



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CELDAS LIBRES EN HIPERESPACIOS DE DENDROIDES Y CONTINUOS CPP.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
GERARDO REYNA HERNÁNDEZ

TUTOR
DRA. MARÍA ISABEL PUGA ESPINOSA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
DR. SERGIO MACIAS ALVAREZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO DISTRITO FEDERAL, OCTUBRE 2015.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Eitan...

Resumen

La presente tesis se compone de cuatro capítulos. En el primero se dan las nociones generales de la Teoría de Continuos (Definiciones, resultados, ejemplos etc.) que son útiles para los siguientes tres. Aquellas nociones que no se mencionen en este capítulo aparecen en el texto en el lugar que se requieran y, en la mayoría de las veces, se deja indicada mediante una cita la bibliografía para mayor referencia.

En el segundo capítulo, hacemos un estudio de la dimensión en los niveles de Whitney de Hiperespacios anclados de dendroides suaves.

En el tercer capítulo, definimos un continuo C_{pp} como aquel *continuo cuyos hiperespacios anclados son siempre poliedros*. Y presentamos el resultado (Teoremas 3.32 y 3.33) que establece que: “*Un continuo localmente conexo es C_{pp} si y sólo si es una gráfica finita*”.

Cabe mencionar que el Ejemplo 3.34 hace ver que la conexidad local es una hipótesis esencial en este resultado. Más adelante (Sección 3.5), caracterizamos al arco en términos de hiperespacios anclados (Teorema 3.53) obteniendo que: “*El arco es el único continuo arcoconexo para el cual, uno de sus hiperespacios anclados es un arco*”.

En el cuarto capítulo, se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de n -celdas libres maximales en el hiperespacio de continuos de una dendrita X (Teoremas 4.10 y Proposición 4.11), después se dan condiciones necesarias y suficientes para que las primeras apliquen al caso en el que X es un dendroide. Por último, aprovecho la ocasión para darle las **GRACIAS A TODOS...!!**

índice:

Resumen	III
1. Definiciones y notaciones.	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Métrica de Hausdorff e Hiperespacios	4
1.3. Lím inf, Lím sup, Lím.	10
2. Niveles de Whitney.	11
2.1. Funciones de Whitney.	11
2.2. Dimensión	12
2.3. Niveles de Whitney.	12
3. Continuos Cpp	19
3.1. Poliedros.	19
3.2. Gráficas finitas	20
3.3. Gráficas finitas y sus hiperespacios anclados	23
3.3.1. Celdas notables en el hiperespacio anclado de una gráfica finita	25
3.3.2. Las gráficas finitas son continuos Cpp	35
3.4. Los continuos Cpp cuyo hiperespacio de continuos $C(X)$ es localmente conexo son gráficas finitas	46
3.5. Caracterización del arco en términos de hiperespacios anclados.	48
4. Celdas libres	51
4.1. Celdas libres en hiperespacios de dendritas	51
4.2. Celdas libres en hiperespacios de dendroides	62
4.3. Preguntas abiertas	63
Bibliografía	66
índice alfabético	66

Capítulo 1

Definiciones y notaciones.

1.1. Preliminares

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo con más de un punto. Ejemplos de continuos son: el intervalo cerrado $[0, 1]$, la circunferencia $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$, el producto cartesiano $[0, 1]^n$ de n copias del intervalo cerrado $[0, 1]$ y la *n-esfera* $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$. Otro ejemplo es el *cubo de Hilbert*, éste se define como cualquier continuo homeomorfo al espacio $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, con la topología producto.

Un *arco* es cualquier continuo homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Si A es un arco y $f : [0, 1] \rightarrow A$ es un homeomorfismo, los puntos $f(0)$ y $f(1)$ se denominan *extremos* del arco A . Una *curva cerrada simple* es cualquier continuo homeomorfo a la circunferencia S^1 .

Un *subcontinuo* Y de un continuo X es un subespacio de X que es, en sí mismo, un continuo, admitiremos que un subcontinuo sólo tenga un punto, en cuyo caso dicho subcontinuo es un *subcontinuo degenerado* de X . Un espacio M es una *n-celda* si existe un homeomorfismo de $[0, 1]^n$ en M . Denotaremos con M° al subconjunto de M que es homeomorfo a $(0, 1)^n$ y lo llamaremos el *interior variedad* de M , mientras que el conjunto $\partial M = M - M^\circ$ será llamado la *frontera variedad* de M , dejando la notación $Int M$ y $Fr M$ para el interior y frontera topológica respectivamente.

Se dice que un continuo X es *unicoherente* si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Un arco es un ejemplo de un continuo que es unicoherente, mientras que una curva cerrada simple es un ejemplo de un continuo que no lo es. Se dice que un continuo X es *hereditariamente unicoherente* si todos sus subcontinuos son unicoherentes. Un arco es un ejemplo de un continuo que es hereditariamente unicoherente. Si X es una compactación del rayo con residuo una curva cerrada simple, entonces X es un ejemplo de un continuo que es unicoherente pero que

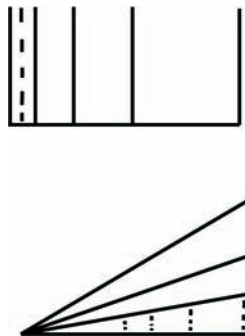


Figura 1.1: Peine y Abanico Armónico.

no es hereditariamente unicoherente. Un continuo X es *arcoconexo* si para cualesquiera dos de sus puntos $a, b \in X$ existe un arco $A \subset X$ cuyos extremos son a y b .

Un *dendroide* es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Se desprende fácilmente de la definición que los dendroides son *únicamente arcoconexos* (i.e, entre cualesquiera dos de sus puntos, existe un único arco que los une), en este caso, si X es un dendroide y $a, b \in X$, denotamos al único arco de extremos a y b como $A = [a, b]$ o simplemente como. También haremos uso de la siguiente notación $A - \{a\} = (a, b]$ y $(a, b) = [a, b] - \{a, b\}$.

Ejemplos de dendroides son el *Peine* y el *Abanico Armónico*, estos se muestran en la Figura 1.1. Un ejemplo de un continuo que no es arcoconexo es el *Seno topológico* (o *Continuo* $Sen(\frac{1}{x})$) y se define como la cerradura en \mathbb{R}^2 del conjunto $\{(x, sen(\frac{1}{x})) | 0 < x \leq 1\}$ ver Figura 3.17.

Un dendroide X es *suave* en $p \in X$, si para cada sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \rightarrow p$, la sucesión correspondiente de arcos $[x_n, p]$ converge al arco xp en el sentido de la métrica de Hausdorff (ver sección 1.2). Diremos que un dendroide X es *suave*, si existe un punto $p \in X$, tal que X es suave en p y, en este caso, diremos que p es un *punto inicial* del dendroide X . Los dendroides de la Figura 1.1 son suaves mientras que el de la Figura 1.2 no lo es.

Un punto del dendroide X es *terminal* si es extremo de cada arco que lo contiene. Decimos que un punto $x \in X$ es de *orden mayor o igual que un entero positivo r* en X si existen r arcos en X cuya intersección dos a dos es $\{x\}$. Decimos que el orden de x en X es igual a r si el orden de x en X es mayor o igual que r , pero el orden de x en X no es mayor o igual que $r + 1$. Si el orden de x en X es r escribiremos $o_X(x) = r$ o simplemente

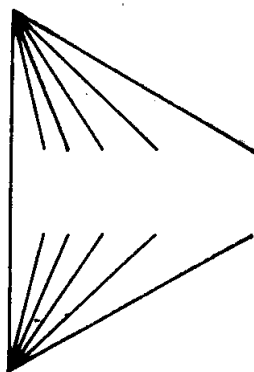


Figura 1.2: Dendroide no suave

$o(x) = r$ si no hay duda sobre qué espacio se está considerando el orden.

Si $o(x) \geq 3$ se dice que x es un *punto de ramificación*. Un punto q en X es *I-esencial* si $o(q) \geq r$ para cada número natural r , q es *II-esencial* si existe un arco $\alpha \subset X$ y una sucesión de puntos diferentes de ramificación $(q_n) \subset \alpha$ que converge a q . Un punto de un dendroide que no es ninguno de los anteriores se denomina *ordinario*. Denotaremos con $R(X)$, $E(X)$, $T(X)$ y $O(X)$ a los conjuntos de puntos de ramificación, esenciales, terminales y ordinarios respectivamente. Salvo los puntos ordinarios, estos puntos constituyen los *vértices* del dendroide X . Una *arista* de un dendroide X es un arco $J \subseteq X$ cuyos extremos son dos vértices de X , de tal forma que ningún otro vértice de X está en el interior de J . Una arista, se llama *terminal* si uno de sus extremos es un vértice terminal.

Una *dendrita* es un dendroide localmente conexo. Todos los puntos de una dendrita son iniciales y recíprocamente: si un dendroide es suave en todos sus puntos, entonces dicho dendroide es una dendrita [1, Cor. 4 y 5, Pags. 298, 299]. La *Dendrita de Gehman* (Figura 1.3) es un ejemplo de una dendrita, *el Peine* y el *Abanico Armónico* son ejemplos de dendroides que no son dendritas. Un *árbol* X es una dendrita sin puntos esenciales. La dendrita de Gehman es un ejemplo de dendrita que no es árbol. Ejemplos de árboles son: el Arco, el *triodo simple* (Figura. 1.4) o cualquier *n-odo simple*, i.e., árbol con sólo un punto de ramificación y exactamente n puntos terminales. Si v es el único punto de ramificación de un *n-odo simple*, éste se denomina *vértice* del *n-odo*.

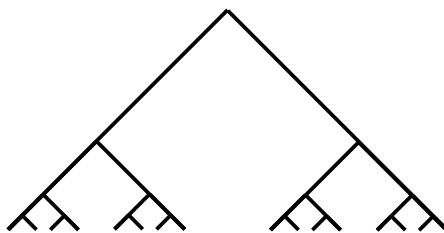


Figura 1.3: Dendrita de Gehman

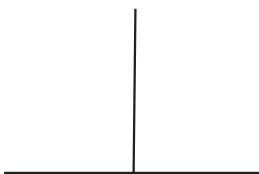


Figura 1.4: Triodo simple

1.2. Métrica de Hausdorff e Hiperespacios

Dados un subconjunto cerrado no vacío Y de un continuo X y $\epsilon > 0$, se define la *nube* de radio ϵ y centro en Y como el conjunto:

$$N_\epsilon(Y) = \{x \in X \mid \text{existe } y \in Y \text{ tal que } d(x, y) < \epsilon\}$$

Si en el conjunto $2^X = \{Y \subset X \mid Y \text{ es un subconjunto cerrado no vacío de } X\}$ se define la función $H : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$H(Y, Z) = \inf\{\epsilon > 0 \mid Y \subset N_\epsilon(Z) \text{ y } Z \subset N_\epsilon(Y)\},$$

entonces H es una métrica para 2^X llamada *métrica de Hausdorff* [11, Teo. 0.2, pág. 2] y 2^X , con la topología que de esta métrica se obtiene, resulta ser un continuo [11, Teo. 1.13, pág. 65]. El subconjunto $C(X) \subset 2^X$ definido mediante $C(X) = \{Y \in 2^X \mid Y \text{ es un subcontinuo de } X\}$ es un subcontinuo de 2^X , éste es el así llamado *hiperespacio de subcontinuos* de X .

Si $p \in X$, el *hiperespacio de subcontinuos de X anclados en p* es el subespacio $C_p(X) = \{Y \in C(X) \mid p \in Y\}$. Un hecho conocido es que los hiperespacios anclados son, de hecho, subcontinuos de 2^X [11, 1.208.5, pág. 200].

Ejemplo 1.1. Si $X = [0, 1]$ y $Y = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, entonces $H(X, Y) = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 1.2. Si X es un continuo homeomorfo a $[0, 1]$, entonces $C(X)$ es una 2-celda. Supongamos sin perder generalidad que X es el segmento $[0, 1]$ del eje x del plano cartesiano xy , que un extremo es el punto $v = (0, 0)$ y que el otro extremo es el punto

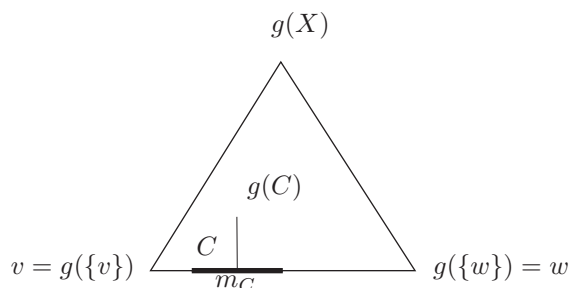


Figura 1.5:

$w = (1, 0)$. Bajo estas suposiciones cada subcontinuo C de X está determinado por su punto medio m_C y su diámetro $\delta(C)$. La fórmula $g(C) = (m_C, \delta(C))$ es un homeomorfismo entre $C(X)$ y el triángulo T de vértices $g(\{v\}) = v$, $g(\{w\}) = w$ y $g(X) = (\frac{1}{2}, 1)$ (Figura 1.5).

Ejemplo 1.3. Si $X = [0, 1]$ y $p = 0$ o $p = 1$, entonces $C_p(X)$ es un arco, mientras que si $p \in (0, 1)$, entonces $C_p(X)$ es una 2-celda.

Ejemplo 1.4. Si X es un espacio homeomorfo a S^1 , entonces $C(S^1)$ es una 2-celda. Para probarlo supóngase, sin perder generalidad, que X es de hecho el espacio S^1 . Con estas suposiciones cada subcontinuo propio C de X queda perfectamente determinado por su punto medio m_C y la longitud de arco $l(C)$, donde $0 \leq l(C) \leq 2\pi$. Sea $D = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$. Si introducimos coordenadas polares en el plano xy , cada punto p de D se puede representar como un vector mediante un par ordenado $(\alpha(p), r(p))$ donde $\alpha(p)$ denota el ángulo del vector p mientras que $r(p)$ denota la longitud del vector p (Figura 1.6). Así, las asignaciones $h(C) = (0, 0)$, si $C = X$ y $h(C) = (\alpha(m_C), 1 - \frac{l(C)}{2\pi})$ es un homeomorfismo entre $C(S^1)$ y D .

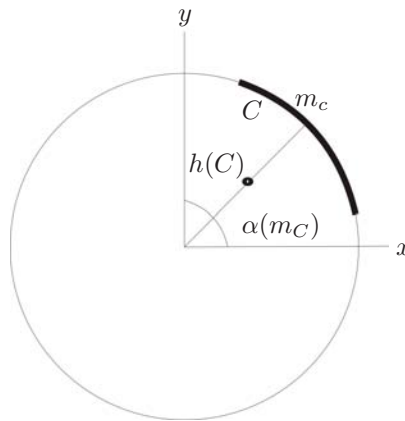


Figura 1.6:

Ejemplo 1.5. Si $X = S^1$, entonces $C_p(X)$ es una 2-celda para cada $p \in X$. Esbozaremos la prueba, para mayores detalles ver [6, pág. 34]. Supóngase, sin perder generalidad, que $p = (1, 0)$. Considérese el conjunto \mathcal{B}_1 , cuyos elementos son los subarcos de S^1 que tienen a p como extremo izquierdo, donde el extremo izquierdo de un subarco es el extremo del arco que queda a la izquierda cuando al pararse sobre el arco se observa en dirección del origen. Notése que, para cada $A \in \mathcal{B}_1$, el punto medio de A está en la mitad de arriba de S^1 . Los elementos de \mathcal{B}_1 van desde los muy pequeños, que son casi iguales a $\{p\}$ (para éstos su punto medio está también muy cercano a p y, como su longitud es casi cero, ellos quedan representados en el disco muy cerca de $\{p\}$) hasta los muy grandes que son casi iguales a S^1 , cuyo punto medio está muy cecano al punto $-p$ y como su longitud es casi 2π , estarán representados por puntos muy cercanos al origen. Así \mathcal{B}_1 en el disco tiene una representación como la que se muestra en la Figura 1.7. En dicha figura también se ha incluido la representación del conjunto \mathcal{B}_2 cuyos elementos son los subarcos de S^1 que contienen a p como extremo derecho. Como cada subarco A de S^1 que contiene a p está entre dos subarcos del mismo tamaño que A , uno que tiene a p como extremo derecho y otro que lo contiene como extremo izquierdo, se concluye que $C_p(S^1)$ queda representado por la región limitada por \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 .

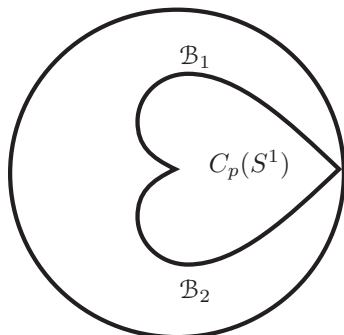


Figura 1.7:

Ejemplo 1.6. Si p es como en el Ejemplo 1.5 y tomamos otro punto de S^1 , digamos $q = -p$, el hiperespacio $C_q(S^1)$ queda representado en el disco como se ilustra en la Figura 1.8. El conjunto $C_q(S^1) \cap C_p(S^1)$ es la unión de dos 2-celdas $D_1 \cup D_2$ cuyo único punto en común es el que representa a S^1 . Si denotamos con \mathcal{L}_1 a uno de los arcos en S^1 que une p con q y con \mathcal{L}_2 al otro de estos arcos, entonces D_1 es el conjunto de los subarcos de S^1 que contienen al arco \mathcal{L}_1 , mientras que D_2 es el conjunto de los subarcos de S^1 que contienen al arco \mathcal{L}_2 . El conjunto $D_3 = \overline{C_q(S^1)} - (D_1 \cup D_2)$ también es una 2-celda. Si establecemos que las intersecciones entre estas celdas son caras, entonces hemos dado a $C_q(S^1) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ una estructura de poliedro (ver Definición 3.2).

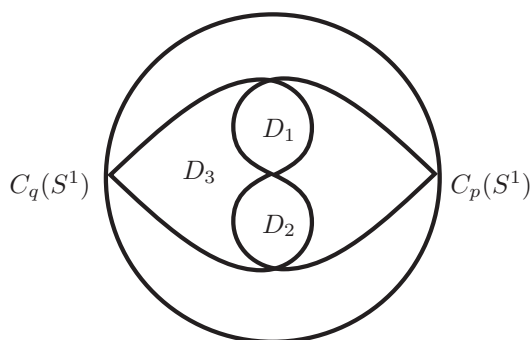


Figura 1.8:

Ejemplo 1.7. Si X es un triodo simple y p_1 es el vértice del triodo, entonces $C_{p_1}(X)$ es una 3-celda. Si p_2 es un punto en el interior variedad de alguna arista de X , entonces $C_{p_2}(X)$ es la unión de una 3-celda y una 2-celda cuya intersección es una cara de ambas celdas. Por último, si p_3 es un punto extremo, entonces $C_{p_3}(X)$ es la unión de un arco y una 2-celda cuya intersección es un extremo del arco (Figura 1.9).

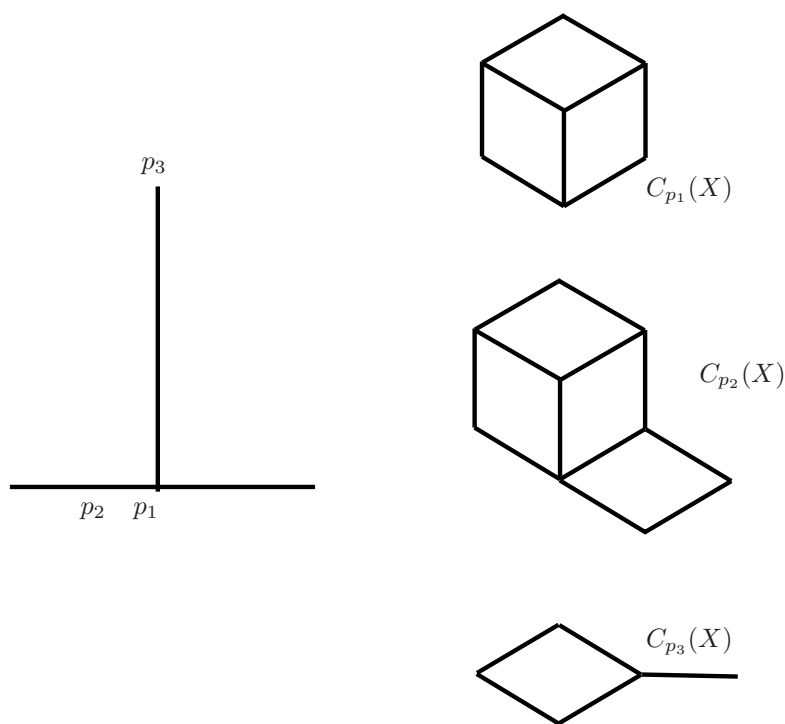


Figura 1.9:

Entre otras cosas, el estudio de los hiperespacios $C(X)$ o $C_p(X)$ consiste en analizar qué propiedades tienen en sí mismos o bien, qué propiedades de X inducen cuáles propiedades en $C(X)$ o en $C_p(X)$ y viceversa. Por ejemplo, por mencionar algunos, se conocen los siguientes resultados:

Teorema 1.8. [11, Teo. 1.12 pág. 65] *Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es arcoconexo.*

Teorema 1.9. [15] [16] *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si $C(X)$ es localmente conexo.*

Teorema 1.10. [11, 1.208.5 pág. 200] *Si X es un continuo y $p \in X$, entonces $C_p(X)$ es localmente conexo.*

Teorema 1.11. [4, Teo. 8 pág. 223] *Si X es un dendroide suave en p , entonces $C_p(X)$*

es un Cubo de Hilbert si y sólo si p no está en el interior de un árbol contenido en X .

Teorema 1.12. [11, 1.208.5, pág. 200] Si A y B son subcontinuos de un continuo X , entonces el espacio $\{K \in C(X) : A \subset K \subset B\}$ es un subcontinuo localmente conexo de $C(X)$.

Teorema 1.13. [11, 0.49 pág. 23] Si X y Y son continuos y $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces la función inducida $\hat{f} : C(X) \rightarrow C(Y)$, definida mediante $\hat{f}(A) = f(A)$, también es continua.

Del teorema anterior se sigue fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 1.14. Si X y Y son continuos y $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces $\hat{f} : C(X) \rightarrow C(Y)$ es un homeomorfismo.

Demostración: Ello se debe al hecho de que la función inducida \hat{f} es una biyección continua entre continuos. ■

1.3. Lím inf, Lím sup, Lím.

Definición 1.15. Sea (S, τ) un espacio topológico, y sea (A_n) una sucesión de subconjuntos de S . Definimos $\text{Lím inf } (A_n)$ y $\text{Lím sup } (A_n)$ como sigue:

$\text{Lím inf } (A_n) = \{x \in S \mid \text{para cada } U \in \tau, \text{ tal que } x \in U, U \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para todos, salvo a lo más una cantidad finita de índices } n\};$

$\text{Lím sup } (A_n) = \{x \in S \mid \text{para cada } U \in \tau, \text{ tal que } x \in U, U \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para una cantidad finita de índices } n\}.$

Definición 1.16. Sean (S, τ) un espacio topológico y (A_n) una sucesión de subconjuntos de S y sea $A \subset S$. Escribiremos $\text{Lím } (A_n) = A$, para referirnos a que $\text{Lím sup } (A_n) = A = \text{Lím inf } (A_n)$.

Teorema 1.17. Sea X un espacio métrico compacto, y sea (A_n) una sucesión de subconjuntos, compactos, no vacíos de X . Entonces, $\text{Lím } (A_n) = A$ si y sólo si (A_n) converge a A en 2^X con respecto a la métrica de Hausdorff H .

Capítulo 2

Niveles de Whitney.

2.1. Funciones de Whitney.

En esta sección se estudiará la dimensión de los niveles de Whitney en dendroides suaves. Para ello definiremos a continuación estos conceptos. Sea X un continuo y $C(X)$ el hiperespacio de subcontinuos de X . Una *función de Whitney* para $C(X)$, es una función continua $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ tal que $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$ y si $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$. Se sabe que las funciones de Whitney siempre existen [11, 0.50.2, 0.50.3, pág. 26, 27]. Si $p \in X$, considérese el hiperespacio anclado $C_p(X)$; ahora, si $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney, denotaremos con $\mu_p = \mu|_{C_p(X)}$ a la restricción de μ a $C_p(X)$.

Si $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney, entonces las fibras $\mu^{-1}(t)$, para $t \in (0, 1)$ se llaman *niveles de Whitney*; los niveles de Whitney son subcontinuos de $C(X)$ [6, Lema 8.4, pág. 112].

2.2. Dimensión

Definición 2.1. *El conjunto vacío y sólo el conjunto vacío tiene dimensión -1 . Un espacio X tiene dimensión menor o igual que n ($n \geq 0$) en un punto p ($\dim_p(X) \leq n$), si existe una base local en p cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual que $n - 1$. El espacio X tiene dimensión menor o igual que n ($\dim(X) \leq n$), si $\dim_p(X) \leq n$ para cada $p \in X$.*

El espacio X tiene dimensión n en un punto p ($\dim_p(X) = n$), si $\dim_p(X) \leq n$ pero $\dim_p(X) \not\leq n - 1$.

X tiene dimensión n ($\dim X = n$), si $\dim(X) \leq n$ pero $\dim(X) \not\leq n - 1$.

X tiene dimensión ∞ si $\dim(X) \not\leq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

La dimensión es un invariante topológico, [13, Teo. 1.2, pág. 6]. Además, de que es monótona (i.e. si $X \subset Y$, entonces $\dim(X) \leq \dim(Y)$) [13, Teo. 3.2, Pág. 15]. Las n -celdas tienen dimensión igual a n [13, Teo. 9.5 pág. 49].

2.3. Niveles de Whitney.

Recordemos que si $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney, entonces los niveles de Whitney $\mu^{-1}(t)$, para $t \in [0, 1]$ son subcontinuos de $C(X)$ [6, Lema 8.4, pág. 112].

Proposición 2.2. *Sea X un dendroide suave en p , $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney y $0 < t < 1$. Si para cada $A \in \mu_p^{-1}(t)$, A no tiene puntos esenciales, entonces $\dim(\mu_p^{-1}(t)) < \infty$.*

Demostración: Para cada $A \in \mu_p^{-1}(t)$ existen $\delta_A > 0$ y $n_A \in \mathbb{N}$ tales que la bola $B_{\delta_A}(A)$ de centro A y radio δ_A , en la métrica de Hausdorff, es homeomorfa a I^{n_A} (ver demostración de [9, 1.2 f pág. 43]). De la compacidad de $\mu_p^{-1}(t)$, se sigue que existen $A_1, \dots, A_k \in \mu_p^{-1}(t)$ tales que $\mu_p^{-1}(t) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{\delta_{A_i}}(A_i)$. Como $\bigcup_{i=1}^k B_{\delta_{A_i}}(A_i)$ es de dimensión finita [13, Teo. 6.1 pág. 29]. Así, también $\mu_p^{-1}(t)$ es de dimensión finita. ■

Si X es un dendroide no degenerado, entonces $\mu^{-1}(0)$ y $\mu^{-1}(1)$ son de dimensión 1 y 0 respectivamente, ello se debe a que cualquier dendroide no degenerado tiene dimensión 1 ([13, Ejer. 19.40, pág. 123] y $\mu^{-1}(0)$ es homeomorfo a X y por otro lado, $\mu^{-1}(1)$ consta de un sólo punto.

Quisiéramos saber si $\dim(\mu_p^{-1}(t))$ o $\dim(\mu^{-1}(t))$ son finitas o infinitas, en donde $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney, X cualquier dendroide, $0 < t < 1$ y p es un punto inicial de X . Para ello requeriremos del siguiente lema acerca de continuidad.

Lema 2.3. Sean X y Y espacios métricos, entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua en x si y sólo si para cada sucesión $(x_n) \subset X$ que converge a x existe una subsucesión $(f(x_{n_k}))$ de $(f(x_n))$ que converge a $f(x)$

Demostración: La primera parte es trivial. Para la otra parte, supongamos que existe una sucesión $(x_n) \subset X$ convergente a x tal que $f(x_n)$ no converge a $f(x)$, ello implica que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un número $n_k \geq k$ y un punto x_{n_k} tal que $d(f(x_n), f(x_{n_k})) \geq \epsilon$. La sucesión (x_{n_k}) converge a x y no admite ninguna subsucesión cuyas imagenes converjan a $f(x)$. ■

Proposición 2.4. Sean X un dendroide y p un punto inicial. Si A es un árbol en $\mu_p^{-1}(t)$, distinto de una arista, y A contiene un punto esencial q distinto de p , entonces $\dim(\mu_p^{-1}(t)) = \infty$.

Demostración: Tenemos dos casos a considerar:

Caso 1: El punto q es I -esencial:

Sea $J = [r, s]$ una arista terminal de A , con r el punto que es terminal de A . Ahora tomése un punto $u \in J$ tal que $q, p \notin [u, r]$ y considérese el subárbol $A' = A - (u, r]$, con lo que $\mu_p(A') < t$.

Ahora bien, dado $n \in \mathbb{N}$, tómnese n arcos distintos $J_1 = [r_1, q], \dots, J_n = [r_n, q]$ tales que $J_i \cap A = \{q\}$, $J_i \cap J_j = \{q\}$ si $i \neq j$ y $\mu(A' \cup \bigcup_{i=1}^n J_i) \leq t$ (ver Figura 2.1).

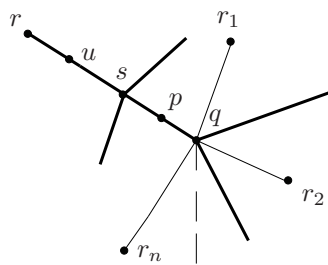


Figura 2.1:

Ahora, para cada subcontinuo $B = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q])$ con $x_i \in J_i$, denotemos por $\alpha(B)$ al subcontinuo $A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q]) \cup [x_{n+1}, u]$ asegurado por el Teorema del valor intermedio, tal que $\mu(\alpha(B)) = t$, donde $x_{n+1} \in [r, u]$. Afirmamos que la asignación $B \mapsto \alpha(B)$ es una función continua: Tomemos una sucesión (B^m) , donde $B^m = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i^m, q])$ es

tal que B^m converge a $B = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q])$. Sea x_{n+1} el punto del arco $[u, r]$ tal que

$$\alpha(B) = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q]) \cup [x_{n+1}, u]$$

Considérese la sucesión $([x_{n+1}^m, u]) \subset C([u, r])$ tal que $\alpha(B^m) = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n ([x_i^m, q]) \cup [x_{n+1}^m, u])$. Por ser $[u, r]$ compacto, existe una subsucesión convergente $(x_{n+1}^{m_k})$ de (x_{n+1}^m) , digamos que el punto x'_{n+1} es su límite. Por ser $[u, r]$ suave [1, Cor. 4 y 5] la subsucesión $([x_{n+1}^{m_k}, u])$ de $([x_{n+1}^m, u])$ converge al subarco $[x'_{n+1}, u]$ de $[u, r]$. Así, la subsucesión $\alpha(B^{m_k})$ de $\alpha(B^m)$ converge a $C = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q]) \cup [x'_{n+1}, u]$.

Ahora bien, nótese que $C \subset \alpha(B)$ o bien $\alpha(B) \subset C$. Por otro lado, de la continuidad de μ se tiene que $\mu(C) = t$. Del párrafo anterior, se resulta que $\alpha(B) = C$. Se deduce de esto y el Lema 2.3 la continuidad de α .

Por último, la asignación

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \alpha(A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q])) = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q]) \cup [x_{n+1}, u] \text{ es un encaje de } \prod_{i=1}^n J_i \text{ en } \mu_p^{-1}(t) \text{ como se muestra a continuación:}$$

La asignación claramente es inyectiva. Ahora bien, tómesese $(\mathbf{x}_m) \subset \prod_{i=1}^n J_i$ una sucesión convergente, digamos al punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, queremos probar que si $B_m = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i^m, q])$, entonces $\alpha(B_m)$ converge al punto $A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q]) \cup [x_{n+1}, u]$. Sin embargo, como ya probamos la continuidad de α , es suficiente mostrar que B_m converge a $B = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q])$, para ello mostraremos que $\liminf B_m = B$ ver [12, 4.8, Teo 4.11].

Tómesese un punto $x \in [x_i, q]$. Si $x = x_i$ dado que la sucesión x_i^m converge a x_i , es claro que cualquier abierto que contenga a x intersectará a todos salvo a lo más un número finito de los continuos B_m , y en este caso, $x \in \liminf B_m$. Si $x \neq x_i$, existe un número natural N tal que $x \in [x_i^m, q]$ para cada $m \geq N$, esto quiere decir que $U \cap B_m \neq \emptyset$ para cualquier conjunto abierto U que contenga a x para cada $m \geq N$, lo que muestra, otra vez, que $x \in \liminf B_m$. Por otro lado, es claro que si $x \in A'$ entonces $x \in \liminf B_m$. Así, $B \subset \liminf B_m$. Ahora, si $x \notin B$, fácilmente se muestra que $x \notin \liminf B_m$, lo que muestra que $\liminf B_m = B$ y por tanto la asignación:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \alpha(A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q])) = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [x_i, q]) \cup [x_{n+1}, u] \text{ es un encaje de } \prod_{i=1}^n J_i \text{ en } \mu_p^{-1}(t) \text{ como queríamos. Siendo } n \text{ un entero positivo arbitrario, se tiene que } \dim(\mu_p^{-1}(t)) \geq n \text{ para cada } n \text{ y, por tanto la dimensión de } \mu(t)^{-1} \text{ es infinita.}$$

Caso 2: El árbol A contiene un punto II-esencial q :

En este caso sea α un arco de X y $(q_m) \subset \alpha$ una sucesión de puntos de ramificación distintos tales que converge a q . Afirmamos que podemos tomar α de manera que $\alpha \subset A$. En efecto, si tal no es el caso, hay dos opciones: La primera opción se da cuando la

intersección $\alpha \cap A$ contiene una infinidad de puntos q_m , en este caso podemos tomar como α dicha intersección. La segunda, cuando $A \cap \alpha$ contiene una cantidad finita de puntos q_m . En este caso considérese una arista terminal $[r, s]$ de A con r punto terminal de A y considérese un punto $u \in [r, s]$ de tal forma que $p, q \notin [u, r]$, ahora, si al tomar el subcontinuo $A' = A - [r, u)$ resulta que $\mu(A' \cup \alpha) < t$, entonces, por el Teorema del valor intermedio, existe un punto x en el arco $[u, r]$ tal que $\mu(A' \cup \alpha \cup [u, x]) = t$. En este caso podemos tomar como A al continuo $A' \cup \alpha \cup [u, x]$. Mientras que si $\mu(A' \cup \alpha) > t$, de nuevo, por el Teorema del valor intermedio existe un punto $x \in \alpha$ tal que $\mu(A' \cup [x, q]) = t$ (donde el arco $[x, q]$ contiene una infinidad de puntos q_m y en este caso tomamos a A como el continuo $A' \cup [x, q]$).

Así las cosas, dado que $o_X(q_m) \geq 3$ y A es un árbol, podemos tomar arcos $L_m = [x_m, q_m]$ tales que $L_m \cap A = \{q_m\}$ de manera que $d(x_m, q_m) < \frac{1}{2^m}$ (Ver Figura 2.2). Esto implica que $[x_m, q_m]$ converge a $\{q\}$. En efecto, dado $\epsilon > 0$, sea M lo suficientemente grande como para que $d(q_m, q) < \frac{\epsilon}{2}$ y $\frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{2}$, para cada $m \geq M$. Así, $d(x_m, q) \leq d(x_m, q_m) + d(q_m, q) < \frac{1}{2^m} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Esto muestra que x_m converge a q y, ya que $A \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} L_m$, es una dendrita (y, por tanto, es suave en todos sus puntos [1, Pags. 298, 299]), los arcos $[x_m, q]$ convergen a $\{q\}$ y ya que $[x_m, q_m] \subset [x_m, q]$, los arcos $[x_m, q_m]$ también convergen a $\{q\}$. Como A no es un arco podemos tomar una arista terminal $J = [r, s]$, con r un punto terminal de A , de tal forma que $p, q, q_m \notin [r, u]$, donde $u \in [r, s]$. Ahora considérese el subárbol $A' = A \cup (u, r]$ de A con lo que $\mu_p(A') < t$.

Ahora bien, dado $n \in \mathbb{N}$, toméense n arcos distintos L_{m_1}, \dots, L_{m_n} tales que $\mu_p(A' \cup (\bigcup_{i=1}^n L_{m_i})) \leq t$. Para cada subcontinuo $Y = A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [y_i, q])$, donde $y_i \in L_{m_i}$, denótese con $\varphi(y) = y_{n+1}$ el punto del arco $[u, r]$ asegurado por el Teorema del valor intermedio tal que $\mu_p(A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [y_i, q]) \cup [u, y_{n+1}]) = t$. Al igual que antes, la asignación

$(y_i)_{i=1}^n \mapsto A' \cup (\bigcup_{i=1}^n [y_i, q]) \cup [y_{n+1}, q]$ es un encaje de $\prod_{i=1}^n L_{m_i}$ en $\mu_p(t)^{-1}$. De nuevo, siendo n un entero positivo arbitrario se sigue que $\dim(\mu_p(t)^{-1}) \geq n$ para cada n y, por tanto, $\dim(\mu_p(t)^{-1}) = \infty$. ■

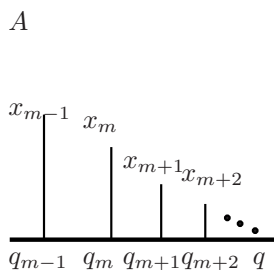


Figura 2.2:

Corolario 2.5. *Sea X un dendroide y p un punto inicial. Si $A \in \mu_p^{-1}(t)$ no es una arista y A contiene un punto esencial q , distinto de p . Entonces $\dim(\mu_p^{-1}(t)) = \infty$.*

Demostración: Si A es un árbol, aplicamos la proposición 2.4. Ahora, supóngase que A contiene un punto I -esencial, q . Considérense puntos $x_1, x_2, \dots \in A$, tales que, los arcos $[q, x_i]$ tienen como único punto en común, al punto q . Tomemos un punto $x \in X - A$ y un punto $y \in A - (\bigcup_{i=1}^{\infty} [q, x_i] = B$, de tal forma que, $[x, y] \cap B = \{y\}$ y $\mu(B \cup [x, y]) < t$. Por el Teorema del valor intermedio, deben existir puntos $y_i \in [q, x_i]$, $i \in \mathbb{N}$ tales que $\mu(B \cup [x, y] \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} [q, y_i])) = t$. Ahora, por cada punto $z_i \in [y_i, x_i]$, sea $z_0 \in [x, y]$, el punto asegurado por el Teorema del valor intermedio, tal que $\mu(B \cup [z_0, y] \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} [q, z_i])) = t$. Al igual que en la demostración de la Proposición 2.4, se puede demostrar que la asignación $(z_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto B \cup [z_0, y] \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} [q, z_i])$, es un encaje de $\prod_{i=1}^{\infty} [y_i, x_i]$ en $\mu_p^{-1}(t)$. Al ser, $\prod_{i=1}^{\infty} [y_i, x_i]$, una celda de dimensión infinita, la dimensión de $\mu_p^{-1}(t)$ es infinita. De manera similar, se muestra que si q es un punto II -esencial de A , entonces, $\dim(\mu_p^{-1}(t)) = \infty$.

Proposición 2.6. *La dimensión de $\mu_p^{-1}(t)$ es finita si y sólo si para cada $q \in E(X)$, se tiene que $[p, q]$ no es una arista y $\mu([p, q]) > t$, donde $E(X)$ denota el conjunto de puntos esenciales de X .*

Demostración: Si para algún punto esencial q se tiene que $\mu_p([p, q]) \leq t$ se tienen dos casos a considerar:

i) $\mu_p([p, q]) = t$.

En este caso se aplica la Proposición 2.4.

ii) $\mu_p([p, q]) < t$.

En este caso, por el Teorema del valor intermedio, existe un continuo A tal que $[p, q] \subset A$ con $\mu_p(A) = t$, se sigue nuevamente de la Proposición 2.5 que $\mu_p^{-1}(t)$ tiene dimensión infinita.

Por otro lado, si para cada punto esencial q se tiene que $\mu([p, q]) > t$, entonces, para cada $A \in \mu_p^{-1}(t)$, A no tiene puntos esenciales. Por la Proposición 2.2 se tiene que $\mu_p^{-1}(t)$ es de dimensión finita. ■

La hipótesis de que $[p, q]$ no sea una arista en la proposición anterior es necesaria ya que en el Abanico armónico (Figura 1.1) si p es un punto terminal, q es el vértice del abanico y $t = \mu([p, q])$, entonces $\mu_p^{-1}(t) = \{[p, q]\}$ y por tanto $\dim(\mu_p^{-1}(t)) = 0$.

Capítulo 3

Continuos Cpp

En [14] P. Pellicer da una caracterización de los hiperespacios anclados $C_p(X)$ cuando X es un continuo atriódico y plantea el siguiente problema:

Caracterizar los hiperespacios $C_p(X)$ cuando X es una gráfica finita.

En este capítulo daremos solución a este problema. Para ello, se requieren nociones tales como poliedros, gráficas finitas y continuos Cpp. Dichas nociones se exponen en las secciones siguientes.

3.1. Poliedros.

Diremos que S es una *cara* de una n -celda $M = [0, 1]^n$ si $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, donde $S_i = [0, 1]$, $S_i = \{0\}$ o $S_i = \{1\}$. Por ejemplo, las caras de $[0, 1]^2$ son $\{0\} \times \{0\}$, $\{1\} \times \{1\}$, $\{0\} \times \{1\}$, $\{1\} \times \{0\}$, $\{0\} \times [0, 1]$, $[0, 1] \times \{0\}$, $[0, 1] \times \{1\}$, $\{1\} \times [0, 1]$; un total de 8 caras. En general $[0, 1]^n$ tiene $3^n - 1$ caras.

Nota 3.1. *Obsérvese que de la definición de cara se sigue fácilmente que la intersección de cualesquiera dos caras de una n -celda M es o bien vacía o bien nuevamente una cara de M .*

Definición 3.2. *Un poliedro es un espacio homeomorfo a un continuo que se puede escribir como una unión finita de celdas de tal manera que las intersecciones entre ellas o es vacía o es una unión (finita) de caras (Figura 3.1).*

Definición 3.3. *Diremos que un continuo X es Cpp, si los hiperespacios anclados $C_p(X)$, son poliedros para cada $p \in X$.*

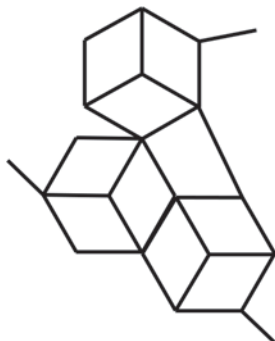


Figura 3.1: Poliedro

Nota 3.4. Sabemos que una celda tiene caras de diferentes dimensiones. Cuando se tiene la n -celda $[0, 1]^n$, sus caras son aquellos conjuntos que se obtienen restringiendo algunas de las coordenadas de manera que sólo puedan tomar alguno de los valores 0 o 1 y el resto de las coordenadas queda libre de tomar cualquier valor. Así, se empieza por sus esquinas, que son conjuntos de un sólo punto (por ejemplo, $\{(0, \dots, 0)\}$), después, las aristas, las cuales son arcos (por ejemplo, la arista $\{(0, \dots, 0) \times [0, 1]\}$), después vienen las caras de dimensión dos, las cuales son 2-celdas y así sucesivamente. Cuando decimos que la intersección $C_1 \cap C_2$ de dos celdas en la Definición 3.2 es una unión de caras, nos referimos a que es una unión de este tipo de caras tanto de C_1 como de C_2 . Conviene tener presente este hecho ya que es a lo que se refieren los enunciados de los Lemas 3.10-3.12 y aparecerá en muchas partes de la demostración del Teorema 3.32

3.2. Gráficas finitas

En esta sección damos la descripción que hace A. Illanes del trabajo de R. Duda con respecto al hiperespacio $C(G)$ cuando G es una gráfica finita. Para mayor información ver [6, Cap. 11].

Una *gráfica finita* G es un poliedro cuyas celdas son arcos. Al igual que en los dendroides, diremos que *el orden* de p en G es el número natural n si p tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un n -odo simple, de manera que p es el vértice de este n -odo. En símbolos $o_p(G) = n$. Si $n \geq 3$ diremos que p es un *punto de ramificación*, si $n = 2$, p es un *punto ordinario* y si $n = 1$, p es un *punto terminal*. Diremos que un arco contenido en G es una *arista* si une a un par de puntos no ordinarios y sólo sus extremos son

puntos no ordinarios. También permitiremos que una arista sea una curva cerrada simple siempre y cuando esta arista contenga sólo un punto de ramificación, en cuyo caso dicha arista es lo que se conoce como un *lazo*. Denotaremos con $V(G)$, $O(G)$, $R(G)$ y $T(G)$, respectivamente, a los conjuntos de vértices, puntos ordinarios, puntos de ramificación y puntos terminales de G . Si G es una gráfica finita y J es una arista de G , entonces o bien J es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, en cuyo caso denotaremos los extremos de J con 0_J y 1_J , o bien J es un lazo y en este caso hay una función continua de $[0, 1]$ en J que es inyectiva restringida a $(0, 1)$ (ver Lema 3.23) y que manda a 0 y a 1 al mismo punto, que nosotros siempre supondremos que es el único punto de ramificación de J , diremos que este único punto es $0_J = 1_J$. Los *vértices* de G son los extremos de las aristas de G . Pensaremos que cada arista de G tiene longitud 1 y la métrica que usaremos es la de la longitud de arco, esta métrica induce la misma topología que la que G hereda de \mathbb{R}^3 . Una *subgráfica* de G es un subcontinuo de G que es una unión de algunas de las aristas de G . Admitiremos también que un vértice sea una subgráfica de G , un *árbol* de G es una subgráfica que no contiene curvas cerradas simples. Un *árbol interno* de G es uno que no contiene puntos terminales de G y, en consecuencia, sus puntos terminales son puntos de ramificación de G , denotaremos con $AI(G)$ al conjunto de árboles internos de G . Dado un árbol interno T sea:

$$D(1, T) = \{p \in G \mid \text{existe } q \in T \text{ tal que } d(p, q) \leq 1\}.$$

Si $A(G)$ denota al conjuntos de aristas de G , no es difícil darse cuenta de que

$$D(1, T) = \bigcup \{J \mid J \in A(G) \text{ y } J \cap T \neq \emptyset\}.$$

Sea T un árbol interno de G y consideremos las aristas J de G tales que $J \cap T \neq \emptyset$, pero $J \not\subseteq T$. Dividimos estas aristas en dos tipos: J_1, \dots, J_n y L_1, \dots, L_m , donde las aristas J_i tienen sólo uno de sus extremos (digamos 0_{J_i}) en T y ninguna de ellas es un lazo. Las aristas L_j son aquéllas que tienen sus dos extremos en T , en estas últimas incluimos los lazos cuyo extremo está en T . Así:

$$D(1, T) = T \cup \left(\bigcup_{i=1}^n J_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m L_j \right).$$

Diremos que esta es la *representación canónica* de $D(1, T)$. Dado un árbol interno $T \subseteq G$ sea $\mathfrak{M}(T)$ la familia de todos los subcontinuos de G que tienen la forma:

$$((c_i)_{i=1}^n, (a_j, b_j)_{j=1}^m)_T = T \cup \left(\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_j] \right)$$

donde $c_i \in J_i$ y $a_j, b_j \in L_j$ (ver Figura 3.2).

Se tienen los siguientes lemas, para mayor detalle se remite al lector a [6, Cap. 11]:

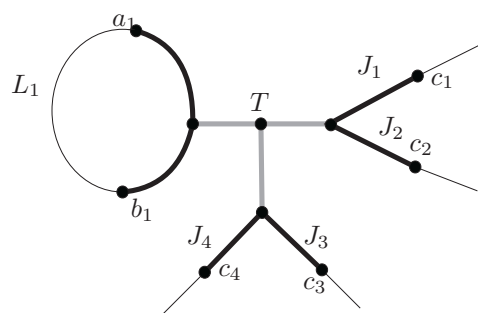


Figura 3.2:

Lema 3.5. Para cada árbol interno T de G , la familia $\mathfrak{M}(T)$ es una $(n + 2m)$ -celda, donde n y m denotan respectivamente el número de aristas de G que intersectan a T en un extremo y el número de aristas que intersectan a T en sus dos extremos.

Lema 3.6. Si T y S son árboles internos de G tales que $S \subsetneq T$, entonces la dimensión de $\mathfrak{M}(T)$ es estrictamente mayor que la dimensión de $\mathfrak{M}(S)$.

Lema 3.7. Si T es el árbol interno que se obtiene al remover de G las aristas terminales, entonces $\dim \mathfrak{M}(T) > \dim \mathfrak{M}(S)$, para todo árbol interno de G distinto de T .

Demostración: Ello se debe a que para cada tal árbol S , se verifica la contención $S \subsetneq T$.

■

Lema 3.8. Si G es una gráfica finita, entonces:

$$C(G) = \left[\bigcup_{T \in AI(G)} \mathfrak{M}(T) \right] \cup \left[\bigcup_{I \in A(G)} C(I) \right].$$

Nota 3.9. Como dijimos, es bien sabido que $C(S^1)$ y $C([0, 1])$ son homeomorfos a las 2-celdas $[0, 1]^2$ (ver [6, Ej. 3.1, 3.2 págs. 29, 31] y [2, pág. 267]) y por tanto $C(I)$ es homeomorfo a $[0, 1]^2$ para cada $I \in A(G)$.

Con el Lema 3.5 y la Nota 3.9, se ha establecido que los conjuntos $\mathfrak{M}(T)$ y $C(I)$ son celdas y, por tanto, tienen caras de varias dimensiones. En los Lemas 3.10-3.12, se establece que la intersección de cualesquiera dos de este tipo de celdas es o bien vacía o bien es una unión finita de caras, significando esto último lo que se explica en la Nota 3.4.

Lema 3.10. La intersección de dos conjuntos de la forma $\mathfrak{M}(T)$ es unión de caras.

Lema 3.11. La intersección de dos conjuntos de la forma $C(I)$ es unión de caras.

Lema 3.12. La intersección de un conjunto de la forma $\mathfrak{M}(T)$ y uno de la forma $C(I)$ es unión de caras.

Dado que el conjunto $AI(G)$ de los árboles internos de G y el conjunto $A(G)$ de las aristas de G son finitos, junto con los lemas anteriores se sigue fácilmente el siguiente teorema:

Teorema 3.13. *Si G es una gráfica finita, entonces $C(G)$ es un poliedro.*

El regreso de este teorema también es cierto [2, pág. 278].

3.3. Gráficas finitas y sus hiperespacios anclados

En esta sección probaremos que los hiperespacios anclados de las gráficas finitas son poliedros. En algún punto de la demostración usaremos los siguientes resultados y nociones de topología general, el primero de los cuales hace referencia a funciones continuas definidas por partes. Para mayor información, ver [3, Sec. 9, Pág. 81]

Definición 3.14. *Una familia $\{A_\alpha\}$ de conjuntos en un espacio X es localmente finita si por cada punto $x \in X$, existe una vecindad V de x tal que $V \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para a lo más una cantidad finita de índices α .*

Teorema 3.15. [3, Teo. 9.4 pág. 83] *Sean X un espacio y $\{A_\alpha\}$ un cubrimiento de X satisfaciendo alguna de las siguientes condiciones:*

- (1) *Todos los conjuntos A_α son abiertos.*
- (2) *Todos los conjuntos A_α son cerrados y forman una familia localmente finita.*

Para cada α , sea $f_\alpha : A_\alpha \rightarrow Y$ una función continua, con Y cualquier espacio y supóngase que $f_\alpha|_{A_\alpha \cap A_\beta} = f_\beta|_{A_\alpha \cap A_\beta}$ para cada par (α, β) , entonces existe una única función continua $f : X \rightarrow Y$ la cual es una extensión de cada f_α ; es decir, $f|_{A_\alpha} = f_\alpha$ para cada α .

Proposición 3.16. *Sea $\{B_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta cerrada, localmente finita de un espacio Y . Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y supóngase que $f_\alpha = f|_{f^{-1}(B_\alpha)}$ es un homeomorfismo sobre B_α para cada α . Entonces f es un homeomorfismo entre X y Y .*

Demostración: Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sea $g_\alpha : B_\alpha \rightarrow f^{-1}(B_\alpha)$ la función inversa de f_α .

Ahora bien, sean $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ y $y \in B_\alpha \cap B_\beta$. Tenemos que $g_\alpha(y)$ es el único elemento de $f^{-1}(B_\alpha)$ tal que $f_\alpha(g_\alpha(y)) = y$ y $g_\beta(y)$ es el único elemento de $f^{-1}(B_\beta)$ tal que $f_\beta(g_\beta(y)) = y$, si $g_\alpha(y) \neq g_\beta(y)$, entonces $g_\alpha(y) \notin f^{-1}(B_\beta)$ o $g_\beta(y) \notin f^{-1}(B_\alpha)$ en cualquier caso se tendría que $y \notin B_\alpha \cap B_\beta$. Por el Teorema 3.15, existe una única función continua $g : Y \rightarrow X$ que extiende a g_α para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Las funciones f y g son mutuamente inversas. ■

También será precisa la noción de espacios de adjunción, para mayor información ver [3, pág. 127].

Definición 3.17. Sean X y Y dos espacios ajenos. Se define la unión libre $X + Y$ como el conjunto $X \cup Y$ con la siguiente topología: Un conjunto $U \subset X + Y$ es abierto si y sólo si $U \cap X$ es abierto en X y $U \cap Y$ es abierto en Y .

Se deduce fácilmente del hecho de que $X \cap Y = \emptyset$ que X y Y , como subespacios de $X + Y$, conservan sus mismas topologías. Evidentemente $B \subset X + Y$ es cerrado si y sólo si $B \cap X$ y $B \cap Y$ son conjuntos cerrados.

Definición 3.18. Sean X, Y espacios ajenos, $A \subset X$ un subconjunto cerrado y $f : A \rightarrow Y$ una función continua. En $X + Y$ se genera un relación de equivalencia, dada por $a \sim f(a)$ para cada $a \in A$. El espacio cociente $(X + Y)/\sim$ se llama “la adjunción de X con Y mediante f ” y se denota mediante $X \cup_f Y$; la función f es llamada “función de adjunción”.

En términos intuitivos, se “identifica” cada $a \in A$ con su imagen $f(a)$. La construcción de conjuntos cerrados en $X \cup_f Y$ generalmente se basa en el siguiente resultado:

Teorema 3.19. [3, 6.2 pág. 128] Sean $Q : X + Y \rightarrow X \cup_f Y$ la función cociente y $C \subset X + Y$ un conjunto tal que $C \cap X$ es cerrado en X . Entonces $Q(C)$ es cerrado en $X \cup_f Y$ si y sólo si $(C \cap Y) \cup f(C \cap A)$ es cerrado en Y .

Teorema 3.20. [3, 6.3 pág. 128] Sea $Q : X + Y \rightarrow X \cup_f Y$ la función cociente. Entonces Y se encaja como conjunto cerrado en $X \cup_f Y$ y $Q|_Y$ es un encaje.

Proposición 3.21. Sea $Q : X + Y \rightarrow X \cup_f Y$ la función cociente, con X compacto y Y un espacio de Hausdorff. Si f es un encaje de A en un conjunto cerrado $f(A)$ de Y , entonces X se encaja como un conjunto cerrado de $X \cup_f Y$ y $Q|_X$ es un encaje.

Demostración: La función $Q|_X$ es evidentemente continua e inyectiva. Ahora bien, sea $C \subset X$ cerrado, entonces $(C \cap Y) \cup f(C \cap A) = f(C \cap A)$ es cerrado en $f(A)$, al ser este último conjunto cerrado en Y se tiene que $(C \cap Y) \cup f(C \cap A)$ es cerrado en Y . Se sigue, del Teorema 3.19 que $Q(C)$ es cerrado en $X \cup_f Y$ y por tanto $Q|_X$ es un encaje. ■

También requeriremos de las siguientes propiedades acerca de poliedros:

Proposición 3.22. Sean $X = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ y $Y = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ espacios ajenos y $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo tal que:

- 1) Para cada i , el espacio C_i es una celda de dimensión finita,
- 2) para cada par de índices i y j se tiene que $C_i \cap C_j$ es vacía o bien es una unión de caras (ver Nota 3.4),
- 3) para cada i , se tiene que $f(C_i) = D_i$,

4) supóngase que se ha seleccionado por cada celda C_i una cara $\mathcal{F}C_i$ (y, por tanto, por cada celda D_i se ha seleccionado una cara $\mathcal{F}D_i = f(\mathcal{F}C_i)$).

Si g es la restricción de f a $\mathcal{F}(C_1) \cup \dots \cup \mathcal{F}(C_n)$, entonces el espacio $X \cup_g Y$ es una unión finita de celdas cuyas intersecciones dos a dos es o bien vacía o bien es una unión de caras (Nota 3.4).

Demostración: Sean $\mathfrak{X} = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{C}_n$ y $\mathfrak{Y} = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{D}_n$ las copias homoeomorfas de X y Y contenidas en $X \cup_f Y$ aseguradas por el Teorema 3.20 y la Proposición 3.21, donde $Q(C_i) = \mathfrak{C}_i$, $Q(D_i) = \mathfrak{D}_i$, $Q(\mathcal{F}C_i) = \mathcal{F}\mathfrak{C}_i$ y $Q(\mathcal{F}D_i) = \mathcal{F}\mathfrak{D}_i$. Evidentemente para cualesquiera par de índices i y j el conjunto $\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{C}_j$ es vacío o bien es una unión de caras y lo mismo ocurre para los conjuntos $\mathfrak{D}_i \cap \mathfrak{D}_j$. Ahora bien, si $x \in \mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{D}_j$, ello quiere decir que existe $a \in \mathcal{F}C_i$ tal que $x = [a] = [f(a)]$ y $f(a) \in D_j \cap \mathcal{F}D_i$ y, esto implica, que $[f(a)] = x \in \mathfrak{D}_j \cap \mathcal{F}\mathfrak{D}_i$ lo que muestra que $\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{D}_j \subset \mathfrak{D}_j \cap \mathcal{F}\mathfrak{D}_i$. Por otro lado, si $x \in \mathfrak{D}_j \cap \mathcal{F}\mathfrak{D}_i$, entonces $x \in \mathcal{F}\mathfrak{D}_i$. De donde, se deduce que, existe $a \in \mathcal{F}C_i$ tal que $[a] = [f(a)] = x$. Por tanto, $x \in \mathcal{F}\mathfrak{C}_i$, lo que muestra que $x \in \mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{D}_j$ y, por tanto, $\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{D}_j = \mathfrak{D}_j \cap \mathcal{F}\mathfrak{D}_i$.

Por otro lado, tenemos que $D_j \cap \mathcal{F}D_i \subset D_j \cap D_i = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m$, donde cada F_i es una cara en virtud de 2). Por lo tanto, $D_j \cap \mathcal{F}D_i = D_j \cap (D_i \cap \mathcal{F}D_i) = (D_i \cap D_j) \cap \mathcal{F}D_i = (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m) \cap \mathcal{F}D_i$ que, en virtud de la Nota 3.1, esta última expresión es una unión de caras y, por tanto, $\mathfrak{D}_j \cap \mathcal{F}\mathfrak{D}_i$ es unión de caras; es decir, $\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{D}_j$ es una unión de caras. Por último, como la función cociente Q es suprayectiva, tenemos que $Q(X + Y) = Q(X) \cup Q(Y) = \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y} = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{C}_n \cup \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{D}_n$. ■

Por último, también requeriremos el siguiente lema que relaciona al arco con la curva cerrada simple.

Lema 3.23. *Si O es un punto de S^1 , entonces existe una función continua g de $[0, 1]$ a S^1 , tal que $g(0) = g(1) = O$ y $g|_{(0,1)}$ es inyectiva.*

Demostración: Si $O = (\cos\rho, \text{sen}\rho)$ sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ la función que rota cada punto de S^1 un ángulo ρ . Sea, también, $h : [0, 1] \rightarrow S^1$ definida mediante $h(x) = (\cos 2\pi x, \text{sen } 2\pi x)$. La biyección continua que estamos buscando es $g = f \circ h$. ■

3.3.1. Celdas notables en el hiperespacio anclado de una gráfica finita

Ahora sí, tenemos lo necesario para probar que los hiperespacios anclados de las gráficas finitas son poliedros. Comenzaremos por construir las celdas mediante las cuales estarán

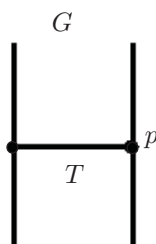


Figura 3.3:

definidos dichos poliedros. Las celdas involucradas estarán definidas de acuerdo a la ubicación del punto p que se escoja en la gráfica. Lo cual nos lleva a considerar varios casos. Recordemos que un punto de ramificación también es considerado una subgráfica de G , al no contener curvas cerradas simples, éste es, de hecho, un árbol interno. El primer caso que vamos a analizar es cuando el punto $\{p\}$ es un árbol interno, es decir, p es un punto de ramificación.

Caso I *El punto p es un punto de ramificación.*

Sea Γ_1 el conjunto de árboles internos T de G para los cuales $p \in T$. Si p es el punto de ramificación de la Figura 3.3, entonces Γ_1 contiene dos árboles internos, a saber; los árboles T y $\{p\}$.

Por el Lema 3.5, para cada $T \in \Gamma_1$, el conjunto $\mathfrak{M}(T)$ es una celda de dimensión finita. Más adelante, en la demostración del Teorema 3.32 (**Caso I**), usaremos este hecho para probar que si p es un punto de ramificación, entonces el hiperespacio $C_p(G)$ es la unión de las celdas $\mathfrak{M}(T)$ tales que $T \in \Gamma_1$, que, por el Lema 3.10, la intersección de cualesquiera dos de ellas es una unión de caras.

Antes de analizar el siguiente caso, recordemos que un lazo de una gráfica G es una arista homeomorfa a una curva cerrada simple la cual contiene un único punto de ramificación de G . El siguiente caso a considerar se alcanza cuando p está en un lazo L de G distinto del único punto de ramificación. Dicho caso será analizado a continuación.

Caso II *El punto p está en un lazo L de G y $o_p(G) = 2$.*

En este caso, si 0_L es el punto de ramificación de L , sean \mathcal{L}_1 uno de los arcos en L que une $0_L = 1_L$ con p y \mathcal{L}_2 el otro de estos arcos. Sea, también, $\Gamma_2 = \{T \in AI(G) | 0_L \in T\}$. En la Figura 3.4, la arista T es un elemento típico de Γ_2 .

Para cada $T \in \Gamma_2$, sea $D(1, T) = T \cup (\bigcup_{i=1}^n J_i) \cup (\bigcup_{j=1}^m L_j)$, la representación canónica de $D(1, T)$, y supóngase, sin pérdida de generalidad que $L = L_1$. Representemos con $\mathfrak{M}_p^1(T)$ a la familia de todos los subcontinuos de la forma:

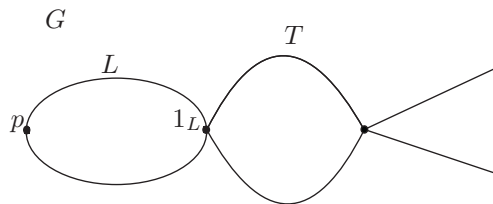


Figura 3.4:

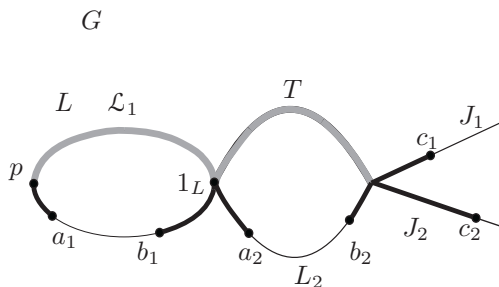


Figura 3.5:

$$(T \cup \mathcal{L}_1) \cup ([p, a_1] \cup [b_1, 1_L]) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}] \right).$$

Donde $a_1, b_1 \in \mathcal{L}_2$, $c_i \in J_i$, $a_j, b_j \in L_j$. Si G, p y T son como en la Figura 3.4, entonces la Figura 3.5 muestra un elemento típico de $\mathfrak{M}_p^1(T)$.

Lema 3.24. *Para cada $T \in \Gamma_2$, la familia $\mathfrak{M}_p^1(T)$ es una celda de dimensión finita.*

Demostración: Ello se debe a que la familia $\mathfrak{M}_p^1(T)$ es homeomorfa a la celda $\mathfrak{M}(T)$ del Lema 3.5. En efecto, para probarlo, sea $G_{\mathcal{L}_1} = G/\mathcal{L}_1$ el espacio que se obtiene de G al identificar \mathcal{L}_1 con el punto 0_L . Entonces $G_{\mathcal{L}_1}$ es homeomorfo a G , como mostramos a continuación: Sea $Q : G \rightarrow G_{\mathcal{L}_1}$ la función cociente y $f : G \rightarrow G$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \overline{G - L}; \\ 0_L & \text{si } x \in \mathcal{L}_1; \\ g(x) & \text{si } x \in \mathcal{L}_2. \end{cases}$$

Donde $g : \mathcal{L}_2 \rightarrow L$ es una función continua tal que $g(p) = 0_L = g(0_L)$ y restringida a $\mathcal{L}_2 - \{p, 0_L\}$ es inyectiva (Lema 3.23). Por el Teorema 3.15, la función f es continua. Ahora bien, nótese que f es constante en las fibras de Q y que, recíprocamente, Q es

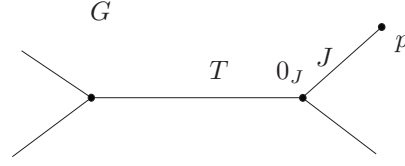


Figura 3.6:

constante en las fibras de f , se sigue de [3, Teo 3.2, págs. 123 y 124] que las funciones $f \circ Q^{-1}$ y $Q \circ f^{-1}$ son continuas. Al ser éstas mutuamente inversas, se sigue que G y $G_{\mathcal{L}_1}$ son homeomorfos.

Si $T \in \Gamma_2$, entonces $Q(T)$ es un árbol interno que contiene a $[0_L]$. Por la Proposición 1.14, la función $\hat{Q} : C(G) \rightarrow C(G_{\mathcal{L}_1})$ definida mediante $\hat{Q}(A) = Q(A)$ es continua. Para cada $T \in \Gamma_2$, la función \hat{Q} es inyectiva en el conjunto $\mathfrak{M}_p^1(T)$, lo que muestra que $\hat{Q}_T = \hat{Q}|_{\mathfrak{M}_p^1(T)}$ es un homeomorfismo entre $\mathfrak{M}_p^1(T)$ y $\mathfrak{M}(Q(T))$. Al ser $\mathfrak{M}(Q(T))$ homeomorfo a $\mathfrak{M}(T)$, el resultado se sigue. ■

Similarmente para cada $T \in \Gamma_2$, podemos definir $\mathfrak{M}_p^2(T)$ como la familia de todos los subcontinuos de la forma:

$(T \cup \mathcal{L}_2) \cup ([p, a_1] \cup [b_1, 1_L]) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_j])$. Con $a_1, b_1 \in \mathcal{L}_1$, con lo que el siguiente lema es trivialmente cierto.

Lema 3.25. *Para cada $T \in \Gamma_2$, la familia $\mathfrak{M}_p^2(T)$ es una celda de dimensión finita.*

En la demostración del Teorema 3.32 (**Caso II**) veremos que, en este caso, la unión de las celdas $\mathfrak{M}_p^1(T)$ junto con la unión de las celdas $\mathfrak{M}_p^2(T)$ y $C_p(L)$, hacen de $C_p(G)$ un poliedro.

Caso III *El punto p está en una arista terminal, J , homeomorfa a un arco.*

Denotemos con 0_J y 1_J los extremos de J siendo 1_J punto terminal de G y sea Γ_3 el conjunto de los árboles internos T de G tales que $0_J \in T$. Tenemos dos subcasos:

Subcaso III.a *El punto p es terminal.*

En la Figura 3.6 se ilustra este subcaso. Dado $T \in \Gamma_3$, si $T \cup (\bigcup_{i=1}^n J_i) \cup (\bigcup_{j=1}^m L_j)$ es la representación canónica de $D(1, T)$, sin pérdida de generalidad, supondremos siempre que $J_1 = J$.

Para cada $T \in \Gamma_3$, defínase $\mathfrak{M}_p^3(T)$ como la familia de todos los subcontinuos de G que tienen la forma $(T \cup J) \cup (\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])$. Donde $c_i \in J_i$, $a_j, b_j \in L_j$.

La Figura 3.7 muestra un elemento típico de $\mathfrak{M}_p^3(T)$, suponiendo que $T \in \Gamma_3$ es como en la Figura 3.6. Consideraciones similares al Caso II muestran que para cada $T \in \Gamma_3$, la

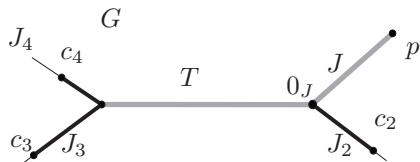


Figura 3.7:

familia $\mathfrak{M}_p^3(T)$ es una celda de dimensión finita con lo que se tiene el siguiente lema.

Lema 3.26. *Para cada $T \in \Gamma_3$, la familia $\mathfrak{M}_p^3(T)$ es una celda de dimensión finita.*

Subcaso III.b *El Punto p está en el interior de J .*

La Figura 3.8 ilustra este subcaso. En este subcaso, para cada $T \in \Gamma_3$, se denotará con $\mathfrak{N}_p^3(T)$ a la familia de todos los subcontinuos de G que tienen la forma $T \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])$.

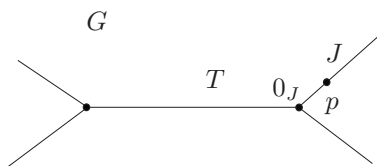


Figura 3.8:

Donde $c_i \in J_i$, para $i \in \{2, \dots, n\}$, y $a_j, b_j \in L_j$ para $j \in \{1, \dots, m\}$ y $c_1 \in [p, 1_J]$. Un elemento de $\mathfrak{N}_p^3(T)$ se ilustra en la Figura 3.9. De nuevo, un análisis similar al Caso II muestra que $\mathfrak{N}_p^3(T)$ es una celda de dimensión finita, para cada $T \in \Gamma_3$, y, por tanto, se tiene el siguiente lema:

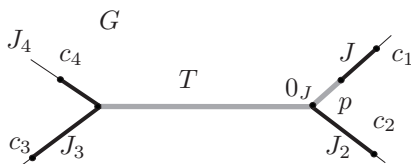


Figura 3.9:

Lema 3.27. *Si $T \in \Gamma_3$, entonces $\mathfrak{N}_p^3(T)$ es una celda de dimensión finita.*

En en la demostración del Teorema 3.32 (**Caso III**) veremos que en cualquiera de estos subcasos, las celdas consideradas, junto con $C_p(J)$ dan la estructura de poliedro a $C_p(G)$.

Caso IV *El punto p está en el interior de una arista J de G que no es una arista terminal.*

La Figura 3.10 muestra un ejemplo de este caso. Comencemos considerando el conjunto Γ_4 , cuyos elementos son todos los árboles internos de G para los cuales $p \in T$. En la Figura 3.10 la arista J es un elemento de Γ_4 . Para cada $T \in \Gamma_4$, consideremos la celda $\mathfrak{M}(T)$ (Lema 3.5), evidentemente cada una de estas celdas está contenida en $C_p(G)$, con lo que el siguiente lema es trivialmente cierto.

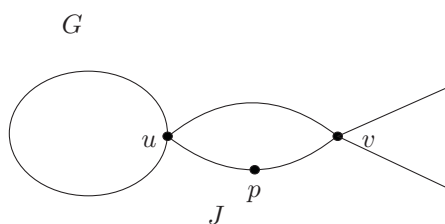


Figura 3.10:

Lema 3.28. *Si G es una gráfica finita y $T \in \Gamma_4$, entonces la celda $\mathfrak{M}(T)$ es un subespacio de $C_p(G)$.*

Para continuar, sean u y v los extremos de J , denotemos con \mathcal{L}_1 el subarco de J que tiene a u y p como extremos y con \mathcal{L}_2 el subarco de J de extremos p y v (ver Figura

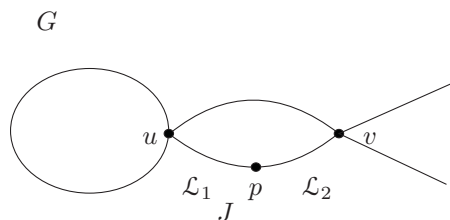


Figura 3.11:

3.11). Sean G/\mathcal{L}_1 y G/\mathcal{L}_2 los espacios cociente que se obtienen de G al identificar los arcos \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 en un sólo punto, respectivamente.

Lema 3.29. *Los hiperespacios $C(G)$, $C(G/\mathcal{L}_1)$ y $C(G/\mathcal{L}_2)$ son homeomorfos.*

Demostración: Al igual que en el Lema 3.24, tenemos que si $Q : G \rightarrow G/\mathcal{L}_1$ es la función cociente y $f : \mathcal{L}_2 \rightarrow J$ es un homeomorfismo tal que $f(p) = u$ y $f(v) = v$.

Entonces definiendo $h_0 : G \rightarrow G$ mediante:

$$h_0(x) = \begin{cases} u, & \text{si } x \in \mathcal{L}_1; \\ f(x), & \text{si } x \in \mathcal{L}_2; \\ x, & \text{si } x \in \overline{G - J}. \end{cases}$$

Se tiene por [3, Teo. 3.2 (1) págs. 123 y 124] que las funciones $h_0 \circ Q^{-1}$ y $Q \circ h_0^{-1}$ son continuas, al ser éstas mutuamente inversas, se tiene que G y G/\mathcal{L}_1 son gráficas homeomorfas. Por la Proposición 1.14, tenemos que $\psi_1 = \widehat{h_0 \circ Q^{-1}}$ es un homeomorfismo entre $C(G/\mathcal{L}_1)$ y $C(G)$.

Si ahora consideramos el espacio G/\mathcal{L}_2 que se obtiene de G al identificar \mathcal{L}_2 a un sólo punto, sean $R : G \rightarrow G/\mathcal{L}_2$ la función cociente y $g : \mathcal{L}_1 \rightarrow J$ un homeomorfismo tal que $g(p) = v$ y $g(u) = u$, entonces definiendo $h_1 : G \rightarrow G$ mediante:

$$h_1(x) = \begin{cases} v & \text{si } x \in \mathcal{L}_2; \\ g(x) & \text{si } x \in \mathcal{L}_1; \\ x & \text{si } x \in \overline{G - J}; \end{cases}$$

entonces, nuevamente por [3, Teo 3.2 (1) págs. 123 y 124], se tiene que las funciones $h_1 \circ R^{-1}$ y $R \circ h_1^{-1}$ son continuas. Al ser éstas mutuamente inversas, se tiene que G y G/\mathcal{L}_2 son homeomorfas. Por la Proposición 1.14, $\psi_2 = \widehat{h_1 \circ R^{-1}}$ es un homeomorfismo entre $C(G/\mathcal{L}_2)$ y $C(G)$. ■

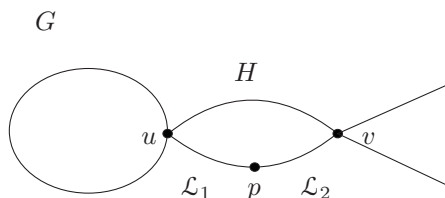


Figura 3.12:

Nótese que aunque la función inducida $\hat{Q} : C(G) \rightarrow C(G/\mathcal{L}_1)$ no es un homeomorfismo, se tiene que si T es un árbol interno de G y $T \cup (\bigcup_{i=1}^n J_i) \cup (\bigcup_{j=1}^m L_j)$ es la respectiva representación canónica de $D(1, T)$, entonces $\hat{Q}(T)$ es un árbol interno de G/\mathcal{L}_1 homeomorfo a T y $\hat{Q}(T) \cup (\bigcup_{i=1}^n \hat{Q}(J_i)) \cup (\bigcup_{j=1}^m \hat{Q}(L_j))$ es la respectiva representación canónica de $D(1, \hat{Q}(T))$, la cual es homeomorfa a $D(1, T)$ y, recíprocamente, si S es un árbol interno de G/\mathcal{L}_1 y $S \cup (\bigcup_{i=1}^n J_i) \cup (\bigcup_{j=1}^m L_j)$ es la respectiva representación canónica de $D(1, S)$, entonces existe un árbol interno T de G , homeomorfo a S , tal que $\hat{Q}(T) = S$ y $\hat{Q}(D(1, T)) = D(1, S)$ con $\hat{Q}(D(1, T))$ y $D(1, S)$ homeomorfos. Una situación similar ocurre con la función inducida \hat{R} .

Ahora consideremos Γ_5 el conjunto de todos aquellos árboles internos T para los cuales $p \in D(1, T) - (T \cup \bigcup_{i=1}^n J_i)$, donde $T \cup (\bigcup_{i=1}^n J_i) \cup (\bigcup_{j=1}^m L_j)$ es la representación canónica de $D(1, T)$ y que, sin pérdida de generalidad, supondremos siempre que $p \in L_1$, en la Figura 3.12, la arista H es un elemento típico de Γ_5 .

Sea $H \in \Gamma_5$ y denotemos con $\mathfrak{K}_p^1(H)$ al subespacio de $C_p(G)$ cuyos elementos son todos los subcontinuos de G con la forma:

$$(H \cup \mathcal{L}_1) \cup ([p, a_1] \cup [b_1, v]) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])).$$

Donde, $a_1, b_1 \in \mathcal{L}_2$, para $j \in \{2, \dots, m\}$ se tiene que $a_j, b_j \in L_j$ y para $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $c_i \in J_i$. En la Figura 3.13 se muestra un elemento de $\mathfrak{K}_p^1(H)$, donde $H \in \Gamma_5$ es como en la Figura 3.12.

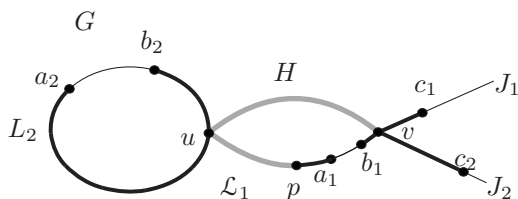


Figura 3.13:

Similarmente, dado $H \in \Gamma_5$ denotemos con $\mathfrak{K}_p^2(H)$ al subespacio de $C_p(G)$ que consiste de todos los subcontinuos de la forma:

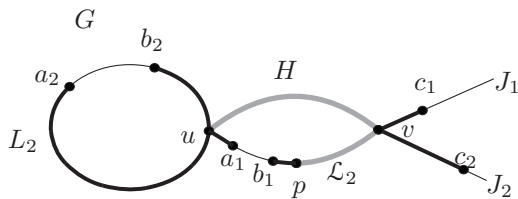


Figura 3.14:

$$(H \cup \mathcal{L}_2) \cup ([u, a_1] \cup [b_1, p]) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}] \right).$$

En la Figura 3.14 se muestra un elemento de $\mathfrak{K}_p^2(H)$, donde $H \in \Gamma_5$ es como en la Figura 3.12.

Lema 3.30. *Por cada árbol interno $H \in \Gamma_5$, los subespacios $\mathfrak{K}_p^1(H)$ y $\mathfrak{K}_p^2(H)$ de $C_p(G)$ son celdas de dimensión finita.*

Demostración: Para cada $H \in \Gamma_5$, si \hat{Q} y \hat{R} son las funciones inducidas de Q y R en la demostración del Lema 3.29, entonces las funciones $\sigma_H : \mathfrak{K}_p^1(H) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{Q}(H))$

y $\rho_H : \mathfrak{K}_p^2(H) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{R}(H))$ definidas mediante $\sigma_H(A) = \hat{Q}(A)$ y $\rho_H(A) = \hat{R}(A)$ son homeomorfismos. ■

Para seguir construyendo las celdas que darán a $C_p(G)$ estructura de poliedro, denotemos con Γ_6 al conjunto de árboles internos M de G para los cuales, si $M \cup (\bigcup_{i=1}^n J_i) \cup (\bigcup_{j=1}^m L_j)$ es la representación canónica de $D(1, M)$, entonces, para algún índice i (que nosotros siempre supondremos sin pérdida de generalidad que $i = 1$), se tiene que $J_1 = J$ y si 0_{J_1} es el único punto en la intersección de M y J_1 , entonces $0_{J_1} = u$. En la Figura 3.10 el árbol interno $\{u\}$ constituye un elemento de Γ_6 .

Dado $M \in \Gamma_6$, denotemos con $\mathfrak{M}_p(M)$ a la familia de todos los subcontinuos de $C_p(G)$ cuyos elementos son todos los subcontinuos de la forma:

$$(M \cup \mathcal{L}_1 \cup [p, c_1]) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right).$$

Donde $c_1 \in \mathcal{L}_2$, para $i \in \{2, \dots, n\}$ $c_i \in J_i$ y para $j \in \{1, \dots, m\}$ $a_j, b_j \in L_j$. En la Figura 3.15 se muestra un elemento típico de $\mathfrak{M}_p(M)$ suponiendo que M es el árbol interno $\{u\}$ en la Figura 3.10.

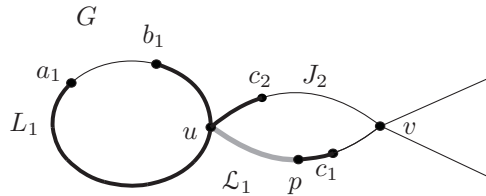


Figura 3.15:

Definamos, ahora Γ_7 como el conjunto de todos aquellos árboles internos N de G tales que, si $N \cup (\bigcup_{i=1}^n J_i) \cup (\bigcup_{j=1}^m L_j)$ es la representación canónica de $D(1, N)$, entonces, para algún índice i (que sin pérdida de generalidad, aquí se supondrá siempre que $i = 1$), se tiene que $J = J_1$ y si 0_{J_1} es el único punto de $N \cap J_1$, entonces $0_{J_1} = v$. En la Figura 3.10 el árbol interno $\{v\}$ es un elemento de Γ_7 .

Dado $N \in \Gamma_7$, denotemos con $\mathfrak{N}_p(N)$ al subespacio de $C_p(G)$ cuyos elementos son todos los subcontinuos de la forma:

$$(M \cup \mathcal{L}_2 \cup [p, c_1]) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right).$$

Donde $c_1 \in \mathcal{L}_1$, para $i \in \{2, \dots, n\}$, $c_i \in J_i$ y para $j \in \{1, \dots, m\}$, $a_j, b_j \in L_j$. En la Figura 3.16 se muestra un elemento de $\mathfrak{N}_p(N)$ bajo el supuesto de que N es el árbol interno $\{v\}$ en la Figura 3.10.

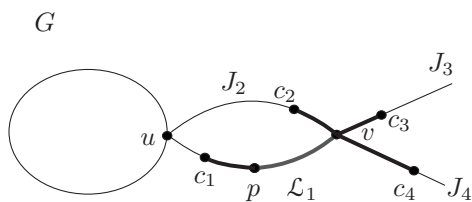


Figura 3.16:

Lema 3.31. *Para cada $M \in \Gamma_6$ el espacio $\mathfrak{M}_p(M)$ es una celda de dimensión finita. También, para cada $N \in \Gamma_7$, el espacio $\mathfrak{N}_p(N)$ es una celda de dimensión finita.*

Demostración: Para cada $M \in \Gamma_6$, la función $\beta_M : \mathfrak{M}_p(M) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{Q}(M))$ definida mediante $\beta_M(A) = \hat{Q}(A)$, donde \hat{Q} es la función inducida de el Lema 3.29 es un homeomorfismo. Siendo $\mathfrak{M}(\hat{Q}(M))$ una celda de dimensión finita (Lema 3.5), así también $\mathfrak{M}_p(M)$ es una celda de dimensión finita.

De igual forma, la función $\lambda_N : \mathfrak{N}_p(N) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{R}(N))$ definida mediante $\lambda_N(A) = \hat{R}(A)$, donde \hat{R} es como en el Lema 3.29 es un homeomorfismo. ■

Como hemos venido diciendo, en este último caso, en el Teorema 3.32 veremos que las familias de celdas $\{\mathfrak{M}(T)\}_{T \in \Gamma_4}$, $\{\mathfrak{R}_p^1(H)\}_{H \in \Gamma_5}$, $\{\mathfrak{R}_p^2(H)\}_{H \in \Gamma_5}$, $\{\mathfrak{M}_p(M)\}_{M \in \Gamma_6}$, $\{\mathfrak{N}_p(N)\}_{N \in \Gamma_7}$ y $C_p(J)$ dan estructura de poliedro al hiperespacio $C_p(G)$.

3.3.2. Las gráficas finitas son continuos Cpp

En esta sección, probaremos que las gráficas finitas son continuos Cpp. En el siguiente teorema suponemos que G no es un arco ni una curva cerrada simple.

Teorema 3.32. *Las gráficas finitas son continuos Cpp.*

Demostración: Sean G una gráfica finita y $p \in G$. Se tienen los cuatro casos de la Sección 3.3.1, en cada uno de ellos los conjuntos $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$, serán los correspondientes conjuntos de árboles internos de G .

Caso I *El punto p es un punto de ramificación de G .*

En efecto, dado $A \in C_p(G)$, ordenemos el conjunto $\mathcal{C} = \{T \in \Gamma_1 : T \subseteq A\}$ mediante la inclusión. Dado que \mathcal{C} es finito, admite elemento maximal. Si T_0 es un árbol maximal de este orden, entonces $A \in \mathfrak{M}(T_0)$, lo que muestra que $C_p(G) \subseteq \bigcup_{T \in \Gamma_1} \mathfrak{M}(T)$. La otra contención es obvia. Por el Lema 3.10, si T y $S \in \Gamma_1$, se tiene que las celdas $\mathfrak{M}(T)$ y $\mathfrak{M}(S)$ se intersectan en algunas de sus caras (Ver la Nota 3.4 y la Definición 3.2) y, por tanto, en este caso $C_p(G)$ es un poliedro.

Caso II *El punto p está en un lazo L de G y $o_p(G) = 2$.*

Para cada $T \in \Gamma_2$, sea \hat{Q}_T el homeomorfismo entre $\mathfrak{M}_p^1(T)$ y $\mathfrak{M}(Q(T))$, descrito en la demostración del Lema 3.24. Si S y $T \in \Gamma_2$, entonces $\hat{Q}_T = \hat{Q}_S$ en todo punto de $\mathfrak{M}_p^1(T) \cap \mathfrak{M}_p^1(S)$. Por el Teorema 3.15, existe una función continua \hat{Q}_0 que extiende a cada \hat{Q}_T . Al ser cada una de éstas un homeomorfismo, se sigue, de la Proposición 3.16, que \hat{Q}_0 es un homeomorfismo entre $\bigcup_{T \in \Gamma_2} \mathfrak{M}_p^1(T)$ y $\bigcup_{T \in \Gamma_2} \mathfrak{M}(Q(T))$. Similarmen-
te, tenemos que $\bigcup_{T \in \Gamma_2} \mathfrak{M}_p^2(T)$ es homeomorfo a $\bigcup_{T \in \Gamma_2} \mathfrak{M}(Q(T))$. Ahora bien, para cada $T \in \Gamma_2$, sea $\mathcal{C}_T = \{A \in \mathfrak{M}(Q(T)) : Q(L) \subseteq A\}$. Es decir, \mathcal{C}_T es la cara de $\mathfrak{M}(Q(T))$ que se obtiene al hacer $b_1 = p$.

Sean $\bigcup_{T \in \Gamma_2} X_T$ y $\bigcup_{T \in \Gamma_2} Y_T$ copias ajenas de $\bigcup_{T \in \Gamma_2} \mathfrak{M}(Q(T))$ y sean también las funciones $f_X : \bigcup_{T \in \Gamma_2} X_T \rightarrow \bigcup_{T \in \Gamma_2} \mathfrak{M}(Q(T))$ y $f_Y : \bigcup_{T \in \Gamma_2} \mathfrak{M}(Q(T)) \rightarrow \bigcup_{T \in \Gamma_2} Y_T$ homeomorfismos tales que para cada $T \in \Gamma_2$, $\mathcal{C}X_T = f_X^{-1}(\mathcal{C}_T)$ y $\mathcal{C}Y_T = f_Y(\mathcal{C}_T)$ son las caras de las celdas X_T y Y_T homeomorfas a la cara \mathcal{C}_T de $\mathfrak{M}(Q(T))$.

Si f es la restricción de $f_Y \circ f_X$ a $\bigcup \mathcal{C}X_T$, se sigue de la Proposición 3.22, que $\bigcup_{T \in \Gamma_2} X_T \cup_f \bigcup_{T \in \Gamma_2} Y_T$ es una unión finita de celdas cuyas intersecciones dos a dos es o bien vacía o bien es una unión de caras.

Ahora, la función $R : (\bigcup \mathfrak{M}_p^1(T)) \cup (\bigcup \mathfrak{M}_p^2(T)) \rightarrow (\bigcup X_T) \cup_f (\bigcup Y_T)$ definida mediante:

$$R(x) = \begin{cases} f_X^{-1}(Q(x)), & \text{si } x \in \bigcup \mathfrak{M}_p^1(T); \\ f_Y(Q(x)), & \text{si } x \in \bigcup \mathfrak{M}_p^2(T); \end{cases}$$

es un homeomorfismo. Por la Proposición 3.22, el espacio $(\bigcup \mathfrak{M}_p^1(T)) \cup (\bigcup \mathfrak{M}_p^2(T))$ es una unión finita de celdas cuyas intersecciones dos a dos es vacía o bien es una unión de caras.

Por último, obsérvese lo siguiente: para cada árbol interno $T \in \Gamma_2$, distinto de $\{0_L\}$, se tiene que $C_p(L) \cap \mathfrak{M}_p^1(T) = \emptyset$ y $C_p(L) \cap \mathfrak{M}_p^2(T) = \emptyset$. Si $\mathfrak{D} = \overline{C_p(L) - (\mathfrak{M}_p^1(\{0_L\}) \cup \mathfrak{M}_p^2(\{0_L\}))}$, entonces $\mathfrak{M}_p^1(\{0_L\})$ y $\mathfrak{M}_p^2(\{0_L\})$ y \mathfrak{D} , son como las 2-celdas D_1 , D_2 y D_3 del Ejemplo 1.6. Así, nuevamente, el espacio $(\bigcup \mathfrak{M}_p^1(T)) \cup (\bigcup \mathfrak{M}_p^2(T)) \cup \mathfrak{D}$ es una unión finita de celdas cuyas intersecciones dos a dos, es bien vacía o bien una

unión finita de caras, al coincidir esta unión con el continuo $C_p(G)$, se tiene que $C_p(G)$ es un poliedro.

Caso III *El punto p está en una arista terminal J de G .*

Tenemos dos subcasos, el primero se alcanza cuando p es el extremo de J , que es punto terminal de G . Un análisis similar al caso anterior muestra que la unión de las celdas $\{\mathfrak{M}_p^3(T)\}_{T \in \Gamma_3}$, junto con el hiperespacio $C_p(J)$, hacen de $C_p(G)$ un poliedro.

El otro subcaso se alcanza cuando p está en el interior de la arista J . Aquí, de nuevo, no es difícil darse cuenta que la unión de las celdas $\{\mathfrak{N}_p^3(T)\}_{T \in \Gamma_3}$ y $C_p(J)$ hacen de $C_p(G)$ un poliedro.

Caso IV *El punto p está en el interior de una arista interna J de G*

En este caso tenemos que:

$$C_p(G) = C_p(J) \cup \left(\bigcup_{T \in \Gamma_4} \mathfrak{M}(T) \right) \cup \left(\bigcup_{H \in \Gamma_5} \mathfrak{K}_p^1(H) \right) \cup \left(\bigcup_{H \in \Gamma_5} \mathfrak{K}_p^2(H) \right) \cup \left(\bigcup_{M \in \Gamma_6} \mathfrak{M}_p(M) \right) \cup \left(\bigcup_{N \in \Gamma_7} \mathfrak{N}_p(N) \right).$$

En lo sucesivo, veremos que la intersección de cualesquiera dos de las celdas involucradas en estas uniones es vacía o bien una unión de caras (ver Nota 3.4).

Paso 1

Para T y $S \in \Gamma_4$, se sigue, inmediatamente del Lema 3.10, que las celdas $\mathfrak{M}(T)$ y $\mathfrak{M}(S)$ de intersectarse, dicha intersección es una unión de caras.

Paso 2

Ahora tomemos H y $K \in \Gamma_5$ y veamos que la intersección $\mathfrak{K}_p^1(H) \cap \mathfrak{K}_p^2(K)$, de no ser vacía, es una unión de caras.

Recordemos que las caras de una celda $[0, 1]^n$, son aquellos subconjuntos que se obtienen restringiendo algunas de sus coordenadas de manera que sólo puedan tomar los valores 0 o 1 y el resto de las coordenadas queda libre de tomar cualquier valor comprendido entre 0 y 1.

Lo que queremos demostrar es que $\mathfrak{K}_p^1(H) \cap \mathfrak{K}_p^2(K)$ es una unión de este tipo de caras, tanto de la celda $\mathfrak{K}_p^1(H)$ como de la celda $\mathfrak{K}_p^2(K)$. Demostraremos este hecho para $\mathfrak{K}_p^1(H)$, siendo la demostración para $\mathfrak{K}_p^2(K)$ prácticamente la misma.

Sea $D(1, H) = H \cup \left(\bigcup_{i=1}^n J_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n L_j \right)$. (Recordemos que estamos suponiendo que $L_1 = J$). Así, los elementos de $\mathfrak{K}_p^1(H)$ son subcontinuos con la forma:

$$(H \cup \mathcal{L}_1) \cup ([p, a_1] \cup [b_1, v]) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}] \right).$$

De acuerdo con esto, las caras de $\mathfrak{K}_p^1(H)$ se consiguen cuando fijamos $c_i = 0_{J_i}$ o $c_i = 1_{J_i}$ para algunos índices $i \in \{1, \dots, n\}$ y cuando fijamos $a_1 = p$, $b_1 = v$ o bien $a_1 = b_1$ o bien, cuando fijamos $a_j = 0_{L_j}$, $b_j = 1_{L_j}$, o $a_j = b_j$ para algunos índices $j \in \{2, \dots, m\}$.

Dado que $\mathfrak{K}_p^1(H) \cap \mathfrak{K}_p^2(K)$ es no vacío, podemos fijar un elemento X en dicha intersección. Dado que X es un elemento de $\mathfrak{K}_p^2(K)$, por definición, tenemos que $\mathcal{L}_2 \subset X$. Con lo que X al ser pensado como elemento de $\mathfrak{K}_p^1(H)$, éste se encuentra en la cara de $\mathfrak{K}_p^1(H)$ que se obtiene al hacer $a_1 = b_1$. Por otro lado, $K \subset x \subset H \cup \left(\bigcup_{i=1}^n J_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m L_j \right)$. De manera que, el árbol interno K está formado por algunas de las aristas de H , algunas de las aristas J_i y algunas de las aristas L_j , con $j \neq 1$. Para ver en cuáles valores se fijan, analizaremos cada una de las aristas J_i y L_j .

Dada una arista J_i hay distintos casos a considerar:

Caso 1 $J_i \subset K$.

En este caso, cualquier elemento $Y \in \mathfrak{K}_p^1(H) \cap \mathfrak{K}_p^2(K)$, va a ser tal que $J_i \subset K \subset Y$. De manera que, al representar a Y como elemento de $\mathfrak{K}_p^1(H)$, se debe fijar $c_i = 1_{J_i}$.

Caso 2 $J_i \not\subset K$, $0_{J_i} 1_{L_j} \in K$.

Dado que K está formado por aristas, pues es una subgráfica de G , en este caso, la intersección de K con J_i es, precisamente, los vértices 0_{J_i} y 1_{J_i} . En este caso, c_i puede tomar todos los valores desde 0_{J_i} hasta 1_{J_i} .

Caso 3 $J_i \not\subset K$, $0_{J_i} \in K$, $1_{J_i} \notin K$.

En este caso, el "crecimiento" que se les da a los elementos de $\mathfrak{K}_p^1(H)$ es el mismo que se les da a los elementos de $\mathfrak{K}_p^2(K)$, a través de la arista J_i . De manera que, en este caso, c_i toma todos los valores en la arista J_i .

Caso 4 $J_i \not\subset K$, $1_{J_i} \in K$ y $0_{J_i} \notin K$.

En este caso no puede ocurrir que c_i esté en $J_i - \{0_{J_i}, 1_{J_i}\}$, pues no habría manera de que el elemento correspondiente pertenezca a $\mathfrak{K}_p^2(K)$.

Por tanto, en este caso $c_i = 0_{J_i}$ o bien $c_i = 1_{J_i}$.

Caso 5 $J_i \not\subset K$, $0_{J_i}, 1_{J_i} \notin K$.

En este caso ningún punto de $J_i - \{0_{J_i}, 1_{J_i}\}$ pertenece a $D(1, K)$ y, por tanto, tampoco pertenece a ningún elemento de $\mathfrak{K}_p^2(K)$. Por tanto, $c_i = 0_{J_i}$.

Hemos concluido los posibles casos para J_i . Ahora veamos qué ocurre con L_j ,

donde $j \in \{2, \dots, m\}$.

Caso 6. $L_j \subset K$.

En este caso, cualquier elemento $Y \in \mathfrak{K}_p^1(H) \cap \mathfrak{K}_p^2(K)$ será tal que $L_j \subset K \subset Y$. De modo que, al representarlo como elemento de $\mathfrak{K}_p^1(H)$, se tiene que $a_j = b_j$.

Caso 7. $L_j \not\subset K$, 0_{L_j} y $1_{L_j} \in K$.

En este caso, tanto los elementos de $\mathfrak{K}_p^1(H)$ como los de $\mathfrak{K}_p^2(K)$ pueden crecer haciendo que una de sus coordenadas tome valores desde los extremos de L_j , así que, a_j y b_j pueden tomar todos los valores en L_j .

Caso 8. $L_j \not\subset K$, $0_{L_j} \in K$, $1_{L_j} \notin K$.

En este caso, ningún elemento de $\mathfrak{K}_p^2(K)$ puede crecer a través de tomar valores en la coordenada correspondiente a la arista L_j , desde el extremo 1_{L_j} , por lo que se debe poner la restricción $b_j = 1_{L_j}$.

Caso 9. $L_j \not\subset K$, $0_{L_j} \notin K$ y $1_{L_j} \in K$.

En este caso, ningún elemento de $\mathfrak{K}_p^2(K)$ puede crecer haciendo que la coordenada correspondiente a la arista L_j tome valores desde el vértice 0_{L_j} por lo que se debe poner la restricción $a_j = 0_{L_j}$.

Caso 10. $L_j \not\subset K$, 0_{L_j} y $1_{L_j} \notin K$.

En este caso, ningún elemento de $L_j - \{0_{L_j}, 1_{L_j}\}$ pertenece a $D(1, K)$ y por tanto a ningún elemento de $\mathfrak{K}_p^2(K)$. De manera que en este caso debemos tener que $a_j = 0_{L_j}$ y $b_j = 1_{L_j}$.

Paso 3

Ahora veremos que para H y $K \in \Gamma_5$, si las celdas $\mathfrak{K}_p^1(H)$ y $\mathfrak{K}_p^1(K)$ se intersectan, entonces la intersección es una unión de caras.

En efecto, los homeomorfismos $\sigma_H : \mathfrak{K}_p^1(H) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{Q}(H))$ y $\sigma_K : \mathfrak{K}_p^1(K) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{Q}(K))$ de la demostración del Lema 3.30, satisfacen las hipótesis del Teorema 3.15. Este teorema garantiza la existencia de una única función continua $\sigma : \mathfrak{K}_p^1(H) \cup \mathfrak{K}_p^1(K) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{Q}(H)) \cup \mathfrak{M}(\hat{Q}(K))$ que extiende tanto a σ_H como a σ_K .

Por otro lado, la función σ y el conjunto $\{\mathfrak{M}(\hat{Q}(H)), \mathfrak{M}(\hat{Q}(K))\}$ satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.16. Según esta proposición, la función σ es un homeomorfismo. Al ser $\mathfrak{M}(\hat{Q}(H))$ y $\mathfrak{M}(\hat{Q}(K))$ un par de las celdas, que dan a $C(\hat{Q}(G))$ estructura de poliedro, tenemos que éstas, se intersectan en una unión de sus caras. Por tanto, las celdas $\mathfrak{K}_p^1(H)$ y $\mathfrak{K}_p^1(K)$ se intersectan en una unión de sus caras.

Paso 4

De manera similar, con los homeomorfismos $\rho_H : \mathfrak{K}_p^2(H) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{R}(H))$ y $\rho_K : \mathfrak{K}_p^2(K) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{R}(K))$ del Teorema 3.30, se obtiene un homeomorfismo β entre $\mathfrak{K}_p^2(H) \cup \mathfrak{K}_p^2(K)$ y $\mathfrak{M}(\hat{R}(H)) \cup \mathfrak{M}(\hat{R}(K))$. Con lo que, para H y $K \in \Gamma_5$, si la intersección de las celdas $\mathfrak{K}_p^2(H)$ y $\mathfrak{K}_p^2(K)$ no es vacía, entonces es una unión de caras.

Paso 5

Ahora veamos que, para $T \in \Gamma_4$ y $H \in \Gamma_5$, las celdas $\mathfrak{M}(T)$ y $\mathfrak{K}_p^1(H)$ se intersectan en una unión de sus caras o bien, no se intersectan.

Sean $Id : \mathfrak{M}(T) \rightarrow \mathfrak{M}(T)$ la función identidad y $\sigma_H : \mathfrak{K}_p^1(H) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{Q}(H))$ la función del Lema 3.30. Sea, también, $A \in \mathfrak{M}(T) \cap \mathfrak{K}_p^1(H)$. Recordemos que Γ_4 es el conjunto de aquellos árboles internos de G que contienen a p . Según esto, se tiene que A contiene a la arista J (recuérdese que J es la arista que contiene a p en su interior), debido a esto, al representar a A como elemento de $\mathfrak{K}_p^1(H)$ debemos poner $a_1 = b_1$. De modo que:

$$\begin{aligned} \sigma_H(A) = \hat{Q}(A) &= \hat{Q}((H \cup \mathcal{L}_1 \cup [p, a_1] \cup [b_1, v]) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup \\ & [b_j, 1_{L_j}])) = \hat{Q}(H) \cup \hat{Q}(\mathcal{L}_2) \cup \hat{Q}((\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])). \end{aligned}$$

De manera que:

$$\begin{aligned} \psi_1 \circ \sigma_H(A) &= H \cup f(\mathcal{L}_1) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) = H \cup f(\mathcal{L}_2) \\ & \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) = H \cup J \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \\ & \cup [b_j, 1_{L_j}]) = A. \end{aligned}$$

Donde ψ_1 es la función en la demostración del Lema 3.29. Así, las funciones Id y $\psi_1 \circ \sigma_H$ satisfacen las condiciones del Teorema 3.15. Por lo que, existe una única función continua $\alpha : \mathfrak{M}(T) \cup \mathfrak{K}_p^1(H) \rightarrow \mathfrak{M}(T) \cup \mathfrak{M}(H)$ que extiende a Id y a $\psi_1 \circ \sigma_H$. Por la Proposición 3.16, α es un homeomorfismo. Al ser $\mathfrak{M}(T) \cup \mathfrak{M}(H)$ una unión de celdas de dimensión finita cuya intersección es ajena o bien una unión de caras (Lema 3.10). Así, también, $\mathfrak{M}(T) \cup \mathfrak{K}_p^1(H)$ es una unión de celdas de dimensión finita cuya intersección es ajena o bien una unión de caras.

Paso 6

De manera similar, un homeomorfismo $\alpha' : \mathfrak{M}(T) \cup \mathfrak{K}_p^2(H) \rightarrow \mathfrak{M}(T) \cup \mathfrak{M}(H)$ se obtiene al considerar las funciones $Id : \mathfrak{M}(T) \rightarrow \mathfrak{M}(T)$ y $\psi_2 \circ \rho_H$, donde ψ_2 es como en la demostración del Lema 3.29 y ρ_H es como en la demostración del Lema 3.30. Con lo que si las celdas $\mathfrak{M}(T)$ y $\mathfrak{K}_p^2(H)$ se intersectan, entonces

dicha intersección es una unión de caras.

Paso 7

Ahora veamos que dos celdas del tipo $\mathfrak{M}_p(M)$ se intersectan en una unión de caras, o bien no se intersectan. Sean $M_1, M_2 \in \Gamma_6$. Las funciones β_{M_1} y β_{M_2} , en la demostración de el Lema 3.31 satisfacen las hipótesis del Teorema 3.15, con lo que se garantiza la existencia de una única función continua $\beta : \mathfrak{M}_p(M_1) \cup \mathfrak{M}_p(M_2) \rightarrow \mathfrak{M}(\hat{Q}(M_1)) \cup \mathfrak{M}(\hat{Q}(M_2))$ que extiende a β_{M_1} y a β_{M_2} . Por la Proposición 3.16, la función β es un homeomorfismo. De lo anterior, se deduce que las celdas $\mathfrak{M}_p(M_1)$ y $\mathfrak{M}_p(M_2)$ se intersectan entre sí en la misma forma en que lo hacen las celdas $\mathfrak{M}(\hat{Q}(M_1))$ y $\mathfrak{M}(\hat{Q}(M_2))$, haciéndolo éstas en una unión de sus caras, o bien no intersectándose. Así, también, las celdas $\mathfrak{M}_p(M_1)$ y $\mathfrak{M}_p(M_2)$ se intersectan en una unión de sus caras o bien no se intersectan.

Paso 8

De manera similar, al considerar dos árboles $N_1, N_2 \in \Gamma_7$ un homeomorfismo $\lambda : \mathfrak{N}_p(N_1) \cup \mathfrak{N}_p(N_2) \rightarrow \mathfrak{N}(\hat{R}(N_1)) \cup \mathfrak{N}(\hat{R}(N_2))$ se obtiene al considerar los homeomorfismos λ_{N_1} y λ_{N_2} , de la demostración de el Lema 3.31. De manera que al igual que en el Paso 7, si las celdas $\mathfrak{N}_p(N_1)$ y $\mathfrak{N}_p(N_2)$ se intersectan, entonces lo hacen en una unión de sus caras.

Paso 9

Ahora, veamos que una celda de la forma $\mathfrak{M}_p(M)$ y una de la forma $\mathfrak{N}_p(N)$ se intersectan en una unión de sus caras o no se intersectan.

Considérese los homeomorfismos $\psi_1 \circ \beta_M : \mathfrak{M}_p(M) \rightarrow \mathfrak{M}(M)$ y $\psi_2 \circ \lambda_N : \mathfrak{N}_p(N) \rightarrow \mathfrak{N}(N)$, donde las funciones ψ_1 y ψ_2 son como en la demostración del Lema 3.29, mientras que las funciones β_M y λ_N son como en la demostración del Lema 3.31. Dado $A \in \mathfrak{M}_p(M) \cap \mathfrak{N}_p(N)$, si A es pensado como elemento de $\mathfrak{M}_p(M)$, entonces debemos poner $c_1 = v$. Así:

$$A = (M \cup \mathcal{L}_1 \cup [p, v]) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right) = (M \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right).$$

Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \psi_1 \circ \beta_M(A) &= \psi_1 \circ \beta_M((M \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right)) = \\ &= h_0(M) \cup h_0(\mathcal{L}_1) \cup h_0(\mathcal{L}_2) \cup h_0\left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i]\right) \cup h_0\left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])\right) = M \cup \\ &= f(\mathcal{L}_2) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right) = M \cup J \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right) = A. \end{aligned}$$

De igual forma se muestra que $\psi_2 \circ \lambda_N(A) = A$, con lo que, por el Teorema 3.15 y la Proposición 3.16, $\mathfrak{M}_p(M) \cup \mathfrak{N}_p(N)$ es homeomorfo a $\mathfrak{M}(M) \cup \mathfrak{N}(N)$. De manera que, si las celdas $\mathfrak{M}(M)$ y $\mathfrak{M}(N)$ se intersectan, entonces dicha intersección es una unión de caras, por tanto, así, también, la intersección de las celdas $\mathfrak{M}_p(M)$ y $\mathfrak{N}_p(N)$ es una unión de caras.

Paso 10

Ahora veamos que, para $T \in \Gamma_4$ y $H \in \Gamma_6$, si las celdas $\mathfrak{M}(T)$ y $\mathfrak{M}_p(M)$ se intersectan, entonces dicha intersección es una unión de caras.

Veamos que los homeomorfismos $Id : \mathfrak{M}(T) \rightarrow \mathfrak{M}(T)$ y $\psi_1 \circ \beta_M : \mathfrak{M}_p(M) \rightarrow \mathfrak{M}(M)$ satisfacen las hipótesis de el Teorema 3.15. Según este teorema, tenemos que verificar que $Id(A) = \psi_1 \circ \beta_M(A)$ para cada $A \in \mathfrak{M}_p(M) \cap \mathfrak{M}(T)$.

Sea pues A un elemento de dicha intersección. Dado que T es un árbol interno de G que contiene a p , debe ocurrir que la arista J que contiene a p en su interior es un subconjunto de T . Así, $J \subset A$, por lo tanto, al pensar a A como elemento de $\mathfrak{M}_p(M)$, debemos poner $c_1 = v$. Así:

$$\begin{aligned} A &= (M \cup \mathcal{L}_1 \cup [p, c_1]) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right) = (M \cup \mathcal{L}_1 \cup [p, \\ &v]) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right) = (M \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \\ &\left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right) = (M \cup J) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \psi_1 \circ \beta_M(A) &= h_0(x) = h_0((M \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right)) \\ &= h_0(M) \cup h_0(\mathcal{L}_1) \cup h_0(\mathcal{L}_2) \cup h_0\left(\left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right)\right) = \\ &M \cup f(\mathcal{L}_2) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right) = M \cup J \cup \left(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i] \right) \cup \\ &\left(\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) \right) = A. \end{aligned}$$

Como evidentemente $Id(A) = A$, se tiene que los homeomorfismos Id y $\psi_1 \circ \beta_M$ satisfacen las hipótesis de el Teorema 3.15. Por tanto, existe una única función continua $\chi : \mathfrak{M}(T) \cup \mathfrak{M}_p(M) \rightarrow \mathfrak{M}(T) \cup \mathfrak{M}(M)$ que extiende tanto a Id como a $\psi_1 \circ \beta_M$. Por otro lado, la función χ y los conjuntos $\{\mathfrak{M}(T), \mathfrak{M}_p(M)\}$ satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.16, $\mathfrak{M}(T) \cup \mathfrak{M}_p(M)$ es homeomorfo a $\mathfrak{M}(T) \cup \mathfrak{M}(M)$. Al intersectarse las celdas $\mathfrak{M}(T)$ y $\mathfrak{M}(M)$ en una unión de caras, se tiene que $\mathfrak{M}(T)$ y $\mathfrak{M}_p(M)$ se intersectan en una unión de caras.

Paso 11

Si $N \in \Gamma_7$, de manera similar se muestra que las celdas $\mathfrak{M}(T)$ y $\mathfrak{N}_p(N)$ se

intersectan en una unión de caras si en el análisis anterior usamos las funciones $Id : \mathfrak{M}(T) \rightarrow \mathfrak{M}(T)$ y $\psi_2 \circ \lambda_N : \mathfrak{N}_p(N) \rightarrow \mathfrak{M}(N)$. Donde la función ψ_2 es como en la demostración del Lema 3.29, mientras que la función λ_N es como en la demostración del Lema 3.31

Paso 12

Ahora veamos que, para $H \in \Gamma_5$ y $M \in \Gamma_6$, si las celdas $\mathfrak{R}_p^1(H)$ y $\mathfrak{M}_p(M)$ se intersectan, entonces se intersectan en una unión de sus caras. En efecto, sean los homeomorfismos $\psi_1 \circ \sigma_H : \mathfrak{R}_p^1(H) \rightarrow \mathfrak{M}(H)$ y $\psi_1 \circ \beta_M : \mathfrak{M}_p(M) \rightarrow \mathfrak{M}(M)$, (donde la función ψ_1 es como en la demostración del Lema 3.29, mientras que las funciones σ_H y β_M son como en las demostraciones de los Lemas 3.30 y 3.31 respectivamente). Veremos que estos homeomorfismos satisfacen las hipótesis del Teorema 3.15, con lo que se garantizará la existencia de una única función continua $\phi : \mathfrak{R}_p^1(H) \cup \mathfrak{M}_p(M) \rightarrow \mathfrak{M}(H) \cup \mathfrak{M}(M)$ que extiende tanto a $\psi_1 \circ \sigma_H$ como a $\psi_1 \circ \beta_M$. Después, por como están definidas las funciones $\psi_1 \circ \sigma_H$ y $\psi_1 \circ \beta_M$, se tendrá que la función ϕ y el conjunto $\{\mathfrak{M}(H), \mathfrak{M}(M)\}$ satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.16 y, así, tendremos que ϕ es un homeomorfismo. Teniendo esto, podremos decir que $\mathfrak{R}_p^1(H) \cap \mathfrak{M}_p(M)$ es homeomorfo al conjunto $\mathfrak{M}(H) \cap \mathfrak{M}(M)$. Siendo éste último una unión de caras, así será el conjunto $\mathfrak{R}_p^1(H) \cap \mathfrak{M}_p(M)$.

Según el Teorema 3.15, debemos verificar que $\psi_1 \circ \sigma_H(A) = \psi_1 \circ \beta_M(A)$ para cada $A \in \mathfrak{R}_p^1(H) \cap \mathfrak{M}_p(M)$.

Ahora bien, dicho punto A , por un lado, debería tener la forma: $(H \cup \mathcal{L}_1) \cup ([p, a_1] \cup [b_1, v]) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])$ si es pensado como un elemento de $\mathfrak{R}_p^1(H)$ y, por otro lado, como un elemento de $\mathfrak{M}_p(M)$, A debería tener la forma: $(M \cup \mathcal{L}_1 \cup [p, c'_1]) \cup (\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}]))$.

Nótese que sólo hay dos casos en los que A puede tener ambas formas:

Caso I: $a_1 = b_1$.

En este caso, se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= (H \cup \mathcal{L}_1) \cup ([p, a_1] \cup [b_1, v]) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) = \\ &= (H \cup \mathcal{L}_1 \cup [p, a_1] \cup [a_1, v]) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) = (H \cup \\ &\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]) = (H \cup J) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup \\ &(\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 \circ \sigma_H(A) &= h_0 \circ \widehat{Q}^{-1} \circ \widehat{Q}(A) = h_0(A) = h_0((H \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup \\
 &(\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])) = h_0(H) \cup h_0(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup h_0((\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup \\
 &[b_j, 1_{L_j}]))) = (H \cup f(\mathcal{L}_2)) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])) = (H \cup J) \cup \\
 &(\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])) = A.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, A como un elemento de $\mathfrak{M}_p(M)$ es tal que $c'_i = v$. Así:

$$\begin{aligned}
 A &= (M \cup \mathcal{L}_1 \cup [p, c'_1]) \cup (\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}])) = (M \cup \mathcal{L}_1 \cup \\
 &[p, v]) \cup (\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}])) = (M \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cup (\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]) \cup \\
 &(\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}])) = (M \cup J) \cup (\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}])) = A.
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 \circ \beta_M(A) &= h_0((M \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \cup (\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}]))) = \\
 &h_0(M) \cup h_0(\mathcal{L}_0) \cup h_0(\mathcal{L}_2) \cup h_0((\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}]))) = \\
 &M \cup f(\mathcal{L}_2) \cup (\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}])) = (M \cup J) \cup (\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]) \cup \\
 &(\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}])) = A.
 \end{aligned}$$

De manera que, en este caso, $\psi_1 \circ \sigma_H(A) = \psi_1 \circ \beta_M(A)$.

Caso II: a_1 es algún punto de \mathcal{L}_1 y $b_1 = v$.

En este caso, nótese que $a_1 = c'_1$. Así:

$$\begin{aligned}
 A &= (H \cup \mathcal{L}_1) \cup ([p, a_1] \cup [b_1, v]) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])) = \\
 &(H \cup \mathcal{L}_1) \cup ([p, a_1] \cup \{v\}) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])) = (H \cup \mathcal{L}_1) \cup \\
 &([p, a_1]) \cup (\bigcup_{i=1}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=2}^m [0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])).
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 \circ \sigma_H(A) &= h_0(H) \cup h_0([p, a_1]) \cup h_0((\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}]))) = \\
 &H \cup f([p, a_1]) \cup (\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])) = H \cup [u, f(a_1)] \cup \\
 &(\bigcup_{i=2}^n [0_{J_i}, c_i]) \cup (\bigcup_{j=1}^m ([0_{L_j}, a_j] \cup [b_j, 1_{L_j}])) = (A - [p, a_1]) \cup [u, f(a_1)].
 \end{aligned}$$

Por otro lado A como elemento de $\mathfrak{M}_p(M)$ es tal que:

$$A = (M \cup \mathcal{L}_1 \cup [p, c'_1]) \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}]) \right).$$

Por tanto:

$$\psi_1 \circ \beta_M(A) = h_0((M \cup \mathcal{L}_1 \cup [p, c'_1]) \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}]) \right)) h_0(M) \cup$$

$$h_0(\mathcal{L}_1) \cup h_0([p, c'_1]) \cup h_0\left(\left(\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}])\right)\right) = M \cup f([p, c'_1]) \cup$$

$$\left(\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}])\right) = (M \cup [u, f(c'_1)]) \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n'} [0'_{J_i}, c'_i]\right) \cup$$

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m'} ([0'_{L_j}, a'_j] \cup [b'_j, 1'_{L_j}])\right) = (A - [p, a_1]) \cup [u, f(a_1)].$$

Es decir; $\psi_1 \circ \sigma_H(A) = \psi_1 \circ \beta_M(A)$. De aquí, se aplica el Teorema 3.15 para obtener la única función continua $\phi : \mathfrak{K}_p^1(H) \cup \mathfrak{M}_p(M) \rightarrow \mathfrak{M}(H) \cup \mathfrak{M}(M)$ que extiende tanto a $\psi_1 \circ \sigma_H$ como a $\psi_1 \circ \beta_M$. Por último, aplicamos la Proposición 3.16 a la función ϕ y al conjunto $\{\mathfrak{M}(H), \mathfrak{M}(M)\}$, para obtener que $\mathfrak{K}_p^1(H) \cup \mathfrak{M}_p(M)$ y $\mathfrak{M}(H) \cup \mathfrak{M}(M)$ son homeomorfos como dijimos.

Paso 13

Para ver que las celdas $\mathfrak{K}_p^2(H)$ y $\mathfrak{N}_p(N)$ (donde $H \in \Gamma_5$ y $N \in \Gamma_7$) si se intersectan, entonces lo hacen en una unión de sus caras, replíquese el análisis anterior con las funciones $\psi_2 \circ \lambda_N : \mathfrak{N}_p(N) \rightarrow \mathfrak{M}(N)$ y $\psi_2 \circ \rho_H : \mathfrak{K}_p^2(H) \rightarrow \mathfrak{M}(H)$, en donde la función ψ_2 es como en la demostración del Lema 3.29 mientras que las funciones ρ_H y λ_N son como en la demostración de los Lemas 3.30 y 3.31, respectivamente.

Paso 14

Ahora veamos que, para $M \in \Gamma_6$ y $H \in \Gamma_5$, las celdas $\mathfrak{M}_p(M)$ y $\mathfrak{K}_p^2(H)$ se intersectan en una unión de sus caras.

Al igual que antes, se tiene que los homeomorfismos $\psi_1 \circ \beta_M : \mathfrak{M}_p(M) \rightarrow \mathfrak{M}(M)$ y $\psi_2 \circ \rho_H : \mathfrak{K}_p^2(H) \rightarrow \mathfrak{M}(H)$, cumplen con las hipótesis de el Teorema 3.15, con lo que se garantiza la existencia de una única función continua $\nu : \mathfrak{K}_p^2(H) \cup \mathfrak{M}_p(M) \rightarrow \mathfrak{M}(H) \cup \mathfrak{M}(M)$ que es extensión tanto de $\psi_2 \circ \rho_H$ como de $\psi_1 \circ \beta_M$. También, al igual que antes, se tiene que la función ν y el conjunto $\{\mathfrak{M}(H), \mathfrak{M}(M)\}$ satisfacen las condiciones de la Proposición 3.16, con lo que ν es un homeomorfismo. Al intersectarse las celdas $\mathfrak{M}(H)$ y $\mathfrak{M}(M)$ en la unión de algunas de sus caras, así también las celdas $\mathfrak{K}_p^2(H)$ y $\mathfrak{M}_p(M)$ se intersectan en la unión de algunas de sus caras.

Paso 15

Para $N \in \Gamma_7$ y $H \in \Gamma_5$ el resultado anterior es aplicable a las celdas $\mathfrak{N}_p(N)$ y $\mathfrak{K}_p^1(H)$, si se consideran las funciones $\psi_2 \circ \lambda_N : \mathfrak{N}_p(N) \rightarrow \mathfrak{M}(N)$ y $\psi_1 \circ \sigma_H :$

$\mathfrak{K}_p^1(H) \rightarrow \mathfrak{M}(H)$. Donde, las funciones ψ_1 y ψ_2 son como en la demostración del Lema 3.29 mientras que σ_H es como en la demostración del Lema 3.30 y λ_N como en la demostración del Lema 3.31. Por tanto, las celdas $\mathfrak{N}_p(N)$ y $\mathfrak{K}_p^1(H)$, si se intersectan también lo hacen en la unión de algunas de sus caras.

Paso 16

Por último, considérese la 2-celda $C_p(J)$. De todas las celdas en los conjuntos $\{\mathfrak{M}(T)\}_{T \in \Gamma_4}$, $\{\mathfrak{K}_p^1(H)\}_{H \in \Gamma_5}$, $\{\mathfrak{K}_p^2(H)\}_{H \in \Gamma_5}$, $\{\mathfrak{M}_p(M)\}_{M \in \Gamma_6}$, $\{\mathfrak{N}_p(N)\}_{N \in \Gamma_7}$, las únicas que se intersectan con $C_p(J)$ son $\mathfrak{M}(J)$, $\mathfrak{M}_p(\{u\})$ y $\mathfrak{N}_p(\{v\})$. En todos los casos, las intersecciones son los conjuntos $\{J\}$, $\{\mathcal{L}_1 \cup [p, c_1] : c_1 \in \mathcal{L}_2\}$ y $\{\mathcal{L}_2 \cup [p, c_1] : c_1 \in \mathcal{L}_1\}$, respectivamente. En todos estos casos, dichos conjuntos son una cara de las celdas involucradas. Esto concluye la demostración del Teorema 3.32. ■

3.4. Los continuos Cpp cuyo hiperespacio de continuos $C(X)$ es localmente conexo son gráficas finitas

Recordemos que un *cubo de Hilbert* es cualquier espacio homeomorfo a $\prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]$, un continuo X contiene un ∞ -odo si existen subcontinuos A, B de X tales que $A \subset B$ y $B - A$ tiene un número infinito de componentes. Al continuo A se le llama *vértice* del ∞ -odo. Evidentemente, un poliedro no puede contener cubos de Hilbert, usaremos este hecho, además de ciertos resultados, para probar que un continuo es una gráfica finita si y sólo si es Cpp y su hiperespacio de continuos es localmente conexo.

Teorema 3.33. *Un continuo X es una gráfica finita si y sólo si X es Cpp y $C(X)$ es localmente conexo.*

Demostración: Ya que toda gráfica finita X es localmente conexa, se sigue, del Teorema 1.9, que $C(X)$ es localmente conexo. Además, por el Teorema 3.32, X es un continuo Cpp.

Por otro, lado si $C(X)$ es localmente conexo se sigue del Teorema 1.9, que el continuo X es localmente conexo, si éste no es una gráfica finita, resulta de [10, Cor. 1] que, $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert, de manera que, por [6, Teo. 7.4, Pág. 101], existen dos subcontinuos A, B de X tales que $B - A$ tiene una infinidad de componentes. Tomemos $p \in A$, si $\varphi : \mathbb{Q}_H \rightarrow C(X)$ es el encaje del cubo de Hilbert en $C(X)$ descrito en la

demostración de [6, Teo. 7.4], se tiene que $\varphi(\mathbb{Q}_H) \subset C_p(X)$, lo que muestra que X no puede ser Cpp. ■

La conexidad local de $C(X)$ es esencial en el teorema anterior, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.34. Si X es el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$, entonces $C_p(X)$ es poliedro para cada p , $C(X)$ no es localmente conexo y X no es una gráfica finita.

Sin embargo, los hiperespacios anclados del continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ no coinciden con los de ninguna gráfica, ya que, para un punto p en el interior variedad del arco límite, el hiperespacio $C_p(X)$ es una 2-celda junto con un arco, (ver Figura 3.17).

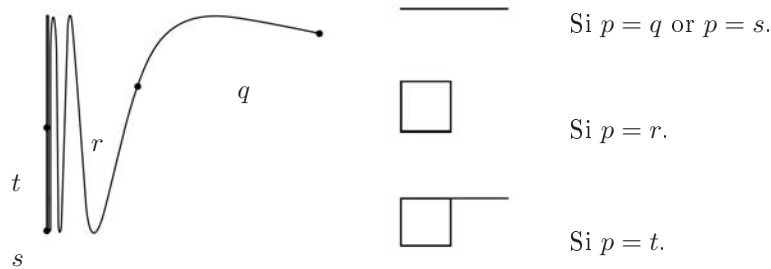


Figura 3.17: Hiperespacios anclados del continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$.

Por otro lado si $p = (1, \text{sen}1)$, entonces $C_p(X)$ es un arco, con lo que los hiperespacios anclados del continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ no pueden coincidir con los de ninguna gráfica finita, ya que el arco es la única gráfica finita con la propiedad de tener un hiperespacio anclado que es un arco, (más adelante, en el Teorema 3.53, probaremos de hecho algo más fuerte), y ninguno de sus hiperespacios anclados es una 2-celda junto con un arco.

Lo anterior da pie a la siguiente pregunta:

P1 ¿Si G es una gráfica finita, existe un continuo X que no es una gráfica finita cuyos hiperespacios anclados sean exactamente los mismos que los de G ?

3.5. Caracterización del arco en términos de hiperespacios anclados.

Como dijimos en la sección anterior, probaremos un resultado cuya consecuencia inmediata será que el arco es la única gráfica finita, para la cual uno de sus hiperespacios anclados es un arco. Comenzamos con las siguientes definiciones.

Definición 3.35. *Un subcontinuo W de un continuo X es final si para cualesquiera subcontinuos M y $N \in C(X)$, que contienen a W , se tiene que $M \subset N$ o bien $N \subset M$. Un punto p es final si $\{p\}$ es un subcontinuo final.*

Ejemplo 3.36. *Si $X = [0, 1]$ y $A = \{0\}$ o $A = \{1\}$, entonces A es un subcontinuo final del arco $[0, 1]$.*

Ejemplo 3.37. *Si X es el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ y A es cualquier subcontinuo conteniendo algún extremo del arco límite, entonces A es un subcontinuo final.*

Definición 3.38. *[11, Def. 1.2, pág. 45] Un arco de orden en 2^X es un arco α en 2^X tal que si $A, B \in \alpha$, entonces $A \subset B$ o bien $B \subset A$.*

Lema 3.39. *[11, Lem. 1.5, pág. 58] Si α es un arco de orden en 2^X , entonces $\bigcap \alpha \in \alpha$ y $\bigcup \alpha \in \alpha$.*

Teorema 3.40. *[11, Teo. 1.6, pág. 59] Si α es un arco de orden en 2^X , entonces los puntos extremos de α son $\bigcap \alpha$ y $\bigcup \alpha$.*

Definición 3.41. *[11, Def. 1.7, pág. 59] Si α es un arco de orden en 2^X , entonces se dice que α es un arco de orden desde (o comenzado en) $\bigcap \alpha$ hasta (o acabado en) $\bigcup \alpha$.*

Lema 3.42. *[11, Lem. 1.11, pág. 64] Si α es un arco de orden en 2^X comenzado en $A_0 \in C(X)$, entonces $\alpha \subset C(X)$.*

Dado un punto p de un continuo X , siempre existe un arco de orden α en $C(X)$ de $\{p\}$ a X . Ello se sigue inmediatamente del lema anterior y el siguiente teorema.

Teorema 3.43. *[11, Teo. 1.8. pág. 46] Sean $A_0, A_1 \in 2^X$ tales que $A_0 \neq A_1$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i) *Existe un arco de orden en 2^X de A_0 a A_1 ,*
- ii) *$A_0 \subset A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0 .*

Teorema 3.44. *[11, Teo. 1.4, pág. 45] Sea $\Lambda \subset C(G)$ un subcontinuo, entonces Λ es un arco de orden si y sólo si para cada $A, B \in \Lambda$ se tiene que $A \subset B$ o bien $B \subset A$.*

Si X es un espacio topológico, y x, y y z son tres de sus puntos, se dice que el punto z *separa* a x de y en X si $X - \{z\} = U \cup V$, con $x \in U$ y $z \in V$ y donde U y V son dos subconjuntos abiertos, ajenos de X . Un hecho conocido es que si X es un arco y x y y son los extremos del mismo, entonces cualquier punto de $X - \{x, y\}$ separa a x de y en X . Para mayor información remitimos al lector a [12, Cap. 6, pág. 87].

Proposición 3.45. *Sea X un continuo. Entonces $C_p(X)$ es un arco si y sólo si es un arco de orden.*

Demostración: Sea α un arco de orden en $C(X)$ de $\{p\}$ a X . El hecho de que $\alpha \subset C_p(X)$ y que $\{p\}$ y X sean los extremos de $C_p(X)$, implica que $\alpha = C_p(X)$. De lo contrario, existiría $A \in C_p(X)$ tal que $A \not\subset \alpha$ y, por tanto, $A \neq \{p\}$ y $A \neq X$, con lo que A sería un punto que separaría a $\{p\}$ de X en $C_p(X)$, esto quiere decir que existirían subconjuntos abiertos, ajenos $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ de $C_p(X) - \{A\}$ tales que $\{p\} \in \mathfrak{U}$, $X \in \mathfrak{V}$ y $C_p(X) - A = \mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$. Al ser α un subconjunto conexo de $C_p(X)$ debería de ocurrir que $\alpha \subset \mathfrak{U}$ o $\alpha \subset \mathfrak{V}$, pero esto es imposible. El recíproco es trivialmente cierto. ■

De la Definición 3.35, el Teorema 3.44 y de la Proposición 3.45, se sigue inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 3.46. *Sea X un continuo, entonces $p \in X$ es un punto final si y sólo si $C_p(X)$ es un arco.*

Si establecemos que un punto de un continuo es *terminal* si es extremo de cualquier arco que lo contenga, entonces la siguiente proposición relaciona las nociones de punto final y punto terminal.

Proposición 3.47. *Sea X un continuo. Si $p \in X$ es un punto final, entonces es un punto terminal.*

El recíproco no es cierto, por ejemplo, ningún punto terminal de una gráfica finita distinta de un arco es un punto final.

Proposición 3.48. *Sea X un continuo arcoconexo tal que $C_p(X)$ es un arco para algún $p \in X$, entonces para cada $A \in C_p(X) - \{\{p\}, X\}$, A es un arco.*

Demostración: Por el Corolario 3.46 se tiene que p es un punto final. Ahora, supongamos que $A \in C_p(X) - \{\{p\}, X\}$ es un elemento que no es un arco y $x \in X - A$. Si L es un arco de extremos p y x , ciertamente $L \not\subset A$ y $A \not\subset L$, lo cual contradice que p sea un punto final. ■

El resultado principal de esta sección y que de hecho es más fuerte que los dos anteriores requiere del Teorema de Kuratowski, pero antes unas cuantas definiciones:

Definición 3.49. Se dice que un continuo X es irreducible, si existen puntos p y $q \in X$ tales que ningún subcontinuo propio de X contiene a ambos puntos.

Definición 3.50. Decimos que un punto p de un continuo X es un punto de irreducibilidad, si existe un punto $q \in X$, tal que el continuo X es irreducible entre p y q .

Definición 3.51. Si X es un continuo no degenerado y $p \in X$, se define la composante de p en X como el conjunto:

$$\kappa(p) = \{x \in X \mid X \text{ no es irreducible entre } p \text{ y } x\}.$$

Teorema 3.52. Teorema de Kuratowski.[12, Teo. 11.21, Pág. 206] Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces p es un punto de irreducibilidad si y sólo si X no es la unión de dos subcontinuos propios que contienen a p .

Teorema 3.53. Sea X un continuo arcoconexo. Entonces $C_p(X)$ es un arco, para algún punto p de X si y sólo si X es un arco.

Demostración: Por el Corolario 3.46 X , no es la unión de dos subcontinuos propios que contienen a p . Se sigue del Teorema de Kuratowski que, p es un punto de irreducibilidad de X . Si $q \in X - \kappa(p)$, de la arcoconexidad de X se sigue inmediatamente que $X = [p, q]$. Si X es un arco es bien sabido que el hiperespacio anclado de cualquiera de sus extremos es un arco. ■

En esta sección vimos que si X es un continuo arcoconexo para el cual $C_p(X)$ es un arco para algún p , entonces X es un arco. Una pregunta que surge de manera natural es la siguiente:

P2 ¿Si X es un continuo arcoconexo tal que $C_p(X)$ es una 2-celda para todo p , entonces X es una curva cerrada simple?

Capítulo 4

Celdas libres

En este capítulo se darán condiciones necesarias y suficientes, para la existencia de n -celdas libres ($n > 2$) en el hiperespacio de subcontinuos $C(X)$ de una dendrita X , después. Daremos condiciones necesarias y suficientes para que las primeras, apliquen al caso en el que X es un dendroide.

4.1. Celdas libres en hiperespacios de dendritas

Comencemos definiendo lo que es una n -celda libre:

Definición 4.1. *Sea X un espacio topológico. Una n -celda $M \subset X$ es libre, si $M^\circ \subset X$ es abierto en X .*

De la definición anterior se siguen fácilmente las siguientes dos proposiciones.

Proposición 4.2. *Si una celda, está contenida en otra celda de mayor dimensión, entonces la primera no es libre.*

Proposición 4.3. *Toda n -celda contenida en una n -celda libre es libre.*

Además de libres, probaremos que las n -celdas que analizaremos en esta sección, son maximales, en donde $\mathcal{B} \subset C(X)$ es una n -celda maximal si dada una n -celda $\mathcal{A} \subset C(X)$, tal que $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Para probar dicha maximalidad, requeriremos de los siguientes resultados:

Lema 4.4. *Si $A \subseteq B$ son n -celdas y $\partial A = \partial B$, entonces $A = B$.*

Demostración: Queremos probar que $A^\circ = B^\circ$, lo que sí es claro es que $A^\circ \subseteq B^\circ$. Tomemos $x \in B^\circ$ y supongamos que $x \notin A^\circ$. Ahora, si tomamos $y \in A^\circ$, entonces $x, y \in B^\circ$. Sea α un arco de x a y contenido en B° , dicho arco tiene un extremo en $B - A$ y otro en A° , necesariamente ocurre que $\alpha \cap \partial A \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. ■

Teorema 4.5. *La única copia homeomorfa de S^n en S^n es él mismo.*

Demostración: Remitimos al lector a [7, Teo. 3.16, pág. 72]. ■

Corolario 4.6. *Si $A \subseteq B$ son n -celdas y $\partial A \subseteq \partial B$ entonces $A = B$.*

Demostración: Si $\partial A \neq \partial B$, entonces ∂A es un subcontinuo propio de ∂B homeomorfo a ∂B . Esto contradice el Teorema 4.5. Se sigue del Lema 4.4, que $A = B$. ■

Lema 4.7. *Si $A \subseteq B$ son n -celdas tales que $B^\circ \subset A$, entonces $A = B$.*

Demostración: Sean $x \in \partial B$ y U un subconjunto abierto de B tal que $x \in U$. Entonces $U \cap B^\circ \neq \emptyset$. Esto muestra que $x \in \bar{B}^\circ \subset \bar{A} = A$. ■

Proposición 4.8. *Si $A \subseteq B$ son n -celdas y $x \in \partial A$ es tal que $x \notin \partial B$, entonces $x \in FrA$.*

Demostración: Supongamos que $x \notin FrA$, entonces $x \in IntA$. Así, $IntA \cap B^\circ$ es un conjunto abierto de B que contiene a x , por lo que debe existir una vecindad V de x homeomorfa a $[0, 1]^n$ tal que $V \subset IntA \cap B^\circ \subset A$ y esto último muestra que x no puede pertenecer a ninguna cara de A , en otras palabras x no pertenece a ∂A . ■

Comencemos a dar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de 2-celdas libres maximales en el hiperespacio $C(X)$ de una dendrita X , recordemos que una arista de un dendroide X , es un arco $J \subset X$ cuyos extremos son vértices, de tal forma que ningún otro vértice del dendroide pertenece a J (ver pág. 3).

Teorema 4.9. *Sea X una dendrita. Entonces $C(X)$ contiene una 2-celda libre maximal \mathcal{B} si y sólo si $\mathcal{B} = C(J)$ para alguna arista J de X .*

Demostración: Sea J una arista de X de extremos p_1 y p_2 . Nótese que los elementos de $C(J)^\circ$ son subcontinuos de X la forma $A = [a, b] \subseteq J - \{p_1, p_2\}$ y tal que $a \neq b$ (ver Ejemplo 1.2). Si $\epsilon > 0$ es tal que $N_\epsilon(A) \cap X \subset J - \{p_1, p_2\}$ (donde, $N_\epsilon(A)$ es la nube de radio ϵ y centro en A , Sección 1.2 pág. 4), entonces $B_\epsilon(A) \subseteq C(J)^\circ$ (donde $B_\epsilon(A)$ es la bola de radio ϵ y centro en A en la métrica de Hausdorff, Sección 1.2 pág. 4), lo que muestra que la 2-celda $C(J)$ es libre.

Ahora veamos que la celda libre $C(J)$ es maximal. Sea \mathcal{A} una 2-celda libre tal que $C(J) \subset \mathcal{A}$. Si $A \in \partial C(J)$, se tiene que i) $A = [p_j, x]$, $j \in \{1, 2\}$, o bien ii) $A = \{x\}$, donde $x \in [p_1, p_2]$; queremos ver que $A \in \partial \mathcal{A}$.

Si A es como en el primer caso, éste se subdivide en tres subcasos.

i-1 *El punto p_j es de ramificación:*

Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $j = 1$. Si A no estuviera en $\partial\mathcal{A}$, entonces para algún $\epsilon > 0$, se tendría que $B_\epsilon(A) \subset \mathcal{A}^\circ$. Tómanse x_1 y $x_2 \in N_\epsilon(A) - A$ tales que $[x_1, p_1] \cap [x_2, p_1] = \{p_1\}$, $[x_i, p_1] \subset B_\epsilon(p_1)$ ($i \in \{1, 2\}$) y un punto $u \in (x, p_2)$ tal que $[u, x] \in B_\epsilon(x)$. El conjunto

$$\mathcal{B} = \{A \cup [w_1, p_1] \cup [w_2, p_1] \cup [x, w_3] : w_1 \in [x_1, p_1], w_2 \in [x_2, p_1], w_3 \in [u, x]\}$$

es una 3-celda contenida en $B_\epsilon(A) \subseteq \mathcal{A}^\circ$ y esto es absurdo.

i-2 *El punto p_j es esencial:*

Consideraciones similares al caso anterior muestran que se podría construir una 3-celda contenida en $B_\epsilon(A)$.

ii-3 *El punto p_j es un punto terminal de X y x es ordinario o bien un punto terminal de X*

En este caso se tiene que $A \in \text{int}C(J)$ lo cual contradice la Proposición 4.8.

Por tanto $A \in \partial\mathcal{A}$ como queríamos. Para el caso ii), si suponemos que $A = \{x\}$ y $\{x\} \notin \partial\mathcal{A}$, tomemos $H \in \mathcal{A}^\circ - C(J)$ (Lema 4.7) y obsérvese que H no contiene puntos de ramificación ni esenciales de lo contrario en una vecindad de H contenida en $(\mathcal{A})^\circ$ se podrían localizar 3-celdas o incluso cubos de Hilbert (en la demostración del Teorema 4.10 se da una descripción de cómo hacer esto). Con lo que H , es un arco. Llamemos q_1 y q_2 a sus extremos.

Se debe tener que, $p_1 \in [x, q_1]$, o bien $p_2 \in [x, q_1]$ (ver Figura 4.1), digamos $p_1 \in [x, q_1]$.

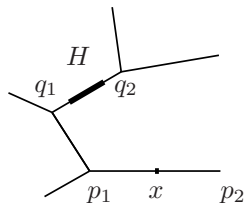


Figura 4.1:

Usando el hecho de que $H \neq \{x\}$ y \mathcal{A}° es arcoconexo, tomemos $\alpha \subset \mathcal{A}^\circ$ un arco de $\{x\}$ a H . Afirmamos que para algún $L \in \alpha$, $p_1 \in L$, supongamos que esto no es así, con lo que α está contenido en $C(G) - C_{p_1}(G)$. Llamemos U a la componente de $G - \{p_1\}$ que contiene a x , V a la unión de las demás componentes y obsérvese que $H \subset V$. Así, tenemos que $\mathcal{U} = \{B \in C(G) | B \subset U\}$, y $\mathcal{V} = \{B \in C(G) | B \subset V\}$ son abiertos ajenos y no vacíos de $C(G) - C_{p_1}(G)$, nótese que $(\alpha \cap \mathcal{U})$ y $(\alpha \cap \mathcal{V})$ forman una separación de α . Esto muestra la existencia de dicho L .

El punto p_1 es de ramificación o bien esencial. Dado que $L \in \mathcal{A}^\circ$, similarmente a los casos i-1) y i-2), para algún $\epsilon' > 0$ adecuado, se construye una 3-celda contenida en $B_{\epsilon'}(L) \subset \mathcal{A}^\circ$ de nuevo, un absurdo. Por tanto, en este caso, también, se debe tener que $A \in \partial\mathcal{A}$ y de aquí, el resultado se deduce fácilmente del Corolario 4.6.

Ahora, sean $\mathcal{B} \subseteq C(X)$ una celda libre maximal y $A \in \mathcal{B}^\circ$. Nótese que A no contiene puntos de ramificación ni esenciales. De lo contrario, para cualquier $\epsilon > 0$ la bola $B_\epsilon(A)$ contendría 3-celdas o incluso cubos de Hilbert.

De lo anterior se deduce que A es un arco. Si $J = [p_1, p_2]$ (donde p_1 y p_2 son vértices de X) es la arista en la cual está contenido dicho arco, afirmamos que $\mathcal{B} \subseteq C(J)$. Si esto no es así sea $B \in \mathcal{B} - C(J)$. Así, para cualquier $x \in B$ y $y \in A$, se tiene que a) $p_1 \in [x, y]$ o bien b) $p_2 \in [x, y]$. Sin perder generalidad, supóngase que se tiene el caso a). Sea α un arco en \mathcal{B} de B a A tal que $\alpha - \{B\} \subseteq \mathcal{B}^\circ$. Como $B \notin C(J)$ y $A \in C(J)$, debe de existir $C \in \alpha \cap \partial C(J)$. Así, C es de la forma $[p_1, a]$. Si $\epsilon > 0$ es tal que $B_\epsilon(C) \subseteq \mathcal{B}^\circ$, entonces $B_\epsilon(C)$ contiene una 3-celda (en caso de que p_1 sea de ramificación) o incluso un cubo de Hilbert (en caso de que p_1 sea esencial), lo cual es un absurdo. Esto muestra que $\mathcal{B} \subseteq C(J)$, y por tanto, $\mathcal{B} = C(J)$. ■

Teorema 4.10. *Sea X una dendrita. Entonces $C(X)$ contiene una n -celda libre maximal ($n > 2$) si y sólo si existe un árbol $K \subset X$ que satisface las siguientes condiciones:*

$$i) T(K) = \{p_1, \dots, p_n\} \subset R(X) \cup T(X) \cup E(X),$$

$$ii) \text{ Para cada } x \in K - T(K), \text{ se tiene que } o_K(x) = o_X(x).$$

Demostración: \Rightarrow Para cada $p_i \in T(K)$, sea $r_i \in R(K)$ tal que $[p_i, r_i] \cap R(K) = \{r_i\}$.

Si denotamos $A = K - \left(\bigcup_{i=1}^n [p_i, r_i]\right)$ y, para cada $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n [p_i, r_i]$, $C_{\mathbf{x}} =$

$A \cup \left(\bigcup_{i=1}^n [r_i, x_i]\right)$. Queremos ver que la familia $\mathfrak{M}(A) = \{C_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in \prod_{i=1}^n [p_i, r_i]\}$ es una n -celda libre en $C(X)$.

Sea $C_{\mathbf{x}} \in (\mathfrak{M}(A))^\circ$ y definamos $L = (X - K) \cup \{p_1, \dots, p_n\}$. Hagamos $\alpha = d(C_{\mathbf{x}}, L) = \inf\{d(c, l) : c \in C_{\mathbf{x}} \text{ y } l \in L\}$, $\alpha_i = d(x_i, A)$, $\beta_{ij} = d(x_i, [p_j, r_j])$, donde $i \neq j$ e $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Notando que estas cantidades son positivas, tomemos $\epsilon > 0$ menor que todas ellas

y $Y \in B_\epsilon(C_x)$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, escojamos $z_i \in B_\epsilon(x_i) \cap Y$ y nótese que $z_i \notin A \cup L \cup [p_j, r_j]$, si $i \neq j$, con lo que $z_i \in (p_i, r_i)$. Ahora, si $x \in A$ y z_i, z_j se encuentran en distintas componentes de $K - \{x\}$, necesariamente ocurre que $x \in [z_i, z_j]$, lo que muestra que $A \subset \bigcup_{i,j} [z_i, z_j]$ y como Y es arcoconexo $\bigcup_{i,j} [z_i, z_j] \subset Y$ y por tanto $A \subset Y$, en particular, ningún punto de A es un punto terminal de Y .

Queremos ver que Y tiene, exactamente, n puntos terminales y que éstos están contenidos en los arcos (p_i, r_i) .

Sea pues $y \in Y$ un punto terminal de Y . Dado que $y \notin L$, se tiene que $y \neq p_i, \in \{1, \dots, n\}$ y como $y \notin A$, entonces $y \in (p_i, r_i)$ para algún i . De lo anterior se deduce que Y tiene a lo más n puntos terminales, de lo contrario dos de ellos tendrían que estar en un mismo arco (p_i, r_i) lo cual no es posible.

Ahora bien, dado $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i = Y \cup [p_i, r_i]$ es un subcontinuo de X , tal que, por la unicoherencia hereditaria, $Y \cap [p_i, r_i]$ es conexo y no degenerado, ya que el arco $[r_i, z_i]$ está contenido en la intersección y, por tanto, dicha intersección es un arco con extremos r_i y, digamos, y_i . El punto y_i es terminal en Y . Con esto, Y tiene al menos n puntos terminales. En conclusión, $Y = C_{\mathbf{y}} \in (\mathfrak{M}(A))^\circ$, donde $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n$. Por el momento la maximalidad de $\mathfrak{M}(A)$ quedará pendiente (Proposición 4.11).

\Rightarrow) Sean \mathcal{A} una n -celda libre, $B \in (\mathcal{A})^\circ$ un elemento del interior variedad y veamos cómo y cómo no debe ser B . Sean $T(B) = \{p_1, \dots, p_k\}$ y $r_1, \dots, r_s \in B - T(B)$ los puntos tales que $o_B(r_i) < o_X(r_i)$. Si hacemos $\alpha_i = o_X(r_i) - o_B(r_i)$, se tiene que $k + \sum_{i=1}^s \alpha_i = m > n$. Considérese $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(B) \subset (\mathcal{A})^\circ$ y tomése, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, arcos $[u_{i1}, r_i], \dots, [u_{i\alpha_i}, r_i]$ tales que $[u_{ij}, r_i] \subset B_\epsilon(r_i)$ y $[u_{ij}, r_i] \cap B = \{r_i\}$. También tomése puntos v_t en las aristas terminales de B tales que $[v_t, p_t] \subset B_\epsilon(p_t)$ ($t \in \{1, \dots, k\}$).

Haciendo $B' = B - (\bigcup_{t=1}^k [p_t, v_t])$, se tiene que \mathcal{H} es la familia de todos los subcontinuos de la forma:

$$B' \cup \left(\bigcup_{t=1}^k [v_t, x_t] \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^s \bigcup_{j=1}^{\alpha_i} [r_i, y_{ij}] \right),$$

donde $x_t \in [v_t, p_t]$ y $y_{ij} \in [r_i, u_{ij}]$, entonces \mathcal{H} es una m -celda contenida en $(\mathcal{A})^\circ$, lo cual es un absurdo. Note que lo anterior, en particular muestra que $B - T(B)$ no contiene puntos I -esenciales. Un argumento similar muestra que $B - T(B)$ tampoco contiene puntos II -esenciales.

Ahora, supóngase que $m < n$. Si p_1, \dots, p_q son los puntos terminales de B tales que $o_X(p_t) = 2$, $t \in \{1, \dots, q\}$, sea J_t la arista de X tal que $p_t \in J_t$, y para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, sean $I_{i1}, \dots, I_{i\alpha_i}$ las aristas de X tales que $J_{ij} \cap B = \{r_i\}$. Así, el árbol $K = B \cup \left(\bigcup_{t=1}^q J_t \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^s \bigcup_{j=1}^{\alpha_i} I_{ij} \right)$ tiene m puntos terminales y satisface las condiciones i) y ii) de este teorema, y, ya hemos visto, cómo construir una m -celda libre $\mathfrak{M}(A)$, donde,

A es el árbol que se obtiene de K , al remover sus aristas terminales. Notése que la celda $\mathfrak{M}(A)$ contiene a la m -celda \mathcal{H} construida líneas atrás. Ahora bien, por un lado, de la Proposición 4.3, se tiene que \mathcal{H} es libre, por otro lado, del hecho de que $\mathcal{H} \subset (A)^\circ$ y la Proposición 4.2, se tiene que \mathcal{H} no es libre, de nuevo, un absurdo. Por tanto $m = n$, y K es el árbol deseado. ■

No es difícil verificar que, si H es un árbol satisfaciendo las hipótesis del Teorema 4.10 y $C(H) = \bigcup(\mathfrak{M}(T)) \cup \bigcup C(J)$ es la representación de $C(H)$ como poliedro, entonces cada celda $\mathfrak{M}(T)$ y $C(J)$ es libre.

Proposición 4.11. *La n -celda libre $\mathfrak{M}(A)$ del Teorema 4.10 es maximal.*

Demostración: Supóngase que existe una n -celda libre $\mathcal{A} \subset C(X)$ tal que $\mathfrak{M}(A) \subset \mathcal{A}$, con $\mathfrak{M}(A) \neq \mathcal{A}$. Por el Corolario 4.6, debe ocurrir que existe un punto $C_{\mathbf{X}} \in \partial\mathfrak{M}(A)$ tal que $C_{\mathbf{X}} \in (A)^\circ$. Tómese $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(C_{\mathbf{X}}) \subset (A)^\circ$.

Ahora bien, hay varios casos a considerar con respecto a $C_{\mathbf{X}}$: el primero cuando suponemos que $C_{\mathbf{X}} = A \cup (\bigcup_{i=1}^n [r_i, x_i])$, donde para algún índice i , digamos $i = 1$, se tiene que $x_1 = p_1$ es un punto terminal de K que a la vez es punto de ramificación de la dendrita X .

Sean $u_i \in [r_i, x_i]$ ($i = 2, \dots, n$) tales que $[u_i, x_i] \subset B_\epsilon(x_i)$. Sean, también L_1, L_{n+1} , aristas de X cuya intersección entre ellos y con K es sólo $\{p_1\}$. Considérense también puntos $u_1 \in L_1$ y $u_{n+1} \in L_{n+1}$ tales que $[u_1, p_1] \subset B_\epsilon(p_1)$ y $[u_{n+1}, p_1] \subset B_\epsilon(p_1)$.

Así las cosas, la familia de todos los subcontinuos de la forma $A \cup (\bigcup_{i=2}^n [u_i, y_i]) \cup [y_1, p_1] \cup [y_{n+1}, p_1]$, donde $y_i \in [u_i, x_i]$ es una $(n+1)$ -celda contenida en $B_\epsilon(C_{\mathbf{X}}) \subset (A)^\circ$ lo cual es una contradicción. Consideraciones similares muestran que si para algún índice i , x_i es un punto esencial, entonces se puede construir una $(n+1)$ -celda contenida en $(A)^\circ$.

Un segundo caso se obtiene cuando, para algún índice i , digamos $i = 1$, $x_1 = r_1$, en este caso no se puede tener que $C_{\mathbf{X}} \in \text{Int}(\mathfrak{M}(A))$, ya que esto contradice la Proposición 4.8.

Pero si $C_{\mathbf{X}} \in \text{Fr}(\mathfrak{M}(A))$, y K es el árbol del Teorema 4.10, por el Lema 3.8, se tiene que $C(K) = (\bigcup \mathfrak{M}(T)) \cup \bigcup C(J)$, donde T toma valores sobre el conjunto de todos los árboles internos de K , mientras que J sobre el conjunto de aristas de K . Afirmamos que podemos suponer que, $C_{\mathbf{X}} \in (\bigcup_{T \neq A} \mathfrak{M}(T)) \cup \bigcup C(J)$. De no ser lo anterior así,

existe un abierto \mathcal{U} tal que $C_{\mathbf{X}} \in \mathcal{U} \subset C(X) - \bigcup_{T \neq A} (\mathfrak{M}(T)) \cup (\bigcup C(J))$. Escojamos N el primer entero positivo tal que $B_{\frac{1}{N}}(C_{\mathbf{X}}) \subset (A)^\circ \cap \mathcal{U}$. Así, para cada $m \geq N$, existe

$Y_m \in C(X) - C(K)$ tal que $H(Y_m, C_{\mathbf{X}}) < \frac{1}{m}$. Toméense para cada $m \geq N$, un punto $y_m \in Y_m - K$ y un punto $x_m \in C_{\mathbf{X}}$ tales que $d(y_m, x_m) < \frac{1}{m}$. Por la compacidad, (y_m)

admite una subsucesión convergente. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es la misma (y_m) la que converge. Sea y el punto de convergencia de esta sucesión. Afir-

mamos que $y \in C_{\mathbf{X}}$. Dado $\epsilon > 0$, escojamos $M \in \mathbb{N}$ tal que $y_m \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(y)$, para cada $m \geq M$. Si $m \geq M$ es lo suficientemente grande como para que $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, $d(x_m, y) \leq d(x_m, y_m) + d(y_m, y) < \frac{1}{m} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Es decir; $x_m \in C_{\mathbf{X}} \cap B_{\epsilon}(y)$. Siendo ϵ arbitrario, lo anterior muestra que $y \in C_{\mathbf{X}}$. Así, y es un punto de acumulación de $X - K$. Esto quiere decir que $y = p_i$, para algún i , donde $p_i \in R(X) \cup E(X)$ y, este caso, ha sido ya analizado. Por tanto, como dijimos, podemos suponer que $C_{\mathbf{X}} \in (\bigcup \mathfrak{M}(T)) \cup (\bigcup C(J))$, donde T toma valores en el el conjunto de árboles internos de K distintos de A y J el de aristas de K . De hecho, por el Corolario 4.6, el Lema 4.7 y la Proposición 4.8, debemos suponer que $C_{\mathbf{X}} \in (\bigcup_{T \neq A} \partial \mathfrak{M}(T)) \cup (\bigcup \partial C(J))$.

Supongamos primero que $C_{\mathbf{X}} \in \partial C(J)$, dado que los puntos de la frontera variedad de una celda son puntos de acumulación del interior variedad de la misma, debemos tener que $(\mathcal{A})^\circ \cap (C(J))^\circ \neq \emptyset$. Ahora bien, este conjunto es abierto en \mathcal{A} , por otro lado, está contenido en $C(J)$, lo cual es un absurdo ya que $\dim(\mathcal{A}) = n > 2 = \dim(C(J))$. Ahora, supongamos que $C_{\mathbf{X}} \in \partial \mathfrak{M}(T)$. Si se recuerda como se obtiene A a partir de K , (ver demostración de 4.10) no es difícil darse cuenta que A es el árbol interno de K , que se obtiene al remover de éste, sus aristas terminales. Se deduce del Lema 3.7 que la dimensión de $\mathfrak{M}(T)$ es estrictamente menor que la de $\mathfrak{M}(A)$. Por otro lado, dado que $C_{\mathbf{X}}$ es punto de acumulación de $(\mathfrak{M}(T))^\circ$, se debe tener que $(\mathcal{A})^\circ \cap (\mathfrak{M}(T))^\circ \neq \emptyset$, y nótese que este conjunto es abierto en $C(X)$, y por tanto es abierto en $(\mathcal{A})^\circ$. Así, existe una copia de $[0, 1]^n$ contenida en $(\mathcal{A})^\circ \cap (\mathfrak{M}(T))^\circ \subset \mathfrak{M}(T)$, lo cual es un absurdo, dada la dimensión de $\mathfrak{M}(T)$.

El último caso a considerar es cuando, para algunos índices i , $x_i = p_i$, con $p_i \in T(X)$ o bien $x_i \in (r_i, p_i)$. En este caso, se demuestra fácilmente que $C_{\mathbf{X}} \in \text{Int}(\mathfrak{M}(T))$, lo cual contradice la Proposición 4.8. ■

Sea G_1 el espacio que se describe en la siguiente figura:

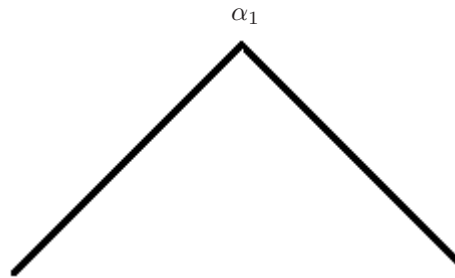


Figura 4.2:

Llamemos α_1 al *punto distinguido* de G_1 y, para cada $n > 1$, sea G_n el árbol que se obtiene de G_{n-1} al pegar en cada uno de sus puntos terminales una copia H_n de G_1 en el punto distinguido α_n , donde dicho punto tiene la propiedad de distar de los extremos de H_n un cuarto de lo que dista el punto distinguido α_{n-1} de los extremos de H_{n-1} , es decir, el tamaño de H_n es un cuarto del tamaño de H_{n-1} . En la siguiente figura se muestran los primeros cuatro términos de esta sucesión.

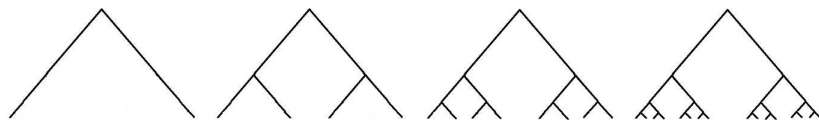


Figura 4.3: Sucesión G_n

No es difícil convencerse de que el límite de esta sucesión es la dendrita de Gehman (Figura 1.3).

Cada G_n satisface las hipótesis del Teorema 4.10, de aquí que $C(G)$ contiene al menos una 2^n -celda libre maximal para cada $n \in \mathbb{N}$. De hecho, siendo la dendrita de Gehman un continuo que (por así decirlo) se *autoreplica*, dado $n > 2$, existen una infinidad de continuos $K \in C(G)$ con las hipótesis del Teorema 4.10. Con esto se tiene que $C(G)$ tiene una infinidad de n -celdas libres maximales para cualquier $n > 2$.

Ejemplo 4.12. *Considérense los arcos $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ y $[x_2, x_4]$ en G_2 (Figura 4.4)*

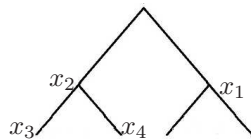


Figura 4.4: Árbol G_2

Si consideramos las tres 2-celdas libres $\mathfrak{M}([x_1, x_2])$, $\mathfrak{M}([x_2, x_3])$ y $\mathfrak{M}([x_2, x_4])$, que estos arcos inducen en $C(G)$, resulta que su intersección consta del único punto $\{x_2\}$; dicha intersección se muestra en la Figura 4.5

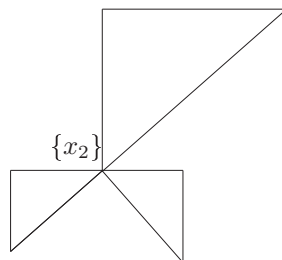


Figura 4.5:

Si se continúa con este proceso lo que se obtiene es el subespacio \mathcal{C}_2 de $C(G)$ que se muestra en la Figura 4.6

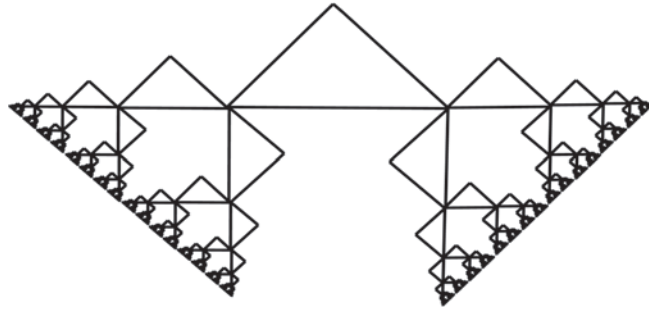


Figura 4.6: Espacio de 2-celdas libres maximales de $C(G)$

Ejemplo 4.13. Sean T_1 , T_2 y T_3 los triodos simples contenidos en G_3 , cuyos vértices son los puntos x_2 , x_3 y x_4 (Figura 4.7), respectivamente y que satisfacen las hipótesis de el Teorema 4.10. Entonces los puntos terminales de cada triodo quedan determinados. Así; los de T_1 son x_1 , x_3 y x_4 ; los de T_2 son x_2 , x_5 y x_6 y los de T_3 son x_2 , x_7 y x_8 .

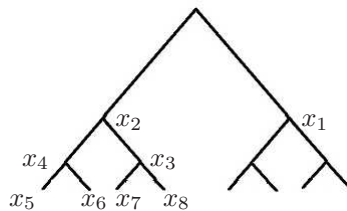


Figura 4.7: Árbol G_3

Al considerar los cubos libres $\mathfrak{M}(T_1)$, $\mathfrak{M}(T_2)$ y $\mathfrak{M}(T_3)$, que los tres triodos inducen en $C(G)$, resulta que $\mathfrak{M}(T_1) \cap \mathfrak{M}(T_2) = \{[x_2, x_3]\}$, $\mathfrak{M}(T_1) \cap \mathfrak{M}(T_3) = \{[x_2, x_4]\}$ y $\mathfrak{M}(T_2) \cap$

$\mathfrak{M}(T_3) = \emptyset$. Estas intersecciones se representan en la Figura 4.8.

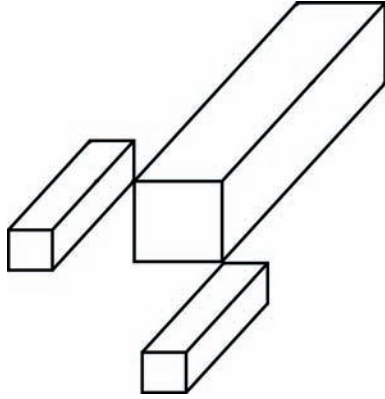


Figura 4.8:

Si unimos todos los cubos libres que inducen aquellos triodos simples satisfaciendo las hipótesis del Teorema 4.10, lo que se obtiene es el subespacio \mathcal{C}_3 de $C(G)$ que más o menos luce como en la Figura 4.9.

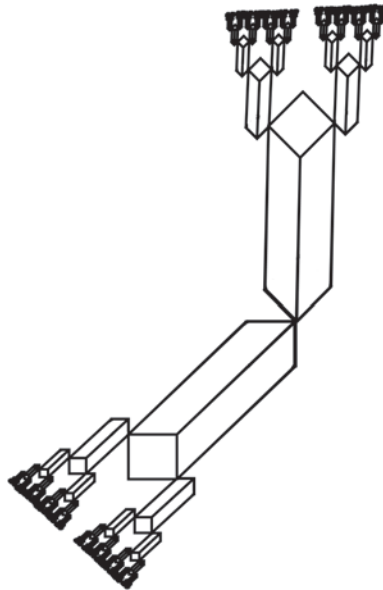


Figura 4.9: Espacio de 3-celdas libres maximales de $C(G)$

4.2. Celdas libres en hiperespacios de dendroides

Como se dijo al principio de este capítulo, en esta sección daremos condiciones necesarias y suficientes, para que el Teorema 4.10, de la sección anterior, sea válido en el caso en el que el continuo X es un dendroide. Para ello se requiere la noción de *continuo de convergencia*.

Definición 4.14. Continuo de convergencia. Sea X un espacio métrico. Un subcontinuo no degenerado A de X se llama continuo de convergencia de X si existe una sucesión (A_n) de subcontinuos de X tal que:

1. $\lim A_n = A$,
2. $A_n \cap A = \emptyset$.

Cabe apuntar que si el espacio X es compacto, los subcontinuos A_n se pueden escoger mutuamente ajenos [12, Def. 5.11, pag. 76].

Teorema 4.15. Sean X un dendroide, K como en el Teorema 4.10 y A como en la demostración. Entonces $\mathfrak{M}(A)$ es libre si y sólo si el interior variedad $(\mathfrak{M}(A))^\circ$, no contiene continuos de convergencia.

Demostración: Si $C_x \in (\mathfrak{M}(A))^\circ$ es un continuo de convergencia evidentemente $\mathfrak{M}(A)$ no puede ser una n -celda libre. Por otro lado, si $\mathfrak{M}(A)$ no es una n -celda libre, entonces existe $Y = C_x \in (\mathfrak{M}(A))^\circ$, tal que, para cada $\epsilon > 0$, existe $Z \in C(X) - (\mathfrak{M}(A))^\circ$, tal que $H(Y, Z) < \epsilon$.

Considérese las siguientes cantidades:

$\alpha_i = d(Y, p_i)$, $\beta = H(Y, \partial(\mathfrak{M}(A)))$ y $\gamma_{T'} = H(Y, \mathfrak{M}(T))$, $\delta_I = H(Y, C(I))$ (donde T varía en el conjunto de árboles internos de K distintos de A e I sobre el conjunto de aristas de K). Notando que son positivas, tómesese $\epsilon_1 > 0$ menor que todas ellas y sea $Z_1 \in C(X) - (\mathfrak{M}(A))^\circ$ tal que $H(Z_1, Y) < \epsilon_1$. Si $Z_1 \cap Y \neq \emptyset$, se tienen los siguientes casos a considerar:

- i) $Z_1 - K \neq \emptyset$.

En este caso $p_i \in Z_1$, para algún i . Entonces la bola $B_{\epsilon_1}(p_i)$ interseca a Y lo cual contradice la elección de ϵ_1 .

- ii) $Z_1 \subset K$

En este caso, $Z_1 \in C(K) = [\bigcup_{T \in AI(K)} \mathfrak{M}(T)] \cup [\bigcup_{I \in A(I)} C(I)]$. Si $Z_1 \in \partial \mathfrak{M}(A)$, $Z_1 \in \mathfrak{M}(T)$ ($T \neq A$) o $Z_1 \in C(I)$ de nuevo se contradice la elección de ϵ_1 . Esto muestra que Z_1 es ajeno a Y , tomando $\epsilon_2 > 0$ menor que $H(Z_1, Y)$, de manera similar podemos obtener un continuo Z_2 , ajeno a Y , y tal que $H(Z_2, Y) < \epsilon$,

continuando con este proceso se construye una sucesión (Z_n) de continuos ajenos y convergentes a Y . ■

4.3. Preguntas abiertas

- 1) ¿Si X es un continuo arcoconexo con los mismos hiperespacios anclados que los de S^1 , se tiene necesariamente que X es homeomorfo a S^1 ?
- 2) En general, ¿si X es un continuo arcoconexo con los mismos hiperespacios anclados que una gráfica finita G , se sigue necesariamente que X es homomorfo a G ?
- 3) ¿Tiene el Solenoide Diádico los mismos hiperespacios anclados que S^1 ?

Bibliografía

- [1] J. J. Charatonik y C. Eberhart. *On smooth dendroids*, Fund. Math. **68** (1970) pp. 296-322.
- [2] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph I*, Fund. Math., **62** (1968), pp. 214-235.
- [3] J. Dugundji. *Topology* Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics 1976.
- [4] C. Eberhart. *Intervals of continua which are Hilbert cubes*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978) pp. 220-224.
- [5] A. Illanes, *Cells and cubes in hyperspaces*, Fund. Math., **130** (1988) pp. 57-65.
- [6] A. Illanes *Hiperespacios de continuos*, **28** Aportaciones Matemáticas 2004. Sociedad Matemática Mexicana.
- [7] C. Ivorra, *Topología algebraica con aplicaciones a la geometría diferencial*, <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Topalg.pdf>.
- [8] S. Macías *La estructura de los dendroides suaves*. **10** Aportaciones Matemáticas 1993. Sociedad Matemática Mexicana.
- [9] L. Montejano e I. Puga *Shore points in dendroids and conical pointed hyperspaces*, Topology Appl. **46** (1992), pp. 41-54.
- [10] S. B. Nadler, *Locating cones and Hilbert cubes in hyperspaces*, Fund. Math., **79** (1973), pp. 233-250.
- [11] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets. A Text with Research Questions*. **33** Marcel Dekker, Inc. 1978. Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana.
- [12] S. B. Nadler Jr., *Continuum theory. An introduction*, Marcel Dekker, Inc. 1992.
- [13] S. B. Nadler Jr., *Dimension Theory*. **18** Aportaciones Matemáticas 2002. Sociedad Matemática Mexicana.

- [14] P. Pellicer-Covarrubias, *The hyperspaces $C(p, X)$ for atrioidic continua*, Houston Journal of Mathematics **31** 2005 pp. 403-426.
- [15] L.Vietoris, *Kontinua zweiter Ordnung*, Monatshefte für Mathematik und Physik, **33** (1923), pp. 49-62.
- [16] T.Wazewski, *Sur un continu singulier*, Fund. Math., **4** (1923), pp. 214-235.

Índice alfabético

- $C(X)$, 11
- $C_p(X)$, 11
- ∞ -odo, 44
- μ_p , 11
- n -esfera, 1
- n -odo simple, 3
- Árbol, 3
- Árbol interno, 19

- Abanico Armónico, 2
- Arco, 1
- Arco conexo, 2
- Arco ordenado, 46
- Arista, 19
- Arista de un dendroide, 3

- Cara, 17
- Celda libre, 49
- Composante de p en X ., 47
- Continuo, 1
- Continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$, 2
- Continuo de convergencia, 59
- Continuo irreducible, 47
- Cpp continuo, 17
- Cubo de Hilbert, 1, 44
- Curva cerrada simple, 1

- Dendrita de Gehman, 13
- Dendroide, 2
- Dendroide suave, 2
- Dendrta, 3
- Dimensión -1, 12

- Dimensión n , 12

- Frontera variedad, 1
- Función de Whitney, 11

- Gráfica finita, 18

- Hereditariamente unicoherente, 1
- Hiperespacio anclado, 4
- Hiperespacio de continuos, 4

- Interior variedad, 1

- Lazo, 19
- Localmente finita, 21

- Métrica de Hausdorff, 4

- n -celda, 1
- Niveles de Whitney, 11
- Nube, 4

- Orden, 18
- Orden de un punto $o(x)$, 2

- Peine, 2
- Poliedro, 17
- Punto de irreducibilidad, 47
- Punto de ramificación, 2, 18
- Punto de separación, 46
- Punto esencial, 2
- Punto inicial, 2
- Punto ordinario, 3, 18
- Punto terminal, 18

- Seno topológico, 2

Subcontinuo, 1
Subcontinuo degenerado, 1
Subcontinuo final, 45

Triodo simple, 3

Unicoherente, 1

Vértice de un n -odo, 4
Vértices de un dendroide, 3
Vertices de una Gráfica finita, 19