicos y, mas aún, estaba definida por la cultura y la nacionalidad.

Carl Friedrich Gauss es generalmente considerado el iniciador de la nueva tendencia en las matemáticas por el tratamiento de número que dio a los complejos y por su pensamiento sobre la naturaleza de los números. Algunos años más tarde, sus ideas fueron continuadas, e incluso extendidas, por matemáticos como Karl Weierstrass, Richard Dedekind, Georg Cantor y Leopold Kronecker, entre otros. Cada uno de estos matemáticos tuvo una propia idea de lo que el giro a las matemáticas puras involucraba, pero en general todos coincidieron en que el objetivo final de la nueva tendencia no sólo implicaba la claridad de conceptos básicos en las matemáticas, sino la autonomía misma de la aritmética como una rama diferenciada dentro de las matemáticas e independiente de la geometría.

Cabe mencionar aquí que la palabra 'aritmética' se usó de manera ambigua en esta época. Aunque en el momento no había un consenso generalizado, la confusión se aclara cuando se recurre a cada autor en particular y puede verse cómo algunos matemáticos se refirieron a la aritmética como la teoría de números enteros positivos, y en otros casos, a un campo más extenso que incluía a la teoría de los números reales y complejos. Para finales del siglo XIX, sin embargo, la definición que ganó la discusión fue la identificación de la aritmética con las matemáticas puras.

La nueva tendencia en las matemáticas –ahora conocida como enfoque conceptual– empezó a ser identificada bajo el nombre de 'aritmetización' alrededor de 1900 (tiempo después de que los practicantes mismos de este enfoque desarrollaran sus ideas) y se refirió a los programas que proporcionaron un fundamento no geométrico al análisis o a la aritmética [Petri y Schappacher 2007, 343]. Aunque para finales del siglo XIX este proyecto ya estaba bien establecido, también empezaron a perfilarse las consecuencias que se derivaban de este enfoque para la geometría y el resto de las matemáticas. Por ejemplo, el matemático alemán Felix Klein, en su discurso de 1895 en la Real Academia de Ciencias de Göttingen, hizo notar su preocupación ante el peligro de perder la unidad de las matemáticas. Según Klein, el siglo XVIII había sido para las matemáticas una época de descubrimientos, y para el siglo XIX, aquellas innovaciones demandaban una justificación lógica. La aritmetización, en ese sentido, le parecía de suma importancia pues el hecho de poder transformar los argumentos a la forma aritmética permitía aplicar a las investigaciones matemáticas la "lógica rígida" que conlleva la aritmética [Klein 1895, 967]. Sin embargo, la aritmetización no representaba para Klein la esencia de las matemáticas, y la deducción lógica, por sí misma, no le parecía suficiente para abordar las matemáticas de manera exhaustiva [Klein 1895, 967].

Algunos años más tarde, y siguiendo la línea de Kline, David Hilbert añadiría que el análisis y la aritmética no eran las únicas que podían tratarse de manera rigurosa.

> Esta opinión, de vez en cuando defendida por hombres eminentes, la considero completamente errónea. Tal interpretación unilateral de la exigencia de rigor no tardaría en llevar a la ignorancia de todos los conceptos que surgen de la geometría, la mecánica y la física, hasta un detenimiento en el flujo de nuevo material del mundo exterior [Hilbert 1900, en Gray 2000, 245].

Finalmente, los procesos iniciados por la aritmetización también inspiraron un vuelco en el desarrollo de las distintas ramas de las matemáticas en los años venideros. De cualquier manera, el giro al enfoque conceptual fue un proceso complejo y es necesario hacer dos observaciones importantes sobre él.

En primer lugar, y como ya se mencionó arriba, la identificación de las matemáticas puras con la aritmética es una tendencia principalmente alemana. Más aun, los matemáticos que trabajaron más a fondo con esta idea estuvieron involucrados con las universidades de

Prusia, al norte de la Alemania de aquel entonces. Incluso, la posición que los matemáticos de esta zona tenían sobre las matemáticas puras parece estar relacionada con el panorama más amplio de la época. Ferreirós atribuye la adopción del enfoque conceptual a la fuerte presencia del neohumanismo en las universidades del norte de Alemania, la cual acabó por influir intensamente en el pensamiento de los profesores universitarios, incluidos los matemáticos [Ferreirós 2007*b*, 251].

Esta idea cobra aún más sentido si se considera que Alexander von Humboldt, figura característica del neohumanismo, no sólo estuvo en contacto con varios importantes matemáticos de la época (entre ellos Gauss) y ayudó a posicionar a varios matemáticos involucrados con el enfoque conceptual en las universidades prusianas (como por ejemplo, a Peter Gustav Lejeune Dirichlet, quien se mencionará más adelante), sino que promovió fuertemente el desarrollo de las matemáticas en la academia alemana.

A su vez, a principios del siglo XIX, las disciplinas científicas no estaban aún profesionalizadas, lo cual permitía que quienes se dedicaran a las matemáticas o a las ciencias pudieran recibir más fácilmente la influencia del contexto cultural. Esta influencia fue todavía mayor cuando a raíz de las reformas en las universidades prusianas, las matemáticas y las ciencias fueron asignadas a la nueva facultad de filosofía, en donde gente de ciencias compartía espacio con historiadores, filósofos y filólogos.

También sucedió que el nivel de matemáticas que se enseñaba en la universidad en ese entonces no era tan avanzado como el nivel que desarrolllaban otras disciplinas universitarias, por lo que durante la década de 1810 los matemáticos de la época tuvieron que defender su valía y su lugar en la universidad. Claramente, las investigaciones en torno al conocimiento abstracto que las matemáticas puras conllevaban fueron claves para mostrar la afinidad que esta nueva tendencia tenía con la corriente neohumanista y universitaria del momento y con ello, a su vez, la corriente neohumanista potenció las ideas del enfoque conceptual que matemáticos como Gauss empezaban a explorar [Ferreirós 2007*b*, 251].

En segundo lugar, en esta nueva tendencia, las matemáticas puras se identificaron con la aritmética, la cual consistía de objetos claros y definidos que debían investigarse con un rigor más estricto que en los años previos. Los varios proyectos de aritmetización que se desarrollaron en las décadas de 1870 y 1880 –y que surgieron a partir de las distintas necesidades de los matemáticos de la época– consideraron a los números naturales el punto de partida *natural* para el resto de aquellas matemáticas puras y éstos, a su vez, eran conceptos dados y evidentes.

A continuación, se revisarán brevemente las principales líneas de pensamiento que son generalmente reconocidas como las más dominantes dentro del nuevo enfoque.

1.1 El trabajo de Gauss

Como se mencionó arriba, Gauss es considerado el pionero del enfoque conceptual. La metodología que desarrolló consitió en extender la aritmética en general, y el concepto de número en particular, a través de la introducción de nuevos números a los cuales pudiera seguirse aplicando las leyes elementales de la aritmética. Para promover sus nuevas ideas, Gauss publicó su propia obra, *Disquisitiones Arithmeticae*, en 1801, a la corta edad de 20 años [Ewald 1996, 306]. Esta obra es enormemente reconocida en la actualidad por

> […] el contraste entre la importancia del libro con la juventud de su autor; los innovadores conceptos, notaciones y resultados presentados en la obra; la extensión y la sutileza de algunas de sus pruebas; y su papel en la moldura de la teoría de números en una disciplina matemática distinguida [Goldstein y Schappacher 2007, 3].

Sin embargo, la recepción de esta obra fue lenta. De hecho, tardó un poco más de veinte años para que el trabajo tuviera una influencia clara. Pero sí puede decirse que una vez que las ideas de Gauss fueron entendidas hubo un mayor desarrollo de su teoría y su pensamiento sobre las matemáticas, y sus métodos y objetivos permearon el trabajo de los matemáticos alemanes desde alrededor de 1825 [Ferreirós 2007*b*, 252].

Disquisitiones Arithmeticae se centró principalmente en los números enteros y en sus propiedades. En el escrito, Gauss recopiló y organizó los resultados ya conocidos en su tiempo, sistematizó la notación y añadió su propio trabajo al mostrar técnicas nuevas con las que fuera posible extender el conocimiento previo. Todo esto lo hizo con un especial cuidado en eliminar huecos o fundamentos poco sólidos de las demostraciones.

Aunque en esta obra no hay discusiones sobre el enfoque que Gauss tenía sobre el concepto de número y a pesar de que rara vez publicó sus ideas sobre los fundamentos de las matemáticas (más bien era un tema que dejaba para su correspondencia), alrededor de los años en los que publicó *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss también escribió unas notas tituladas "Sobre la metafísica de las matemáticas" en las que expresó su opinión sobre los fundamentos filosóficos de las matemáticas.

Para exponer su punto de vista, Gauss se concentró en el concepto de magnitud. Las matemáticas, escribió Gauss, "tienen por objeto a todas las magnitudes extensivas (cuyas partes pueden ser consideradas); las intensivas (las magnitudes no-extensivas) sólo en la medida en que dependen de las extensivas" [Gauss 1929, 293]. Los números –entre otros ejemplos como el espacio– entran en la primera categoría pero sólo considerando que "una magnitud por sí misma no puede ser objeto de investigación matemática: las matemáticas consideran a las magnitudes sólo en sus relaciones entre sí" [Gauss 1929, 294].

Con lo anterior, Gauss dejó claro que para él las matemáticas consistían en una disciplina interesada en *relaciones*. Además, desde su punto de vista, las matemáticas debían encargarse de hacer posible la representación de las relaciones entre las magnitudes. Esta representación podía darse sólo de dos maneras: por intuición inmediata, o por la comparación de la magnitud con otra ya dada por intuición inmediata [Gauss 1929, 294]. Así,

> El deber del matemático es, en consecuencia, ya sea representar de hecho la magnitud buscada [...], o indicar la forma y manera en que, a partir de la representación de una magnitud dada de manera inmediata, se puede conseguir la representación de la magnitud buscada. [...]. Esto sucede por medio de los *números*, […] [Gauss 1929, 294].

La función de los números consistía en mostrar cuántas veces está contenida la magnitud buscada en otra magnitud ya dada (llamada unidad). Además, como la aritmética determina las magnitudes con respecto a la unidad, es decir, expresa las magnitudes como números, "el objeto propio de la aritmética es el *número*" [Gauss 1929, 295], y para Gauss, el concepto de número debía incorporar nociones que, para su época, resultaban controvertidas.

Por ejemplo, en tiempos de Gauss la legitimidad de los negativos como números estaba en discusión. Sin embargo, Gauss los admitió como números y trató de justificar su validez como tales alegando que

> […] del mismo modo que uno tiene tan pocos escrúpulos para llevar las fracciones a la aritmética general (a pesar de que hay tantas cosas contables para las que una fracción no tiene sentido), tampoco se debe negar a los números negativos los mismos derechos de los números positivos sólo porque innumerables cosas no admiten opuesto: la realidad de los números negativos está suficientemente justificada porque tienen un sustrato adecuado en otros innumerables casos [Gauss 1931, 311].

Lo mismo ocurría para el caso de los números complejos. Gauss pensaba que dichos números no sólo eran importantes por su utilidad en la práctica, sino porque también aseguraban la independencia del análisis con respecto a la geometría. Para el matemático alemán, al rechazar a los complejos, el análisis “perdería enormemente en belleza y en redondez” [Gauss a Bessel 1880, en Boniface 2007, 325].

Ahora bien, la consideración de que la geometría podía dar legitimidad a nuevos números (como los complejos) representaba la concepción predominante de la época. Bajo esta concepción, la existencia de los objetos matemáticos era asociada a la característica de ‘poder verlos’. Así, una representación geométrica de estos números dotaba de una existencia objetiva a conceptos que antes sólo existían de manera abstracta y les daba legitimidad a través de la relación con referentes concretos. Sin embargo, esta objetividad no representaba un verdadero fundamento para Gauss. De manera que aunque los complejos –y los racionales e irracionales también– pudieran representarse a través de la geometría,[1] los números eran independientes de esa representación (que sólo probaba la objetividad de los números, mas no su legitimidad). Para Gauss, la fundamentación de aquellos números radicaba únicamente en los números enteros positivos (o naturales) que, a su vez, se fundamentaban en la noción de relación entre magnitudes. Esta idea de fundamentar a los números en los naturales fue precisamente lo que caracterizó más tarde al proyecto de aritmetización.

Las ideas anteriores son sólo el reflejo de la concepción más profunda que Gauss tenía de las matemáticas. Para él los números consistían en un “*mero* producto de nuestra mente” a diferencia del espacio, que “posee también una realidad fuera de nuestra mente y [del] que no podemos prescribir completamente sus leyes *a priori*” [Gauss a Bessel 1830, 302]. Para Gauss la realidad empírica no produce verdades absolutas, por lo que sólo la aritmética –y no la geometría– proporciona verdades absolutas a nuestro conocimiento [Gauss a Bessel 1830, 302].

[1] Por ejemplo, en su obra de 1831 sobre la teoría de residuos bicuadráticos.

El lugar que la aritmética ocupaba dentro del conocimiento *a priori* le ganó la posición de reina de las matemáticas desde el punto de vista de Gauss [Kronecker 1887, 949]. Sin embargo, y debido a los estudios que Gauss desarrolló en torno a las aplicaciones de sus investigaciones, en última instancia, la aritmética y la geometría formaban parte de una misma ciencia y muchas veces incluso traspasó la frontera entre ambas durante sus investigaciones.

De cualquier modo, la difusión de las ideas de Gauss y de la nueva posición de la aritmética parecen estar fuertemente relacionadas con el contexto académico de su tiempo. Según Ferreirós [Goldstein & Schappacher 2007, 237], “la atmósfera del neohumanismo promovió tales perspectivas” en conjunto con la situación social, política y cultural en la que se encontraban los Estados Alemanes a principios del siglo XIX.

Ferreirós incluso encuentra en Gauss una faceta neohumanista que se combinó con su calidad de científico. Las señales de esto se muestran en el hecho de que Gauss estaba profundamente interesado en la literatura y la filosofía. Es sabido, incluso, que leyó a detalle –y criticó– la obra de Kant [Goldstein & Schappacher 2007, 249]. Y de hecho, varias de sus ideas responden a la necesidad de la época de levantar el espíritu intelectual alemán y distanciarlo del pragmático estilo francés de la época de la invasión napoleónica.

En última instancia, el enfoque de Gauss impactó fuertemente en el pensamiento de los matemáticos de los años posteriores y sus ideas coincidieron con los proyectos de algunos otros. En particular, hubo dos líneas claras que continuaron el proyecto que Gauss inició: la de Leopold Kronecker y la de Karl Weierstrass.

1. 2 La aritmetización según Kronecker

En 1887, Leopold Kronecker publicó *Sobre el concepto de número* como una contribución al jubileo del doctorado del historiador de la filosofía griega Eduard Zeller. Después de la publicación de esta obra, Kronecker también expuso sus ideas sobre el mismo tema en un curso que tuvo como título *Sobre el concepto de número en las matemáticas* [Boniface 2007, 330]. Aunque el tema era de gran interés para Kronecker y hubiera querido exponerlo desde antes de su curso, sabía que su posición sobre varias cuestiones era contraria a la de otros matemáticos, en particular, a la de los matemáticos que se alinearon a las ideas del enfoque conceptual, tendencia que finalmente se convirtió en la dominante.

Kronecker fue un asiduo lector de Gauss y fue muy claro en mostrar la influencia que éste tuvo en su pensamiento. Específicamente, Kronecker fue simpatizante de las perspectivas de Gauss sobre el concepto de número y sobre la posición de la aritmética dentro de las matemáticas –aunque ambos tenían una idea diferente de lo que conformaba la aritmética, lo cual marcaría una diferencia crucial entre el pensamiento de Kronecker y los demás matemáticos del enfoque conceptual. Mientras que para Gauss la aritmética tenía que ver únicamente con la teoría de números (enteros), Kronecker incluyó al álgebra y al análisis dentro de la aritmética. Esta diferencia tuvo que ver con los objetos que cada uno admitió dentro de la noción de número.

Como se mencionó anteriormente, para Gauss el desarrollo de las matemáticas puras se basaba fundamentalmente en la ampliación consecutiva del concepto de número. En primer lugar se partía de los enteros y la aritmética se dedicaba a estudiarlos, pero en su desarrollo, el concepto de número acababa extendiéndose para incluir a los racionales, irracionales y complejos. De esta manera, el álgebra y el análisis quedaban contenidos dentro de las matemáticas puras.

En cambio, Kronecker sólo admitía a los enteros positivos como números. Esto es una consecuencia de la importancia que Kronecker daba a mantener la noción de número intacta, pues al ampliar este concepto a otras áreas de la ciencia el significado podía perderse. Por esta razón, Kronecker no admitía la generalización del concepto de número ni un desarrollo de las matemáticas a través de la extensión del dominio de sus objetos a otros dominios [Boniface 2007, 336]. Así, la aritmetización de las matemáticas que Kronecker defendió se basaba en el concepto de número en el sentido más estricto: sin modificaciones, ni extensiones.

Desde este punto de vista, las matemáticas debían fundamentarse en el concepto de número natural. Junto con ese punto de partida, Kronecker se basó en una idea que Gauss mismo había introducido y propuso un despliegue de operaciones y relaciones entre sistemas de magnitudes para evitar cualquier extensión de los naturales y la creación de nuevos números. De esta manera, sería posible incluir lo necesario para que el análisis y el álgebra pudieran desarrollarse dentro de la aritmética.

> Con la introducción sistemática de los indeterminados (*indeterminatae*), que se derivan de Gauss, la teoría especial de los enteros se expandió hacia la teoría general de la aritmética de todas las funciones de indeterminados con coeficientes enteros. Esta teoría general permite eliminar todas las nociones ajenas a la propia aritmética: las de negativo, fraccionario, real y números algebraicos imaginarios [Kronecker 1887, en Petri y Schappacher 2007, 356].

Como puede verse, la noción de número fue central en el pensamiento de Kronecker. Y ese concepto, desde su punto de vista, se originaba en la experiencia de contar. El conteo suponía la noción de número ordinal y éste era "el punto de partida natural para el desarrollo del concepto de número" [Kronecker 1887, 949].

Ahora, si bien Kronecker tuvo posiciones encontradas con otros matemáticos (incluido Gauss), sí coincidió con ellos en otras ideas fundamentales del enfoque conceptual. Entre estas ideas está el lugar primordial de la aritmética dentro de las matemáticas. Para mostrar la relación que adjudicaba a la aritmética, Kronecker citaba a Gauss: “las matemáticas son la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas. Con frecuencia, ellas se dignan a prestar servicio a la astronomía y a otras ciencias naturales, pero en todas las circunstancias la primera categoría se debe a ellas” [Kronecker 1887, 949].

La aritmética, entonces, servía de apoyo para la geometría y para la mecánica a cambio del estímulo que éstas le proporcionaban. Ese estatus sobresaliente que Kronecker daba a la aritmética tenía que ver, una vez más, con la concepción que tenía sobre el concepto de número:

> La diferencia de principio entre la geometría y la mecánica por un lado, y las disciplinas matemáticas restantes (aquí reunidas por el término de ‘aritmética’) por el otro está, según Gauss, en que el objeto de este último, el número, es *mero* producto de nuestra mente, mientras que el espacio y el tiempo también tienen una *realidad* fuera de nuestra mente cuyas leyes no podemos prescribir completamente *a priori* [Kronecker 1887, 949].

La posición que Kronecker defendía sobre las matemáticas implicaba serias consecuencias para la práctica matemática. Un ejemplo es que su visión limitaba procedimientos que usaban la noción de infinito, una noción que empezaba a trabajarse profundamente en las investigaciones de Cantor y Weierstrass y que más tarde se convertiría en el centro de la apenas formada teoría de conjuntos.

El estricto constructivismo de Kronecker le valió muchas críticas en su tiempo, e incluso el rechazo de su propuesta de aritmetización por parte de varios matemáticos. Sin embargo, como ya se mencionó anteriormente, Kronecker tuvo varios puntos de contacto con el resto de los proyectos de aritmetización y, sin duda, fue parte fundamental del nuevo lugar que las matemáticas puras adquirieron en la época.

1.3 La aritmetización según Weierstrass

Karl Weierstrass es generalmente aceptado como una de las figuras centrales en el proyecto de aritmetización de las matemáticas. Klein incluso lo llegó a considerar el principal representante de este enfoque [Petri y Chappacher 2007, 362]. Su importancia radica en que aclaró varias ambigüedades que había en la teoría de funciones, proporcionó contraejemplos que encontró en esa misma teoría y mostró una especial presentación en sus trabajos que dio la pauta a seguir como nuevo modelo de rigor.

Aunque reconoció los trabajos de Gauss y a pesar de coincidir en varios puntos, Weierstrass no parece haber tenido una relación tan directa como otros matemáticos con el pensamiento sobre la aritmética propuesto por Gauss. El punto más claro de divergencia es que sus motivos para trabajar sobre la noción de número fueron diferentes a los de los otros matemáticos interesados en la aritmetización. Para Weierstrass, el objetivo era definir de manera clara y rigurosa conceptos básicos del análisis para poder continuar con su trabajo en la teoría de funciones. Sin embargo, ese objetivo acabó dándole un importante papel en la rigorización de las matemáticas.

Fue durante las últimas tres décadas del siglo XIX, que el pensamiento de Weierstrass en torno al proyecto de aritmetización se hizo más evidente. Estas ideas pueden encontrarse gracias a las notas que sus alumnos escribieron sobre el curso introductorio de teoría analítica de funciones y a las cartas que Weierstrass escribió a sus colegas.

Por ejemplo, para 1873, Weierstrass ya reconocía que el enfoque al análisis debía darse a partir de la noción de número –y no de cantidad– y de las operaciones básicas de la aritmética. Y sostenía que “este camino es el único por el que el análisis se puede fundamentar con rigor científico y por el que todas las dificultades se pueden resolver” [Weierstrass 1873, en Petri y Schappacher 2007, 352].

En su curso un año más tarde, Weierstrass atribuía a Gauss la tarea de fundamentar el análisis en una base totalmente aritmética y reconocía que la representación geométrica de los números –como los complejos– era importante para su estudio, pero defendía que los fundamentos del análisis debían estar completamente alejados de la geometría. Esta idea apareció aún más fuerte en su curso de 1882-1883, cuando afirmaba que

> Para la fundamentación del análisis puro de todo lo que se requiere es del concepto de número, mientras que la geometría tiene que pedir prestadas varias nociones de la experiencia. Nosotros intentaremos aquí de construir todo el análisis a partir del concepto de número [Weierstrass en Petri y Schappacher 2007, 353].

Una de las diferencias que el proyecto de Weierstrass tuvo con el de Kronecker tenía que ver con que para el primero la aritmética quedaba absorbida por el análisis, mientras que para Kronecker el análisis quedaba incluido dentro de la aritmética. Este punto parece variar de matemático a matemático, pero la tendencia más amplia de Weierstrass en torno a la ampliación del concepto de número y el rigor necesario en las pruebas matemáticas acabaría por convertirse en la postura dominante. En particular, matemáticos como Cantor y Dedekind retomarían el punto fundacionalista de Weierstrass de que los objetos matemáticos podían definirse a través de procesos lógicos partiendo únicamente de la base de la teoría de los números naturales.

1.4 La aritmetización en retrospectiva

La imagen general de las versiones arriba presentadas sugiere que la aritmetización fue un movimiento que consistió en una nueva valoración de objetos matemáticos (los números) que antes habían sido entendidos en función de algo extrínseco (las magnitudes). En la nueva tendencia, aquellos nuevos e independientes objetos se aceptaron como fundamento primordial. Los números, junto con los métodos admitidos como suficientemente rigurosos, le dieron al edificio de las matemáticas una renovada solidez y estabilidad.

Ahora bien, como puede verse arriba, los proyectos de aritmetización de Weierstrass y Kronecker no fueron homogéneos en su totalidad. Y desde luego, ellos no fueron los únicos que desarrollaron proyectos fundacionalistas.[1] Sin embargo, sus posturas son generalmente ubicadas como las principales dentro del movimiento de aritmetización y las que, de alguna u otra manera, fueron retomadas por otros.

Cabe mencionar aquí también que Dedekind fue uno de los exponentes más fuertes de la aritmetización. Su pensamiento coincidió –y amplió– en muchos sentidos con el de Gauss y el de Weierstrass. Su postura, sin embargo, cobrará mucha relevancia unas secciones más adelante, cuando podrán verse las similitudes con las ideas de Gauss y se revisará su importancia en el tratamiento de la naturalidad de los números enteros positivos.

Finalmente, aunque es indudable la influencia que Gauss tuvo para el enfoque coneptual, otros matemáticos pueden identificarse como claros antecesores del movimiento de aritmetización.[2] Dos personajes en particular resultan importantes para este trabajo y serán revisados en la siguiente sección.

---

[1] Están, por ejemplo, los proyectos de Cantor y Meray.

[2] Por ejemplo, Cauchy y Lagrange.

Capítulo II

Dos casos especiales: Ohm y Dirichlet

Aunque el estudio de los números naturales fue desarrollado de manera más formal en la década de 1880 por los exponentes más famosos de la aritmetización, y de que la idea básica de que las matemáticas puras debían trabajarse de una manera más cuidadosa e identificarse con la teoría de números es atribuida generalmente a Gauss, otros matemáticos menos conocidos en su época por sus posturas filosóficas sobre las matemáticas también estuvieron involucrados en la gestación del nuevo enfoque. En particular, las posturas de Ohm y Dirichlet están muy presentes en los trabajos de los exponentes de la aritmetización. A continuación se revisarán sus perspectivas.

2.1 Ohm

La importancia de las ideas del matemático alemán Martin Ohm (hermano menor del famoso físico Georg Simon Ohm) es amplia. Su concepción sobre las matemáticas parece haber permeado fuertemente las ideas de los matemáticos que posteriormente trabajarían con el concepto de número natural bajo una connotación muy específica.

Ohm fue reconocido como autor de libros de texto. Su principal obra consistió de una serie de libros de texto que empezó a publicarse en 1822 [Schubring 2005, 522]. Ohm estaba convencido de que esta obra proporcionaría el sólido fundamento que tanta falta hacía a las matemáticas. En su obra titulada *Intento de un sistema de las matemáticas completamente consistente*, Ohm trabajó diferentes áreas de las matemáticas que iban desde la aritmética hasta el cálculo integral. Esta serie de libros contenía ya la esencia de la concepción que Ohm tenía sobre los números, la cual había publicado unos años antes, en 1816, en un trabajo sobre la teoría de números [Schubring 2005, 522].

Para Ohm, la distinción entre el concepto de número y el de cantidad era algo fundamental. El estudio de los números era la base de las matemáticas para él, mientras que las cantidades eran tema del campo de las aplicaciones y, por esto, sólo podían enseñarse una vez que la teoría de números hubiera sido cubierta. Ohm llegó incluso a escribir, en 1819, que los matemáticos habían estado equivocados en pensar que el tema principal del cálculo eran las magnitudes, pues para él, éste se trataba "única y exclusivamente de los llamados enteros absolutos" [Bekemeier 1987, 38].

Además, los números enteros positivos (los números naturales) tenían la posición privilegiada de ser los únicos considerados legítimos e inmanentes al pensamiento de los seres humanos. De acuerdo con Ohm, los "números y sus propiedades son objetos de nuestra intuición interna" [Bekemeier 1987, 290]. Los números naturales, además, eran el fundamento más básico del conocimiento matemático para Ohm. A partir de ellos se podía continuar a un dominio más grande de números que permitiera la aplicación de las operaciones aritméticas inversas –principio que puede encontrarse en los trabajos de Weierstrass y Dedekind [Ferreirós 2007*b*, 242].

Sin embargo, la propuesta de Ohm se diferencia de las de los matemáticos de los siguientes años en cuanto a que el rigor que buscaba requería trabajar con formas sin contenido. Así, el cero y los negativos no designaban un número, ni siquiera tenían significado. Éstos sólo eran vistos como una “teoría de signos numéricos” para Ohm [Ferreirós 2007, 12].

Esta última idea fue criticada por varios de sus contemporáneos, pero en general, Ohm fue bastante popular entre los maestros del *Gymnasium* alemán y entre la gente cuyo conocimiento matemático había sido en alguna medida autodidacta [Ferreirós 2007, 13]. Pero más importante aún para este trabajo, es posible encontrar reminiscencias de sus ideas en el pensamiento de algunos de los matemáticos que se convirtieron en figuras destacadas en los siguientes años y que trabajaron profundamente el tema de los números naturales.

2.2 Dirichlet

Peter Gustav Lejeune Dirichlet fue contemporáneo de Ohm, e incluso, tuvieron alumnos en común [O’Connor y Robertson 2010 y Ferreirós 2003, 9]. Pero a diferencia de Ohm, no hay publicaciones de Dirichlet que expresen su pensamiento acerca del fundamento de las matemáticas, del concepto de número o sobre su trabajo en teoría algebraica de números. Sus perspectivas en estos temas han podido recuperarse gracias a las notas de los alumnos que tomaron sus clases [Schubring 2005, 559] y por lo que otros matemáticos escribieron sobre él. Sin embargo, su influencia en los matemáticos que promovieron el enfoque conceptual es clave. El matemático de origen ruso Hermann Minkowski incluso describió la esencia del enfoque conceptual con base en “el otro principio de Dirichlet: la conquista de los problemas con un mínimo de cálculos ciegos y un máximo de pensamientos claros” [Stein, en Aspray & Kitcher, 241].

Partiendo de sus trabajos, puede verse que Dirichlet no encontró dificultades en la relación entre el concepto de cantidad y el de número y que tampoco tuvo problemas para aceptar a los números negativos y al cero como números legítimos. De hecho, las matemáticas para él, y a diferencia de Ohm, tenían objetos de estudio particulares, los cuales no consistían en expresiones sin contenido o significado, sino que representaban objetos independientes [Ferreirós 2007*b*, 242]. Nuevamente, esta idea es posible encontrarla en los pensamientos de Weierstrass y Dedekind.

Dedekind [1888, 35] afirmó incluso haber escuchado "repetidamente de la boca de Dirichlet", su maestro, que "[…] cada teorema de álgebra y análisis superior, sin importar qué tan remoto, puede expresarse como un teorema acerca de números naturales" [*Íbidem.*]. Esta perspectiva fue compartida en alguna medida por Ohm y expresaba la idea compartida de que las matemáticas encontraban su fundamento en los números naturales.

Además de esta perspectiva, Dirichlet fue conocido por su innovación en el rigor matemático. De acuerdo con su amigo y colega C. G. J. Jacobi

> Dirichlet solo, no yo, ni Cauchy, ni Gauss, sabe lo que es una prueba completamente rigurosa y nosotros estamos aprendiendo de él. Cuando Gauss dice que ha probado algo, me parece muy probable; cuando Cauchy lo dice, es más posible que no; cuando Dirichlet lo dice, está *probado* [Schubring 2005, 558].

Esta descripción muestra el estilo que Dirichlet trataba de seguir siempre en sus trabajos. Además, este enfoque influyó fuertemente en la preocupación por fundamentar las teorías matemáticas que algunos de sus estudiantes –entre ellos los principales divulgadores del término 'número natural'– adquirieron unos años más tarde.

Capítulo III

Los números naturales en contexto

El panorama anterior es muestra de que varias situaciones se combinaron para generar un cambio radical en las matemáticas. Por un lado, el quehacer de los matemáticos adquirió un modelo de rigor más estricto que en otros tiempos. Y, por otro lado, los números se vieron transformados tanto en su definición, como en el papel que desempeñaron dentro del edificio de las matemáticas.

En particular, los números enteros positivos se convirtieron en el nuevo fundamento en este contexto. Más aún, el uso del término 'número natural' parece haber aparecido por primera vez en este contexto, e incluso, las referencias al uso de ese término provienen precisamente de algunos de los matemáticos que estuvieron involucrados en la introducción de la nueva tendencia o de quienes estuvieron cerca de quienes desarrollaron el enfoque conceptual.

Sin embargo, la aparición del término 'número natural' en el lenguaje de las matemáticas no es clara debido a la falta de publicaciones que muestren cuándo, dónde y por qué surgió la expresión. Tras una aparición en *Introducción a la aritmética* de Nicómaco de Gerasa (ca. 100 d.C.) y unas pocas presentaciones en publicaciones europeas del siglo XVI, el rastro se pierde y no vuelve a aparecer sino hasta 1770, en *Elementos de álgebra* de Leonhard Euler. La expresión puede encontrarse en las obras de varios matemáticos publicadas unos años después, pero es importante notar que tales obras son casi en su totalidad producto de autores alemanes –con la excepción de la obra del bohemio Bernard Bolzano. Considerando la transición a las matemáticas puras revisada en las secciones anteriores, no es de sorprenderse que este hecho sea precisamente una consecuencia más de la nueva concepción de la noción de número que surgió durante la etapa de aritmetización.

Sin embargo, aun cuando la expresión 'número natural' es localizable en algunas de las publicaciones alemanas del siglo XIX, tampoco puede tomarse como un término popular o de uso frecuente entre los matemáticos de la época: hasta antes de 1888 –año de la publicación de Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números?*– las referencias a los enteros positivos con el nombre de naturales son pocas.

La aparición de 'número natural' se hizo visiblemente frecuente en las publicaciones posteriores a 1888 junto con una discusión todavía más profunda de la que ya se venía hablando sobre los fundamentos de las matemáticas. Pero para rastrear los primeros indicios de 'naturalidad' de los naturales, las obras de los años en los que la expresión ya era de uso corriente no se tomarán en cuenta. En su lugar, se echará un vistazo a las siguientes obras por ser las pioneras en el uso de 'número natural':

AÑO	NOMBRE DE LA OBRA	AUTOR	NACIONALIDAD DEL AUTOR
1770	*Elementos de Álgebra*	L. Euler	Suiza
1801	*Disquisitiones Arithmeticae*	C.F. Gauss	Alemana
1842	*El espíritu del análisis matemático y su relación con un sistema lógico*	M. Ohm	Alemana
1851	*Las paradojas del infinito*	B. Bolzano	Checa
1887	*Sobre el concepto de número*	L. Kronecker	Alemana
1887	*Numeración y medición desde un punto de vista epistemológico*	H. von Helmholtz	Alemana
1888	*¿Qué son y para qué sirven los números?*	R. Dedekind	Alemana

Con ello, podrá verse que los cambios que surgieron alrededor de la noción de número, estuvieron fuertemente relacionados con el entendimiento que los matemáticos tenían de este concepto y que la 'naturalidad' de los enteros positivos fue consecuencia de aquel entendimiento.

2.1 El caso de Euler

Suizo de nacimiento, Euler pasó gran parte de su vida en Rusia y en el norte de Alemania. Bajo invitación del rey de Prusia, Euler se incorporó a la Academia de Ciencias de Berlín, e incluso, llegó a convertiste en el director de la sección de matemáticas de la renombrada Academia. Al igual que Ohm, Euler fue reconocido más de una vez como buen autor de libros de texto. En particular, sus libros sobre análisis algebraico y sobre cálculo fueron aceptados relativamente rápido por los académicos de su tiempo [Schubring 2005, 258]. Sin embargo, su libro sobre álgebra no corrió con tal suerte.

A pesar de haber sido traducido a varios idiomas, la obra del matemático suizo fue ampliamente rechazada debido al manejo algebraico que Euler exponía sobre los números negativos, pues como ya se mencionó antes, los negativos no fueron completamente aceptados sino hasta bien entrado el siglo XIX [Schubring 2005, 258]. En todo caso, la importancia de la obra de Euler para las matemáticas de los años posteriores radicó precisamente en esa presentación que hizo del álgebra y de las matemáticas en general, la cual coincide significativamente con la obra de los matemáticos del enfoque conceptual.

Euler introdujo a las matemáticas como "nada más que la ciencia de las cantidades, o la ciencia que señala el método de medición de la cantidad" [Euler 1984, 1]. Más importante aún, él fue el primero en hacer una separación conceptual entre cantidad y número en álgebra [Euler 1984, 1]: "[…] un número no es más que la relación que una cantidad lleva con otra tomada arbitrariamente como la unidad" [Euler 1984, 2].

Justo al inicio de su obra y junto con las definiciones anteriores, Euler presentó la visión que tenía sobre las matemáticas y el álgebra, la cual fue retomada por varios matemáticos alemanes años más tarde. Para Euler, las matemáticas debían basarse en una profunda investigación del concepto de número y de sus operaciones.

> Es evidente a partir de esto, que todas las magnitudes pueden ser expresadas por números y que el fundamento de todas las ciencias matemáticas debe establecerse sobre un tratado completo acerca de la ciencia de los números y en una examinación precisa de los diferentes métodos posibles de los cálculos. Esta parte fundamental de las matemáticas se llama Análisis o Álgebra. En Álgebra, entonces, se consideran sólo los números que representan cantidades, sin tomar en cuenta las clases particulares de las cantidades, las cuales son objeto de otras ramas de las matemáticas [Euler 1984, 2].

Euler también hizo mención de la aritmética, como "la ciencia de los números propiamente dicha" [Euler1984, 3], la cual debía encargarse de investigar ciertos métodos para calcular aplicables en la práctica ordinaria. En contraste, el álgebra trabaja de manera general con todos los casos que pueden encontrarse en la doctrina y el cálculo de los números [Euler 1984, 3].

Además de estas perspectivas –y más importante aún para esta investigación–, la obra de Euler es la primera publicación dentro de las matemáticas modernas en mostrar el término de 'número natural':

> […] podemos obtener números positivos mediante la adición de 1 a 0, es decir, 1 a nada; y al continuar siempre aumentando de este modo desde la unidad. Este es el origen de los números llamados *números naturales* [Euler 1984, 5].[1]

Este fragmento indica que Euler no parece haber designado el término de 'números naturales' y que, más bien, él no está haciendo más que repetir el término bajo el que ya se

[1] Las itálicas son de la autora de esta investigación.

conocían tales números. Sin embargo, la más antigua publicación que menciona a los naturales con ese nombre data de la época de Grecia Antigua[1] y, de hecho, parece que no hay muchas publicaciones entre aquella obra y la de Euler en las que aparezca el término –aun cuando *Elementos de álgebra* contiene terminología que Euler parece tomar como ya conocida.

A pesar de las aportaciones arriba mencionadas que Euler logró con su obra y de haber aclarado varias nociones de una manera que antes no se había hecho –como el uso de letras para representar números y no cantidades–, Euler falló en mostrar una descripción detallada de la relación que él encontraba entre números y cantidades. Algunos historiadores de las matemáticas [Schubring 2005, 258] atribuyen en parte a ello el poco reconocimiento que las innovaciones de Euler tuvieron en su tiempo.

3.2 Las publicaciones de Gauss y de Ohm

Tanto en el caso de Gauss, como en el de Ohm, sólo parece haber una única referencia dentro de sus escritos en la que mencionan a los números enteros positivos como 'números naturales'.[2]

Como ya se mencionó anteriormente, el *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss tardó varios años en mostrar una influencia visible debido a sus innovaciones y su complejidad. Pero incluso considerando la época en que el trabajo fue entendido, la popularización del término natural no puede atribuirse a los escritos de Gauss debido al muy poco uso que hizo del término. Lo mismo puede decirse de la influencia de Ohm en esta cuestión.

---

[1] El término aparece en *Introducción a la Aritmética* de Nicómaco de Gerasa.

[2] Gauss 1801, en la sección "Del número promedio de géneros" y Ohm 1842, en la que el término 'números naturales' aparece sólo una vez dentro del tema de series.

La importancia de las perspectivas de estos matemáticos para los naturales tiene que ver más con la nueva mirada que dieron a estos números que con la terminología que usaron para referirse a ellos. Más aun, es indudable que con la concepción de los naturales que heredaron a otros matemáticos –en particular a Dedekind–, la adjudicación de naturalidad a los enteros positivos se vio facilitada.

Las consideraciones de que sólo los números, y no el espacio, gozaban de una naturaleza *a priori*, de que los números son un "*mero* producto de nuestra mente" (Gauss) y de que los "números y sus propiedades son objetos de nuestra intuición interna" (Ohm), favorecen la idea de que los números naturales ya nos están dados por nuestra cualidad de ser humanos que más tarde defendería Dedekind.

Finalmente, y como se verá más adelante, Dedekind también retomaría la postura de Gauss de que el objeto de estudio de las matemáticas son las relaciones (y no las magnitudes por sí solas). Para Dedekind, la habilidad de establecer relaciones es algo constitutivo de los seres humanos, así que la idea de Gauss parece reforzar una vez más la naturalidad de los números (en cuanto a relaciones).

3.3 El caso de Bolzano

Bernard Bolzano, matemático de la entonces Bohemia, es el único contemporáneo de Gauss que parece haber acogido el *Disquisitiones Arithmeticae* en el momento de su publicación [Schubring 2005, 530]. Además, Bolzano estuvo muy interesado en las diferentes posiciones en torno a los números que se discutían en su época en Alemania y escribió ampliamente sobre su punto de vista.

Por ejemplo, en *Contribuciones a una mejor fundada presentación de las matemáticas*, de 1810, Bolzano recorrió las partes de las matemáticas en las que encontraba deficiencias con el objetivo de proponer una metodología para corregirlas y fortalecer las bases en las que se fundamentaban las matemáticas. Ahí trató la noción de cantidad y afirmó que "debemos entender por cantidad *un todo en la medida en que se compone de varias partes iguales*, o todavía de manera más general, *algo que puede determinarse con números*" [Bolzano 1810, 180].

Esta definición es una más de las que separa los conceptos de cantidad y de número pero, como aparece en escritos posteriores,[1] Bolzano tomó al primero como el concepto más fundamental. Además, su noción de número era más cercana a la concepción tradicional de cantidad y todavía lejana a la concepción de Euler y de Gauss (para quienes los números se referían a relaciones). Esto llevó a Bolzano a no aceptar a cualquier noción de cantidad como una cantidad real:

> No pocas veces, debería ser incluso útil y necesario introducir nociones de cantidades con respecto a las que se verá más adelante que un objeto del tipo que exigen es algo imposible. Reconocer esta sola imposibilidad es con frecuencia útil [Schubring 2005, 531].

Específicamente, las cantidades negativas y el cero eran conceptos a los que no correspondía ningún objeto para Bolzano y, por ello, no eran reales para él en el sentido de que no les correspondía una sustancia [Russ 2004, 665], aunque sí admitió la idea de cantidades opuestas en el contexto de la suma y la resta.

Aunque la concepción sustancialista de Bolzano sobre las cantidades lo unió más a las matemáticas tradicionales, sus reflexiones sobre análisis y su énfasis en mostrar las ideas matemáticas con justificaciones sólidas, le han valido el título de pionero de las matemáticas modernas en las investigaciones recientes de la historia de las matemáticas [Schubring 2005, 533].

---

[1] Por ejemplo en: "*Erste Begriffe der allgemeinen Grössenlehre*" de 1831 y "*Einleitung zur Grössenlehre*" de 1840 [Schubring 2005, 533].

En cuanto al tema de los naturales, en *Sobre las paradojas del infinito* de 1851 Bolzano habla en varias ocasiones de los “llamados números naturales” [Bolzano 1851, 262]. Por la desafortunada situación en la que Bolzano vivió, sus obras no pudieron haber sido las divulgadoras principales del término ‘número natural’. Y aunque nunca menciona de quién retomó la expresión ni por qué se llama así a tales números, su trabajo sobre las nociones de número y de infinito se anticipó a los que más tarde otros matemáticos publicarían. En la obra, las ideas de número y de infinito son desarrolladas en términos de la noción de conjunto, una noción más general y más abstracta. Sin embargo, por la concepción que tenía de los objetos matemáticos, Bolzano estudió estas ideas sin intención de darles uso matemático y no sería sino hasta unos años más tarde (y de manera independiente a los trabajos de Bolzano) que matemáticos como Dedekind y Cantor explorarían más profundamente estas ideas.

Bolzano fue un gran matemático, pero vivió en medio de un contexto en el que la convicción en la libertad de pensamiento y la república fueron reprimidas en favor de una jerarquía católica conservadora. Los ideales sociales, éticos y religiosos que mantuvo eran más afines al movimiento de la Ilustración, lo que eventualmente jugó en su contra. Finalmente, en 1819, Bolzano fue destituido de su cátedra, le fue prohibido publicar, e incluso fue puesto bajo supervisión policiaca [Ewald 1996, 171].

Bolzano siguió escribiendo sobre los temas que le interesaban mientras vivía en el campo e insistió en mantener su conocimiento matemático actualizado –en particular el de las investigaciones matemáticas alemanas. Pero la “claridad de sus argumentos, el poder de sus teoremas y la utilidad de sus técnicas” [Ewald 1996, 171] fueron inadvertidas hasta 1881, una vez que matemáticos más famosos –como Wierstrass y Dedekind– desarrollaron los mismos resultados que él había encontrado unos años antes.

3.4 Helmholtz y los naturales

Aunque los fundamentos de las matemáticas no fueron un tema frecuente en los escritos de Hermann von Helmholtz, sus contribuciones no quedaron totalmente fuera de la tendencia de la década de 1880 de investigar los conceptos básicos de la aritmética y en 1887 publicó *Conteo y medición desde un punto de vista epistemológico.*

Unos años antes, en 1876, Helmholtz había publicado ya el enfoque kantiano (aunque ligeramente modificado) que tenía de las matemáticas en un texto sobre los orígenes empíricos –y no *a priori*– de los axiomas de la geometría. Los axiomas de la geometría, decía Helmholtz, son proposiciones que pueden confirmarse o refutarse mediante la experiencia [Helmholtz 1887, 728]. Esto, continuó Helmholtz, "no elimina la visión de Kant del espacio como una forma trascendental de la intuición; en mi opinión, esto sólo excluye una especificación particular injustificada de su visión […]" [Helmholtz 1887, 728].

Siguiendo la dirección que ya había trazado en su pensamiento al discutir los axiomas del espacio, Helmholtz continuó con la reflexión de la forma de la intuición temporal, que en el esquema kantiano estaba representado por la noción de número. Y en su obra de 1887 se dedicó a la discusión de la aritmética.

De acuerdo con su visión, los orígenes de la aritmética estaban en una operación básica e intuitiva que aplicamos en la experiencia para encontrar y probar características del mundo externo que, en particular, se comportan de manera similar a una ley [Cahan 1993, 517]. En palabras de Helmholtz

> […] la aritmética, o la teoría pura de números, es un método construido sobre hechos puramente psicológicos, que enseña la aplicación lógica de un sistema simbólico (es decir, de los números), […]. Porque por medio de este sistema simbólico de los números podemos dar descripciones de las relaciones que hay entre los objetos reales, descripciones

> que, cuando son aplicables, pueden alcanzar cualquier grado de exactitud requerido [...] [Helmholtz 1887, 730].

La operación básica que Helmholtz tomó como soporte de la aritmética fue la del conteo, que caracterizó en una sección de su obra titulada "La serie con forma de ley de los números" como el procedimiento que se basa en nuestra capacidad de retener en la memoria los actos de nuestra consciencia que ocurren de manera ordenada en el tiempo [Helmholtz 1887, 730]. Y en última instancia, establecer un orden temporal era para Helmholtz la "forma inevitable de nuestra intuición interior" [Helmholtz 1887, 734].

Precisamente en esta sección, después de describir la operación del conteo, Helmholtz introdujo la expresión 'número natural' y, a diferencia de los demás matemáticos que usaron el término, fue el único que da una posible explicación de por qué los naturales son llamados por ese nombre:

> Podemos considerar inicialmente a los números como una serie de símbolos elegidos arbitrariamente, para los que fijamos sólo un determinado tipo de sucesión como la serie con forma de ley o –como comúnmente se le llama– la 'natural'. Que se le haya llamado la serie de números 'naturales' estuvo probablemente conectado simplemente con una aplicación específica de contar, a saber, la determinación del *número cardinal* de cosas reales dadas. Mientras tiramos éstas una después de la otra en el montón ya numerado, los números se siguen uno a otro por un proceso natural de su serie con forma de ley [Helmholtz 1887, 730].

La explicación de Helmholtz parece coincidir con la idea de Kronecker en cuanto a que ambos consideraron la experiencia de contar como el punto de partida del concepto de número. Más aun, el pasaje anterior sugiere que Helmholtz entendía la 'naturalidad' de los naturales en función del acto de contar, acto mismo que servía de fundamento de la aritmética y que, en última instancia, se remontaba a nuestra intuición interior.

3.5 El proyecto de Dedekind

El pensamiento de Dedekind abarca en alguna medida los enfoques de todos los matemáticos mencionados anteriormente. Sus primeros escritos recuerdan fuertemente las ideas de Ohm y tratan de temas que Euler investigó [Ferreirós 2007, 13]. También, como alumno de Gauss y de Dirichlet, Dedekind se interesó por el concepto de número y por la teoría de números, y al igual que Bolzano, Helmholtz y Kronecker, también dedicó una obra para mostrar sus perspectivas en estos temas.

El título de la obra en la que Dedekind trató el tema de los fundamentos de la aritmética fue *Qué son y para qué sirven los números*, publicada en 1888. Este libro no sólo resultó ser una fuerte influencia para los trabajos posteriores sobre fundamentos,[1] sino que además, sentó las bases para la presentación de investigaciones matemáticas futuras:

> Kronecker y Helmholtz comparten el punto de partida 'ingenuo' con Dedekind, pero es sólo Dedekind quien construye un marco conceptual en el que puede expresar claramente el análisis (ingenuo), llevar a cabo investigaciones matemáticas útiles y proporcionar las herramientas para un tratamiento sistemático de la teoría de números [Sieg & Schlimm 2005, 43].

Como los matemáticos anteriores, Dedekind también menciona a "los llamados números naturales" [Dedekind 1888, 35] en su trabajo –aunque no por primera vez, pues algunos años antes había usado ya la expresión en su correspondencia con Cantor (en 1873) [Dedekind 1873, 848] y en un escrito publicado en 1877 [Dedekind 1877, 779]. Sin embargo, en *Qué son y para qué sirven los números* su postura sobre el papel de los naturales –y su naturalidad– se visualiza de manera más clara.

En el prefacio de su trabajo, Dedekind denuncia el trato poco riguroso que había encontrado en algunas obras de su época, entre ellas las de Helmholtz y Kronecker. Para él,

---

[1] Por ejemplo, en los de Peano y de Zermelo. Ewald 1996, p. 787.

> En la ciencia, nada capaz de ser probado debe aceptarse sin pruebas. A pesar de que esta petición parece tan razonable, no puedo considerarla como cumplida ni siquiera en los métodos más recientes de establecer los fundamentos de la ciencia más simple; a saber, aquella parte de la lógica que se ocupa de la teoría de números [Dedekind 1888, 31].

Estas palabras de Dedekind son un ejemplo más del rumbo que las matemáticas tomaron en esa época iniciado por el trabajo de Euler, Ohm, Dirichlet y Gauss. Y, también como otros ya antes habían intentado, Dedekind se interesó por formalizar las bases que servían como soporte de las matemáticas.

Desde el enfoque de Dedekind, como desde el de Kronecker, el álgebra y el análisis eran parte de la aritmética y su objeto de estudio era el número. También como Gauss, Dedekind tomó la noción de relación como básica para la aritmética e impulsaba la introducción de nuevos conceptos para progresar en las matemáticas y en la ciencia en general. En particular, el desarrollo de la ciencia de los números se basaba en la extensión del concepto de número hacia la creación del cero y, posteriormente, de los negativos, los racionales, los irracionales y los complejos –siempre a través de una reducción a conceptos anteriores que, en el último punto de su recorrido, terminaba en los naturales.

En cuanto a su noción sobre los números, Dedekind pensaba que no dependían de una intuición espacial o temporal alguna –a diferencia de Helmholtz. De hecho, "los números son libres creaciones de la mente humana; sirven como un medio para aprehender más fácilmente y más claramente las diferencias de las cosas" [Dedekind 1888, 31]. Y la aritmética, de manera similar a Kronecker, resultaba ser una consecuencia necesaria "o al menos natural" [Jourdain 1916, 424] del acto de contar.

La diferencia del pensamiento de Dedekind con otros es que el acto de contar resultaba ser una consecuencia inmediata de las leyes del pensamiento, pues partía de la habilidad inherente a la mente humana de establecer relaciones entre las cosas:

> Si escudriñamos de cerca lo que se hace al contar un agregado o un número de cosas, somos llevados a considerar la capacidad de la mente para relacionar cosas con cosas, para hacer que una cosa corresponda con una cosa, o para representar una cosa por una cosa, una capacidad sin la cual ningún pensamiento es posible. Sobre esta base única y, por lo tanto, absolutamente indispensable […] debe, a mi juicio, establecerse toda la ciencia de los números [Dedekind 1888, 32].

La aritmética, entonces, era para Dedekind una implicación necesaria "o al menos natural" [Jourdain 1916, 424], del acto de contar. Este acto, a su vez, consistía en la sucesiva y libre creación mental de los números a partir de la capacidad humana de establecer relaciones y con la simple finalidad de servir como recurso para aprehender la diferencia entre las cosas de manera más clara y sencilla. Pero más importante aún, es que precisamente debido a la espontaneidad con la que la mente crea a los números en su ejercicio del pensamiento mismo, los números con los que establecemos relaciones de conteo (los enteros positivos), resultaban siendo algo *natural*.

Conclusiones

Como pudo verse en el desarrollo de este trabajo, durante el siglo XIX las matemáticas dieron un giro sin precedentes. La geometría fue reemplazada por el análisis y la teoría de números como las partes más importantes de las matemáticas y como las únicas capaces de proporcionar conocimiento *a priori*. La idea extendida de la época era que la teoría de números era la expresión más pura de las leyes que gobiernan nuestros pensamientos [Jahnke y Otte 1981, 30]. De acuerdo con Crelle [1845, V] "esta teoría de números […] ha alcanzado su presente amplitud sólo recientemente; particularmente, debido a los esfuerzos de Euler, Lagrange, Gauss, Legendre; después a los de Jacobi, Dirichlet, etc.".

La aparición de ejemplos anómalos en la teoría de funciones y el desarrollo de las en ese entonces contraintuitivas geometrías no euclidianas, llevaron a varios matemáticos a cuestionar las definiciones de los conceptos fundamentales. Como resultado, varios matemáticos se dieron a la tarea de justificar nociones básicas y de redefinir conceptos de una manera más rigurosa. En particular, la noción de magnitud fue reemplazada por un concepto más abstracto que se convertiría en el fundamento del conocimiento matemático: el concepto de número. Sólo a través de un estudio profundo de este concepto podría garantizarse la solidez en los fundamentos que la geometría no había podido mantener.

La cambiante actitud frente a la naturaleza y posición de los números también vino con una discusión sobre las pruebas matemáticas. Durante esta época, las pruebas adquirieron un rigor que antes no tenían. Las nuevas reglas demandaban una claridad conceptual que fuera acorde con el nuevo enfoque abstracto que estaba apareciendo en las matemáticas de la época. Los razonamientos lógicos quedaban privilegiados ante meros cálculos a favor de mostrar las verdades matemáticas. Dirichlet fue, quizá, el mayor exponente de este nuevo rigor matemático.

El inicio de esta amplia transición, conocida como aritmetización de las matemáticas o como giro al enfoque conceptual, puede ubicarse en los trabajos de Gauss, Weierstrass y Kronecker. Sin embargo, como ya se ha podido ver en este trabajo, hubo varios matemáticos involucrados con el desarrollo de unas matemáticas más abstractas y más formales.

Además de la discusión sobre los fundamentos y el formalismo, el enfoque conceptual también trajo consigo una nueva mirada hacia los números naturales. Para Gauss los naturales eran objetos cuya naturaleza es *a priori*; Ohm los consideró como objetos de nuestra intuición interna; Weierstrass los utilizó como objetos poco problemáticos con los que podía extender el dominio de los números; para Kronecker los naturales representaron un fundamento inamovible, incluso se le ha atribuido la frase “Dios creó a los números, el resto es trabajo del hombre” [Hilbert 1897, 1120]; y finalmente, Dedekind los ubicó como parte de la libre e inmanente actividad de la mente humana.

Aunque hay diferencias en cada una de las posturas de los matemáticos aquí estudiados, en general, es posible decir que durante este periodo de transición, los números naturales adquirieron un carácter que antes no habían tenido. Los naturales se consideraron como algo inherente a nuestro pensamiento y, de ahí, el nacimiento de su naturalidad.

A su vez, como se vio en este trabajo, es importante notar que para entender realmente por qué la naturaleza de los números se volvió un tema tan relevante para los matemáticos del siglo XIX hay que mirar un contexto académico más amplio. La búsqueda de unas matemáticas más formales, más abstractas, no hubiera sido tan intensa de no haber sido por el trasfondo filosófico que reinaba en las universidades y por el hecho de que las matemáticas no eran aún una disciplina profesionalizada. Precisamente la influencia que distintas disciplinas tuvieron en la gente que se dedicaba a la ciencia y el popular neohumanismo propagado por las universidades alemanas, favorecieron una idea exacerbada de que el conocimiento matemático debía ser buscado por sí mismo y no por sus aplicaciones. Con ello, el estudio de la geometría quedaba justificadamente relegado ante el de la aritmética (considerada en un sentido amplio) y así, los números enteros positivos llegarían a ser aceptados como objetos naturales y primordiales de las matemáticas.

A través de las ideas anteriores, este trabajo buscó aportar una posible explicación para el surgimiento y la adopción del término 'número natural' y así contribuir a la historia de las matemáticas con un nuevo planteamiento. Sin embargo, es importante mencionar que la propuesta aquí presentada no es definitiva y que aún hay algunos caminos que necesitan recorrerse para poder sustentarla de una manera más exhaustiva.

Por una parte, los trabajos revisados aquí provienen exclusivamente de Europa del siglo XIX debido a los grandes cambios que sucedieron ahí en torno a las matemáticas y a la peculiar visión que se adquirió en ese contexto de la noción de número –en particular de la de número entero positivo. Sin embargo, un estudio de otros momentos históricos y de otros contextos culturales –por ejemplo el caso de las matemáticas árabes y su influencia en las matemáticas europeas– podría brindar una nueva luz a la pregunta sobre el surgimiento del término 'número natural'.

Por otro lado, el papel que Euler desempeñó en el giro a las matemáticas puras no ha sido desarrollado a profundidad por la historiografía de las matemáticas. Quizás un análisis más amplio de su trabajo y de sus influencias académicas podría proporcionar algún indicio de por qué en su época los enteros positivos parecían ya ser conocidos como 'números naturales' y de quiénes pudo haber retomado él este término.

Finalmente, también podría hacerse una revisión más profunda del trabajo de Nicómaco de Gerasa, quien parece ser el primero en escribir sobre los enteros positivos como naturales. La influencia sobre su pensamiento en torno a estos números podría ser una clave importante para entender por qué el término en cuestión fue relegado a tan sólo unas cuantas publicaciones en los siglos posteriores y retomado hasta el siglo XIX, cuando la noción de número se analizaría bajo una nueva lupa.

Bibliografía

Aspray W. y P. Kitcher. 1988. *History and Philosophy of Modern Mathematics.* Minneapolis: University of Minnesota Press.

Bekemeier, B. 1987. *Martin Ohm (1792-1872): Universitäts und Schulmathematik in der neuhumanistischen Bildungsreform*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Bolzano, B. 1810. "Contributions to a better-grounded presentation of mathematics". En Ewald (ed.) Vol. I: 174-224.

__________. 1851. "From paradoxes of the infinite". En Ewald (ed.): 249-292.

Boniface, J. 2007. "The Concept of Number from Gauss to Kronecker". En Goldstein C., N. Schappacher y J. Schwermer (eds.): 315-342.

Cahan, David (ed.). 1993. *Hermann von Helmholtz and the Foundations of Nineteenth-Century Science*. Los Angeles: University of California Press.

Crelle, A.L. 1845. Encyklopädische Darstellung der Theorie der Zahlem, Bd. 1. Berlin.

Dedekind, R. 1873. "The early correspondence between Cantor and Dedekind". En Ewald (ed.) Vol. II: 843-877.

__________. 1888. "Was sind und was sollen die Zahlen?". En Ewald (ed.) Vol. II: 787-833.

Euler, L. 1770. *Elements of Algebra*. Transl. by John Hewlett. 1984. New York: Springer.

Ewald, W. (ed.). 1996. *From Kant to Hilbert. A sourcebook in the foundations of mathematics. Volume I*. New York: Oxford University.

__________. 1996. *From Kant to Hilbert. A sourcebook in the foundations of mathematics. Volume II*. New York: Oxford University.

Ferreirós, J. 2003. "Del Neohumanismo al Organicismo: Gauss, Cantor y la Matemática Pura". En: Montesinos, Ordóñez y Toledo (eds.): 100-120.

__________. 2007*a*. *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Alemania: Birkhaüser Verlag

__________. 2007*b*. “ ‘Ο Θεὸς ’*Αριθμητι΄ζει*: The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss”. En Goldstein, Shappacher y Schwermer (eds.): 235-268.

Gauss, C.F. 1929. “On the metaphysics of mathematics”. En: Ewald (ed.) Vol. I: 293-295.

__________.1830. “Gauss on non-Euclidean geometry”. En: Ewald (ed.) Vol. I: 296-305.

__________. 1831. “Notice on the theory of biquadratic residues”. En Ewald (ed.) Vol. I: 306-313.

__________. 1870. Trad. A.A. Clarke. 1966. *Disquisitiones Arithmeticae*. New Haven: Yale University Press.

Goldstein C., N. Schappacher y J. Schwermer (eds.). 2007. *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss’s Disquisitiones Arithmeticae*. New York: Springer-Verlag.

Goldstein C. y N. Schappacher. 2007. “A book in search of a discipline”. En: Goldstein C., N. Schappacher y J. Schwermer (eds.): 3-66.

Gray, J. 2000. *The Hilbert Challenge*. New York: Oxford University Press.

Heeffer, A. 2005. “The origin of the problems in Euler’s algebra”. Joint BeNeLuxFr Conference in Mathematics, 20-22 July, 2005.

Hilbert, David. 1897. Trad. I. Adamson. 1998. *The Theory of Algebraic Number Fields.* New York: Springer.

__________. 1922. “The New Groundings of Mathematics”. En Ewald (ed.) Vol. II: 1117-1134.

Jahnke, H.N. y M. Otte. 1981. “Origins of the program of “arithmetization of mathematics””. En Mehrtens, H., H. Bos & I. Schneider (eds.): 21-49.

Jahnke, H.N. (ed.). 2003. *A History of Analysis*. USA: American Mathematical Society.

Jourdain, P.E.B. 1916. “Richard Dedekind (1833-1916)” *The Monist* **26**$_{3}$: 415-427.

Klein, Felix. 1895. “The Arithmetizing of Mathematics”. En Ewald (ed.) Vol. II: 965-971.

Kronecker, L. 1887. “On The Concept of Number”. En Ewald (ed.) Vol. II: 947-955.

McClelland, C. 1980. *State, Society, and University in Germany. 1700-1914.* New York: Cambridge University Press.

Mehrtens, H., H. Bos & I. Schneider (eds.). 1981. *Social History of 19th century mathematics*. New York: Springer Science+Business Media.

Montesinos, J., J. Ordóñez y S. Toledo (eds.). 2003. *Ciencia y Romanticismo*. Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

O'Connor, J. J. y E. F. Robertson. 2010. "Martin Ohm", contenido en: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Ohm_Martin.html

Ohm, M. 1816. *Elementar-Zahlenlehre zum Gebrauch für Schulen undSelbstlernende*. Erlangen: Palm u. Enke.

Petri, B. y N. Schappacher. 2007. "On Arithmetization". En Goldstein C., N. Schappacher y J. Schwermer (eds.): 343-374.

Russ, Steve. 2004. *The mathematical Works of Bernard Bolzano*. New York: Oxford University Press.

Schubring, G. 2006. *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. USA: Springer Science & Business Media.

Sieg, W. y D. Schlimm. 2004. *Dedekind's Analysis of Number: Systems and axioms*. Pittsburgh: Carnegie Mellon.

Stein, H. 1988. "Logos, Logic, and Logistiké: Some Philosophical Remarks on Nineteenth-Century Transformation of Mathematics". En Aspray y Kitcher: 238-259.

Studtmann, P. 2013. "Aristotle's Categories", contenido en: http://plato.stanford.edu/entries/aristotle-categories/

von Helmholtz, H. "Numbering and measuring from an epistemological viewpoint". En Ewald (ed.) Vol. II: 727-752.