



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA MECÁNICA - MECATRÓNICA

GENERACIÓN DE OSCILACIONES CON ALGORITMO
SUB-OPTIMAL

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
DIEGO GUTIÉRREZ ORIBIO

TUTOR PRINCIPAL:
DR. LEONID FRIDMAN, UNAM
FACULTAD DE INGENIERÍA
Ciudad Universitaria, Ciudad de México, Julio del 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Víctor Javier González Villela

Secretario: Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl

Vocal: Dr. Leonid Fridman

1er Suplente: Dr. Rafael Iriarte Vivar Balderrama

2do Suplente: Dr. José Antonio Rosales Martínez

Lugar donde se realizó la tesis:
FACULTAD DE INGENIERÍA, CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO

TUTOR DE TESIS:
DR. LEONID FRIDMAN

FIRMA

Para Claudia, por todo su apoyo en este tiempo y para Julieta, para que vea mis logros como ejemplo, los siga y los supere...

Agradecimientos

Agradezco a todo el equipo del laboratorio de Modos Deslizantes de la UNAM, en especial a Rafa y al Doc que me apoyaron en la realización de éste trabajo.

También agradezco a Héctor y a Toño que aunque ya no están en el equipo, aún así me guiaron y me siguieron brindando su amistad a lo largo de la maestría.

Por último, le doy gracias a Clau y a Julieta, por su apoyo y comprensión en los momentos decisivos de este viaje y por que son mi motor a seguir creciendo juntos.

Ciudad de México, Junio del 2016.

Diego Gutiérrez Oribio

Resumen

En este trabajo de tesis se estudia el problema de generación de oscilaciones en sistemas lineales y en ciertas clases de sistemas no lineales (linealizables). Por medio del algoritmo Sub-Optimal Generalizado (modo deslizante de segundo orden), su correspondiente función descriptiva, y la ecuación de balance armónico; es posible generar oscilaciones con amplitud y frecuencia deseadas. El análisis correspondiente así como varios resultados de simulación y experimentación se presentan en este trabajo.

Palabras Claves. *Modos deslizantes. Algoritmo Sub-Optimal. Oscilaciones. Función descriptiva. Ecuación de balance armónico*

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Motivación | 1 |
| 1.2. Estado del arte | 3 |
| 1.3. Planteamiento del problema | 4 |
| 1.4. Objetivo general | 4 |
| 1.5. Metodología | 5 |
| 1.6. Contribución | 5 |
| 1.7. Estructura de la Tesis | 5 |
| 2. Preliminares | 7 |
| 2.1. Definiciones importantes | 7 |
| 2.2. Función descriptiva y ecuación de balance armónico | 8 |
| 2.3. Identificación de Ciclos Límite vía DF | 12 |
| 2.3.1. Método Analítico | 13 |
| 2.3.2. Método Gráfico | 14 |
| 2.3.3. Estabilidad de Ciclos Límite | 15 |
| 2.4. Algoritmo Sub-Optimal Generalizado | 17 |
| 3. Generación de oscilaciones | 19 |
| 3.1. Sintonización del Sub-Optimal Generalizado | 19 |
| 3.1.1. Solución analítica | 21 |
| 3.2. Algoritmo para el uso de las ecuaciones de sintonización | 22 |

| | |
|---|-----------|
| 4. Casos de estudio | 25 |
| 4.1. Carro-Péndulo | 25 |
| 4.1.1. Linealización | 26 |
| 4.1.2. Estabilidad de la oscilación | 28 |
| 4.2. Circuito RC | 30 |
| 4.2.1. Estabilidad de la oscilación | 31 |
| 4.3. Simulaciones | 32 |
| 4.3.1. Carro-Péndulo | 32 |
| 4.3.2. Circuito RC | 40 |
| 5. Experimentación | 51 |
| 5.1. Análisis de resultados | 53 |
| 6. Conclusiones | 57 |
| Apéndices | 59 |
| A. Descripción del Carro-Péndulo real | 61 |
| B. Funciones descriptivas importantes | 65 |
| B.1. Función descriptiva de un relevador | 65 |
| B.2. Función descriptiva de un relevador con histéresis | 66 |
| B.3. Función descriptiva del algoritmo Sub-Optimal Generalizado | 67 |
| Bibliografía | 69 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Las oscilaciones juegan un papel importante en muchas áreas de la vida y la ciencia. Una gran cantidad de ejemplos se pueden encontrar en diversas áreas: telecomunicaciones (sistemas de radio frecuencia), electrónica (osciladores electrónicos), mecánica (motores de combustión interna), astronomía (movimiento planetario) y varios mas (ver Figura 1.1). La mayoría de estos fenómenos oscilatorios se dan de forma natural; sin embargo, en algunos casos se desea generar oscilaciones con distintos métodos, por lo que es necesario su desarrollo.

Entre los métodos de generación de oscilaciones en sistemas dinámicos podemos ubicar aquellos que emplean algoritmos por modos deslizantes (MD); por ejemplo, el MD convencional y el *Two Relay Controller* (TRC). De entre ellos, el algoritmo Sub-Optimal generalizado presenta los siguientes beneficios:

1. Convergencia en tiempo finito.
2. Robustez frente a incertidumbres y perturbaciones.
3. Menos efecto de chattering¹ que los controladores por MD convencionales.
4. Cuenta con función descriptiva, por lo que se puede usar el análisis de ecuación de balance armónico.
5. Funciona con un solo relevador, por lo que su aplicación es más sencilla y menos costosa que los otros controladores por MD de segundo orden.

¹Efecto de *zig-zag* de amplitud baja y frecuencia que tiende a infinito, generado por la función *signo* debido a la naturaleza del tiempo discreto de las simulaciones computacionales.

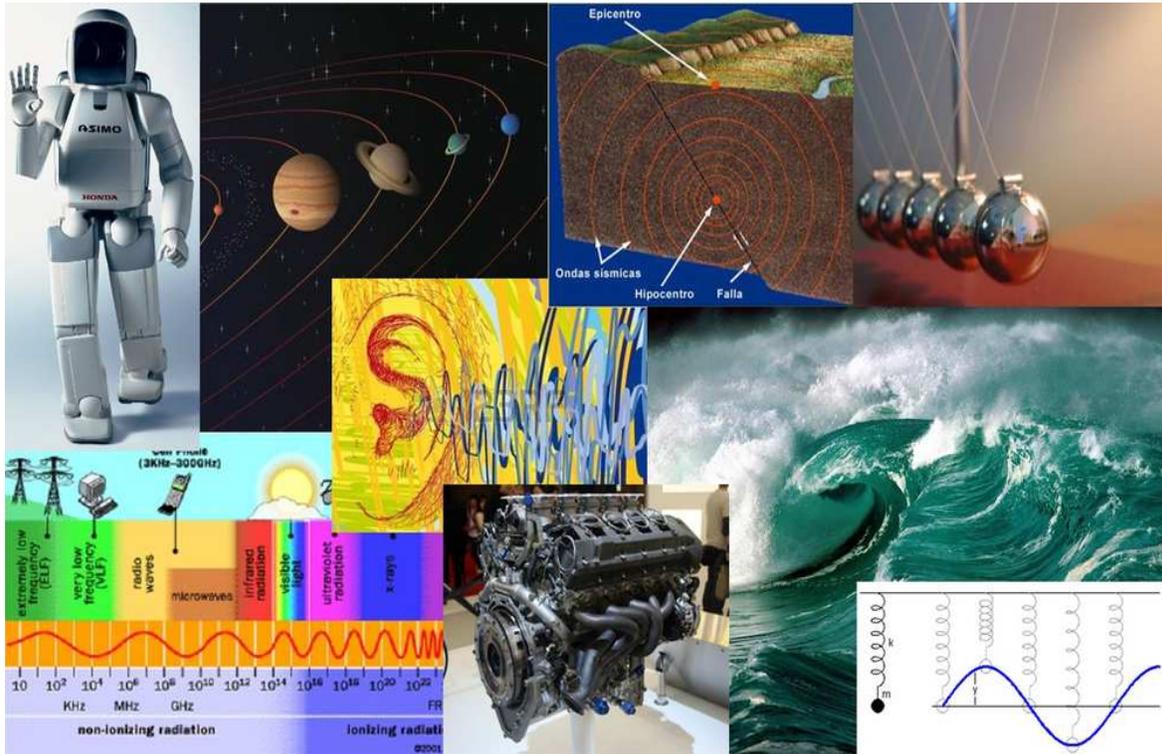


Figura 1.1: Generación de oscilaciones naturales y artificiales

Por otro lado, se puede llegar a pensar que el problema de generación de oscilaciones se puede resolver con un seguimiento de trayectoria, ya que se pueden reconstruir diferentes formas de señales² usando por ejemplo un controlador por MD de orden σ^3 , o incluso usando la ecuación de Van der Pol junto con un controlador por MD de orden $\sigma - 2$. Sin embargo, el problema principal de seguimiento de trayectoria por medio de controladores por MD es que los actuadores utilizan más energía para realizar esta tarea; lo que no sucede en el caso de la generación de oscilaciones, ya que se aprovechan las características del sistema para hacerlo *auto-oscilar*, por lo que se utiliza menos energía en los actuadores.

Dadas estas propiedades resulta interesante e intuitivo generar oscilaciones haciendo uso de dicho algoritmo.

²No solo señales senoidales como es el caso de la generación de oscilaciones.

³ σ es el grado relativo del sistema.

1.2. Estado del arte

La generación de oscilaciones en sistemas físicos ha sido importante en muchos trabajos. En [26] se realiza un trabajo de investigación del comportamiento del ciclo límite en diferentes campos de la ingeniería a lo largo del tiempo. Se hace una estabilización orbital de sistemas subactuados con aplicación en robots bípedos en [14], [25] y [37], y con robots gimnastas y convertidores eléctricos en [2] y [35] respectivamente. Se realizan auto oscilaciones usando diferentes métodos, como usar seguimiento de trayectoria, enfoque de restricciones virtuales, ecuación de Van der Pol y generación de oscilaciones con función descriptiva (DF de sus siglas en inglés), en sistemas biológicos en [10] y [16], en procesos químicos [23] y [46], en sistemas nucleares en [29] y [31], y por último, en inversores en electrónica de potencia en [13] y [33]. En [36] y [39] se hace un *swing-up* en un péndulo invertido con un generador armónico asintótico usando la ecuación modificada de Van der Pol.

Debido a la importancia de la generación de oscilaciones, muchos métodos han sido propuestos; sin embargo, el más usado es el de la DF descrito en [3] y utilizado en [17] y [45]. En [24], [34] y [38] se utiliza este método para obtener condiciones suficientes que garanticen la existencia de soluciones periódicas en sistemas de control no lineales sujetos a funciones periódicas.

En este contexto, uno de los métodos más sencillos es usando un relevador (controladores discontinuos), en donde se pueden presentar oscilaciones y se estudian en [4], [20] y [42]. Un paso más adelante se encuentran los modos deslizantes, desde los trabajos con controladores clásicos en [7], [18] y [44], hasta llegar a los algoritmos de modos deslizantes de alto orden en [15], donde se han desarrollado diversos estudios con lo referente a la generación de oscilaciones. En [19] y [43] se hace un análisis de la magnitud de las oscilaciones basado en sistemas con relevadores, en [8] se hace un análisis de oscilaciones en el dominio de tiempo, mientras que en [40] y [47] se utiliza el método de DF para estimar la frecuencia y amplitud de los movimientos periódicos en sistemas con modos deslizantes de primer orden.

De los trabajos más cercanos a esta tesis, se encuentran [1], donde hacen generación de oscilaciones por medio de la sintonización del TRC y su robustificación, y en [9] se hace un estudio de la función descriptiva del algoritmo Sub-Optimal para generar oscilaciones, pero sin llegar a una sintonización explícita de sus ganancias como se hace en esta tesis.

1.3. Planteamiento del problema

Considere el siguiente sistema en la forma de espacio de estados⁴:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada, $y \in \mathfrak{R}$ la salida, mientras que A , B y C son matrices con dimensiones correspondientes.

La entrada u toma la forma del algoritmo Sub-Optimal Generalizado⁵:

$$\begin{aligned}u(t) &= -\alpha(t)U_M \text{sign}(y(t) - \beta y_M(t)), \\ \alpha(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y_M(t)(y(t) - \beta y_M(t)) \geq 0 \\ \alpha^* & \text{si } y_M(t)(y(t) - \beta y_M(t)) < 0 \end{cases},\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde U_M , α^* y β son los parámetros de sintonización del controlador.

Normalmente este algoritmo trabaja como un estabilizador, pero en otros casos, se puede usar como generador de oscilaciones. Cada uno de estos comportamientos depende de la selección de los parámetros de sintonización U_M , α^* y β .

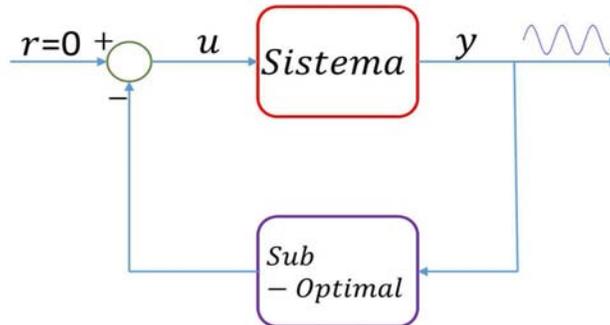


Figura 1.2: Planteamiento del problema

1.4. Objetivo general

El objetivo de esta tesis es proponer una metodología para generar oscilaciones en el sistema (1.1), por medio del algoritmo Sub-Optimal y su correspondiente selección de parámetros para cierta amplitud A_m y frecuencia ω deseadas.

⁴Este sistema puede provenir de la linealización de un sistema no lineal.

⁵El algoritmo Sub-Optimal Generalizado pertenece a los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden y su dinámica será descrita en el Capítulo 2.

1.5. Metodología

1. Obtener un sistema de ecuaciones para la sintonización del algoritmo Sub-Optimal por medio de un análisis de la ecuación de balance armónico y la función descriptiva del controlador.
2. Establecer una solución analítica para las ecuaciones de sintonización.
3. Probar teóricamente y en simulaciones la validez de la solución analítica propuesta por medio de dos casos de estudio: el sistema Carro-Péndulo y un circuito RC.
4. Probar experimentalmente la validez de la solución propuesta en el sistema Carro-Péndulo.

1.6. Contribución

La contribución de esta tesis se engloba en varias partes:

1. El sistema de ecuaciones de sintonización de los parámetros del Sub-Optimal y su solución analítica.
2. El algoritmo para el uso de dicha solución para generar oscilaciones de amplitud y frecuencia deseadas.
3. Validación de los resultados por medio de simulaciones y experimentos en dos casos de estudio.

1.7. Estructura de la Tesis

En el Capítulo 2, se darán los conceptos principales utilizados en la elaboración de esta tesis. En el Capítulo 3, se obtendrá la forma de sintonización del controlador Sub-Optimal y el algoritmo para obtener oscilaciones con amplitud y frecuencia deseadas. En el Capítulo 4 se presentarán los sistemas a utilizar y se harán varias simulaciones en MatLab de distintas pruebas a realizar en la generación de oscilaciones, mientras que en el Capítulo 5 se tratarán de llevar las mismas simulaciones del Carro-Péndulo al sistema real (experimentos). Por último, en el Capítulo 6 se darán las conclusiones de la tesis.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se describirán los conceptos usados en la obtención de la sintonización del Sub-Optimal, tales como DF, ecuación de balance armónico y criterio de estabilidad de Loeb¹, así como mostrar algunas definiciones utilizadas a lo largo de este trabajo.

2.1. Definiciones importantes

Considere el siguiente sistema en su representación entrada-salida, i.e. función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^m + \dots + a_1s + a_0}{s^n + \dots + b_1s + b_0}. \quad (2.1)$$

Definición 1 [12]. La función de transferencia $G(s)$ se dice que es una función de transferencia **racional**. Además $G(s)$ se puede clasificar como:

- **Propia** si $n \geq m$, lo que implica que $G(s) \rightarrow 0$ o a una constante diferente de 0 cuando $s \rightarrow \infty$.
- **Estrictamente propia** si $n > m$, lo que implica que $G(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.
- **Bipropia** si $n = m$, lo que implica que $G(s) \rightarrow a$ una constante diferente de 0 cuando $s \rightarrow \infty$.
- **Impropia** si $n < m$, lo que implica que $G(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow \infty$.

Definición 2 [28]. Una función $y(t) = \psi(t, u(t))$ se dice **sin memoria** cuando es determinada para cada instante de tiempo t exclusivamente por la entrada $u(t)$ en el mismo instante de tiempo t , i.e. no depende de la historia de la entrada.

¹Más detalles en [20] y [28].

Considere un sistema dinámico descrito mediante dos conjuntos de variables:

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (2.2)$$

$$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n), \quad (2.3)$$

donde q son posiciones, \dot{q} son velocidades y n son los grados de libertad del sistema.

Se tiene el *Lagrangiano* del sistema como

$$L = T - V,$$

donde T es la energía cinética total y V es la energía potencial, y se tiene el *Hamiltoniano* del sistema como

$$H(q, p, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L,$$

donde p son los momentos asociadas a las variables \dot{q} .

Definición 3 [41]. Se dice que el sistema (2.2)-(2.3) es **conservativo** cuando ni L ni H pueden depender explícitamente del tiempo t , es decir

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

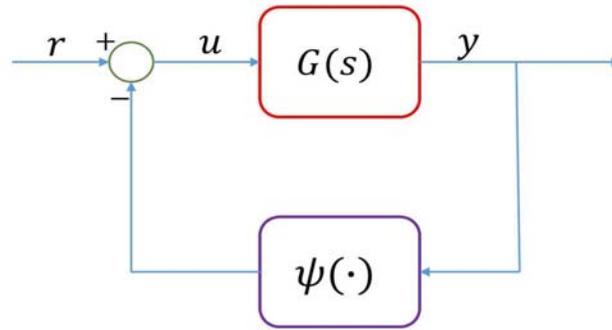
esto implica que existe una cantidad conservada sobre las trayectorias del sistema, la energía E :

$$H(q, p) = E.$$

Si no ocurre esto, se dice que el sistema es **no conservativo**.

2.2. Función descriptiva y ecuación de balance armónico

Se considera el diagrama de bloques de la Figura 2.1, donde $G(s)$ es la función de transferencia racional y estrictamente propia del sistema 1.1, y ψ es una no linealidad invariante en el tiempo y sin memoria. Se asume que la entrada externa es $r = 0$ y se estudia la existencia de soluciones periódicas con el *método de balance armónico*[28]. La idea de este método es representar una solución periódica por una serie de Fourier y buscar una frecuencia ω y un conjunto de coeficientes de Fourier que satisfagan el sistema de ecuaciones resultante.


Figura 2.1: Retroalimentación

Supóngase que la salida $y(t)$ es periódica y sea

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t}, \quad (2.4)$$

su serie de Fourier, donde a_k son coeficientes complejos, $a_k = \bar{a}_{-k}$ y $j = \sqrt{-1}$. Ya que $\psi(\cdot)$ es invariante en el tiempo, $\psi(y(t))$ es periódica con la misma frecuencia ω y puede ser escrita como

$$\psi(y(t)) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}, \quad (2.5)$$

donde cada coeficiente complejo c_k es función de todas las a_i 's. Para que $y(t)$ sea una solución del sistema retroalimentado en la Figura 2.1, debe satisfacer la ecuación diferencial

$$d(p)y(t) + n(p)\psi(y(t)) = 0, \quad (2.6)$$

donde p es el operador diferencial $p(\cdot) = d(\cdot)/dt$ y, $n(s)$ y $d(s)$ son el numerador y denominador del polinomio de $G(s)$, respectivamente. Ya que

$$pe^{jk\omega t} = \frac{d}{dt}e^{jk\omega t} = jk\omega e^{jk\omega t}, \quad (2.7)$$

tenemos

$$d(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(jk\omega) a_k e^{jk\omega t} \quad (2.8)$$

y

$$n(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n(jk\omega) c_k e^{jk\omega t}. \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.8) y (2.9) en (2.6) se tiene

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [d(jk\omega)a_k + n(jk\omega)c_k] e^{jk\omega t} = 0. \quad (2.10)$$

Utilizando la ortogonalidad de las funciones $e^{jk\omega t}$ para diferentes valores de k , se encuentra que los coeficientes de Fourier deben satisfacer

$$G(jk\omega)c_k + a_k = 0, \quad (2.11)$$

para todos los enteros k . Debido a que $G(jk\omega) = \bar{G}(-jk\omega)$, $a_k = \bar{a}_{-k}$ y $c_k = \bar{c}_{-k}$, se necesita sólo $k \geq 0$ en (2.11). Ya que la ecuación (2.11) es de dimensión infinita, se necesita encontrar una aproximación de dimensión finita para resolverla.

Como la función de transferencia $G(s)$ es estrictamente propia, es razonable asumir que existe un entero $q > 0$ tal que para todo $k > q$, $|G(jk\omega)|$ es suficientemente pequeña para reemplazar $G(jk\omega)$ (y consecuentemente a_k) por 0. Esta aproximación reduce (2.11) a un problema de dimensión finita

$$G(jk\omega)\hat{c}_k + \hat{a}_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, q, \quad (2.12)$$

donde los coeficientes de Fourier están escritos con un sombrero para enfatizar que una solución de (2.12) es sólo una aproximación de la solución de (2.11).

Para resolver (2.12) lo más simple es escoger $q = 1$, lo que quiere decir que $G(s)$ tiene que tener características de filtro pasa-bajas para que permita aproximar $G(jk\omega)$ a 0 para todo $k > 1$. Aún cuando se conozca $G(s)$, no se puede juzgar cuando esto es una buena aproximación, ya que no se sabe la frecuencia de oscilación ω ; sin embargo, el método clásico de la función descriptiva realiza esta aproximación y coloca $\hat{a}_k = 0$ para $k > 1$ para reducir el problema de resolver dos ecuaciones

$$G(0)\hat{c}_0(\hat{a}_0, \hat{a}_1) + \hat{a}_0 = 0, \quad (2.13)$$

$$G(j\omega)\hat{c}_1(\hat{a}_0, \hat{a}_1) + \hat{a}_1 = 0. \quad (2.14)$$

Hay que notar que (2.13) es una ecuación real y (2.14) es una ecuación compleja con dos incógnitas reales, ω y \hat{a}_0 , y una incógnita compleja \hat{a}_1 . Cuando son expresadas en cantidades reales definen tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Esto es esperado debido a que el origen del tiempo es arbitrario para un sistema autónomo, entonces si (\hat{a}_0, \hat{a}_1) satisface la ecuación, entonces $(\hat{a}_0, \hat{a}_1 e^{j\theta})$ dará otra solución para el número real arbitrario θ . Para cuidarse de esta no unicidad se toma la primer armónica de $y(t)$ para hacer $A_m \sin \omega t$, con $A_m \geq 0$; con esto se escoge el origen del tiempo tal que la fase de la primer armónica es cero.

Usando

$$A_m \sin \omega t = \frac{A_m}{2j} [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] \Rightarrow \hat{a}_1 = \frac{A_m}{2j}, \quad (2.15)$$

se reescribe (2.13) y (2.14) como

$$G(0)\hat{c}_0(\hat{a}_0, \frac{A_m}{2j}) + \hat{a}_0 = 0, \quad (2.16)$$

$$G(j\omega)\hat{c}_1(\hat{a}_0, \frac{A_m}{2j}) + \frac{A_m}{2j} = 0. \quad (2.17)$$

Ya que (2.16) no depende de ω , puede resolverse para \hat{a}_0 como una función de A_m . Hay que notar que si $\psi(\cdot)$ es una función impar ($\psi(-y) = -\psi(y)$), entonces $\hat{a}_0 = \hat{c}_0 = 0$ es una solución de (2.16) ya que

$$\hat{c}_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \psi(\hat{a}_0 + A_m \sin \omega t) dt. \quad (2.18)$$

Por conveniencia, se restringe nuestra atención a no linealidades con simetría impar y se toma $\hat{a}_0 = \hat{c}_0 = 0$. Entonces se puede reescribir (2.17) como

$$G(j\omega)\hat{c}_1(0, \frac{A_m}{2j}) + \frac{A_m}{2j} = 0. \quad (2.19)$$

El coeficiente $\hat{c}_1(0, A_m/2j)$ es el coeficiente complejo de Fourier de la primer armónica a la salida de la no linealidad cuando su entrada es la señal sinusoidal $A_m \sin \omega t$. Está dado por

$$\begin{aligned} \hat{c}_1(0, \frac{A_m}{2j}) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \psi(A_m \sin \omega t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\psi(A_m \sin \omega t) \cos \omega t - j\psi(A_m \sin \omega t) \sin \omega t] dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

El primer término bajo el signo de la integral es una función impar, mientras que el segundo término es una función par. Por lo tanto, la integración del primer término sobre un ciclo completo es cero y la integral se simplifica a

$$\hat{c}_1(0, \frac{A_m}{2j}) = -j \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \psi(A_m \sin \omega t) \sin \omega t dt. \quad (2.21)$$

Se define una función $\Psi(A_m, \omega)$ como

$$\Psi(A_m, \omega) = \frac{\hat{c}_1(0, \frac{A_m}{2j})}{\frac{A_m}{2j}} = \frac{2\omega}{\pi A_m} \int_0^{\pi/\omega} \psi(A_m \sin \omega t) \sin \omega t dt, \quad (2.22)$$

tal que (2.19) puede ser reescrita como

$$[G(j\omega)\Psi(A_m, \omega) + 1]A_m = 0. \quad (2.23)$$

Ya que no nos interesa una solución con $A_m = 0$, se puede resolver (2.23) completamente al encontrar todas las soluciones de

$$G(j\omega)\Psi(A_m, \omega) + 1 = 0. \quad (2.24)$$

La ecuación (2.24) es conocida como *Ecuación de balance armónico de primer orden* o simplemente *Ecuación de balance armónico*. La función $\Psi(A_m, \omega)$ es llamada *Función descriptiva* de la no linealidad ψ . Es obtenida al aplicar una señal sinusoidal $A_m \sin \omega t$ a la entrada de la no linealidad y calculando la relación de los coeficientes de Fourier de la primer armónica a la salida con A_m . Esto puede verse como una *ganancia equivalente* de un elemento lineal invariante en el tiempo cuya respuesta a $A_m \sin \omega t$ es $\Psi(A_m, \omega) A_m \sin \omega t$.

Este concepto de ganancia equivalente ² puede ser aplicado a no linealidades variantes en el tiempo más generales o no linealidades con memoria, como la histéresis o el backlash.

En términos generales, la DF puede ser compleja y dependiente de A_m y ω , pero las más simples son de no linealidades sin memoria, invariantes en el tiempo e impares, para la cual $\Psi(A_m, \omega)$ es real, dependiente sólo de A_m y está dada por la expresión

$$\Psi(A_m) = \frac{2}{\pi A_m} \int_0^\pi \psi(A_m \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.25)$$

la cual es obtenida de (2.25) al cambiar la variable de integración t a $\theta = \omega t$.

El método de la DF establece que si (2.24) tiene una solución (A_{m_s}, ω_s) , entonces **probablemente** existe una solución periódica del sistema con frecuencia y amplitud (a la entrada de la no linealidad) cercana a ω_s y A_{m_s} . Si por el contrario, (2.24) no tiene soluciones, entonces el sistema **probablemente** no tiene una solución periódica.

2.3. Identificación de Ciclos Límite vía DF

De lo descrito anteriormente, podemos concluir que ciertas condiciones deben cumplirse para que el método de función descriptiva sea válido y se genere una solución periódica. Dichas condiciones se enlistan a continuación:

1. El elemento no lineal es invariante en el tiempo.
2. No se generan subarmónicos por la no linealidad en respuesta a la entrada sinusoidal.
3. La función de transferencia del sistema debe ser estrictamente propia y debe tener características de filtro pasa-bajas.

Hay tres tipos de soluciones periódicas de interés:

²Algunas veces llamado *Linealización equivalente*.

1. **Oscilaciones forzadas:** Respuesta sistemática cuya frecuencia es precisamente la frecuencia de la señal forzada y cuya amplitud depende de la amplitud de la señal forzada. Estas oscilaciones se encuentran en el estudio de la respuesta en frecuencia.
2. **Oscilaciones libres conservativas:** Es un movimiento periódico que depende de la condición inicial y está asociado con los sistemas no disipativos (conservativos). Un rango continuo de amplitudes y frecuencias de oscilaciones libres conservativas puede ser posible en un sistema dado.
3. **Ciclos límite:** Es un movimiento periódico que no depende de la condición inicial y ocurre en un sistema disipativo (no conservativo). Solo un conjunto discreto de amplitudes y frecuencias de un ciclo límite puede existir en un sistema dado.

Las oscilaciones libres conservativas y los ciclos límite, son modos de comportamiento de los sistemas no forzados, lo que quiere decir que no hay entrada externa ($r = 0$ en la Figura 2.1).

El fenómeno de ciclo límite requiere de una atención especial, ya que este comportamiento podría ocurrir en cualquier sistema no lineal. Por ejemplo, se desea un ciclo límite para generar vibraciones que minimicen los efectos de fricción en un sistema mecánico. Por otro lado, un ciclo límite puede causar una falla mecánica de un sistema de control (ciclo límite destructivo) y otros efectos indeseables.

Aunque el conocimiento preciso de la forma de la señal de un ciclo límite no es usualmente obligatorio, el conocimiento de la existencia de un ciclo límite, así como su amplitud y frecuencia aproximadas, es un requisito para tener un buen desempeño en un sistema.

Para resolver la ecuación (2.24) y determinar el ciclo límite existen dos métodos: el analítico y el gráfico. Ambos métodos se describen a continuación.

2.3.1. Método Analítico

Una solución algebraica de la ecuación (2.24) puede realizarse directamente al expresar $\Psi(A_m, \omega)$ en su forma compleja

$$[Re \{G(j\omega)\} + jIm \{G(j\omega)\}][Re \{\Psi(A_m, \omega)\} + jIm \{\Psi(A_m, \omega)\}] + 1 = 0. \quad (2.26)$$

Esta relación se satisface cuando la parte real y parte imaginaria de ambos lados son iguales:

$$Re \{G(j\omega)\} Re \{\Psi(A_m, \omega)\} - Im \{G(j\omega)\} Im \{\Psi(A_m, \omega)\} = -1, \quad (2.27)$$

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} \operatorname{Re}\{\Psi(A_m, \omega)\} + \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \operatorname{Im}\{\Psi(A_m, \omega)\} = 0. \quad (2.28)$$

Estas dos ecuaciones con dos incógnitas, se resuelven simultáneamente y definen el ciclo límite.

2.3.2. Método Gráfico

Ya que algunas veces no es posible realizar el método analítico debido a la complejidad de la solución algebraica de la ecuación de balance armónico, se recurre a otro método que también sirve para la obtención de ciclos límite.

La ecuación característica de lazo cerrado para sistemas lineales con una ganancia variable K es usualmente escrita en la forma

$$KG(j\omega) = -1, \quad (2.29)$$

donde el punto fijo $(-1, 0)$ es de suma importancia para la demarcación del límite de estabilidad. Los diagramas polares, de Bode, de ganancia-fase, de Nyquist y de lugar geométrico de las raíces son mecanismos gráficos para enfocar la atención a las posiciones relativas de los elementos del sistema lineal y al punto de equilibrio.

La ecuación (2.29) puede ser escrita como

$$G(j\omega) = -\frac{1}{K}, \quad (2.30)$$

cuyo punto de estabilidad es $(-1/K, 0)$, una cantidad variable que depende de la ganancia K . Similarmente se puede ver la ecuación (2.24) como

$$G(j\omega) = -\frac{1}{\Psi(A_m, \omega)}, \quad (2.31)$$

donde $\Psi(A_m, \omega)$ reemplaza la ganancia K .

Mientras que la satisfacción de la ecuación (2.30) implica una oscilación no amortiguada de las que se presentan en sistemas de segundo orden, la satisfacción de la ecuación (2.31) indica un ciclo límite.

Al trazar $G(j\omega)$ y $-1/\Psi(A_m, \omega)$ en el mismo conjunto de coordenadas, las soluciones posibles a un ciclo límite pueden ocurrir cuando se intersectan las dos curvas (ver Figuras 2.2 y 2.3). Ya que una curva representa los elementos lineales en lazo cerrado y la otra representa la no linealidad, la variación de la amplitud A_{m_0} y la frecuencia ω_0 del ciclo límite está disponible simplemente alterando la curva apropiada.

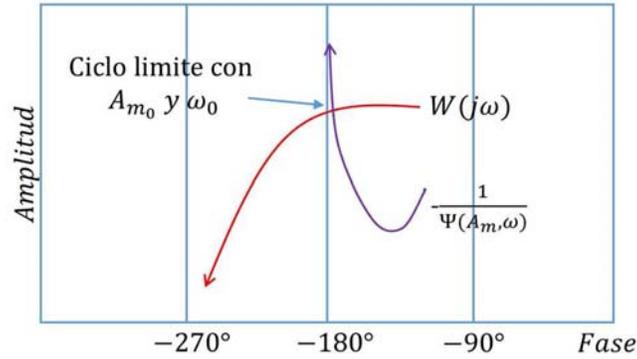


Figura 2.2: Método gráfico: Representación de diagrama de amplitud-fase

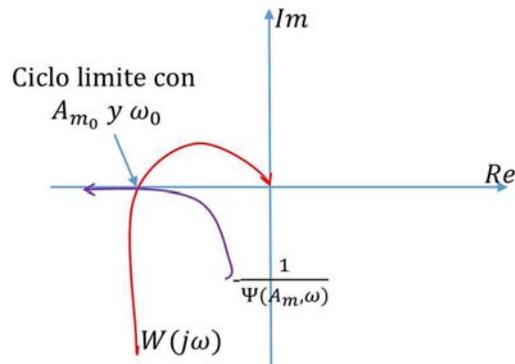


Figura 2.3: Método gráfico: Representación de diagrama de Nyquist

2.3.3. Estabilidad de Ciclos Límite

Ahora que se ha establecido cómo identificar los posibles ciclos límite de acuerdo a la teoría de DF, se tiene que conocer la estabilidad de dichos ciclos límite. Si un ciclo límite regresa a su punto de equilibrio original será llamado *estable*; mientras que si, ya sea su amplitud o frecuencia crece o decrece hasta que otro punto de equilibrio es alcanzado, será llamado *inestable*.

La estabilidad de un ciclo límite bajo pequeñas perturbaciones cerca de un punto de equilibrio es estudiado en términos de la ecuación (2.24) y se sigue el método de Loeb [32].

Se nombra A_{m_0} y ω_0 a la amplitud y frecuencia de un ciclo límite, respectivamente. Como se ha visto la siguiente igualdad se debe cumplir:

$$G(j\omega_0)\Psi(A_{m_0}, \omega_0) + 1 = 0. \quad (2.32)$$

La forma compleja explícita de esta ecuación puede ser obtenida al expresar $G(j\omega_0)$

y $\Psi(A_{m0}, \omega_0)$ en términos de sus partes reales e imaginarias, resultando en:

$$U(A_{m0}, \omega_0) + jV(A_{m0}, \omega_0) = 0, \quad (2.33)$$

donde las definiciones de U y V son evidentes. Ahora debemos introducir pequeñas perturbaciones en la amplitud, la tasa de cambio de la amplitud y la frecuencia del ciclo límite:

$$\begin{aligned} A_{m0} &\longrightarrow A_{m0} + \Delta A_m, \\ \omega_0 &\longrightarrow \omega_0 + \Delta\omega + j\Delta\sigma. \end{aligned} \quad (2.34)$$

La perturbación en la tasa de cambio de la amplitud ha sido asociada con el término de la frecuencia, esto es $\Delta\sigma = -\dot{A}_m/A_m$. Por lo tanto se tiene

$$U(A_{m0} + \Delta A_m, \omega_0 + \Delta\omega + j\Delta\sigma) + jV(A_{m0} + \Delta A_m, \omega_0 + \Delta\omega + j\Delta\sigma) = 0. \quad (2.35)$$

Por definición, ΔA_m , $\Delta\omega$ y $\Delta\sigma$ son pequeñas cantidades. La expansión en serie de Taylor de la ecuación (2.35) alrededor del punto de equilibrio, válido en términos de primer orden, se convierte en

$$\frac{\partial U}{\partial A_m} \Delta A_m + \frac{\partial U}{\partial \omega} (\Delta\omega + j\Delta\sigma) + j \frac{\partial V}{\partial A_m} \Delta A_m + j \frac{\partial V}{\partial \omega} (\Delta\omega + j\Delta\sigma) = 0. \quad (2.36)$$

Para que se satisfaga esta ecuación se requiere que su parte real e imaginaria desaparezcan por separado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_m} \Delta A_m - \frac{\partial V}{\partial \omega} \Delta\sigma + \frac{\partial U}{\partial \omega} \Delta\omega &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial A_m} \Delta A_m + \frac{\partial U}{\partial \omega} \Delta\sigma + \frac{\partial V}{\partial \omega} \Delta\omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Eliminando $\Delta\omega$ de este conjunto de ecuaciones, resulta en una sola relación, la cual puede estar en la forma

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A_m} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial A_m} \right) \Delta A_m = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \omega} \right)^2 \right] \Delta\sigma. \quad (2.38)$$

Para que un ciclo límite sea estable, un incremento positivo de ΔA_m debe generar un $\Delta\sigma$ positivo; y similarmente, un ΔA_m negativo debe causar un $\Delta\sigma$ negativo. En otras palabras, el signo de $\Delta\sigma/\Delta A_m$ debe ser siempre positivo para que la condición de ciclo límite estable exista. Por lo tanto, para que el ciclo límite sea estable, es necesario que

$$\frac{\partial U}{\partial A_m} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial A_m} > 0. \quad (2.39)$$

2.4. Algoritmo Sub-Optimal Generalizado

El controlador por Modos Deslizantes de segundo orden llamado Sub-Optimal generalizado [6] tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\alpha(t)U_M \text{sign}(y(t) - \beta y_M(t)), \\ \alpha(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y_M(t)(y(t) - \beta y_M(t)) \geq 0 \\ \alpha^* & \text{si } y_M(t)(y(t) - \beta y_M(t)) < 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $y_M(t)$ es una función continua a trazos que representa el valor del último punto singular de $y(t)$, i.e. el valor mas reciente de $y(t)$ tal que $\dot{y}(t) = 0$. El término U_M es la ganancia del control, $\beta \in [0, 1)$ es el parámetro de anticipación y $\alpha^* \geq 1$ es el parámetro de modulación.

Si el sistema (1.1) tiene grado relativo dos³ y su dinámica incierta de entrada-salida puede representarse como:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \varphi(y(t), \dot{y}(t), t) + \gamma(y(t), \dot{y}(t), t)u(t), \\ |\varphi(y(t), \dot{y}(t), t)| &\leq \Phi, \\ 0 < \Gamma_m &\leq \gamma(y(t), \dot{y}(t), t) \leq \Gamma_M, \end{aligned} \quad (2.41)$$

entonces la ley de control (2.40) con las condiciones de sintonización

$$\begin{aligned} U_M &> \frac{\Phi}{\Gamma_m}, \\ \alpha^* &\in [1; +\infty] \cap \left(\frac{2\Phi + (1 - \beta)\Gamma_M U_M}{(1 + \beta)\Gamma_m U_M}; +\infty \right), \end{aligned} \quad (2.42)$$

forza un modo deslizante de segundo orden hacia la superficie de deslizamiento $y = 0$ [6]. Una sintonización especial del controlador resulta en el algoritmo "Twisting"[30] con $\beta = 0$, el algoritmo "Sub-Optimal"[5] con $\beta = 0.5$ y el controlador relevador con $\beta = 0$ y $\alpha^* = 1$ [43].

³El grado relativo σ del sistema se define como el número de veces que se deriva la salida y para encontrar la entrada u i.e. $\dot{y}(t) = f_1(x(t))$, $\ddot{y}(t) = f_2(x(t))$, ..., $y^\sigma(t) = f_\sigma(x(t), u(t))$.

Capítulo 3

Generación de oscilaciones

En este capítulo se resolverá el problema de la generación de oscilaciones usando el algoritmo Sub-Optimal al realizar un análisis con la ecuación de balance armónico y la DF del controlador, obteniendo así las ecuaciones de sintonización de las ganancias de dicho algoritmo.

3.1. Sintonización del Sub-Optimal Generalizado

Teniendo definido el algoritmo a utilizar en (2.40), debemos hallar una forma de sintonizar las ganancias, U_M , α^* y β , para lograr un movimiento periódico con amplitud A_m y frecuencia ω conocidos. Con este fin, la sintonización se lleva a cabo por medio del análisis de la DF del algoritmo Sub-Optimal. La siguiente proposición describe los resultados obtenidos.

Proposición 1 *Si el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$U_M = -\frac{\pi A_m}{4F_R(\omega)} \left[\frac{(\alpha^* + 1)\sqrt{1 - \beta^2}}{\alpha^{*2}(1 + \beta) + (1 - \beta)} \right], \quad (3.1)$$

$$\alpha^* = \sqrt{\frac{\pi^2 A_m^2}{8U_M^2 |W(j\omega)|^2 (1 + \beta)} - \frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \quad (3.2)$$

$$\beta = \frac{\pi A_m (\alpha^* - 1) - 4F_I(\omega) U_M (\alpha^{*2} + 1)}{-\pi A_m (\alpha^* - 1) + 4F_I(\omega) U_M (\alpha^{*2} - 1)}. \quad (3.3)$$

tiene una solución factible, entonces puede existir un movimiento periódico en la salida y del sistema (1.1) con amplitud A_m y frecuencia ω deseadas.

Demostración. El algoritmo Sub-Optimal generalizado se puede ver como un relevador activo con histéresis, cuya magnitud varía de acuerdo a la historia pasada de la entrada

del relevador (esta DF se presenta en [3]), por lo que en [9] toman esta idea y presentan el DF del Sub-Optimal:

$$\Psi(A_m) = \frac{2U_M}{\pi A_m} \left[(\alpha^* + 1)\sqrt{1 - \beta^2} + j [(\alpha^* - 1) + \beta(\alpha^* + 1)] \right]. \quad (3.4)$$

Dado que en [3] se mostró que una solución periódica puede ocurrir cuando el recíproco negativo de la función descriptiva interseca el diagrama de Nyquist de la respuesta armónica del sistema $G(j\omega)$, se tiene:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{\Psi(A_m)}, \quad (3.5)$$

con

$$-\frac{1}{\Psi(A_m)} = \frac{\pi A_m}{4U_M} \left[\frac{-(\alpha^* + 1)\sqrt{1 - \beta^2}}{\alpha^{*2}(1 + \beta) + (1 - \beta)} + j \frac{(\alpha^* - 1) + \beta(\alpha^* + 1)}{\alpha^{*2}(1 + \beta) + (1 - \beta)} \right]. \quad (3.6)$$

Dividiendo $G(j\omega)$ en parte real y parte imaginaria, podemos llegar a:

$$F_R(\omega) + jF_I(\omega) = \frac{\pi A_m}{4U_M} \left[\frac{-(\alpha^* + 1)\sqrt{1 - \beta^2}}{\alpha^{*2}(1 + \beta) + (1 - \beta)} + j \frac{(\alpha^* - 1) + \beta(\alpha^* + 1)}{\alpha^{*2}(1 + \beta) + (1 - \beta)} \right], \quad (3.7)$$

y de ahí obtener dos ecuaciones:

$$F_R(\omega) = \frac{\pi A_m}{4U_M} \left[\frac{-(\alpha^* + 1)\sqrt{1 - \beta^2}}{\alpha^{*2}(1 + \beta) + (1 - \beta)} \right], \quad (3.8)$$

$$F_I(\omega) = \frac{\pi A_m}{4U_M} \left[\frac{(\alpha^* - 1) + \beta(\alpha^* + 1)}{\alpha^{*2}(1 + \beta) + (1 - \beta)} \right]. \quad (3.9)$$

De [9] obtenemos la ecuación de magnitud de las oscilaciones:

$$|G(j\omega)| = \frac{\pi A_m}{2\sqrt{2}U_M \sqrt{\alpha^{*2}(1 + \beta) + (1 - \beta)}}. \quad (3.10)$$

Si de la ecuación (3.8) despejamos U_M , de la ecuación (3.9) despejamos β y de la ecuación (3.10) se despeja α^* , entonces se obtiene el sistema de ecuaciones (3.1)-(3.3) (las ganancias de sintonización del controlador). Con esto se concluye la demostración. ■

3.1.1. Solución analítica

Para resolver este sistema de ecuaciones, se optó por elegir el valor de $\alpha^* \geq 1$ y resolver las otras dos ecuaciones para encontrar los valores de U_M y β en función de la amplitud y frecuencia deseadas, así como de la respuesta armónica del sistema.

Por medio de la herramienta muPad de Matlab¹, se obtuvo la siguiente solución analítica:

$$\beta = \frac{F_I(\omega) \left[\sqrt{(\alpha^{*2} + 2\alpha^* + 1)F_I(\omega)^2 + 4\alpha^*F_R(\omega)} + (\alpha^* - 1)F_I(\omega) \right]}{(\alpha^* + 1)(F_I(\omega)^2 + F_R(\omega)^2)} - \frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 1}, \quad (3.11)$$

$$U_M = \frac{\pi A_m \left[\sqrt{(\alpha^{*2} + 2\alpha^* + 1)F_I(\omega)^2 + 4\alpha^*F_R(\omega)} - (\alpha^* - 1)F_I(\omega) \right]}{8\alpha^*(F_I(\omega)^2 + F_R(\omega)^2)}. \quad (3.12)$$

Si se obtiene la solución gráfica de las ecuaciones (3.5) y (3.6) con las ganancias del controlador convencionales (2.40) en el plano complejo, se puede notar que el recíproco negativo de la DF del sub-optimal es una recta con pendiente negativa que cruza en el origen, pero solo existe en el segundo cuadrante, por lo que solo podríamos intersectar en ese cuadrante a $W(j\omega)$. Esto se observa en la Figura 3.1.

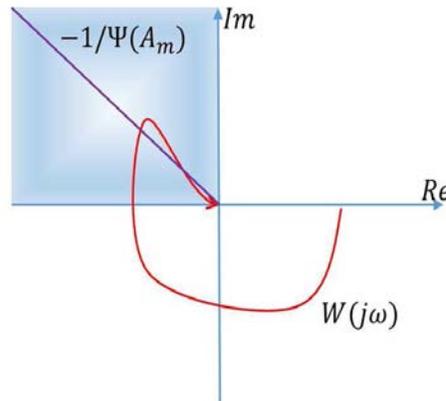


Figura 3.1: Solución gráfica de la ecuación de balance armónico

Con las ecuaciones obtenidas (3.11) y (3.12), ahora β puede tomar diferentes valores: $\beta \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, por lo que el recíproco negativo de la DF del sub-optimal ahora puede existir en el segundo y tercer cuadrante del plano complejo. La solución gráfica de la ecuación de balance armónico con el análisis realizado se ilustra en la Figura 3.2.

¹En este trabajo se optó por utilizar muPad de Matlab. Sin embargo, es posible utilizar cualquier otro software que resuelva este tipo de ecuaciones, por ejemplo: Mathematica o Mathcad; así como utilizar métodos numéricos como los expuestos en [11] y [21].

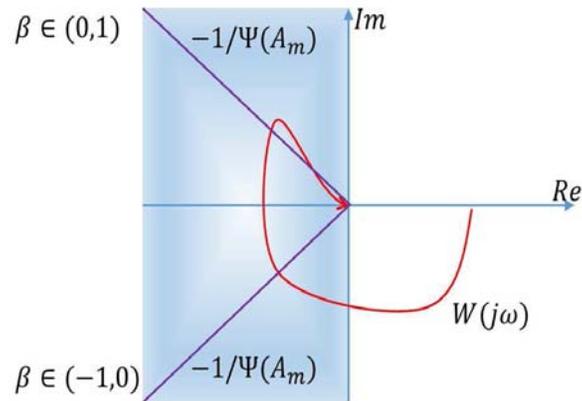


Figura 3.2: Solución gráfica de la ecuación de balance armónico con las fórmulas obtenidas

3.2. Algoritmo para el uso de las ecuaciones de sintonización

El siguiente algoritmo describe el uso de la Proposición 1 (ver Figura 3.3):

1. Seleccionar amplitud y frecuencias deseadas, verificando que la frecuencia exista en el segundo o tercer cuadrante del plano complejo de la traza de Nyquist de $G(s)$.
2. Escoger el valor de $\alpha^* \geq 1$ y obtener β y U_M de las ecuaciones (3.11) y (3.12).
3. Obtener la solución gráfica de la ecuación de balance armónico para corroborar que existe la intersección.
4. Implementar el controlador con los parámetros encontrados.
5. Si los resultados no son satisfactorios, escoger otra amplitud o frecuencia, o ambas y volver a realizar el algoritmo.

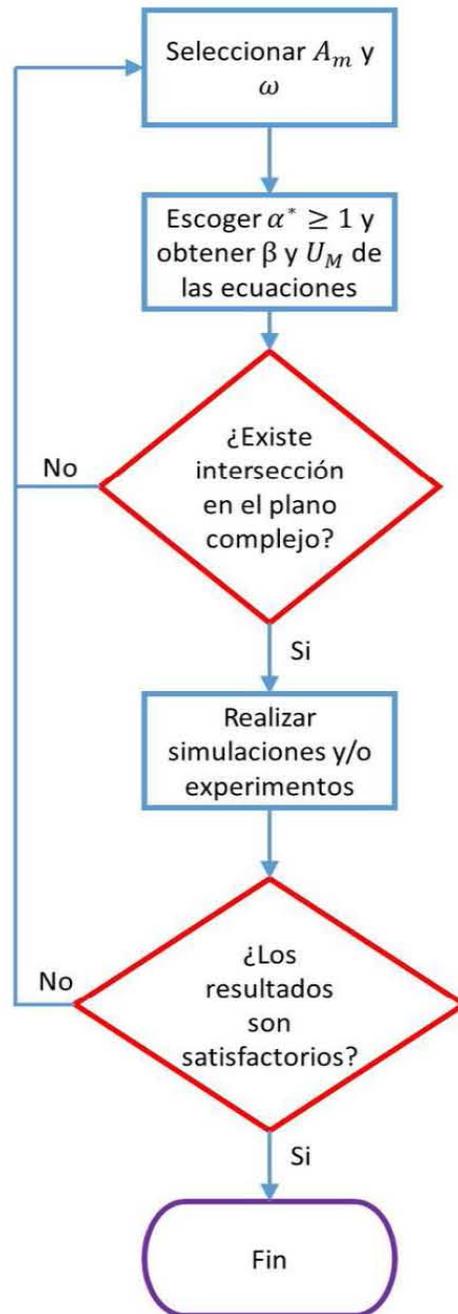


Figura 3.3: Diagrama de flujo del algoritmo

Capítulo 4

Casos de estudio

Para ilustrar los resultados de la Proposición 1, se analizarán dos casos de estudio: el carro-péndulo y un circuito RC.

4.1. Carro-Péndulo

Se tiene un péndulo que rota en un plano vertical alrededor de un eje localizado en un carro. El carro puede moverse en un riel horizontal en el plano de rotación (Figura 4.1).

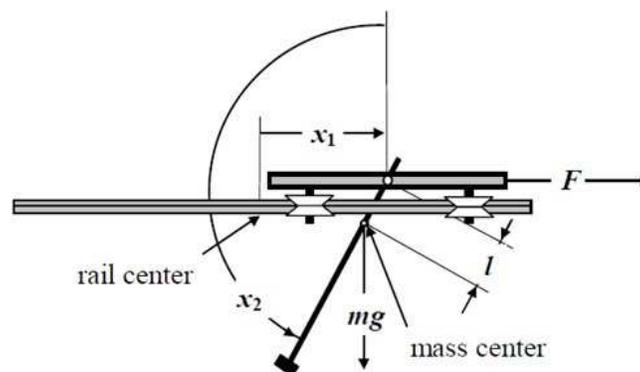


Figura 4.1: Carro-péndulo

El sistema en espacio de estados toma la forma:

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = x_4, \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{a_1 w_1 + \cos(x_2) w_2}{d}, \quad (4.3)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\cos(x_2) w_1 + a_2 w_2}{d}, \quad (4.4)$$

donde x_1 es la posición del carro, x_2 es el ángulo del péndulo medido en dirección antihorario ($x_2 = 0$ significa que esta arriba el péndulo), x_3 es la velocidad del carro, x_4 es la velocidad del péndulo [27] y

$$\begin{aligned} w_1 &= k_1 u - x_4^2 \sin(x_2) - k_2 x_3, & a_1 &= J_p / ml, & k_1 &= p_1 / ml, \\ w_2 &= g \sin(x_2) - k_3 x_4, & a_2 &= 1/l, & k_2 &= (f_c - p_2) / ml, \\ d &= b - \cos^2(x_2), & b &= a_1 a_2, & k_3 &= f_p / ml. \end{aligned}$$

Los valores de los parámetros del sistema se describen en la Tabla 4.1.

| Nombre | Descripción | Unidades |
|--------|--|------------------------------|
| m | Masa equivalente del carro y el péndulo | 0.872[kg] |
| l | Distancia del eje de rotación al centro de masa del sistema | 0.01955717[m] |
| f_c | Coefficiente de fricción dinámica del carro | 0.5[Ns/m] |
| f_p | Coefficiente de fricción rotacional | 0.0000665[Nms/rad] |
| J_p | Momento de inercia del péndulo con respecto al eje de rotación | 0.0038583[kgm ²] |
| p_1 | Relación de la fuerza de control a señal PWM | 9.4[N] |
| p_2 | Relación de la fuerza de control a velocidad del carro | -0.548[Ns/m] |
| g | Aceleración de la gravedad | 9.78[m/s ²] |

Tabla 4.1: Parámetros del sistema carro-péndulo

4.1.1. Linealización

Ya que el Carro-Péndulo es un sistema no lineal, se debe de linealizar para utilizar la ecuación de balance armónico y sintonizar el Sub-Optimal para generar oscilaciones en la salida x_1 .

Para esto, se linealiza el sistema con el Jacobiano con respecto al estado x evaluado en el punto de equilibrio para obtener la matriz A y con el Jacobiano con respecto a la entrada u evaluado en el punto de equilibrio se obtiene la matriz B . Después se obtiene la función de transferencia de dicho sistema con la expresión $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

Para las pruebas que se realizarán en el sistema, se generarán oscilaciones en la posición del carro, por lo que $y = x_1$ y por lo tanto $C = [1, 0, 0, 0]$. Las oscilaciones se

harán alrededor de dos puntos de equilibrio: con el péndulo abajo ($x = [0, \pi, 0, 0]^T$) y con el péndulo arriba ($x = [0, 0, 0, 0]^T$), por lo que se obtienen dos funciones de transferencia respectivamente:

$$G_1(s) = \frac{J_p p_1 s^2 + f_p p_1 s + mgl p_1}{\gamma_1 s^4 + \delta_1 s^3 + \varepsilon_1 s^2 + \zeta_1 s}, \quad (4.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= J_p m - l^2 m^2, \\ \delta_1 &= f_p m + J_p (f_c - p_2), \\ \varepsilon_1 &= m^2 gl + f_p (f_c - p_2), \\ \zeta_1 &= mgl (f_c - p_2). \end{aligned}$$

$$G_2(s) = \frac{J_p p_1 s^2 + f_p p_1 s - mgl p_1}{\gamma_2 s^4 + \delta_2 s^3 + \varepsilon_2 s^2 + \zeta_2 s}, \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= l^2 m^2 - J_p m, \\ \delta_2 &= J_p (p_2 - f_c) - f_p m, \\ \varepsilon_2 &= m^2 gl + f_p (p_2 - f_c), \\ \zeta_2 &= mgl (f_c - p_2). \end{aligned}$$

Ya que la función de transferencia (4.6), tiene un polo con parte real positiva (los polos son: $[0, 6.8213, -6.9574, -1.1983]$), no se puede usar el algoritmo Sub-Optimal para generar oscilaciones, por lo que se necesita agregar un control que haga estable el punto de equilibrio $x = [0, 0, 0, 0]^T$.

Para esto, se puede diseñar un control por retroalimentación de estados. Sin embargo, cualquier control lineal que permita usar el enfoque de DF y balance armónico es válido.

En este caso, la entrada de control toma la siguiente forma:

$$u = -Kx - \alpha U_M \text{sign}(x_1(t) - \beta x_{1M}(t)), \quad (4.7)$$

donde $K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$ y con esto se obtiene la función de transferencia:

$$G_3(s) = \frac{J_p p_1 s^2 + f_p p_1 s - mgl p_1}{\gamma_3 s^4 + \delta_3 s^3 + \varepsilon_3 s^2 + \zeta_3 s - mgl p_1 k_1}. \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= J_p m - l^2 m^2, \\ \delta_3 &= f_p m + J_p (f_c - p_2) + p_1 (J_p k_3 + l m k_4), \\ \varepsilon_3 &= f_p (f_c - p_2) - m^2 gl + p_1 (J_p k_1 + l m k_2 + f_p k_3), \\ \zeta_3 &= mgl (p_2 - f_c) + p_1 (f_p k_1 - mgl k_3). \end{aligned}$$

4.1.2. Estabilidad de la oscilación

Ya que las oscilaciones de la posición del carro deben seguir permitiendo que el péndulo siga en la posición de arriba, es importante hacer el análisis de estabilidad en los dos puntos de equilibrio descrito en el Capítulo 2 para saber si se logrará éste objetivo.

Péndulo abajo

Sean

$$G_1(j\omega) = \frac{\gamma + j\delta}{\varepsilon},$$

$$\Psi(A_m) = \frac{2U_M}{\pi A_m} [\zeta + j\eta],$$

entonces, se obtiene que

$$U = 1 + \frac{2U_M}{\pi A_m} \left[\frac{\gamma\zeta - \delta\eta}{\varepsilon} \right],$$

$$V = \frac{2U_M}{\pi A_m} \left[\frac{\gamma\eta + \delta\zeta}{\varepsilon} \right].$$

Después, para que el ciclo límite sea estable se tiene que cumplir la siguiente desigualdad:

$$\frac{\partial U}{\partial A_m} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial A_m} > 0.$$

Se llega a

$$- \frac{4U_M^2}{\pi^2 A_m^2 \varepsilon^2} (\gamma\lambda - \delta\kappa) (\zeta^2 + \eta^2) > 0, \quad (4.9)$$

Para que se cumpla (4.9), se debe cumplir:

$$\gamma\lambda - \delta\kappa < 0.$$

Sustituyendo los parámetros del sistema se obtiene que

$$\gamma\lambda - \delta\kappa = -183.3862\omega^{10} + 3.0904 \times 10^4 \omega^8 - 2.0201 \times 10^6 \omega^6$$

$$+ 6.0592 \times 10^7 \omega^4 - 7.0019 \times 10^8 \omega^2. \quad (4.10)$$

Realizando un análisis de las raíces de (4.10) y viendo en que intervalos ω hace que sea negativa esta expresión, se obtiene $\omega \in (0, 6.3957) \cup (6.676, \infty)$, por lo tanto el ciclo límite que se genera es estable.

Péndulo arriba

Realizando el mismo análisis que el caso anterior pero ahora con

$$G_3(j\omega) = \frac{\gamma + j\delta}{\varepsilon},$$

entonces, se obtiene que

$$\begin{aligned} U &= 1 + \frac{2U_M}{\pi A_m} \left[\frac{\gamma\zeta - \delta\eta}{\varepsilon} \right], \\ V &= \frac{2U_M}{\pi A_m} \left[\frac{\gamma\eta + \delta\zeta}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Después, para que el ciclo límite sea estable se tiene que cumplir la siguiente desigualdad:

$$\frac{\partial U}{\partial A_m} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial A_m} > 0.$$

Se llega a

$$-\frac{4U_M^2}{\pi^2 A_m^2 \varepsilon^2} (\gamma\lambda - \delta\kappa) (\zeta^2 + \eta^2) > 0, \quad (4.11)$$

Para que se cumpla (4.11), se debe cumplir:

$$\gamma\lambda - \delta\kappa < 0.$$

Sustituyendo los parámetros del sistema se obtiene que

$$\begin{aligned} \gamma\lambda - \delta\kappa &= -2.8173 \times 10^3 \omega^{10} - 4.6846 \times 10^5 \omega^8 - 2.8809 \times 10^7 \omega^6 \\ &\quad - 8.0653 \times 10^8 \omega^4 - 1.0413 \times 10^{10} \omega^2 - 5.9628 \times 10^{10}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como se puede notar, cualquier valor de ω hace que (4.12) sea negativa, por lo tanto el ciclo límite que se genera siempre es estable.

Ya que la mayoría de los sistemas mecánicos cuentan con restricciones físicas en los actuadores (como es el caso del Carro-Péndulo), no es posible generar oscilaciones de alta frecuencia en dichos sistemas. Sin embargo, cambiando la naturaleza del sistema, en este caso un sistema eléctrico (el circuito RC), es posible ver que estas limitaciones se deben al tipo de sistema y no al método propuesto.

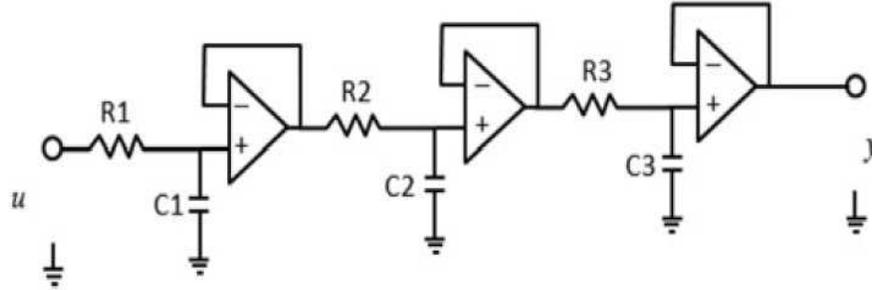


Figura 4.2: Circuito RC

4.2. Circuito RC

Se tiene un circuito RC particular descrito en la Figura 4.2, donde u y y son voltajes y representan la entrada y la salida del sistema, respectivamente.

Los valores de los parámetros del sistema se describen en la Tabla 4.2.

| Nombre | Descripción | Unidades |
|--------|----------------|---------------|
| C_1 | Capacitancia 1 | $100[\mu F]$ |
| C_2 | Capacitancia 2 | $220[\mu F]$ |
| C_3 | Capacitancia 3 | $220[\mu F]$ |
| R_1 | Resistencia 1 | $560[\Omega]$ |
| R_2 | Resistencia 2 | $1[K\Omega]$ |
| R_3 | Resistencia 3 | $560[\Omega]$ |

Tabla 4.2: Parámetros del circuito RC

Para conseguir la función de transferencia de este sistema, simplemente se debe obtener la función de transferencia de cada circuito por separado y después multiplicar lo tres:

$$\begin{aligned}
 G_{C_1}(s) &= \frac{1}{C_1 R_1 s + 1}, \\
 G_{C_2}(s) &= \frac{1}{C_2 R_2 s + 1}, \\
 G_{C_3}(s) &= \frac{1}{C_3 R_3 s + 1}, \\
 G_4(s) &= G_{C_1}(s) G_{C_2}(s) G_{C_3}(s).
 \end{aligned}$$

La función de transferencia de este circuito es:

$$G_4(s) = \frac{1}{\gamma s^3 + \delta s^2 + \varepsilon s + 1}. \quad (4.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma &= C_1 C_2 C_3 R_1 R_2 R_3, \\ \delta &= C_1 C_2 R_1 R_2 + C_1 C_3 R_1 R_3 + C_2 C_3 R_2 R_3, \\ \varepsilon &= C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 R_3. \end{aligned}$$

Ya que los valores característicos de esta función de transferencia son todos negativos, no se necesita implementar un control externo al Sub-Optimal, por lo que con esta función se van a implementar las oscilaciones.

4.2.1. Estabilidad de la oscilación

Para tener la certeza de que las oscilaciones a realizarse serán estables, se hará el mismo análisis que con el caso anterior.

Sea ahora

$$G_4(j\omega) = \frac{\gamma - j\delta}{\varepsilon},$$

entonces, se obtiene que

$$\begin{aligned} U &= 1 + \frac{2U_M}{\pi A_m} \left[\frac{\gamma\zeta + \delta\eta}{\varepsilon} \right], \\ V &= \frac{2U_M}{\pi A_m} \left[\frac{\gamma\eta - \delta\zeta}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Después, para que el ciclo límite sea estable se tiene que cumplir la siguiente desigualdad:

$$\frac{\partial U}{\partial A_m} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial A_m} > 0.$$

Se llega a

$$-\frac{4U_M^2}{\pi^2 A_m^2 \varepsilon^2} (\delta\kappa - \gamma\lambda)(\zeta^2 + \eta^2) > 0, \quad (4.14)$$

Para que se cumpla (4.14), se debe cumplir:

$$\delta\kappa - \gamma\lambda < 0.$$

Sustituyendo los parámetros del sistema se obtiene que

$$\delta\kappa - \gamma\lambda = -0.0001968\omega^4 + 0.0193\omega^2 - 0.3992. \quad (4.15)$$

Los valores de $\omega \in (0, 5.4456) \cup (8.2689, \infty)$ hacen que (4.15) sea negativa, por lo tanto el ciclo límite que se genera es estable.

4.3. Simulaciones

Teniendo bien definido el método de sintonización del algoritmo Sub-Optimal y los dos sistemas con los que se realizaran las pruebas, se realizaron simulaciones para trabajar en distintos casos de oscilaciones; con el Carro-Péndulo se realizarán oscilaciones en dos puntos de equilibrio (uno estable y otro inestable) y con el circuito RC se realizarán oscilaciones variando su amplitud y frecuencia. Todas las simulaciones se realizaron en MatLab Simulink, con un paso de muestreo de 0.01[seg] y el método de resolución de *ode4* (Runge-Kutta).

4.3.1. Carro-Péndulo

Al sustituir los valores de los parámetros del sistema en (4.5) y (4.6), se obtiene

$$G_1(s) = \frac{11.8s^2 + 0.2s + 510.1}{s^4 + 1.334s^3 + 47.34s^2 + 56.87s}, \quad (4.16)$$

$$G_2(s) = \frac{11.8s^2 + 0.2s - 510.1}{s^4 + 1.334s^3 - 47.34s^2 - 56.87s}, \quad (4.17)$$

y al sustituir $K = [-0.5740, 2.1443, -0.5255, 0.3184]$ en (4.8) se obtiene la función de transferencia

$$G_3(s) = \frac{11.8s^2 + 0.2s - 510.1}{s^4 + 11.74s^3 + 57.66s^2 + 211.1s + 292.8}. \quad (4.18)$$

Esta matriz K se diseñó por el método de asignación de polos, para que los polos resultantes fueran $[-1.27 + 4.12j, -1.27 - 4.12j, -2.27, -6.94]$.

Cabe mencionar que los polos resultantes deben permanecer cerca del eje imaginario para así poder generar oscilaciones. Esto es debido a que si los polos resultantes se encuentran muy alejados, la dinámica resultante será más rápida comparada con la del algoritmo Sub-Optimal, por lo que la retroalimentación de estados solo estabilizará el sistema en algún punto y no dejará que la generación de oscilaciones tome lugar.

El objetivo de las simulaciones en el Carro-Péndulo, es generar oscilaciones en la salida x_1 con el péndulo abajo para realizar un swing-up y estabilizar el estado con

el péndulo arriba con ayuda de un control lineal. Después de eso, se deben generar oscilaciones de nuevo en x_1 , pero manteniendo el péndulo arriba.

Para realizar esto se divide el problema en tres partes:

Prueba 1: Oscilaciones con el péndulo abajo

1. Se desea hacer oscilar la posición del carro con una amplitud $A_m = 0.3[m]$ y una frecuencia $\omega = 3[rad/seg]$.
2. Se escoge $\alpha^* = 1$ y se utilizan las expresiones (3.11) y (3.12) para obtener $\beta = -0.3647$ y $U_M = 0.2161$.
3. Se grafica la ecuación de balance armónico (3.5) para ver si con los parámetros obtenidos, hay intersección en el plano complejo y por lo tanto puede haber oscilaciones, esto se muestra en la Figura 4.3. Es importante señalar, que en la solución gráfica se muestran varias intersecciones de $G(j\omega)$ con $-1/\Psi(A_m)$, por lo que podría existir la incertidumbre de a qué frecuencia se generará la oscilación, pero en este caso, el otro cruce se encuentra en las frecuencias donde no es estable la oscilación, por lo que no se tendrá problema con esto.
4. Sabiendo que existe la intersección en la frecuencia deseada, podemos hacer simulaciones con condiciones iniciales $x = [0, \pi, 0, 0]^T$. El diagrama de bloques se muestra en la Figura 4.4.

Los resultados se observan en la Figura 4.5. La oscilación resultante tiene una amplitud de $0.2613[m]$ (error porcentual de 12.9) y una frecuencia de $3.2043[rad/seg]$ (error porcentual de 6.8), por lo que sí se está en el caso de la intersección en la frecuencia deseada (ya que teníamos varias intersecciones).

Prueba 2: Oscilaciones con el péndulo arriba

1. Ahora se quiere hacer oscilar la posición del carro con una amplitud $A_m = 0.1[m]$ y una frecuencia $\omega = 2[rad/seg]$.
2. Se escoge $\alpha^* = 1$ y se utilizan las expresiones (3.11) y (3.12) para obtener $\beta = 0.9993$ y $U_M = 0.0985$.
3. La gráfica de la ecuación de balance armónico (3.5) se muestra en la Figura 4.6.
4. Sabiendo que existe la intersección en una frecuencia muy cercana a la deseada, podemos hacer simulaciones con condiciones iniciales $x = [0, 0, 0, 0]^T$, recordando que

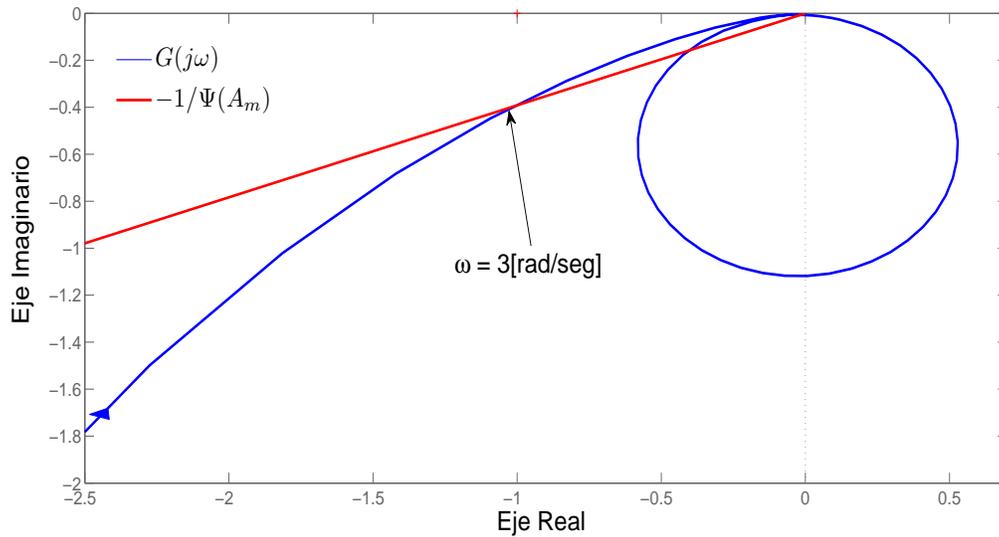


Figura 4.3: Solución gráfica de la ecuación de balance armónico para oscilaciones con el péndulo abajo

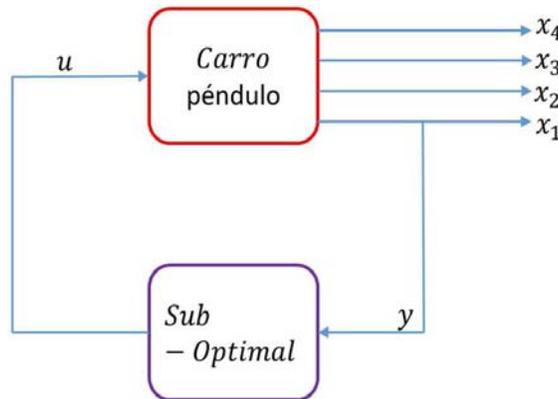


Figura 4.4: Diagrama de bloques de la simulación del swing-up

ahora la entrada de control será (4.7) con $K = [-1.0436, 3.8987, -0.9555, 0.5788]$. El diagrama de bloques de la simulación se muestra en la Figura 4.7.

Los resultados se observan en la Figura 4.8. La oscilación resultante tiene una amplitud de $0.0899[m]$ (error porcentual de 10.1) y una frecuencia de $2.1362[rad/seg]$ (error porcentual de 6.8).

En este caso hay que verificar que el péndulo se mantenga arriba, por lo que en la Figura 4.9 se muestra que está alrededor del punto de equilibrio y por lo tanto, se

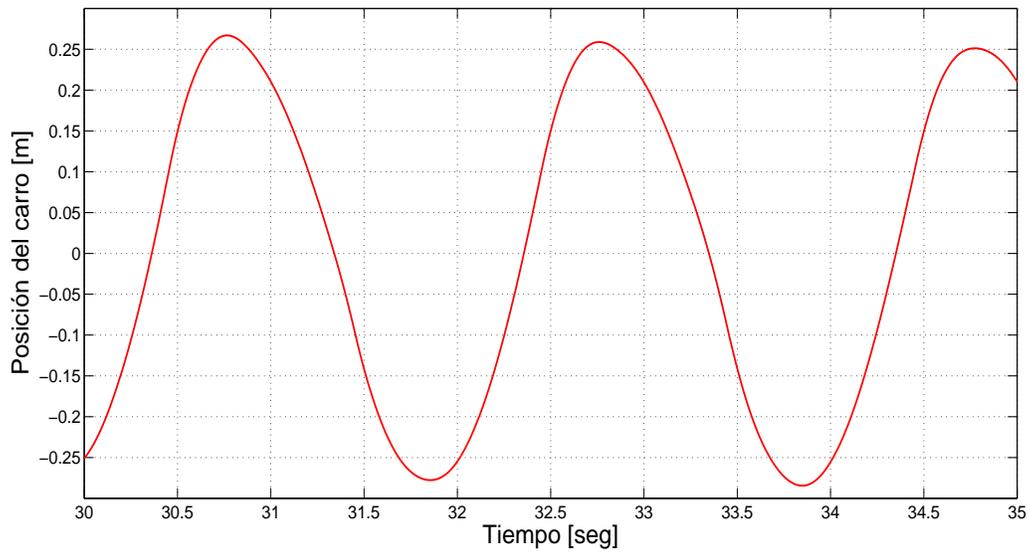


Figura 4.5: Oscilaciones de la posición del carro con el péndulo abajo

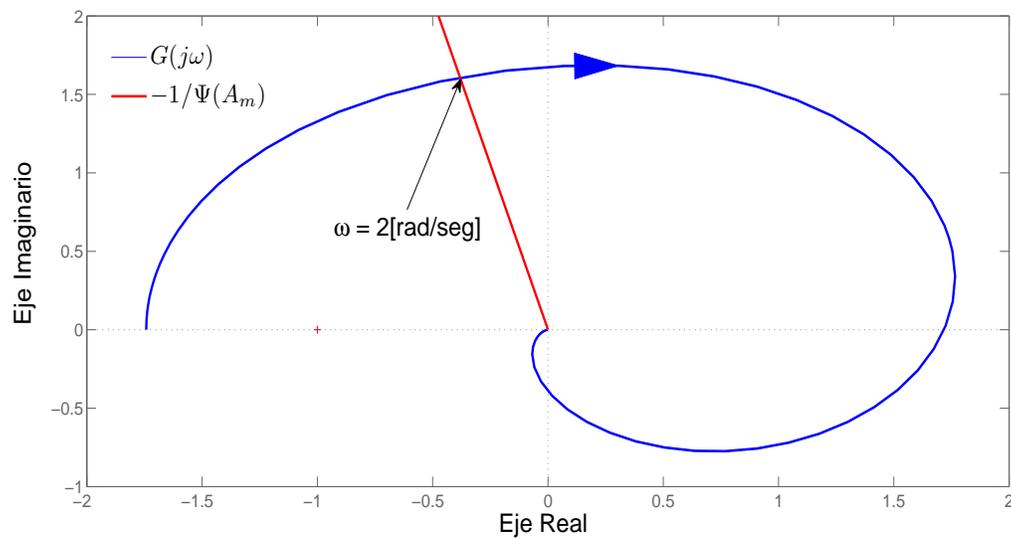


Figura 4.6: Solución gráfica de la ecuación de balance armónico para oscilaciones con el péndulo arriba

mantiene arriba.

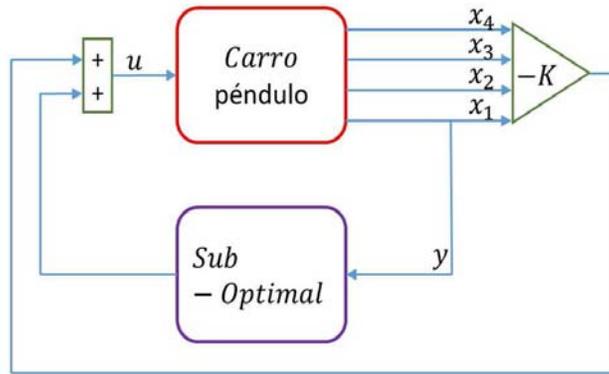


Figura 4.7: Diagrama de bloques de la simulación de las oscilaciones con péndulo arriba

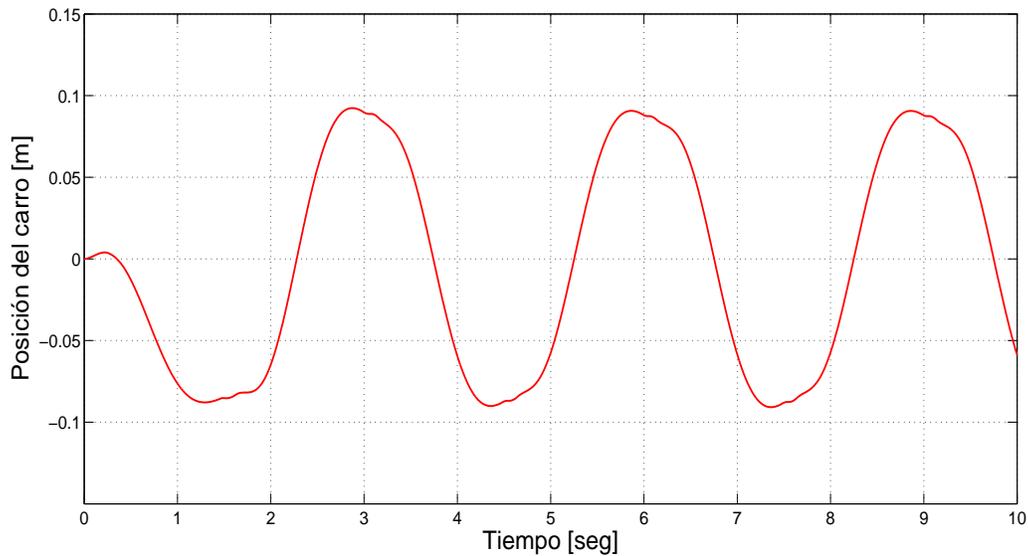


Figura 4.8: Oscilaciones de la posición del carro con el péndulo arriba

Prueba 3: Oscilaciones con el péndulo abajo y arriba

Ya que las dos simulaciones anteriores, tuvieron resultados aceptables, se juntarán las dos oscilaciones en un experimento: primero se hará oscilar la posición del carro hasta que el péndulo se levante, se detendrán las oscilaciones y el control lineal $u = -Kx$ estabilizará el punto de equilibrio; después se hará oscilar de nuevo la posición del carro y cada 30[seg] el control se cambiará entre $u = -Kx - \alpha U_M \text{sign}(x_1(t) - \beta x_{1M}(t))$ y $u = -Kx$ para ver la diferencia entre tener o no el control Sub-Optimal.

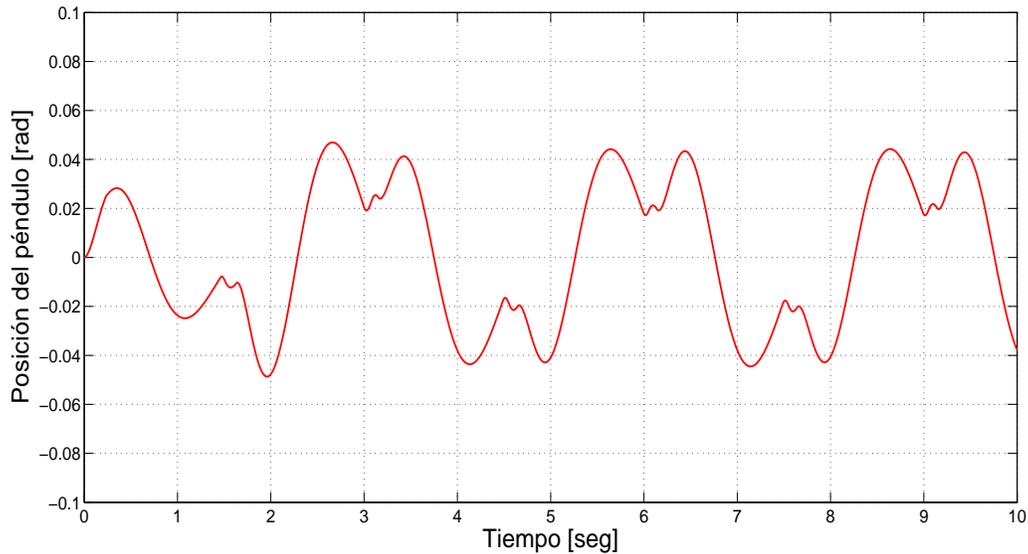


Figura 4.9: Posición del péndulo

El diagrama de bloques de la simulación se muestra en la Figura 4.10. El Selector 1 es el que detecta que la posición del péndulo ya es cercana a cero, por lo que cambia la entrada del Sub-Optimal a la retroalimentación de estados para estabilizar todo el estado en el punto de equilibrio. El Selector 2 es el que cambia la entrada cada 30[seg] para tener o no oscilaciones.

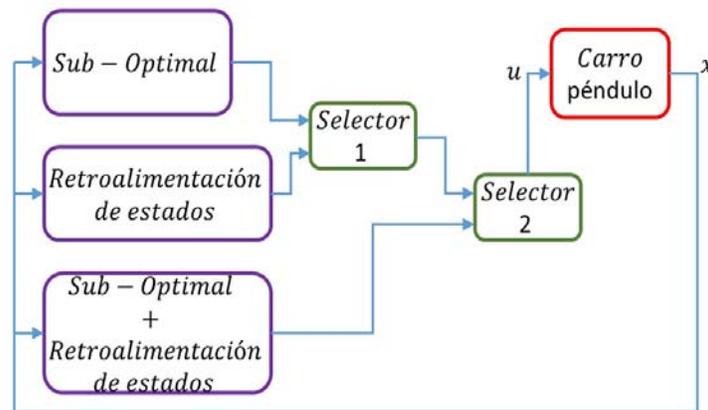


Figura 4.10: Diagrama de bloques de la simulación completa

Los resultados se muestran en las Figuras 4.11 a 4.14. Como se puede notar, la primera oscilación logra hacer un swing-up y con el control lineal se estabiliza el punto

de equilibrio, después de esto el péndulo se mantiene arriba, no importando que esté o no oscilando el carro.

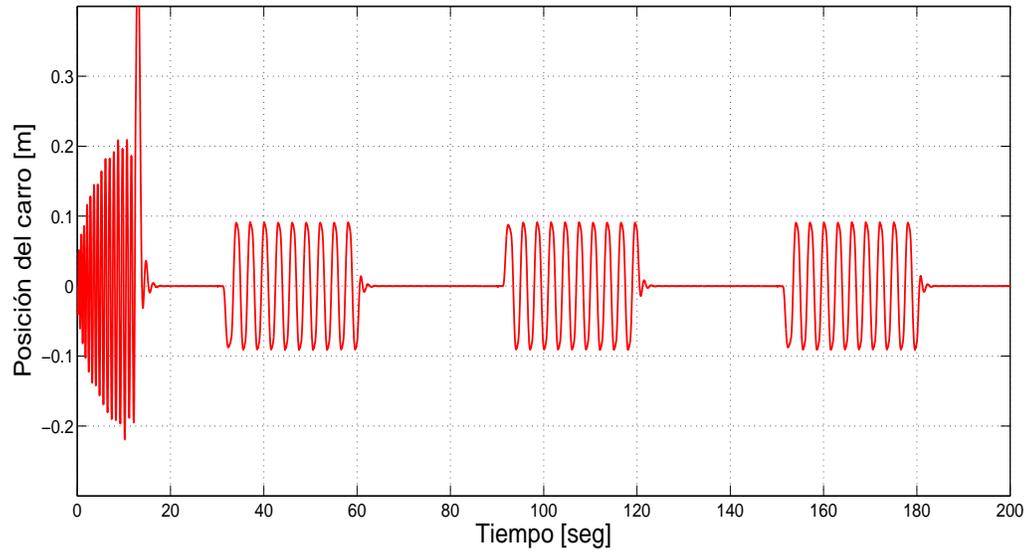


Figura 4.11: Comportamiento de la posición del carro en simulación

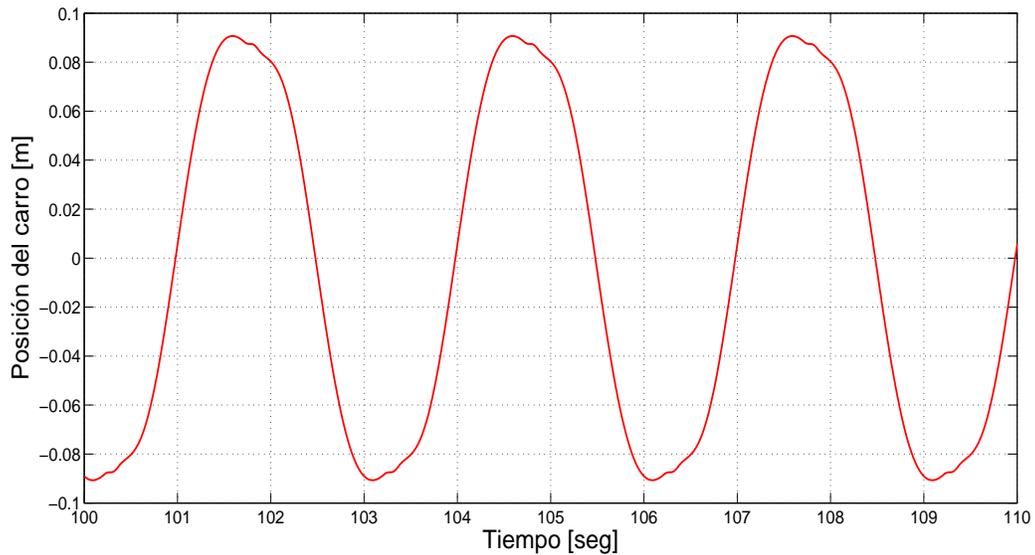


Figura 4.12: Comportamiento de la posición del carro en simulación: Detalle

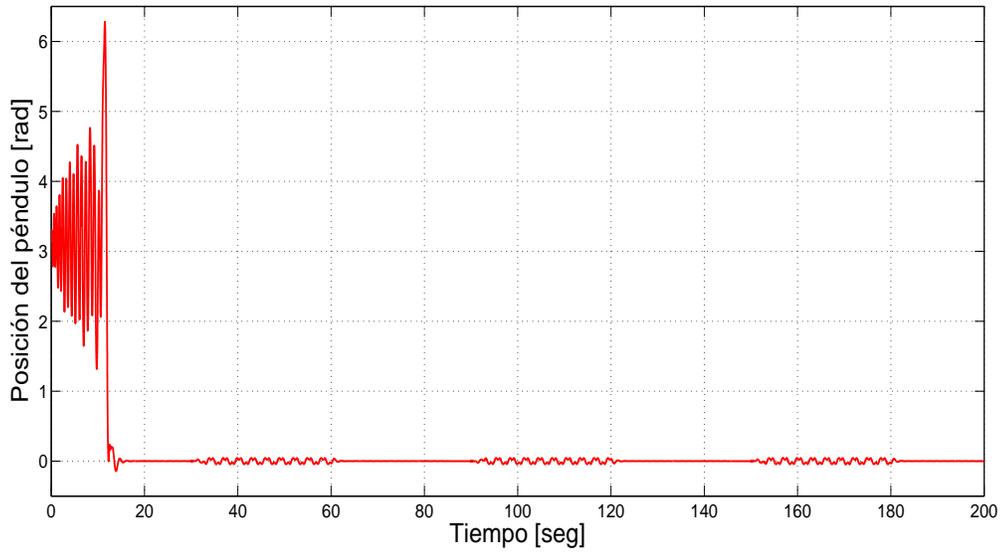


Figura 4.13: Comportamiento de la posición del péndulo en simulación

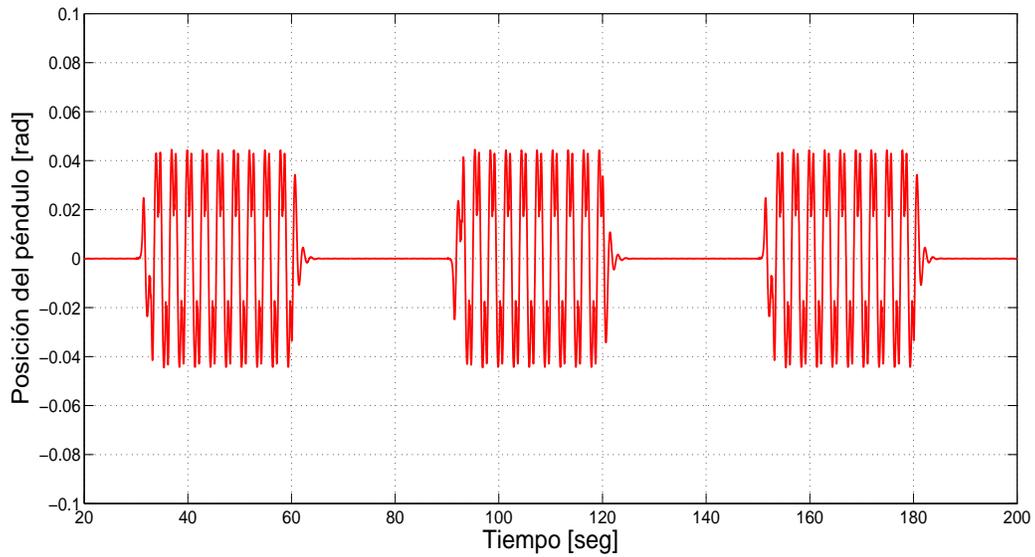


Figura 4.14: Comportamiento de la posición del péndulo en simulación: Detalle

Análisis de resultados

De los resultados obtenidos se puede decir, que con las formulas de sintonización se puede llegar a la intersección en la frecuencia deseada en la solución gráfica de la

ecuación de balance armónico. Los resultados se describen numéricamente en las Tablas 4.3 y 4.4. Note que los errores porcentuales de amplitud y frecuencia son bajos, por lo que la oscilación obtenida es muy similar a la deseada, además se logró realizar satisfactoriamente en un punto de equilibrio inestable y así lograr que el péndulo estuviera arriba aún cuando el carro oscilaba.

| Caso | A_m deseada [m] | A_m resultante [m] | Error porcentual |
|----------------|-------------------|----------------------|------------------|
| Péndulo abajo | 0.3 | 0.2613 | 12.9 |
| Péndulo arriba | 0.1 | 0.0899 | 10.1 |

Tabla 4.3: Errores en la amplitud de las oscilaciones en el Carro-Péndulo

| Caso | ω deseada [rad/seg] | ω resultante [rad/seg] | Error porcentual |
|----------------|----------------------------|-------------------------------|------------------|
| Péndulo abajo | 3 | 3.2043 | 6.8 |
| Péndulo arriba | 2 | 2.1362 | 6.8 |

Tabla 4.4: Errores en la frecuencia de las oscilaciones en el Carro-Péndulo

4.3.2. Circuito RC

Al sustituir los parámetros del sistema en (4.13) se obtiene la función de transferencia con la que se realizarán las simulaciones:

$$G_4(s) = \frac{1}{0.001518s^3 + 0.04632s^2 + 0.3992s + 1}. \quad (4.19)$$

El objetivo de las simulaciones en circuito RC es generar oscilaciones en la salida y , pero cambiando el control u para que en una simulación se obtengan varias amplitudes A_m y en otra simulación se obtengan varias frecuencias ω .

El diagrama de bloques de las dos simulaciones es el mismo y se muestra en la Figura 4.15.

Prueba 1: Variación de amplitud

1. Se hará oscilar la salida fijando el valor de la frecuencia a $\omega = 15[\text{rad/seg}]$ y cada $20[\text{seg}]$ se le pedirá al algoritmo Sub-Optimal diferentes valores de amplitud.
2. Se elige $\alpha^* = 1$ y se utilizan las expresiones (3.11) y (3.12) para obtener diferentes valores de los parámetros (Tabla 4.5). Hay que notar que el valor de β no cambia, ya que éste no depende de la amplitud.

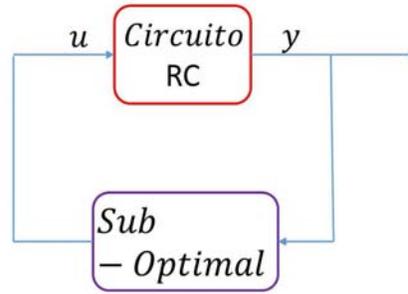


Figura 4.15: Diagrama de bloques de las simulaciones en el circuito RC

3. En la Figura 4.16 se muestra la solución de la ecuación de balance armónico.
4. Sabiendo que existe la intersección en la frecuencia deseada, podemos hacer simulaciones con condiciones iniciales $x = [0, 0, 0, 0]^T$ y los valores de los parámetros encontrados.

| A_m [V] | β | U_M |
|-----------|---------|---------|
| 0.5 | -0.0914 | 3.7156 |
| 1 | -0.0914 | 7.4311 |
| 2 | -0.0914 | 14.8622 |
| 5 | -0.0914 | 37.1556 |
| 7 | -0.0914 | 52.0179 |

Tabla 4.5: Valores de β y U_M para diferentes valores de A_m

Los resultados se muestran en las Figuras 4.17 a 4.22.

La oscilación resultante tiene una frecuencia de $\omega = 15.0781[\text{rad}/\text{seg}]$ (obteniendo un error porcentual de 0.5209) y en la Tabla 4.6 se encuentran los errores de amplitud.

| A_m deseada [V] | A_m resultante [V] | Error porcentual |
|-------------------|----------------------|------------------|
| 0.5 | 0.5427 | 8.5303 |
| 1 | 1.0480 | 4.8031 |
| 2 | 2.0104 | 0.5194 |
| 5 | 5.4363 | 8.7269 |
| 7 | 7.5747 | 8.2097 |

Tabla 4.6: Errores de oscilación con variación en la amplitud

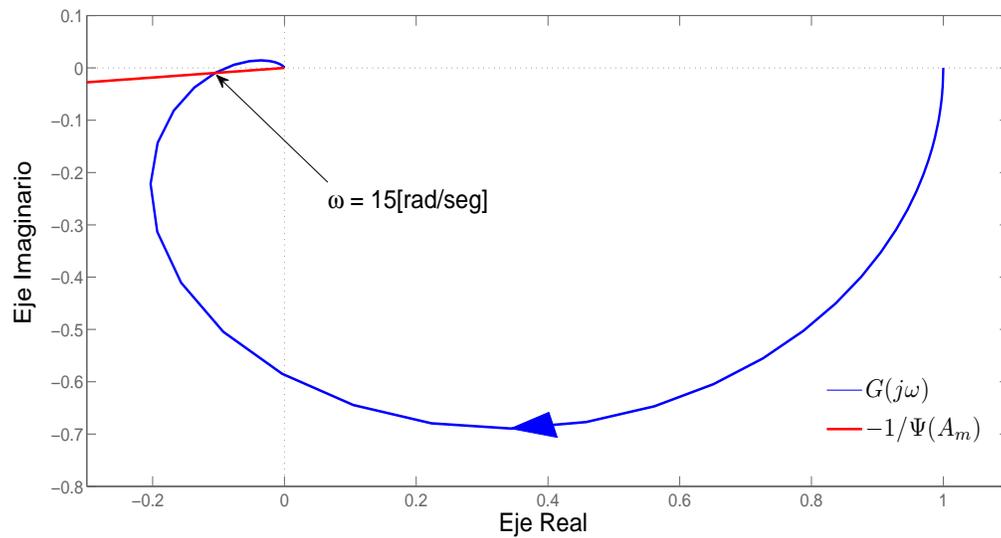


Figura 4.16: Solución gráfica de la ecuación de balance armónico para oscilaciones con variación en la amplitud

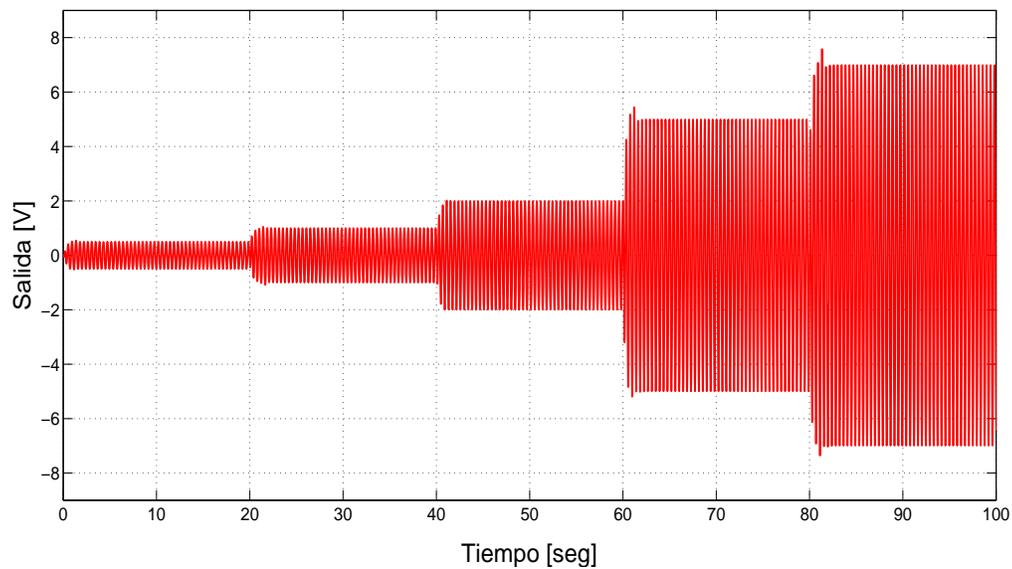


Figura 4.17: Oscilaciones con variación en la amplitud

Prueba 2: Variación de frecuencia

1. Ahora se hará oscilar la salida fijando el valor de la amplitud a $A_m = 2[V]$ y cada $20[\text{seg}]$ se le pedirá al algoritmo Sub-Optimal diferentes valores de frecuencia.

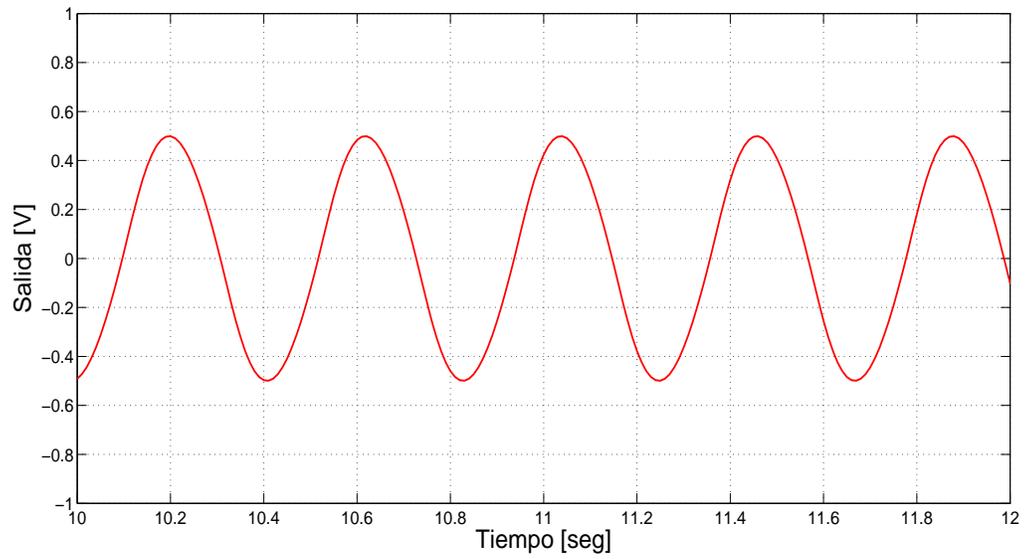


Figura 4.18: Oscilaciones con variación en la amplitud: Detalle 1

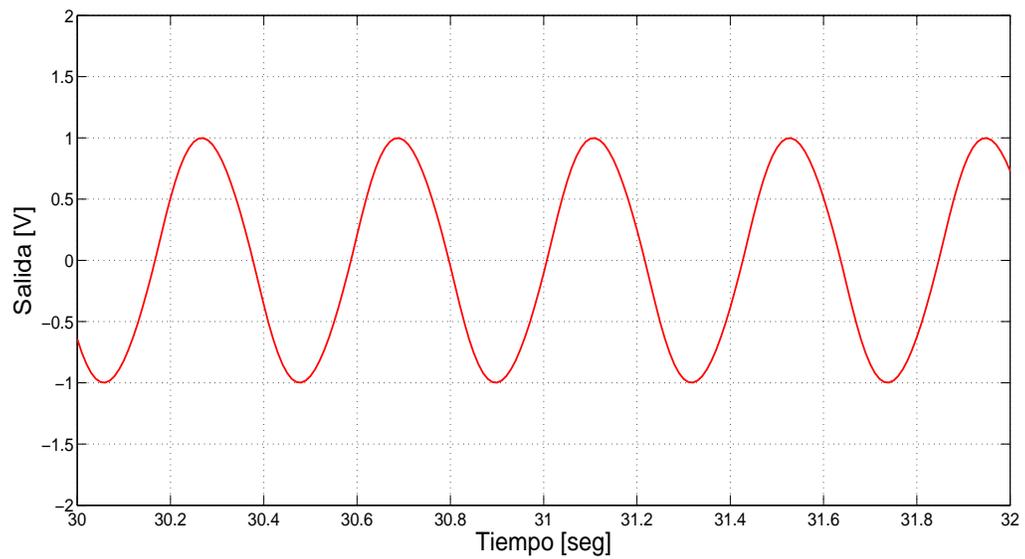


Figura 4.19: Oscilaciones con variación en la amplitud: Detalle 2

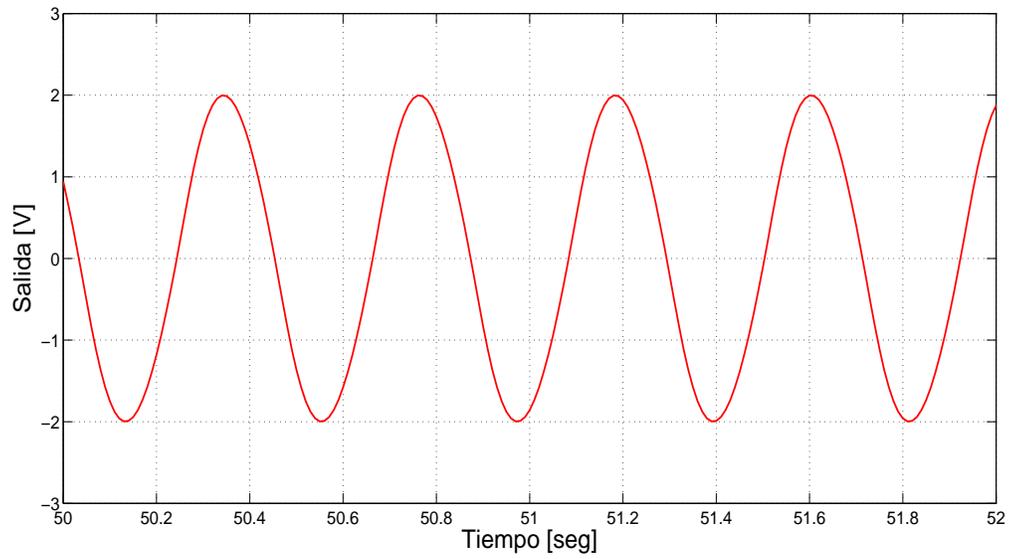


Figura 4.20: Oscilaciones con variación en la amplitud: Detalle 3

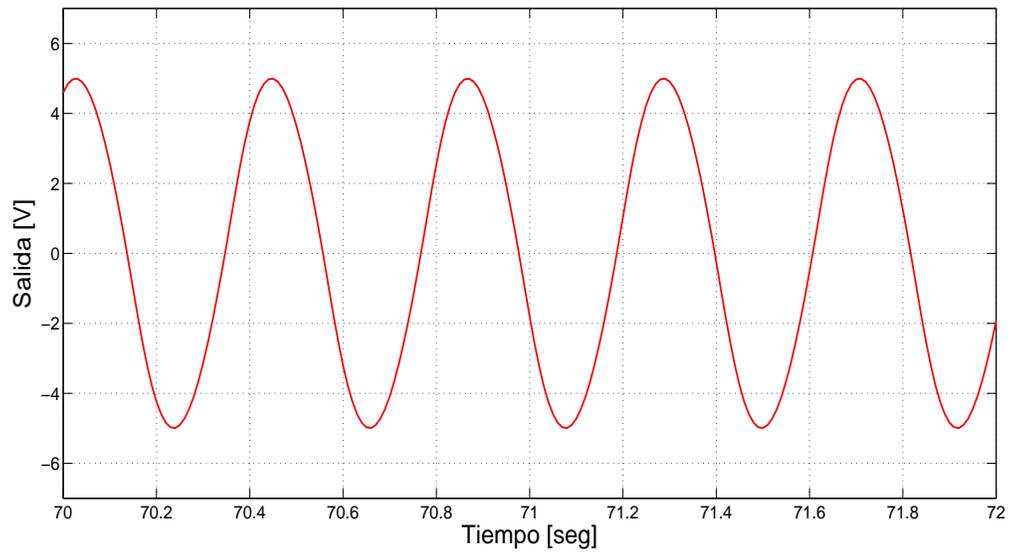


Figura 4.21: Oscilaciones con variación en la amplitud: Detalle 4

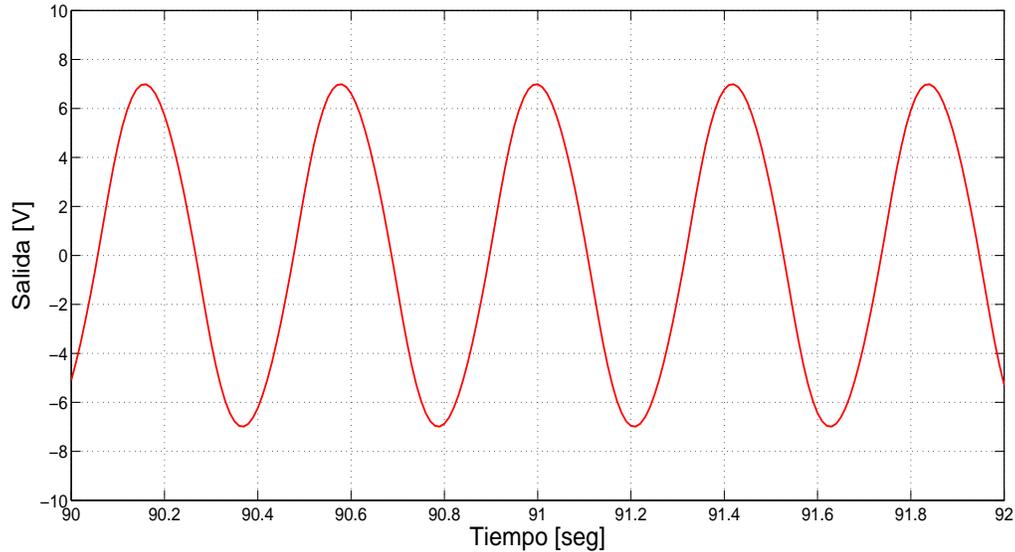


Figura 4.22: Oscilaciones con variación en la amplitud: Detalle 5

2. Se elige $\alpha^* = 1$ y se utilizan las expresiones (3.11) y (3.12) para obtener diferentes valores de los parámetros (Tabla 4.7).
3. En la Figura 4.23 se muestra la solución de la ecuación de balance armónico.
4. Sabiendo que existen las intersecciones en diferentes valores de frecuencias deseadas, podemos hacer simulaciones con condiciones iniciales $x = [0, 0, 0, 0]^T$ y los valores de los parámetros encontrados.

| $\omega[\text{rad}/\text{seg}]$ | β | U_M |
|---------------------------------|---------|---------|
| 5 | -0.9962 | 2.8481 |
| 10 | -0.5630 | 6.9029 |
| 15 | -0.0914 | 14.8622 |
| 20 | 0.2309 | 28.2977 |
| 25 | 0.4411 | 48.9211 |

Tabla 4.7: Valores de β y U_M para diferentes valores de ω

Los resultados se muestran en las Figuras 4.24 a 4.29.

En la Tabla 4.8 y la Tabla 4.9 se encuentran los errores de amplitud y frecuencia de la oscilación resultante.

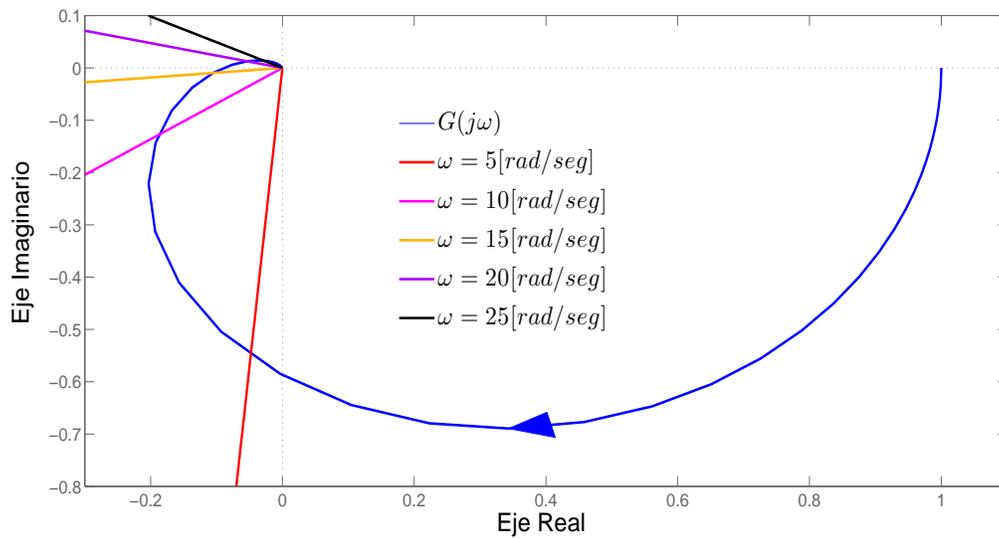


Figura 4.23: Solución gráfica de la ecuación de balance armónico para oscilaciones con variación en la frecuencia

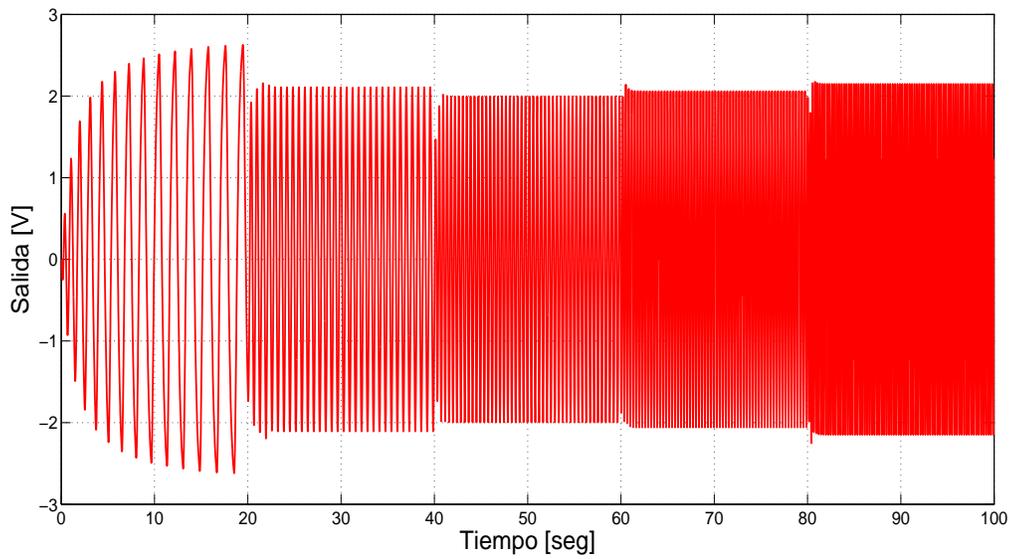


Figura 4.24: Oscilaciones con variación en la frecuencia

Análisis de resultados

En estas simulaciones se lograron obtener diferentes tipos de oscilaciones cambiando su amplitud o frecuencia en cada determinado tiempo, obteniendo errores porcentuales

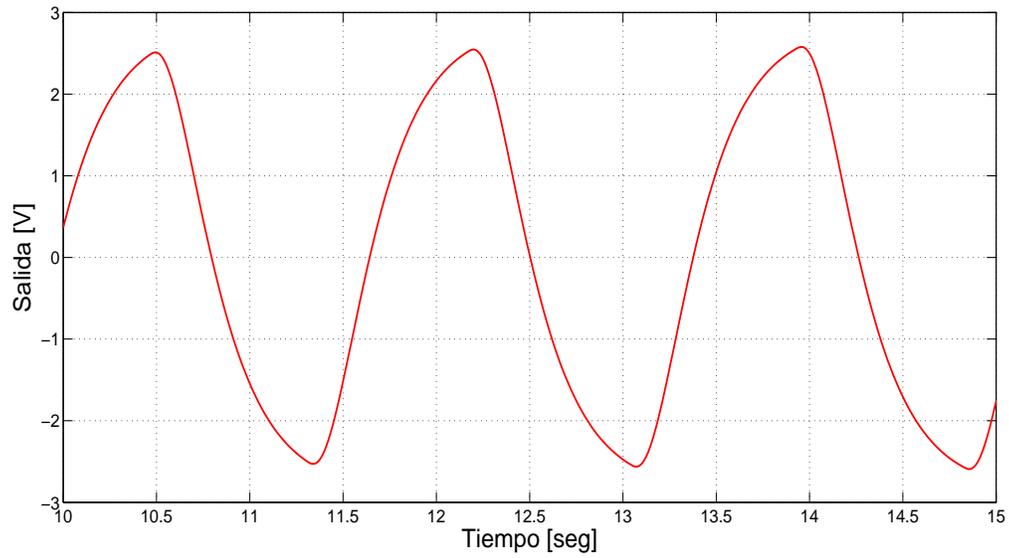


Figura 4.25: Oscilaciones con variación en la frecuencia: Detalle 1

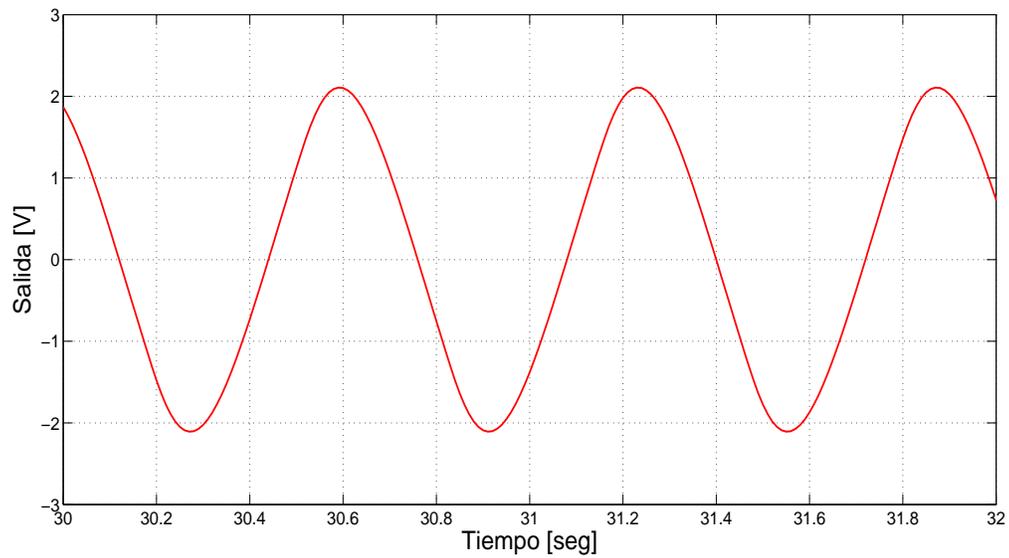


Figura 4.26: Oscilaciones con variación en la frecuencia: Detalle 2

bajos, excepto en el primer error porcentual de amplitud cuando la frecuencia variaba.

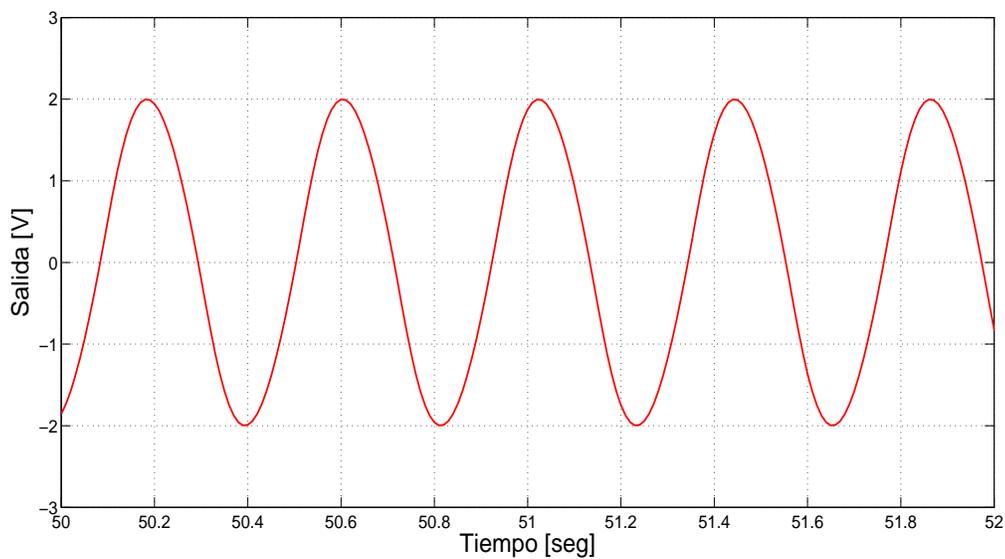


Figura 4.27: Oscilaciones con variación en la frecuencia: Detalle 3

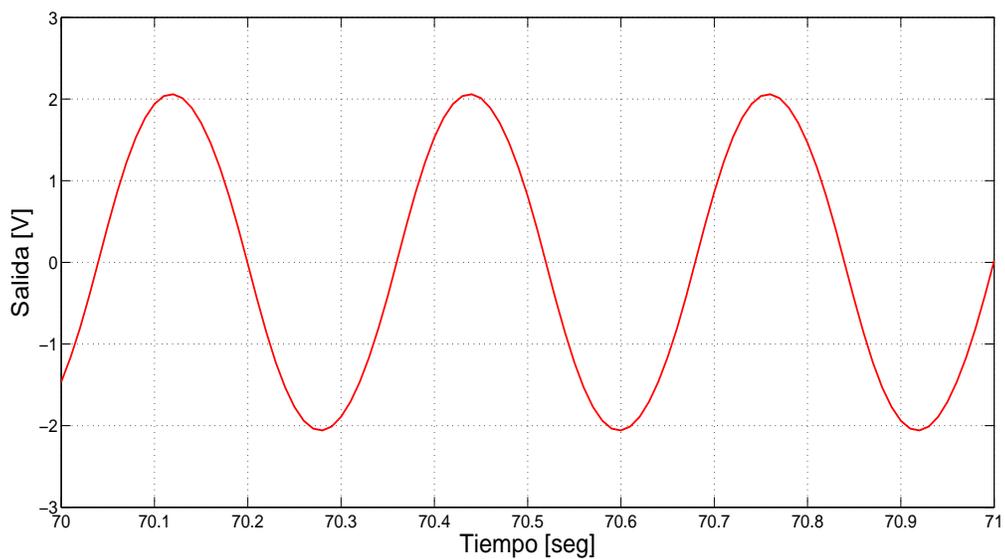


Figura 4.28: Oscilaciones con variación en la frecuencia: Detalle 4

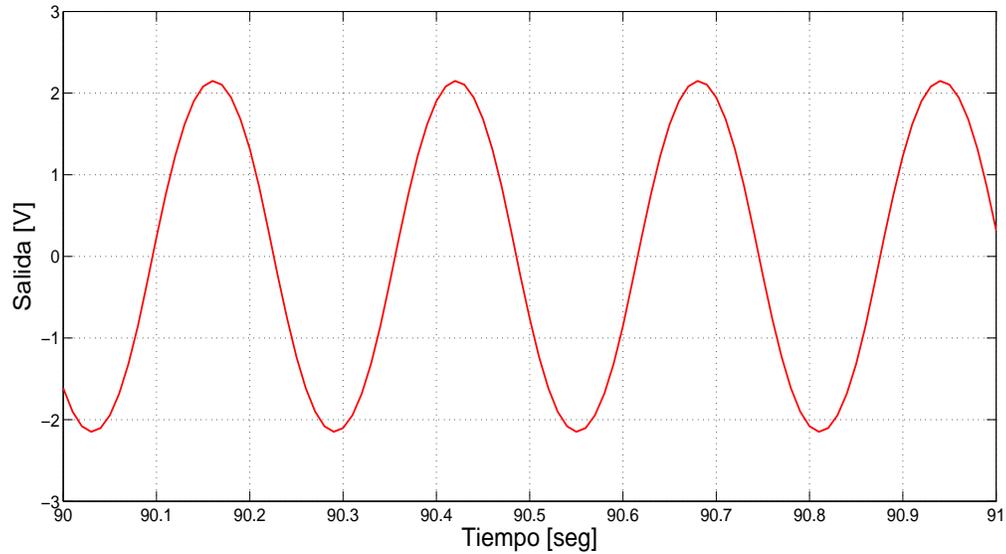


Figura 4.29: Oscilaciones con variación en la frecuencia: Detalle 5

| A_m deseada [V] | A_m resultante [V] | Error porcentual |
|-------------------|----------------------|------------------|
| 2 | 2.6268 | 31.3376 |
| 2 | 2.1566 | 7.8284 |
| 2 | 2.0174 | 0.8715 |
| 2 | 2.1397 | 6.9868 |
| 2 | 2.1753 | 8.7631 |

Tabla 4.8: Errores de amplitud en la oscilación con variación en la frecuencia

| ω deseada [rad/seg] | ω resultante [rad/seg] | Error porcentual |
|----------------------------|-------------------------------|------------------|
| 5 | 4.0841 | 18.3186 |
| 10 | 10.0531 | 0.5310 |
| 15 | 15.3938 | 2.6254 |
| 20 | 19.7920 | 1.0398 |
| 25 | 24.5044 | 1.9823 |

Tabla 4.9: Errores de frecuencia en la oscilación con variación en la frecuencia

Capítulo 5

Experimentación

Para la experimentación en un sistema real, se tiene un Carro-Péndulo en la Figura 5.1 ¹.

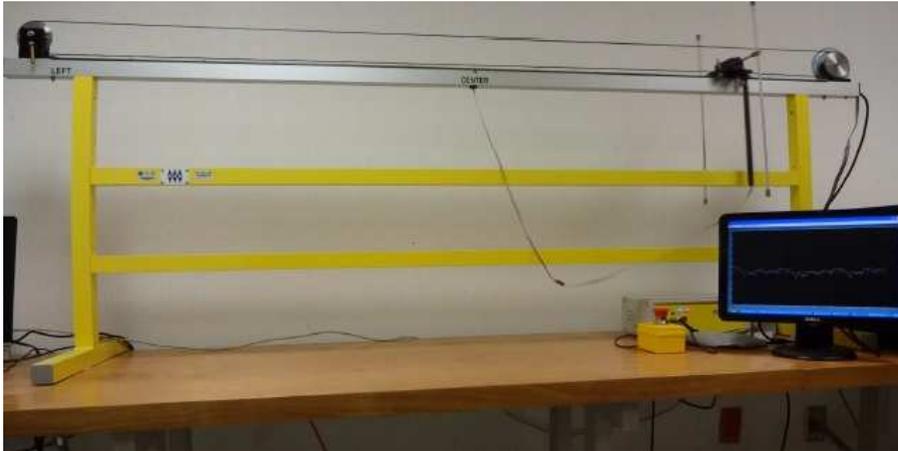


Figura 5.1: Carro-péndulo real

Dado que en el sistema real sólo se miden las posiciones del carro y el péndulo, se debe acudir a una herramienta que nos permita conocer sus velocidades, ya que son necesarias para la retroalimentación de estado realizada en el experimento, por lo tanto se pueden implementar ya sea observadores convencionales (Luenberger), los basados en MD de diferentes tipos o filtros, para obtener la estimación de los estados como en [22].

Otra alternativa es usar el diferenciador numérico que tiene integrado el equipo, en el que obtiene la estimación del estado con la expresión:

$$\hat{x} = \frac{x_{actual} - x_{anterior}}{t_m}, \quad (5.1)$$

¹Para ver el funcionamiento del Carro-Péndulo real, consultar el Apéndice.

donde t_m es el paso de muestreo.

Teniendo bien definido lo anterior, se realiza la misma prueba de la simulación de las oscilaciones con el péndulo abajo y arriba del capítulo anterior, pero en el sistema real.

Se genera una oscilación en la posición del carro empezando con el péndulo en la posición de abajo; esta debe ser capaz de elevar el péndulo a la posición de arriba para que se cambie el control por la retroalimentación de estados y así se estabilicen los estados. El algoritmo para el diseño de estas oscilaciones se muestra a continuación:

1. Amplitud $A_m = 0.3[m]$ y frecuencia $\omega = 3[rad/seg]$.
2. Se elige $\alpha^* = 1$ y se utilizan las expresiones (3.11) y (3.12) para obtener $\beta = -0.3647$ y $U_M = 0.2161$.
3. En la Figura 5.2 se muestra la solución de la ecuación de balance armónico.
4. Sabiendo que existe la intersección, se inicia el experimento con condiciones iniciales $x = [0, \pi, 0, 0]^T$ y los valores de los parámetros encontrados.

Después de que se lleven a cero los estados, cada determinado tiempo se cambiará el control para que se genere oscilaciones o se lleve el proceso de estabilización, todo esto manteniendo el péndulo arriba. El algoritmo para el diseño de estas oscilaciones se muestra a continuación:

1. Amplitud $A_m = 0.1[m]$ y frecuencia $\omega = 2[rad/seg]$.
2. Se elige $\alpha^* = 1$ y se utilizan las expresiones (3.11) y (3.12) para obtener $\beta = 0.9993$ y $U_M = 0.0985$.
3. En la Figura 5.2 se muestra la solución de la ecuación de balance armónico.
4. Sabiendo que existe la intersección, se utiliza la retroalimentación de estados junto con el Sub-Optimal y sus parámetros encontrados.

El diagrama de bloques de la prueba se muestra en la Figura 5.3.

En las Figuras 5.4 a 5.7 se muestran los resultados obtenidos en el experimento.

Como nos interesa la oscilación cuando el péndulo esta arriba (ya que la oscilación con el péndulo abajo solo sirve para realizar el swing-up), ésta es la que compararemos con los valores deseados.

La oscilación medida es la que se encuentra a partir de los 90[seg] y tiene una amplitud de $A_m = 0.1211[m]$ (error porcentual de 21.14) y una frecuencia de $\omega = 1.885[rad/seg]$ (error porcentual de 5.7522).

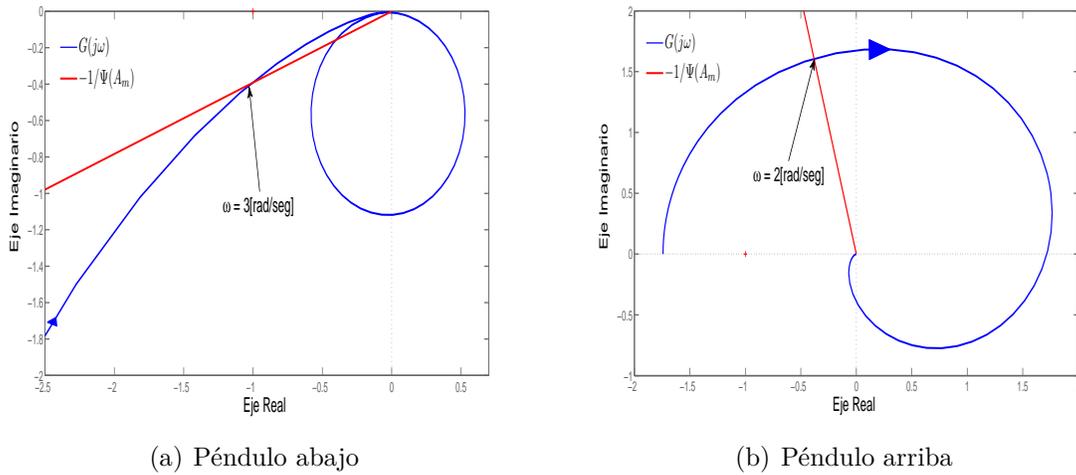


Figura 5.2: Solución gráfica de la ecuación de balance armónico para las oscilaciones del experimento

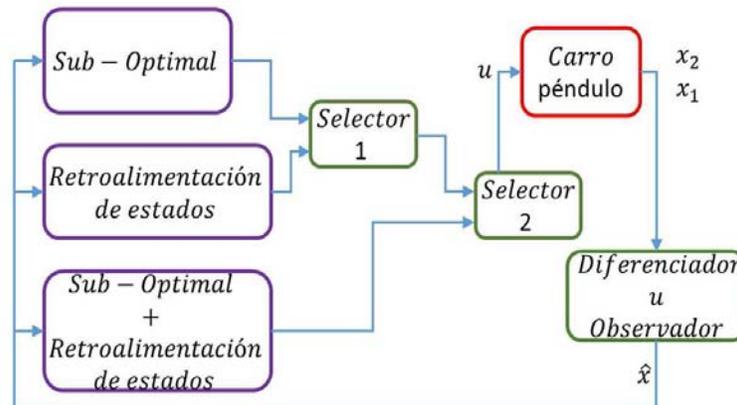


Figura 5.3: Diagrama de bloques de la prueba en el Carro-Péndulo real

5.1. Análisis de resultados

Con los resultados obtenidos en esta prueba, primero se puede notar que la estabilización de la posición del carro no es exactamente al valor de cero y que sus oscilaciones generadas se encuentran alrededor de otro valor diferente de cero. Esto se puede deber a las incertidumbres que se puedan tener del sistema real con el modelado, aparte de que en la linealización del sistema también se generan errores. A pesar de esto, se logró el objetivo de generar el swing-up y la oscilación del carro sin que el péndulo se caiga;

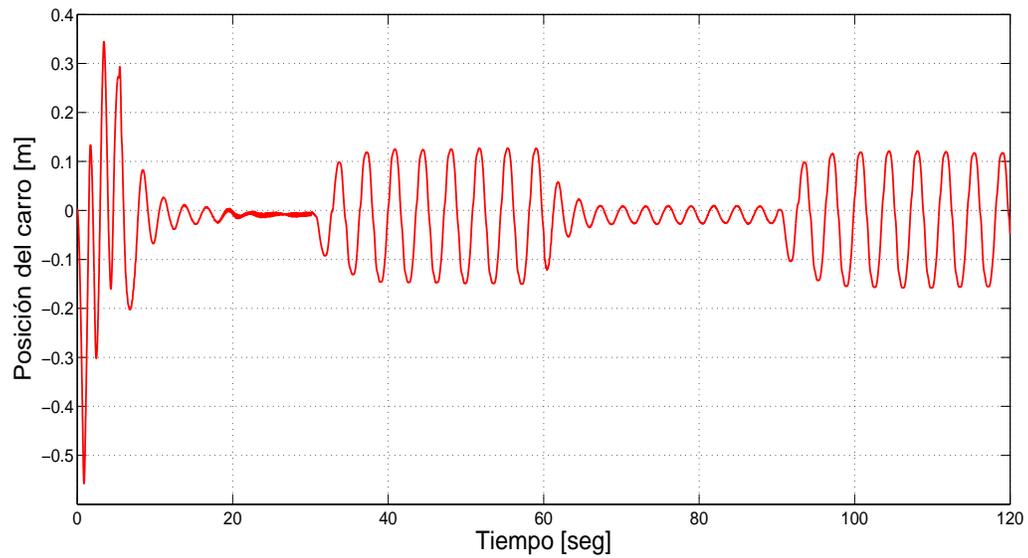


Figura 5.4: Comportamiento de la posición del carro en el experimento

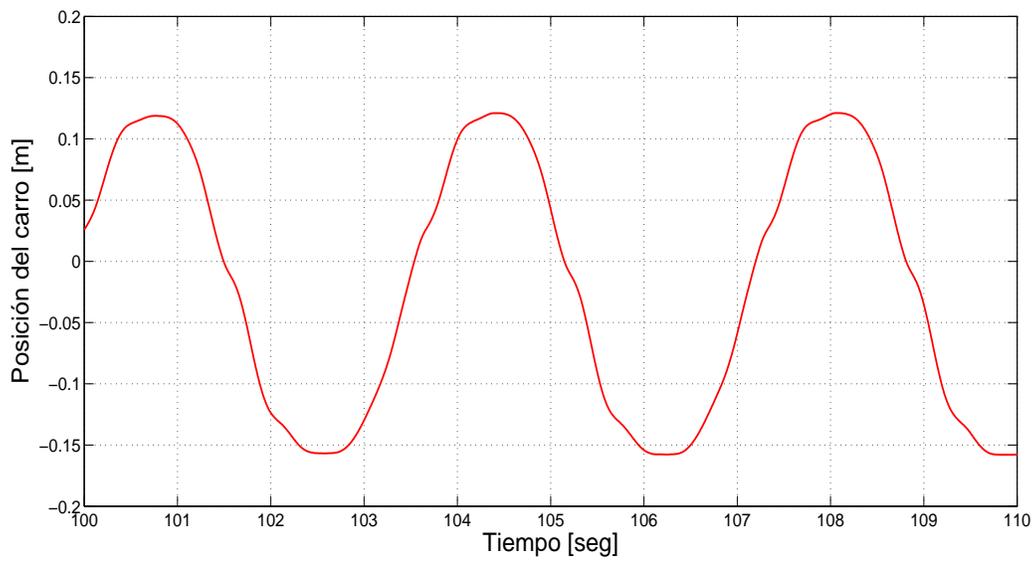


Figura 5.5: Comportamiento de la posición del carro en el experimento: Detalle

además se obtuvo una frecuencia muy cercana a la deseada aunque el error porcentual de amplitud es un poco alto. Los errores se muestran en las Tablas 5.1 y 5.2.

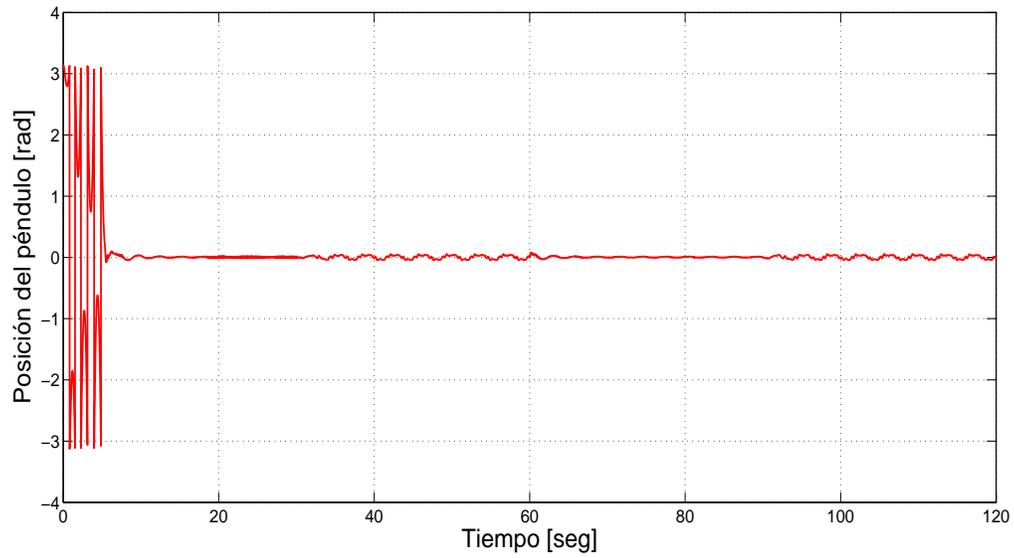


Figura 5.6: Comportamiento de la posición del péndulo en el experimento

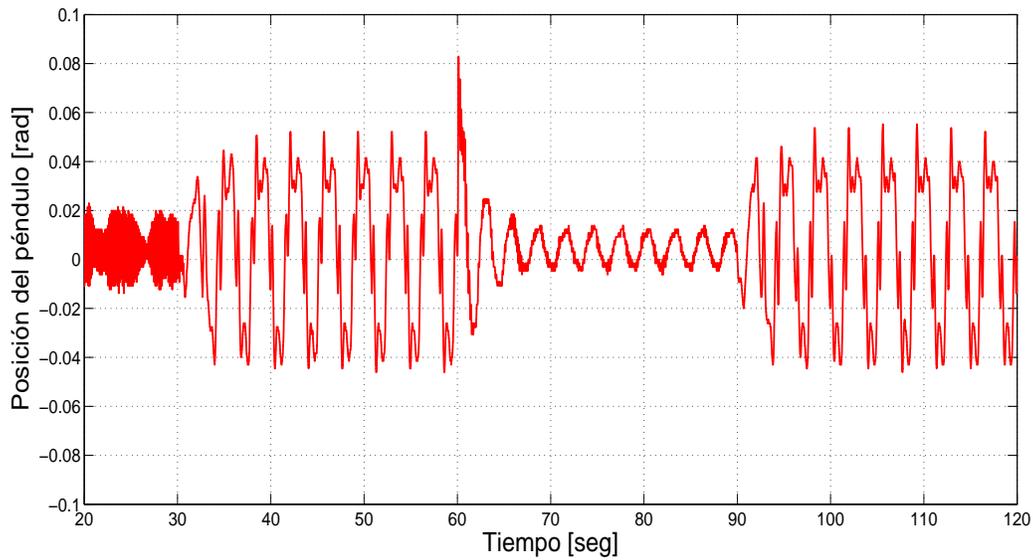


Figura 5.7: Comportamiento de la posición del péndulo en el experimento: Detalle

| Caso | A_m deseada [m] | A_m resultante [m] | Error porcentual |
|----------------|-------------------|----------------------|------------------|
| Péndulo abajo | 0.3 | - | - |
| Péndulo arriba | 0.1 | 0.1211 | 21.14 |

Tabla 5.1: Errores en la amplitud de las oscilaciones del experimento

| Caso | ω deseada [rad/seg] | ω resultante [rad/seg] | Error porcentual |
|----------------|----------------------------|-------------------------------|------------------|
| Péndulo abajo | 3 | - | - |
| Péndulo arriba | 2 | 1.885 | 5.7522 |

Tabla 5.2: Errores en la frecuencia de las oscilaciones del experimento

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se logró encontrar un método para la sintonización de los parámetros del controlador Sub-Optimal Generalizado y así poder generar oscilaciones de amplitud y frecuencias deseadas. Con esto, se pudo construir un algoritmo para el uso de las ecuaciones de sintonización.

Por otro lado, se realizaron simulaciones en dos sistemas diferentes para poner a prueba este algoritmo en distintos escenarios:

- Carro-Péndulo:
 - Generación de oscilaciones para realizar un *swing-up*.
 - Oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio inestable.
- Circuito RC:
 - Oscilaciones con variación en la amplitud.
 - Oscilaciones con variación en la frecuencia.

Para el caso del sistema Carro-Péndulo, las pruebas de experimentación arrojaron resultados satisfactorios. De esta manera, se muestra una congruencia entre los resultados teóricos y prácticos.

Como trabajo futuro se plantea la robustificación del algoritmo de generación de oscilaciones frente a errores de amplitud y frecuencia, respectivamente. Una posible opción es mezclar la generación de oscilaciones realizada en este trabajo junto con un control externo que haga seguimiento de trayectoria, y que además, se encargue de minimizar los errores obtenidos.

Apéndices

Apéndice A

Descripción del Carro-Péndulo real

El sistema requiere de los siguientes elementos de hardware y software:

- Tarjeta de adquisición de datos RTDAC4/PCIc, que contiene un dispositivo FPGA.
- Péndulo y carro.
- Cables de alimentación y de conexión.
- Software para el programa de tiempo real.
- MATLAB con Simulink.
- Real Time Workshop para generar el código.
- Real Time Windows Target toolbox.
- Drivers para la comunicación con la tarjeta de adquisición de datos

La Figura A.1 muestra los 6 bloques que contiene el sistema: el proceso, los encoders, FPGA, el generador de PWM, el algoritmo de control y el reloj.

El reloj manda un pulso cada T_0 segundos (paso de muestreo) para que el convertidor PWM mande una señal a la computadora. El algoritmo de control calcula el valor de control y lo manda en forma de número al FPGA.

Los encoders miden dos estados: la posición del carro y el ángulo de péndulo. Estos encoders básicamente consisten en una fuente emisora de luz, un dispositivo que recibe esta luz y un disco rotatorio con rendijas, como se muestra en la Figura A.2.

El encoder del sistema es un HEDM-5505-J06 y tiene una resolución de 1024; obtiene el número de pulsos, que son proporcionales al ángulo de rotación del disco.

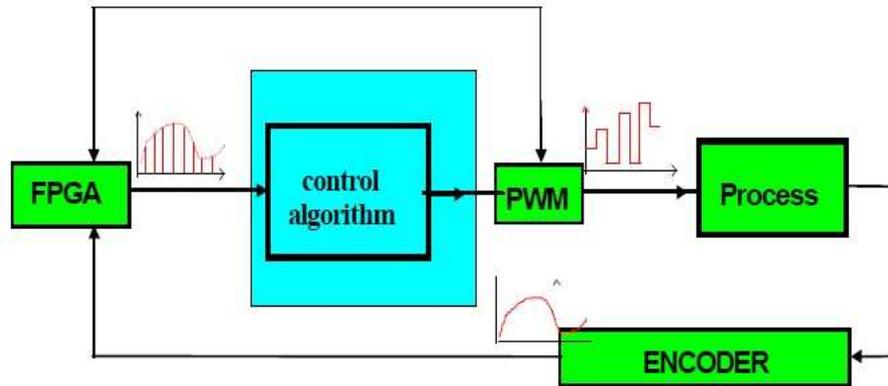


Figura A.1: Proceso de control de la computadora

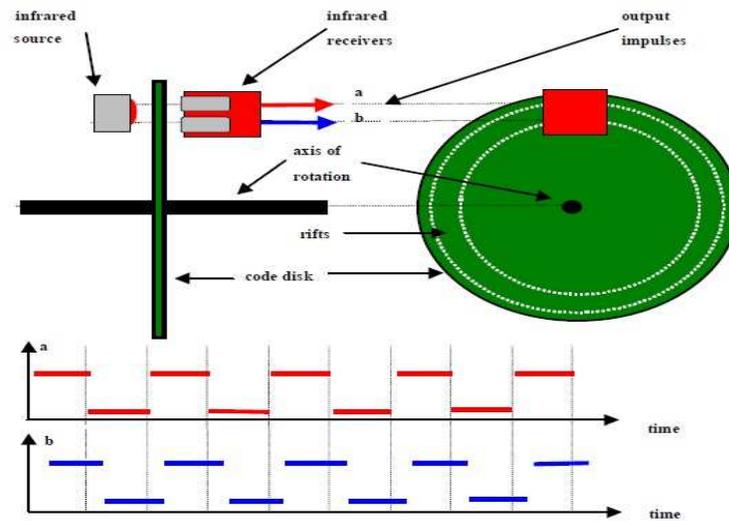


Figura A.2: Sensores ópticos

La señal de control se genera en la computadora hacia el generador PWM, y éste a su vez manda la señal al motor de DC.

El proceso completo de muestra en la Figura A.3.

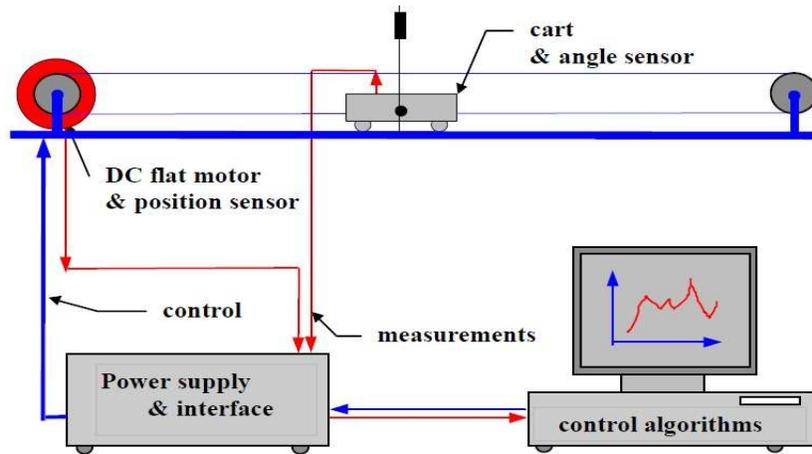


Figura A.3: Sistema de control del Carro-Péndulo

Apéndice B

Funciones descriptivas importantes

B.1. Función descriptiva de un relevador

Se considera la no linealidad $\psi(t) = c \cdot \text{sign}(y(t))$ mostrada en la Figura B.1.

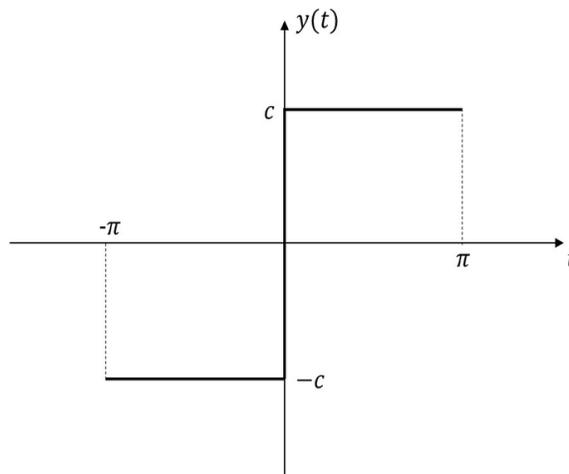


Figura B.1: Relevador

Si se repiten n ciclos iguales en el mismo tiempo, se puede escribir la frecuencia angular como $\omega = 2\pi n$ y por lo tanto el modelo matemático del relevador quedaría

$$r(t) = \begin{cases} -c & \text{si } -p < t < 0 \\ c & \text{si } 0 < t < p \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

donde $p = \pi/\omega$. Realizando un análisis de Fourier de esta función queda

$$r^*(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (\text{B.2})$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{p} \int_{-p}^p r(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{p} \int_{-p}^p r(t) \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= \frac{2}{p} \int_{-p}^p r(t) \sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ya que no hay ningún componente de directa en la señal, $a_0 = 0$; también $n = 1$ debido a que en la DF solo se utiliza la primer armónica de la serie de Fourier. Por último, como la función signo es impar, los coeficientes a_n son cerro.

Sustituyendo en (B.2) se obtiene

$$r^*(t) \approx \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} c \sin(\omega t) dt \sin(\omega t) = \frac{2c}{\pi} [1 - \cos(\pi)] \sin(\omega t) = \frac{4c}{\pi} \sin(\omega t). \quad (\text{B.3})$$

Recordando que la DF se representa como la función de transferencia de la no linealidad, se tiene

$$\begin{aligned} \Psi(A_m, \omega) &= \frac{r^*(t)}{y(t)} = \frac{\frac{4c}{\pi} \sin(\omega t)}{A_m \sin(\omega t)}, \\ \Psi(A_m) &= \frac{4c}{\pi A_m}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En este caso, esta DF solo depende de la amplitud.

B.2. Función descriptiva de un relevador con histéresis

Ahora la no linealidad se representa en la Figura B.2 y está dada por

$$\psi(t) = \begin{cases} -c & \text{si } y(t) < b \\ c & \text{si } y(t) > -b \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Para calcular la DF de ésta no linealidad se sigue el proceso anterior y se obtiene

$$\Psi(A_m) = \frac{4c}{\pi A_m} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_m^2}} - j \frac{4cb}{\pi A_m^2}, \quad A_m \geq b. \quad (\text{B.6})$$

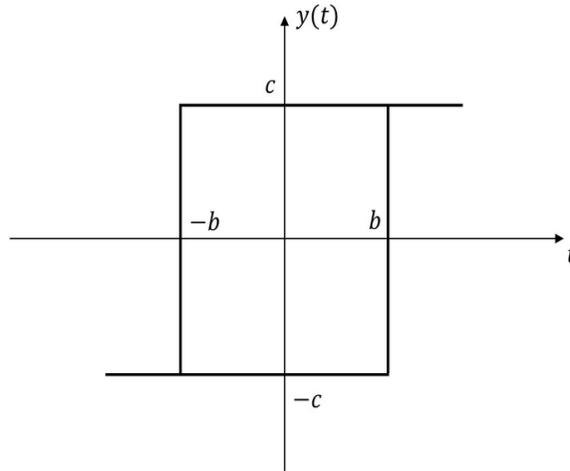


Figura B.2: Relevador con histéresis

B.3. Función descriptiva del algoritmo Sub-Optimal Generalizado

El algoritmo se interpreta gráficamente en la Figura B.3 y se define como

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -\alpha(t)U_M \text{sign}(y(t) - \beta y_M(t)), \\
 \alpha(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y_M(t)(y(t) - \beta y_M(t)) \geq 0 \\ \alpha^* & \text{si } y_M(t)(y(t) - \beta y_M(t)) < 0 \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

La secuencia de puntos singulares de la variable de deslizamiento $y_{MK} = y(t_{MK})$ ($k = 1, 2, \dots$) es la secuencia alternada de valores positivos y negativos $A_m, -A_m, A_m, -A_m$. La conmutación del control ocurrirá en los tiempos cuando la salida del sistema sea igual a βA_m .

Ya que A_m representa el último punto singular de $y(t)$, esto quiere decir que A_m define la amplitud de la solución periódica.

La DF se presenta como

$$\Psi(A_m) = \frac{2U_M}{\pi A_m} \left[(\alpha^* + 1) \sqrt{1 - \beta^2} + j [(\alpha^* - 1) + \beta(\alpha^* + 1)] \right]. \tag{B.8}$$

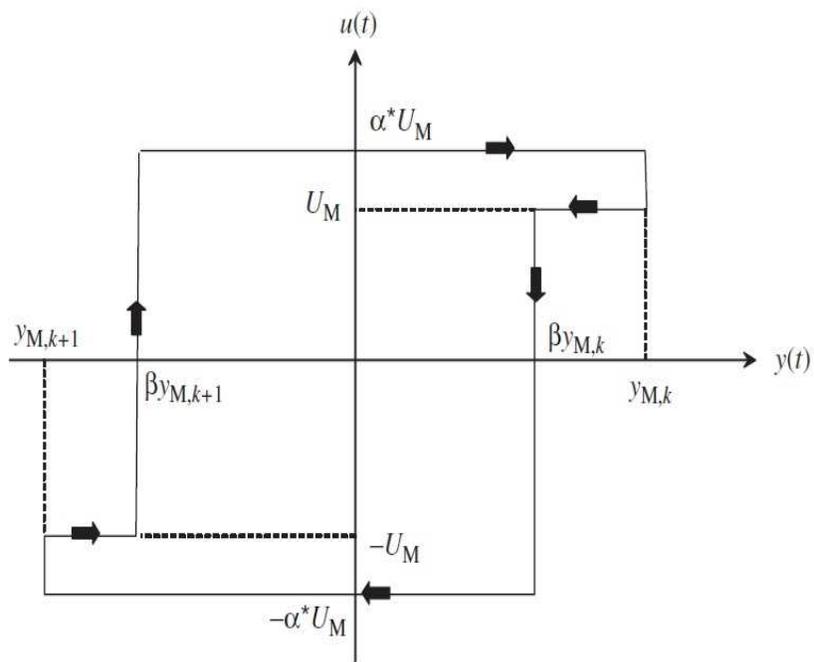


Figura B.3: Algoritmo Sub-Optimal Generalizado

Bibliografía

- [1] L.T. Aguilar, I. Boiko, L. Fridman, and R. Iriarte. *Self-Oscillations in Dynamic Systems: A New Methodology via Two-Relay Controllers*. Springer, USA, 2015.
- [2] C. Albea, C. Canudas de Wit, and F. Gordillo. Adaptive control of the boost dc-ac converter. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, page 611–616, 2007.
- [3] D.P. Atherton. *Non linear control engineering-describing function analysis and design*. Workingam Beks, U.K., 1975.
- [4] R. Balasubramanian. Stability of limit cycles in feedback systems containing a relay. *IEEE Proc., Part D: Control Theory Appl.*, 128(1), pages 24–29, 1981.
- [5] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai. Output tracking control of uncertain nonlinear second-order systems. *Automatica* 33(12), pages 2203–2212, 1997.
- [6] G. Bartolini, A. Pisano, E. Punta, and E. Usai. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems. *International Journal of Control* 76, pages 875–892, 2003.
- [7] I. Boiko. Frequency domain analysis of fast and slow motions in sliding modes. *Asian Journal of Control*, 5(4), pages 445–453, 2003.
- [8] I. Boiko, L. Fridman, A. Pisano, and E. Usai. Fast oscillations in feedback control systems with fast actuators driven by the second-order sliding mode 'suboptimal' algorithm. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, 5, pages 5285–5290, 2004.
- [9] I. Boikoa, L. Fridman, R. Iriarte, A. Pisano, and E. Usai. Parameter tuning of second-order sliding mode controllers for lineal plants with dynamic actuators. *Automatica* 42, pages 833–839, 2006.
- [10] S. Cardon and A. Iberall. Oscillations in biological systems. *Biosystems* 3(3), page 237–249, 1970.

- [11] S.C. Chapra and R.P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. McGraw-Hill, México, 1999.
- [12] C.T. Chen. *Linear Systems: theory and design*. Oxford University Press, New York, 1999.
- [13] F. Chen, T. Liang, R. Lin, and J. Chen. A novel self-oscillating, boost-derived dc–dc converter with load regulation. *IEEE Trans. Power Electron.* *20(1)*, page 65–74, 2005.
- [14] C. Chevallereau, G. Abba, Y. Aoustin, E. Plestan, C. Canudas de Wit, and J. Grizzle. Rabbit: a testbed for advanced control theory. *IEEE Control. Syst. Mag.* *23(5)*, pages 57–79, 2003.
- [15] S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, and L.V. Levantovsky. Higher order sliding regimes in the binary control systems. *Soviet Physics Doklady* *31(4)*, pages 291–293, 1986.
- [16] I.R. Epstein. Nonlinear oscillations in chemical and biological systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena* *51(1–3)*, page 152–160, 1991.
- [17] O. Fendrich. Describing functions in limit cycles. *IEEE Trans. Autom. Control* *37(4)*, pages 486–488, 1992.
- [18] L. Fridman. An averaging approach to chattering. *IEEE Trans. Automat. Contr.* *46(8)*, pages 1260–1265, 2001.
- [19] L. Fridman. Singularly perturbed analysis of chattering in relay control systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* *47(12)*, pages 2079 – 2084, 2002.
- [20] A. Gelb and W.E. Vander Velde. *Multiple-Input Describing Functions and nonlinear systema design*. McGraw-Hill Book Company, Massachusetts, 2000.
- [21] C.F. Gerald and P.O. Wheatley. *Análisis Numérico con Aplicaciones*. Prentice Hall/Pearson Educación, México, 2000.
- [22] D. Gutiérrez. *Observación e Identificación de Sistemas Mecánicos por Modos Deslizantes*. Tesis de Licenciatura en Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, <http://132.248.9.195/ptd2013/septiembre/0701200/Index.html>, México, 2013.
- [23] Y. Hara and R.A. Jahan. Activation energy of aggregation-disaggregation self-oscillation of polymer chain. *Int. J. Mol. Sci.* *(13)*, page 16281–16290, 2012.
- [24] J.M. Holtzman. Contraction maps and equivalent linearization. *Bell Syst. Tech. J.* *46(10)*, pages 2405–2435, 1967.

-
- [25] Y. Hurmuzlu, F. Génot, and B. Brogliato. Modeling, stability and control of biped robots—a general framework. *Automatica* 40, page 1647–1664, 2004.
- [26] R. Robinett III and D. Wilson. What is a limit cycle? *Int. J. Control* 81(12), pages 1886–1900, 2008.
- [27] INTECO. *Pendulum-Cart System*. User’s Manual. INTECO, U.S.A., 2012.
- [28] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, U.S.A., 2002.
- [29] D.R. Koenig and E.M. Weig. Voltage-sustained self-oscillation of a nano-mechanical electron shuttle. *Appl. Phys. Lett.* 101(213111), pages 1–5, 2012.
- [30] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control* 58, pages 1247–1263, 1993.
- [31] A.T. Lin and C. Lin. Peniotron forward wave self-oscillations. *Appl. Phys. Lett.* 64(9), page 1088–1090, 1994.
- [32] J.M. Loeb. *Frequency Response*. The Macmillan Company, New York, 1956.
- [33] L. Martínez-Salamero, H. Valderrama-Blavi, R. Giral, C. Alonso, B. Estibals, and A. Cid-Pastor. Self-oscillating dc-to-dc switching converters with transformer characteristics. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 41(2), page 710–716, 2005.
- [34] R.K. Miller and A.N. Michel. On existence of periodic motion in nonlinear control systems with periodic inputs. *SIAM J. Control Optimization* 18(5), pages 585–598, 1980.
- [35] J.C. Olivier, J.C. Le Claire, and L. Loron. An efficient switching frequency limitation process applied to high dynamic voltage supply. *IEEE Trans. Power Electron.* 23(1), page 153–162, 2008.
- [36] Y. Orlov, L. Aguilar, L. Acho, and A. Ortiz. Asymptotic harmonic generator and its application to finite time orbital stabilization of a friction pendulum with experimental verification. *Int. J. Control* 81(2), pages 227–234, 2008.
- [37] F. Plestan, J. Grizzle, E. Westervelt, and G. Abba. Stable walking of a 7-dof biped robot. *IEEE Trans. Robot. Autom.* 19(4), page 653–668, 2003.
- [38] I.W. Sandberg. On the response of nonlinear control systems to periodic input signals. *Bell Syst. Tech. J.* 43(3), pages 911–926, 1967.
- [39] R. Santiesteban, T. Floquet, Y. Orlov, S. Riachy, and J. Richard. Second order sliding mode control for underactuated mechanical system ii: orbital stabilization of an inverted pendulum with application to swing up/balancing control. *Int. J. Robust Nonlinear Control* 18(4–5), pages 544–556, 2008.

- [40] Y. B. Shtessel and Y.J. Lee. New approach to chattering analysis in systems with sliding modes. *In: Proceedings of the 35th IEEE CDC*, pages 4014–4019, 1996.
- [41] R.V. Solé and S.C. Manrubia. *Orden y caos en sistemas complejos: Aplicaciones*. POLITEXT, Univ. Politèc. de Catalunya, 2009.
- [42] Y. Tsytkin. *Relay Control Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [43] V. Utkin. *Sliding modes in control and optimization*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1992.
- [44] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis, London, 1999.
- [45] S. Varigonda and T. Georgiou. Dynamics of relay relaxation oscillators. *IEEE Trans. Autom. Control* 46(1), pages 65–77, 2001.
- [46] J. Weldon, B. Alemán, A. Sussman, W. Gannett, and A. Zettl. Sustained mechanical self-oscillations in carbon nanotubes. *Nano Lett.* (10), page 1728–1733, 2010.
- [47] K.K. Zhilcov. *Approximate methods of variable structure systems analysis*. Mahsinostroeniye, Moscow, 1974.