



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES
FACULTAD DE INGENIERÍA

ESTIMACIÓN NUMÉRICA DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES
EN PLACAS DELGADAS CON USO DEL ANÁLISIS
DE FOURIER

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA:

I.Q. JORGE LUIS CRUZ TRANI

TUTOR PRINCIPAL:

DR. ARMANDO ORTÍZ PRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. ABEL CAMACHO GALVÁN
FACULTAD DE INGENIERÍA

DR. FRANCISCO MANUEL SÁNCHEZ ARÉVALO
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN MATERIALES

MÉXICO, D.F. JUNIO 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En este trabajo se presenta una parte de la teoría clásica de la elasticidad aplicada al estudio de flexiones en placas delgadas de configuración rectangular y circular, el problema de valores en la frontera asociado se resuelve con base en el análisis de Fourier.

Los detalles numéricos y solución de ecuaciones en derivadas parciales se abordan recurriendo al uso de hojas de cálculo elaboradas con Mathematica® y wxMaxima.

Se potencian las aplicaciones al vincularse la teoría con los recursos computacionales.

*“Wir sind gewohnt dass die Menschen
verhöhnern was sie nicht verstehen.”
-Goethe*

AGRADECIMIENTOS

A mi madre por contagiarme con su alegría en los momentos más difíciles y por darme fuerza para concluir cada proyecto de vida que comienzo.

A mi padre yo sé qué esperas lo mejor de mí y me esfuerzo día a día para poder superarme.

Al Dr. Abel Camacho Galván por acompañarme de principio a fin en este largo trayecto, hemos compartido tantas historias y le estaré eternamente agradecido por ayudarme a recordar cuál era mi verdadero tesoro, de ahora en adelante encauzaré mi corazón en obtenerlo.

Al Dr. Armando Ortíz Prado quien siempre tuvo la mejor disposición para atenderme y me apoyó en todo momento para que pudiera desarrollar este escrito, gracias por hacerme ver mis errores para poder aprender de ellos.

Al Dr. Francisco Sánchez Arévalo, sin su ayuda no hubiera podido estructurar mi trabajo gracias por sus valiosos consejos.

Al Dr. Victor Hugo Jacobo Armendáriz por el tiempo que me brindó, la disciplina y orden con que realiza todos y cada uno de sus pendientes es impresionante y usted motiva a los que lo rodean a llevar a buen punto cada proyecto.

Al Dr, José Álvaro Chávez Carvayar, su buen gusto por la música, paciencia y ojo clínico para los detalles hacen parecer que dos horas de trabajo sean sólo dos minutos.

Al Dr. Amado Salvador Granados Aguilar quien me ayudó a recordar que los conceptos deben mostrarse de manera clara para difundirlos a las siguientes generaciones

Al Dr. José Roberto Zenit Camacho, cuando pensé que había concluido, me mostró que siempre hay que agregar esa cereza en el pastel para que alguien se interese en consultar lo que con tanto trabajo se construyó.

A todos mis amigos de la unidad, la UNAM y la UAM-I porque sé que no importa donde me encuentre ustedes piensan en mí y el cariño es recíproco.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN.....	7
1. ESTADO DEL ARTE Y OBJETIVOS.....	9
1.1. ESTADO DEL ARTE.....	9
1.2. OBJETIVOS DE LA TESIS.....	11
2. MARCO TEÓRICO PARTE A.....	13
2.1. TEORÍA CLÁSICA DE PLACAS.....	13
2.2. CLASIFICACIÓN DE PLACAS DELGADAS.....	14
2.3. CONCEPTOS DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO.....	16
2.3.1. EL TENSOR DE DEFORMACIONES.....	16
2.3.2. EL TENSOR DE ESFUERZOS.....	18
2.4. HIPÓTESIS DE TRABAJO.....	20
2.5. ESFUERZOS Y ECUACIONES DE EQUILIBRIO.....	22
2.6. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE VALORES EN LA FRONTERA PARA PLACAS RECTANGULARES.....	28
2.7. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE GERMAIN-LAGRANGE.....	29
2.7.1. CONJUNTOS ORTOGONALES.....	29
2.7.2. MÉTODO DE NAVIER.....	31
3. RESULTADOS.....	34
3.1. ANÁLISIS EN UNA PLACA SOMETIDA A DIVERSOS TIPOS DE CARGAS.....	34
3.2. PLACA UNIFORME SUJETA A CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA.....	34
3.3. PLACA METÁLICA SUJETA A CARGA CONCENTRADA.....	39
3.4. PLACA METÁLICA SUJETA A CARGA TRIANGULAR.....	42
3.5. COMPARACIÓN DE FLECHAS ENTRE DISTINTOS TIPOS DE CARGA.....	44
4. LOSA DE CONCRETO ARMADA EN TECHO DE CASA HABITACIÓN.....	46

5. PLACAS CIRCULARES.....	58
5.1. MARCO TEÓRICO PARTE B.....	58
5.2. TRANSFORMACIÓN DE LA ECUACIÓN DE GERMAIN-LAGRANGE.....	58
5.3. DETERMINACIÓN DE MOMENTOS Y ESFUERZOS DE CORTE.....	60
5.4. CONDICIONES DE FRONTERA PARA PLACAS CIRCULARES.....	62
5.5. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE GERMAIN-LAGRANGE EN COORDENADAS POLARES.....	63
6. RESULTADOS.....	69
6.1. PLACA SOMETIDA A UN CAMPO DE TRACCIÓN.....	69
7. PLACA CIRCULAR SOBRE UNA BASE ELÁSTICA DE WINKLER.....	73
7.1. PLACA INFINITA CON SIMETRÍA POLAR SOBRE UNA BASE DE WINKLER.....	80
8. SÍNTESIS DE RESULTADOS.....	85
9. CONCLUSIONES.....	87
BIBLIOGRAFÍA.....	89
APÉNDICE	
HOJAS DE CÁLCULO.....	92

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1.	Croquis de una placa delgada.....	14
2.2.	Representación visual de la hipótesis de las rectas normales.....	21
2.3.	Paralelepípedo elemental.....	23
2.4.	Esfuerzos en un elemento diferencial de placa de dimensiones dx, dy, h	25
2.5.	Concatenación de las variables.....	33
4.1.	Tinaco Rotoplas.....	46
4.2.	Fachada principal.....	46
4.3.	Corte eje B-B.....	46
4.4.	Plano de azotea.....	46
4.5.	Losa de azotea (esquema de desagüe).....	48
4.6.	Disposición del muro eje 1-1.....	52
4.7.	Disposición del muro eje 2-2.....	54
4.8.	Muro de azotea ejes 1-1 y 2-2.....	55
6.1.	Una placa con perforación circular sometida a tensión T	69

ÍNDICE DE TABLAS

3.1.	Datos para problemas de placas apoyadas de sus cuatro lados.....	34
3.2.	Cálculo de flexiones máximas.....	37
4.1.	Especificaciones y características del concreto tipo I.....	48
4.2.	Dimensiones de las diversas estructuras.....	49
4.3.	Características del tinaco.....	49
4.4.	Peso asociado al tinaco y su estructura.....	50
4.5.	Carga muerta de la losa de azotea.....	50
4.6.	Carga de servicio.....	50
4.7.	Desplazamiento vertical total de la losa de azotea.....	56
4.8.	Esfuerzos en el baricentro de la losa.....	57
7.1.	Datos de base Winkler y placa.....	84

NOMENCLATURA Y SIMBOLOGÍA CONVENCIONAL

Trabajo, energía y fuerza

- i. **T**: trabajo realizado por las fuerzas exteriores
- ii. **U**: trabajo realizado por las fuerzas interiores
- iii. **q**: Intensidad de la carga distribuida (N/m²)

Coordenadas rectangulares

- i. x, y, z

Coordenadas Polares

- i. r, θ

Dimensiones de la losa

- i. **a**: Longitud del lado menor de la losa (m)
- ii. **b**: Longitud del lado mayor de la losa (m)
- iii. **h**: Espesor de la placa

Componentes del tensor de deformaciones relativas

- i. Coordenadas rectangulares
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$
 $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$
- ii. Coordenadas Polares
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{r\theta}$

Componentes del tensor de esfuerzos

- i. Coordenadas rectangulares
 $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_{xz}$
 $\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}$
 $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$
- ii. Coordenadas polares
 $\sigma_r, \tau_{r\theta}$
 $\tau_{\theta r}, \sigma_\theta,$

Momentos, y esfuerzos internos

- i. Coordenadas rectangulares
 $M_x, M_{xy}, M_y,$
 Q_x, Q_y
- ii. Coordenadas polares
 $M_r, M_{r\theta}, M_\theta$
 Q_r, Q_θ

Coefficientes

- i. **E**: módulo de elasticidad longitudinal (N/m²)

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

- ii. **v** : Coeficiente de Poisson

$$\mu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

- iii. Coeficientes de Lamé

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+v)}$$

Esta es la notación utilizada en mecánica de sólidos y la cual se seguirá en este escrito, si se requiere algún desarrollo tensorial se utilizará la notación de índices con $i, j, k = 1, 2, 3$ pero se pueden obtener los resultados en notación de mecánica de sólidos sustituyendo los valores de:

Uno para la coordenada “ x ”, dos para “ y ” y tres para “ z ” para el caso de coordenadas cartesianas y a partir de los resultados obtenidos para las mismas y con ayuda de las reglas de transformación que se mostrarán a lo largo de este escrito se obtendrán los resultados correspondientes al sistema de coordenadas polares.

INTRODUCCIÓN

Se denomina placa al elemento estructural plano en el que una dimensión (el espesor) es muy pequeño en comparación con las otras dos dimensiones.

A través del tiempo los modelos referidos a problemas de placas han evolucionado en diversos prototipos ajustables a múltiples circunstancias. Algunas de sus aplicaciones se dan en la producción de automóviles, ferrocarriles, aviones, barcos, etc.; en la elaboración de estructuras de concreto se cuentan las losas de entepiso, azotea y cimentación.

Este trabajo se desarrolla con base en la teoría clásica de placas, el problema de valores en la frontera asociado se resuelve numéricamente aplicando el análisis de Fourier.

En mecánica de sólidos la teoría clásica de placas se ubica en un sitio de honor debido a la claridad de sus definiciones y la especificidad de sus procedimientos.

La teoría en cuestión coadyuva a contrastar los principios aplicados y las correspondientes soluciones numéricas obtenidas con otras variantes como el método de elemento finito, métodos en diferencias finitas, etc.

Las soluciones obtenidas en términos de series trigonométricas para cargas uniformemente aplicadas en la superficie de las losas convergen rápidamente, es decir, desarrollando algunos cuantos términos de las sumas, pero en el caso de cargas puntuales o cargas discontinuas la velocidad de la convergencia decae.

Aun cuando en la actualidad se cuentan con diversos recursos computacionales aplicables al cálculo de la flexión de placas, por ejemplo el método de elemento finito, en este escrito se exponen formulaciones tradicionales caracterizadas por su versatilidad aplicativa y un elevado contenido histórico que fundamenta la comprensión y desarrollo de las referidas alternativas computacionales.

Aquí se trabajan placas de configuración rectangular y circular. Sin embargo un poco de trabajo adicional permite extender el campo de las aplicaciones, como ocurre en el caso de las losas de concreto en edificios conectadas entre sí o recurriendo al uso de la transformación conforme.

1. ESTADO DEL ARTE Y OBJETIVOS

1.1. ESTADO DEL ARTE

El primer esfuerzo dedicado al desarrollo de los fundamentos matemáticos de las vibraciones en placas fue probablemente realizado por Euler (Leonhard Euler, 1707-1783) en el año de 1776. J. Bernoulli (Johann Bernoulli, 1710-1790) intentó justificar teóricamente los resultados de estos experimentos acústicos.

Chladni, un físico alemán (Ernst Florenz Friedrich Chladni, 1757-1827), descubrió varios modos de vibraciones libres. En experimentos sobre placas horizontales, el utilizó polvo que era distribuido, el cual formaba patrones regulares, después de inducir una vibración, el polvo se acumulaba a lo largo de las líneas nodales donde no ocurrían desplazamientos verticales. J. Bernoulli intentó justificar teóricamente los resultados de estos experimentos acústicos. La solución de Bernoulli estuvo basada en los trabajos previos de Euler acerca de la teoría de flexión de rayos.

J. Bernoulli presentó una placa como un sistema de tiras mutuamente perpendiculares a ángulos rectos una de otra (como un enrejado), cada tira se consideraba que funcionaba como un rayo. Pero la ecuación diferencial que gobernaba el fenómeno era diferente (no contenía el término de en medio).

La matemática francesa Germain (Marie-Sophie Germain, 1776-1831) desarrolló la ecuación diferencial de la placa con el término de deformación faltante, con lo cual fue galardonada con un premio por la Academia Parisina en 1816 por este trabajo. En 1813 siendo Lagrange (Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813) uno de los que revisó el trabajo corrigiendo los resultados de Germain agregando el término faltante siendo propiamente la primer persona en presentar la ecuación general de placas.

Cauchy (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857) y Poisson (Siméon Denis Poisson, 1781-1840) fueron los pioneros en el desarrollo del problema de placas basándose

en las ecuaciones de la teoría de la elasticidad desarrollando todas las cantidades características en series de potencias de la distancia desde la superficie media.

De esta forma ellos obtuvieron la ecuación que gobierna la deflexión de placas que coincidía completamente con la bien conocida ecuación de Germain-Lagrange.

En 1829 Poisson desarrolló exitosamente la ecuación de Germain-Lagrange de una placa sometida a una carga estática. En esta solución, sin embargo, la rigidez de la placa debida a la flexión D fue colocada como un término constante.

Poisson también sugirió un conjunto de de tres condiciones de frontera para cualquier punto sobre una frontera libre.

La primera teoría satisfactoria de la flexión de placas es asociada con Navier (Claude-Louis Marie Henri Navier, 1785-1836) quien consideró el espesor de la placa en la ecuación general de la misma como una función de la rigidez D .

También introdujo un método “exacto” el cual la ecuación diferencial era transformada en expresiones algebraicas mediante el uso de series trigonométricas de Fourier.

En 1850 Kirchhoff (Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887), publicó una tesis importante sobre la teoría de placas delgadas. En este trabajo Kirchhoff estableció dos suposiciones básicas que ahora son ampliamente aceptadas en la teoría de la flexión de placas y estas suposiciones son conocidas como “las hipótesis de Kirchhoff.” Usando estas suposiciones, Kirchhoff simplificó las ecuaciones de los modelos tridimensionales en el caso de placas flexionadas.

El también señaló que existen sólo dos condiciones límite sobre el borde de la placa. La teoría de Kirchhoff contribuyó a la claridad física de la teoría de la flexión de placas y se sigue usando ampliamente.

El libro de Kirchhoff fue traducido por Clebsch (Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, 1833 – 1872) [1], la traducción contenía numerosos comentarios de

Saint-Venant (Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, 1797 – 1886) [1], siendo el más importante la extensión de la ecuación de Kirchhoff para placas delgadas considerada como una forma matemáticamente correcta de combinar la acción de la flexión y el estiramiento.

Saint-Venant señaló que las series propuestas por Cauchy y Poisson utilizadas como regla general son divergentes.

En la actualidad, las flexiones de placas lateralmente cargadas se pueden obtener por diversos métodos como el método del elemento finito, diferencias finitas, el método de Navier, el método de Levy y otros más.

En el presente trabajo se aplicará el método de Navier y la solución de Michell los cuales resuelven el problema de valores en la frontera con el apoyo de las series trigonométricas.

Una de las motivaciones principales es poder utilizar los resultados obtenidos mediante la teoría en beneficio del prediseño y la visualización de losas para construcción siendo que en la actualidad el reglamento del D.F. [2] sólo proporciona un conjunto de reglas heurísticas para el diseño. Además se abordarán problemas que aunque sus planteamientos datan de finales del siglo XIX son de interés actual como lo son las placas con perforación y placas sustentadas sobre bases elásticas.

1.2. OBJETIVOS DE LA TESIS

OBJETIVO GENERAL

Evaluar la deflexión de placas delgadas, de configuración rectangular o circular, lateralmente cargadas mediante el método de Navier y desarrollos en series de Fourier.

OBJETIVOS SECUNDARIOS

- i. Proporcionar al analista un método alternativo para revisar los resultados obtenidos por otros métodos.
- ii. Proporcionar al analista un método alterativo para calibrar resultados obtenidos con paquetería comercial.
- iii. Promover la matemática aplicada combinando los conceptos teóricos de las disciplinas involucradas con los recursos del software libre.
- iv. Fomentar la experimentación computacional como un valioso recurso adicional para que incremente la pericia de los analistas.
- v. Coadyuvar para una mejor comprensión de los límites y alcances de la legislación del cálculo de estructuras de concreto.

Para satisfacer los objetivos se consideran los siguientes temas:

- i. Percepción e interpretación de la teoría clásica de placas
- ii. Solución de problemas de valores en la frontera con base en las series de Fourier
- iii. Uso de hojas de cálculo del software libre: Maxima, wxMaxima
- iv. Uso de hojas de cálculo comercial: Mathematica,

2. MARCO TEÓRICO PARTE A

2.1. TEORÍA CLÁSICA DE PLACAS.

La teoría de la elasticidad y sus aplicaciones enfrentan obstáculos los cuales se eliminan simplificando las hipótesis del modelo.

Las reducciones se justifican por sí mismas, para persuadirse basta advertir la imprecisión con el cual se prefijan algunos de sus parámetros. Por ejemplo, las cargas **vivas** y **muertas** aprobadas por los reglamentos para losas de concreto armado de azoteas y entresijos se obtienen con base en métodos heurísticos; o bien, en el caso de las placas metálicas donde los esfuerzos residuales inherentes al tratamiento térmico generalmente se ignoran, etc.

Las placas delgadas, como las vigas, son elementos tridimensionales, pero una formulación apropiada de las hipótesis de trabajo permite reducir un problema tridimensional en uno bidimensional, las ventajas alcanzadas son obvias.

La formulación de las hipótesis del modelo para el diseño y cálculo de las placas combina tres contenidos, a saber: Las ecuaciones dinámicas, las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de compatibilidad.

1. **Las leyes constitutivas:** relacionan los desplazamientos con las deformaciones elementales.
2. **Las ecuaciones de equilibrio:** relacionan las deformaciones con los esfuerzos.
3. **Las condiciones de compatibilidad:** relacionan las condiciones cinemáticas, constitutivas y de equilibrio.

Por su parte, la placa se estima con un cuerpo:

- i. Homogéneo
- ii. Isótropo

iii. Trabajando en régimen elástico.

En este punto del documento procede especificar la aplicación a dos sistemas de coordenadas, a saber:

- i. Sistemas de coordenadas rectangulares bidimensionales, cuando la placa configure un rectángulo.
- ii. Sistemas de coordenadas polares, cuando la placa sea circular o configure un sector circular.

2.2. CLASIFICACIÓN DE PLACAS DELGADAS.

En la figura 2.1 se muestra la disposición de una placa en el marco de las coordenadas cartesianas.

Las dimensiones horizontales de la placa son $a \times b$, $a \leq b$ siendo:

- i. **a**: la longitud del lado menor de la losa (sobre el eje x)
- ii. **b**: la longitud del lado mayor de la losa (sobre el eje y)
- iii. **h**: el peralte de la losa (sobre el eje z)

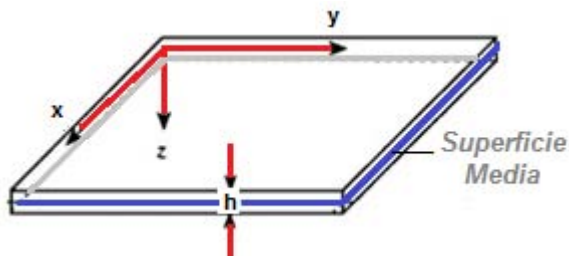


FIGURA 2.1: Croquis de placa delgada.

Las placas, dependiendo de sus dimensiones, se clasifican como **placas delgadas** o **placas gruesas**; la caracterización del elemento estructural no sólo depende de sus medidas, también se subordina al entorno de uso o aplicación.

Así pues, ante estas opciones se proponen las siguientes pautas:

1. Cuando la teoría no confronte los reglamentos en vigor, se dirá que una placa rectangular es delgada cuando el peralte h no exceda a la décima parte de su lado menor (a) ni sea menor a un cuarentavo.

$$\frac{a}{40} \leq h \leq \frac{a}{10}$$

2. Se dirá que una placa rectangular es gruesa cuando el peralte h exceda a la décima parte de lado menor (a):

$$h \geq \frac{a}{10}$$

3. Cuando el uso de la pieza estructural comprometa temas legales, la clasificación acatará los reglamentos y leyes en vigor.
4. Para las situaciones no cubiertas por los incisos anteriores, la catalogación de la placa deberá subordinarse al cuidadoso análisis de las hipótesis del modelo.

2.3. CONCEPTOS DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

En las secciones subsecuentes se presentan algunos desarrollos matemáticos los cuales serán de utilidad para poder desarrollar los tres puntos clave señalados en la sección (2.1).

2.3.1. EL TENSOR DE DEFORMACIONES

Supongamos que existen agentes externos los cuales están deformando un cuerpo macroscópico y que el mismo va recuperar su configuración original una vez que dichos agentes cesen; el campo de desplazamientos estaría dado por:

$$y^i = x^i + u^i(x, y, z); \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

De aquí se obtiene la diferencial del campo de desplazamientos:

$$dy^i = dx^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^k; \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Lo cual es equivalente a:

$$dy^i = \left(\delta_k^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right) dx^k; \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Donde δ_k^i es la delta de Kronecker.

Se puede pensar que antes de la deformación dos puntos distan dentro de una vecindad diferencial centrada dl y posterior a la deformación los puntos ahora van a tener una separación dada por dl' de aquí se sigue:

$$(dl)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (2.4)$$

La ecuación anterior muestra la distancia entre dos puntos previa a la deformación.

$$(dl')^2 = \delta_{kl} dy^k dy^l \quad (2.5)$$

Se sustituye (2.3) en (2.5).

$$\begin{aligned}
 (dl')^2 &= \delta_{kl} \left(\delta_i^k + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) \left(\delta_j^l + \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \right) dx^i dx^j \\
 (dl')^2 &= \delta_{kl} \left[\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^k \frac{\partial u^l}{\partial x^j} + \delta_j^l \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \right] dx^i dx^j \\
 (dl')^2 &= \delta_{kl} dx^k dx^l + \left[\delta_{kl} \delta_i^k \frac{\partial u^l}{\partial x^j} + \delta_{kl} \delta_j^l \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \delta_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \right] dx^i dx^j \\
 (dl')^2 &= \delta_{kl} dx^k dx^l + \left[\delta_{il} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} + \delta_{jk} \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \delta_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \right] dx^i dx^j \\
 (dl')^2 &= \delta_{kl} dx^k dx^l + \left[\delta_i^l \frac{\partial u^l}{\partial x^j} + \delta_j^k \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \delta_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \right] dx^i dx^j \\
 (dl')^2 &= \delta_{kl} dx^k dx^l + \left[\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right] dx^i dx^j + \delta_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} dx^i dx^j \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

El despreciar el último elemento del miembro derecho nos lleva al estudio de la teoría lineal de la deformación.

Se sustituye (2.4) en (2.6) y finalmente se obtiene:

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2\varepsilon_{ij} dx^i dx^j \quad (2.7)$$

Siendo

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right] ; i, j = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

Al intercambiar i por j en (2.8) se puede apreciar que la matriz es simétrica.

Las componentes del “tensor de deformaciones”; (aunque aplica para deformaciones infinitesimales es ampliamente usado en aplicaciones de ingeniería) (2.8) permite conocer la relación entre un cuerpo deformado y otro sin deformar a través de dicho tensor, a continuación se escribe de manera explícita.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

El tensor de deformaciones permite encontrar lo que se conoce como *ecuaciones cinemáticas*.

2.3.2. EL TENSOR DE ESFUERZOS

El tensor de esfuerzos es el elemento matemático con el cual se describen todas las componentes de fuerza por unidad de área que actúan sobre una porción cualquiera de un cuerpo (fuerza por unidad de área se conoce en física como esfuerzo).

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Las letras sigma representan a los esfuerzos normales y tau a los esfuerzos cortantes.

El tensor de esfuerzos sirve para hacer la conexión entre esfuerzos y deformaciones mediante fórmulas empíricas a las que se les conoce como *ecuaciones constitutivas*.

La ley de Hooke es una ecuación constitutiva que sirve para la fase elástica lineal de un sólido cuando se somete a una tensión axial como en el caso de una máquina de tensión sobre probetas delgadas su expresión se muestra a continuación.

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.11)$$

A E^{ijkl} se le denota como *el tensor de rigidez* y ε_{kl} como se mencionó anteriormente es el tensor de deformaciones.

Para un sólido isotrópico se exhiben en general sólo dos componentes linealmente independientes del tensor de rigidez.

$$E^{ijkl} = \lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) \quad (2.12)$$

A λ y μ se les designa como parámetros de Lamé.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.13)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.14)$$

E es el módulo de elasticidad lineal de Young [N/m²].

ν es la razón de Poisson y es adimensional.

Se sustituyen (2.13), (2.14) en (2.12) y el resultado final en (2.11) se obtiene:

$$\sigma^{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{ll} \right) \quad (2.15)$$

Multiplicando ambos lados por δ_{ij} y haciendo un poco de álgebra

$$\begin{aligned} \sigma_{ll} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ll} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll} \right) \\ \varepsilon_{ll} &= \frac{1-2\nu}{E} \sigma^{ll} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se reemplaza (2.16) en (2.15) y se despeja ε_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma^{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma^{ll} \quad (2.17)$$

σ^{ll} Es la traza del tensor de esfuerzos.

Se expresa (2.17) en notación de mecánica de sólidos.

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) & (1 + \nu)\tau_{xy} & (1 + \nu)\tau_{xz} \\ (1 + \nu)\tau_{yx} & \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) & (1 + \nu)\tau_{yz} \\ (1 + \nu)\tau_{zx} & (1 + \nu)\tau_{zy} & \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Con los resultados vistos en las subsecciones (2.3.1) y (2.3.2) se procederá a desarrollar las hipótesis de trabajo.

2.4. HIPÓTESIS DE TRABAJO

El planteamiento de los problemas de la teoría de la elasticidad suelen desembocar en dificultades las cuales se pueden simplificar al replantear las hipótesis iniciales del modelo. Dichas simplificaciones se justifican por sí mismas, para convencerse de esto basta considerar la imprecisión con las cuales se obtienen y manipulan algunos de los parámetros que intervienen en el modelo; por ejemplo la magnitud de las cargas que actúan sobre las losas, entre otros tantos factores. El modelo aplicable al diseño y cálculo de las losas delgadas se fundamenta en las siguientes hipótesis de trabajo:

Hipótesis general.

El hecho de trabajar con placas delgadas ayuda a simplificar las componentes del tensor de esfuerzos esto desemboca en que los problemas en tres dimensiones se reduzcan a problemas bidimensionales, esto ayuda a visualizar mejor el campo de flexiones para pequeñas deformaciones.

a) Hipótesis de las rectas normales

Los segmentos rectilíneos y normales a la superficie media de la losa, es decir antes de la deformación, permanecen rectilíneos y normales a la superficie media flexionada, es decir después de la deformación, preservándose, además, su longitud.

b) Hipótesis de Kirchhoff

i) Las tensiones normales, dirigidas según el eje OZ, se desprecian.

ii) La superficie media de la losa se supone inelástica.

En la figura 2.2 se proporciona una representación gráfica de la hipótesis de las rectas normales. El plano medio se destaca con el color rojo.

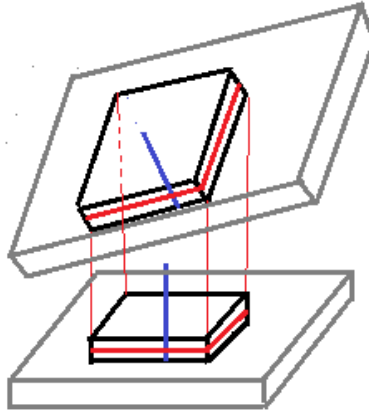


FIGURA 2.2: Representación visual de la hipótesis de las rectas normales.

Tomando en cuenta (2.9) se obtienen las expresiones simbólicas de la hipótesis de las rectas normales (a) $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_z = 0$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, & \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, & \quad u_z = u_z(x, y) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Integrando las primeras dos ecuaciones y ocupando la hipótesis (ii)

$$u_x = -z \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.20)$$

Combinando (2.20) y (2.9)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

De aquí se define

$$\kappa_{ij} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.22)$$

Como la curvatura

Tomando en cuenta la ley de Hooke para materiales isótropos (2.18) y la hipótesis (i) $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, $\sigma_z = 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); & \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

De las primeras ecuaciones se resuelve el sistema de dos por dos para σ_x y σ_y ; de la última se despeja τ_{xy} y se sustituyen las ecuaciones (2.21).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1 + \nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.5. ESFUERZOS Y ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Realmente no se va a trabajar con las tensiones, sino con esfuerzos, esto es, las resultantes de las tensiones. Para ello se verán cuales son las resultantes sobre cada plano por unidad de longitud estas cantidades se muestran en la figura 2.3 y posteriormente se definen.

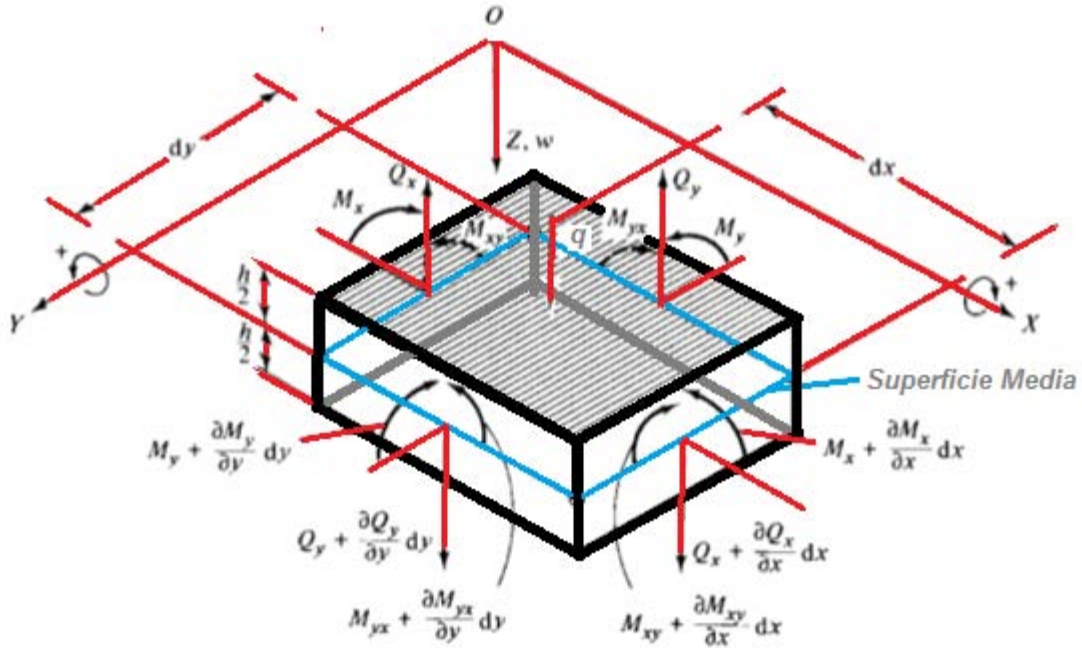


FIGURA 2.3: Paralelepípedo elemental.

a) Esfuerzos axiales

Son aquellos debidos a fuerzas que actúan a lo largo del eje del elemento.

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; \quad (2.25)$$

b) Momentos flexores y de torsionantes.

Como su nombre lo indica son momentos resultantes de las distribuciones lineales de sollicitaciones debidas a la flexión y torsión respectivamente.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz; \quad (2.26)$$

c) Esfuerzos de corte vertical.

Si la placa es solicitada a través de cargas externas normales a la superficie media además de los esfuerzos expresados existirán también esfuerzos de corte vertical.

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz; \quad (2.27)$$

Se puede observar en la figura 2.3 que los esfuerzos en la placa varían linealmente a lo largo del espesor h misma, y representan los momentos por unidad de longitud actuando en los bordes de la placa.

Combinando el juego de ecuaciones (2.24) e integrando conforme a (2.26) se obtienen las expresiones.

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Aquí $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ es la rigidez de la placa debida a la flexión.

Por otra parte dado que debe existir equilibrio de momentos entonces los esfuerzos cortantes $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ y $M_{xy} = M_{yx}$.

Con apoyo en la figura 2.4 se plantearan las ecuaciones de equilibrio de los esfuerzos en un diferencial de placa de dimensiones dx , dy y espesor " h " haciendo uso de las ecuaciones anteriores y las ecuaciones de equilibrio.

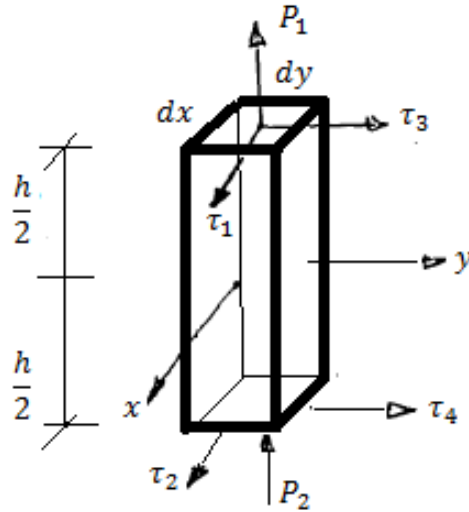


FIGURA 2.4: Esfuerzos en un elemento diferencial de placa de dimensiones dx , dy , h .

Considerando equilibrio y despreciando el efecto de las fuerzas de cuerpo la ecuación de Cauchy se expresa en 2.29.

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (2.29)$$

Donde $\nabla \cdot \sigma$ es la divergencia del tensor de esfuerzos.

Esto genera un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (2.30)$$

Integrando cada ecuación con respecto a z y utilizando (2.25) y empleando la figura 2.4.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz + \tau_{xz} \Big|_{-h/2}^{h/2} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz + \tau_{yz} \Big|_{-h/2}^{h/2} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz + \sigma_z \Big|_{-h/2}^{h/2} &= 0; \\
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \tau_1 + \tau_2 &= 0, \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \tau_3 + \tau_4 &= 0, \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P_1 + P_2 &= 0;
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Una vez más se toma el conjunto de ecuaciones (2.30) para encontrar el equilibrio de momentos salvo la tercera ecuación ya que son de orden menor, así mismo se integran las primeras dos respecto a zdz .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} z dz &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} z dz &= 0, \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} [\tau_1 - \tau_2] - Q_x &= 0, \\
\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{h}{2} [\tau_3 - \tau_4] - Q_y &= 0;
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Las primeras dos integrales de cada ecuación se hicieron tomando las definiciones (2.26) y las terceras integrales resultan de integrar por partes y ocupar (2.27).

Como los esfuerzos son normales a la superficie $\tau_1 = \tau_2$ y $\tau_3 = \tau_4$ además se toma $P_1 + P_2 = q$ la cual es la carga transversal por unidad de área que actúa normal a la cara

superior de la placa así simplificando en (2.31) y (2.32) se tienen las ecuaciones de equilibrio de un elemento infinitésimo de placa.

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Se despejan Q_x y Q_y de las primeras dos ecuaciones y se sustituye en la tercera

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) + q = 0$$

Después de aplicar los operadores se concluye (2.34).

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0\tag{2.34}$$

Para concluir se combinan el conjunto de ecuaciones (2.28) con (2.34)

$$\nabla^4 u_z = \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{q}{D}\tag{2.35}$$

(2.35) es conocida como la ecuación de Germain-Lagrange para placas.

Esta será la ecuación diferencial en derivadas parciales que se resolverá a lo largo de este texto sólo falta expresar los esfuerzos de corte vertical en función de u_z para proceder a plantear el problema de valores en la frontera.

Para esto se despejan Q_x y Q_y de (2.33) y se sustituyen las ecuaciones (2.28).

$$\begin{aligned}Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u_z), \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 u_z)\end{aligned}\tag{2.36}$$

2.6. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE VALORES EN LA FRONTERA PARA PLACAS RECTANGULARES

Se busca resolver (2.35) sujeta a las siguientes condiciones de frontera para hallar la función $u_z = u_z(x, y)$ la cual proporciona el campo de deformaciones de la placa:

a) Para el borde empotrado en $x = x_0$.

$$u_z = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$$

b) Para el borde articulado en $x = x_0$.

$$u_z = 0, \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 0$$

c) Para el borde libre.

$$\widetilde{Q}_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 0$$

Donde \widetilde{Q}_x son las fuerzas cortantes reducidas y distribuidas en los bordes.

Estos resultados se obtuvieron a partir de combinar (2.36) y (2.28) de manera similar se pueden plantear las condiciones para $y = y_0$.

Finalmente se pueden relacionar los esfuerzos con los momentos combinando (2.24) y (2.28).

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z, \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z \quad (2.37)$$

2.7. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE GERMAIN-LAGRANGE

2.7.1. CONJUNTOS ORTOGONALES

El **producto interno** de dos funciones f_1 y f_2 en un intervalo $[a, b]$ es la cantidad.

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx \quad (2.38)$$

Se dice que dos funciones f_1 y f_2 son **ortogonales** en el intervalo $[a, b]$ si la integral mostrada en (2.38) es igual a cero.

Un conjunto de funciones $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2 \dots\}$ es **ortogonal** en $[a, b]$ si

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, m \neq n \quad (2.39)$$

En un conjunto ortogonal la **norma** o longitud generalizada se define como $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n, \phi_n)}$ la idea de definir así la norma proviene del producto punto entre vectores ya que el producto punto de un vector consigo mismo es la norma cuadrada del vector dado. La diferencia es que ahora se definió el producto interno de funciones como una integral.

Si un conjunto ortogonal se divide entre su norma a ese conjunto se le conoce como **conjunto ortonormal** debido a que el conjunto posee la propiedad de $\|\phi_n(x)\| = 1$.

Lo primero que se debe hacer es demostrar que el conjunto de funciones $[\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \dots]$ es ortogonal en el intervalo $[0, L]$.

Para esto se toma $\phi_m = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ y $\phi_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ y se realiza el producto interno de funciones en el intervalo dado.

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_0^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, m \neq n$$

Utilizando identidades trigonométricas y descomponiendo la integral en dos se tiene.

$$\begin{aligned}
 (\phi_m, \phi_n) &= \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, m \neq n \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_0^L \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) dx - \int_0^L \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{L}{m-n}\right) \operatorname{sen}[(m-n)\pi] - \left(\frac{L}{m+n}\right) \operatorname{sen}[(m+n)\pi] \right\}
 \end{aligned}$$

Como m y n son cantidades enteras el seno de un múltiplo entero de π es igual a cero a continuación el cálculo para $m = n$.

$$\begin{aligned}
 (\phi_n, \phi_n) &= \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L 1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(L - \frac{L}{2n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi) \right)
 \end{aligned}$$

Por el argumento anterior $(\phi_n, \phi_n) = \frac{L}{2}$

Finalmente el resultado anterior se puede expresar como:

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn} \frac{L}{2} \quad (2.40)$$

Donde δ_{mn} es la delta de Kronecker.

2.7.2. MÉTODO DE NAVIER

En esta sección se desarrolla el método de Navier para el cálculo de placas por simplicidad se sustituye $w = u_z(x, y)$ de (2.35).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2.41)$$

Para resolver la ecuación (2.41) se propone que la carga $q=q(x,y)$ es desarrollable en una serie doble de Fourier:

$$q(x, y) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} q_{mn} \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (2.42)$$

Donde a y b son las dimensiones de la placa a lo largo de los ejes x y y , respectivamente.

Ahora se deben determinar los coeficientes q_{mn} se multiplica ambos lados por $\text{sen} \left(\frac{u\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{v\pi y}{b} \right)$ siendo u y v cantidades enteras

$$q(x, y) \text{sen} \left(\frac{u\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{v\pi y}{b} \right) = \text{sen} \left(\frac{u\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{v\pi y}{b} \right) \sum_{m=1} \sum_{n=1} q_{mn} \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

$$q(x, y) \text{sen} \left(\frac{u\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{v\pi y}{b} \right) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} q_{mn} \text{sen} \left(\frac{u\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{v\pi y}{b} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

Se integra con respecto a x en el intervalo $[0, a]$

$$\text{sen} \left(\frac{v\pi y}{b} \right) \int_0^a q(x, y) \text{sen} \left(\frac{u\pi x}{a} \right) dx = \sum_{m=1} \sum_{n=1} q_{mn} \text{sen} \left(\frac{v\pi y}{b} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \int_0^a \text{sen} \left(\frac{u\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx$$

Si la serie converge se puede intercambiar el orden de la integral con la suma y utilizando la relación de ortogonalidad (2.40) el único valor diferente de cero es para $u = m$.

$$\text{sen} \left(\frac{v\pi y}{b} \right) \int_0^a q(x, y) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx = \sum_{n=1} \frac{a}{2} q_{mn} \text{sen} \left(\frac{v\pi y}{b} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

Ahora se integra sobre el eje y en el intervalo $[0, b]$

$$\int_0^b \operatorname{sen}\left(\frac{v\pi y}{b}\right) \left[\int_0^a q(x,y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \right] dy = \sum_{n=1} \frac{a}{2} q_{mn} \int_0^b \operatorname{sen}\left(\frac{v\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

$$\int_0^b \int_0^a q(x,y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{ab}{4} q_{mn}$$

Una vez más se utilizó la relación (2.40) finalmente se obtienen los coeficientes.

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x,y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.43)$$

Los coeficientes de la serie para la carga.

Para resolver la ecuación de Germain-Lagrange una vez más se propone la solución general de la ecuación como una serie doble de Fourier (no confundir con la carga).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{q(x,y)}{D} = 0$$

$$w(x,y) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} a_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.44)$$

Se calculan las derivadas.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sum_{m=1} \sum_{n=1} a_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} a_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sum_{m=1} \sum_{n=1} a_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Sustituyendo la carga y las derivadas en la ecuación de Germain-Lagrange se obtiene la ecuación en índices.

$$\sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] a_{mn} - \frac{q_{mn}}{D} \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0$$

Para que se cumpla la ecuación se igualan los coeficientes a cero.

$$\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] a_{mn} - \frac{q_{mn}}{D} = 0$$

$$a_{mn} = \frac{q_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (2.45)$$

Los coeficientes de la solución están ligados a los coeficientes de la carga.

Pero puesto que en los bordes $x = \text{cte}$ o $y = \text{cte}$, $w = 0$ y, consecuentemente, todas las derivadas respecto al otro argumento (y o x) son iguales a cero, las condiciones de frontera se pueden expresar de forma más sencilla simplificando las condiciones mostradas en la sección (2.6):

$$\begin{aligned} \text{para } x = 0 \text{ y } x = a \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \text{para } y = 0 \text{ y } y = b \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Una vez encontrada la solución general del problema cualquier cantidad de interés se puede determinar utilizando el método del desplazamiento mostrado en la figura 2.5.

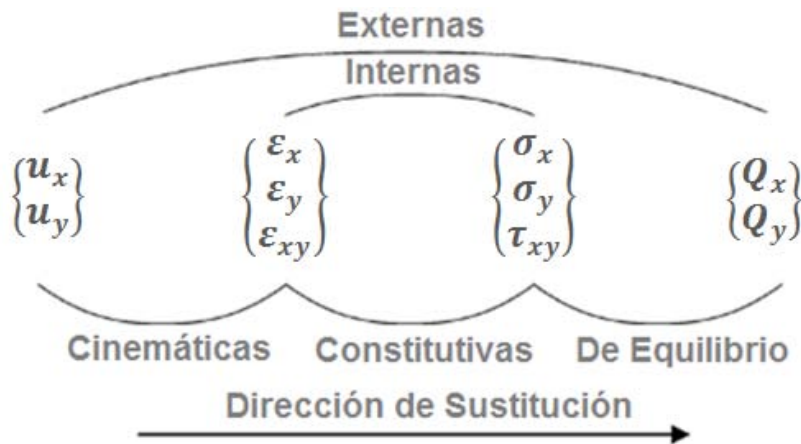


FIGURA 2.5: Concatenación de las variables

3. RESULTADOS

3.1. ANÁLISIS EN UNA PLACA SOMETIDA A DIVERSOS TIPOS DE CARGA

En este capítulo se obtendrán los campos de flexiones para una placa de acero ASTM apoyada en sus cuatro bordes, sometida a distintos tipos de carga empleando el método de Navier, con el fin de comparar las flechas en un gráfico que se presenta al final de la sección (3.5), la tabla 3.1 muestra los datos que se ocuparán a lo largo de las subsecciones de este capítulo.

Tabla 3.1: Datos para problemas de placas apoyadas en sus cuatro lados	
Geometría de la placa	
Largo (a)	4 m
Ancho (b)	4 m
Espesor (h)	0.02 m
Características mecánicas de la placa	
Material	Acero
Módulo de Young (E)	210E9 N/m ²
Coefficiente de Poisson (ν)	0.3
Carga total	
Carga	1000 N/m ²

3.2. PLACA METÁLICA SUJETA A CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA

Considere una carga uniformemente repartida $q(x,y) = -q_0$ constante en la placa $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$ utilizando (2.43).

$$q_{mn} = -\frac{4q_0}{ab} \int_0^b \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4q_0}{ab} \left[\int_0^a \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \right] \left[\int_0^b \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \right] \\
&= -\frac{4q_0}{ab} \left[\left(\frac{a}{m\pi}\right) (\cos(m\pi) - 1) \right] \left[\left(\frac{b}{n\pi}\right) (\cos(n\pi) - 1) \right] \\
q_{mn} &= -\frac{4q_0}{mn\pi^2} [(-1)^m - 1][(-1)^n - 1]
\end{aligned}$$

Si m ó n son cantidades pares los coeficientes de la carga se anulan pero si m y n son impares los coeficientes de carga son.

$$q_{mn} = -\frac{16q_0}{mn\pi^2} \quad (3.1)$$

Se reemplaza (3.1) en (2.45) y estos a su vez en (2.44).

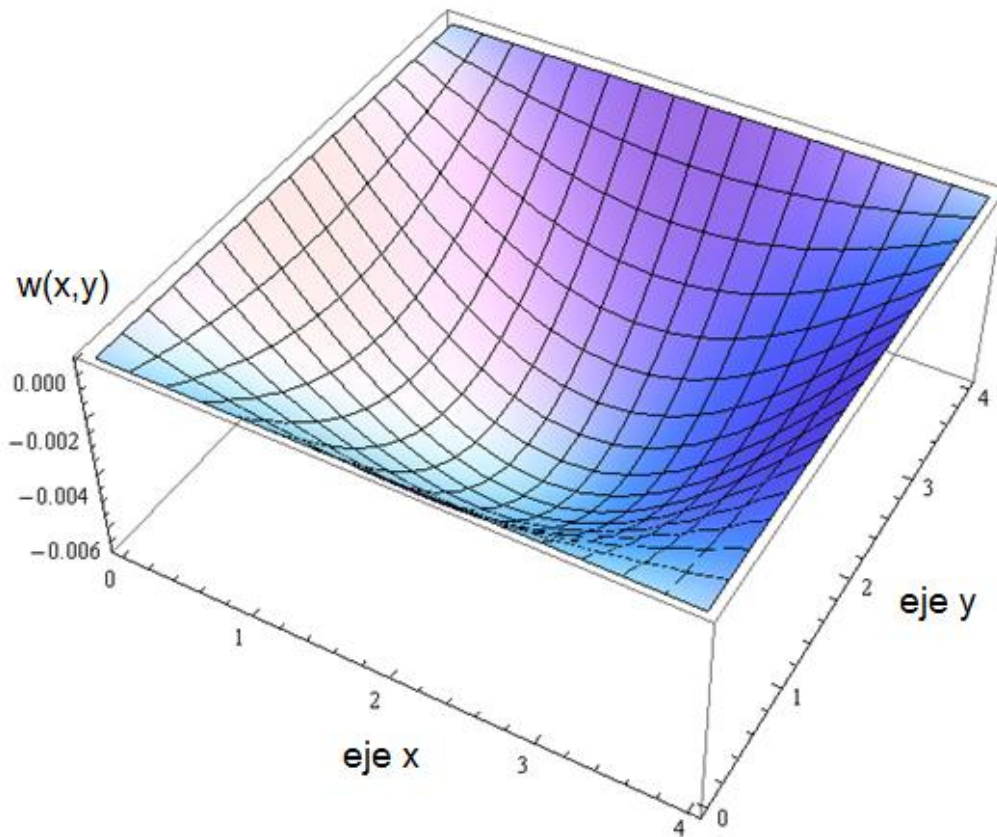
$$a_{mn} = \frac{-16q_0}{Dmn\pi^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (3.2)$$

$$W(x, y) = \frac{-16q_0}{D\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (3.3)$$

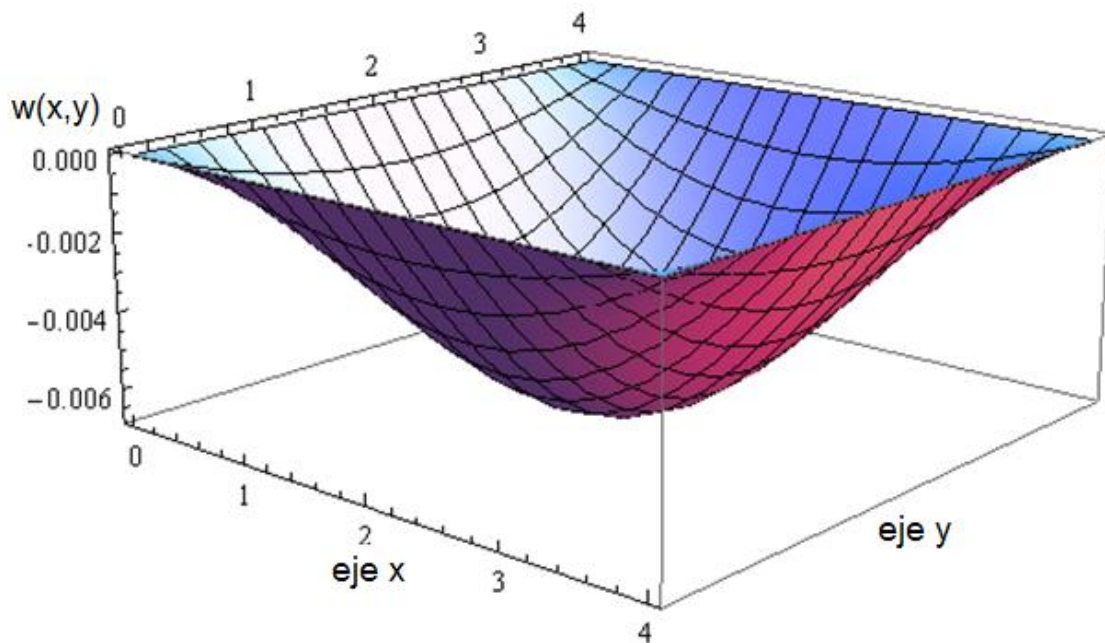
Haciendo un cambio de variable tomando $m = 2i - 1$ y $n = 2j - 1$ tal que $m, n = 1, 2, 3, \dots$ se concluye 3.4.

$$W(x, y) = \frac{-16q_0}{D\pi^2} \sum_{i=1} \sum_{j=1} \frac{\text{sen}\left(\frac{(2i-1)\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi y}{b}\right)}{(2i-1)(2j-1) \left[\left(\frac{(2i-1)\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{(2j-1)\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (3.4)$$

Se presentan los gráficos 3.1 y 3.2 en 3D empleando los datos de la tabla 3.1 para una placa de acero utilizando el programa Mathematica y aproximando la solución mediante sumas parciales:



GRÁFICA 3.1: Flexión de la placa sometida a una carga uniforme constante vista lateralmente.



GRÁFICA 3.2: Flexión de la placa sometida a una carga uniforme constante desde una perspectiva frontal.

Para concluir esta parte se evaluará numéricamente la flexión máxima de una placa sometida a una carga uniformemente repartida para cumplir con este objetivo primero se necesitan el desarrollo en series del problema anterior.

Factorizando la expresión (3.3) se reduce a.

$$W(x, y) = \frac{16q}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,5\dots} \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}$$

Para $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ se obtiene.

$$\max [W(x, y)] = \frac{16q}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,5\dots} \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \quad (3.5)$$

Imponiendo una nueva variable $\mu = b/a$ $\max [W(x, y)]$ se puede escribir como:

$$\text{máx}[W] = \alpha \frac{qa^4}{E_1 h^3}, \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \alpha = \frac{192}{\pi^6} \sum_{m=1,3,5\dots} \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn \left[m^2 + \left(\frac{n}{\mu}\right)^2\right]^2} \quad (3.6)$$

Con ayuda de una hoja de cálculo se obtendrán los valores de la flexión máxima para diversos términos de alfa.

Tabla 3.2: Cálculo de flexiones máximas.			
Valor máximo m	Valor máximo n	Flecha máxima (m)	%Error
1	1	0.006923315	2.419613478
3	3	0.00674819	0.171082918
5	5	0.006761826	0.030632807
9	9	0.006759947	0.002842979
29	29	0.006759756	1.30607E-05
39	39	0.006759755	3.10694E-06
99	99	0.006759755	3.21024E-08
199	199	0.006759755	1.00478E-09
399	399	0.006759755	3.13596E-11
999	999	0.006759755	2.95119E-13
1999	1999	0.006759755	0

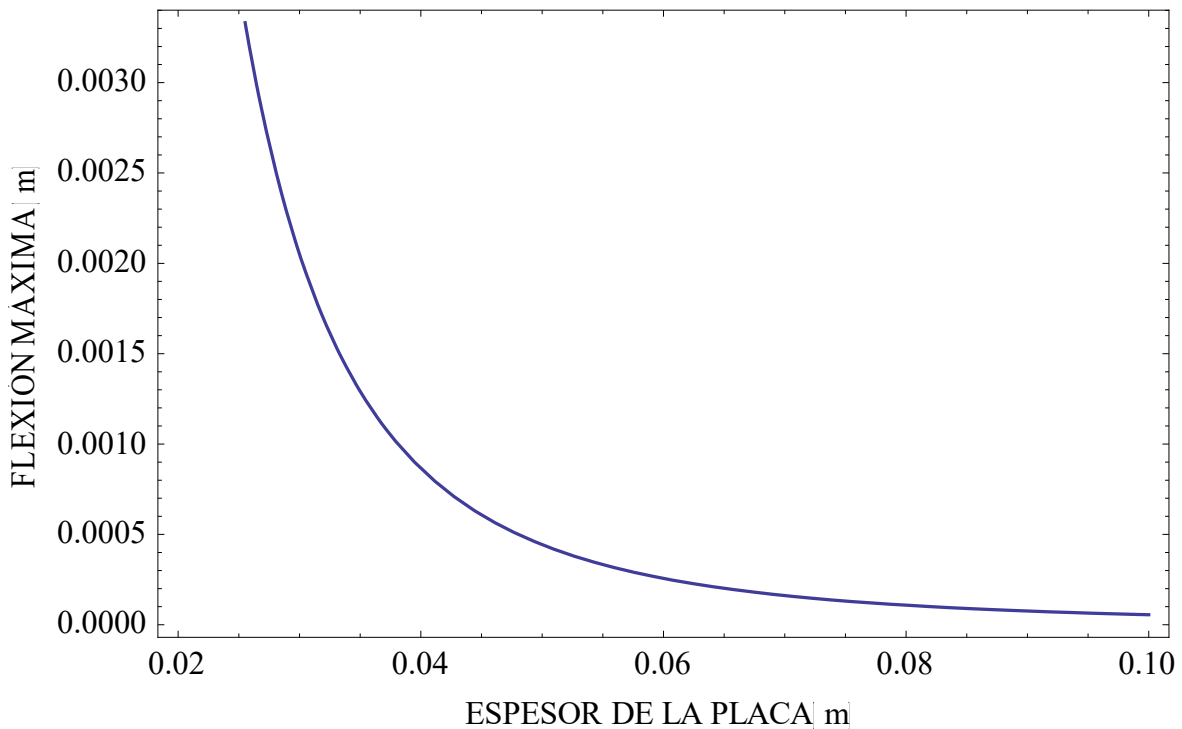
La fórmula calculada con sólo un término presenta 2.42% de error con respecto al último valor calculado de la tabla, con lo cual para realizar un estimado rápido se puede utilizar la siguiente fórmula que resulta de truncar la serie en dicho término.

$$\max(w) \approx \frac{16q}{D\pi^6} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \quad (3.7)$$

Finalmente si la placa es cuadrada la fórmula se reduce a.

$$\max(w) \approx \frac{48q a^4}{E_1\pi^6 h^3} \quad (3.8)$$

En la gráfica 3.3 se puede apreciar el decaimiento de la flexión máxima con respecto al espesor de la placa lo cual confirma la definición adoptada en el texto de placa delgada según la definición dada en la sección 2.2.



GRÁFICA 3.3: Decaimiento de la flexión máxima con respecto al espesor.

3.3. PLACA METÁLICA SUJETA A CARGA CONCENTRADA

En este ejemplo se estudiará una placa de acero apoyada en sus cuatro lados sometida a una carga concentrada $-q$ en el punto $x = u, y = v$;

La forma más sencilla es considerar que $q(x, y) = -q_0\delta(u, v)$ donde $\delta(u, v)$ es la delta de Dirac.

Una vez más utilizando (2.43) se busca calcular los coeficientes de la carga.

$$q_{mn} = -\frac{4q_0}{ab} \int_0^b \int_0^a \delta(u, v) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

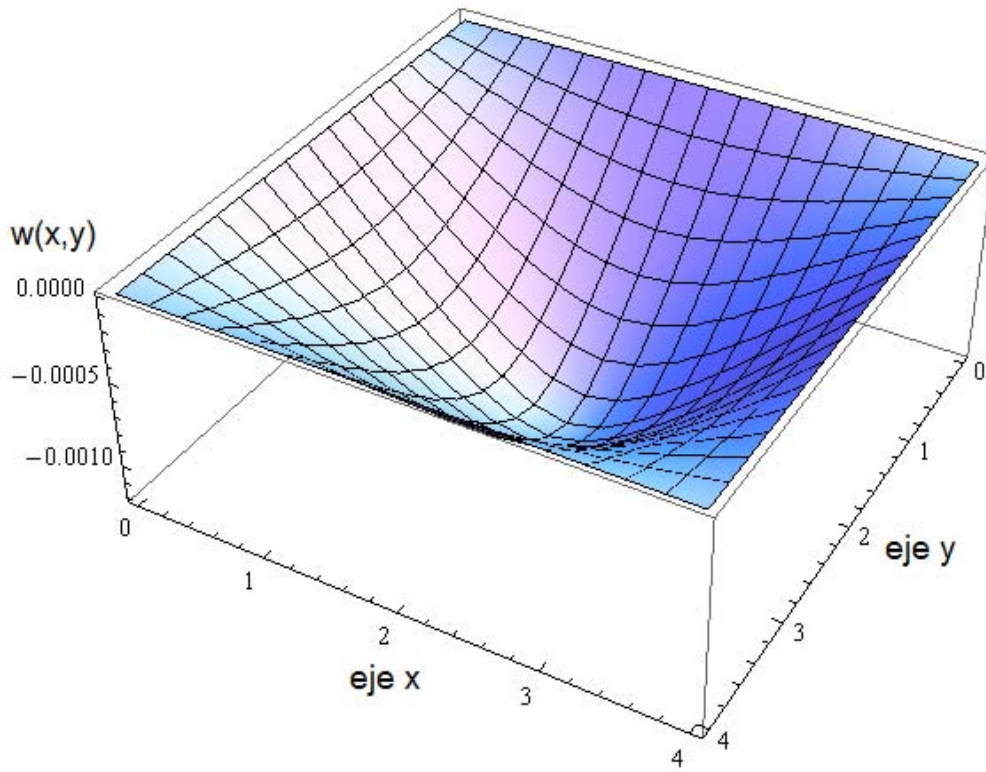
$$q_{mn} = -\frac{4q_0}{ab} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi u}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi v}{b}\right) \quad (3.9)$$

Se procede a sustituir los coeficientes de la carga en (2.45) y (2.42).

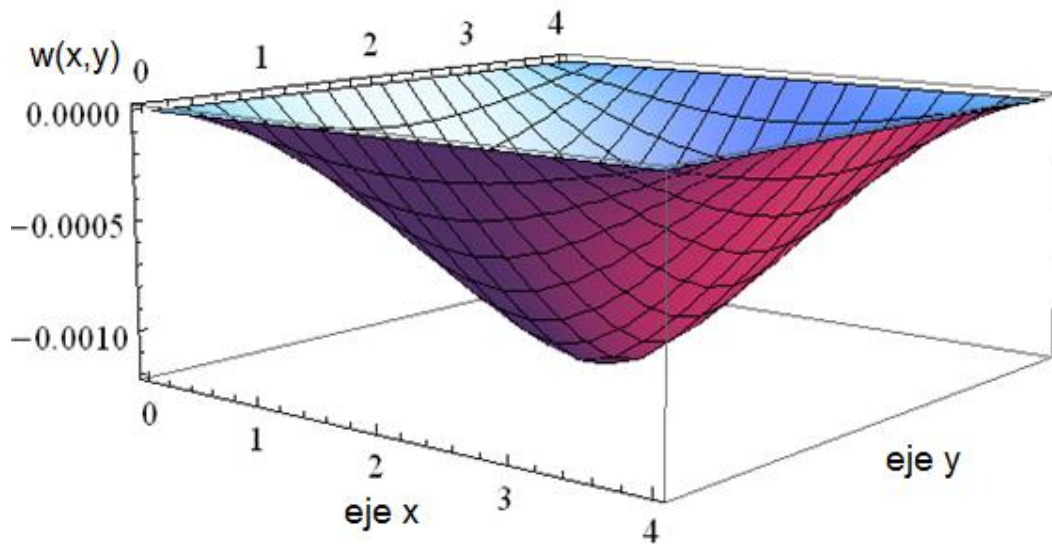
$$a_{mn} = \frac{-4q_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi u}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi v}{b}\right)}{Dab \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (3.10)$$

$$W(x, y) = \frac{-4q_0}{Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi u}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi v}{b}\right)}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.11)$$

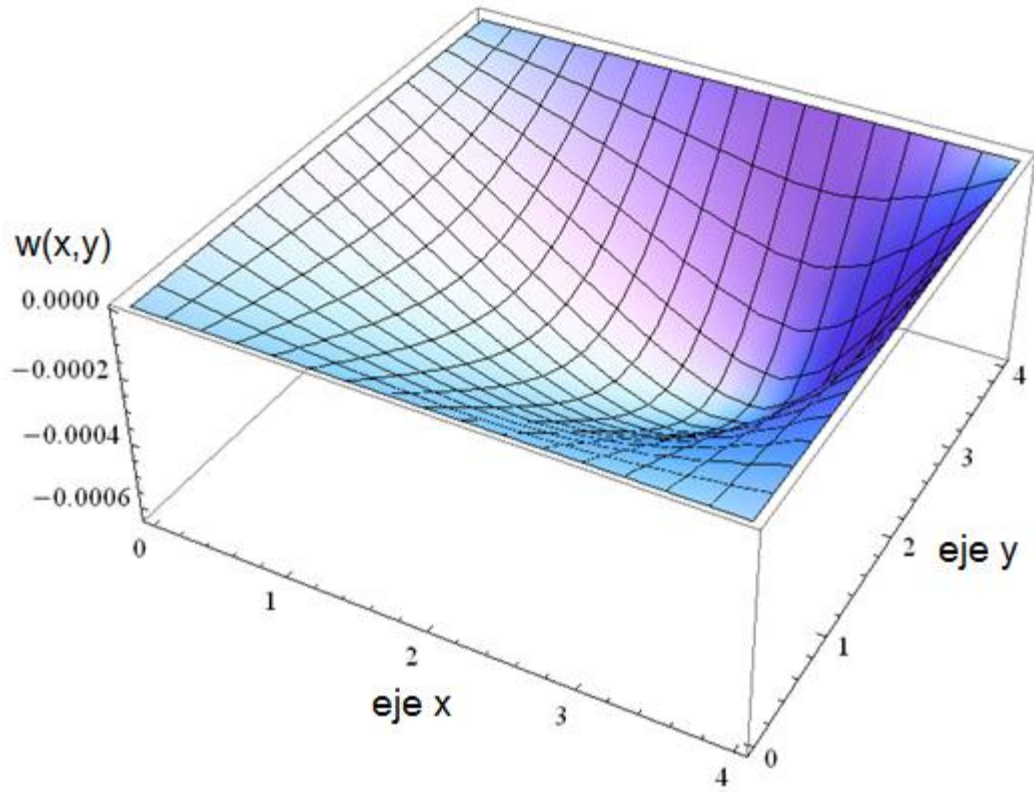
En los gráficos 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7 se presenta una placa con las especificaciones mostradas en la tabla 3.1. La versatilidad que posee esta solución es que la carga se puede concentrar a lo largo y ancho de la placa, objetivo es mostrar el campo de flexión para una carga concentrada en el centro, es decir $u = v = 2$, y una carga concentrada hacia una de las orillas, en $u = v = 3$.



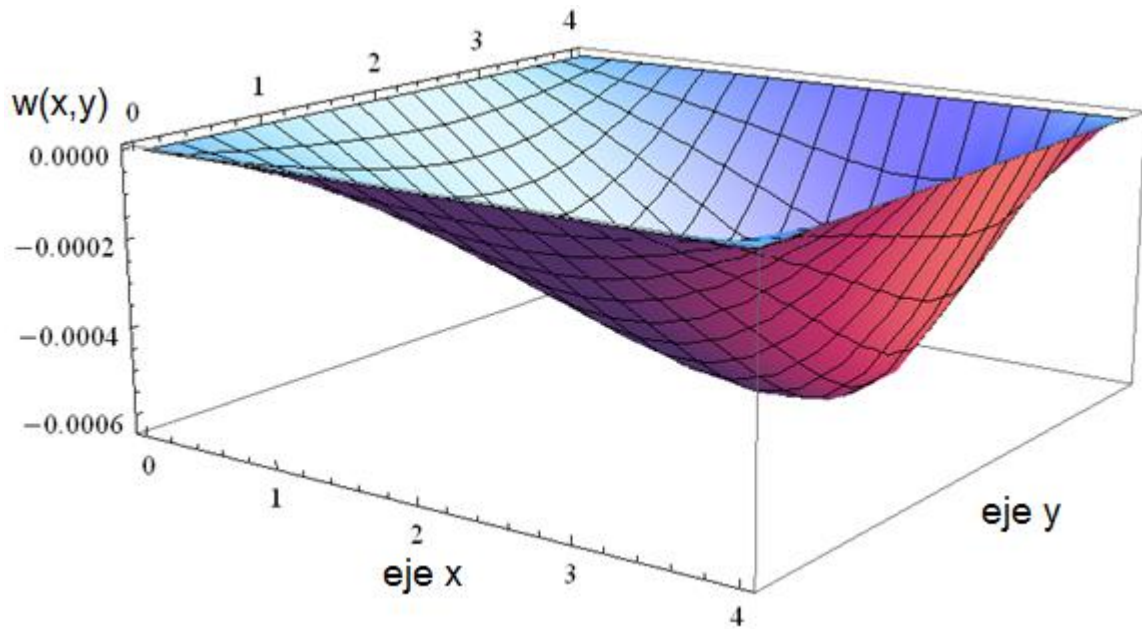
GRÁFICA 3.4: Flexión de la placa sometida a una carga concentrada en el centro, constante desde una perspectiva lateral.



GRÁFICA 3.5: Flexión de la placa sometida a una carga concentrada en el centro, constante desde una perspectiva frontal.



GRÁFICA 3.6: Flexión de la placa sometida a una carga constante concentrada en el punto $(u,v)=(3,3)$ desde una perspectiva lateral.



Gráficas 3.7: Flexión de la placa sometida a una carga constante concentrada en el punto $(u,v) = (3,3)$ desde una perspectiva frontal.

3.4. PLACA METÁLICA SUJETA A CARGA TRIANGULAR

En este ejemplo se estudiará una placa de acero con apoyo simple en sus cuatro lados sujeta a una carga triangular $q(x, y) = \frac{-q_0}{a}(a - x)$, gráficos 3.8 y 3.9.

Observación: La carga se considera positiva en el sentido ascendente. Por tanto esta carga distribuida es negativa.

$$q_{mn} = -\frac{4q_0}{a^2b} \int_0^b \int_0^a (a - x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (3.12)$$

$$q_{mn} = -\frac{4q_0}{a^2b} \int_0^a (a - x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

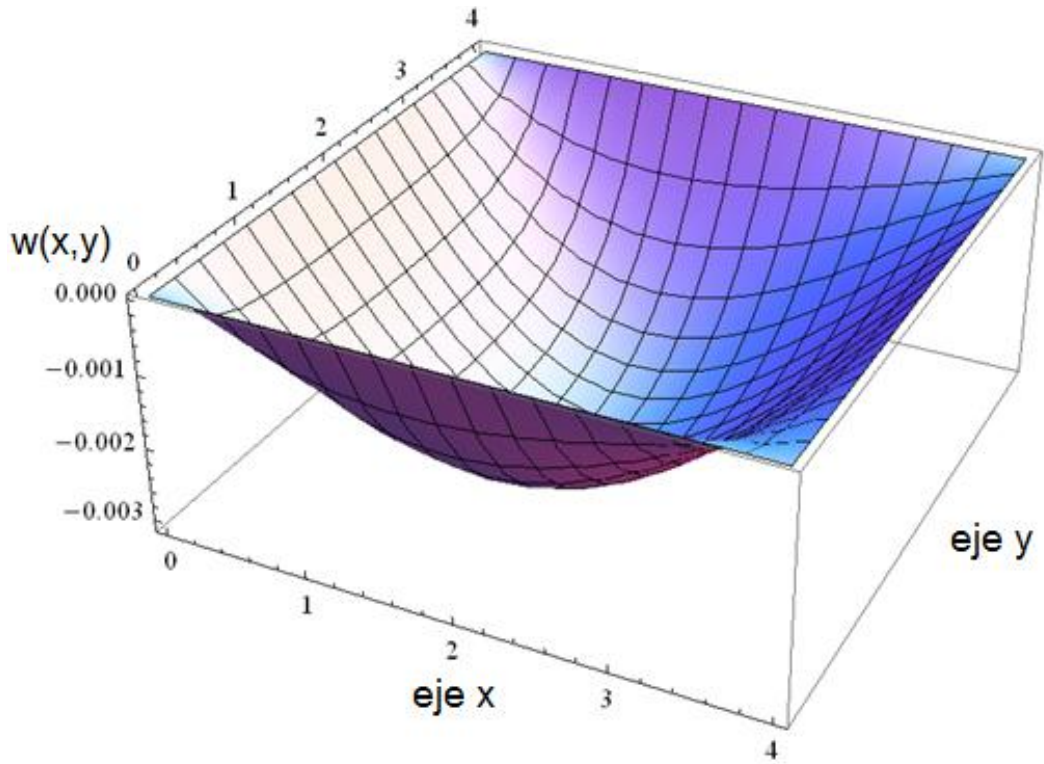
$$q_{mn} = -\frac{4q_0}{a^2b} \left[\frac{a^2}{m\pi} \right] \left[\frac{b}{n\pi} (1 - (-1)^n) \right]$$

$$q_{mn} = -\frac{4q_0}{mn\pi^2} [(1 - (-1)^n)] \quad (3.13)$$

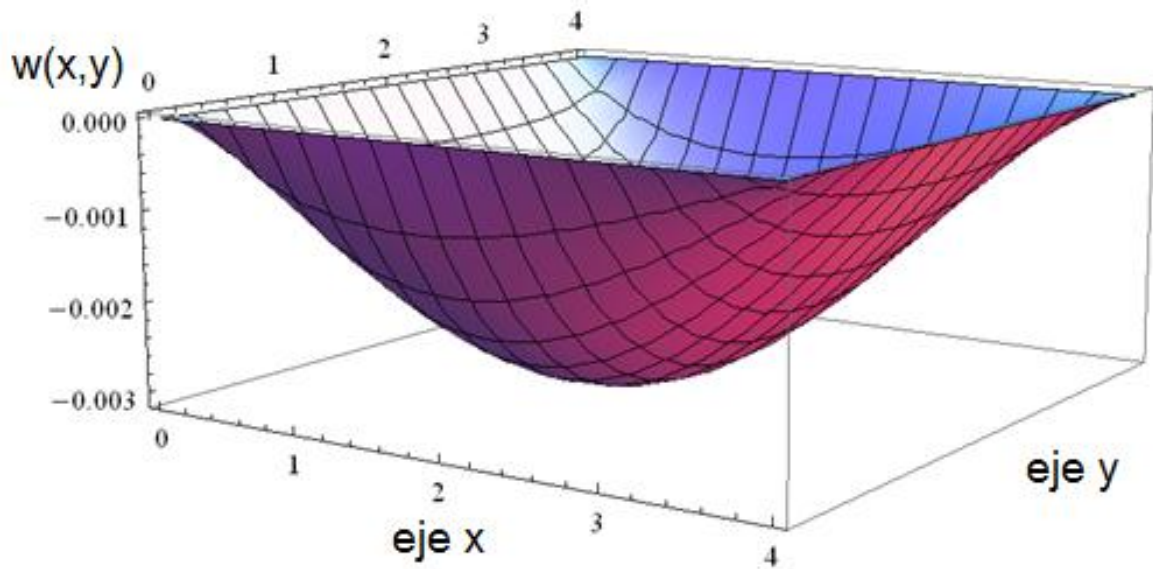
Se sigue el mismo procedimiento esbozado en las secciones anteriores.

$$a_{mn} = \frac{-4q_0[(1 - (-1)^n)]}{Dmn\pi^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (3.14)$$

$$W(x, y) = \frac{-4q_0}{D\pi^2} \sum_{m=1} \sum_{n=1} \frac{[(1 - (-1)^n)]}{mn \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.15)$$



GRÁFICA 3.8: Placa sometida a una carga triangular desde una vista lateral.



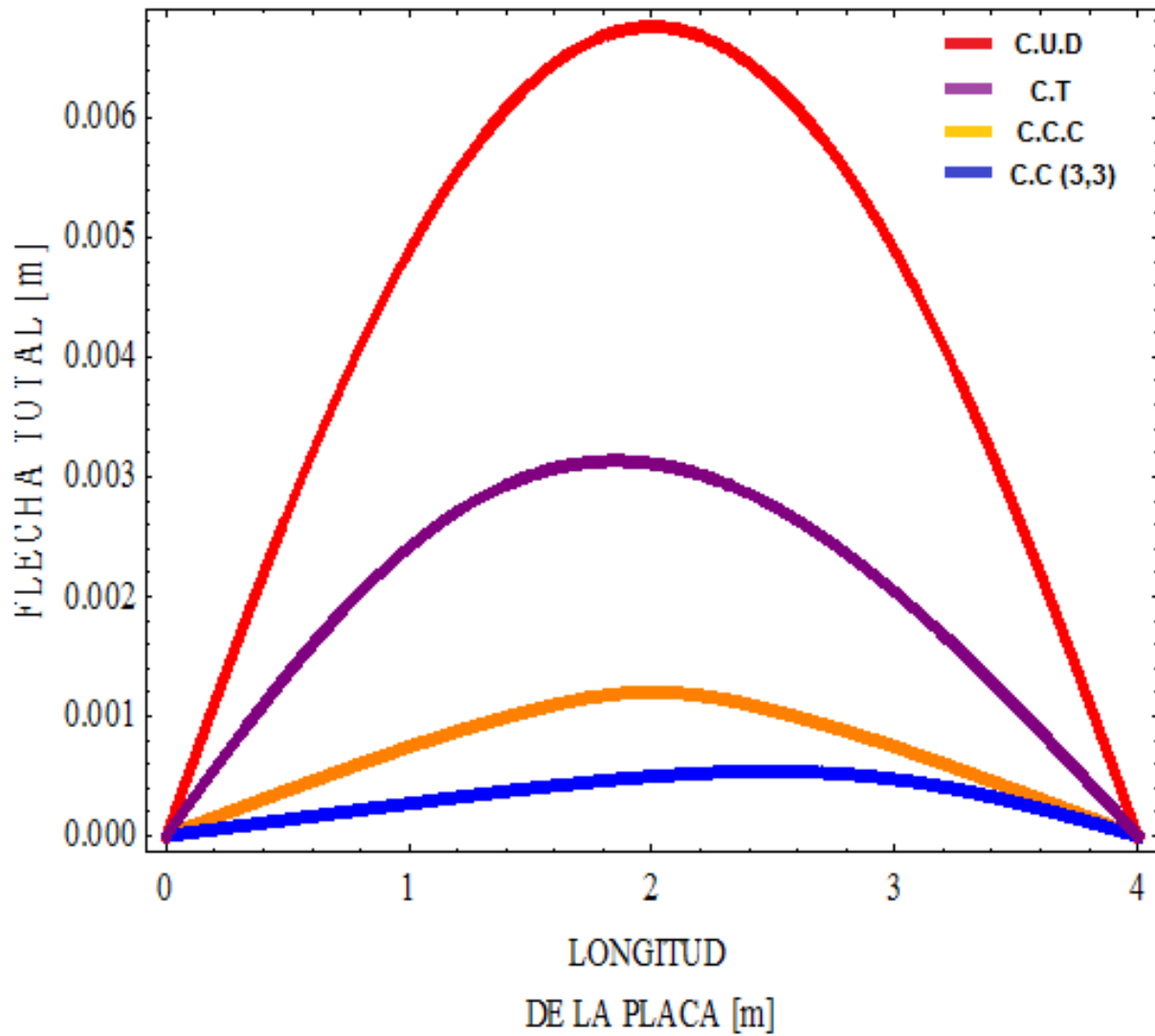
GRÁFICA 3.9: Placa sometida a una carga triangular desde una vista frontal.

3.5. COMPARACIÓN DE FLEHAS ENTRE DISTINTOS TIPOS DE CARGA

Para realizar la gráfica 3.10 se tomaron las expresiones de los respectivos campos de flexiones que se analizaron en las secciones (3.2) a (3.4) y a los mismos se les hizo un corte vertical con el plano $y = b/2$, se puede apreciar que de las tres cargas aquí analizadas, la carga que produce una flecha mayor es la uniformemente distribuida, aunque parezca que la carga triangular es simétrica la realidad es que el comportamiento esperado no es tan marcado, pero al observar la gráfica fijamente se puede ver que el máximo está cargado a la izquierda del centro de la placa y la pendiente a la izquierda del máximo es mayor que a la derecha este comportamiento no es tan marcado debido a que la función es menos cóncava que la obtenida por la carga uniformemente distribuida.

Por otra parte, al concentrar la carga en un punto, el comportamiento es más marcado y se puede ver que el máximo se desplaza hacia el punto donde se concentró la carga, si el punto de concentración se encuentra en el centro de la placa se obtiene una flecha mayor y conforme el punto se aleja del centro la flecha disminuye.

Por último aunque en magnitud la carga $q_0 = 1000 \text{ N/m}^2$ fue la misma para los tres ejemplos mostrados anteriormente al parecer la flexión no sólo depende de esta magnitud, también depende del área de contacto, es decir a mayor área de contacto mayor será la flecha; hay mayor área de contacto para una carga distribuida y el área disminuye hasta que se concentra tan solo en un punto.



GRÁFICA 3.10: Comparación de flechas totales para diversos tipos de carga en $(x = a/2, y = b/2)$

- Rojo:** Carga uniformemente distribuida
- Morado:** Carga triangular
- Naranja:** Carga concentrada en el centro
- Azul:** Carga concentrada en el punto (3,3)

4. LOSA DE CONCRETO ARMADO EN TECHO DE CASA-HABITACIÓN

Se requiere obtener los desplazamientos por flexión así como el máximo esfuerzo de trabajo para una losa de concreto armado de azotea de 3.925 m de largo por 3.85 m de ancho y 18 cm de espesor para la casa residencial mostrada en la figura 4.4.

La losa de azotea deberá poseer una pendiente del 2% para el correcto desagüe del agua pluvial, a tal propósito se añade una capa de mortero de peso normal protegida con un enladrillado.

Se incluye, además, un tinaco con capacidad de 1100 L. La base del tinaco se construirá con una losa de 12 cm de espesor y un área de 1.2 x 1.2 m, la cual descansa sobre dos muros de ladrillo recocido de 1.2 x 1.5 m. Pero se considerarán tres muros rodeando al tinaco como se muestra en las figuras 4.1 y 4.3.

La losa del tinaco se colocará en el centro de la losa de azotea y los muros de ladrillo recocido que la sostienen corren perpendiculares a las fachadas principal y posterior del inmueble tal y como se ilustra en la figura 4.2.

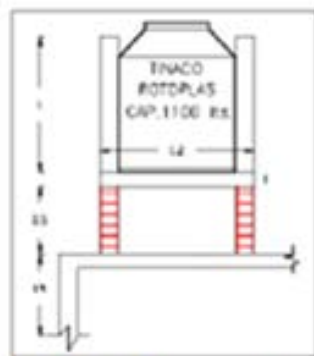


FIGURA 4.1 Tinaco Rotoplas



FIGURA 4.2 : Fachada Principal

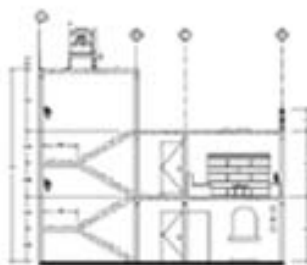


FIGURA 4.3: Corte eje B-B



FIGURA 4.4 : Plano de Azotea

Descripción de cargas estructurales

Se entiende por carga estructural aquella debida a los efectos térmicos o cargas (fuerzas, momentos, desplazamientos) que afectan a la estructura como sistema.

El Reglamento de Construcción del Distrito Federal [2] admite la siguiente clasificación:

- i. **Carga muerta:** Son cargas que se mantienen constantes durante la vida útil de la estructura: peso de la estructura, peso de muros, de fachadas, etc.

El reglamento de Construcción del Distrito Federal especifica que en las losas de concreto coladas en el lugar se deberán sumar 20 kg/cm^2 el peso propio que resulte de las dimensiones nominales de la losa.

Cuando sobre la losa se coloque una capa de mortero de peso normal se incrementaran también 20 kg/cm^2 , de manera que el incremento total será de 40 kg/cm^2 .

- ii. **Carga viva:** Son aquellas debidas a la operación y uso del inmueble y no poseen una posición fija.

Se manejan las siguientes clasificaciones:

1. **Carga viva máxima (W_m):** Es la carga debida a cargas verticales gravitacionales, así como el asentamiento inmediato del suelo.
2. **Carga instantánea (W_a):** Cargas debidas a la acción del viento o sísmica o cuando se consideran condiciones de carga desfavorables.
3. **Carga media (W):** Se aplica al cálculo de asentamientos o flechas diferidas.

Detalles constructivos.

De conformidad a la descripción arquitectónica la estructuración de la casa habitación se realizará con base en muros de carga de tabique, de barro rojo recocido y losas de concreto reforzado.

Características de los materiales empleados:

- i. **Muros de carga:** Se usarán tabiques de barro rojo recocido de 7×14×28 cm juntados con mortero de clase I y acabado final de mortero.
- ii. **Losa de concreto:** Con pendiente mínima del 2 % para el desagüe de las aguas pluviales, se aplicará relleno de tepetate. El concreto será de $f_c = 250 \text{ Kg/cm}^2$ con acero de refuerzo de varillas corrugadas de 3/8' con un límite de fluencia $f_y = 4,200 \text{ Kg/cm}^2$. El agregado pétreo tendrá un tamaño máximo de 1/4".

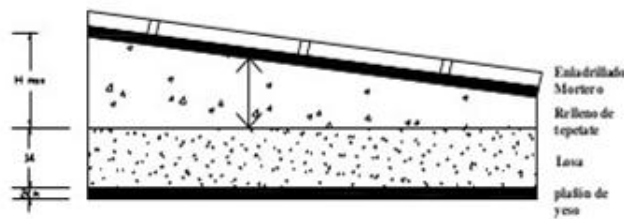


FIGURA 4.5: Losa de azotea (esquema de desagüe)

Resolución:

La losa de azotea soportará dos tipos de carga: la carga debida al tinaco de agua y su estructura de soporte, y la carga de la losa del tinaco.

Los muros de la base del tinaco: se apoyan en sendos muros de tabique recocido que corren paralelamente según los ejes 1-1 y 2-2. Los centros de la losa del tinaco y la losa de la azotea quedan alineados por una misma recta vertical.

En la tabla 4.1 se muestran las propiedades mecánicas de los diversos materiales empleados:

Tabla 4.1: Especificaciones y características del concreto tipo I	
Propiedades mecánicas del concreto armado tipo I	
Resistencia del concreto	$f_c = 250 \text{ kg/cm}^2$
Resistencia del acero	$f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$
Módulo de elasticidad	$E = 221,359 \text{ kg/cm}^2$
Módulo de Poisson	$\nu = 0.18$
Densidad del concreto	$\rho = 2,400 \text{ kg/m}^3$

En las tablas 4.2 y 4.3 se muestran las dimensiones de las estructuras de construcción y el tinaco respectivamente con ayuda de estos datos en las tablas 4.4 a 4.6 se proporcionan los pesos y cargas asociados a cada estructura.

Tabla 4.2: Dimensiones de las diversas estructuras	
Geometría de las estructuras de construcción	
Dimensiones de la losa de azotea	
Largo	3.925 m
Ancho	3.85 m
Espesor	0.18 m
Dimensiones de la losa del tinaco	
Largo	1.2 m
Ancho	1.2 m
Espesor	0.12 m
Dimensiones de cada muro de ladrillo	
Largo	1.2 m
Ancho	0.28 m
Altura	1.5 m

Tabla 4.3: Características del tinaco	
Diámetro	1.12 m
Altura	1.36 m
Capacidad	1,100 l
Peso	0.027 t

Cálculo de pesos para la estructura del tinaco.

Peso de los muros de tabique:

$$W_{muros} = \left(0.210 \frac{t}{m^2}\right) \times (1.2 \text{ m}) \times (1.5 \text{ m}) \times (3 \text{ muros}) = 1.134 \text{ t}$$

Peso de la losa del tinaco.

$$W_{losa t} = (1.2 \text{ m}) \times (1.2 \text{ m}) \times (0.12 \text{ m}) \times \left(2.4 \frac{t}{m^3}\right) = 0.415 \text{ t}$$

Tabla 4.4: Peso asociado al tinaco y su estructura

Peso del tinaco	0.027 t
Peso del agua	1.100 t
Peso de los muros	1.134 t
Peso de la losa del tinaco	0.415 t
Total	2.67 t

Tabla 4.5: Carga muerta de la losa de azotea

Material	Espesor (m)	Peso/Volumen t/m ³	Carga Total t/m ²
Enladrillado	0.02	1.5	0.03
Mortero	0.03	2.1	0.063
Relleno	0.09	1.6	0.144
Losa del tinaco	0.12	2.4	0.288
Plafón de yeso	0.02	1.5	0.03
Total			0.559

Tabla 4.6: Carga total de servicio

Carga muerta	0.559 t/m ²
Carga adicional	0.08 t/m ²
Carga variable	0.1 t/m ²
Carga total	0.739 t/m²

Exposición, desarrollo y solución numérica del problema

Marco conceptual: Teoría clásica de placas

Metodología: Desplazamiento y Método de Navier

Formulación: Problema de valores en la frontera.

Se requiere resolver la ecuación biarmónica sujeta a las condiciones (2.46).

Se toman:

$$1) D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$2) q(x, y) = \begin{cases} 3.973 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} & (x, y, 0) \in \text{área de la losa bajo el muro eje 1 - 1} \\ 3.973 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} & (x, y, 0) \in \text{área de la losa bajo el muro eje 2 - 2} \\ 0.739 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} & (x, y, 0) \in \text{área de la losa concarga de servicio} \end{cases}$$

El problema en cuestión se resuelve en tres etapas.

- i. Etapa No 1: Se resuelve el PVF: Muro en el eje 1-1
- ii. Etapa No 2: Se resuelve el PVF: Muro en el eje 2-2.
- iii. Etapa No 3: Se resuelve el PVF para la Carga de servicio utilizando (2.46).

Etapa No. 1: Muro en el eje 1-1

En la figura 4.6 se muestra la disposición del muro izquierdo de la losa:

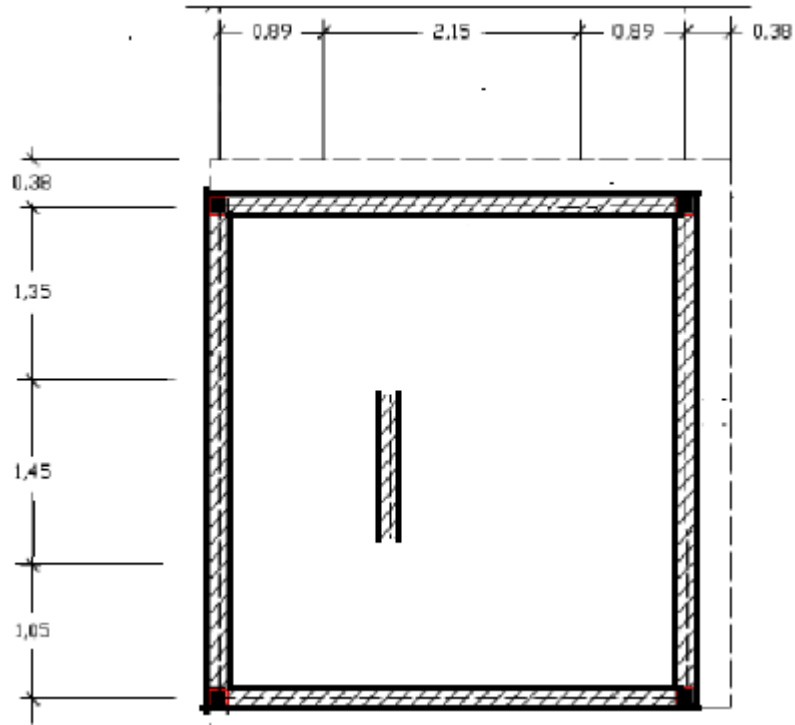


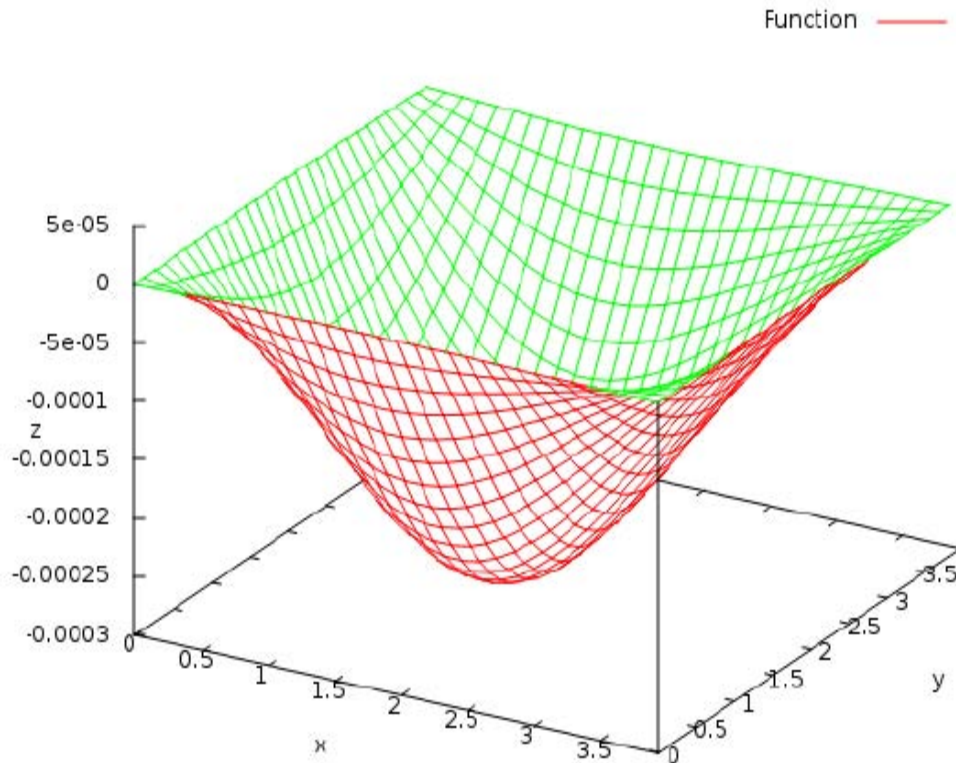
FIGURA 4.6: Disposición del muro eje 1-1

En este caso la flexión se determina por la siguiente expresión:

$$W(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^p \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi u}{2a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi v}{2b}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (4.1)$$

Aquí las coordenadas del centro baricéntrico de la losa son (ξ, η) siendo por su parte $u = 0.28 \text{ m}$ el ancho del muro y $v = 1.20 \text{ m}$ el largo del muro.

De aquí se obtiene la gráfica 4.1 para el campo de desplazamientos con el uso del software libre wxMaxima.



GRÁFICA 4.1: Campo de desplazamientos del muro en el eje 1-1.

Etapa No. 2: Muro en el eje 2-2

En esta etapa, la flexión se obtiene con la fórmula (4.1) pero se debe ajustar el parámetro ξ .

Las leyes de las deflexiones recíprocas de Maxwell y Betti toman la presente etapa redundante, pero se incluye estimando el provecho que aporta en el campo del análisis numérico, la verificación es independiente de los cálculos.

En la figura 4.7 se muestra la colocación del muro derecho.

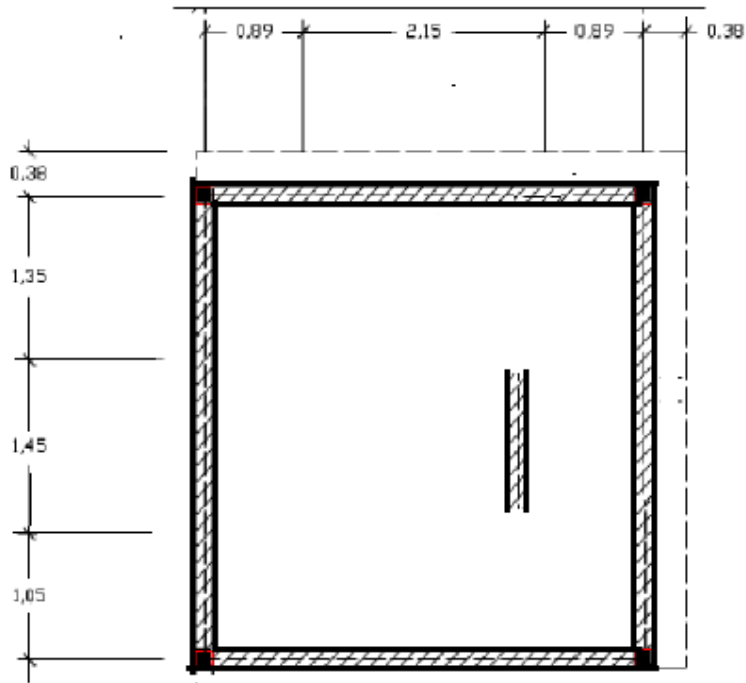
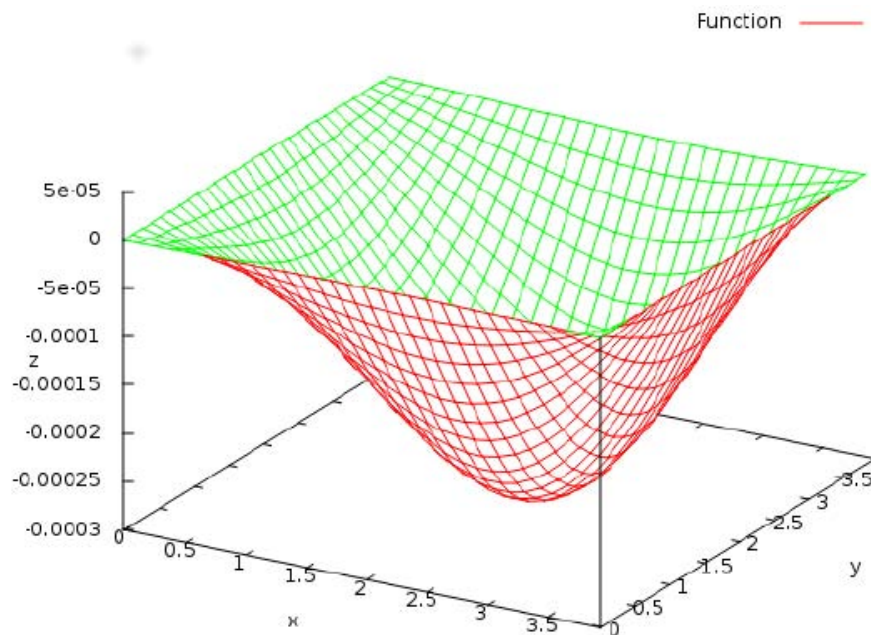


FIGURA 4.7: Disposición del muro eje 2-2

En la gráfica 4.2 se muestra el campo de los desplazamientos cuando el muro del tinaco se ubica en el eje 2-2.



GRÁFICA 4.2: Campo de desplazamientos del muro en el eje 2-2.

Etapas conjuntas No. 1 y No. 2

En la figura 4.8 se ilustra la disposición de los muros izquierdo derecho en la losa.

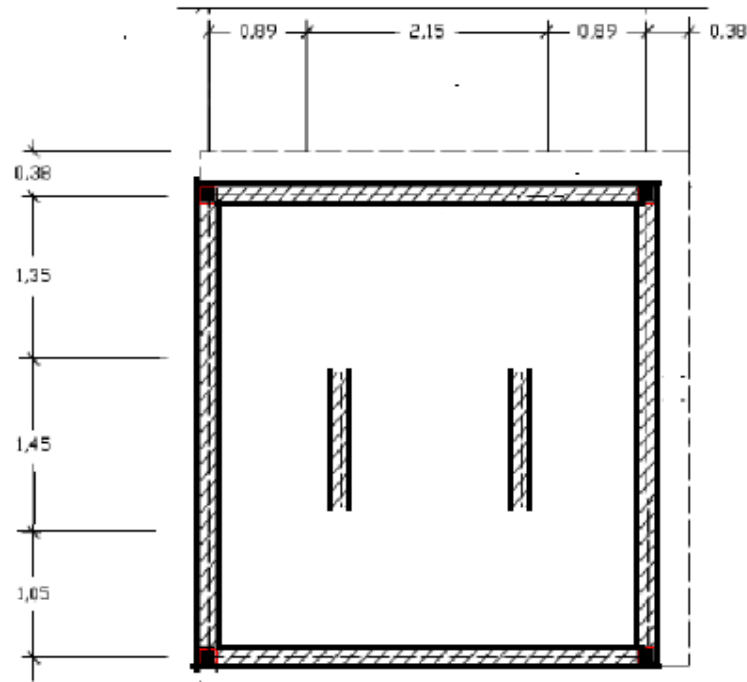
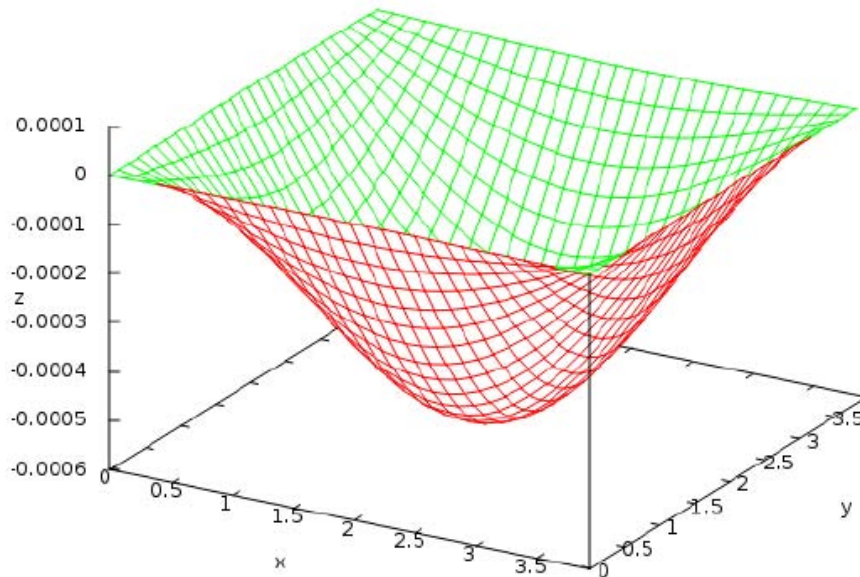


FIGURA 4.8: Muro de azotea ejes 1-1 y 2-2

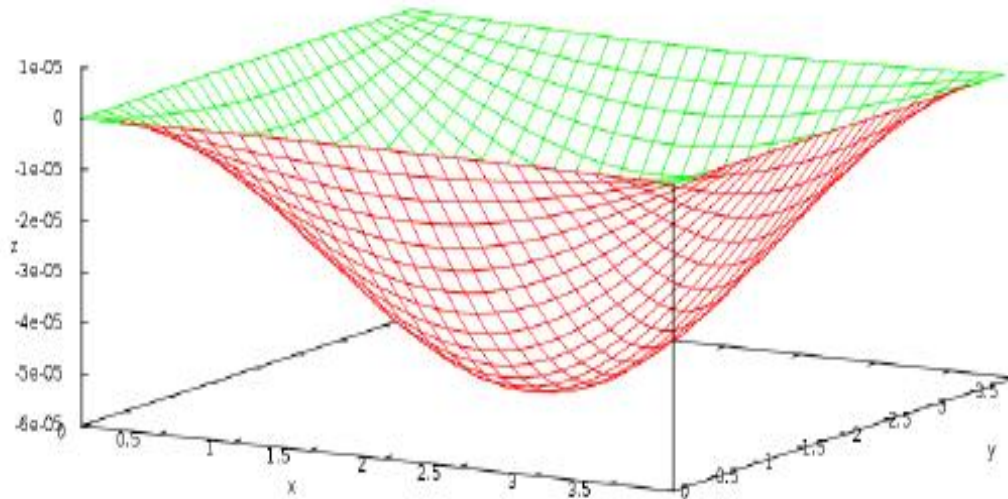
La gráfica 4.3 muestra el campo de los desplazamientos estimando simultáneamente las etapas No. 1 y No. 2.



GRÁFICA 4.3: Disposición de los muros: Ejes 1-1 y 2-2

Etapa No. 3: Carga de Servicio.

Seguidamente se incluye la gráfica 4.4 que ilustra el campo de los desplazamientos para el caso de la carga de servicio.



GRÁFICA 4.4: Etapa No 3; Carga de servicio

El valor máximo del desplazamiento vertical de la losa se sitúa en el centro geométrico de la losa ($a/2, b/2$).

De acuerdo al principio de superposición es igual a la suma del desplazamiento provocado por la acción conjunta de los dos muros que sostienen al tinaco y, además, la carga de servicio los resultados se muestran en la tabla 4.7.

Tabla 4.7: Desplazamiento vertical de la losa en el punto ($a/2, b/2$)	
Desplazamiento máximo de la losa: Dos muros	$5.4705025 \times 10^{-4} \text{ m}$
Desplazamiento máximo de la losa: Carga de servicio	$5.826198 \times 10^{-5} \text{ m}$
Total	$6.05312 \times 10^{-4} \text{ m}$

Toda vez determinados las deflexiones, se deducen las magnitudes momentos M_x, M_y y M_{xy} con base en las respectivas curvaturas (2.28).

Y de las mismas se pueden encontrar las relaciones entre esfuerzos y momentos (.2.37) escogiendo $z=h/2$.

En el punto donde se presente el máximo del desplazamiento, es decir en centro baricéntrico, se obtuvieron los siguientes valores para los esfuerzos de la losa en cuestión.

En la tabla 4.8 se puede ver que los esfuerzos de trabajo no son los mismos en la dirección x y en la dirección y y esto se debe a que la losa de la azotea como se mencionó al principio de este capítulo es de configuración rectangular y no cuadrada, como se puede apreciar el método de Navier aplicado a estructuras más complejas funciona bien en cuestiones de pre diseño de estructuras, cabe aclarar que esta es sólo una parte del trabajo que se busca hacer a futuro, el siguiente paso es proporcionar una calculadora de cargas de tal manera que el usuario sólo tenga que dar las especificaciones de la carga y en automático el programa pueda calcular cantidades de interés como lo son desplazamientos, momentos y esfuerzos además de poder desplegar las respectivas gráficas.

Tabla 4.8: Esfuerzos en el baricentro de la losa	
σ_x	122.5 kg/cm ²
σ_y	113.3 kg/cm ²
τ_{xy}	0.0 kg/cm ²

5. PLACAS CIRCULARES

5.1. MARCO TEÓRICO PARTE B

En este capítulo se presentan las leyes de transformación de la ecuación de placas (2.35) en coordenadas polares así como los momentos y los esfuerzos de corte con el objetivo de replantear el problema de valores en la frontera visto en la sección (2.6).

5.2. TRANSFORMACIÓN DE LA ECUACIÓN DE GERMAIN-LAGRANGE

La forma de obtener el cambio de coordenadas es comenzar por definir las coordenadas polares (r, θ) las cuales están dadas por (5.1)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (5.1)$$

$$0 \leq r < \infty \text{ y } 0 \leq \theta < 2\pi$$

Y las relaciones inversas por (5.2)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (5.2)$$

Posteriormente se utiliza la regla de la cadena para encontrar las primeras y segundas derivadas parciales de $u_z = w$.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Con ayuda de (5.1) y (5.2) y por simplicidad se denotará $\sin \theta = S\theta$ y $\cos \theta = C\theta$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = C\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{S\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = S\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{C\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (5.3)$$

Para calcular las segundas derivadas parciales hay que aplicar dos veces los operadores de derivada parcial que se obtienen de (5.3)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{S\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = S\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{C\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = C\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{S\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Desarrollando las derivadas se llega a:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{S(2\theta)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{S^2\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{S(2\theta)}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{S^2\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = S^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{S(2\theta)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{C^2\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{S(2\theta)}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{C^2\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{S(2\theta)}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{C(2\theta)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{S(2\theta)}{2r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{C(2\theta)}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{S(2\theta)}{2r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (5.4)$$

De aquí se tomó $C^2\theta = \cos^2\theta$, $S^2\theta = \sin^2\theta$, $C(2\theta) = \cos(2\theta)$ y $S(2\theta) = \sin(2\theta)$

Para simplificar la notación.

Sumando las primeras dos ecuaciones se tiene el Laplaciano en coordenadas polares.

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (5.5)$$

Ahora se reescribe la ecuación de Germain-Lagrange en coordenadas polares.

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (5.6)$$

O en forma desarrollada.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (5.7)$$

5.3. DETERMINACIÓN DE MOMENTOS Y ESFUERZOS DE CORTE

En esta sección se obtendrán las fórmulas de los momentos y esfuerzos los cuales son indispensables en la determinación de las condiciones de contorno.

Para comenzar se necesitan las reglas de transformación para tensores de orden uno (vectores) y tensores de orden dos (matrices).

$$\mu_{i'} = U_{i'}^a \mu_a \text{ primer orden (vector)} \quad (5.8)$$

$$\mu_{i'j'} = U_{i'}^a U_{j'}^b \mu_{ab} \text{ segundo orden (matriz)} \quad (5.9)$$

Donde las “ U ” representan las matrices asociadas a la transformación

Para obtener la matriz asociada a la transformación se considera el vector de posición \mathbf{r} .

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

Siendo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ los vectores de la base canónica, posteriormente se procede a sustituir el cambio de coordenadas en el vector de posición.

$$\mathbf{r} = rC\theta\mathbf{e}_1 + rS\theta\mathbf{e}_2$$

Se calculan las derivadas parciales del vector de posición con respecto a (r, θ) y se normalizan los vectores.

$$\mathbf{e}_r = C\theta\mathbf{e}_1 + S\theta\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_\theta = -S\theta\mathbf{e}_1 + C\theta\mathbf{e}_2 \quad (5.10)$$

Estos son los vectores unitarios de las coordenadas polares, de (5.10) se obtiene la matriz de transformación.

$$U_i^a = \begin{pmatrix} \mathbb{e}_1 \cdot e_r & \mathbb{e}_1 \cdot e_\theta \\ \mathbb{e}_2 \cdot e_r & \mathbb{e}_2 \cdot e_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

La cual coincide con la matriz de rotación.

Utilizando las fórmulas (5.8), (5.9) y (5.11) se encuentran las ecuaciones para transformar los esfuerzos verticales (vector) y los momentos (matriz) de coordenadas cartesianas a polares.

$$\begin{aligned} Q_r &= C\theta Q_x + S\theta Q_y \\ Q_\theta &= -S\theta Q_x + C\theta Q_y \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$M_r = M_x C^2\theta + M_y S^2\theta + 2M_{xy}(S\theta)(C\theta),$$

$$M_\theta = M_x S^2\theta + M_y C^2\theta - 2M_{xy}(S\theta)(C\theta),$$

$$M_{r\theta} = -M_x(S\theta)(C\theta) + M_y(S\theta)(C\theta) + 2M_{xy}(C^2\theta - S^2\theta).$$

O en función del ángulo doble:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{M_x + M_y}{2} + \frac{M_x - M_y}{2} C(2\theta) + M_{xy} S(2\theta) \\ M_\theta &= \frac{M_x + M_y}{2} - \frac{M_x - M_y}{2} C(2\theta) - M_{xy} S(2\theta) \\ M_{r\theta} &= \frac{M_y - M_x}{2} S(2\theta) + M_{xy} C(2\theta) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Combinando (2.28), el conjunto de ecuaciones (5.4) y estos resultados se sustituyen en (5.13), se obtienen los momentos.

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \quad M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \\ M_{r\theta} &= -D(1 - \nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Por último las componentes del tensor de esfuerzos se pueden relacionar con los momentos a través de.

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3}z, \quad \sigma_\theta = \frac{12M_\theta}{h^3}z, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{12M_{r\theta}}{h^3}z; \quad (5.15)$$

Al combinar las ecuaciones (2.36), y (8.12) y utilizando la regla de la derivación compuesta.

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 u_z), \quad Q_\theta = -\frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 u_z) \quad (5.16)$$

5.4. CONDICIONES DE FRONTERA PARA PLACAS CIRCULARES

a) Para el borde sujetado en $r = r_0$.

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

b) Borde simplemente apoyado en $r = r_0$.

$$w = 0, \quad M_r = 0$$

c) Borde libre en $r = r_0$.

$$M_r = 0, \quad Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = 0$$

5.5. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE GERMAIN-LAGRANGE PARA PLACAS CIRCULARES.

En esta sección se buscará la solución general de la ecuación (5.7) para posteriormente utilizar dicho resultado en la resolución de problemas en la sección subsecuente.

Comencemos por resolver la parte homogénea de (5.7).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = 0$$

Para esto se supone que la ecuación se puede resolver por separación de variables donde la flexión de la placa va a estar dada por.

$$w(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) = R(r)e^{b\theta} \quad (5.17)$$

Siendo b un parámetro que debe ser determinado.

Para este objetivo las derivadas están dadas por la siguiente fórmula:

$$\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial r^n \partial \theta^m} w = b^m R^{(n)}(r) e^{b\theta}; \quad n, m = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5.18)$$

Donde $R^{(n)}(r)$ representa la n -ésima derivada de R con respecto a r , si n o m valen "cero" significa que no se aplica la derivación parcial con respecto a esa variable, entonces $R^{(0)}(r) = R(r)$.

Al calcular las derivadas utilizando (5.18) y después de reducir términos semejantes se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de coeficientes variables donde la variable independiente es " r ".

$$R'''' + \frac{2}{r} R'''' + \frac{2b^2 - 1}{r^2} R'' + \frac{1 - 2b^2}{r^3} R' + \frac{b^2(4 + b^2)}{r^4} R = 0 \quad (5.19)$$

Si esta última ecuación se multiplica por r^4 se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de Cauchy –Euler.

$$r^4 R'''' + 2r^3 R''' + (2b^2 - 1)r^2 R'' + (1 - 2b^2)rR' + b^2(4 + b^2)R = 0 \quad (5.20)$$

la cual se puede reducir a una ecuación diferencial de coeficientes constantes mediante el cambio de variable $r = e^z$.

Utilizando la regla de la cadena se calculan las derivadas de R con respecto a r .

$$R'(r) = \frac{1}{r} \frac{dR}{dz}$$

$$R''(r) = \frac{1}{r^2} \left[\frac{d^2R}{dz^2} - \frac{dR}{dz} \right]$$

$$R'''(r) = \frac{1}{r^3} \left[\frac{d^3R}{dz^3} - 3 \frac{d^2R}{dz^2} + 2 \frac{dR}{dz} \right]$$

$$R''''(r) = \frac{1}{r^4} \left[\frac{d^4R}{dz^4} - 6 \frac{d^3R}{dz^3} + 11 \frac{d^2R}{dz^2} - 6 \frac{dR}{dz} \right]$$

Al combinar estos resultados y posteriormente de ser reemplazados en (8.4.4) se llega a (5.21).

$$\frac{d^4R}{dz^4} - 4 \frac{d^3R}{dz^3} + (4 + 2b^2) \frac{d^2R}{dz^2} - 4b^2 \frac{dR}{dz} + b^2(4 + b^2)R = 0 \quad (5.21)$$

La cual se resuelve con el cambio de variable $R = e^{az}$, y así se reduce la ecuación diferencial en su polinomio característico.

$$a^4 - 4a^3 + (4 + 2b^2)a^2 - 4b^2a + b^2(4 + b^2) = 0$$

Con esto el problema se reduce a calcular las cuatro raíces del polinomio en a .

$$a^2(a^2 - 4a + 4) + 2a^2b^2 + b^2(-4a + 4 + b^2) = 0$$

$$a^2(a - 2)^2 + 2a^2b^2 + b^2[(a - 2)^2 + (b^2 - a^2)] = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - 2)^2 + 2a^2b^2 + b^2(b^2 - a^2) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - 2)^2 + b^2(a^2 + b^2) = 0$$

$$(a^2 + b^2)[(a - 2)^2 + b^2] = 0 \quad (5.22)$$

De (5.22) se obtienen fácilmente las raíces las cuales son:

$$a_{1,2} = \pm ib$$

$$a_{3,4} = 2 \pm ib$$

Como se comentó al principio de la sección b es un parámetro a determinar entonces podemos despejar a b de las raíces:

$$b_{1,2} = \pm ia$$

$$b_{3,4} = \pm i(a - 2)$$

Se deben considerar sólo soluciones periódicas en θ y estas son obtenidas escogiendo $b = in$, donde n es entero. Lo cual implica que también “ a ” es una cantidad entera.

Entonces finalmente los valores de a y b se expresan en términos de cantidades enteras:

$$a_{1,2} = \pm n ,$$

$$a_{3,4} = 2 \pm n ,$$

$$b_{1,2} = \pm in ,$$

$$b_{3,4} = \pm i(n - 2); \quad n = 0,1,2,3 \dots \quad (5.23)$$

Con los resultados anteriores se puede encontrar la flexión de la placa en coordenadas polares (5.17). Sólo hay que encontrar $R(r)$ deshaciendo los cambios de variable y posteriormente multiplicando por $\theta(\theta) = e^{b\theta}$ se calcula $w(r, \theta)$.

$$R(r) = e^{az} = e^{aln(r)} = r^a$$

Existen cuatro raíces del polinomio característico (valores de a) y cada uno proporciona una solución linealmente independiente de (5.20) por lo tanto se expresa R como la combinación lineal de $\{r^{a_1}, r^{a_2}, r^{a_3}, r^{a_4}\}$ y para cada n hay una función R que resuelve el problema por lo tanto conviene escribir $R = R_n$.

$$R_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n} + c_n r^{2+n} + d_n r^{2-n} \quad (5.24)$$

Pero esta fórmula no es aplicable a todos los valores de n , ya que si se tienen raíces repetidas no se obtienen funciones linealmente independientes, en este caso para ecuaciones de tipo Euler-Cauchy si " a " es una raíz de multiplicidad " k " para construir las $k-1$ funciones linealmente independientes restantes se debe multiplicar la solución conocida por $(\ln(r))^{k-1}$.

Las raíces repetidas se dan sólo en dos casos, y estos son cuando $n = 0$ y $n = 1$.

Para $n = 0$, $a_1 = a_2 = 0$ es una raíz de multiplicidad 2 y $a_3 = a_4 = 2$ es otra raíz de multiplicidad 2 entonces $R_0(r)$ está dada por (5.25).

$$R_0(r) = a_0 + b_0 \ln(r) + c_0 r^2 + d_0 r^2 \ln(r) \quad (5.25)$$

Para $n = 1$, $a_1 = a_4 = 1$ es una raíz de multiplicidad 2 entonces $R_1(r)$ se representa como.

$$R_1(r) = a_1 r + b_1 r^{-1} + c_1 r^3 + d_0 r \ln(r) \quad (5.26)$$

Salvo estas dos excepciones la fórmula (8.4.8) es aplicable para $n = 2, 3, 4, \dots$

Para obtener la flexión se calcula $\Theta(\theta) = e^{b\theta} = e^{in\theta}$ entonces theta se escribe como una combinación lineal de.

$$\Theta_n(\theta) = \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta \quad (5.27)$$

La solución general de la ecuación de Germain-Lagrange para placas circulares es:

$$w(r, \theta) = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{R}_n(r) \operatorname{sen} n\theta + u_z(q), \quad (5.28)$$

Cuyo resultado $u_z(q)$ es una solución particular para resolver la parte homogénea y R_n se obtienen con (5.29):

$$\begin{aligned} R_0(r) &= A_0 + B_0 \ln(r) + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln(r), \\ R_1(r) &= A_1 r + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_0 r \ln(r), \\ R_n(r) &= A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{2+n} + D_n r^{2-n}; \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para \widetilde{R}_n se obtienen expresiones análogas.

Por otra parte cuando $n = 0$ la parte angular presenta el mismo problema que la radial, algunos autores consideran la construcción de soluciones linealmente independientes en la parte angular para esto basta multiplicar por tetha la parte angular a la solución completa se le conoce como solución de Michell.

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= A_0 \theta + A'_0 + B_0 \ln(r) + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln(r) \\ &\quad + (A_1 r + B_1 r^{-1} + B_1' r \theta + C_1 r^3 + D_0 r \ln(r)) \cos(\theta) \\ &\quad + (A_1 r + B_1 r^{-1} + B_1' r \theta + C_1 r^3 + D_0 r \ln(r)) \operatorname{sen}(\theta) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{2+n} + D_n r^{2-n}) \cos(n\theta) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{2+n} + D_n r^{2-n}) \operatorname{sen}(n\theta) + u_z(q) \end{aligned}$$

Para los problemas polares-simétricos la solución no depende del ángulo θ y la flexión adquiere la forma.

$$w(r) = A_0 + B_0 \ln(r) + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln(r) + u_z(q) \quad (5.30)$$

Este tipo de soluciones se pueden desarrollar a partir de funciones de Airy ϕ de la forma $\phi = \phi(r, \theta)$.

De (5.14) y (5.16) los esfuerzos se determinan por las fórmulas:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + v \frac{d^2 w}{dr^2} \right),$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} (\nabla^2 u_z) = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{M_r + M_\theta}{1 + \nu} \right)$$

De la ecuación (5.6) se tiene:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D} \quad (5.31)$$

Por integración sucesiva se puede encontrar $u_z(q)$ que es la solución particular de la ecuación de placas.

Para una carga constante uniformemente distribuida se determina $u_z(q)$ utilizando (5.31).

$$q(r) = q_0, \quad u_z(q) = \frac{qr^4}{64D} \quad (5.32)$$

6. RESULTADOS

6.1. PLACA PERFORADA SOMETIDA A UN CAMPO DE TRACCIÓN

A continuación se procederá a analizar el problema de una placa con perforación circular utilizando la solución de Michell y una hoja de cálculo que se anexará en los apéndices de este trabajo .[La solución a éste problema también se puede encontrar mediante funciones de Airy].

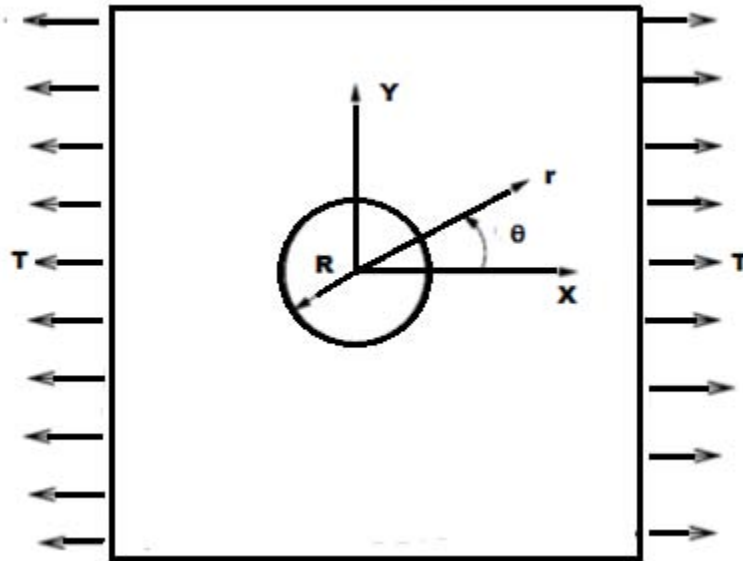


Figura 6.1 Una placa con perforación circular sometida a tensión T.

Para resolver este problema se considera que las coordenadas de la placa son (X, Y) mientras que las coordenadas de la perforación son (r, θ) , además el agujero de la perforación tiene un radio R , tomando esto en cuenta las condiciones de frontera se muestran a continuación:

$$\text{En } r = R \quad q_r = q_\theta = 0; \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$$

$$\text{Cuando } r \rightarrow \infty \quad \sigma_x \rightarrow T; \quad \tau_{xy} \rightarrow 0; \quad \sigma_y \rightarrow 0$$

Como w es un potencial se pueden descartar las constantes de integración esto no afecta el cálculo de los esfuerzos y las tensiones entonces.

$$w_1 = \frac{T y^2}{2} = \frac{T}{2} r^2 \text{sen}^2 \theta$$

Como no hay ningun término semejante en la solución de Michell se utiliza la identidad del ángulo doble para el coseno.

$$w_1 = \frac{T}{4} (r^2 - r^2 \cos(2\theta))$$

Esta es la solución sin perturbación:

Solución con perturbación.

Para obtener la solución perturbada se deben cumplir las siguientes condiciones:

- a) Los términos deben tener la misma estructura que la solución sin perturbar por ejemplo: $\cos(2\theta)$
- b) Los nuevos términos deben ser proporcionales a r^{-n}
- c) Si se considera que la solución con perturbación es w_2 entonces

$$w(r, \theta) = w_1 + w_2$$

Tomando en cuenta los puntos anteriores, los términos que son de nuestro interés tomar en cuenta de la solución de Michell tienen esta estructura:

$$\{\ln(r), \theta, r^{-2+2} \cos(2\theta), r^{-2} \cos(2\theta)\}$$

$$w(r, \theta) = \frac{T r^2}{4} - \frac{T r^2 \cos(2\theta)}{4} + A \ln(r/R) + B\theta + C \cos(2\theta) + D r^{-2} \cos(2\theta)$$

El cálculo de las constantes se simplifica utilizando los momentos de flexión en vez de los esfuerzos (5.15)

Utilizando la hoja de cálculo y aplicando las condiciones de frontera encontramos que:

$$a \rightarrow -\frac{TR^2(\nu - 1)}{\nu + 1}, \quad b \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \frac{TR^2(\nu - 1)}{\nu + 1} \quad d \rightarrow \frac{TR^4(3\nu - 1)}{12(\nu + 1)}$$

Después de un proceso de algebraico la solución se reduce a.

$$w(r, \theta) = \frac{Tr^2}{4} + [(1 - 3\nu)R^4 + 6(\nu - 1)r^2R^2 - 3(\nu + 1)r^4] \left[\frac{T\cos(2\theta)}{12r^2(\nu + 1)} \right] - \frac{TR^2}{2} \left[\frac{\nu + 1}{\nu - 1} \right] \ln\left(\frac{r}{R}\right) \quad (6.1)$$

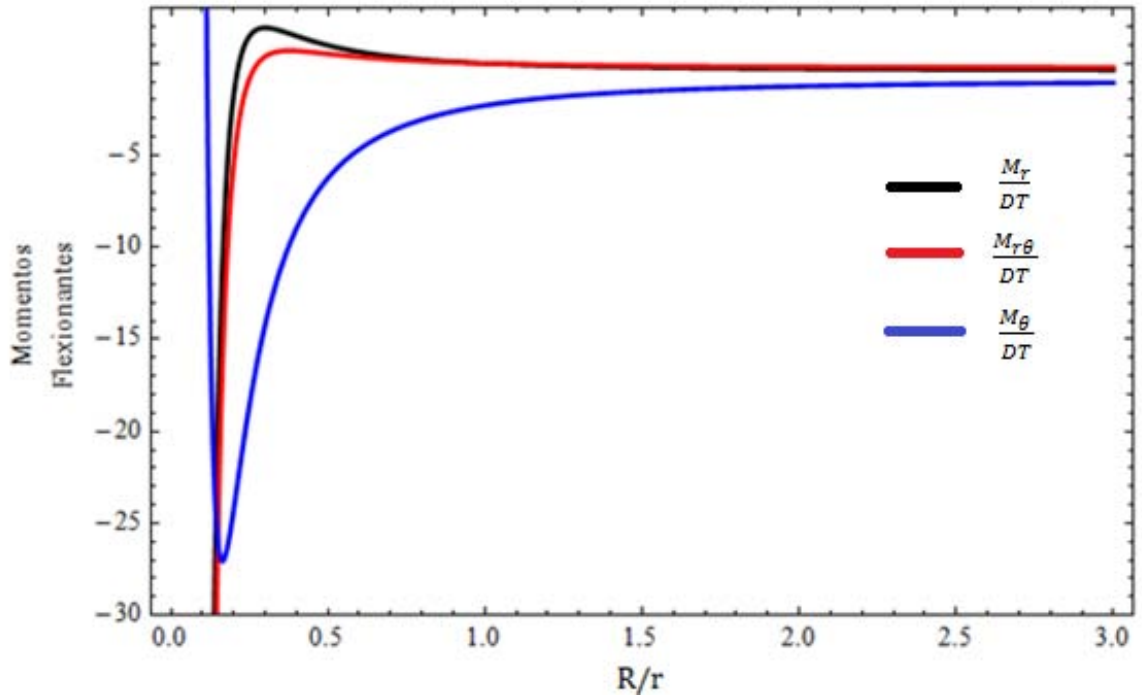
Y los momentos de flexión conforme a (5.14) resultan ser:

$$M_r = -\frac{DT(r^2 - R^2)}{2r^2} \left\{ (\nu + 1) - \left(\frac{\nu - 1}{\nu + 1}\right) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} + \left(1 - 3\frac{R^2}{r^2} \right) \nu \right) \cos(2\theta) \right\},$$

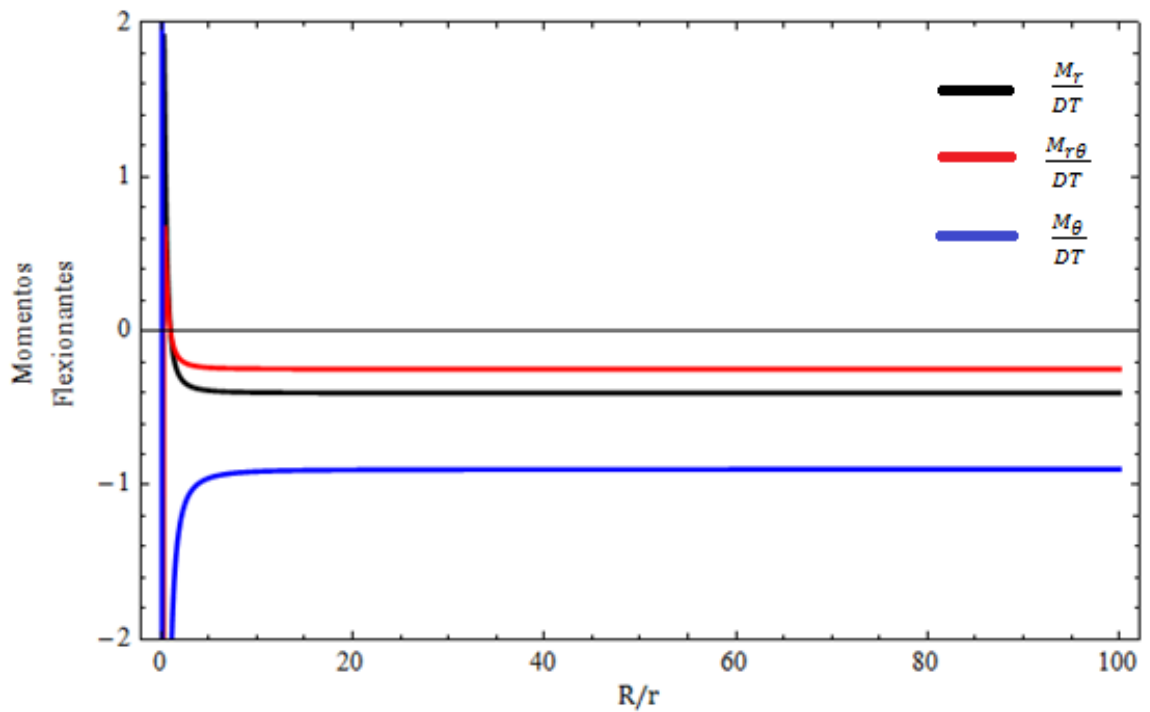
$$M_{r\theta} = \frac{DT(r^2 - R^2)}{2r^4} \left[\frac{\nu - 1}{\nu + 1} \right] [r^2(\nu + 1) + R^2(3\nu - 1)] \sin(2\theta),$$

$$M_\theta = \frac{-DT}{2r^2} \left\{ (r^2 + R^2)(\nu + 1) - \left(\frac{\nu - 1}{\nu + 1}\right) \left(4R^2 + r^2(\nu + 1) + \frac{R^4}{r^2}(3\nu - 1) \right) \cos(2\theta) \right\}. \quad (6.2)$$

Para la realización de las gráficas 6.1 y 6.2 se consideró la relación entre el orificio y la longitud de la placa de uno a cien se puede apreciar que en torno al orificio el comportamiento de los momentos es asintótico mientras que conforme el radio crece los esfuerzos tienden a ser constantes.



GRÁFICA 6.1: Momentos flexionantes vs R/r [-] en torno al origen de la perforación.



GRÁFICA 6.2: Momentos flexionantes vs R/r [-] alejamiento del origen.

7. PLACA CIRCULAR SOBRE UNA BASE ELÁSTICA DE WINKLER

En este capítulo se presenta la respuesta de una placa sobre una base elástica pero lo más importante es que investigando diversas fuentes entre las más destacadas en este tópico [3-7] se ha encontrado que la ecuación diferencial parcial es satisfecha por diversas funciones lo cual hace confusa la elección de la solución general y más aun cada una de las tres citas mencionadas presentan soluciones diferentes, por lo cual una contribución a este trabajo es esclarecer la correlación entre soluciones presentando desarrollos útiles a lo largo de este capítulo.

En presencia de una base de Winkler, la reacción de la base elástica (en particular el suelo) es proporcional a la flexión de la placa en el punto examinado.

$$p = -ku_z \quad (7.1)$$

Donde k (N/m^3) es el coeficiente de flexibilidad de la base elástica

La ecuación diferencial de la flexión de una placa sobre una base de Winkler se transforma en:

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w = \frac{q(r, \theta) - kw}{D} \quad (7.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w + \frac{k}{D} w = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (7.3)$$

Para simplificar la ecuación se propone utilizar una variable adimensional $\rho = r/r_0$ ó bien $r = r_0\rho$.

Empleando la regla de la derivación compuesta en (7.3) se tiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \frac{1}{r_0^4} w + \frac{k}{D} w = \frac{q(\rho, \theta)}{D}$$

Con lo que se obtiene el valor de r_0 igualando coeficientes:

$$\frac{1}{r_0^4} = \frac{k}{D} \rightarrow r_0 = \sqrt[4]{\frac{D}{k}}$$

Lo cual reduce la ecuación de placas de la forma siguiente:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w + w = \frac{q(\rho, \theta)}{k} \quad (7.4)$$

Al igual que la solución de Michell se propone un desarrollo en series para la carga y la solución $w(\rho, \theta)$:

$$w(\rho, \theta) = \sum_{n=1} w_n(\rho) \begin{Bmatrix} \text{sen}(n\theta) \\ \text{cos}(n\theta) \end{Bmatrix},$$

$$q(\rho, \theta) = \sum_{n=1} q_n(\rho) \begin{Bmatrix} \text{sen}(n\theta) \\ \text{cos}(n\theta) \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

Por ortogonalidad una vez más los coeficientes $q_n(\rho)$ en el intervalo $\{-\pi, \pi\}$ se calculan de la siguiente forma.

$$q_n(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(\rho, \theta) \begin{Bmatrix} \text{sen}(n\theta) \\ \text{cos}(n\theta) \end{Bmatrix} d\theta \quad (7.6)$$

Lo consecuente es reemplazar el conjunto de ecuaciones (9.2.5) en (9.2.4) e igualando los coeficientes de cada miembro se obtiene una ecuación en derivadas ordinarias.

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right)^2 w_n(\rho) + w_n(\rho) = \frac{q_n(\rho)}{k} \quad (7.7)$$

Nótese que al sólo depender w_n de ρ , (8.7) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria, antes que nada, al igual que en la sección 5.5 se considera la parte homogénea de (9.2.7).

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\right)^2 w_n(\rho) + w_n(\rho) = 0 \quad (7.8)$$

A continuación se define el operador $L^2 = \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\right)^2$ con el propósito de reducir la ecuación anterior:

$$(L^2 + 1)w_n(\rho) = 0$$

$$(L + i)(L - i)w_n(\rho) = 0$$

Donde “ i ” es la unidad compleja, el hecho de cumplir con esta igualdad nos lleva a resolver 2 ecuaciones diferenciales:

$$Lw_n(\rho) + iw_n(\rho) = 0 \quad \text{y} \quad Lw_n(\rho) - iw_n(\rho) = 0 \quad (7.9)$$

O en forma desarrollada:

$$\frac{d^2 w_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw_n}{d\rho} + \left(i - \frac{n^2}{\rho^2}\right) w_n(\rho) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2 w_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw_n}{d\rho} - \left(i + \frac{n^2}{\rho^2}\right) w_n(\rho) = 0$$

Se multiplica por ρ^2 cada ecuación:

$$\rho^2 \frac{d^2 w_n}{d\rho^2} + \rho \frac{dw_n}{d\rho} + (i\rho^2 - n^2)w_n(\rho) = 0$$

$$\rho^2 \frac{d^2 w_n}{d\rho^2} + \rho \frac{dw_n}{d\rho} - (i\rho^2 + n^2)w_n(\rho) = 0 \quad (7.10)$$

Dividiendo las ecuaciones obtenidas por i y sustituyendo la correspondiente raíz $x = \sqrt{\pm i}\rho$ cada una de las ecuaciones (9.2.8) se pueden reducir a ecuaciones de Bessel.

Al ser “ n ” una cantidad entera, para garantizar la independencia lineal de las soluciones se obtienen funciones de Bessel de orden “ n ” de primer y segunda especie.

$$w_n(\rho) = a_n J_n(\sqrt{i}\rho) + b_n Y_n(\sqrt{i}\rho) + c_n J_n(\sqrt{-i}\rho) + d_n Y_n(\sqrt{-i}\rho) \quad (7.11)$$

Estas funciones son de variable compleja así como las constantes pero la flexión debe ser una función de variable real por otra parte si se consideran la parte real e imaginaria de cada función tendríamos cuatro funciones para la parte real y cuatro para la parte imaginaria cosa que tampoco es aceptable porque no se podrían satisfacer las condiciones de frontera lo que resta es encontrar combinaciones lineales de las funciones en variable compleja que conduzcan a funciones de variable real.

Prosiguiendo con la idea anterior se presentan los desarrollos:

$$J_n(\sqrt{\pm i}\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{\pm i}\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \quad (7.12)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{\pm i})^{2k+n} (\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(e^{\pm \frac{i\pi}{4}}\right)^{2k+n} (\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{\pm \frac{i\pi}{4}(2k+n)} (\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos\left(\frac{2k+n}{4}\pi\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{2k+n}{4}\pi\right) (\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

$$J_n(\sqrt{\pm i}\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos\left(\frac{2k+n}{4}\pi\right) (\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \pm i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \operatorname{sen}\left(\frac{2k+n}{4}\pi\right) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \quad (7.13)$$

$$\operatorname{Re}\left(J_n(\sqrt{i}\rho)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos\left(\frac{2k+n}{4}\pi\right) (\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

$$\operatorname{Im}\left(J_n(\sqrt{i}\rho)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \operatorname{sen}\left(\frac{2k+n}{4}\pi\right) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

Una vez separadas las partes real e imaginarias se procede a encontrar las combinaciones lineales de las funciones de Bessel que reproduzcan las mismas:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(J_n(\sqrt{i}\rho)\right) &= \frac{J_n(\sqrt{i}\rho) + J_n(\sqrt{-i}\rho)}{2}, \\ \operatorname{Im}\left(J_n(\sqrt{i}\rho)\right) &= \frac{J_n(\sqrt{i}\rho) - J_n(\sqrt{-i}\rho)}{2i} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Por simplicidad se denotarán a las partes reales e imaginarias de las funciones de Bessel de primera especie de la siguiente manera:

$$A_n(\rho) = \operatorname{Re}\left(J_n(\sqrt{i}\rho)\right) \quad \text{y} \quad B_n(\rho) = \operatorname{Im}\left(J_n(\sqrt{i}\rho)\right)$$

Lo que sigue es realizar el mismo procedimiento para las funciones de Bessel de segunda especie o funciones de Neumann es decir separar las partes (real y compleja).

$$\begin{aligned} Y_n(\sqrt{\pm i}\rho) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \ln(\sqrt{\pm i}\rho/2) + \gamma \right\} J_n(\sqrt{\pm i}\rho) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \left(\sqrt{\pm i}\rho/2\right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{ \Phi(k) + \Phi(n+k) \} \frac{(\sqrt{\pm i}\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Donde $\gamma = 0.5772156 \dots$ es la constante de Euler y

$$\Phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}, \quad \Phi(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
Y_n(\sqrt{\pm i\rho}) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{\rho}{2}\right) + \gamma \pm i\frac{\pi}{4} \right\} \{A_n(\rho) \pm iB_n(\rho)\} \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \left\{ \cos\left(\frac{2k-n}{4}\pi\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{2k-n}{4}\pi\right) \right\} (\rho/2)^{2k-n} \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{\Phi(k) + \Phi(n+k)\} \left\{ \cos\left(\frac{2k+n}{4}\pi\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{2k+n}{4}\pi\right) \right\} \frac{(\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(Y_n(\sqrt{\pm i\rho})\right) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{\rho}{2}\right) + \gamma \right\} A_n(\rho) - \frac{1}{2} B_n(\rho) \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \left\{ \cos\left(\frac{2k-n}{4}\pi\right) \right\} (\rho/2)^{2k-n} \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{\Phi(k) + \Phi(n+k)\} \left\{ \cos\left(\frac{2k+n}{4}\pi\right) \right\} \frac{(\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(Y_n(\sqrt{i\rho})\right) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{\rho}{2}\right) + \gamma \right\} B_n(\rho) + \frac{1}{2} A_n(\rho) \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{2k-n}{4}\pi\right) \right\} (\rho/2)^{2k-n} \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{\Phi(k) + \Phi(n+k)\} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{2k+n}{4}\pi\right) \right\} \frac{(\rho/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}
\end{aligned}$$

Gracias a la propiedad de los complejos que el conjugado del producto es igual al producto de los conjugados es viable encontrar una combinación lineal para las partes real e imaginaria de las funciones de Neumann.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(Y_n(\sqrt{\pm i\rho})\right) &= \frac{Y_n(\sqrt{+i\rho}) + Y_n(\sqrt{-i\rho})}{2}, \\
\operatorname{Im}\left(Y_n(\sqrt{\pm i\rho})\right) &= \frac{Y_n(\sqrt{+i\rho}) - Y_n(\sqrt{-i\rho})}{2i} \tag{7.16}
\end{aligned}$$

Para facilitar la notación una vez más se se sustituye $C_n(\rho) = \operatorname{Re}\left(Y_n(\sqrt{\pm i\rho})\right)$ y $D_n(\rho) = \operatorname{Im}\left(Y_n(\sqrt{\pm i\rho})\right)$ con ayuda del conjunto de ecuaciones (9.2.14) y (9.2.16) la solución general de la parte radial se esbosa en (7.17).

$$w_n(\rho) = \alpha_n A_n(\rho) + \beta_n B_n(\rho) + \gamma_n C_n(\rho) + \delta_n D_n(\rho) + w_p(\rho) \tag{7.17}$$

De la expresión anterior, $w_p(\rho)$ es una solución particular de (7.7) para obtener la solución completa se sustituye (7.17) en (7.5).

El problema de la solución (7.17) radica en problemas de placas donde ρ tiende a infinito ya que $A_n(\rho), B_n(\rho), C_n(\rho)$ y $D_n(\rho)$ también tienden a infinito lo cual nos imposibilita el uso de (7.17), lo que se espera es que a medida que aumenta el radio, la flexión disminuya, como es bien sabido cualquier combinación lineal de las funciones de Bessel de primer y segunda especie también proporcionan una solución de (7.10). En el estudio de las funciones de Bessel esto nos lleva a introducir las funciones cilíndricas de tercera especie o funciones de Hankel, las cuales se esbosan en (7.18):

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(\sqrt{i}\rho) &= J_n(\sqrt{i}\rho) + iY_n(\sqrt{i}\rho), \\ H_n^{(2)}(\sqrt{-i}\rho) &= J_n(\sqrt{-i}\rho) - iY_n(\sqrt{-i}\rho) \end{aligned} \quad (7.18)$$

Una vez más como se ha hecho incapie se requieren funciones de variable real y gracias a los desarrollos obtenidos en (7.14) y (7.16) se pueden obtener las partes real e imaginarias de la primer igualdad de (7.18).

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(\sqrt{i}\rho) &= \text{Re} \left(J_n(\sqrt{i}\rho) \right) + i \text{Im} \left(J_n(\sqrt{i}\rho) \right) + i \left(\text{Re} \left(Y_n(\sqrt{i}\rho) \right) + i \text{Im} \left(Y_n(\sqrt{i}\rho) \right) \right) \\ \text{Re} \left(H_n^{(1)}(\sqrt{i}\rho) \right) &= \text{Re} \left(J_n(\sqrt{i}\rho) \right) - \text{Im} \left(Y_n(\sqrt{i}\rho) \right) \\ \text{Im} \left(H_n^{(1)}(\sqrt{i}\rho) \right) &= \text{Im} \left(J_n(\sqrt{i}\rho) \right) + \text{Re} \left(Y_n(\sqrt{i}\rho) \right) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Sustituyendo (7.14) y (7.16) en (7.19) se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(H_n^{(1)}(\sqrt{i}\rho) \right) &= \frac{H_n^{(1)}(\sqrt{i}\rho) + H_n^{(2)}(\sqrt{-i}\rho)}{2} \\ \text{Im} \left(H_n^{(1)}(\sqrt{i}\rho) \right) &= \frac{H_n^{(1)}(\sqrt{i}\rho) - H_n^{(2)}(\sqrt{-i}\rho)}{2i} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Así para simplificar la notación $F_n(\rho) = \text{Re} \left(H_n^{(1)}(\sqrt{i}\rho) \right)$ y $G_n(\rho) = \text{Im} \left(H_n^{(1)}(\sqrt{i}\rho) \right)$

Entonces otra solución aparte de (7.17) es.

$$w_n(\rho) = \alpha_n A_n(\rho) + \beta_n B_n(\rho) + \kappa_n F_n(\rho) + \lambda_n G_n(\rho) + w_p(\rho) \quad (7.21)$$

La ventaja de estas funciones en la circunstancia descrita anteriormente es que son finitas cuando su argumento tiende a infinito. no por esto se debe descartar la solución (7.17) es decir **la solución a escoger estará determinada por las condiciones que se deseen satisfacer.**

7.1. PLACA INFINITA CON SIMETRÍA POLAR SOBRE UNA BASE WINKLER

El objetivo es encontrar el campo de flexión y los momentos de una placa con simetría polar y base Winkler sometida a una carga $q(r) = p$.

Las condiciones de frontera van a estar dadas por:

$$C1: w(r) \text{ es finito, en } r \rightarrow 0$$

$$C2: w(r) \text{ es finito cuando } r \rightarrow \infty$$

$$C3: Q_r = -\frac{P}{2\pi r} \text{ cuando } r \rightarrow 0$$

Para los problemas con simetría polar se utiliza la ecuación (7.8) con $n = 0$ ya que la flexión es independiente del ángulo θ , los momentos flexionantes y los esfuerzos de corte en términos de ρ se transforman como es mostrado en seguida.

$$M_r = -\frac{D}{r_0^2} \left[\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \nu \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right],$$

$$M_\theta = -\frac{D}{r_0^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} + \nu \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right),$$

$$Q_r = -\frac{D}{r_0^3} \frac{d}{d\rho} (\nabla_\rho^2 u_z), \quad (7.22)$$

La solución (7.21) se transforma en.

$$w_0(\rho) = \alpha_0 A_0(\rho) + \beta_0 B_0(\rho) + \kappa_0 F_0(\rho) + \lambda_0 G_0(\rho) + w_p(\rho) \quad (7.23)$$

A las funciones $A_0(\rho)$ y $B_0(\rho)$ se les conoce como las funciones $Ber(\rho)$ y $Bei(\rho)$, las funciones $F_0(\rho) = \operatorname{Re}\left(H_0^{(1)}(\sqrt{i}\rho)\right)$ y $G_0(\rho) = \operatorname{Im}\left(H_0^{(1)}(\sqrt{i}\rho)\right)$.

Debido a que las funciones $Ber(\rho)$ y $Bei(\rho)$ tienden a infinito conforme a que su argumento lo hace el sentido físico del problema nos orilla hacer cero las constantes α_0 y β_0 .

Remplazando $n = 0$ en las expresiones (7.13), (7.15) y (7.20) y al reemplazar las primeras dos mencionadas en (7.20) acorde a las definiciones (7.18).

$$F_0(\rho) = \frac{A_0(\rho)}{2} - \frac{2}{\pi} \left[R_1(\rho) + B_0(\rho) \left(\ln\left(\frac{\rho}{2}\right) + \gamma \right) \right],$$

$$G_0(\rho) = \frac{B_0(\rho)}{2} + \frac{2}{\pi} \left[R_2(\rho) + A_0(\rho) \left(\ln\left(\frac{\rho}{2}\right) + \gamma \right) \right] \quad (7.24)$$

Con:

$$R_1(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Phi(2k+1) \frac{(\rho/2)^{4k+2}}{((2k+1)!)^2},$$

$$R_2(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Phi(2k+2) \frac{(\rho/2)^{4k+4}}{((2k+1)!)^2} \quad (7.25)$$

Cuando $\rho \rightarrow 0$ $F_0(\rho)$ y $G_0(\rho)$ tienen las siguientes aproximaciones:

$$F_0(\rho) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \rho^2 \ln\left(\frac{\rho}{2}\right),$$

$$G_0(\rho) \sim \frac{2}{\pi} \left(\ln\left(\frac{\rho}{2}\right) + \gamma \right) \quad (7.26)$$

La flexión debe ser medible en el centro de la placa, cuando $\rho \rightarrow 0$ $G_0(\rho)$ tiende a menos infinito así que para que la primer condición se satisfaga $\lambda_0 = 0$ y la solución particular que satisface (7.7) con $n = 0$ es $w_p(\rho) = P/k$, lo que nos lleva a concluir que.

$$w_0(\rho) = \kappa_0 F_0(\rho) + \frac{P}{k}$$

Sólo queda encontrar la constante κ_0 con la condición asociada al esfuerzo de corte vertical, a simple vista parece ser un proceso largo ya que hay que aplicar el laplaciano a la función F y posteriormente derivarla con respecto a ρ , se podría preparar una hoja de cálculo para dicha labor pero en vez de eso en este escrito se proporciona un resultado bastante interesante para facilitar el cálculo.

La función $H_0^{(1)}(\sqrt{i}\rho) = F_0(\rho) + iG_0(\rho)$ satisface la ecuación (7.9) la cual se muestra como.

$$(\nabla^2 + i)H_0^{(1)}(\sqrt{i}\rho) = 0 \quad (7.27)$$

De aquí al tomar $n = 0$ el operador L se transforma en el laplaciano en coordenadas polares.

$$(\nabla^2 + i)(F_0(\rho) + iG_0(\rho)) = 0$$

$$\nabla^2 F_0(\rho) - G_0(\rho) + i((F_0(\rho) + \nabla^2 G_0(\rho))) = 0$$

Para satisfacer la igualdad tanto la parte real como la imaginaria se igualan a cero esto nos lleva al siguiente resultado:

$$\nabla^2 F_0(\rho) = G_0(\rho), \quad \nabla^2 G_0(\rho) = -F_0(\rho) \quad (7.28)$$

Al satisfacer $J_n(\sqrt{i}\rho) = A_0(\rho) + iB_0(\rho)$ la ecuación (7.9) también se sigue el mismo resultado:

$$\nabla^2 A(\rho) = B_0(\rho), \quad \nabla^2 b_0(\rho) = -A_0(\rho) \quad (7.29)$$

Con esto se facilita el cálculo de κ_0 .

Cuando $r \rightarrow 0$:

$$Q_r = -\frac{P}{2\pi r} = -\frac{P}{2\pi r_0 \rho} = -\frac{D\kappa_0}{r_0^3} \frac{d}{d\rho} (\nabla^2 F_0) = -\frac{D\kappa_0}{r_0^3} \frac{d}{d\rho} (G_0)$$

$$\kappa_0 = \frac{Pr_0^2}{2\pi D \rho G_0'}$$

Empleando una de las expresiones mostradas en (7.26):

$$G_0' \sim \frac{2}{\pi \rho}$$

$$\kappa_0 = \frac{Pr_0^2}{4D}$$

Así el campo de flexiones está dado por.

$$w_0(\rho) = \frac{Pr_0^2}{4D} F_0(\rho) + \frac{P}{k} \quad (7.30)$$

Para calcular los momentos se combinan las dos primeras ecuaciones mostradas en (7.22):

$$M_r + M_\theta = -\frac{D}{r_0^2} (1 + \nu) \nabla^2 w_0(\rho)$$

$$\nu M_r - M_\theta = -\frac{D}{r_0^2} (\nu^2 - 1) \left[\frac{1}{\rho} \frac{dw_0(\rho)}{d\rho} \right],$$

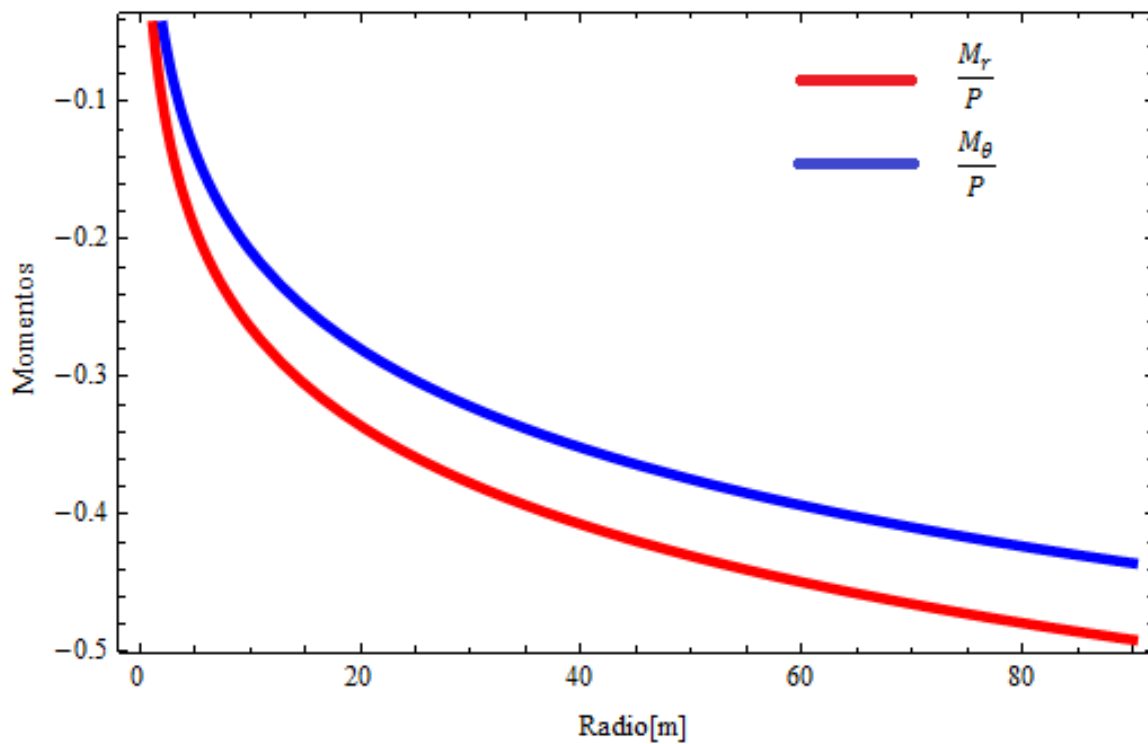
Con ayuda de estas ecuaciones, las propiedades mostradas para el laplaciano y las aproximaciones (7.26):

$$M_r = -\frac{P}{4\pi} \left((1 + \nu) \left(\ln \left(\frac{\rho}{2} \right) + \gamma \right) + \frac{1}{2} (1 - \nu) \right)$$

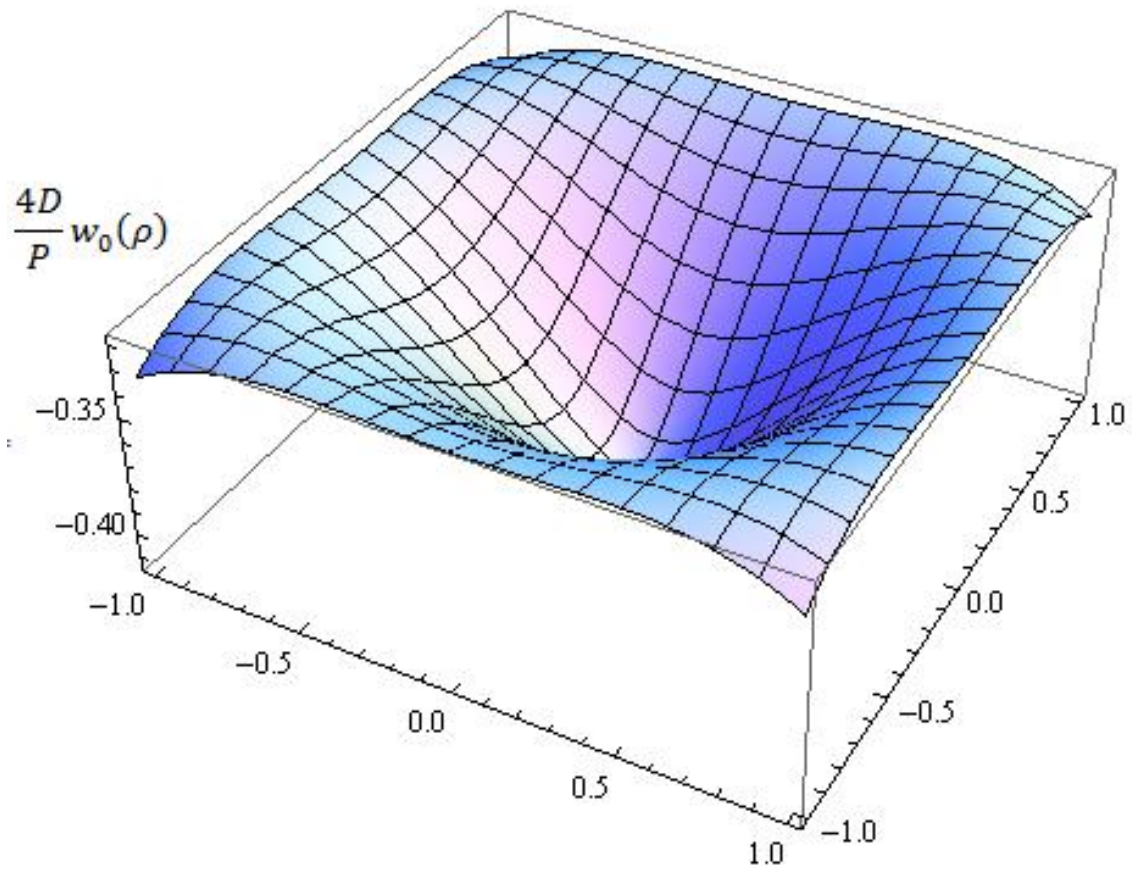
$$M_\theta = -\frac{P}{4\pi} \left((1 + \nu) \left(\ln \left(\frac{\rho}{2} \right) + \gamma \right) - \frac{1}{2} (1 - \nu) \right) \quad (7.31)$$

Finalmente se muestran los gráficos 7.1 y 7.2 del campo de flexión y momentos respectivamente para una placa de acero puesta sobre un suelo arcilloso, compacto y saturado.

Tabla 7.1: Datos de base elástica y placa	
Espesor de la placa	$h = 150 \text{ mm}$
Módulo de elasticidad	$E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$
Constante de reacción del suelo	$K = 94.2 \times 10^6 \text{ N/m}^3$



Gráfica 7.1: Momentos flexionantes vs radio [m].



GRÁFICA 7.2: Flexión de la placa en torno al origen.

8. SÍNTESIS DE RESULTADOS

En el capítulo 3 se muestra la flecha para una placa de acero sometida a distintos tipos de carga. La flexión máxima se obtiene al someter la placa a carga uniforme, este resultado es valioso ya que el reglamento del D.F. [2]. maneja cargas uniformemente repartidas tanto para muros como para losas, en este trabajo se sugiere manejar por separado las cargas y utilizar el principio de superposición con lo cual es factible manejar sistemas de construcción más complejos además de probar diferentes configuraciones variando los parámetros en las hojas de cálculo presentadas.

Para placas con configuración circular, en el caso de placas con perforación se encuentran discontinuidades de tipo logarítmico y conforme el radio crece los momentos flexionantes se vuelven constantes si la placa presenta simetría polar los momentos torsionantes son cero.

Por último se estudió el problema de placas sobre bases elásticas problema que es importante a considerar para estudio de cimentaciones, este objetivo se conquistó mediante el desarrollo de funciones de Bessel de primera y segunda especie así mismo se obtuvieron de manera natural los desarrollos para las funciones de Kelvin ($ber(p)$ y $bei(p)$) y para las funciones de Hankel, se encontraron propiedades interesantes que propugnan la evaluación de las condiciones de frontera

Para bases Winkler se encontró que la flexión de la placa está íntimamente ligada a la relación entre la carga y la constante de suelo.

9. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan y analizan diversas soluciones, para problemas perfectamente acotados, basándose en la teoría de la elasticidad considerando un sólido, elástico lineal, homogéneo e isotrópico, vinculando los modelos de la teoría de placas delgadas con sus correspondientes algoritmos usando, además, las facilidades computacionales de los sistemas Mathematica® y **el uso de software libre wxMaxima**. Igualmente, principal atención se ha concedido a los principios de la computación verificable, soslayando el encadenamiento de prolongados procesos deductivos no constatables. De este modo las secuelas obtenidas se concretaron en fórmulas fácilmente constatables mediante procedimientos de derivación o integración.

Las ecuaciones diferenciales fueron deducidas con base en el denominado método de los desplazamientos, distinguiéndose los desplazamientos de las cargas externas asociadas así como las deformaciones de los cuerpos en estudio y los esfuerzos internos resultantes.

Por su parte, se manipularon tres conjuntos de ecuaciones: el agrupamiento de las ecuaciones cinemáticas, las ecuaciones constitutivas estableciendo las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones y finalmente las relaciones de equilibrio relacionando los esfuerzos con las cargas externas.

Las subsecuentes substituciones de unas en otras desembocaron en un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden mismas que combinadas quedaron reemplazadas por una ecuación de cuarto orden denominada ecuación biarmónica; ésta última se resuelve recurriendo a series de Fourier dobles en el caso de placas rectangulares y combinaciones de series de Fourier con funciones radiales en el caso de placas circulares.

Por otra parte, las soluciones numéricas, salvo casos excepcionales como en el caso de cargas concentradas, convergen rápidamente. No se acotaron en la forma

tradicional los errores de aproximación de las series de Fourier, pues una abultada experimentación computacional valida los resultados.

La teoría y ejemplos aquí presentados presentan las siguientes utilidades a las losas delgadas de configuración rectangular o circular bajo diversos tipos de cargas laterales y sujetas a las condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann o Robin:

1. Proporcionan a los interesados una valiosa herramienta para visualizar de inmediato las flexiones de las losas bajo muy diversos tipos de carga y condiciones en la frontera.
2. Facilitan el pre diseño de las losas al dotar a los interesados de sencillas fórmulas para estimar la deflexión de las losas en los puntos de interés.
3. La amplitud de la experimentación computacional otorga al analista valiosos recursos para alcanzar una oportuna y conveniente apreciación de las bondades y lindes de las normas en vigor y su adecuación en las aplicaciones.
4. Constituye un poderoso auxiliar en los procesos educativos.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Ventsel, E. & Krauthammer, T. (2001). *Thin Plates & Shell, Theory Analysis & Applications*. Washington D.C.: CRC Press. pp. [17-141].
2. *Reglamento de construcción del D.F.* Publicado en la gaceta del Distrito Federal el 12 de enero del 2015. <http://cgservicios.df.gob.mx/prontuario/index.php?MPrincipal=mlocal&apartado=2>
3. Baricz Á. (1994). *Generalized Bessel functions of the first kind*. Berlin: Springer. pp. [12-78].
4. Rekach, V. (1978). *Problemas de la teoría de la elasticidad*. U.R.R.S: Mir. pp. [174-203].
5. Wunderlich, W. (2002). *Mechanics of Structures Variational and Computational Methods*. Washington D.C.: CRC. pp. [757-807].
6. Korenev, B. (2002). *Analytical Methods & Special Functions, Bessel Functions their Applications*. New York: Mc Graw Hill. pp.[48-215].
7. Timoshenko, S.P. & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. New York: Mc Graw Hill. pp.[180-225].
8. Timoshenko, S.P. (1956). *Strength of Materials*. New York: Van Nostrand Company. pp[48-70]
9. Landau, L.D. (1959). *Theory of Elasticity*. New York: Pergamon Press. pp. [1-97]
10. Mansfield, E.H., (1959). *The Bending and Stretching of Plates*, New York: Cambridge University Press. pp. [33-75].
11. Mansfield, E.H. & Kleeman, P.W. (1955). *A Large-Deflection Theory for Thin Plates*. Aircraft Engineering: New York. pp.[30-42].
12. Timoshenko, S. & Goodier, J. (1970). *Theory of elasticity*. New York: Mc Graw Hill. pp.[12-32].
13. Watson, G. (1980). *A treatise on the theory of Bessel functions*. London: Cambridge University Press. pp. [15-132].
14. Wunderlich, W. (1983). *Mixed models for plates and shells: principles-elements-examples, in hybrid and mixed finite element models*. New York: Wiley. pp. [67-101].
15. Jansen, F. (2000). *Uniqueness for the Solutions of Elastic Thin Plates and Shallow Shells as well as their Contact Problem with Half Space*.

- septiembre 18,2015, de Journal of Applied Mathematics & Mechanics. Sitio web: <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02459012>.
16. Menzel, A. (2002). *Modelling and Computation of Geometrically Nonlinear Anisotropic Inelasticity*. Germany: Ed Kaiserslautern. pp. [12-20].
 17. Blaauwendraad, J. (2010). *Plates & FEM*. Dordrecht, Heidelberg: Springer. pp. [81-107].
 18. Barber, J. (2002). *Solid Mechanics and its Applications "Elasticity"*. Ontario, Canada: Ed Kluwer Academic Publishers. pp. [12-67, 97-121].
 19. Gallo Ortíz, G. , Espino Márquez, L. & Olvera Montes, A. (2002). *Análisis y Diseño Estructural de Casas-Habitación*. México: Mc Graw Hill. pp.[41-62]
 20. Zenkour, A. (2003). Exact. octubre 3,2015, de Elsevier, *Mathematical Modeling. Exact Mixed-Classical Solutions for the Bending Analysis of Shear Deformable Rectangular Plates*. Sitio web: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X03000465>.
 21. *Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto y mampostería*. (2010). (N.T.C). <http://cgservicios.df.gob.mx/prontuario/vigente/745.pdf>.
 22. Soedel, W. (2005). *Vibration of Shells and Plates*. New York: Ed Marcel Dekker Inc. pp.[7-50]
 23. Lurie, A.I. (2005). *Theory of elasticity*. Berlin, Heiderberg: Springer. pp. [27-81].
 24. Ortíz, B. (1998). *Elasticidad*. Madrid, España: Mc Graw Hill. Pp.[18-272].
 25. Szilard, D. (2004). *Theories and Applications of Plate Analysis*. New Jersey: John Wiley. pp.[62-139].
 26. Rezaeepazhand, J. & Jafari, M. (2006). Stress. octubre 20,2015, de Elsevier, *Applied Mathematics Stress Analysis of Perforated Composite Plates, Composite Structures*. Sitio web: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822305002801>.
 27. Mindlin, R. (2006). *An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates*. University of Nebraska-Lincoln U.S.A.: World scientific. pp. [7-20].
 28. González, O. & Fernández, F. (2006). *Aspectos Fundamentales del "CONCRETO REFORZADO"*. México D.F.: Ed Limusa. pp. [507-540].

29. Sadd, M. (2009). *Elasticity Theory Applications and Numerics*. Boston, U.S.A.: Elsevier. pp[49-103]
30. Civalek, O. (2007). *Nonlinear Analysis of Thin Rectangular Plates on Winkler-Pasternak Elastic Foundations*. noviembre 8, 2015, de Elsevier, Applied Mathematics. Sitio web: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X0500257X>.
31. Wai-Fah, C. & Salah, E. *Understanding Structural Engineering*. Boca Raton, Florida: CRC Press. pp.[17-82].
32. Chyanbin, H. (2011). *Anisotropic Elastic Plates*. New York: Springer. pp. [23-47].
33. Roble, S. & Sensale, B.. (2011). *Winkler Plates by the Boundary Knot Method*. diciembre 6, 2015, de Congress of Applied Mechanics Sitio web: <http://www.aamech.org/PACAM11/papers/sympC-advancesBEM/PAC0159-RobleS.pdf>.
34. Woo, J & Won-Bae, N. (2011). *Effect of Cutout Orientation on Stress Concentration of Perforated Plates with Various Cutout and Bluntness*. agosto 5, 2015, de International Journal of Ocean System Engineering Sitio web: http://ocean.kisti.re.kr/download/volume/kcore/E1GPBT/2011/v1n2/E1GPBT_2011_v1n2_95.pdf.
35. Kawadkar, D., Bhoje, D. & Khamankar, S.. (2012). *Evaluation of Stress Concentration in Plate with Cutout and its Experimental Verification*. agosto 18, 2015, de International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA) Sitio web: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.643.4112&rep=rep1&type=pdf>.
36. Daimi, S. & Bhalchandra, S, *Analysis of Thermal Buckling of Ceramic-Metal Functionally Graded Plates Using Refined Third Order Shear Deformation Theory*. De Journal of Engineering Research and Applications, August 2014. pp [129-133].

MURO: Desplazamiento de la losa

Objetivo: Estimar el campo de desplazamientos de la losa de azotea bajo acción del muro izquierdo.

Datos de la losa: Lados: $a = 3.925$ m, $b = 3.85$ m, espesor: $h = 0.15$ m
Lado a paralelo a la fachada principal (eje x)
Lado b perpendicular a la fachada principal (eje y)

$E = 221359$ kg/cm² = 21708247524 Pa
 $\nu = 0.18$ Coeficiente de Poisson

Origen de coordenadas: Esquina superior izquierda.

Fachada Posterior

```

0-----> eje x
|
| XX
| XX M
| XX U
| XX R
| XX O
v
eje y

```

Fachada Principal

DATOS MURO: Carga uniformemente distribuida: $q = 3973.214$ kg/cm²
 $q = 38965$ Pa

$\xi = 1.3625$
 $\eta = 1.925$

Centro del Muro No. 1: (1.3625,1.925)

$\eta = 3.925/2 - (1.20/2) = 2.5625$, $\xi = 3.85/2 = 1.925$
 $u = 0.28$ Ancho del muro Intervalo de integración eje x: [-0.28/2, 0.28/2]
 $v = 1.20$ Largo del muro Intervalo de integración eje y: [-1.20/2, 1.20/2]


```
-----
|1 Pa = 0.0000102 kg_per_cm2 |
|1 kg_per_cm2 = 98068 Pa |
-----
```

Condiciones numéricas

```
--> declare(m,integer)$
      declare(n,integer)$
      declare(k,integer)$
      declare(p,integer)$
      assume(b>0)$
      assume(a>0)$
      facts()$
```

Rigidez cilíndrica de la placa por flexión

```
--> D(E,h, nu):=(E*h^3)/(12*(1 - nu^2))$
```

Constantes de Fourier

T2A: Segundo término ecuación desplazamiento de la losa: sumas (parciales)

```
--> T2A(k,p):=sum(
  sum((sin((m*%pi*xi)/a)*sin((n*%pi*eta)/b)*sin((m*%pi*u)/(2*a))*
    sin((n*%pi*v)/(2*b))*sin((m*%pi*x)/a)*sin((n*%pi*y)/b))/
  (m*n*(m^2/a^2+n^2/b^2)^2),n,1,p),
  m,1,k);
```

T1: Primer término ecuación desplazamiento de la losa: sumas (parciales)

```
--> T1:(16*q)/(D(E,h,nu)*%pi^6)$
```

Suma parcial: cuatro términos

```
--> T2(m,n,x,y):=
  (sin((m*%pi*xi)/a)*sin((n*%pi*eta)/b)*sin((m*%pi*u)/(2*a))*sin((n*%pi*v)/
  (2*b))*sin((m*%pi*x)/a)*sin((n*%pi*y)/b))/(m*n*(m^2/a^2+n^2/b^2)^2)$
```

$$s1D(x,y):=T2(1,1,x,y)+ T2(1,2,x,y)+T2(1,3,x,y)$$$

$$s2D(x,y):=T2(2,1,x,y)+ T2(2,2,x,y)+T2(3,1,x,y)+T2(3,3,x,y)$$$

Suma parcial

$$\text{--> } sp(x,y):= s1D(x,y)+s2D(x,y)$$$

Parametros

$$\text{--> } a:3.925$$$

$$b:3.85$$$

$$xi:1.3625$$$

$$eta:1.925$$$

$$u:0.28$$$

$$v:1.2$$$

$$E:21708247524$$$

$$nu:0.18$$$

$$q:38965$$$

$$h:0.15$$$

Sumas para el muro izquierdo

$$\text{--> } sp(x,y), \text{ numer}$$$

$$suma1(x,y):=(\%o25)$$$

$$suma1(x,y)$$$

$$T2(2,1,0,0), \text{ numer};$$

Sumas para el lado derecho

$$\text{--> } xi:2.5760$$$

$$sp(x,y), \text{ numer}$$$

$$suma2(x,y):= (\%o29)$$$

$$suma(x,y) = suma1(x,y) + suma2(x,y)$$

$$\text{--> } suma(x,y):=suma1(x,y)$$$

Campo de desplazamientos: uz

$$\text{--> } (-16*q)/(D(E,h,nu)*\%pi^6)*suma(x,y), \text{ numer}$$$

MURO: Desplazamiento de la losa

Objetivo: Estimar el campo de desplazamientos de la losa de azotea bajo del muro derecho

Datos de la losa: Lados: $a = 3.925$ m, $b = 3.85$ m, espesor: $h = 0.18$ m
 Lado a paralelo a la fachada principal (eje x)
 Lado b perpendicular a la fachada principal (eje y)

$E = 221359 \text{ kg/cm}^2 = 21708247524 \text{ Pa}$
 $\nu = 0.18$ Coeficiente de Poisson

Origen de coordenadas: Esquina superior izquierda.

Fachada Posterior

```

0-----> eje x
|
| XX
| XX M
| XX U
| XX R
| XX O
v
eje y

```

Fachada Principal

DATOS MURO: Carga uniformemente distribuida: $q = 3973.214 \text{ kg/cm}^2$
 $q = 38965 \text{ Pa}$

$\xi = 1.3625$
 $\eta = 1.925$

Centro del Muro No. 2: (2.5760, 1.925)

$\eta = 3.925/2 - (1.20/2) = 2.5625$, $\xi = 3.85/2 = 1.925$

$u = 0.28$ Ancho del muro Intervalo de integración eje x: $[-0.28/2,$
 $0.28/2]$

$v = 1.20$ Largo del muro Intervalo de integración eje y: $[-1.20/2,$

1.20/2]

```
-----
|1 Pa = 0.0000102 kg_per_cm2 |
|1 kg_per_cm2 = 98068 Pa |
-----
```

Condiciones numéricas

```
--> declare(m,integer)$
      declare(n,integer)$
      declare(k,integer)$
      declare(p,integer)$
      assume(b>0)$
      assume(a>0)$
      facts()$
```

Rigidez cilíndrica de la placa por flexión

```
--> D(E,h, nu):=(E*h^3)/(12*(1 - nu^2))$
```

Constantes de Fourier

T2A: Segundo término ecuación desplazamiento de la losa: sumas (parciales)

```
--> T2A(k,p):=sum(
      sum((sin((m*%pi*xi)/a)*sin((n*%pi*eta)/b)*sin((m*%pi*u)/(2*a))*
      sin((n*%pi*v)/(2*b))*sin((m*%pi*x)/a)*sin((n*%pi*y)/b))/
      (m*n*(m^2/a^2+n^2/b^2)^2),n,1,p),
      m,1,k);
```

T1: Primer término ecuación desplazamiento de la losa: sumas (parciales)

```
--> T1:(16*q)/(D(E,h,nu)*%pi^6)$
```

Suma parcial: cuatro términos

```
--> T2(m,n,x,y):=
      (sin((m*%pi*xi)/a)*sin((n*%pi*eta)/b)*sin((m*%pi*u)/(2*a))*sin((n*%pi*v)/
```

```

(2*b))*sin((m*%pi*x)/a)*sin((n*%pi*y)/b))/(m*n*(m^2/a^2+n^2/b^2)^2)$
s1D(x,y):=T2(1,1,x,y)+ T2(1,2,x,y)+T2(1,3,x,y)$
s2D(x,y):=T2(2,1,x,y)+ T2(2,2,x,y)+T2(3,1,x,y)+T2(3,3,x,y)$

```

Suma parcial

```
--> sp(x,y):= s1D(x,y)+s2D(x,y)$
```

Parametros

```

--> a:3.925$
    b:3.85$
    xi:1.3625$
    eta:1.925$
    u:0.28$
    v:1.2$
    E:21708247524$
    nu:0.18$
    q:38965$
    h:0.15$

```

Sumas para el muro izquierdo

```

--> sp(x,y), numer$
    suma1(x,y):=(%o25)$
    suma1(x,y)$
    T2(2,1,0,0), numer;

```

Sumas para el lado derecho

```

--> xi:2.5760$
    sp(x,y), numer$
    suma2(x,y):= (%o29)$

```

suma(x,y) = suma1(x,y) + suma2(x,y)

```

--> suma(x,y):=T2(1,1,x,y)+ T2(1,2,x,y)+T2(1,3,x,y)
    + T2(2,1,x,y)+ T2(2,2,x,y)+T2(3,1,x,y)+T2(3,3,x,y)$

```

Campo de desplazamientos: uz

MURO: Desplazamiento de la losa

Objetivo: Estimar el campo de desplazamientos de la losa de azotea bajo
accion
ambos muros

Datos de la losa: Lados: $a = 3.925$ m, $b = 3.85$ m, espesor: $h = 0.15$ m
Lado a paralelo a la fachada principal (eje x)
Lado b perpendicular a la fachada principal (eje y)

$E = 221359 \text{ kg/cm}^2 = 21708247524 \text{ Pa}$
 $\nu = 0.18$ Coeficiente de Poisson

Origen de coordenadas: Esquina superior izquierda.

Fachada Posterior

```

0-----> eje x
|
| XX
| XX M
| XX U
| XX R
| XX O
v
eje y

```

Fachada Principal

DATOS MURO: Carga uniformemente distribuida: $q = 3973.214 \text{ kg/cm}^2$
 $q = 38965 \text{ Pa}$

$\xi = 1.3625$
 $\eta = 1.925$

Centro del Muro No. 1: (1.3625,1.925)

Centro del Muro No. 2: (2.5760, 1.925)

$\eta = 3.925/2 - (1.20/2) = 2.5625$, $\xi = 3.85/2 = 1.925$

$u = 0.28$ Ancho del muro Intervalo de integración eje x: [-0.28/2, 0.28/2]

$v = 1.20$ Largo del muro Intervalo de integración eje y: [-1.20/2, 1.20/2]

```
-----
|1 Pa = 0.0000102 kg_per_cm2 |
|1 kg_per_cm2 = 98068 Pa |
-----
```

Condiciones numéricas

```
--> declare(m,integer)$
      declare(n,integer)$
      declare(k,integer)$
      declare(p,integer)$
      assume(b>0)$
      assume(a>0)$
      facts()$
```

Rigidez cilíndrica de la placa por flexión

```
--> D(E,h, nu):=(E*h^3)/(12*(1 - nu^2))$
```

Constantes de Fourier

T2A: Segundo término ecuación desplazamiento de la losa: sumas (parciales)

```
--> T2A(k,p):=sum(
      sum((sin((m*%pi*xi)/a)*sin((n*%pi*eta)/b)*sin((m*%pi*u)/(2*a))*
      sin((n*%pi*v)/(2*b))*sin((m*%pi*x)/a)*sin((n*%pi*y)/b))/
      (m*n*(m^2/a^2+n^2/b^2)^2),n,1,p),
      m,1,k);
```

T1: Primer término ecuación desplazamiento de la losa: sumas (parciales)

```
--> T1:(16*q)/(D(E,h,nu)*%pi^6)$
```

Suma parcial: cuatro términos

```
--> T2(m,n,x,y):=
      (sin((m*%pi*xi)/a)*sin((n*%pi*eta)/b)*sin((m*%pi*u)/(2*a))*sin((n*%pi*v)/
      (2*b))*sin((m*%pi*x)/a)*sin((n*%pi*y)/b))/(m*n*(m^2/a^2+n^2/b^2)^2)$
      s1D(x,y):=T2(1,1,x,y)+ T2(1,2,x,y)+T2(1,3,x,y)$
```

$$s2D(x,y):=T2(2,1,x,y)+ T2(2,2,x,y)+T2(3,1,x,y)+T2(3,3,x,y)\$$$

Suma parcial

$$\text{--> } sp(x,y):= s1D(x,y)+s2D(x,y)\$$$

Parametros

$$\begin{aligned} \text{--> } & a:3.925\$ \\ & b:3.85\$ \\ & xi:1.3625\$ \\ & eta:1.925\$ \\ & u:0.28\$ \\ & v:1.2\$ \\ & E:21708247524\$ \\ & nu:0.18\$ \\ & q:38965\$ \\ & h:0.15\$ \end{aligned}$$

Sumas para el muro izquierdo

$$\begin{aligned} \text{--> } & sp(x,y), \text{ numer\$} \\ & T2(1,1,x,y)+ T2(1,2,x,y)+T2(1,3,x,y) \\ & + T2(2,1,x,y)+ T2(2,2,x,y)+T2(3,1,x,y)+T2(3,3,x,y)\$ \end{aligned}$$

Sumas para el lado derecho

$$\begin{aligned} \text{--> } & xi:2.5760\$ \\ & T2(1,1,x,y)+ T2(1,2,x,y)+T2(1,3,x,y) \\ & + T2(2,1,x,y)+ T2(2,2,x,y)+T2(3,1,x,y)+T2(3,3,x,y)\$ \end{aligned}$$

Campo de desplazamientos: uz

$$\begin{aligned} \text{--> } & (-16*q)/(D(E,h,nu)*\%pi^6)*(\%o26 + \%o28), \text{ numer\$} \\ & \text{plot3d}(\%, [x,-0.01,a], [y, -0.01, b+0.1], [palette,false], [color, red, blue])\$ \end{aligned}$$

Das Ende

$$\text{--> } \text{kill(all);}$$


```

In[1]:= (*PROBLEMA DE PLACAS CON PERFORACIÓN SUJETA A UN CAMPO DE TRACCIÓN*)
W := Tr^2 / 4 * (1 - Cos[2 t]) + a Log[r] + b t + c Cos[2 t] + d / r^2 Cos[2 t];
srr := -k * (D[W, {r, 2}] + v * ((1 / r) * D[W, r] + (1 / r^2) * D[W, {t, 2}]));
stt := -k * ((1 / r) * D[W, r] + (1 / r^2) * D[W, {t, 2}] + v D[W, {r, 2}]);
srt := -k * (1 - v) * (D[(1 / r) * D[W, t], r]);
srrR := Collect[FullSimplify[Limit[srr, r -> R]], Cos[2 t]];
srtR := Collect[FullSimplify[Limit[srt, r -> R]], Sin[2 t]];
eq1 := Coefficient[srrR, Cos[2 t]];
eq2 := Coefficient[srtR, Sin[2 t]];
eq3 := - $\frac{k (2 a (-1 + v) + R^2 T (1 + v))}{2 R^2}$ ;
eq4 :=  $\frac{k (-1 + v) (-2 b R^2)}{2 R^4}$ ;
solucion := TableForm[Solve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0, eq4 == 0}, {a, b, c, d}]];
solucion
A := Limit[W, {a -> - $\frac{R^2 T (1 + v)}{2 (-1 + v)}$ }]];
B := Limit[A, {b -> 0}];
F := Limit[B, {c ->  $\frac{R^2 T (-1 + v)}{2 (1 + v)}$ }]];
G := Limit[F, {d -> - $\frac{-R^4 T + 3 R^4 T v}{12 (1 + v)}$ }]];
srrG := Collect[Expand[
  -k * (D[G, {r, 2}] + v * ((1 / r) * D[G, r] + (1 / r^2) * D[G, {t, 2}])), Cos[2 t]]
sttG := Collect[Collect[Expand[-k * ((1 / r) * D[G, r] +
  (1 / r^2) * D[G, {t, 2}] + v D[G, {r, 2}]), Cos[2 t]], Log[r]];
srtG := Collect[Expand[-k * (1 - v) * (D[(1 / r) * D[G, t], r]), Sin[2 t]];
Column[{Simplify[srrG], Simplify[sttG], Simplify[srtG]};

```

Out[12]/TableForm=

$$a \rightarrow -\frac{R^2 T (1+v)}{2 (-1+v)} \quad b \rightarrow 0 \quad c \rightarrow \frac{R^2 T (-1+v)}{2 (1+v)} \quad d \rightarrow -\frac{-R^4 T + 3 R^4 T v}{12 (1+v)}$$

Collect[Collect[Apart[G], (Cos[2 t]), Log[r]]

$$\left\{ \text{Collect} \left[\frac{r^2 T}{4 (1+v)} + \frac{r^2 T v}{4 (1+v)}, \frac{r^2 T}{4 (1+v)} \right] + \text{FullSimplify} \left[\text{Collect} \left[\left(-\frac{r^2 T}{4 (1+v)} - \frac{R^2 T}{2 (1+v)} + \frac{R^4 T}{12 r^2 (1+v)} - \frac{r^2 T v}{4 (1+v)} + \frac{R^2 T v}{2 (1+v)} - \frac{R^4 T v}{4 r^2 (1+v)} \right) \text{Cos}[2 t], T / (1+v) \right] \right] - \frac{R^2 T (1+v) \text{Log}[r]}{2 (-1+v)} \right\}$$

$$\left\{ \frac{r^2 T}{4} + \left(T (R^4 (1-3v) + 6 r^2 R^2 (-1+v) - 3 r^4 (1+v)) \text{Cos}[2 t] \right) / (12 r^2 (1+v)) - \frac{R^2 T (1+v) \text{Log}[r]}{2 (-1+v)} \right\}$$

Collect[Collect[Apart[srrG], (Cos[2 t]), Log[r]]

$$\left\{ \text{Simplify} \left[\text{Collect} \left[\frac{k T}{2 (-1+v^2)} - \frac{k R^2 T}{2 r^2 (-1+v^2)} + \frac{k T v}{2 (-1+v^2)} - \frac{k R^2 T v}{2 r^2 (-1+v^2)} - \frac{k T v^2}{2 (-1+v^2)} + \frac{k R^2 T v^2}{2 r^2 (-1+v^2)} - \frac{k T v^3}{2 (-1+v^2)} + \frac{k R^2 T v^3}{2 r^2 (-1+v^2)}, \frac{k T}{(-1+v^2)} \right] \right] - \left(k (r^2 - R^2) T (-1+v) (r^2 + R^2 + r^2 v - 3 R^2 v) \text{Cos}[2 t] \right) / (2 r^4 (1+v)) \right\}$$

$$\left\{ -\frac{k (r^2 - R^2) T (1+v)}{2 r^2} - \left(k (r^2 - R^2) T (-1+v) (r^2 + R^2 + r^2 v - 3 R^2 v) \text{Cos}[2 t] \right) / (2 r^4 (1+v)) \right\}$$

sttG

$$\left\{ \text{Simplify} \left[\frac{k T}{2 (-1+v^2)} + \frac{k R^2 T}{2 r^2 (-1+v^2)} + \frac{k T v}{2 (-1+v^2)} + \frac{k R^2 T v}{2 r^2 (-1+v^2)} - \frac{k T v^2}{2 (-1+v^2)} - \frac{k R^2 T v^2}{2 r^2 (-1+v^2)} - \frac{k T v^3}{2 (-1+v^2)} - \frac{k R^2 T v^3}{2 r^2 (-1+v^2)} \right] + \text{Simplify} \left[\text{Collect} \left[\left(\frac{k T}{2 (-1+v^2)} + \frac{2 k R^2 T}{r^2 (-1+v^2)} - \frac{k R^4 T}{2 r^4 (-1+v^2)} - \frac{k T v}{2 (-1+v^2)} - \frac{4 k R^2 T v}{r^2 (-1+v^2)} + \frac{5 k R^4 T v}{2 r^4 (-1+v^2)} - \frac{k T v^2}{2 (-1+v^2)} + \frac{2 k R^2 T v^2}{r^2 (-1+v^2)} - \frac{7 k R^4 T v^2}{2 r^4 (-1+v^2)} + \frac{k T v^3}{2 (-1+v^2)} + \frac{3 k R^4 T v^3}{2 r^4 (-1+v^2)} \right), k T / (-1+v^2) \right] \right] \text{Cos}[2 t] \right\}$$

$$(*Mtt = \left\{ -\frac{k (r^2 + R^2) T (1+v)}{2 r^2} + (k T (-1+v) (4 r^2 R^2 + r^4 (1+v) + R^4 (-1+3 v)) \text{Cos}[2 t]) / (2 r^4 (1+v)) \right\} *)$$

Simplify[srtG]

$$(*Mrt = \left\{ \frac{1}{2 r^4 (1+v)} k (r^2 - R^2) T (-1+v) (r^2 (1+v) + R^2 (-1+3 v)) \text{Sin}[2 t] \right\} *)$$

srrG

$$\left\{ \text{Simplify} \left[\frac{k T}{2 (-1+v^2)} - \frac{k R^2 T}{2 r^2 (-1+v^2)} + \frac{k T v}{2 (-1+v^2)} - \frac{k R^2 T v}{2 r^2 (-1+v^2)} - \frac{k T v^2}{2 (-1+v^2)} + \frac{k R^2 T v^2}{2 r^2 (-1+v^2)} - \frac{k T v^3}{2 (-1+v^2)} + \frac{k R^2 T v^3}{2 r^2 (-1+v^2)} \right] + \text{Simplify} \left[\text{Apart} \left[\left(-\frac{k T}{2 (-1+v^2)} + \frac{k R^4 T}{2 r^4 (-1+v^2)} + \frac{k T v}{2 (-1+v^2)} + \frac{2 k R^2 T v}{r^2 (-1+v^2)} - \frac{5 k R^4 T v}{2 r^4 (-1+v^2)} + \frac{k T v^2}{2 (-1+v^2)} - \frac{4 k R^2 T v^2}{r^2 (-1+v^2)} + \frac{7 k R^4 T v^2}{2 r^4 (-1+v^2)} - \frac{k T v^3}{2 (-1+v^2)} + \frac{2 k R^2 T v^3}{r^2 (-1+v^2)} - \frac{3 k R^4 T v^3}{2 r^4 (-1+v^2)} \right) \right] \right] \text{Cos}[2 t] \right\}$$

$$(*Mrr = \left\{ -\frac{k (r^2 - R^2) T (1+v)}{2 r^2} - (k (r^2 - R^2) T (-1+v) (R^2 (1-3 v) + r^2 (1+v)) \text{Cos}[2 t]) / (2 r^4 (1+v)) \right\} *)$$