



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

(INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES)

ELECTRODINÁMICA Y GRAVEDAD DE CHERN-SIMONS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JOSÉ ALBERTO MARTÍN RUIZ

COMITÉ TUTOR

DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RÍOS (ICN)

DR. ALEJANDRO FRANK HOEFLICH (ICN)

DR. MANUEL TORRES LABANSAT (IF)

MÉXICO, D. F. ABRIL 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	I
1. Electrodinámica θ	1
1.1. Formulación de la ED θ	3
1.1.1. Ecuaciones de campo y condiciones de frontera	3
1.1.2. Una posible violación al teorema de Earnshaw	9
1.1.3. Tensor de Energía-Impulso	11
1.2. Método de la función de Green en ED θ	12
1.2.1. Teorema de Green y condiciones de frontera en Σ	13
1.2.2. Interfaz θ plana	15
1.2.3. Interfaz θ esférica	18
1.2.4. Interfaz θ cilíndrica	19
1.3. Aplicaciones	21
1.3.1. Carga puntual cerca de una interfaz θ plana	21
1.3.2. Fuerza entre una carga puntual y una interfaz θ plana	24
1.3.3. Carga puntual cerca de una interfaz θ plana a potenciales fijos	25
1.3.4. Hilo conductor infinito cerca de una interfaz θ plana	27
1.3.5. Hilo infinito cargado cerca de un TI plano	29
1.3.6. Carga puntual cerca de una interfaz θ esférica	31
1.3.7. Hilo conductor infinito cerca de una interfaz θ cilíndrica	34
1.3.8. Hilo infinito cargado cerca de una interfaz θ cilíndrica	37
1.4. Discusión	39
2. Efecto Casimir con Aislantes Topológicos	41
2.1. Matriz de funciones de Green dependiente de ω	43
2.2. Valor esperado de vacío del tensor de energía-impulso	47
2.3. El efecto Casimir	49
2.3.1. Fuerza de Casimir sobre la interfaz θ	54

2.3.2. Fuerza de Casimir entre P_1 y Σ , cuando $L \rightarrow \infty$	55
2.4. Efectos a temperatura finita	58
2.5. Discusión	61
3. Electrodinámica de Aislantes Topológicos	63
3.1. Función de Green	65
3.2. GF en la representación de coordenadas	83
3.3. Aplicaciones	84
3.3.1. Carga puntual cerca de un TI plano	84
3.3.2. Hilo conductor infinito cerca de un TI plano	87
3.3.3. Hilo infinito cargado cerca de un TI plano	89
3.4. Discusión	92
4. Gravedad θ	95
4.1. Gravedad de Chern-Simons	97
4.2. Gravedad θ	102
4.3. Ondas gravitacionales propagándose a través de la interfaz θ	104
4.3.1. Gravedad θ a orden lineal	104
4.3.2. Condiciones de frontera inducidas por la interfaz θ	106
4.3.3. Dispersión de OGs por la interfaz θ	110
4.4. Propagación de OGs a través de una interfaz θ en Gravedad de Euler . . .	112
4.5. Condición de coincidencia de áreas	114
4.6. Discusión	116
A. GF para una interfaz θ plana	118
B. GF para una interfaz θ esférica	123
C. GF para una interfaz θ cilíndrica	127
D. Técnica de Schwinger	131
E. Interacciones puntuales unidimensionales como una extensión autoad- junta del operador $-d^2/dx^2$	135
Bibliografía	141

Introducción

Las formas de Chern-Simons (CS) se descubrieron accidentalmente en matemáticas en un intento de obtener una fórmula combinatoria para el invariante de Pontryagin en cuatro dimensiones. El intento fracasó, como los autores confesaron, “por la aparición de un término de borde que no lleva a un análisis combinatorio simple” [1]. Resulta que el término de borde en sí mismo es interesante, y ha encontrado amplias aplicaciones en la física teórica, proporcionando Lagrangianos para teorías de campos de norma [2, 3], incluyendo la gravedad (2 + 1)-dimensional [4, 5], teoría cuántica de campos topológicos [6], teoría de cuerdas topológica [7], y aplicaciones a la física de materia condensada, tal como el efecto Hall cuántico [8].

En física teórica, la importancia de las formas de Chern-Simons es evidente. En teoría cuántica de campos juegan un papel destacado en lo que se refiere a las anomalías ¹. La existencia de anomalías puede representar una inconsistencia en la teoría si afecta a una simetría de norma, dado que éstas son fundamentales para eliminar grados de libertad no físicos del sistema; de ahí la necesidad de mecanismos que las cancelen. En el modelo estándar de física de partículas, las interacciones electrodébiles tienen todos los ingredientes necesarios para la bariogénesis [9, 10]. Además de la violación de la conjugación de carga (C) y la violación de carga-paridad (CP), la violación de la carga bariónica aparece a través de la anomalía de Adler-Bell-Jackiw (ABJ) del grupo $U(1)$ [11, 12]. Los bariones no son conservados por las interacciones electrodébiles debido a la anomalía quiral cuántica. El Lagrangiano electrodébil clásico conserva la carga bariónica. Los quarks siempre aparecen en combinaciones bilineales $q\bar{q}$, de modo que un quark puede aniquilarse sólo en colisión con un antiquark. En otras palabras, la corriente bariónica clásica se conserva, $\partial^\mu J_\mu^B = \sum_j \partial^\mu (\bar{q}_j \gamma_\mu q_j) = 0$. Sin embargo, las correcciones cuánticas destruyen esta ley de conservación y en vez de cero se obtiene

$$\partial^\mu J_\mu^B = \frac{g^2 C}{16\pi^2} G^{\mu\nu a} \tilde{G}_{\mu\nu}^a, \quad (1)$$

¹Las anomalías son violaciones de una simetría en un sistema cuántico obtenido a partir de un sistema clásico que sí poseía esta simetría. Son muy frecuentes en las teorías cuánticas de campos pues, como parte del proceso de renormalización, estas han de ser regularizadas para lidiar con sus resultados infinitos.

donde C es una constante numérica, $\tilde{G}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}G^{\alpha\beta a}$, y el tensor del campo de norma, $G_{\mu\nu}^a$, esta dado por la expresión

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo de norma. Un hecho importante es que la no-conservación anómala de la corriente es proporcional a la derivada total de un cuadvivector, $G^{\mu\nu a}\tilde{G}_{\mu\nu}^a = \partial^\mu K_\mu$, donde la corriente anómala K_μ es:

$$K_\mu = 2\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left(A^{\nu a} \partial^\alpha A^{\beta a} + \frac{1}{3} f^{abc} A^{\nu a} A^{\alpha b} A^{\beta c} \right), \quad (3)$$

que es el dual de Hodge de la 3-forma de Chern-Simons. 't Hooft propuso que la extensión de la acción del modelo estándar con el término topológico de Chern-Simons es un mecanismo para generar el rompimiento de las simetrías fundamentales [13], y proporciona un mecanismo para curar la anomalía axial ABJ.

En un contexto similar, las formas de Chern-Simons aparecen en la denominada anomalía gravitacional. En el modelo estándar la corriente leptónica no está conservada [14], *i.e.*

$$\partial^\mu J_\mu^L = \frac{3}{16\pi^2} {}^*RR, \quad (4)$$

donde ${}^*RR = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\tau\sigma}R_{\alpha\beta}{}^{\tau\sigma}$ es el invariante de Pontryagin gravitacional en (3 + 1)-dimensiones, que puede escribirse como la derivada total de un cuadvivector, ${}^*RR = \partial^\mu \mathcal{K}_\mu$, donde la corriente anómala corresponde a la 3-forma de Chern-Simons gravitacional *i.e.*

$$\mathcal{K}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \left(\partial_\alpha \Gamma_{\beta\lambda}^\sigma + \frac{2}{3}\Gamma_{\alpha\xi}^\sigma \Gamma_{\beta\lambda}^\xi \right), \quad (5)$$

donde Γ es la conexión de Christoffel. Aquí es posible cancelar la anomalía agregando el contratérmino apropiado a la acción de Einstein-Hilbert, lo que resulta ser una extensión tipo Chern-Simons de la relatividad general en (3 + 1)-D. Entre las propiedades interesantes de la gravedad de Chern-Simons encontramos que proporciona un marco para la cancelación de la anomalía gravitacional en teoría de cuerdas a través del mecanismo de Green-Schwarz [15], y que emerge naturalmente como un término de cancelación de anomalías en gravedad cuántica de lazos [16]. Además, se ha propuesto a la gravedad de Chern-Simons como un candidato a gravedad cuántica [17, 18]. En un contexto muy interesante, en la Ref. [19] se propuso que la contribución *RR puede generarse por fluctuaciones gravitacionales producidas durante la inflación cosmológica (si el campo del inflatón contiene componentes CP impares). Por otro lado, se ha demostrado que las in-

teracciones débiles estándar contienen procesos, mediados por “sphalerons”², que pueden convertir bariones en antileptones y leptones en antibariones, cuando la densidad de sphalerons es suficientemente alta [20, 21]. De esta forma, el exceso en el número de leptones en la etapa temprana del universo puede transformarse eficientemente en un exceso del número de bariones [22]. A escenarios de este tipo se les conoce como leptogénesis.

La existencia de instantones, uno de los efectos no perturbativos más notables de la Cromodinámica Cuántica (QCD), condujo a la solución del problema $U(1)$. La observación clave de 't Hooft fue que, debido a la presencia de la anomalía axial ABJ, los instantones³ podían dar solución a este problema si se agrega el término $\theta G^{\mu\nu a} \tilde{G}_{\mu\nu}^a$ a la acción de la QCD [23], donde θ es un parámetro que define la elección de un vacío invariante de norma (entre una infinidad posible de distintos, y en general inequivalentes) [24, 25] y $G^{\mu\nu a} \tilde{G}_{\mu\nu}^a$ es el invariante topológico de Pontryagin. Este término es proporcional a la densidad de número de instantones, que es una cantidad topológica que no afecta las ecuaciones de movimiento o la expansión perturbativa alrededor del vacío. La adición de este término a la acción Euclideana cambia el peso en la integral de trayectoria para diferentes números de instantones, abriendo así un canal para estudiar procesos de decaimiento que violan paridad. En un contexto similar, Peccei y Quinn propusieron que el problema CP fuerte de la QCD puede resolverse extendiendo la acción con el término de Chern-Simons [26, 27]. La diferencia es que en la teoría de Peccei y Quinn, θ es un campo dinámico que da origen a una nueva partícula, el axión, cuya existencia no se ha demostrado aún. En cosmología, el axión se considera un buen candidato para resolver el problema de la materia oscura.

La electrodinámica axiónica consiste en extender la acción de Maxwell con el término topológico de Chern-Simons asociado al grupo conmutativo $U(1)$, *i.e.* $\theta F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$, donde θ es una función del espacio-tiempo. Es claro que la electrodinámica axiónica es invariante de norma (dado que el invariante de Pontryagin lo es), pero no es invariante de Lorentz, además de violar paridad. Frank Wilczek predijo explícitamente aplicaciones de la electrodinámica axiónica al campo de las ciencias de los materiales [28]. Un efecto interesante que puede describirse usando esta teoría es el efecto Witten: un monopolo magnético encerrado en una pequeña burbuja de vacío ($\theta = 0$) se comporta como un dyon [29]. Este resultado puede obtenerse si se supone un monopolo magnético rodeado por una región esférica de radio finito en la que $\theta = 0$, inmersa en un medio donde $\theta \neq 0$. Este es el escenario más simple en que θ no es un campo dinámico, sino que toma diferentes valo-

²Geoméricamente, un sphaleron es un punto de silla de la energía potencial electrodébil (en el espacio de campos infinito-dimensional). Un sphaleron es similar al punto medio ($\tau = 0$) del instanton, de manera que es no-perturbativo. Esto significa que bajo condiciones normales, los sphalerons son inobservables. Sin embargo, habrían sido más comunes a las temperaturas altas del universo temprano.

³Soluciones topológicas (no triviales) de la teoría de Yang-Mills clásica en espacio Euclidiano. Se interpreta como la probabilidad de transición entre distintas configuraciones de vacío (Efecto tunel).

res constantes en diferentes regiones del espacio (diferentes valores esperados del campo de Peccei-Quinn). El origen de la carga eléctrica inducida por un monopolo magnético radica en que, debido al acoplamiento de Chern-Simons, las ecuaciones de movimiento transmutan los campos eléctrico y magnético. En este escenario se han obtenido otros resultados interesantes, como la rotación de Faraday de campos electromagnéticos cuando atraviesan una interfaz con diferentes valores constantes de θ [30, 31] y el efecto Casimir que experimenta una burbuja esférica inmersa en el vacío θ (*i.e.* $\theta = 0$ al interior, similar a la configuración de Wilczek) [32]. La electrodinámica clásica de Maxwell-Chern-Simons se ha estudiado vastamente en la literatura. En las referencias [33–37] se le considera una extensión interesante que viola la invariancia de Lorentz y paridad. Los aspectos cuánticos también se han estudiado ampliamente [38–44], así como sus aplicaciones al efecto Casimir [45–47]. También se ha estudiado como un subconjunto restringido del Modelo Estándar Extendido (SME) [48–56].

Un tema recurrente en física de materia condensada es el descubrimiento y clasificación de los estados cuánticos de la materia. A menudo, éstos pueden describirse utilizando la teoría de campos efectiva de Landau-Ginzburg, que los clasifica de acuerdo al principio de rompimiento espontáneo de simetrías [57]. Por ejemplo, un sólido cristalino rompe la simetría de traslación, a pesar de que la interacción entre sus componentes básicos atómicos es invariante ante traslaciones. Un imán rompe la simetría rotacional, a pesar de que sus interacciones fundamentales son isotrópicas. Un superconductor rompe la simetría de norma, lo que da lugar a nuevos fenómenos tal como la cuantización del flujo magnético y el efecto Josephson. El patrón de rompimiento de simetría lleva a un único parámetro de orden que puede tomar un valor esperado de vacío diferente de cero sólo en el estado ordenado. De esta forma, los estados son clasificados de acuerdo a este parámetro de orden.

El descubrimiento realizado por von Klitzing de que la conductancia de Hall está cuantizada [58], resultó tener un origen topológico, dando lugar a una clasificación diferente de los estados de la materia basado en la noción de orden topológico [59, 60]. Éstos eluden los esquemas de clasificación tradicionales basados en el rompimiento de simetrías, y pueden describirse usando el límite de baja energía de una teoría de campos efectiva [61]. En el estado cuántico de Hall (QH), el cuerpo de la muestra (bidimensional) es aislante, y la corriente eléctrica sólo se transporta en su superficie. El flujo de esta corriente unidireccional es lo que da origen al efecto Hall cuantizado. El estado QH es el primer ejemplo de un estado cuántico que es topológicamente distinto de todos los demás estados de la materia conocidos. Para describir el efecto QH, la teoría de campos efectiva apropiada es la teoría de Chern-Simons en $(2 + 1)$ -D, ya que captura los aspectos topológicos más importantes

de éste. La cuantización de la conductancia de Hall puede expresarse en términos del primer número de Chern, que es un invariante topológico estrechamente relacionado con la fase de Berry, de manera que ésta es independientemente de los detalles del material [8, 60]. Los estados QH pertenecen a una clase topológica que explícitamente rompen la simetría de inversión temporal (TR), por ejemplo, en presencia de un campo magnético. En años recientes se propuso una nueva clase de materiales que son TR invariantes, y donde el acoplamiento espín-órbita juega un papel esencial. Ésto culminó en la propuesta de aislantes topológicos (TIs) 2-dimensionales o estados cuánticos de espín-Hall, y más tarde se generalizó a TIs en 3D. Los TIs en 2D se predijeron teóricamente en 2006 [62], y se observaron experimentalmente al año siguiente [63] en pozos cuánticos HgTe/CdTe. Los TIs en 3D fueron predichos en la aleación $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ para algún rango de composición x [64], y se observaron pronto mediante ARPES (angle-resolved photoemission spectroscopy) [65]. Entre las aplicaciones de los TIs podemos mencionar sus usos en la espintrónica [66] y la computación cuántica topológica [67].

Además de sus interesantes propiedades electrónicas, los TIs también exhiben propiedades electromagnéticas de interés. Específicamente, los TIs tienen la habilidad de mezclar los campos eléctrico \mathbf{E} y de inducción magnética \mathbf{B} , lo que afecta la respuesta óptica del material. Esta transmutación entre los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} también está presente en la electrodinámica axiónica, así como en el sector fotónico del modelo estándar extendido [68]. Esta propiedad topológica de los TIs se manifiesta cuando se induce un rompimiento de la simetría TR en la superficie, pero no en el cuerpo del material. En tal caso, el TI se vuelve completamente aislante, tanto en el cuerpo como en la superficie. Para describir el efecto topológico magneto-eléctrico (TME), las leyes de Maxwell de la electrodinámica deben modificarse para incluir el término topológico de Chern-Simons con coeficientes cuantizados, similares al caso del efecto Hall cuántico. Concretamente, el límite de baja energía de la electrodinámica de TIs 3D puede describirse, independientemente de los detalles microscópicos, acoplando la electrodinámica de Maxwell al invariante de Pontryagin electromagnético en (3+1)-D, *i.e.* $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \propto \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 2\partial^\mu (\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu \partial^\rho A^\sigma)$, por medio del campo escalar θ , al que se conoce como polarizabilidad topológica magneto-eléctrica (TMEP, por sus siglas en inglés) [69–77]. La acción efectiva puede escribirse como $\mathcal{S} = S_0 + S_\theta$, donde S_0 es la acción de Maxwell, y el término topológico de Chern-Simons

$$S_\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} d^4x, \quad (6)$$

siendo $\alpha = e^2/\hbar c$ la constante de estructura fina. La acción (6) tiene la misma forma que la electrodinámica axiónica introducida por Wilczek en el contexto de física de partículas.

En un TI, sin embargo, θ no es un campo dinámico, sino una constante, un verdadero escalar de Lorentz y por lo tanto la densidad Lagrangiana en la Ec. (6) es un pseudo-escalar. Debido a la naturaleza topológica del término θ en la acción (6), si θ es constante en todo el espacio, la variación de la acción no contribuye a las ecuaciones de movimiento (cuando se imponen las condiciones de borde usuales en el infinito o en una frontera); sin embargo, si θ deja de ser una constante global, el término de Chern-Simons deja de ser un invariante topológico y por lo tanto deben tomarse en cuenta las modificaciones a las ecuaciones de Maxwell. De hecho, la variación de la acción completa $S_0 + S_\theta$ produce las ecuaciones de Maxwell estándar en materia. Sin embargo, las relaciones constitutivas se modifican a: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + (\alpha/\pi)\theta\mathbf{B}$ y $\mathbf{H} = (\mathbf{B}/\mu) - (\alpha/\pi)\theta\mathbf{E}$. Las ecuaciones de Maxwell junto con las relaciones constitutivas modificadas implican que en ausencia de un campo eléctrico, un campo magnético puede generar una polarización eléctrica (y vice versa), lo que justifica el nombre de polarizabilidad topológica magneto-eléctrica para el campo θ . Esta transmutación entre los campos eléctrico y magnético, es lo que define al efecto topológico magneto-eléctrico de los TIs. Entre los TMEs que se han reportado destacan: monopolos magnéticos inducidos debido a una carga eléctrica frente a la superficie de un TI (y viceversa) [74] y la rotación de Faraday que surge cuando ondas electromagnéticas atraviesan la superficie de un TI [78]. El TME no se ha observado experimentalmente. Una idea de por qué esto es así se puede ganar comparando teoría de Chern-Simons en $(3 + 1)$ -D con la análoga en $(2 + 1)$ -D. En $(2 + 1)$ -dimensiones, el término topológico de Chern-Simons es el término que domina el comportamiento del sistema en el régimen de longitud de onda grande, lo que lleva a la cuantización universal de la conductancia de Hall. Por otro lado, en $(3 + 1)$ -dimensiones el término topológico en la acción (6) y el término de Maxwell son igualmente importantes en el límite de longitud onda grande [70].

La simetría TR implica que esta teoría describe el cuerpo de un TI 3D cuando $\theta = 0$ (TI trivial) y $\theta = \pi$ (TI no-trivial). Como $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ es impar bajo TR, sólo $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ darán una teoría TR simétrica. Entonces, θ se transforma en $-\theta$ bajo TR, de manera que $\theta = 0$ es TR invariante *per se*, mientras que $\theta = \pi$ es invariante bajo la traslación $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. Cuando se toma en cuenta la superficie del TI, esta teoría describe razonablemente el cuerpo y la superficie sólo cuando se induce una perturbación que rompa la simetría TR en su superficie, convirtiéndolo así en un aislante completo. En esta situación, que es la que consideramos en este trabajo, se puede demostrar que θ está cuantizada en múltiplos impares de π : $\theta = (2n + 1)\pi$, donde $n \in \mathbb{Z}$, queda determinada por la naturaleza de la perturbación que rompe la simetría TR, y que puede controlarse experimentalmente cubriendo la superficie del TI con una capa magnética muy delgada [79, 80].

Todos los TMEs que se han estudiado hasta el momento, soluciones de las ecuaciones de Maxwell modificadas, se han obtenido usando el método de imágenes, el cuál resulta de mucha utilidad cuando las distribuciones de cargas y corrientes son simples, sin embargo, para distribuciones complicadas este método se torna muy difícil. Uno de los objetivos principales de este trabajo es introducir el método de la función de Green en esta teoría efectiva, que es el más apropiado para calcular los campos EM producidos por fuentes arbitrarias, así como para resolver problemas de condiciones de frontera. En el Capítulo 1 consideramos sólo los efectos puramente topológicos, es decir, suponemos que el cuerpo del TI no tiene propiedades eléctricas y magnéticas diferentes a las del vacío ($\varepsilon = \mu = 1$). A este modelo en particular lo llamaremos electrodinámica θ o simplemente ED θ . Construimos la función de Green estática para la ED θ , considerando las geometrías más simples para la interfaz θ , que corresponden a: (i) el plano $z = a$, (ii) la esfera con centro en el origen y radio a y (iii) un cilindro infinito de radio a con el eje paralelo a la dirección z . Adoptamos el nombre de interfaz θ para la superficie de un TI dado que a través de ella el valor de θ es discontinuo, *i.e.* en la interfaz TI-vacío el valor de θ cambia abruptamente de $\theta \neq 0$ a $\theta = 0$. Discutimos una posible violación al teorema de Earnshaw, así como aspectos importantes en la definición del tensor de energía-impulso. Se deriva el teorema de Green apropiado para la ED θ , y se clasifican las condiciones de frontera que pueden imponerse en la interfaz θ . En la subsección 1.3 presentamos varias aplicaciones de la ED θ .

El efecto Casimir entre aislantes topológicos se estudió en las referencias [79, 80]. Los autores proponen que es posible medirlo usando el material T1BiSe₂, sin embargo, la precisión experimental requerida aún no se ha alcanzado en el laboratorio. Lo interesante de la fuerza Casimir entre TIs es que su signo y magnitud pueden modularse. Cabe mencionar que en las Refs. [79, 80] la energía de Casimir se calculó usando el enfoque de dispersión, es decir, usando las matrices de reflexión que contienen los coeficientes de Fresnel. En el Capítulo 2 discutiremos el efecto Casimir entre dos placas paralelas conductoras, con un TI no-trivial plano entre ellas que está perfectamente unido a una de las placas. Usaremos el enfoque local introducido por Brown y Maclay, restringiéndonos al análisis de los efectos puramente topológicos. El límite en que una de las placas se envía al infinito nos da la fuerza de Casimir entre una placa conductora y un TI semi-infinito. Demostramos que nuestros resultados son consistentes con los que se obtienen usando el enfoque de dispersión al efecto Casimir. También estudiamos los efectos a temperatura finita.

En una situación experimental que involucre TIs, no podemos ignorar las propiedades ópticas de éstos. En el Capítulo 3 construimos la función de Green completa para un TI

plano, es decir, tomando en cuenta tanto el efecto topológico como los ópticos. Verificamos que la nueva función de Green se reduce, en el límite apropiado, a la calculada en el Capítulo 1. Discutimos algunas aplicaciones sencillas y demostramos que son consistentes con los resultados previamente reportados en la literatura.

En este trabajo también consideramos la extensión de Chern-Simons de la relatividad general en $(3 + 1)$ -D [81]. Se trata de una extensión topológica muy interesante de la gravedad de Einstein, donde la acción de Einstein-Hilbert se acopla al invariante de Pontryagin gravitacional $*RR$ por medio de un campo escalar θ , similar al campo axiónico de Peccei-Quinn de la física de partículas. Las ecuaciones de campo modificadas incluyen un término extra al que se conoce como tensor de Cotton 4-dimensional (que depende de $\partial_\mu\theta$ y $\partial_\mu\partial_\nu\theta$), y sus soluciones están confinadas a espacios con invariante de Pontryagin igual a cero, *i.e.* $*RR = 0$. Sin embargo, esto no impide que los espacio-tiempo de Schwarzschild, Robertson-Walker y ondas gravitacionales, sean soluciones de las ecuaciones modificadas con el campo de acoplamiento $\theta = \kappa t$, donde $\kappa \in \mathbb{R}$ [82]. En un contexto interesante, la teoría dinámica se usó para acotar las constantes de acoplamiento a partir de ondas gravitacionales viniendo de agujeros negros binarios [83].

Motivados por la $ED\theta$, en este trabajo consideramos una realización particular de la gravedad de Chern-Simons, donde θ no es un campo dinámico, sino que es constante por secciones, *i.e.* toma diferentes valores constantes en diferentes regiones del espacio separadas por una interfaz común Σ (similar a la interfaz θ que definimos para la superficie de acoplamiento entre dos TIs). A este modelo en particular lo llamaremos Gravedad θ o simplemente $G\theta$. A diferencia de la $ED\theta$, donde los aislantes topológicos se han encontrado en el laboratorio, la situación gravitacional que estudiamos aquí es de naturaleza teórica por el momento. Coleman utilizó una idea similar en Cosmología, en donde estudió la evolución de una burbuja de vacío en un fluido cosmológico que pertenece a un vacío diferente (los vacíos distintos se distinguen, por ejemplo, por el valor de la constante cosmológica) [84]. En nuestro caso, el vacío puede distinguirse por el valor de θ , como en el caso de los TIs. En el Capítulo 4 demostramos que, para una interfaz Σ entre dos medios con valores distintos de θ , las ecuaciones de campo para la $G\theta$ tienen contribuciones distribucionales del tipo $\delta(\Sigma)$ y $\delta'(\Sigma)$, lo que implica discontinuidades métricas a través de Σ . Investigamos la propagación de ondas gravitacionales a través de dicha interfaz. Determinamos las condiciones de frontera en Σ dándonos cuenta de que tales contribuciones adicionales corresponden a una extensión autoadjunta del operador unidimensional de D'Alambert. Imponiendo las condiciones de frontera encontramos que la métrica y su primera derivada son discontinuas en Σ . Sin embargo, ésta satisface la condición de coincidencia de áreas en $N \cup \Sigma$, donde N denota la hipersuperficie nula determinada por la onda incidente. Tales

discontinuidades dan origen a ondas reflejada y transmitida, que producen un tensor de curvatura linealizado que tiene singularidades en la interfaz Σ .

Capítulo 1

Electrodinámica θ

En este capítulo consideramos la electrodinámica de Maxwell acoplada con el término topológico de Chern-Simons (CS) mediante un campo escalar θ :

$$\mathcal{L}_\theta = \theta(\alpha/4\pi^2)\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = -\frac{\theta}{4}(\alpha/4\pi^2)F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ es el tensor dual de campo electromagnético (EM) y $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el símbolo de Levi-Civita. En general, θ puede ser un campo dinámico; sin embargo, lo tomaremos como una constante, haciendo de la densidad Lagrangiana un pseudo-escalar. Nótese que esta extensión es una derivada total, de manera que no contribuye a las ecuaciones de movimiento cuando se imponen las condiciones de borde usuales en el infinito o en una frontera. Si θ no es globalmente constante en la variedad en donde se define la teoría, el término de CS no es un invariante topológico, y por lo tanto, debemos considerar las modificaciones a las ecuaciones de movimiento del campo EM.

Motivados por la teoría de campos efectiva que describe la electrodinámica de TIs, aquí estudiaremos la teoría de Maxwell extendida por la Ec. (1.1) definida sobre una variedad con dos dominios definidos por sus valores constantes pero diferentes de θ , que están separados por una interfaz común o frontera Σ , como se muestra en la figura 1.1. Este es el escenario más simple en el que θ no es un campo dinámico (como en la electrodinámica axiónica), sino que es constante por secciones. La constante θ puede interpretarse como un parámetro efectivo que caracteriza las propiedades de un nuevo vacío EM derivado de alguna teoría más fundamental (por ejemplo, el valor esperado del campo de Peccei-Quinn en una región acotada), o como en el caso de los TIs, puede interpretarse como un parámetro macroscópico efectivo que describe grados de libertad cuánticos de la materia, aparte de la permitividad ϵ y permeabilidad μ usuales del electromagnetismo de Maxwell. En este capítulo restringimos nuestro análisis a las contribuciones puramente topológicas,

es decir, que vienen de la discontinuidad de θ en Σ , y consideraremos que todo el espacio no tiene propiedades diferentes a las del vacío, es decir $\epsilon = \mu = 1$. A esta teoría en particular la llamaremos Electrodinámica θ o simplemente $ED\theta$. En el Capítulo 3, se extenderá el presente análisis al caso en que las propiedades ópticas de los medios no son iguales a las del vacío, que es el caso de mayor interés en la descripción de la respuesta electromagnética de un TI.

La formulación de la $ED\theta$ que discutimos aquí presenta ciertas similitudes con las teorías de campos de Janus [85–90]. La correspondencia AdS/CFT dió lugar a muchas ideas en teorías de campos conformes. El ejemplo más exitoso es la relación entre la teoría de cuerdas $AdS_5 \times S^5$ y las teorías de Yang-Mills supersimétricas en $\mathcal{N} = 4$. La solución original de Janus en la Ref. [91] es una familia uniparamétrica de deformaciones del espacio AdS_5 sin supersimetría. Esta solución resulta ser estable bajo una gran clase de perturbaciones [91–93]. La solución de Janus consiste de dos espacios de Minkowski unidos por una interfaz 2-dimensional, tal que el campo dilatónico adquiere valores asintóticos distintos en cada región. Se ha sugerido que la teoría de campos dual CFT es una deformación de la teoría de Yang-Mills, donde la constante de acoplamiento cambia a través de una interfaz 2-dimensional [91, 92]. En nuestro caso la teoría de Yang-Mills supersimétrica 4-dimensional $\mathcal{N} = 4$ se reemplaza por la $ED\theta$, donde tomamos los acoplamientos electromagnéticos globalmente constantes (*i.e.* $\epsilon = \mu = 1$ en todo el espacio), mientras que el acoplamiento topológico tiene diferentes valores constantes en cada lado de la frontera Σ , similar a la discontinuidad finita que presenta el valor asintótico del campo dilatónico en la solución de Janus. Formalmente existen diferencias entre ambas teorías, *e.g.* la supersimetría no juega ningún papel importante en $ED\theta$, sin embargo se han obtenido soluciones interesantes que se derivan del hecho de que las constantes de acoplamiento de la teoría son discontinuas a través de una interfaz 2-dimensional.

Este capítulo está organizado como sigue. En la Sección 1.1 discutimos brevemente la formulación de la electrodinámica de Maxwell acoplada al término topológico de Chern-Simons mediante el campo escalar θ , que es constante por secciones. Se discuten aspectos relacionados con el teorema de Earnshaw y el tensor de energía-impulso. Restringiéndonos al caso estático, en la Sección 1.2 derivamos el teorema de Green apropiado para la $ED\theta$, y construimos la función de Green considerando las geometrías más simples para la interfaz θ , que corresponden a: (i) el plano $z = a$, (ii) la esfera con centro en el origen y radio a , y (iii) un cilindro infinito de radio a con el eje paralelo a la dirección z . La Sección 1.3 está dedicada a diferentes aplicaciones, *e.g.*, los problemas de una carga puntual y un hilo conductor rectilíneo infinito cerca de una interfaz θ plana. Se discute también la energía de interacción entre una distribución de carga-corriente y la interfaz θ . También

se estudian los problemas de una carga puntual cerca de una interfaz θ esférica, un hilo conductor rectilíneo infinito cerca de una interfaz θ cilíndrica, y un hilo rectilíneo infinito uniformemente cargado cerca de una interfaz θ cilíndrica. En los Apéndices presentamos los cálculos detallados de los elementos de matriz de la función de Green para los casos de interfaces θ esférica y cilíndrica. A lo largo esta sección usamos las unidades de Lorentz-Heaviside ($\hbar = c = 1$), la signatura de la métrica la tomamos como $(+, -, -, -)$ y se adopta la convección $\epsilon^{0123} = +1$.

1.1. Formulación de la ED θ

1.1.1. Ecuaciones de campo y condiciones de frontera

La acción efectiva de la ED θ que consideramos es

$$S = S_0 + S_\theta = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu - \frac{\alpha}{16\pi^2} \theta F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right), \quad (1.2)$$

donde $\alpha = e^2/\hbar c$ es la constante de estructura fina, j^μ es una corriente conservada, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ es el tensor de campo electromagnético y $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$.

La constante de acoplamiento para el término θ , $\alpha/4\pi^2$, se elige de tal forma que la carga eléctrica total $q_e = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}$ sea un múltiplo de la carga del electrón e , y que la carga magnética $q_m = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ sea un múltiplo de $e/2\alpha$, de acuerdo a la condición de cuantización de Dirac [28]. La naturaleza topológica de la densidad de Pontryagin hace que las ecuaciones de movimiento que se obtienen de la acción (1.2) sean invariantes bajo el cambio $\theta(x) \rightarrow \theta(x) + C$, siendo C cualquier constante. Argumentos mecano-cuánticos imponen otras condiciones para C , que discutiremos más adelante.

El espacio-tiempo $(3+1)$ -dimensional es $\mathcal{M} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}$, donde \mathcal{U} es una variedad 3-dimensional y \mathbb{R} corresponde al eje temporal. Hacemos una partición del espacio en dos regiones, \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , de tal manera que las variedades \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 se intersectan a lo largo de una interfaz 2-dimensional común Σ , que llamaremos interfaz θ , así $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ y $\Sigma = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, como se muestra en la figura 1.1. También suponemos que el campo θ es constante por secciones, *i.e.* toma el valor constante $\theta = \theta_1$ en la región \mathcal{U}_1 y el valor constante $\theta = \theta_2$ en la región \mathcal{U}_2 . Esta situación se expresa a través de la función característica

$$\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \theta_1 & , \quad \mathbf{x} \in \mathcal{U}_1 \\ \theta_2 & , \quad \mathbf{x} \in \mathcal{U}_2 \end{cases}. \quad (1.3)$$

En este escenario, el término θ en la acción no es un invariante topológico global dado que

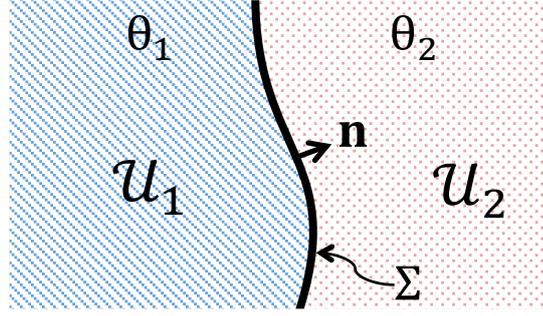


Figura 1.1: Región sobre la que se define la teoría del campo electromagnético.

está definido en una variedad con la interfaz Σ . La variación de la acción da lugar a un conjunto de ecuaciones de Maxwell con una corriente adicional con soporte en la interfaz θ

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \tilde{\theta} \delta(\Sigma) n_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} + 4\pi j^\nu, \quad (1.4)$$

donde $n_\mu = (0, \mathbf{n})$, \mathbf{n} es la normal unitaria a Σ y

$$\tilde{\theta} = \frac{\alpha}{\pi} (\theta_1 - \theta_2). \quad (1.5)$$

La conservación de la corriente puede verificarse tomando directamente la divergencia en ambos lados de la Ec. (1.4),

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \tilde{\theta} \delta'(\Sigma) n_\mu n_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} + \tilde{\theta} \delta(\Sigma) n_\mu \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} + 4\pi \partial_\nu j^\nu. \quad (1.6)$$

El lado izquierdo y el primer término del lado derecho son cero debido a la antisimetría del tensor $F^{\mu\nu}$; mientras que el segundo término del lado derecho es cero por la identidad de Bianchi, $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$.

El conjunto de ecuaciones modificadas (1.4) junto con la identidad de Bianchi pueden escribirse en coordenadas adaptadas a la superficie como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \tilde{\theta} \delta(\Sigma) \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} + 4\pi \rho, \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \tilde{\theta} \delta(\Sigma) \mathbf{E} \times \mathbf{n} + 4\pi \mathbf{J}, \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.10)$$

donde \mathbf{n} es la normal unitaria a Σ que se muestra en la figura 1.1. Aquí $j^\mu = (\rho, \mathbf{J})$,

$F^{i0} = E^i$, $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k$ y $\tilde{F}^{i0} = B^i$, $\tilde{F}^{ij} = \varepsilon^{ijk} E^k$. Este conjunto de ecuaciones nos muestran que en los cuerpos, $\mathcal{U}_1 \setminus \Sigma$ y $\mathcal{U}_2 \setminus \Sigma$, la ED θ se comporta de la misma manera que la electrodinámica estándar, y que el término θ modifica el comportamiento de los campos sólo en la superficie Σ . Nótese que las ecuaciones inhomogéneas implican que un campo eléctrico paralelo (magnético normal) a la interfaz θ , que la atraviese, puede generar un campo magnético (eléctrico) incluso en ausencia de corrientes (cargas) libres. Las ecuaciones (1.7)-(1.10) también sugieren que la respuesta electromagnética de un aislante topológico puede describirse en términos de las ecuaciones de Maxwell en materia

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad , \quad \nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J}, \quad (1.11)$$

con relaciones constitutivas

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \frac{\alpha}{\pi}\theta(\mathbf{x})\mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - \frac{\alpha}{\pi}\theta(\mathbf{x})\mathbf{E}, \quad (1.12)$$

donde $\theta(\mathbf{x})$ es como se definió en la Ec. (4.25). Es claro que si $\theta(\mathbf{x})$ es globalmente constante en \mathcal{M} , no hay contribución a las ecuaciones de Maxwell, aún cuando $\theta(\mathbf{x})$ esté presente en las relaciones constitutivas. De hecho, las contribuciones adicionales de un término $\theta(\mathbf{x})$ que es globalmente constante a cada una de las ecuaciones (1.11) se cancela debido a las ecuaciones homogéneas (1.9) y (1.10).

Hasta ahora hemos considerado a θ como un parámetro externo que puede tomar valores arbitrarios, aunque respetando la simetría de escalamiento $\theta \rightarrow \theta + C$ antes mencionada. En primera instancia, esta simetría nos permite elegir θ igual a cero a nivel clásico. Sin embargo, a nivel mecano-cuántico, la cuantización de los flujos eléctrico y magnético exigen que S_θ/\hbar sea un múltiplo entero de θ ; por lo tanto, los únicos valores permitidos de C son $C = 2\pi n$ con $n \in \mathbb{Z}$, de otro modo, resultan contribuciones no triviales a la integral de trayectoria. Los valores posibles de θ se restringen aún más si tomamos en cuenta el comportamiento del sistema ante la simetría de inversión temporal (TR). De hecho, en el contexto de TIs se consideró originalmente que sólo sistemas con rompimiento de simetría TR eran de relevancia, sin embargo, ahora sabemos que sistemas que preservan tal simetría también son importantes, como se discute en las Refs. [94, 95]. Dada la naturaleza pseudo-escalar del campo θ bajo TR: $T(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, donde T es el operator de inversión temporal $T : t \rightarrow -t$, parece que una ruptura de tal simetría es ineludible. Sin embargo, la simetría TR puede preservarse si θ toma los valores 0 o π (mod 2π). Para $\theta = 0$ el sistema es trivialmente invariante ante TR, mientras que para $\theta = \pi$ ésta puede restablecerse mediante el rescalamiento adecuado θ , *i.e.* $T(\pi\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = -\pi\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ puede hacerse invariante bajo TR si $\theta \rightarrow \theta' = \theta + 2\pi$.

A continuación estudiaremos los efectos de la interfaz θ en la propagación de los campos EM. Suponiendo que las derivadas temporales de los campos son finitas en la vecindad de la superficie Σ , las ecuaciones de campo implican que la componente normal de \mathbf{E} , y las componentes tangenciales de \mathbf{B} , adquieren discontinuidades adicionales a las producidas por densidades de cargas y corrientes superficiales libres, mientras que la componente normal de \mathbf{B} , y las componentes tangenciales de \mathbf{E} , son continuas. En ausencia de fuentes externas sobre Σ , las condiciones de frontera que se obtienen son:

$$\Delta \mathbf{E}_n|_{\Sigma} = +\tilde{\theta} \mathbf{B}_n|_{\Sigma}, \quad (1.13)$$

$$\Delta \mathbf{B}_{\parallel}|_{\Sigma} = -\tilde{\theta} \mathbf{E}_{\parallel}|_{\Sigma}, \quad (1.14)$$

$$\Delta \mathbf{B}_n|_{\Sigma} = 0, \quad (1.15)$$

$$\Delta \mathbf{E}_{\parallel}|_{\Sigma} = 0. \quad (1.16)$$

La notación es

$$\Delta \mathbf{V}_i|_{\Sigma} = \mathbf{V}_i(\Sigma^+) - \mathbf{V}_i(\Sigma^-), \quad (1.17)$$

para cualquier vector \mathbf{V} . Aquí $\mathbf{V}_i(\Sigma^+)$ significa que la componente \mathbf{V}_i se evalúa justo al exterior (en el medio \mathcal{U}_2) de la interfaz Σ ; y \mathbf{V}_i tiene una interpretación similar en la región interior \mathcal{U}_1 .

Las condiciones de continuidad, (1.15) y (1.16), implican que el lado derecho de las ecuaciones (1.13) y (1.14) está bien definidos y representan densidades superficiales de cargas y corrientes, respectivamente. Se observa que las condiciones de borde (1.13) y (1.14) implican que un campo eléctrico paralelo (magnético normal) a la interfaz θ , que la atraviese, puede generar un campo magnético (eléctrico) incluso en ausencia de corrientes (cargas) libres. Esta transmutación entre los campos eléctrico y magnético es la que da origen al TME en la superficie de un aislante topológico. Como se mencionó, en este capítulo nos enfocamos en los efectos puramente topológicos, pero en el Capítulo 3 tratamos el caso general con TIs con propiedades ópticas diferentes a las del vacío. En el marco de la ED θ se han discutido algunos TMEs: el efecto Witten [29] y la rotación de Faraday [30, 31]. A continuación los discutimos brevemente, y en la Sección 1.3 presentamos algunos ejemplos sencillos usando el método de la función de Green.

Efecto Witten

Consideremos un monopolo magnético g en una burbuja de vacío ($\theta = 0$ al interior) inmersa en un medio infinito θ , como se muestra en la figura 1.2. La ley de Gauss (1.7) en este caso es

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{g\alpha\theta}{\pi a^2} \delta(\Sigma), \quad (1.18)$$

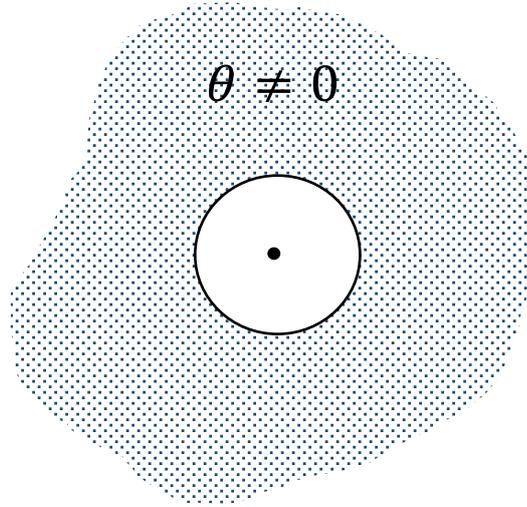


Figura 1.2: Efecto Witten.

donde Σ es la superficie de la esfera de radio a . Esta ecuación implica que, a distancias grandes (comparadas con el radio de la esfera), el campo eléctrico es generado por una carga puntual de magnitud

$$q = \int \nabla \cdot \mathbf{E} = -4g\alpha\theta. \quad (1.19)$$

El efecto Witten, de que en el vacío θ un monopolo magnético se comporta como un dyon (sistema $q - g$) con carga eléctrica proporcional a la carga magnética y a θ , esta esencialmente contenido en la Ec. (1.19).

Rotación de Faraday

Consideremos la propagación de ondas EM a través de una interfaz Σ definida por el plano $z = 0$. La región $z < 0$ es vacío ($\theta = 0$), mientras que la región $z > 0$ está llena de un medio semi-infinito con $\theta \neq 0$. Supongamos que una onda EM se propaga en la región de vacío e incide en la interfaz θ . Dado que las ecuaciones de Maxwell no se modifican afuera de la interfaz, podemos suponer que las ondas EM tienen la forma

$$\begin{Bmatrix} \mathbb{E} \\ \mathbb{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (1.20)$$

De las ecuaciones homogéneas (1.9) y (1.10) se sigue que $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ y $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$, como en el caso usual. Dado que las condiciones de borde dependen de $\tilde{\theta} = -\alpha\theta/\pi$, la propagación de las ondas EM a través de Σ se verá afectada, y como consecuencia las ondas reflejada y transmitida, experimentarán cambios en su polarización. Por otro lado,

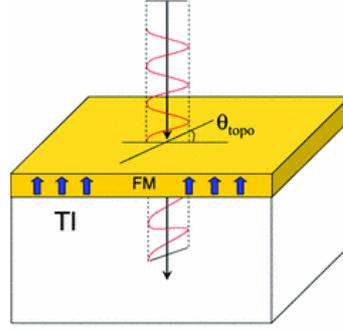


Figura 1.3: Rotación de Faraday. Tomado de la Ref. [76].

las leyes geométricas de reflexión y refracción en la interfaz siguen siendo válidas, dado que éstas son independientes de la polarización de las ondas. Finalmente, las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida se obtienen aplicando las condiciones de borde (1.13)-(1.14). Usemos los subíndices i , r y t para etiquetar las ondas incidente, reflejada y transmitida, esto es

$$\mathbb{E}_i = \mathbf{E}_i e^{i(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbb{E}_r = \mathbf{E}_r e^{i(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbb{E}_t = \mathbf{E}_t e^{i(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})}, \quad (1.21)$$

respectivamente. Ahora, como es usual, descomponemos los campos eléctrico y magnético en sus componentes perpendicular (con superíndice \perp) y paralela (con superíndice \parallel) al plano de incidencia, que podemos considerar perpendicular a Σ , conteniendo la dirección de propagación. De las condiciones de frontera (1.13)-(1.14) se obtienen las siguientes expresiones algebraicas para las amplitudes

$$E_i^{\parallel} \sin \phi_i + E_r^{\parallel} \sin \phi_r - E_t^{\parallel} \sin \phi_t = +\tilde{\theta} E_t^{\perp} \sin \phi_t, \quad (1.22)$$

$$(E_i^{\perp} - E_r^{\perp}) \cos \phi_i - E_t^{\perp} \cos \phi_r = -\tilde{\theta} E_t^{\parallel} \cos \phi_t, \quad (1.23)$$

mientras que de (1.15)-(1.16) se obtiene

$$E_i^{\perp} \sin \phi_i + E_r^{\perp} \sin \phi_r - E_t^{\perp} \sin \phi_t = 0, \quad (1.24)$$

$$(E_i^{\parallel} - E_r^{\parallel}) \cos \phi_i - E_t^{\parallel} \cos \phi_r = 0, \quad (1.25)$$

donde ϕ_i , ϕ_r y ϕ_t son los ángulos incidente, reflejado y transmitido, respectivamente. Dado que las propiedades eléctricas y magnéticas en ambos lados de la interfaz son las mismas, y por la validez de las leyes geométricas, se sigue que los ángulos de reflexión y transmisión serán iguales al ángulo de incidencia. Resolviendo las ecuaciones (1.22)-(1.23)

simultáneamente se obtiene, para la amplitud transmitida

$$\begin{pmatrix} E_t^{\parallel} \\ E_t^{\perp} \end{pmatrix} = \frac{2}{4 + \tilde{\theta}^2} \begin{pmatrix} 2 & -\tilde{\theta} \\ \tilde{\theta} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_i^{\parallel} \\ E_i^{\perp} \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

y para la amplitud reflejada

$$\begin{pmatrix} E_r^{\parallel} \\ E_r^{\perp} \end{pmatrix} = \frac{\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \begin{pmatrix} \tilde{\theta} & 2 \\ 2 & -\tilde{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_i^{\parallel} \\ E_i^{\perp} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

De estas expresiones se sigue que los coeficientes de reflexión y transmisión son

$$\mathcal{R} \equiv \frac{E_r^{\parallel 2} + E_r^{\perp 2}}{E_i^{\parallel 2} + E_i^{\perp 2}} = \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2}, \quad \mathcal{T} \equiv \frac{E_t^{\parallel 2} + E_t^{\perp 2}}{E_i^{\parallel 2} + E_i^{\perp 2}} = \frac{4}{4 + \tilde{\theta}^2}, \quad (1.28)$$

respectivamente. Nótese que en el límite $\tilde{\theta} \rightarrow 0$, las matrices de reflexión y transmisión se reducen correctamente a los resultados electrodinámicos. Cuando $\tilde{\theta} \rightarrow \infty$, el coeficiente de reflexión se aproxima a la unidad, de manera que la interfaz θ se convierte en un reflector perfecto de ondas EM. El ángulo de polarización se define por $\tan \alpha = E^{\perp}/E^{\parallel}$. Los ángulos de polarización para las ondas incidente α_i y reflejada α_r son

$$\alpha_t = \arctan \left(\frac{\tilde{\theta} + 2 \tan \alpha_i}{2 - \tilde{\theta} \tan \alpha_i} \right), \quad \alpha_r = \arctan \left(\frac{2 - \tilde{\theta} \tan \alpha_i}{\tilde{\theta} + 2 \tan \alpha_i} \right), \quad (1.29)$$

donde α_i es el ángulo de polarización de la onda incidente. Usando la identidad $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ encontramos que, independientemente del ángulo de polarización de la onda incidente, $\alpha_t + \alpha_r = \pi/2$, *i.e.* las polarizaciones de las ondas reflejada y transmitida son perpendiculares. Nótese que para una onda incidente con ángulo de polarización $\tan \alpha_i = -\tilde{\theta}/2$, se obtienen una onda con polarización *p* ($\alpha_t = 0$) y una con polarización *s* ($\alpha_r = \pi/2$). Se observa que para $\tilde{\theta} \rightarrow 0$, la polarización de la onda reflejada es cerca de $\pi/2$, sin embargo, no se esperaría ningún efecto para $\tilde{\theta} = 0$. La solución de esta aparente paradoja radica en que el coeficiente de transmisión se aproxima a cero en dicho límite.

1.1.2. Una posible violación al teorema de Earnshaw

En electrostática, es un hecho bien establecido que, debido a fuerzas puramente electrostáticas, un conjunto de cargas no se puede mantener en equilibrio estable (teorema de Earnshaw). De manera más general, ningún objeto estático compuesto por cargas eléctricas

cas, magnetos y masas, se puede mantener en equilibrio estático por cualquier combinación de fuerzas eléctricas, magnéticas o gravitacionales.

Es natural preguntarse si en el caso de la ED θ una carga puede estar o no en equilibrio debido solamente a fuerzas electrostáticas. Esta pregunta no sólo es relevante desde el punto de vista experimental, sino que también teóricamente. Como se demostrará a continuación, el caso de la ED θ es interesante dado que abre la posibilidad de violar el teorema de Earnshaw. En electromagnetismo estándar, la falta de existencia de puntos de equilibrio estable se demuestra por contradicción, debido al hecho de que, lejos de las fuentes, el potencial electrostático satisface la ecuación de Laplace. Demostraremos que en ED θ existen puntos en donde tal contradicción puede no ser cierta. De la Ec. (1.7) y $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ tenemos que

$$-\nabla^2\phi = 4\pi\rho + \tilde{\theta}\delta(\Sigma)\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.30)$$

Ahora nos preguntamos si el potencial tiene un valor extremo en un punto P , donde suponemos que una carga de prueba puede estar en equilibrio estable. El argumento que seguimos es el usual. Supongamos que existe el punto P en donde ϕ adquiere un mínimo. Entonces en cualquier superficie cerrada (pequeña) que contenga $P \in \Sigma$, debemos tener $\partial_n\phi > 0$, donde n denota la dirección normal saliente de la superficie y por lo tanto debemos tener

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \partial_n\phi ds > 0. \quad (1.31)$$

donde el volumen \mathcal{V} encierra a P . Debido a que $\partial_n\phi = \mathbf{n} \cdot \nabla\phi$ y al teorema de la divergencia, esta última integral puede escribirse como una integral de volumen del Laplaciano del potencial. Haciendo $\rho = 0$ obtenemos

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \partial_n\phi ds = \int_{\mathcal{V}} \nabla^2\phi dv = -\tilde{\theta} \int_{\mathcal{V}} \delta(\Sigma)\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dv = -\tilde{\theta} \int_{\Sigma} \mathbf{B}_n|_{\Sigma} d^2x. \quad (1.32)$$

En la electrostática estándar de Maxwell ($\tilde{\theta} = 0$) el lado derecho de la Ec. (1.32) es idénticamente cero, llevando a una contradicción con la Ec. (1.31), demostrando así que P no puede ser un mínimo local. Sin embargo, en el caso de la ED θ , si $\tilde{\theta} \neq 0$ y la componente normal del campo magnético no es cero en Σ , la contradicción antes mencionada ya no se produce para puntos P en Σ , removiendo así la limitación ordinaria del electromagnetismo para la existencia de un mínimo local. Hacemos hincapié en que no estamos demostrando la existencia de puntos de equilibrio estable en ED θ . Para hacerlo, se requiere un análisis más profundo a lo largo de las líneas descritas en la Ref. [96] en el contexto del electromagnetismo estándar.

1.1.3. Tensor de Energía-Impulso

En la sección 1.1.1 demostramos que en los cuerpos, $\mathcal{U}_1 \setminus \Sigma$ y $\mathcal{U}_2 \setminus \Sigma$, la ED θ se comporta de la misma manera que la electrodinámica estándar, y que el término θ modifica el comportamiento de los campos sólo en la superficie Σ . Esto sugiere que en ED θ , en las regiones $\mathcal{U}_1 \setminus \Sigma$ y $\mathcal{U}_2 \setminus \Sigma$, el tensor de energía-impulso tiene la misma forma que en la electrodinámica estándar, donde la dependencia en $\tilde{\theta}$ aparece a través de la contribución a los campos que surge de las fuentes adicionales que se inducen en la superficie Σ . La identificación del tensor de energía-impulso puede hacerse a lo largo de las líneas estándares de la electrodinámica en medios materiales (ver por ejemplo las Refs. [97–99]), de donde se lee la tasa a la que el campo eléctrico realiza trabajo sobre cargas libres

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) - \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right), \quad (1.33)$$

y la tasa a la que el momento es transferido a las cargas

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} [D_i \nabla E_i - \nabla \cdot (\mathbf{D}\mathbf{E})] - \frac{1}{4\pi} [B_i \nabla H_i - \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{H})]. \quad (1.34)$$

Aquí la notación es $A_i \nabla B_i = (A_i \partial_k B_i) \hat{e}_k$ y $\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\partial_i A_i) B_k \hat{e}_k$, para cualquiera dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} . Usando las relaciones constitutivas de la Ec. (1.12), identificamos a partir la Ec. (1.33) el flujo de energía \mathbf{S} y la densidad de energía U como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad , \quad U = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (1.35)$$

mientras que de la Ec. (1.34) obtenemos la densidad de momento \mathbf{G} e identificamos el tensor de esfuerzos T_{ij} como

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad , \quad T_{ij} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + B_i B_j). \quad (1.36)$$

Afuera de las fuentes libres, las ecuaciones de conservación son

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G_k}{\partial t} + \partial_i T_{ik} = \frac{\alpha}{\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \partial_k \theta(\mathbf{x}). \quad (1.37)$$

En otras palabras, el tensor de energía-impulso tiene la misma forma que en el vacío, pero como es de esperarse, no está conservado en la interfaz θ debido a las cargas y corrientes inducidas ahí.

El tensor de energía-impulso electromagnético es muy importante debido a sus aplicaciones a diversos problemas. Por ejemplo, si conocemos la función de Green del sistema,

el tensor de energía-impulso es fundamental para calcular la energía de Casimir. Para hacerlo, se calcula el valor esperado de vacío de dicho tensor [100–102]. En la Sección 2 usaremos este método para calcular la energía de Casimir entre dos placas paralelas, tal que en el espacio entre ellas se coloca una porción de TI. En general, este método se ha usado para estudiar el efecto Casimir en electrodinámica axiónica, ver las Refs. [32, 55, 103].

1.2. Método de la función de Green en ED θ

En esta sección, usamos el método de la función de Green para resolver problemas de valores de frontera en ED θ . Al igual que en la electrostática de Maxwell, en ED θ , dada una configuración de cargas y corrientes, es posible determinar los campos eléctrico y magnético a partir de las ecuaciones de Maxwell modificadas (1.7)-(1.10) junto con las condiciones de frontera expresadas en las Ecs. (1.13)-(1.16). Sin embargo, al igual que en la ED estándar, puede haber ocasiones en las que además de conocer las fuentes externas, se proporcionen condiciones sobre los campos en fronteras dadas. En estos casos, el método de la función de Green es el que proporciona la solución general a un problema de valores de frontera dado (Dirichlet o Neumann) para fuentes arbitrarias. La importancia de tal solución general es evidente desde el punto de vista experimental. Por ejemplo, permitiría, al menos en principio, predecir la respuesta electromagnética de aislantes topológicos en presencia de configuraciones de fuentes complicadas. Por otra parte, como ya se mencionó en la Sección 1.1.3, el método de la función de Green, es útil para calcular el valor esperado de vacío del tensor de energía-impulso en el contexto de las fuerzas de Casimir. Además, el método de la GF debería ser también útil para la solución de problemas dinámicos en ED θ .

En lo siguiente nos concentramos sólo en el caso estático. Dado que las ecuaciones homogéneas de Maxwell que expresan la relación entre los potenciales y los campos no están modificadas en ED θ , los campos electrostático y magnetostático pueden escribirse en términos del cuadripotencial $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ de acuerdo a $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, como es usual. En la norma de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, el cuadripotencial satisface la ecuación diferencial

$$\left[-\eta^\mu{}_\nu \nabla^2 - \tilde{\theta} \delta(\Sigma) n_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\beta}{}_\nu \partial_\beta \right] A^\nu = 4\pi j^\mu, \quad (1.38)$$

junto con las condiciones de frontera

$$\Delta A^\mu|_\Sigma = 0 \quad , \quad \Delta (n^\alpha \partial_\alpha A^\mu)|_\Sigma = -\tilde{\theta} n_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\beta}{}_\nu \partial_\beta A^\nu|_\Sigma. \quad (1.39)$$

Aquí n_α es la normal unitaria a Σ , que depende de la geometría de la interfaz θ . Uno puede verificar que las condiciones de frontera de la Ec. (1.39) coinciden con las que se obtienen de las Ecs. (1.14)-(1.16) a partir de las ecuaciones de Maxwell modificadas.

Para obtener la solución general para los potenciales ϕ y \mathbf{A} en presencia de fuentes externas arbitrarias $j^\mu(\mathbf{x})$, introducimos la matriz de funciones de Green $G^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, que es solución de la Ec. (1.38) para una fuente puntual, *i.e.*

$$\left[-\eta^\mu{}_\nu \nabla^2 - \tilde{\theta} \delta(\Sigma) n_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\beta}{}_\nu \partial_\beta \right] G^\nu{}_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \eta^\mu{}_\sigma \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.40)$$

junto con las condiciones de frontera de la Ec. (1.39). En la sección siguiente discutiremos la solución general de la Ec. (1.40), para ello, requerimos adaptar de forma apropiada el teorema de Green estándar, a partir del que se puede construir la solución de la Ec. (1.40) usando los métodos ya conocidos.

1.2.1. Teorema de Green y condiciones de frontera en Σ

Comenzamos esta sección introduciendo el operador diferencial

$$\mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i = \eta^\mu{}_\nu \partial^i + \tilde{\theta} \delta(\Sigma) n_j \epsilon^{j\mu}{}_\nu{}^i, \quad (1.41)$$

de donde se puede demostrar que las relaciones $\mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i \partial_i A^\nu = 4\pi j^\mu$ y $\mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i \partial_i G^\nu{}_\sigma = 4\pi \eta^\mu{}_\sigma \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, reproducen correctamente las ecuaciones diferenciales para el cuadripotencial en la Ec. (1.38) y para la matriz de Green en la Ec. (1.40). Aquí los índices i, j van de 1 a 3, mientras que μ, ν van de 0 a 3. Estas elecciones reflejan que estamos trabajando con campos estáticos y que la normal a la interfaz θ es siempre espacial.

El teorema de Green apropiado puede escribirse en términos de dos campos arbitrarios, X_μ y Z^ν . Definiendo el tensor $T^i{}_\sigma = X_\mu \mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i Z^\nu{}_\sigma$, usando el teorema de la divergencia para $\partial_i T^i{}_\sigma$ y restando la ecuación que se obtiene del intercambio $X \leftrightarrow Z$ obtenemos

$$\oint_S dS n_i (X_\mu \mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i Z^\nu{}_\sigma - Z^\nu{}_\sigma \mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i X_\mu) = \int_V d^3x [X_\mu \mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i (\partial_i Z^\nu{}_\sigma) - Z^\nu{}_\sigma \mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i (\partial_i X_\mu)] \quad (1.42)$$

$$- \int_V d^3x [(\partial_i X_\mu) \mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i Z^\nu{}_\sigma - (\partial_i Z^\nu{}_\sigma) \mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i X_\mu],$$

donde \mathbf{n} es la normal saliente de la superficie S que rodea el volumen V . Para derivar la Ec. (1.42) usamos el resultado $\partial_i \mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i = \mathcal{O}^\mu{}_\nu{}^i \partial_i$, que se sigue directamente de la Ec. (1.41).

Sustituyendo las Ecs. (1.38) y (1.40) en la Ec. (1.42), encontramos que la solución

general para el cuadripotencial en la norma de Coulomb es

$$A^\mu(\mathbf{x}) = \int_V d^3x' G^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j^\nu(\mathbf{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \mathbf{n}_i [A_\nu(\mathbf{x}') \partial^i G^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \partial^i A_\nu(\mathbf{x}')] + \frac{\tilde{\theta}}{4\pi} \int_\Sigma d^2\mathbf{x}'_\Sigma n_j \epsilon^{j\alpha}{}_\nu{}^i [A_\alpha(\mathbf{x}') \partial_i G^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \partial_i A_\alpha(\mathbf{x}')]_\Sigma, \quad (1.43)$$

donde n_j es la normal a la interfaz θ . Este resultado puede interpretarse de la manera usual, donde el primer término es la contribución de las fuentes al interior del volumen V , el segundo término representa los efectos de la superficie de contorno $S = \partial V$, mientras que el término restante, reemplaza las contribuciones de la superficie S por los de la interfaz θ .

Ahora consideraremos el problema de establecer las condiciones de frontera apropiadas para los campos en la interfaz θ , cuando tomamos a S como la superficie al infinito en donde se imponen las condiciones de frontera usuales. Por inspección, vemos que la Ec. (1.43) revela que hay cuatro clases de condiciones de frontera sobre Σ que especifican una solución.

La clase BC-I se define fijando sobre Σ el potencial escalar A^0 y el potencial vectorial paralelo a la interfaz θ , $\mathbf{n} \times \mathbf{A}$, junto con las condiciones $n_j \epsilon^{j\alpha}{}_\nu{}^i G^{\mu\nu}|_\Sigma = 0$ sobre Σ . Esta clase describe el caso que corresponde a la analogía más cercana con la condición de frontera estándar de Dirichlet. Además, es la única clase en la que la función de Green es independiente del área de la interfaz θ . En la sección 1.3, usamos la BC-I para resolver el problema de una carga puntual frente a una interfaz θ plana a potenciales fijos.

La clase BC-II se define fijando sobre Σ la componente normal del campo magnético \mathbf{B}_n y las componentes paralelas del campo eléctrico $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$, más las condiciones $n_j \epsilon^{j\alpha}{}_\nu{}^i \partial_i G^{\mu\nu}|_\Sigma = 1/A_\theta$, donde $A_\theta = \int d^2\mathbf{x}_\Sigma$ es el área de la interfaz θ . Esta clase corresponde a la condición de frontera de Neumann de la electrostática estándar, que incorpora el factor que depende del inverso del área de la superficie, generando así, un término en la solución que involucra el promedio del potencial.

La clase BC-III fija el potencial escalar A^0 y la componente normal del campo magnético \mathbf{B}_n en Σ , junto con las condiciones $n_j \epsilon^{j0}{}_k{}^i G^{\mu k}|_\Sigma = 0$ y $n_j \epsilon^{jk}{}^i \partial_i G^{\mu 0}|_\Sigma = 1/A_\theta$. La clase BC-IV requiere de especificar $\mathbf{n} \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ en Σ . Para esta clase también debemos pedir $n_j \epsilon^{jk}{}^i G^{\mu 0}|_\Sigma = 0$ y $n_j \epsilon^{j0}{}_k{}^i \partial_i G^{\mu k}|_\Sigma = 1/A_\theta$.

En las siguientes subsecciones, construimos la función de Green para diferentes geometrías de la interfaz θ , considerando aquellas que pueden ser de mayor relevancia en trabajos experimentales, estas son: plana, esférica y cilíndrica. Por otra parte, habiendo elegido la superficie S en el infinito, con las condiciones de frontera estándar ahí, nos limitaremos al caso en que no se especifica ninguna condición adicional para los campos en la

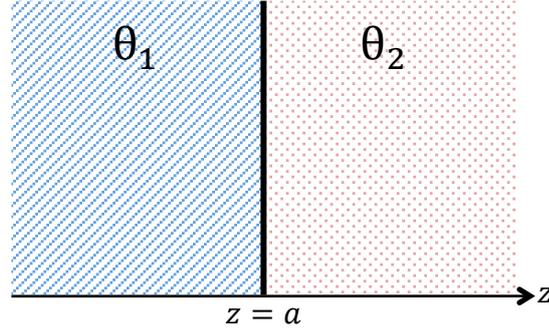


Figura 1.4: Medios semi-infinitos separados por una interfaz θ plana.

interfaz θ . De esta manera, A^μ estará determinada por el primer término del lado derecho de la Ec. (1.43).

1.2.2. Interfaz θ plana

El caso de simetría plana para la interfaz θ es el caso más simple posible en el que el valor de θ cambia abruptamente en el plano Σ y permanece constante en ambos lados de Σ . Por simplicidad elegimos a Σ como el plano definido por $z = a$, como se muestra en la figura 1.4. De esta manera, las coordenadas adaptadas para este sistema son las Cartesianas. La GF que consideramos, tiene invariancia bajo traslaciones en las direcciones paralelas al plano Σ , esto es, en las direcciones transversales x y y , pero la invariancia está rota en la dirección z . Explotamos esta simetría introduciendo la transformada de Fourier en la dirección paralela al plano Σ , tomando la dependencia en estas coordenadas de la forma $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\parallel} = (x - x', y - y')$ y definiendo

$$G^{\mu}_{\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\parallel}} g^{\mu}_{\nu}(z, z', \mathbf{p}), \quad (1.44)$$

donde $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ es el momento paralelo al plano Σ y $g^{\mu}_{\nu}(z, z', \mathbf{p})$ es la función de Green reducida (GF reducida) [99]. De aquí en adelante suprimimos la dependencia en \mathbf{p} de la GF reducida g^{μ}_{ν} .

La ecuación diferencial que satisface la función de Green en este caso es la Ec. (1.40), con la normal a la superficie $n_{\mu} = \eta^3_{\mu} = (0, 0, 0, 1)$. Debido a la antisimetría del símbolo de Levi-Civita, la derivada parcial que aparece en el segundo término de la Ec. (1.40), no introduce derivadas respecto de z , sino sólo en las coordenadas transversales x y y . Esto

nos permite escribir la ecuación para la función de Green reducida como

$$\left[\partial^2 \eta^\mu{}_\nu + i\tilde{\theta} \delta(z-a) \epsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu p_\alpha \right] g^\nu{}_\sigma(z, z') = \eta^\mu{}_\sigma \delta(z-z'), \quad (1.45)$$

donde $\partial^2 = \mathbf{p}^2 - \partial_z^2$, $p^\alpha = (0, \mathbf{p})$ y $\mathbf{p}^2 = -p^\alpha p_\alpha$. La solución a la Ec. (1.45) es simple, pero no obvia. Para resolverla empleamos un método similar al que se usa para obtener la GF para el potencial δ unidimensional en mecánica cuántica, donde la GF libre se usa para integrar la ecuación de Green con la interacción δ . Siguiendo la misma idea, consideramos una GF reducida de la forma $\mathcal{G}^\mu{}_\nu(z, z') = \mathbf{g}(z, z') \eta^\mu{}_\nu$, asociada al operador ∂^2 que definimos previamente, y que es solución de

$$\partial^2 \mathcal{G}^\mu{}_\nu(z, z') = \eta^\mu{}_\nu \delta(z-z'), \quad (1.46)$$

que además satisface la condición de borde estándar al infinito, donde

$$\mathbf{g}(z, z') = \frac{1}{2p} e^{-p|z-z'|} \quad (1.47)$$

y $p = |\mathbf{p}|$. Nótese que la Ec. (1.46) exige que la derivada de \mathbf{g} sea discontinua en $z = z'$, i.e., $\partial_z \mathbf{g}(z, z') \Big|_{z=z'^-}^{z=z'^+} = -1$, y de donde se sigue la continuidad de \mathbf{g} en $z = z'$ [99].

Ahora observamos que la Ec. (1.45), puede integrarse directamente usando la GF libre de la Ec. (1.46) junto con las propiedades de la función delta de Dirac, reduciéndose así a un conjunto de ecuaciones algebraicas acopladas,

$$g^\mu{}_\sigma(z, z') = \eta^\mu{}_\sigma \mathbf{g}(z, z') - i\tilde{\theta} \epsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu p_\alpha \mathbf{g}(z, a) g^\nu{}_\sigma(a, z'). \quad (1.48)$$

Nótese que la continuidad de \mathbf{g} en $z = z'$ implica la continuidad de $g^\mu{}_\sigma$, y que la discontinuidad de $\partial_z \mathbf{g}$ en el mismo punto implica

$$\partial_z g^\mu{}_\sigma(z, z') \Big|_{z=a^-}^{z=a^+} = -i\tilde{\theta} \epsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu p_\alpha \partial_z \mathbf{g}(z, a) \Big|_{z=a^-}^{z=a^+} g^\nu{}_\sigma(a, z') = i\tilde{\theta} \epsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu p_\alpha g^\nu{}_\sigma(a, z'), \quad (1.49)$$

de donde se recuperan las condiciones de borde para el cuadripotencial, dadas en la Ec. (1.39). De esta manera, la solución (1.48) garantiza que se satisfacen las condiciones de frontera en la interfaz θ .

Ahora debemos resolver para todas las componentes de la GF reducida $g^\mu{}_\sigma$. Para hacerlo, separamos la Ec. (1.48) en sus componentes $\mu = 0$ y $\mu = j = 1, 2, 3$;

$$g^0{}_\sigma(z, z') = \eta^0{}_\sigma \mathbf{g}(z, z') - i\tilde{\theta} \epsilon^{30i}{}_j p_i \mathbf{g}(z, a) g^j{}_\sigma(a, z'), \quad (1.50)$$

$$g^j{}_\sigma(z, z') = \eta^j{}_\sigma \mathbf{g}(z, z') - i\tilde{\theta} \epsilon^{3ji}{}_0 p_i \mathbf{g}(z, a) g^0{}_\sigma(a, z'). \quad (1.51)$$

Ahora evaluamos la Ec. (1.51) en $z = a$ y luego sustituímos el resultado en la Ec. (1.50). Se obtiene

$$g^0_{\sigma}(z, z') = \eta^0_{\sigma} \mathbf{g}(z, z') - i\tilde{\theta} \epsilon^{30i} p_i \eta^j_{\sigma} \mathbf{g}(z, a) \mathbf{g}(a, z') - \tilde{\theta}^2 p^2 \mathbf{g}(z, a) \mathbf{g}(a, a) g^0_{\sigma}(a, z'), \quad (1.52)$$

donde se usó el resultado $\epsilon^{30i} p_i \epsilon^{3jk} p_k p_j = p^2$. Resolvemos para $g^0_{\sigma}(a, z')$ evaluando la Ec. (1.52) en $z = a$ y haciendo un simple despeje. Insertando este resultado en la misma ecuación obtenemos

$$g^0_{\sigma}(z, z') = \eta^0_{\sigma} \left[\mathbf{g}(z, z') + \tilde{\theta} p^2 \mathbf{g}(a, a) A(z, z') \right] + i\epsilon^{30i} p_i A(z, z'), \quad (1.53)$$

donde

$$A(z, z') = -\tilde{\theta} \frac{\mathbf{g}(z, a) \mathbf{g}(a, z')}{1 + p^2 \tilde{\theta}^2 \mathbf{g}^2(a, a)}. \quad (1.54)$$

Las componentes restantes se obtienen sustituyendo $g^0_{\sigma}(a, z')$ en la Ec. (1.51). El resultado es

$$g^j_{\sigma}(z, z') = \eta^j_{\sigma} \mathbf{g}(z, z') + i\epsilon^{3jk} p_k \left[\eta^0_{\sigma} - i\tilde{\theta} \epsilon^{30i} p_i \mathbf{g}(a, a) \right] A(z, z'). \quad (1.55)$$

Las ecuaciones (1.53) y (1.55) nos permiten escribir la solución general como

$$g^{\mu}_{\nu}(z, z') = \eta^{\mu}_{\nu} \mathbf{g}(z, z') + A(z, z') \left\{ \tilde{\theta} \mathbf{g}(a, a) [p^{\mu} p_{\nu} + (\eta^{\mu}_{\nu} + n^{\mu} n_{\nu}) p^2] + i\epsilon^{\mu}_{\nu} p^{\alpha} p_{\alpha} \right\}, \quad (1.56)$$

donde $n_{\mu} = (0, 0, 0, 1)$ es la normal a Σ .

La reciprocidad entre la posición de la carga puntual unitaria y la posición en donde se evalúa la GF, $G_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_{\nu\mu}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, es una de sus propiedades más importantes. De la Ec. (1.44) se observa que esta condición exige que

$$g_{\mu\nu}(z, z', \mathbf{p}) = g_{\nu\mu}(z', z, -\mathbf{p}), \quad (1.57)$$

que se puede verificar directamente de la Ec. (1.56). La simetría $g_{\mu\nu}(z, z') = g^*_{\nu\mu}(z, z') = g^{\dagger}_{\mu\nu}(z, z')$ es evidente.

Las componentes de la matriz de GF estática en la representación de coordenadas, pueden obtenerse calculando la transformada de Fourier definida en la Ec. (1.44), con la GF reducida de la Ec. (1.56). Los detalles de la integración se presentan en el Apéndice

A. Los resultados finales son

$$G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + Z^2}}, \quad (1.58)$$

$$G^0_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\epsilon_{0ij3} R^j}{R^2} \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \right), \quad (1.59)$$

$$G^i_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \eta^i_j G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \frac{i}{2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \partial^i K_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (1.60)$$

donde $Z = |z - a| + |z' - a|$, $R^j = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^j_{\parallel} = (x - x', y - y')$, $R = |(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\parallel}|$ y

$$K^j(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2i \frac{\sqrt{R^2 + Z^2} - Z}{R^2} R^j. \quad (1.61)$$

Finalmente, observamos que las Ecs. (1.58)-(1.60) contienen todas las componentes de la matriz de GF en todo el espacio, dependiendo de la elección de z y z' en la función Z .

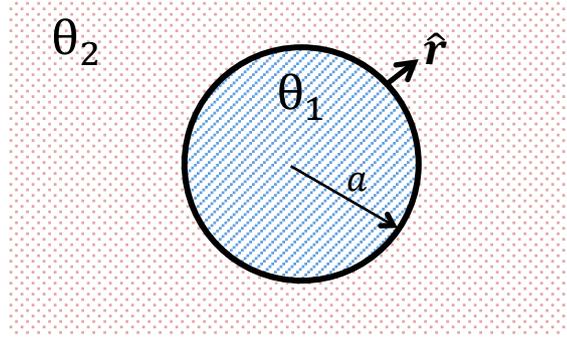
1.2.3. Interfaz θ esférica

En la sección anterior, se usó el método de la función de Green para discutir el problema de distribuciones de cargas y corrientes arbitrarias en presencia de una interfaz θ plana. En esta sección, seguimos el mismo procedimiento para discutir el caso esférico, en donde el valor de θ tiene una discontinuidad finita en la superficie $r = a$ de la esfera, como se muestra en la figura 1.5. En las coordenadas adaptadas (r, ϑ, φ) , es conveniente introducir explícitamente el operador de momento angular $\hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{i} \mathbf{x} \times \nabla$ y explotar la simetría ante rotaciones de esta configuración. De hecho, la ecuación diferencial que satisface la GF (1.40), con normal unitaria $n_\mu = (0, \sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ a la interfaz θ , puede escribirse como

$$\left[-\eta^\mu_\alpha \nabla^2 - i \frac{\tilde{\theta}}{a} \delta(r - a) (\eta^\mu_0 \eta^k_\alpha - \eta^{\mu k} \eta^0_\alpha) \hat{\mathbf{L}}_k \right] G^\alpha_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \eta^\mu_\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.62)$$

con $k = 1, 2, 3$. Dado que el cuadrado del operador de momento angular $\hat{\mathbf{L}}^2$ conmuta con el operador que aparece del lado izquierdo de la Ec. (1.62), su solución será de la forma

$$G^\mu_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sum_{m'=-l}^{+l} g^\mu_{lmm',\nu}(r, r') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm'}^*(\vartheta', \varphi'), \quad (1.63)$$


 Figura 1.5: Aislantes topológicos con interfaz θ esférica.

donde la GF reducida $g_{lmm',\nu}^\mu(r, r')$ satisface la ecuación diferencial

$$\hat{\mathcal{O}}_r g_{lmm',\nu}^\mu(r, r') = \eta^\mu{}_\nu \frac{\delta(r-r')}{r^2} \delta_{mm'} + i \frac{\tilde{\theta}}{a} \delta(r-a) (\eta^\mu{}_0 \eta^k{}_\alpha - \eta^{\mu k} \eta^0{}_\alpha) \times \sum_{m''=-l}^{+l} \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_k | lm'' \rangle g_{lm''m',\nu}^\alpha(r, r'), \quad (1.64)$$

siendo $\hat{\mathcal{O}}_r = l(l+1)r^{-2} - r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r)$. Esta ecuación puede integrarse de la misma manera en que se hizo para el caso con simetría plana. Los detalles del cálculo se presentan en el Apéndice B. La solución es

$$g_{lmm',\nu}^\mu(r, r') = \eta^\mu{}_\nu \mathbf{g}_l(r, r') \delta_{mm'} - a^2 \tilde{\theta}^2 l(l+1) \mathbf{g}_l(a, a) S_l(r, r') \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_\mu \hat{\mathbf{L}}_\nu | lm' \rangle + ia \tilde{\theta} S_l(r, r') \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_\alpha | lm' \rangle (\eta^\mu{}_0 \Gamma^\alpha{}_\nu + \Gamma^{\mu\alpha} \eta^0{}_\nu), \quad (1.65)$$

donde $\hat{\mathbf{L}}_0$ es el operador identidad, el operador $\Gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \eta^\mu{}_0 \eta^\nu{}_0$ proyecta 4-vectores al 3-espacio, y

$$S_l(r, r') = \frac{\mathbf{g}_l(r, a) \mathbf{g}_l(a, r')}{1 + a^2 \tilde{\theta}^2 l(l+1) \mathbf{g}_l^2(a, a)}. \quad (1.66)$$

Aquí $\mathbf{g}_l(r, r')$ es solución de la ecuación diferencial para la GF reducida en ausencia de la interfaz θ , *i.e.* $\hat{\mathcal{O}}_r \mathbf{g}_l(r, r') = \delta(r-r')/r^2$. En la Sección 1.3 resolvemos el problema de una carga puntual cerca de una interfaz θ esférica.

1.2.4. Interfaz θ cilíndrica

En esta sección discutiremos el problema de distribuciones arbitrarias de cargas y corrientes en presencia de una interfaz θ cilíndrica. Consideremos un cilindro infinito cuyo eje define al eje z , tal que el valor de θ tiene una discontinuidad finita a través de

la superficie $\rho = a$, como se muestra en la Fig. 1.6. De esta manera, las coordenadas adaptadas que debemos usar son las cilíndricas, (ρ, φ, z) , y la ecuación diferencial para la GF (1.40) es

$$\left[-\eta^\mu{}_\nu \nabla^2 - \tilde{\theta} \delta(\rho - a) n_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\beta}{}_\nu \partial_\beta \right] G^\nu{}_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \eta^\mu{}_\sigma \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.67)$$

donde $n_\alpha = (0, \cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ es la normal a la interfaz θ . La GF debe ser invariante ante traslaciones en el eje z . De acuerdo con esta simetría, comenzamos por escribir la solución de la Ec. (1.67) como sigue

$$G^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} g_{mm',\nu}^\mu(\rho, \rho'; k) e^{i(m\varphi - m'\varphi)}. \quad (1.68)$$

donde la GF reducida $g_{mm',\nu}^\mu(\rho, \rho'; k)$ satisface la ecuación diferencial

$$\hat{O}_\rho^{(m)} g_{mm',\sigma}^\mu - i\tilde{\theta} \delta(\rho - a) \left[k \sum_{m''=-\infty}^{+\infty} A_{m''m,\nu}^\mu g_{m''m',\sigma}^\nu + \epsilon^{1\mu 2}{}_\nu \frac{m}{\rho} \delta_{mm'} g_{mm',\sigma}^\nu \right] = \eta^\mu{}_\sigma \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta_{mm'}, \quad (1.69)$$

donde

$$\hat{O}_\rho^{(m)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{m^2}{\rho^2} + k^2, \quad A_{mm'',\nu}^\mu = \frac{1}{2} [\delta_{m,m''-1} \tilde{\epsilon}^{\mu*}{}_\nu + \delta_{m,m''+1} \tilde{\epsilon}^\mu{}_\nu], \quad (1.70)$$

con $\tilde{\epsilon}^\mu{}_\nu = \epsilon^{1\mu 3}{}_\nu + i\epsilon^{2\mu 3}{}_\nu$. Esta ecuación puede integrarse de la misma manera en que lo hicimos para los casos plano y esférico. Los detalles de los cálculos se presentan en el Apéndice C. La solución es

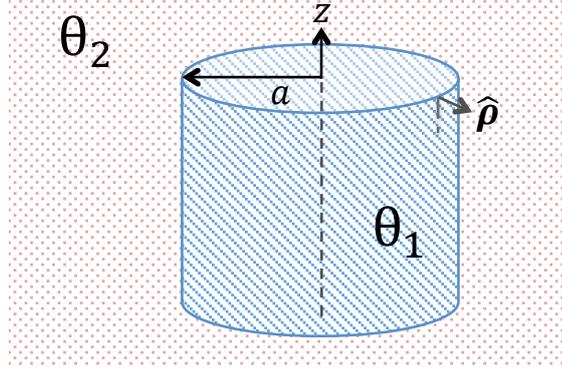
$$g_{mm',\sigma}^0(\rho, \rho') = \eta^0{}_\sigma \delta_{mm'} \left[\mathfrak{g}_m(\rho, \rho') - \tilde{\theta}^2 \mathfrak{f}_m(k) C_{mm}(\rho, \rho') \right] + i\tilde{\theta} (m\delta_{mm'} \eta^3{}_\sigma + ka A_{m'm,\sigma}^0) C_{mm'}(\rho, \rho'), \quad (1.71)$$

$$g_{mm',\sigma}^3(\rho, \rho') = \eta^3{}_\sigma \delta_{mm'} \left[\mathfrak{g}_m(\rho, \rho') - m^2 \tilde{\theta}^2 \mathfrak{g}_m(a, a) C_{mm}(\rho, \rho') \right] + im\tilde{\theta} \left(\eta^0{}_\sigma + ika \tilde{\theta} A_{mm',\sigma}^0 \right) C_{mm'}(\rho, \rho'), \quad (1.72)$$

$$g_{mm',j}^i(\rho, \rho') = \eta^i{}_j \delta_{mm'} \mathfrak{g}_m(\rho, \rho') - \tilde{\theta}^2 k^2 a^2 \mathfrak{g}_m(\rho, a) \sum_{m''=-\infty}^{+\infty} A_{m''m,0}^j A_{m''m',j}^0 C_{m''m'}(a, \rho'), \quad (1.73)$$

donde

$$\mathfrak{f}_m(k) = m^2 \mathfrak{g}_m(a, a) + \frac{k^2 a^2}{2} [\mathfrak{g}_{m+1}(a, a) + \mathfrak{g}_{m-1}(a, a)] \quad (1.74)$$


 Figura 1.6: Medios con interfaz θ cilíndrica.

y

$$C_{mm'}(\rho, \rho') = \frac{\mathfrak{g}_m(\rho, a) \mathfrak{g}_{m'}(a, \rho')}{1 + \tilde{\theta}^2 \mathfrak{f}_m(k) \mathfrak{g}_m(a, a)}. \quad (1.75)$$

Aquí $\mathfrak{g}_{m'}(\rho, \rho')$ es solución de la ecuación diferencial para la GF reducida (1.69) en ausencia de la interfaz θ . Nótese que las componentes restantes $\mu\nu$ de la matriz de GF pueden obtenerse de la propiedad de simetría

$$g_{mm',\mu\nu}(\rho, \rho'; k) = g_{m'm,\nu\mu}(\rho', \rho; -k). \quad (1.76)$$

1.3. Aplicaciones

1.3.1. Carga puntual cerca de una interfaz θ plana

Consideremos una carga puntual q localizada a una distancia $b > 0$ de una interfaz θ , definida por el plano $z = 0$. La región $z < 0$ está llena de un TI no trivial con TMEP $\theta \neq 0$, mientras que la región $z > 0$ es el vacío, como se muestra en la figura 1.7. Por simplicidad, elegimos las coordenadas tal que $x' = y' = 0$. De esta forma, la densidad de corriente puede escribirse como $j^\mu(\mathbf{x}') = q\eta^\mu_0 \delta(x') \delta(y') \delta(z' - b)$. De acuerdo a la Ec. (1.43), la solución para este problema es

$$A^\mu(\mathbf{x}) = qG^\mu_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}), \quad (1.77)$$

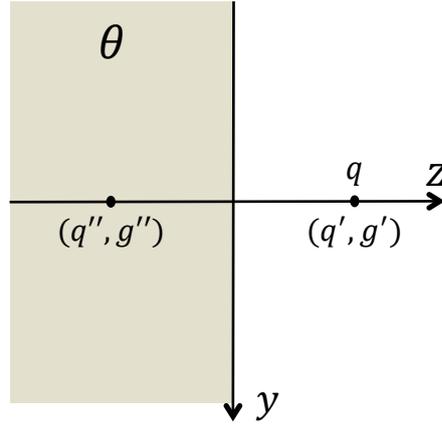


Figura 1.7: La figura ilustra una carga eléctrica q localizada a una distancia b de una interfaz θ definida por el plano $z = 0$. La región $z < 0$ está caracterizada por un TI no trivial ($\theta \neq 0$), mientras que la región $z > 0$ es el vacío ($\theta = 0$). En la región $z > 0$ el campo eléctrico es originado por la carga original q y por la carga imagen q'' , mientras que el campo magnético es originado por el monopolo g'' . En la región $z < 0$ los campos eléctrico y magnético son originados por la carga q' y monopolo g' imagen, respectivamente.

donde $\mathbf{r} = b\hat{\mathbf{e}}_z$. Primero estudiaremos el potencial electrostático. De la Ec. (1.58) obtenemos la componente 00 de la GF:

$$z > 0 \quad : \quad G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{r}|}, \quad (1.78)$$

$$z < 0 \quad : \quad G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{4}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}. \quad (1.79)$$

Para $z > 0$ la GF nos da el potencial electrostático $A^0(\mathbf{x}) = qG^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})$, que puede interpretarse como el debido a un par de cargas puntuales, la primera de magnitud q en \mathbf{r} , y la otra, la carga imagen, de magnitud $q'' = -q\tilde{\theta}^2/(4 + \tilde{\theta}^2)$, en el punto $-\mathbf{r}$. Para $z < 0$ sólo aparece una carga imagen, de magnitud $q' = 4q/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizada en \mathbf{r} .

De la Ec. (1.77) vemos que dos componentes del potencial vectorial no son cero, $A^1(\mathbf{x}) = qG^1_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ y $A^2(\mathbf{x}) = qG^2_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})$. Las componentes de la GF correspondientes para cada región son

$$G^1_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = +\frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{y}{R^2} \begin{cases} 1 - \frac{z+b}{|\mathbf{x}+\mathbf{r}|} & , \quad z > 0 \\ 1 + \frac{z-b}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}|} & , \quad z < 0 \end{cases} \quad (1.80)$$

$$G^2_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = -\frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{x}{R^2} \begin{cases} 1 - \frac{z+b}{|\mathbf{x}+\mathbf{r}|} & , \quad z > 0 \\ 1 + \frac{z-b}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}|} & , \quad z < 0 \end{cases} \quad (1.81)$$

de acuerdo a las Ec. (1.59). Es difícil interpretar las componentes del potencial vectorial directamente, sin embargo el campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ es iluminante. Se obtiene

$$z > 0 \quad : \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{-2q\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{x} + \mathbf{r}}{|\mathbf{x} + \mathbf{r}|^3}, \quad (1.82)$$

$$z < 0 \quad : \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{2q\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3}. \quad (1.83)$$

Observamos que el campo magnético para $z > 0$ es debido a un monopolo magnético de magnitud $g'' = -2q\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizado en $-\mathbf{r}$. Para $z < 0$ tenemos un monopolo magnético de magnitud $g' = +2q\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizado en \mathbf{r} .

La solución muestra que, para una carga eléctrica cerca de la superficie plana de un aislante topológico, se inducen cargas eléctricas y magnéticas. La aparición de monopolos magnéticos en esta solución parece violar la ley de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que permanece sin alteraciones en el caso de la ED θ . Sin embargo, recordando que $(\mathbf{x} \pm \mathbf{r})/|\mathbf{x} \pm \mathbf{r}|^3 \sim \nabla_x(1/|\mathbf{x} \pm \mathbf{r}|)$, obtenemos $\nabla \cdot \mathbf{B} \sim \nabla_x^2(1/|\mathbf{x} \pm \mathbf{r}|) \sim \delta(\mathbf{x} \pm \mathbf{r})$ en una región donde $\mathbf{x} \neq \pm \mathbf{r}$. Físicamente, el campo magnético es inducido por la densidad de corriente en la superficie

$$\mathbf{J} = \tilde{\theta} \delta(z) \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \frac{4q\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\rho}{(\rho^2 + b^2)^{3/2}} \delta(z) \hat{\varphi}, \quad (1.84)$$

que circula alrededor del origen. Aquí $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia radial y $\hat{\varphi}$ es el vector tangente unitario. Esta corriente es la corriente de Hall, que da origen a un campo magnético que tiene la forma correcta del que se esperaría debido a un monopolo magnético. Cabe mencionar que estos resultados ya se han obtenido usando diferentes métodos. Por ejemplo, los autores en la Ref. [74] usan el método de imágenes para demostrar que una carga eléctrica cerca de la superficie de un aislante topológico induce monopolos magnéticos debido al TME y, por supuesto, enfatizan su posible verificación experimental.

Vamos a aclarar la diferencia entre la ED θ que estudiamos en este trabajo y el modelo 1/2 BPS en una interfaz delgada que se discute en la Ref. [89]. Como discuten los autores, las 8 supersimetrías restantes del modelo 1/2 BPS son obligatorias al pedir que las constantes de acoplamiento estén relacionadas de la siguiente manera

$$\frac{1}{e^2(z)} = D \sin 2\psi(z) \quad , \quad \theta(z) = \theta_0 + 8\pi^2 D \cos 2\psi(z) \quad , \quad (1.85)$$

donde podemos elegir valores constantes ψ_1 y ψ_2 para $z > 0$ y $z < 0$, respectivamente. La constricción (1.85) no permite hacer simultáneamente $e_1 = e_2$ y $\theta_1 \neq \theta_2$, que correspon-

dería al caso de la ED θ , en donde la supersimetría es irrelevante. En otras palabras, el límite $g = 0$ en los campos eléctrico y magnético debido a un dyon en $z = a$ (Ec. (5.10) de la Ref. [90]), que se calcularon usando el método de imágenes, no reproducen los campos que obtuvimos en nuestras Ecs. (1.78), (1.79), (1.82) y (1.83). Además, los campos EM transmitido y reflejado de ondas sin masa propagándose a través de una interfaz plana, reportados en la Ref. [90], no corresponden a los calculados en ED θ en las Refs. [30, 31]. Cabe señalar que estos acoplamientos se introducen por medio del parámetro complejo $\tau = \theta/2\pi + 4\pi i/g^2$, que es familiar en el estudio de la acción del grupo $SL(2, \mathbb{Z})$ en aislantes topológicos con permitividad, permeabilidad y ángulo θ no triviales [104].

1.3.2. Fuerza entre una carga puntual y una interfaz θ plana

En esta sección se formula la energía de interacción y las fuerzas que surgen entre fuentes externas y los TIs (representados por la interfaz θ). Usaremos dos enfoques distintos, pero equivalentes: la función de Green y el tensor de energía-impulso.

La energía de interacción entre una distribución de cargas y corrientes, y un aislante topológico, es

$$E_{int} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' j^\mu(\mathbf{x}) [G_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \eta_{\mu\nu}\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] j^\nu(\mathbf{x}'), \quad (1.86)$$

donde $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ es la GF de vacío. La primera contribución representa la energía total de una distribución de cargas y corrientes en presencia de una interfaz θ , incluyendo interacciones mutuas. A continuación evaluaremos esta energía para el caso que consideramos en la sección anterior, el de una carga puntual localizada en $\mathbf{r} = b\hat{\mathbf{e}}_z$. Usando la Ec. (1.78), la energía de interacción resulta

$$E_{int} = \frac{q^2}{2} [G_{00}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r})] = -\frac{q^2}{2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{2b}, \quad (1.87)$$

Esto implica que la fuerza sobre la carga ejercida por la interfaz θ es

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial E_{int}}{\partial b} \hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{q^2}{(2b)^2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (1.88)$$

notando que siempre es atractiva. Esto puede interpretarse como la fuerza entre la carga q y la carga imagen $q'' = -q\tilde{\theta}^2/(4 + \tilde{\theta}^2)$ de acuerdo a la ley de Coulomb.

El punto de vista de los campos proporciona una derivación alternativa de este resultado. Para obtener la fuerza sobre la carga, debemos calcular la componente normal del flujo de momento a través de la interfaz θ . En términos del tensor de energía-impulso esta

fuerza es

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{e}}_z \int_{\Sigma^+} dS T_{zz}(\Sigma^+), \quad (1.89)$$

donde la integración se hace sobre la superficie Σ^+ , justo afuera de la interfaz θ , en $z = 0^+$. Como se discutió, el tensor de energía-impulso se identifica a partir de la electrodinámica de Maxwell en medios materiales, pero con las relaciones constitutivas modificadas (1.12). La expresión que requerimos para $T_{zz}(\Sigma^+)$ la leemos del resultado de la Ec. (1.36), que es

$$T_{zz} = \frac{1}{8\pi} [E_{\parallel}^2 - E_z^2 + B_{\parallel}^2 - B_z^2], \quad (1.90)$$

donde E_z (B_z) denota la componente normal a la superficie del campo eléctrico (magnético) y E_{\parallel} (B_{\parallel}) es la componente del campo eléctrico (magnético) paralelo a la superficie. De acuerdo a los resultados de la sección anterior, los campos eléctrico y magnético en la región $z > 0$ son

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} - q \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{x} + \mathbf{r}}{|\mathbf{x} + \mathbf{r}|^3}, \quad (1.91)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{2q\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{x} + \mathbf{r}}{|\mathbf{x} + \mathbf{r}|^3}. \quad (1.92)$$

De esta forma encontramos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{4} \frac{q^2}{(4 + \tilde{\theta}^2)^2} \hat{\mathbf{e}}_z \int_0^\infty dR \frac{R}{(R^2 + b^2)^3} [16R^2 - (4 + 2\tilde{\theta}^2)^2 b^2 + 4\tilde{\theta}^2 (R^2 - b^2)] \\ &= -\frac{q^2}{(2b)^2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned} \quad (1.93)$$

que concuerda con el resultado de la Ec. (1.88).

1.3.3. Carga puntual cerca de una interfaz θ plana a potenciales fijos

Ahora estudiaremos el problema de una carga puntual que se coloca cerca de una interfaz θ plana que se encuentra a potencial fijo. Este caso pertenece a la clase BC-I de las condiciones de frontera en dicha interfaz. Consideremos una carga puntual q localizada a una distancia b de la interfaz θ definida por el plano $z = 0$, y que está a potenciales cero $(A^0, \mathbf{A}_{\parallel}) = (0, \mathbf{0})$, como se muestra en la figura 1.8. No se consideran superficies adicionales. Las condiciones de frontera se reducen a pedir que la función de Green completa, $(G_I)^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, se anule en la interfaz.

Como se discutió en las subsecciones anteriores, el problema de una carga puntual

frente a una interfaz θ plana es equivalente al problema de la carga original junto con una carga eléctrica y monopolo magnético localizados en el punto imagen atrás del plano. Estos campos eléctrico y magnético, reproducen las condiciones de frontera de la Ecs. (1.13)-(1.16), inducidas por la discontinuidad finita en el valor de θ .

El problema en cuestión puede resolverse en términos de imágenes. Siguiendo pasos similares a los del caso estándar, la función de Green correspondiente, $(G_I)^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, puede construirse como

$$(G_I)^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + F^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (1.94)$$

donde se ha sumado la matriz $F^\mu{}_\nu$, que satisface la ecuación homogénea

$$\left[-\eta^\mu{}_\nu \nabla^2 - \tilde{\theta} \delta(z) \epsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu \partial_\alpha \right] F^\nu{}_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0. \quad (1.95)$$

Esta libertad en la definición de la función de Green nos permite elegir apropiadamente la matriz $F^\mu{}_\nu$ de tal manera que $(G_I)^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ para \mathbf{x}' en Σ . Consideremos una carga puntual localizada en $z' > 0$, y supongamos que $z > 0$. Las componentes de la GF que resuelven este problema con la condición de borde requerida en $z = 0$ son

$$G^0{}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|}, \quad (1.96)$$

$$G^0{}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\epsilon_{0ij3}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^j}{R^2} \left(1 - \frac{z + z'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \right), \quad (1.97)$$

donde $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ denota la posición de la carga y $\mathbf{x}'' = (x', y', -z')$ indica la posición de las imágenes.

Respecto al problema de la función de Green que satisface la clase BC-I, encontramos que

$$(G_I)^0{}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G^0{}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G^0{}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \left(1 + \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \right) \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \right), \quad (1.98)$$

$$(G_I)^0{}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G^0{}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G^0{}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\epsilon_{0ij3}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^j}{R^2} \left(\frac{z + z'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} - \frac{z - z'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \quad (1.99)$$

que en efecto se anulan en $z' = 0$. Interpretamos los campos como sigue. El campo eléctrico en la región $z > 0$ es generado por cuatro cargas eléctricas: (i) la carga original de magnitud q en $\mathbf{r} = b\hat{\mathbf{e}}_z$, (ii) una carga de magnitud igual pero de signo opuesto localizada en el punto imagen $-\mathbf{r}$, que viene de la condición de frontera $A_0|_\Sigma = 0$, (iii) una carga eléctrica de magnitud $q'' = -\tilde{\theta}^2/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizada en el punto imagen y (iv) una carga eléctrica de

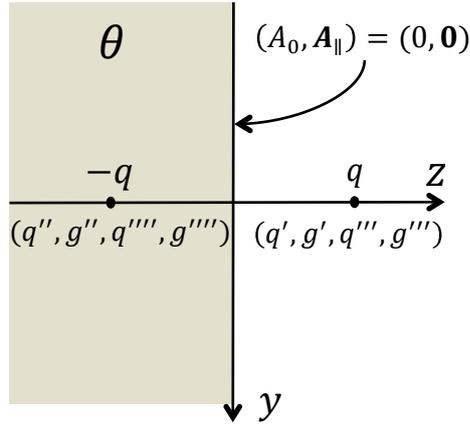


Figura 1.8: La figura ilustra una carga eléctrica q localizada a una distancia b de una interfaz θ definida por el plano $z = 0$ que se encuentra a potenciales cero, *i.e.* $(A^0, \mathbf{A}_{\parallel}) = (0, \mathbf{0})$. La región $z < 0$ está caracterizada por un TI no trivial ($\theta \neq 0$), mientras que la región $z > 0$ es el vacío ($\theta = 0$). En la región $z > 0$ el campo eléctrico es originado por la carga original q y la carga q''' en \mathbf{r} , y por las cargas imagen $-q$ y q'' en $-\mathbf{r}$; mientras que el campo magnético es originado por los monopolos g'' y g''' localizados en $-\mathbf{r}$ y \mathbf{r} , respectivamente. En la región $z < 0$ los campos eléctrico y magnético son originados por las cargas q' , q'''' y los monopolos g' y g'''' .

magnitud $q''' = +\tilde{\theta}^2/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizada en \mathbf{r} . El campo magnético puede interpretarse como el generado por dos monopolos, uno de magnitud $g'' = -2\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizado en el punto imagen, inducido por la interfaz θ , y el otro de magnitud $g''' = +2\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$ en $\mathbf{r} = b\hat{\mathbf{e}}_z$, que surge de la condición de frontera $\mathbf{A}_{\parallel}|_{\Sigma} = 0$.

De manera similar, es posible verificar que el campo eléctrico en la región $z < 0$ es el producido por una carga eléctrica de magnitud $q' = -4/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizada en $\mathbf{r} = b\hat{\mathbf{e}}_z$ más una carga eléctrica de magnitud $q'''' = +4/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizada en el punto imagen $-\mathbf{r}$. El campo magnético puede interpretarse como el generado por dos monopolos magnéticos, uno de magnitud $g' = +2\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizado en \mathbf{r} junto con su imagen de magnitud $g'''' = -2\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizado en $-\mathbf{r}$.

1.3.4. Hilo conductor infinito cerca de una interfaz θ plana

Consideremos un alambre infinito paralelo al eje x y que porta una corriente I en la dirección $+x$, como se muestra en la figura 1.10. El alambre se localiza en el vacío a una distancia b de una interfaz θ definida por el plano $z = 0$, tal que $\theta \neq 0$ en la región $z < 0$. Por simplicidad elegimos las coordenadas tal que $y' = 0$. De esta forma, la densidad de corrientes es $j^\mu(\mathbf{x}') = I\eta_1^\mu \delta(y') \delta(z' - b)$.

La solución para este problema está dada por

$$A^\mu(\mathbf{x}) = I \int_{-\infty}^{+\infty} G^\mu_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx', \quad (1.100)$$

donde $\mathbf{r} = x'\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_z$. Es claro que el potencial escalar $A^0(\mathbf{x})$ no es cero, lo que indica que existe un campo eléctrico inducido. La componente requerida de la matriz de GFs, G^0_1 , definida en la Ec. (1.59) es

$$G^0_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = +\frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{y}{R^2} \left[1 - \frac{|z| + b}{\sqrt{R^2 + (|z| + b)^2}} \right]. \quad (1.101)$$

Sustituyendo la Ec. (1.101) en la Ec. (1.100) obtenemos el potencial eléctrico, que carece de una interpretación inmediata. Podemos calcular el campo eléctrico directamente como $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla A^0(\mathbf{x})$, obteniéndose

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{4\tilde{\theta}I}{4 + \tilde{\theta}^2} \left[\frac{|z| + b}{y^2 + (|z| + b)^2} \hat{\mathbf{e}}_y - \frac{y \operatorname{sign}(z)}{y^2 + (|z| + b)^2} \hat{\mathbf{e}}_z \right]. \quad (1.102)$$

Observamos que el campo eléctrico para $z > 0$ es debido a una corriente magnética localizada en $z = -b$, $\mathbf{j}' = -I'\hat{\mathbf{e}}_x$, donde $I' = 2\tilde{\theta}I/(4 + \tilde{\theta}^2)$. Para $z < 0$ tenemos una corriente magnética localizada en $z = b$, de la misma magnitud pero en sentido contrario, $\mathbf{j}'' = I''\hat{\mathbf{e}}_x = -\mathbf{j}'$. Nótese que \mathbf{j}' es antiparalela a la corriente del alambre, mientras que \mathbf{j}'' es paralela.

De manera similar calculamos el campo magnético. Este es

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \left[I\hat{\mathbf{e}}_i \int_{-\infty}^{+\infty} G^i_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx' \right], \quad (1.103)$$

con $i = 1, 2$, donde las componentes de la matriz de GF correspondientes son las dadas en las Ecs. (1.60). El resultado es

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = I \left[-\frac{2(z - b)}{y^2 + (z - b)^2} + \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{2(|z| + b) \operatorname{sgn}(z)}{y^2 + (|z| + b)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}_y + I \left[\frac{2y}{y^2 + (z - b)^2} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{2y}{y^2 + (|z| + b)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (1.104)$$

Para $z > 0$ el campo magnético corresponde al producido por la corriente original más una corriente eléctrica imagen, localizada en $z = -b$, y que fluye en la dirección opuesta a la corriente del alambre, $\mathbf{J}'_e = -J'\hat{\mathbf{e}}_x$, donde $J' = \tilde{\theta}^2 I/(4 + \tilde{\theta}^2)$. Para $z < 0$ tenemos una

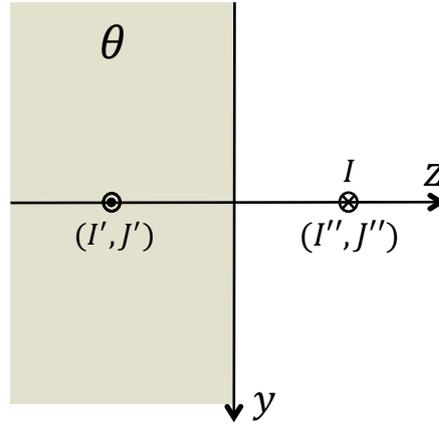


Figura 1.9: La figura ilustra un alambre infinito que porta una corriente I en la dirección $+x$ (saliendo de la página), localizado a una distancia b de una interfaz θ definida por el plano $z = 0$. La región $z < 0$ está caracterizada por un TI no trivial ($\theta \neq 0$), mientras que la región $z > 0$ es el vacío ($\theta = 0$). En la región $z > 0$ el campo eléctrico es originado por una corriente magnética I' que fluye en la dirección $-x$, mientras que el campo magnético es originado por la corriente original I y una corriente eléctrica imagen I'' que fluye en la dirección $-x$ y se localiza en $z = -b$. En la región $z < 0$ los campos eléctrico y magnético son originados por las corrientes magnética J'' y eléctrica I'' , respectivamente, ambas fluyendo en la dirección $+x$.

corriente eléctrica localizada en $z = b$, que fluye en la misma dirección que la corriente del alambre, *i.e.* $\mathbf{J}_e'' = J'' \hat{\mathbf{e}}_x$, donde $J'' = 4I/(4 + \tilde{\theta}^2)$.

1.3.5. Hilo infinito cargado cerca de un TI plano

Ahora consideremos un alambre rectilíneo uniformemente cargado, con densidad de carga λ , como se muestra en la figura 1.10. El alambre se localiza en el vacío, a una distancia b de un TI plano (definido por el plano $z = 0$), paralelo al eje x , con TMEP $\theta \neq 0$. Por simplicidad elegimos las coordenadas tal que $y' = 0$. De esta forma, la densidad de corrientes es $j^\mu(\mathbf{x}') = \lambda \eta_0^\mu \delta(y') \delta(z' - b)$.

El cuadripotencial se expresa en términos de la GF como $A^\mu(\mathbf{x}) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G^\mu_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$, donde $\mathbf{r} = x' \hat{\mathbf{e}}_x + b \hat{\mathbf{e}}_z$. Se observa que el potencial escalar es $A^0(\mathbf{x}) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$, donde la componente 00 de la GF se lee de la Ec. (1.58). Ésta es

$$G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + |z - b|^2}} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (|z| + b)^2}}, \quad (1.105)$$

donde $R^2 = (x - x')^2 + y^2$. Calculamos el campo eléctrico directamente, $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla A^0(\mathbf{x}) =$

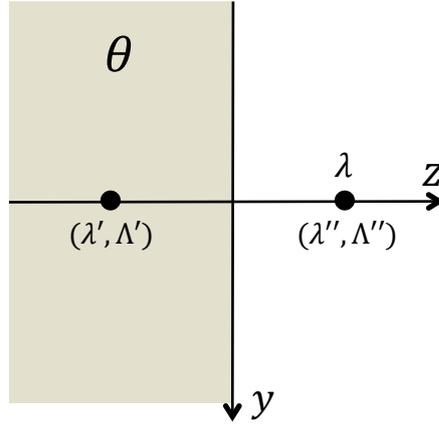


Figura 1.10: La figura ilustra un hilo infinito con densidad de carga uniforme λ , localizado a una distancia b de una interfaz θ definida por el plano $z = 0$. La región $z < 0$ está caracterizada por un TMEP $\theta \neq 0$, mientras que la región $z > 0$ es el vacío. En la región $z > 0$ el campo eléctrico es originado por el hilo infinito original, más un hilo infinito imagen, con densidad de carga uniforme λ' , localizado en $z = -b$. El campo magnético es originado por un hilo infinito con densidad uniforme de carga magnética Λ' localizado en el punto imagen. En la región $z < 0$ los campos eléctrico y magnético son originados por hilos infinitos con densidades uniformes de carga eléctrica λ'' y magnética Λ'' , respectivamente, ambas localizadas en $z = b$.

$-\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla G_0^0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$. El resultado es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \lambda \frac{2y\hat{\mathbf{e}}_y + 2(z-b)\hat{\mathbf{e}}_z}{y^2 + (z-b)^2} - \lambda \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{2y\hat{\mathbf{e}}_y + 2(|z|+b)\text{sgn}(z)\hat{\mathbf{e}}_z}{y^2 + (|z|+b)^2}. \quad (1.106)$$

En la región $z > 0$, el campo eléctrico puede interpretarse como el producido por el hilo infinito cargado original (paralelo al eje x con densidad de carga lineal λ), más un hilo cargado imagen, localizado en $z = -b$, y con densidad de carga lineal $\lambda' = -\frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2}\lambda$. Para $z < 0$, el campo eléctrico es producido por un hilo infinito, localizado en $z = b$, y con densidad de carga lineal $\lambda'' = \frac{4}{4 + \tilde{\theta}^2}\lambda$. Esta densidad de carga se obtiene como resultado de la superposición del hilo cargado original, más un hilo cargado imagen localizado en el mismo punto y de magnitud λ' , *i.e.* $\lambda'' = \lambda + \lambda'$.

Ahora estudiaremos el campo magnético. Las componentes no-cero del potencial vectorial son: $A^1 = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G_0^1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$ y $A^2 = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G_0^2(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$, donde las componentes requeridas de la GF son:

$$G_0^1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{y}{R^2} \left(1 - \frac{|z|+b}{\sqrt{R^2 + (|z|+b)^2}} \right), \quad (1.107)$$

$$G^2_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = -\frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{x - x'}{R^2} \left(1 - \frac{|z| + b}{\sqrt{R^2 + (|z| + b)^2}} \right), \quad (1.108)$$

El potencial vectorial no es iluminante, de manera que calculamos directamente el campo magnético: $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A} = -\partial_z A^2 \hat{\mathbf{e}}_x + \partial_z A^1 \hat{\mathbf{e}}_y + (\partial_x A^2 - \partial_y A^1) \hat{\mathbf{e}}_z$. El resultado es:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\lambda \frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{2y \operatorname{sgn}(z) \hat{\mathbf{e}}_y + 2(|z| + b) \hat{\mathbf{e}}_z}{y^2 + (|z| + b)^2}. \quad (1.109)$$

Para $z > 0$, el campo magnético corresponde al producido por un hilo infinito con densidad uniforme de carga magnética $\Lambda' = -\frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \lambda$, localizado en $z = -b$. En la región $z < 0$, el campo magnético es producido por un hilo infinito con densidad uniforme de carga magnética $\Lambda'' = -\Lambda'$, localizado en $z = b$.

1.3.6. Carga puntual cerca de una interfaz θ esférica

Ahora consideremos una carga puntual de magnitud q localizada a una distancia b del centro de una esfera de radio a . La región $r < a$ (interior de la esfera) está llena de un TI no trivial, caracterizado por la TMEP $\theta \neq 0$, mientras que la región $r > a$ es el vacío, como se muestra en la figura 1.11. Por simplicidad elegimos a la línea que conecta el centro de la esfera y la carga como el eje z . De esta forma la densidad de corriente puede escribirse como $j^\mu(\mathbf{x}') = \frac{q}{b^2} \eta^\mu_0 \delta(r' - b) \delta(\cos \vartheta' - 1) \delta(\varphi')$, con $b > a$.

La solución para este problema es

$$\phi(\mathbf{x}) = \int G^0_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j^\mu(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' = q G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{b}), \quad (1.110)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 \int G^k_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j^\mu(\mathbf{x}') \hat{\mathbf{e}}_k d^3\mathbf{x}' = \sum_{k=1}^3 q G^k_0(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (1.111)$$

donde $\mathbf{b} = b \hat{\mathbf{e}}_z$. Usando las componentes de la matriz de GF correspondientes, las Ecs. (1.65), los potenciales escalar y vectorial son

$$\phi(\mathbf{x}) = 4\pi q \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sum_{m'=-l}^{+l} \left[\mathfrak{g}_l(r, b) - a^2 \tilde{\theta}^2 l(l+1) \mathfrak{g}_l(a, a) S_l(r, b) \right] \delta_{mm'} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm'}^*(0, \varphi'), \quad (1.112)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 4\pi q \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sum_{m'=-l}^{+l} ia\tilde{\theta} S_l(r, b) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm'}^*(0, \varphi') \langle lm | \hat{\mathbf{L}} | lm' \rangle. \quad (1.113)$$

De las relaciones $Y_{lm}(0, \varphi) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$ y $Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta)$ encontramos

$$\phi(\mathbf{x}) = q \sum_{l=0}^{\infty} \left[\mathbf{g}_l(r, b) - a^2 \tilde{\theta}^2 l(l+1) \mathbf{g}_l(a, a) S_l(r, b) \right] (2l+1) P_l(\cos \vartheta), \quad (1.114)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = q \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} ia\tilde{\theta} \sqrt{4\pi(2l+1)} S_l(r, b) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \langle lm | \hat{\mathbf{L}} | l0 \rangle. \quad (1.115)$$

que inmediatamente nos da $A_z = 0$. Las componentes restantes del potencial vectorial pueden calcularse introduciendo las combinaciones $A_{\pm} = A_x \pm iA_y$. El resultado es

$$A_{\pm}(\mathbf{x}) = q \sum_{l=0}^{\infty} ia\tilde{\theta} \sqrt{4\pi(2l+1)l(l+1)} S_l(r, b) Y_{l\pm 1}(\vartheta, \varphi), \quad (1.116)$$

donde la simetría $A_+ = A_-^*$ se sigue de las relaciones $Y_{l1}^* = -Y_{l-1}$. Recordando que

$$A_{\theta} = -\sin \vartheta A_z + \frac{1}{2} \cos \vartheta (A_+ e^{-i\varphi} + A_- e^{i\varphi}) \quad , \quad A_{\varphi} = \frac{1}{2i} (A_+ e^{-i\varphi} - A_- e^{i\varphi}), \quad (1.117)$$

obtenemos

$$A_{\theta} = 0 \quad , \quad A_{\varphi} = q \sum_{l=0}^{\infty} a\tilde{\theta} (2l+1) S_l(r, b) \frac{\partial P_l(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta}, \quad (1.118)$$

en coordenadas esféricas.

Ahora analizamos los campos en las regiones (1): $r > b > a$ y (2): $b > a > r$. Usando la GF reducida en el vacío, $\mathbf{g}_l(r, r') = \frac{1}{2l+1} \frac{r'_l}{r^{l+1}}$, los potenciales escalar y (la componente no cero del) vectorial para la región (1) toman la forma

$$\phi_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|} - q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tilde{\theta}^2 l(l+1)}{(2l+1)^2 + \tilde{\theta}^2 l(l+1)} \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1} b^{l+1}} P_l(\cos \gamma), \quad (1.119)$$

$$A_{(1)\varphi}(\mathbf{x}) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tilde{\theta} (2l+1)}{(2l+1)^2 + \tilde{\theta}^2 l(l+1)} \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1} b^{l+1}} \frac{\partial P_l(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta}, \quad (1.120)$$

respectivamente. Los campos eléctrico y magnético correspondientes, pueden calcularse directamente a partir de $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, respectivamente. El resultado es

$$\mathbf{E}_{(1)}(\mathbf{x}) = q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|^3} - q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tilde{\theta}^2 l(l+1)}{(2l+1)^2 + \tilde{\theta}^2 l(l+1)} \frac{a^{2l+1}}{r^{l+2} b^{l+1}} \times \left[-(l+1) P_l(\cos \vartheta) \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial P_l(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \hat{\vartheta} \right], \quad (1.121)$$

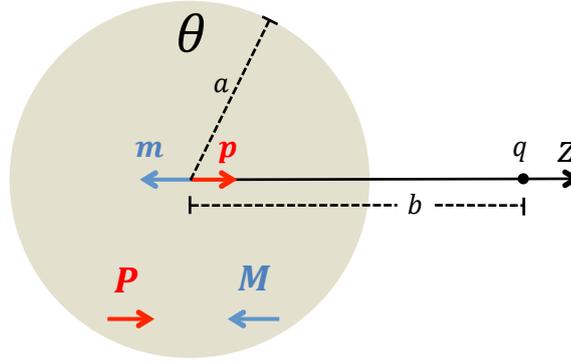


Figura 1.11: La figura ilustra una carga de magnitud q localizada a una distancia b del centro de una esfera de radio a . La región $r < a$ está caracterizada por un TI no trivial ($\theta \neq 0$), mientras que la región $r > a$ es el vacío ($\theta = 0$). En la región $r > b \gg a$ el campo eléctrico es originado por la carga q y por un dipolo eléctrico \mathbf{p} en el origen; mientras que el campo magnético es generado por un dipolo magnético \mathbf{m} que apunta en la dirección opuesta. En la región $b \gg a > r$ el campo eléctrico se comporta como el campo producido por una esfera con magnetización uniforme \mathbf{P} ; mientras que el campo magnético se asemeja al producido por una esfera uniformemente magnetizada, con magnetización \mathbf{M} .

$$\mathbf{B}_{(1)}(\mathbf{x}) = q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tilde{\theta} l (2l+1)}{(2l+1)^2 + \tilde{\theta}^2 l(l+1)} \frac{a^{2l+1}}{r^{l+2} b^{l+1}} \left[-(l+1) P_l(\cos \vartheta) \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial P_l(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \hat{\vartheta} \right]. \quad (1.122)$$

Ahora nos preguntamos por el comportamiento de estos campos, cuando la separación entre la carga y la esfera es grande comparada con el radio de la esfera, $b \gg a$. Dado que el término l -ésimo en la suma va como $(a/b)^{l+1}$, sólo valores pequeños de l contribuyen. La contribución principal viene de $l = 1$ y se obtiene

$$\mathbf{E}_{(1)}(\mathbf{x}) \sim q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|^3} + \frac{p}{r^3} \left(2 \cos \vartheta \hat{\mathbf{r}} + \sin \vartheta \hat{\vartheta} \right), \quad (1.123)$$

$$\mathbf{B}_{(1)}(\mathbf{x}) \sim \frac{m}{r^3} \left(2 \cos \vartheta \hat{\mathbf{r}} + \sin \vartheta \hat{\vartheta} \right), \quad (1.124)$$

que corresponden a los campos eléctrico y magnético generados por un dipolo eléctrico \mathbf{p} y un dipolo magnético \mathbf{m} en el origen y apuntando en la dirección z :

$$\mathbf{p} = \frac{2q\tilde{\theta}}{9 + 2\tilde{\theta}^2} \frac{a^3}{b^2} \hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{2}{3} \mathbf{m}.$$

Ahora vamos a estudiar los campos EM en la región (2): $b > a > r$. El potencial escalar

y la componente φ del potencial vectorial son

$$\phi_{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|} - q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tilde{\theta}^{2l} (l+1)}{(2l+1)^2 + \tilde{\theta}^{2l} (l+1)} \frac{r^l}{b^{l+1}} P_l(\cos \gamma), \quad (1.125)$$

$$A_{(2)\varphi}(\mathbf{x}) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tilde{\theta} (2l+1)}{(2l+1)^2 + \tilde{\theta}^{2l} (l+1)} \frac{r^l}{b^{l+1}} \frac{\partial P_l(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta}, \quad (1.126)$$

respectivamente. Los campos correspondientes son

$$\mathbf{E}_{(2)}(\mathbf{x}) = q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|^3} + q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tilde{\theta}^{2l} (l+1)}{(2l+1)^2 + \tilde{\theta}^{2l} (l+1)} \frac{r^{l-1}}{b^{l+1}} \left[l P_l(\cos \vartheta) \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial P_l(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \hat{\vartheta} \right], \quad (1.127)$$

$$\mathbf{B}_{(2)}(\mathbf{x}) = -q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tilde{\theta} (2l+1) (l+1)}{(2l+1)^2 + \tilde{\theta}^{2l} (l+1)} \frac{r^{l-1}}{b^{l+1}} \left[l P_l(\cos \vartheta) \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial P_l(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \hat{\vartheta} \right]. \quad (1.128)$$

Cuando la separación entre la carga puntual y la esfera es grande comparada con el radio de la esfera, $b \gg a$, los campos EM en la región $r < a$ pueden escribirse como sigue

$$\mathbf{E}_{(2)}(\mathbf{x}) \sim q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|^3} - \frac{1}{3} \mathbf{P}, \quad (1.129)$$

$$\mathbf{B}_{(2)}(\mathbf{x}) \sim \frac{2}{3} \mathbf{M}, \quad (1.130)$$

donde

$$\mathbf{P} = \frac{6q\tilde{\theta}}{9 + 2\tilde{\theta}^2} \frac{1}{b^2} \hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{2}{3} \mathbf{M}. \quad (1.131)$$

Un aspecto interesante a destacar es la forma de los campos EM en esta región. El campo eléctrico se comporta como el campo producido por una esfera uniformemente polarizada, con polarización \mathbf{P} , mientras que el campo magnético se asemeja al producido por una esfera uniformemente magnetizada, con magnetización \mathbf{M} .

1.3.7. Hilo conductor infinito cerca de una interfaz θ cilíndrica

Consideremos un alambre conductor rectilíneo infinito por el que circula una corriente I en la dirección $+z$. El alambre se localiza en el vacío a una distancia b de éste. Suponemos un TI no trivial de radio $a < b$ y con TMEP $\theta \neq 0$, con su eje paralelo al alambre y pasando por el origen, como se muestra en la figura 1.12. Por simplicidad elegimos las coordenadas tal que $\varphi' = 0$. Por la tanto la densidad de corriente es $j^\mu(\mathbf{x}') = \frac{I}{b} \eta^\mu{}_3 \delta(\varphi') \delta(\rho' - b)$. La

solución para este problema es

$$A^\mu(\mathbf{x}) = \int G^\mu_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j^3(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = 2I \lim_{k \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} g_{mm',3}^\mu(\rho, b, k) e^{im\varphi}, \quad (1.132)$$

donde las componentes de la GF reducida en coordenadas cilíndricas están dadas por las Ecs. (1.71)-(1.73). Usando las componentes correspondientes encontramos que los potenciales escalar y (la componente no cero del) vectorial son

$$A^0(\mathbf{x}) = -4I\tilde{\theta} \lim_{k \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{+\infty} m C_{mm}(\rho, b) \sin m\varphi, \quad (1.133)$$

$$A^3(\mathbf{x}) = 2I \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \mathfrak{g}_0(\rho, b) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\mathfrak{g}_m(\rho, b) - \tilde{\theta}^2 m^2 \mathfrak{g}_m(a, a) C_{mm}(\rho, b) \right] \cos m\varphi \right\}. \quad (1.134)$$

La GF reducida en el vacío es $\mathfrak{g}_m(\rho, \rho'; k) = I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>})$, donde I_m y K_m son las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda clase, respectivamente. Usando la forma límite para argumentos pequeños de las funciones de Bessel modificadas [105], el límite $k \rightarrow 0$ de la GF reducida es

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathfrak{g}_m(\rho, \rho'; k) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^m, \quad (1.135)$$

y entonces $\lim_{k \rightarrow 0} \mathfrak{f}_m(k) = m/2$. De esta manera los potenciales se reducen a

$$A^0(\mathbf{x}) = -\frac{4I\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{a_{<}}{\rho_{>}} \right)^m \sin m\varphi, \quad (1.136)$$

$$A^3(\mathbf{x}) = 2I \left\{ -\log \rho_{>} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{m} \left(\frac{b_{<}}{\rho_{>}} \right)^m - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{m} \left(\frac{a_{<}}{\rho_{>}} \right)^m \right] \cos m\varphi \right\}, \quad (1.137)$$

donde los símbolos $>$ y $<$ denotan el mayor y menor en el cociente a/ρ . Las sumas pueden calcularse de forma analítica, con el resultado

$$A^0(\mathbf{x}) = \frac{4I\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \arctan \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \frac{\rho_{>} b}{a_{<} a}} \right), \quad (1.138)$$

$$A^3(\mathbf{x}) = I \left\{ -\log [\rho^2 - 2b\rho \cos \varphi + b^2] + \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \log \left[1 - 2 \frac{a_{<}}{\rho_{>}} \frac{a}{b} \cos \varphi + \left(\frac{a_{<}}{\rho_{>}} \frac{a}{b} \right)^2 \right] \right\}. \quad (1.139)$$

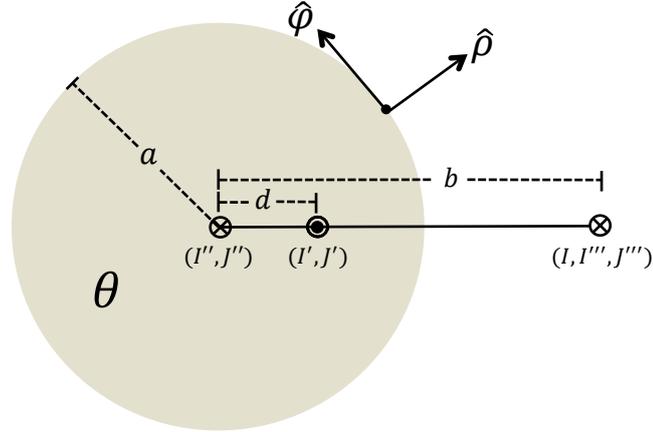


Figura 1.12: La figura ilustra un hilo conductor rectilíneo infinito que porta una corriente I en la dirección $+z$ (saliendo de la página), localizado a una distancia b del eje de un cilindro de radio $a < b$. La región $\rho < a$ está caracterizada por un TI no trivial ($\theta \neq 0$), mientras que la región $\rho > a$ es el vacío ($\theta = 0$). En la región $\rho > b > a$, el campo magnético corresponde al generado por el hilo conductor original, más dos corrientes imagen: una de magnitud I'' localizada en el origen, y otra de magnitud $I' = -I''$ localizada en d ; mientras que el campo eléctrico puede interpretarse como el producido por dos corrientes magnéticas inducidas: una de magnitud J'' en el origen y otra de magnitud $J' = -J''$ localizada en b . En la región $b > a > \rho$, el campo magnético corresponde al generado por una corriente I''' , mientras que el campo eléctrico corresponde al generado por una corriente magnética J''' , ambas localizadas en b .

Ahora analizaremos los campos en las regiones (1): $\rho > b > a$ y (2): $b > a > \rho$. En la región (1) los potenciales toman la forma

$$A_{(1)}^0(\mathbf{x}) = \frac{4I\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \frac{\rho}{d}}\right), \quad (1.140)$$

$$A_{(1)}^3(\mathbf{x}) = I \left[-\log(\rho^2 + b^2 - 2b\rho \cos \varphi) + \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \log\left(1 - 2\frac{d}{\rho} \cos \varphi + \frac{d^2}{\rho^2}\right) \right], \quad (1.141)$$

donde $d = a^2/b$. Los campos eléctrico y magnético correspondientes pueden calcularse directamente como $\mathbf{E} = -\nabla A^0$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, respectivamente. El resultado es

$$\mathbf{E}_{(1)}(\mathbf{x}) = -\frac{4I\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \left[\frac{d \sin \varphi}{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi} \hat{\rho} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho - d \cos \varphi}{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi} \right) \hat{\varphi} \right], \quad (1.142)$$

$$\mathbf{B}_{(1)}(\mathbf{x}) = \left[\frac{-2Ib \sin \varphi}{\rho^2 + b^2 - 2b\rho \cos \varphi} + \frac{2I\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{d \sin \varphi}{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{2I(\rho - b \cos \varphi)}{\rho^2 + b^2 - 2b\rho \cos \varphi} + \frac{2I\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho - d \cos \varphi}{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi} \right) \right] \hat{\varphi}. \quad (1.143)$$

Los campos pueden interpretarse como sigue. El campo magnético corresponde al generado por el hilo conductor original (que porta una corriente I y se localiza en b), más dos corrientes imagen: una de magnitud $I'' = I\tilde{\theta}^2/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizada en el origen, y otra de magnitud $I' = -I'' = -I\tilde{\theta}^2/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizada en $d = a^2/b$. El campo eléctrico puede interpretarse como el producido por dos corrientes magnéticas inducidas: una de magnitud $J'' = -2I\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$ en el origen y otra de magnitud $J' = -J'' = 2I\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizada en d .

En la región (2) los potenciales son

$$A_{(2)}^0(\mathbf{x}) = \frac{4I\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \arctan\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - \frac{b}{\rho}}\right), \quad (1.144)$$

$$A_{(2)}^3(\mathbf{x}) = \frac{4I}{4 + \tilde{\theta}^2} \log(\rho^2 + b^2 - 2b\rho\cos\varphi). \quad (1.145)$$

de donde pueden obtenerse los campos EM directamente. El resultado es

$$\mathbf{E}_{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{4I\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \left[\frac{b\sin\varphi}{\rho^2 + b^2 - 2b\rho\cos\varphi} \hat{\rho} - \frac{\rho - b\cos\varphi}{\rho^2 + b^2 - 2b\rho\cos\varphi} \hat{\varphi} \right], \quad (1.146)$$

$$\mathbf{B}_{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{4I}{4 + \tilde{\theta}^2} \left[-\frac{2b\sin\varphi}{\rho^2 + b^2 - 2b\rho\cos\varphi} \hat{\rho} + \frac{2(\rho - b\cos\varphi)}{\rho^2 + b^2 - 2b\rho\cos\varphi} \hat{\varphi} \right]. \quad (1.147)$$

El campo magnético en esta región corresponde al generado por una corriente $I''' = 4I/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizada en b ; mientras que el campo eléctrico corresponde al generado por una corriente magnética $J''' = -2I\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$ y se localiza en el mismo punto.

1.3.8. Hilo infinito cargado cerca de una interfaz θ cilíndrica

Consideremos un alambre rectilíneo uniformemente cargado, con densidad de carga λ . El alambre se localiza en el vacío a una distancia b del eje z y paralelo a éste. Suponemos un TI no trivial de radio $a < b$ y con TMEP $\theta \neq 0$, con su eje paralelo al alambre y pasando por el origen. Nuevamente elegimos las coordenadas tal que $\varphi' = 0$. De esta forma la densidad de corriente puede escribirse como $j^\mu(\mathbf{x}') = \frac{\lambda}{b} \eta^\mu_0 \delta(\varphi') \delta(\rho' - b)$. La solución para este problema es

$$A^\mu(\mathbf{x}) = \int G^\mu_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j^0(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = 2\lambda \lim_{k \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} g_{mm',0}^\mu(\rho, b, k) e^{im\varphi}. \quad (1.148)$$

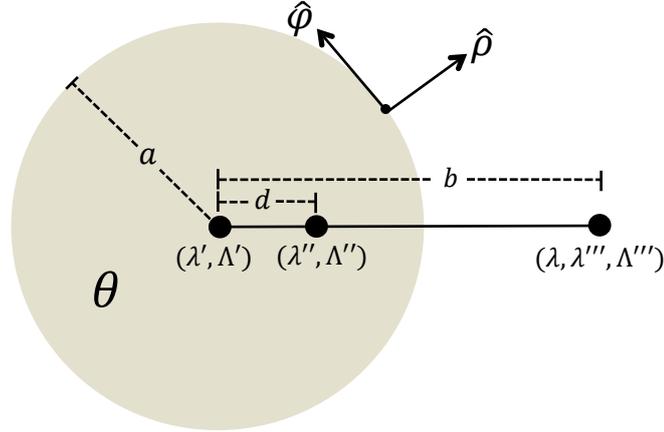


Figura 1.13: La figura ilustra un alambre rectilíneo uniformemente cargado, localizado a una distancia b del eje de un cilindro de radio $a < b$. La región $\rho < a$ está caracterizada por un TI no trivial ($\theta \neq 0$), mientras que la región $\rho > a$ es el vacío ($\theta = 0$). En la región $\rho > b > a$, el campo eléctrico corresponde al generado por el hilo cargado original, más dos líneas de carga imagen: una localizada en el origen y con densidad de carga λ'' , y otra con densidad de carga λ' localizada en d . El campo magnético es producido por dos hilos con densidad uniforme de carga magnética: el primero localizado en el origen y con densidad Λ'' , y el segundo con densidad Λ' localizado en d . En la región $b > a > \rho$, el campo eléctrico es generado por un hilo uniformemente cargado, con densidad de carga λ''' , mientras que el campo magnético es generado por un hilo con densidad uniforme de carga magnética Λ''' , ambos localizados en b .

Las componentes no cero, pueden calcularse de la misma manera que en el ejemplo anterior. El resultado final es

$$A^0(\mathbf{x}) = \lambda \left\{ -\log[\rho^2 - 2b\rho \cos \varphi + b^2] + \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \log \left[1 - 2 \frac{a < a}{\rho > b} \cos \varphi + \left(\frac{a < a}{\rho > b} \right)^2 \right] \right\}, \quad (1.149)$$

$$A^3(\mathbf{x}) = \frac{4\lambda\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \arctan \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \frac{\rho > b}{a < a}} \right). \quad (1.150)$$

Ahora analizamos los campos EM en las regiones (1): $\rho > b > a$ y (2): $b > a > \rho$. En la región (1) los potenciales toman la forma

$$A_{(1)}^0(\mathbf{x}) = \lambda \left[-\log[\rho^2 - 2b\rho \cos \varphi + b^2] + \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \log \left(1 - 2 \frac{d}{\rho} \cos \varphi + \frac{d^2}{\rho^2} \right) \right], \quad (1.151)$$

$$A_{(1)}^3(\mathbf{x}) = \frac{4\lambda\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \arctan \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \frac{\rho}{d}} \right), \quad (1.152)$$

donde $d = a^2/b$. Los campos eléctrico y magnético pueden calcularse de la manera usual. En la región (1) el resultado es

$$\mathbf{E}_{(1)}(\mathbf{x}) = \left[\frac{2\lambda(\rho - b \cos \varphi)}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \varphi} + \frac{2\lambda\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho - d \cos \varphi}{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi} \right) \right] \hat{\rho} + \left(\frac{2\lambda b \sin \varphi}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \varphi} - \frac{2\lambda\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{d \sin \varphi}{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi} \right) \hat{\varphi}, \quad (1.153)$$

$$\mathbf{B}_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{4\lambda\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \left[\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho - d \cos \varphi}{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi} \right) \hat{\rho} - \frac{d \sin \varphi}{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi} \hat{\varphi} \right]. \quad (1.154)$$

Los campos pueden interpretarse como sigue. El campo eléctrico corresponde al generado por el hilo cargado original (con densidad de carga λ localizado en b), más dos líneas de carga imagen: una localizada en el origen y con densidad de carga $\lambda'' = \lambda\tilde{\theta}^2/(4 + \tilde{\theta}^2)$, y otra con densidad de carga $\lambda' = -\lambda'' = -\lambda\tilde{\theta}^2/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizada en d . El campo magnético es producido por dos hilos con densidad uniforme de carga magnética: el primero localizado en el origen y con densidad $\Lambda'' = 2\lambda\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$, y el segundo con densidad $\Lambda' = -\Lambda'' = 2\lambda\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$ localizado en d .

En la región (2) los campos EM resultan

$$\mathbf{E}_{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{4\lambda}{4 + \tilde{\theta}^2} \left[\frac{2(\rho - b \cos \varphi)}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \varphi} \hat{\rho} + \frac{2b \sin \varphi}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \varphi} \hat{\varphi} \right], \quad (1.155)$$

$$\mathbf{B}_{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{4\lambda\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \left(\hat{\rho} \frac{\rho - b \cos \varphi}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \varphi} + \hat{\varphi} \frac{b \sin \varphi}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \varphi} \right). \quad (1.156)$$

Se observa que el campo eléctrico es generado por un hilo cargado uniformemente, localizado en b y con densidad de carga $\lambda''' = 4\lambda/(4 + \tilde{\theta}^2)$; mientras que el campo magnético es generado por un hilo con densidad uniforme de carga magnética $\Lambda''' = -4\lambda\tilde{\theta}/(4 + \tilde{\theta}^2)$.

1.4. Discusión

La electrodinámica θ es una extensión topológica interesante de la teoría de Maxwell, donde la acción de Maxwell se acopla al invariante de Pontryagin electromagnético por medio de un campo escalar θ . Esta extensión tiene la misma forma que la electrodinámica axiónica de Wilczek; sin embargo, en la ED θ el campo escalar de acoplamiento es constante por secciones. Se trata de un modelo simplificado de la respuesta electromagnética de aislantes topológicos, dado que se considera que $\varepsilon = \mu = 1$ en todo el espacio, y es bien sabido que estos materiales poseen propiedades ópticas diferentes de las del vacío. Para tomar en cuenta dichos efectos, debemos considerar que tanto el campo θ , como la

permeabilidad y permitividad, son constantes por secciones.

Se introdujo el método de la función de Green en la ED θ para estudiar el efecto topológico magnetoeléctrico en la interfaz en donde θ es discontinuo. Construimos la función de Green para diferentes geometrías de la interfaz θ , considerando aquellas que pueden ser de mayor relevancia en trabajos experimentales, estas son: plana, esférica y cilíndrica. La ecuación diferencial que satisface la función de Green puede integrarse usando el mismo método que se usa en mecánica cuántica para calcular la función de Green de la ecuación de Schrödinger con potencial δ . Se discutieron aspectos relacionados con el teorema de Earnshaw y el tensor de energía-impulso en la ED θ . La última sección se dedicó a diferentes aplicaciones simples. Para el caso de una carga puntual cerca de una interfaz θ plana, nuestros resultados nos permiten interpretar los campos como los producidos por la carga original, cargas imagen, y monopolos magnéticos inducidos. La aparición de éstos no viola la ley de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, sino que son producidos por una corriente eléctrica inducida en la interfaz θ , y que da origen a un campo magnético que tiene la forma correcta del que se esperaría debido a un monopolo magnético. De la misma forma se interpretaron los campos electromagnéticos producidos por diferentes fuentes simples en presencia de interfaces θ con diferentes geometrías.

La formulación de la ED θ que discutimos aquí presenta ciertas similitudes con las teorías de campos de Janus, cuyas soluciones consisten de dos espacios de Minkowski unidos por una interfaz 2-dimensional, tal que el campo dilatónico adquiere valores asintóticos distintos en cada región. Esta situación es semejante a lo que ocurre en la ED θ , en donde el campo θ toma diferentes valores constantes en cada lado de la interfaz θ , similar a la discontinuidad finita que presenta el valor asintótico del campo dilatónico en la solución de Janus. Sin embargo, como se demostró en la Sección 1.3, la ED θ no es un caso particular del sector fotónico del modelo 1/2 BPS para una interfaz delgada [89].

El método de la función de Green presentado en este capítulo puede extenderse al caso dinámico, que será relevante en el estudio de la radiación de aislantes topológicos. En la literatura se ha hecho poco (o nulo) esfuerzo por estudiar la radiación de TIs. En el capítulo 3 se extiende el presente análisis al caso en que las propiedades ópticas de un TI son diferentes de las del vacío. Parte de las técnicas usadas serán de utilidad, pero hay otras que merecen la pena ser estudiadas con detalle.

Capítulo 2

Efecto Casimir con Aislantes Topológicos

En teoría cuántica de campos, a menudo se afirma que la energía de punto cero no es observable, y por esta razón se introduce el ordenamiento normal en la teoría. En 1948 Casimir se dio cuenta de que esta conclusión es incorrecta, cuando demostró que las fluctuaciones en la energía de punto cero del campo electromagnético dan origen a una fuerza de atracción entre dos placas paralelas perfectamente conductoras [106]. Su resultado, a temperatura cero, para la fuerza en unidad de área es

$$F_L = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 L^4}, \quad (2.1)$$

donde L es la distancia entre las placas. La fuerza de Casimir es muy pequeña a escalas macroscópicas y sólo es relevante a escalas del orden o menores que micras. Por ejemplo, cuando las superficies están separadas a distancias de unos pocos micrómetros, ésta es del orden de 10^{-3} N/m. No obstante, el efecto Casimir (EC) ha sido confirmado en experimentos cuando las placas están separadas en el rango $0,5 - 3,0 \mu\text{m}$ con una precisión del 15 % [107].

El origen de la fuerza de Casimir puede entenderse de forma simple a partir de la figura (2.1). Fuera de la cavidad formada por las placas, están permitidas todas las frecuencias de vacío. Dentro de la cavidad, sin embargo, los modos de vacío adquieren frecuencias discretas (que son consecuencia de las condiciones de borde que satisface el campo EM en las placas). Esto origina una diferencia en las densidades de energía del campo EM entre estas regiones, lo que a su vez, da origen a la fuerza de atracción entre las placas.

En general, el EC puede definirse como el stress (fuerza en unidad de área) sobre una superficie cerrada cuando un campo cuántico está confinado en ese volumen finito.

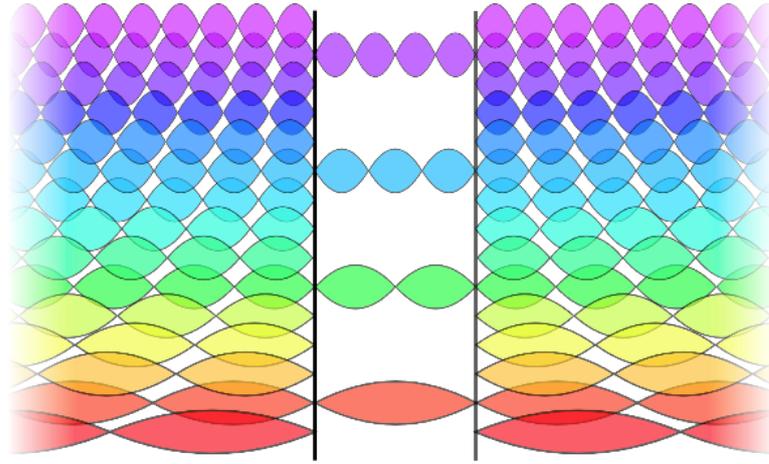


Figura 2.1: Origen del efecto Casimir.

Las superficies pueden ser medios materiales (con propiedades electromagnéticas como funciones dieléctricas), interfaces entre diferentes fases del vacío de una teoría de campos (tal como la cromodinámica cuántica, en donde los campos de color existen sólo en la región interior), o topologías del espacio (*e.g.* teorías con dimensiones adicionales, tal como Kaluza-Klein o teoría de cuerdas). En todos los casos, las superficies restringen los modos de los campos cuánticos de vacío, dando origen a una fuerza medible que puede calcularse de muchas maneras. Tal vez el procedimiento más obvio es calcular las energías de punto cero en presencia de las placas y en el vacío. Aunque ambas energías divergen fuertemente, su diferencia da origen a una energía finita, que se conoce como energía de Casimir. La variación de la energía de Casimir respecto a la separación entre las placas nos da la fuerza (en unidad de área) entre las superficies. Un enfoque alternativo consiste en usar funciones de Green. Dado que la función de Green representa el valor esperado de vacío del producto de los campos (ordenados temporalmente), es posible calcular el valor esperado de la energía del campo EM, $E = \frac{1}{2} \int [\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \mathbf{B}^2(\mathbf{r})] d\mathbf{r}$, en términos de la función de Green evaluada en un mismo punto. Para una revisión detallada del EC, ver por ejemplo las Refs. [108, 109].

La accesibilidad experimental a la física en el orden de micrómetros, ha motivado el estudio teórico del EC en diferentes escenarios, incluyendo el modelo estándar [110] y el sector gravitacional [111]. El reciente descubrimiento de 3D TIs [65] ofrece un terreno adicional en el que se puede estudiar el EC. Dispositivos experimentales con TIs son factibles, sin embargo, aún no se ha detectado el TME. En esta dirección, los autores en las Refs. [74, 112] proponen arreglos experimentales usando TIs para medir el efecto Witten. De la misma forma, en la Ref. [70] se propone medir la conductancia de Hall

fraccionaria (cuantizada a números semi-enteros) sobre la superficie de dos TIs. La fuerza de Casimir entre 3D TIs se estudió en las Refs. [79, 80]. Los autores proponen medir tal efecto usando el TI T1BiSe₂, sin embargo la precisión experimental requerida para hacerlo aún no se ha alcanzado en el laboratorio. La característica más notable de esta propuesta es que, debido al TME, la magnitud y signo de la fuerza de Casimir entre dos TIs puede modularse. Hacemos notar que los cálculos en la Ref. [79] se hicieron usando el enfoque de dispersión al EC, *i.e.*, usando las matrices de reflexión (que dependen de los coeficientes de Fresnel) en las interfaces de los TIs. El propósito de este capítulo es estudiar el efecto Casimir entre TIs usando la matriz de funciones de Green que caracteriza al TME.

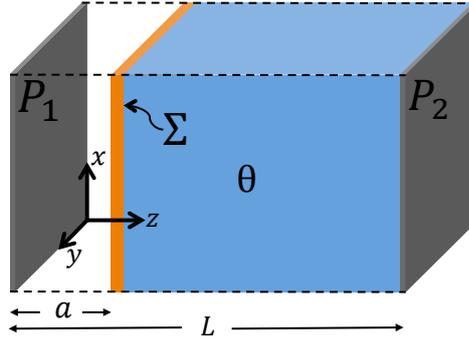
El sistema de Casimir que consideraremos está formado por dos placas paralelas perfectamente conductoras (etiquetadas por P_1 y P_2) separadas por una distancia L , con un TI no trivial entre ellas que está perfectamente unido a la placa P_2 , como se muestra en la figura 2.2. La superficie Σ del TI, localizada en $z = a$, se supone cubierta por una capa magnética delgada que rompe la simetría TR. El análisis local que presentamos aquí es similar al realizado en la Ref. [101] para el caso estándar. En la sección 2.1 construimos la matriz de GF para esta configuración, siguiendo un procedimiento similar al de la sección 1.2, sin embargo, aquí debemos considerar el caso dependiente del tiempo. En la sección 2.2 calculamos el valor esperado renormalizado del tensor de energía-impulso en la región entre las placas. Usándolo, calculamos la fuerza de Casimir que las placas ejercen sobre la superficie Σ del TI. Finalmente tomamos el límite en que la placa P_2 se envía al infinito ($L \rightarrow \infty$) para obtener la fuerza de Casimir entre una placa conductora y un TI no trivial semi-infinito. Usamos el análisis local, no sólo como un método alternativo al de enfoque de dispersión, sino también para ilustrar otro uso de la matriz de GF de los TIs calculadas en la sección anterior.

2.1. Matriz de funciones de Green dependiente de ω

La acción efectiva que gobierna la respuesta electromagnética de los TIs está dada por la Ec. (1.2). Las ecuaciones de Maxwell modificadas que se obtienen son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\pi} (\partial_\mu \theta) \tilde{F}^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu. \quad (2.2)$$

Para el sistema de Casimir en estudio, mostrado en la Fig. 2.2, consideramos las condiciones de borde estándar para las placas conductoras P_1 y P_2 . De este modo, las condiciones de frontera apropiadas ahí son $n_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}|_{P_{1,2}} = 0$, donde $n_\mu = (0, 0, 0, 1)$. De la Ec. (2.2) vemos que si θ es globalmente constante, la propagación de campos EM es la misma que en la electrodinámica estándar. Sin embargo, cuando campos EM atraviesan la superficie


 Figura 2.2: Configuración del efecto Casimir en θ ED.

de un TI, aparecen los TMEs. Estos efectos pueden incorporarse en las ecuaciones de campo escribiendo la TMEP del slab de TI en la forma

$$\theta(z) = \theta H(z - a)H(L - z), \quad (2.3)$$

donde $H(x)$ es la función de Heaviside. En la norma de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, la ecuación diferencial para el 4-potencial, en la región entre las placas, es

$$\left[\eta^\mu{}_\nu \partial^2 - \tilde{\theta} \delta(\Sigma) n_\sigma \epsilon^{\sigma\mu\alpha}{}_\nu \partial_\alpha \right] A^\nu = 4\pi j^\mu. \quad (2.4)$$

Aquí $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$ y $\tilde{\theta} = -\alpha\theta/\pi$. El término de borde (en $z = L$), que falta en la Ec. (2.4), es idénticamente cero debido a la condición de frontera en la placa P_2 . De esta forma, la Ec. (2.4) implica que el único TME presente en nuestra configuración de Casimir es el que se produce en la superficie Σ . Como se discutió en el capítulo anterior, y como puede verse de nuevo en la Ec. (2.4), las ecuaciones de movimiento en los bultos, vacío $[0, a)$ y TI $(a, L]$, son las mismas que en la electrodinámica estándar, y que el término θ afecta a los campos sólo en la interfaz Σ . Las condiciones de borde en Σ son exactamente las mismas que en el caso estático Ecs. (1.13)-(1.16), y que aquí reescribimos en términos del 4-potencial:

$$A^\mu \Big|_{z=a^-}^{z=a^+} = 0 \quad , \quad (\partial_z A^\mu) \Big|_{z=a^-}^{z=a^+} = -\tilde{\theta} \epsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu \partial_\alpha A^\nu \Big|_{z=a}, \quad (2.5)$$

que se derivan integrando las ecuaciones de campo sobre una región en forma de caja de píldoras alrededor de Σ . La discontinuidad de $\partial_z A^\mu$ a través de Σ produce la transmutación entre los campos eléctrico y magnético, que es lo que caracteriza al TME de los TIs. Para obtener la solución general de la Ec. (2.4) para una configuración arbitraria de fuentes

externas, introducimos la matriz de GF $G^\nu_\sigma(x, x')$, que satisface

$$\left[\eta^\mu{}_\nu \partial^2 - \tilde{\theta} \delta(\Sigma) \epsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu \partial_\alpha \right] G^\nu_\sigma(x, x') = 4\pi \eta^\mu{}_\sigma \delta(x - x'), \quad (2.6)$$

junto con las condiciones de frontera de la Ec. (2.5). Ahora resolveremos la Ec. (2.6) de la misma forma en que lo hicimos en el capítulo anterior para el caso estático. Cabe mencionar que se usó una técnica similar en las Refs. [113, 114] para estudiar dos planos paralelos modelados por dos funciones δ . La GF que vamos a considerar tiene invariancia traslacional en las direcciones paralelas a Σ (direcciones x y y), mientras que esta invariancia está rota en la dirección z . Explotando esta simetría podemos escribir

$$G^\mu{}_\nu(x, x') = 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} g^\mu{}_\nu(z, z'), \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{R} = (x - x', y - y')$ y $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ el momento paralelo a Σ [99]. En la Ec. (2.7) se omite la dependencia de la GF reducida $g^\mu{}_\nu$ en ω y \mathbf{p} . Por la antisimetría del símbolo de Levi-Civita, la derivada parcial que aparece en el segundo término de la Ec. (2.6) no introduce derivadas con respecto a z . Esto nos permite escribir la ecuación diferencial para la GF reducida $g^\nu_\sigma(z, z')$ como

$$\left[\eta^\mu{}_\nu \partial^2 + i\tilde{\theta} \delta(\Sigma) \epsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu p_\alpha \right] g^\nu_\sigma(z, z') = \eta^\mu{}_\sigma \delta(z - z'), \quad (2.8)$$

donde ahora $\partial^2 = \mathbf{p}^2 - \omega^2 - \partial_z^2$ y $p^\alpha = (\omega, \mathbf{p}, 0)$. Para resolver esta ecuación diferencial empleamos el mismo método que se usó para resolver el caso estático, que es similar al usado en mecánica cuántica para calcular la GF para el potencial δ unidimensional, donde se usa la GF reducida en el vacío para integrar la ecuación completa que incluye la interacción δ . Aquí la GF libre que vamos a usar para integrar la Ec. (2.8) es la GF reducida para dos placas paralelas perfectamente conductoras, localizadas en $z = 0$ y $z = L$, que es solución de la ecuación diferencial $\partial^2 \mathbf{g}(z, z') = \delta(z - z')$ y que satisface las condiciones de frontera $\mathbf{g}(0, z') = \mathbf{g}(L, z') = 0$, esta es:

$$\mathbf{g}(z, z') = \frac{\sin[pz_{<}] \sin[p(L - z_{>})]}{p \sin[pL]}, \quad (2.9)$$

donde $z_{>}$ ($z_{<}$) es el mayor (menor) entre z y z' , y $p = \sqrt{\omega^2 - \mathbf{p}^2}$. Ahora, la Ec. (2.8) puede integrarse directamente usando la GF libre (2.9) junto con las propiedades de la función δ , reduciendo el problema a un conjunto de ecuaciones algebraicas acopladas,

$$g^\mu{}_\sigma(z, z') = \eta^\mu{}_\sigma \mathbf{g}(z, z') - i\tilde{\theta} \epsilon^{3\mu\alpha}{}_\nu p_\alpha \mathbf{g}(z, a) g^\nu_\sigma(a, z'). \quad (2.10)$$

Se observa que la continuidad de \mathbf{g} en $z = z'$ implica la continuidad de g^μ_σ ahí, y que la discontinuidad de $\partial_z \mathbf{g}$ en el mismo punto nos da la correspondiente discontinuidad de $\partial_z g^\mu_\sigma$, de acuerdo con la condición de frontera (2.5).

El problema se reduce ahora a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas acopladas para las componentes g^μ_σ de la matriz de GFs reducida. Separamos la Ec. (2.10) en sus componentes $\mu = 0$ y $\mu = j = 1, 2$;

$$g^0_\sigma(z, z') = \eta^0_\sigma \mathbf{g}(z, z') - i\tilde{\theta} \epsilon^{30i} p_i \mathbf{g}(z, a) g^j_\sigma(a, z'), \quad (2.11)$$

$$g^j_\sigma(z, z') = \eta^j_\sigma \mathbf{g}(z, z') - i\tilde{\theta} \epsilon^{3ji} p_i \mathbf{g}(z, a) g^0_\sigma(a, z') - i\tilde{\theta} \epsilon^{3j0} \omega \mathbf{g}(z, a) g^i_\sigma(a, z'). \quad (2.12)$$

Nótese que la Ec. (2.11) es igual a la Ec. (1.50) del caso estático, mientras que la Ec. (2.12) difiere de la Ec. (1.51) por el tercer término del lado derecho, que depende de ω . Para resolver el sistema de ecuaciones, observamos que la Ec. (2.12) acopla los dos valores posibles de j , que pueden desacoplarse si evaluamos dicha ecuación en $z = a$ y reinsertamos el resultado en la misma ecuación. Se obtiene

$$g^j_\sigma(z, z') = \eta^j_\sigma \mathbf{g}(z, z') - i\tilde{\theta} \epsilon^{3j0} \eta^i_\sigma \omega \mathbf{g}(z, a) \mathbf{g}(a, z') + \tilde{\theta}^2 \omega^2 \mathbf{g}(z, a) \mathbf{g}(a, a) g^j_\sigma(a, z') - i\tilde{\theta} \left[\epsilon^{3ji} p_i - i\tilde{\theta} \omega p^j \mathbf{g}(a, a) \right] \mathbf{g}(z, a) g^0_\sigma(a, z'), \quad (2.13)$$

que es una ecuación algebraica que involucra la componente g^0_σ y sólo una componente con j fija, *i.e.* g^j_σ , de manera similar que en la Ec. (2.11). Para obtener la Ec. (2.13) se usaron los resultados $\epsilon^{3j0} \epsilon^{3ik} p_k = p^j$ y $\epsilon^{3j0} \epsilon^{3i0} g^k_\sigma = -g^j_\sigma$. Ahora nos concentraremos en resolver simultáneamente las Ecs. (2.11) y (2.13). Para hacerlo, evaluamos la Ec. (2.13) en $z = a$ y resolvemos para $g^j_\sigma(a, z')$. Luego sustituimos el resultado en la Ec. (2.11). Se obtiene

$$g^0_\sigma(z, z') = \eta^0_\sigma \mathbf{g}(z, z') - i\tilde{\theta} \epsilon^{30i} p_i \eta^j_\sigma \mathbf{g}(z, a) \mathbf{g}(a, z') - \tilde{\theta}^2 \mathbf{p}^2 \mathbf{g}(a, a) \mathbf{g}(z, a) g^0_\sigma(a, z'), \quad (2.14)$$

donde se usó el resultado $\epsilon^{30i} \epsilon^{3jk} p_k p_i = \mathbf{p}^2$. Ahora resolvemos para $g^0_\sigma(a, z')$ evaluando la Ec. (2.14) en $z = a$ y despejando. Insertando el resultado en la misma ecuación obtenemos

$$g^0_\sigma(z, z') = \eta^0_\sigma \left[\mathbf{g}(z, z') + \tilde{\theta} \mathbf{p}^2 \mathbf{g}(a, a) P(z, z') \right] + \left[\tilde{\theta} \omega \eta^k_\sigma p_k \mathbf{g}(a, a) + i \epsilon^0_{\sigma i} p_i \right] P(z, z'), \quad (2.15)$$

donde

$$P(z, z') = -\tilde{\theta} \frac{\mathbf{g}(z, a) \mathbf{g}(a, z')}{1 - p^2 \tilde{\theta}^2 \mathbf{g}^2(a, a)}. \quad (2.16)$$

Las componentes restantes puede obtenerse de la misma manera. El resultado final es

$$g^j_0(z, z') = \left[\tilde{\theta} \omega p^j \mathbf{g}(a, a) + i \epsilon^j_0{}^{i3} p_i \right] P(z, z'), \quad (2.17)$$

$$g^i_j(z, z') = \eta^i_j \mathbf{g}(z, z') + \left[\tilde{\theta} \mathbf{g}(a, a) (p^i p_j - \eta^i_j p^2) + i \epsilon^{0i}{}_j{}^3 \omega \right] P(z, z'), \quad (2.18)$$

con $i, j = 1, 2$. La solución general de la Ec. (2.10) puede escribirse como la suma de dos términos, $g^\mu_\nu(z, z') = \eta^\mu_\nu \mathbf{g}(z, z') + g^\mu_{\theta\nu}(z, z')$. El primer término describe la propagación en ausencia del TI. El segundo, que llamaremos GF θ reducida, y que es igual a

$$g^\mu_{\theta\nu}(z, z') = \tilde{\theta} \mathbf{g}(a, a) [p^\mu p_\nu - (\eta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu) p^2] P(z, z') + i \epsilon^\mu{}_\nu{}^{\alpha 3} p_\alpha P(z, z'), \quad (2.19)$$

contiene la información del TME debido al término θ en la acción. Se puede verificar de forma directa que la Ec. (2.19) contiene los resultados previos de las Ecs. (2.15), (2.17) y (2.18).

En el límite estático ($\omega = 0$), el resultado de la Ec. (2.19) se reduce al que se obtuvo en el capítulo anterior en la Ec. (1.56). Claramente, la matriz de GF completa $G^\mu_\nu(x, x')$ también puede escribirse como la suma de dos términos, $G^\mu_\nu(x, x') = \eta^\mu_\nu \mathcal{G}(x, x') + G^\mu_{\theta\nu}(x, x')$. Observemos de paso que la relación de reciprocidad entre las componentes de la matriz de GF, $G_{\mu\nu}(x, x') = G_{\nu\mu}(x', x)$, es consecuencia directa de la propiedad $g_{\mu\nu}(z, z', p^\alpha) = g_{\nu\mu}(z', z, -p^\alpha)$.

2.2. Valor esperado de vacío del tensor de energía-impulso

Como se discutió en la Sección 1.1.3, el tensor de energía-impulso (SET) en ED θ tiene la misma forma que en la electrodinámica de Maxwell. Aquí partimos del SET en su forma covariante:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (2.20)$$

Claramente el tensor tiene traza cero, *i.e.*, $T^\mu{}_\mu = 0$ y su divergencia es

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -F^\nu{}_\lambda j^\lambda - (\tilde{\theta}/4\pi) \delta(\Sigma) n_\mu F^\nu{}_\lambda \tilde{F}^{\mu\lambda}. \quad (2.21)$$

Como se esperaba, el SET no está conservado en Σ debido al TME que induce densidades de cargas y corrientes efectivas ahí.

Ahora vamos a discutir el valor esperado de vacío del SET, al que nos referiremos simplemente como stress de vacío (VS). El enfoque local para calcular el VS lo iniciaron

Brown y Maclay, quienes calcularon el VS usando la función de Green del sistema [101, 115]. Ahí, el VS puede obtenerse a partir de derivadas apropiadas de la GF, en virtud de la Ec. (2.1E) de la Ref. [116],

$$G^{\mu\nu}(x, x') = -i \langle 0 | \hat{T} A^\mu(x) A^\nu(x') | 0 \rangle. \quad (2.22)$$

Utilizando la técnica de separación de puntos estándar, el SET puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & -\frac{1}{4\pi} \lim_{x \rightarrow x'} \left[\partial^\mu \partial^\nu A^\lambda(x) A_\lambda(x') - \partial^\mu \partial'_\lambda A^\lambda(x) A^\nu(x') - \partial^\lambda \partial^\nu A^\mu(x) A_\lambda(x') \right. \\ & \left. + \partial^\lambda \partial'_\lambda A^\mu(x) A^\nu(x') - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left\{ \partial^\alpha \partial'_\alpha A^\lambda(x) A_\lambda(x') - \partial^\alpha \partial'_\beta A^\beta(x) A_\alpha(x') \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ahora tomamos el valor esperado de vacío del SET (2.23) y usamos la Ec. (2.22) para identificar las componentes de la GF. El resultado es

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle = & \frac{i}{4\pi} \lim_{x \rightarrow x'} \left[-\partial^\mu \partial^\nu G^\lambda{}_\lambda + \partial^\mu \partial'_\lambda G^{\lambda\nu} + \partial^\lambda \partial^\nu G^\mu{}_\lambda - \partial'^\lambda \partial_\lambda G^{\mu\nu} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left(\partial^\alpha \partial'_\alpha G^\lambda{}_\lambda - \partial^\alpha \partial'_\beta G^\beta{}_\alpha \right) \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde se omite la dependencia de $G^{\mu\nu}$ en x y x' . Este resultado puede simplificarse como sigue. Dado que la GF puede escribirse como la suma de dos términos, el VS también podrá escribirse de la misma manera, *i.e.*,

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \langle t^{\mu\nu} \rangle + \langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle. \quad (2.25)$$

El primer término,

$$\langle t^{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{4\pi i} \lim_{x \rightarrow x'} \left(2\partial^\mu \partial^\nu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial^\lambda \partial'_\lambda \right) \mathcal{G}(x, x'), \quad (2.26)$$

es el VS en ausencia del TI. Para obtener la Ec. (2.26) usamos que la GF es diagonal cuando el TI está ausente, *i.e.* es igual a $\eta^\mu{}_\nu \mathcal{G}(x, x')$. El segundo término, al que nos referiremos como stress de vacío θ , o simplemente $\text{VS}\theta$, puede simplificarse dado que la $\text{GF}\theta$ satisface la norma de Lorentz $\partial_\mu G_\theta^{\mu\nu} = 0$. La demostración se sigue de la GF reducida de la Ec. (2.19):

$$\partial_\mu G_{\theta\nu}^\mu(x, x') = -4\pi i \int \frac{d^2\mathbf{P}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} p_\mu g_{\theta\nu}^\mu(z, z'), \quad (2.27)$$

sin embargo, de la GF θ reducida encontramos que

$$\begin{aligned} p_\mu g_{\theta\nu}^\mu(z, z') &= \left\{ \tilde{\theta} \mathbf{g}(a, a) [p_\mu p^\mu p_\nu - p_\mu (\eta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu) p^2] + i\epsilon^\mu{}_\nu{}^{\alpha 3} p_\mu p_\alpha \right\} P(z, z') \\ &= \left\{ \tilde{\theta} \mathbf{g}(a, a) [p^2 p_\nu - (p_\nu + p_\mu n^\mu n_\nu) p^2] + i\epsilon^\mu{}_\nu{}^{\alpha 3} p_\mu p_\alpha \right\} P(z, z'). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Usando que $\epsilon^\mu{}_\nu{}^{\alpha 3} p_\mu p_\alpha = 0$ y $p_\mu n^\mu = 0$ se obtiene

$$p_\mu g_{\theta\nu}^\mu(z, z') = \tilde{\theta} \mathbf{g}(a, a) [p^2 p_\nu - p_\nu p^2] P(z, z') = 0, \quad (2.29)$$

lo que implica que la Ec. (2.27) es cero, *i.e.*, $\partial_\mu G_{\theta\nu}^\mu(x, x') = 0$, como se quería demostrar. Con este resultado, el VS θ puede escribirse como

$$\langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{4\pi i} \lim_{x \rightarrow x'} \left[\partial^\mu \partial^\nu G_\theta + \partial'^\lambda \partial_\lambda \left(G_\theta^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} G_\theta \right) \right], \quad (2.30)$$

donde $G_\theta = G_{\theta\mu}^\mu$ es la traza de la GF θ . Este resultado exhibe que la traza es cero a nivel cuántico, *i.e.*, $\eta_{\mu\nu} \langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle = 0$. Para la situación más simple en que el SET está conservado, es posible verificar que $\partial_\nu \langle T^{\mu\nu} \rangle = \langle \partial_\nu T^{\mu\nu} \rangle = 0$. Sin embargo, como señalan Deutsch y Candelas [116], esta identidad no es necesariamente una regla. El problema que estamos tratando es un ejemplo de esto, dado que $\langle \partial_\nu T_\theta^{\mu\nu} \rangle = (\tilde{\theta}/8\pi i) \delta(\Sigma) \eta^{\mu 3} \epsilon^{\sigma\nu\alpha\beta} \lim_{x \rightarrow x'} \partial_\sigma \partial'_\alpha G_{\theta\nu\beta}$, que como puede demostrarse, es diferente es $\partial_\nu \langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle$.

2.3. El efecto Casimir

Ahora vamos a calcular el VS renormalizado $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$, que se obtiene como la diferencia entre el VS en presencia de fronteras y el del vacío. En el caso estándar ($\theta = 0$), Brown y Maclay [101] demostraron que es uniforme entre las placas,

$$\langle t^{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = -\frac{\pi^2}{720L^4} (\eta^{\mu\nu} + 4n^\mu n^\nu), \quad (2.31)$$

donde L es la distancia entre las placas. La fuerza de Casimir entre las placas puede obtenerse derivando la energía de Casimir $\mathcal{E}_L = L \langle t^{00} \rangle_{\text{ren}} = -\pi^2/720L^3$ con respecto a L , *i.e.*, $F_L = -d\mathcal{E}_L/dL = -\pi^2/240L^4$.

Ahora nos ocuparemos de calcular el VS θ renormalizado (2.30) para nuestro sistema de Casimir. Para hacerlo, seguimos las líneas descritas en las Refs. [101, 116]. Sustituyendo la representación de Fourier de la GF θ encontramos que el VS θ puede escribirse en términos

de la GF θ reducida como sigue

$$\langle T_{\theta}^{\mu\nu} \rangle = -i \int \frac{d^2\mathbf{P}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \lim_{z \rightarrow z'} \left[\partial^{\mu} \partial^{\nu} g_{\theta} + \partial'^{\lambda} \partial_{\lambda} \left(g_{\theta}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} g_{\theta} \right) \right], \quad (2.32)$$

donde $\partial^{\mu} = (-i\omega, i\mathbf{p}, \partial_z)$ y $g_{\theta} = g_{\theta\mu}^{\mu}$ es la traza de la GF θ reducida. De la Ec. (2.19) encontramos que las componentes de la GF θ reducida son

$$g_{\theta}^{00} = \tilde{\theta}\mathbf{g}(a, a) (\omega^2 - p^2) P(z, z') = \tilde{\theta}\mathbf{g}(a, a) \mathbf{p}^2 P(z, z'), \quad (2.33)$$

$$g_{\theta}^{01} = \left\{ \tilde{\theta}\mathbf{g}(a, a) p_x \omega - i p_y \right\} P(z, z'), \quad (2.34)$$

$$g_{\theta}^{02} = \left\{ \tilde{\theta}\mathbf{g}(a, a) p_y \omega + i p_x \right\} P(z, z'), \quad (2.35)$$

$$g_{\theta}^{11} = \tilde{\theta}\mathbf{g}(a, a) (p_x^2 + p^2) P(z, z') = \tilde{\theta}\mathbf{g}(a, a) (\omega^2 - p_y^2) P(z, z'), \quad (2.36)$$

$$g_{\theta}^{12} = \left\{ \tilde{\theta}\mathbf{g}(a, a) p_x p_y - i \omega \right\} P(z, z'), \quad (2.37)$$

$$g_{\theta}^{22} = \tilde{\theta}\mathbf{g}(a, a) (p_y^2 + p^2) P(z, z') = \tilde{\theta}\mathbf{g}(a, a) (\omega^2 - p_x^2) P(z, z'), \quad (2.38)$$

$$g_{\theta}^{\mu 3} = 0, \quad (2.39)$$

de donde obtenemos que la traza es

$$g_{\theta} = -2p^2 \tilde{\theta}\mathbf{g}(a, a) P(z, z'). \quad (2.40)$$

Ahora ya podemos calcular las componentes no cero del VS θ . Usando el resultado $\partial'^{\lambda} \partial_{\lambda} = p^2 - \partial_z \partial'_z$ en la Ec. (2.32) junto con las componentes no cero de la GF θ reducida obtenemos

$$\langle T_{\theta}^{00} \rangle = +i \int \frac{d^2\mathbf{P}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\theta} \omega^2 \mathbf{g}(a, a) \lim_{z \rightarrow z'} (p^2 + \partial_z \partial'_z) P(z, z'), \quad (2.41)$$

$$\langle T_{\theta}^{11} \rangle = +i \int \frac{d^2\mathbf{P}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\theta} p_x^2 \mathbf{g}(a, a) \lim_{z \rightarrow z'} (p^2 + \partial_z \partial'_z) P(z, z'), \quad (2.42)$$

$$\langle T_{\theta}^{22} \rangle = +i \int \frac{d^2\mathbf{P}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\theta} p_y^2 \mathbf{g}(a, a) \lim_{z \rightarrow z'} (p^2 + \partial_z \partial'_z) P(z, z'), \quad (2.43)$$

$$\langle T_{\theta}^{33} \rangle = +i \int \frac{d^2\mathbf{P}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\theta} p^2 \mathbf{g}(a, a) \lim_{z \rightarrow z'} (p^2 + \partial_z \partial'_z) P(z, z'). \quad (2.44)$$

Las componentes no diagonales dependen de ω , p_x , p_y o productos cruzados de ellos. Como las integrales van de $-\infty$ a $+\infty$, y dado que $P(z, z')$ depende de ω^2 y \mathbf{p}^2 , entonces esas componentes se anulan. De esta forma concluimos que sólo las componentes diagonales

del $\text{VS}\theta$ no son cero. Estas pueden resumirse en la siguiente expresión

$$\langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle = i\tilde{\theta} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} (p^\mu p^\nu + n^\mu n^\nu p^2) \mathbf{g}(a, a) \lim_{z \rightarrow z'} (p^2 + \partial'_z \partial_z) P(z, z'). \quad (2.45)$$

Del resultado (2.45) ahora calculamos el $\text{VS}\theta$ renormalizado, que esta dado por $\langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = \langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle - \langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$, donde el primer (segundo) término es el $\text{VS}\theta$ en presencia (ausencia) de las placas [116]. Cuando las placas no están, la GF reducida que debemos usar para calcular el $\text{VS}\theta$ en la región $[0, L]$ es la del vacío, $\mathbf{g}_0(z, z') = (i/2p) \exp(ip|z - z'|)$ [99], de donde encontramos que $\lim_{z \rightarrow z'} \partial_z \partial'_z P_0(z, z') = -p^2 \lim_{z \rightarrow z'} P_0(z, z')$, lo que implica que el integrando en la Ec. (2.45) se anula. La función P_0 esta dada por la Ec. (2.16), con la GF reducida del vacío. De esta forma concluimos que $\langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = 0$.

Ahora calcularemos $\langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = \langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle$ a partir de la Ec. (2.45). De la simetría del problema, las componentes del $\text{VS}\theta$ en las placas, $\langle T_\theta^{11} \rangle$ y $\langle T_\theta^{22} \rangle$, son iguales. Además, de la estructura matemática de la Ec. (2.45) encontramos la relación $\langle T_\theta^{00} \rangle = -\langle T_\theta^{11} \rangle$. Estos resultados, junto con la naturaleza de traza nula del SET, nos permiten escribir el $\text{VS}\theta$ renormalizado en la forma

$$\langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = (\eta^{\mu\nu} + 4n^\mu n^\nu) \tau(\theta, z), \quad (2.46)$$

donde

$$\tau(\theta, z) = i\tilde{\theta} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 \mathbf{g}(a, a) \lim_{z \rightarrow z'} (p^2 + \partial'_z \partial_z) P(z, z'). \quad (2.47)$$

Nótese que nuestro $\text{VS}\theta$ tiene la misma estructura tensorial que el obtenido por Brown y Maclay (2.31), sin embargo, nosotros tenemos un VS que depende de z debido a la no conservación del SET en Σ . Para entender mejor la función $\tau(\theta, z)$, calcularemos el límite en el integrando de la Ec. (2.47), y para hacerlo, primero escribimos la función $P(z, z')$:

$$P(z, z') = \frac{-\tilde{\theta}}{1 - \tilde{\theta}^2 p^2 \mathbf{g}^2(a, a)} \frac{1}{p^2 \sin^2[pL]} \begin{cases} \sin^2[p(L - a)] \sin[pz] \sin[pz'] & , \quad z, z' < a \\ \sin^2[pa] \sin[p(L - z)] \sin[p(L - z')] & , \quad z, z' > a \end{cases},$$

de donde obtenemos

$$\lim_{z \rightarrow z'} (p^2 + \partial_z \partial'_z) P(z, z') = \frac{-\tilde{\theta}}{1 - \tilde{\theta}^2 p^2 \mathbf{g}^2(a, a)} \frac{1}{\sin^2[pL]} \begin{cases} \sin^2[p(L - a)] & , \quad z < a \\ \sin^2[pa] & , \quad z > a \end{cases}. \quad (2.48)$$

Ahora vamos a evaluar la integral en la Ec. (2.47). Primero observamos que el integrando depende de \mathbf{p}^2 y ω^2 . De esta forma, podemos usar coordenadas polares para el elemento

de momento, $d^2\mathbf{p} = |\mathbf{p}|d|\mathbf{p}|d\varphi$, donde $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ y $0 \leq |\mathbf{p}| < \infty$. La integral sobre φ da 2π . De esta forma obtenemos

$$\tau(\theta, z) = -2\pi i \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}|d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\tilde{\theta}^2 \omega^2 \frac{\sin[pa] \sin[p(L-a)]}{p \sin[pL]}}{1 - \tilde{\theta}^2 p^2 \left\{ \frac{\sin[pa] \sin[p(L-a)]}{p \sin[pL]} \right\}^2} \times \left\{ \frac{\sin^2[p(L-a)]}{\sin^2[pL]} H(a-z) + \frac{\sin^2[pa]}{\sin^2[pL]} H(z-a) \right\}. \quad (2.49)$$

Ahora hacemos una rotación compleja de la frecuencia,

$$\omega \rightarrow i\zeta \quad , \quad p \rightarrow i\sqrt{\zeta^2 + \mathbf{p}^2} = i\rho. \quad (2.50)$$

De esta manera la integral puede escribirse como sigue

$$\tau(\theta, z) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty |\mathbf{p}|d|\mathbf{p}| \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \frac{\zeta^2}{\rho} \frac{\tilde{\theta}^2 \frac{\sinh[\rho a] \sinh[\rho(L-a)]}{\sinh[\rho L]}}{1 + \tilde{\theta}^2 \left\{ \frac{\sinh[\rho a] \sinh[\rho(L-a)]}{\sinh[\rho L]} \right\}^2} \times \left\{ \frac{\sinh^2[\rho(L-a)]}{\sinh^2[\rho L]} H(a-z) + \frac{\sinh^2[\rho a]}{\sinh^2[\rho L]} H(z-a) \right\}. \quad (2.51)$$

donde se uso que $\sin[ix] = i \sinh x$. La integral que resulta puede hacerse mejor en coordenadas polares. Reemplazamos ζ y $|\mathbf{p}|$ por las coordenadas polares $\zeta = \xi \cos \varphi$, $|\mathbf{p}| = \xi \sin \varphi$, integrando primero sobre φ y luego sobre ξ . El resultado es

$$\tau(\theta, z) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{+\infty} \xi^3 \frac{\tilde{\theta}^2 \frac{\sinh[\xi a] \sinh[\xi(L-a)]}{\sinh[\xi L]}}{1 + \tilde{\theta}^2 \left\{ \frac{\sinh[\xi a] \sinh[\xi(L-a)]}{\sinh[\xi L]} \right\}^2} \times \left\{ \frac{\sinh^2[\xi(L-a)]}{\sinh^2[\xi L]} H(a-z) + \frac{\sinh^2[\xi a]}{\sinh^2[\xi L]} H(z-a) \right\}. \quad (2.52)$$

La integral angular puede realizarse directamente, obteniendo $2/3$. Después de reescalar el integrando encontramos

$$\tau(\theta, z) = -\frac{1}{6\pi^2 L^4} \int_0^{+\infty} \xi^3 \frac{\tilde{\theta}^2 \frac{\sinh[\xi\chi] \sinh[\xi(1-\chi)]}{\sinh[\xi]}}{1 + \tilde{\theta}^2 \left\{ \frac{\sinh[\xi\chi] \sinh[\xi(1-\chi)]}{\sinh[\xi]} \right\}^2} \times \left\{ \frac{\sinh^2[\xi(1-\chi)]}{\sinh^2[\xi]} H(a-z) + \frac{\sinh^2[\xi\chi]}{\sinh^2[\xi]} H(z-a) \right\}, \quad (2.53)$$

donde $\chi = a/L$, tal que $0 < \chi < L$. Ahora observamos que esta función puede escribirse

como sigue

$$\tau(\theta, z) = g(\theta, \chi)H(a - z) + g(\theta, 1 - \chi)H(z - a), \quad (2.54)$$

donde

$$g(\theta, \chi) = -\frac{1}{6\pi^2 L^4} \int_0^{+\infty} \xi^3 \frac{\tilde{\theta}^2 \frac{\sinh[\xi\chi] \sinh[\xi(1-\chi)]}{\sinh[\xi]}}{1 + \tilde{\theta}^2 \left\{ \frac{\sinh[\xi\chi] \sinh[\xi(1-\chi)]}{\sinh[\xi]} \right\}^2} \frac{\sinh^2[\xi(1-\chi)]}{\sinh^2[\xi]}. \quad (2.55)$$

Finalmente reescalamos la función $g(\theta, \chi)$ usando la densidad de energía almacenada entre dos placas paralelas conductoras en ausencia del TI, *i.e.* $\mathcal{E}_L = -\frac{\pi^2}{720L^4}$. El resultado es

$$g(\theta, \chi) = -\frac{\pi^2}{720L^4} u(\theta, \chi), \quad (2.56)$$

donde

$$u(\theta, \chi) = \frac{120}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{\tilde{\theta}^2 \xi^3 \sinh[\xi\chi] \sinh^3[\xi(1-\chi)] \sinh^{-3}[\xi]}{1 + \tilde{\theta}^2 \sinh^2[\xi\chi] \sinh^2[\xi(1-\chi)] \sinh^{-2}[\xi]} d\xi. \quad (2.57)$$

De esta forma, el $\text{VS}\theta$ renormalizado en la Ec. (2.46) puede escribirse como sigue

$$\langle T_\theta^{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = -\frac{\pi^2}{720L^4} (\eta^{\mu\nu} + 4n^\mu n^\nu) [u(\theta, \chi)H(a - z) + u(\theta, 1 - \chi)H(z - a)]. \quad (2.58)$$

Físicamente, interpretamos la función $u(\theta, \chi)$ como el cociente entre la densidad de energía θ renormalizada en la región de vacío $[0, a)$ y la densidad de energía renormalizada en ausencia del TI, $\langle t^{00} \rangle_{\text{ren}}$. La función $u(\theta, 1 - \chi)$ tiene una interpretación análoga en el cuerpo del TI $(a, L]$. Este resultado demuestra que la densidad de energía es constante en ambas regiones (vacío y TI), sin embargo, tiene una discontinuidad simple en la superficie Σ del TI, *i.e.*, $\partial_z \langle T_\theta^{00} \rangle_{\text{ren}} \propto \delta(\Sigma)$. La energía de Casimir $\mathcal{E} = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_\theta$ se define como la energía en unidad de área almacenada en el campo electromagnético entre las placas. Para obtenerla debemos integrar la densidad de energía en esta región,

$$\mathcal{E}_\theta = \int_0^L dz \langle T_\theta^{00} \rangle_{\text{ren}} = \mathcal{E}_L [\chi u(\theta, \chi) + (1 - \chi)u(\theta, 1 - \chi)], \quad (2.59)$$

donde \mathcal{E}_L es la energía de Casimir en ausencia del TI. El primer término corresponde a la energía almacenada en el campo electromagnético entre P_1 y Σ , mientras que el segundo término es la energía almacenada en el cuerpo del TI. En la figura 2.3 se muestra un gráfico del cociente $\mathcal{E}_\theta/\mathcal{E}_L$ como función de χ para diferentes valores de θ (apropiados para TIs [79]).

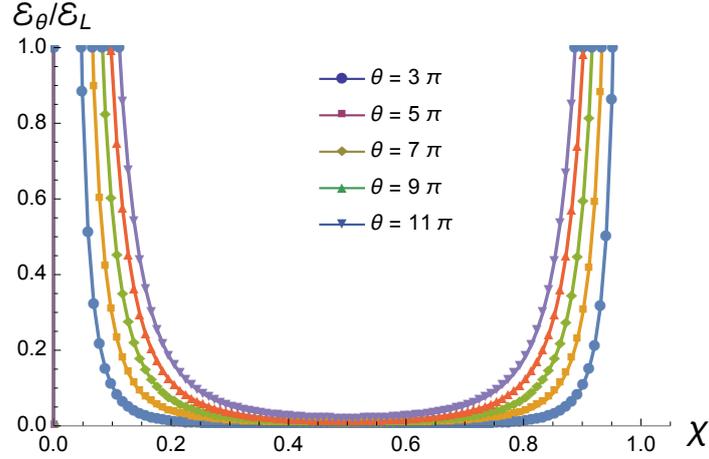


Figura 2.3: $\mathcal{E}_\theta/\mathcal{E}_L$ como función de $\chi = a/L$, para diferentes valores de θ .

2.3.1. Fuerza de Casimir sobre la interfaz θ

El pistón de Casimir, como se conoce en la literatura, consiste de una cavidad rectangular de lado L de paredes conductoras con una placa conductora intermedia (pistón) a una distancia a de una de las placas [117]. Es claro que esta configuración es equivalente al problema de dos cavidades conductoras adyacentes. De esta manera, es posible utilizar los resultados del EC estándar para estudiar el pistón de Casimir. En este caso podemos determinar la diferencia de presiones de Casimir ejercidas sobre ambas caras de la placa intermedia. El resultado es que la energía de Casimir en cada región genera una fuerza sobre el pistón que tira de él hacia el extremo más próximo de la caja. Aquí consideramos una configuración semejante, en donde el pistón es la superficie Σ del TI. Dado que la interfaz θ cambia la densidad de energía del campo electromagnético en los cuerpos, una fuerza de Casimir efectiva actuará sobre Σ . Esta puede obtenerse como $F_{\theta p} = -d\mathcal{E}_\theta/da$. El resultado es

$$\frac{F_{\theta p}}{F_L} = -\frac{1}{3} \frac{d}{d\chi} [\chi u(\theta, \chi) + (1 - \chi)u(\theta, 1 - \chi)], \quad (2.60)$$

donde F_L es la fuerza de Casimir entre dos placas conductoras en ausencia del TI, como se definió en la Ec. (2.1). La figura 2.4 muestra la fuerza de Casimir sobre Σ en unidades de F_L como función de χ para valores diferentes de θ . Observamos que esta fuerza tira de la interfaz θ hacia el lado más cercano de las dos paredes fijas P_1 o P_2 , de manera similar a la conclusión en la Ref. [117].

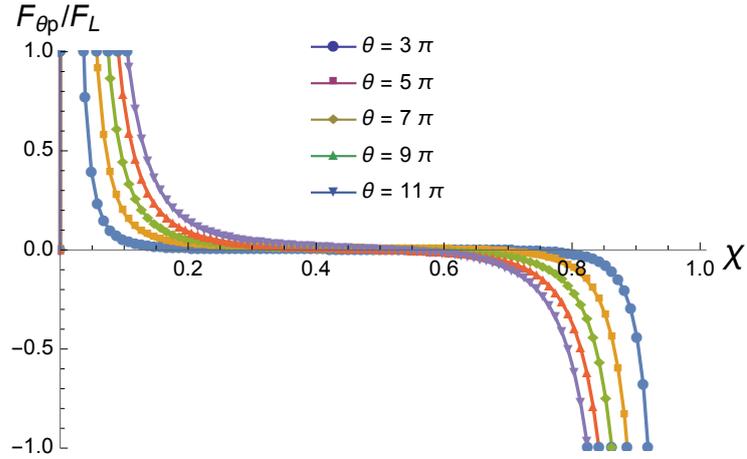


Figura 2.4: Fuerza de Casimir sobre la interfaz θ en unidades de F_L como función de χ , para diferentes valores de θ .

2.3.2. Fuerza de Casimir entre P_1 y Σ , cuando $L \rightarrow \infty$

Ahora consideramos el límite en que la placa P_2 se envía al infinito, *i.e.*, $L \rightarrow \infty$. Esta configuración corresponde a una placa conductora P_1 en el vacío, y un TI semi-infinito colocado a una distancia a . Aquí la placa conductora y el TI se atraen mutuamente. La energía de Casimir (2.59) en el límite $L \rightarrow \infty$ toma la forma $\mathcal{E}_\theta^{L \rightarrow \infty} = \mathcal{E}_a R(\theta)$, con $\mathcal{E}_a = -\pi^2/720a^3$, y la función

$$R(\theta) = \frac{120}{\pi^4} \int_0^\infty \xi^3 \frac{\tilde{\theta}^2}{1 + \tilde{\theta}^2 e^{-2\xi} \sinh^2 \xi} e^{-3\xi} \sinh \xi d\xi, \quad (2.61)$$

que es independiente de a . Además, tal función está acotada por su límite cuando $\theta \rightarrow \pm\infty$, *i.e.*,

$$R(\theta) \leq \frac{120}{\pi^4} \int_0^\infty \xi^3 \frac{e^{-\xi}}{\sinh \xi} d\xi = 1. \quad (2.62)$$

Por lo tanto, para este caso, la energía almacenada en el campo electromagnético está acotada por la energía de Casimir entre dos placas paralelas conductoras a una distancia a , *i.e.*, $\mathcal{E}_\theta^{L \rightarrow \infty} \leq \mathcal{E}_a$. Físicamente, esto implica que en el límite $\theta \rightarrow \pm\infty$ la superficie del TI modela una placa conductora, lo que es análogo a la prescripción de Schwinger para describir una placa conductora en el límite $\varepsilon \rightarrow \infty$ de medios materiales [99]. Tomando la derivada con respecto a a encontramos que la placa y el TI ejercen una fuerza de atracción (en unidades de $F_a = -\pi^2/240a^4$) dada por $f_\theta = F_\theta^{L \rightarrow \infty}/F_a = R(\theta)$. Resultados numéricos de f_θ para diferentes valores de θ se presentan en la tabla 2.1.

Estos resultados, que se derivan de nuestras Ecs. (2.19) y (2.16), concuerdan con los que

θ	$\pm 7\pi$	$\pm 15\pi$	$\pm 23\pi$	$\pm 31\pi$	$\pm 39\pi$
f_θ	0.0005	0.0025	0.0060	0.0109	0.0172

 Cuadro 2.1: Fuerza normalizada $f_\theta = F_\theta^{L \rightarrow \infty} / F_a = R(\theta)$ para diferentes valores de θ .

se obtienen usando las matrices de reflexión que contienen los coeficientes de Fresnel, como se demuestra a continuación. Sabemos que la densidad de energía de Casimir almacenada entre dos placas paralelas dieléctricas (etiquetadas 1 y 2) separadas por una distancia a , a temperatura cero, puede escribirse como

$$\mathcal{E}_C(a) = \int_0^\infty \frac{d\xi}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \log \det [1 - \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 e^{-2k_3 a}], \quad (2.63)$$

donde $k_3 = \sqrt{\xi^2 + \mathbf{p}^2}$ es el vector de onda perpendicular a las placas, \mathbf{p} es el momento paralelo a las placas, y ξ es la frecuencia imaginaria definida por $\omega = i\xi$. Las matrices $\mathbf{R}_{1,2}$ son las matrices de reflexión de 2×2 que contienen los coeficientes de Fresnel. Las matrices de reflexión para placas materiales es

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{\mu k_z - \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \mathbf{p}^2}}{\mu k_z + \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \mathbf{p}^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon k_z - \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \mathbf{p}^2}}{\epsilon k_z + \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \mathbf{p}^2}} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

donde $k_z = \sqrt{\omega^2 - \mathbf{p}^2}$. La matriz de reflexión para placas materiales con respuesta topológica magnetoeléctrica es conocida, e igual a

$$\mathbf{R}_{TI} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (\mu k_z - q)(\epsilon k_z + q) - q k_z \mu \tilde{\theta}^2 & 2\tilde{\theta} q \mu k_z \\ 2\tilde{\theta} q \mu k_z & (\epsilon k_z - q)(\mu k_z + q) + q k_z \mu \tilde{\theta}^2 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

donde $\Delta = (\mu k_z + q)(\epsilon k_z + q) + q k_z \mu \tilde{\theta}^2$, $k_z^2 = \omega^2 - \mathbf{p}^2$, $q^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \mathbf{p}^2$, y $\tilde{\theta} = \alpha \theta / \pi$.

La matriz de reflexión para una placa conductora puede obtenerse de la Ec. (2.64) en el límite $\epsilon \rightarrow \infty$. Por otro lado, para describir un TI plano en $z = a$, tal que consideremos sólo los efectos puramente topológicos, debemos tomar $\epsilon = \mu = 1$ en la Ec. (2.65). De esta manera, las matrices de reflexión que vamos a considerar son

$$\mathbf{R}_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{TI} = \frac{\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \begin{pmatrix} -\tilde{\theta} & 2 \\ 2 & \tilde{\theta} \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

De esta forma, usando la Ec. (2.63), la densidad de energía de Casimir es

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(a) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty |\mathbf{p}|d|\mathbf{p}| \log \left[\left(1 - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} e^{-2k_3 a} \right)^2 + \left(\frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} e^{-2k_3 a} \right)^2 \right], \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty |\mathbf{p}|d|\mathbf{p}| \log \left[1 - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} e^{-2k_3 a} (2 - e^{-2k_3 a}) \right].\end{aligned}\quad (2.67)$$

La integral que resulta se puede hacer en coordenadas polares. Reemplazando ξ y $|\mathbf{p}|$ por las coordenadas polares $|\mathbf{p}| = \rho \cos \varphi$, $\xi = \rho \sin \varphi$, e integrando primero sobre φ y luego sobre ρ . El resultado es

$$\mathcal{E}_c(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \rho^2 \log \left[1 - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} e^{-2\rho a} (2 - e^{-2\rho a}) \right] d\rho, \quad (2.68)$$

que puede escalarse para obtener

$$\mathcal{E}_c(a) = \frac{1}{32\pi^2 a^3} \int_0^\infty \rho^2 \log \left[1 - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} e^{-\rho} (2 - e^{-\rho}) \right] d\rho. \quad (2.69)$$

Integrando por partes obtenemos

$$\mathcal{E}_c(a) = \frac{1}{32\pi^2 a^3} \left\{ \frac{\rho^3}{3} \log \left[1 - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} e^{-\rho} (2 - e^{-\rho}) \right] \Big|_0^\infty - \frac{2}{3} \int_0^\infty \rho^3 \frac{\tilde{\theta}^2 (e^\rho - 1)}{4e^{2\rho} + \tilde{\theta}^2 (1 - 2e^\rho + e^{2\rho})} d\rho \right\}. \quad (2.70)$$

El primer término que resulta de la integral es cero. La integral resultante puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(a) &= -\frac{1}{3\pi^2 a^3} \int_0^\infty \rho^3 \frac{\tilde{\theta}^2 (e^{2\rho} - 1)}{4e^{4\rho} + \tilde{\theta}^2 (1 - 2e^{2\rho} + e^{4\rho})} d\rho \\ &= -\frac{1}{3\pi^2 a^3} \int_0^\infty \rho^3 \frac{\tilde{\theta}^2 (e^{-2\rho} - e^{-4\rho})}{4 + \tilde{\theta}^2 (1 - 2e^{-2\rho} + e^{-4\rho})} d\rho \\ &= -\frac{1}{6\pi^2 a^3} \int_0^\infty \rho^3 \frac{\tilde{\theta}^2}{1 + \tilde{\theta}^2 e^{-2\rho} \sinh^2 \rho} e^{-3\rho} \sinh \rho d\rho\end{aligned}\quad (2.71)$$

Si finalmente dividimos entre la energía $\mathcal{E}_a = -\pi^2/720a^3$, encontramos la misma expresión para la función $R(\theta)$, *i.e.*

$$R(\theta) = \frac{\mathcal{E}_c(a)}{\mathcal{E}_a} = \frac{120}{\pi^4} \int_0^\infty \rho^3 \frac{\tilde{\theta}^2}{1 + \tilde{\theta}^2 e^{-2\rho} \sinh^2 \rho} e^{-3\rho} \sinh \rho d\rho, \quad (2.72)$$

lo que completa la demostración.

2.4. Efectos a temperatura finita

En esta sección, incluimos los efectos de la temperatura en la fuerza de Casimir entre una placa conductora y un TI semi-infinito, que es el caso discutido en la sección 2.3.2. En este caso, debemos tomar en cuenta no sólo las fluctuaciones que emergen de la mecánica cuántica, sino también las de los efectos térmicos. Para tomar en cuenta estos efectos, debemos suponer que el sistema está en equilibrio térmico. Como primer paso, el remplazo formal

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{2\pi} \longleftrightarrow \kappa T \sum_{l=0}^{\infty \prime} \quad (2.73)$$

en la Ec. (2.63), junto con el remplazo de ξ por $\xi_l = 2\pi\kappa T l$, las frecuencias discretas de Matsubara, toman en cuenta los efectos de la temperatura en la densidad de energía de Casimir. Aquí κ es la constante de Boltzman, T es la temperatura absoluta, y la suma primada denota que el término con $l = 0$ va acompañado de un factor $1/2$ comparado con el resto de los términos en la suma, *i.e.*

$$\sum_{l=0}^{\infty \prime} = \frac{1}{2}\delta_{0l} + \sum_{l=1}^{\infty}. \quad (2.74)$$

Realizando el remplazo antes descrito, podemos escribir la densidad de energía de Casimir como función de la temperatura como sigue:

$$\mathcal{E}_c(a, T, \theta) = \kappa T \sum_{l=0}^{\infty \prime} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \log \left[1 - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} e^{-2k_3 a} (2 - e^{-2k_3 a}) \right], \quad (2.75)$$

donde $k_3 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \xi_l^2}$. Para obtener esta expresión se usaron las matrices de reflexión de la Ec. (2.66). Para integrar, escribimos el elemento de momento en coordenadas polares, $d^2\mathbf{p} = \rho d\rho d\varphi$, con $0 \leq \rho < \infty$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Integrando sobre φ obtenemos

$$\mathcal{E}_c(a, T, \theta) = \kappa T \sum_{l=0}^{\infty \prime} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{2\pi} \log \left[1 - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} e^{-2k_3 a} (2 - e^{-2k_3 a}) \right], \quad (2.76)$$

donde ahora $k_3 = \sqrt{\rho^2 + \xi_l^2}$. Haciendo el cambio de variables $u = k_3$ encontramos que la densidad de energía puede reescribirse como sigue

$$\mathcal{E}_C(a, T, \theta) = \kappa T \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\xi_l}^{\infty} \frac{udu}{2\pi} \log \left[1 - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} e^{-2ua} (2 - e^{-2ua}) \right], \quad (2.77)$$

de donde es posible obtener la fuerza de Casimir dependiente de la temperatura. *i.e.*

$$\mathcal{F}_C(a, T, \theta) = -\frac{d\mathcal{E}_C(a, T, \theta)}{da} = \kappa T \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\xi_l}^{\infty} \frac{u^2 du}{2\pi} \frac{4\tilde{\theta}^2 (1 - e^{2au})}{(4 + \tilde{\theta}^2)e^{4au} + \tilde{\theta}^2 (1 - 2e^{2au})}. \quad (2.78)$$

Haciendo el cambio de variables $\zeta = au$ y manipulando el integrando se obtiene finalmente

$$\mathcal{F}_C(a, T, \theta) = -\frac{\kappa T}{\pi a^3} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{a\xi_l}^{\infty} \zeta^2 \frac{\tilde{\theta}^2}{1 + \tilde{\theta}^2 \sinh^2 \zeta e^{-2\zeta}} \sinh \zeta e^{-3\zeta} d\zeta. \quad (2.79)$$

En el límite $\theta \rightarrow \infty$ obtenemos la fuerza entre dos placas paralelas conductoras dependiente de la temperatura

$$\mathcal{F}_C(a, T, \theta \rightarrow \infty) = \frac{\kappa T}{\pi a^3} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{a\xi_l}^{\infty} \zeta^2 (1 - \coth \zeta) d\zeta, \quad (2.80)$$

que es el resultado reportado por Milton en la Ec. 3.29 de la Ref. [108].

Ahora consideremos el límite de la fuerza de Casimir para altas temperaturas. Cuando $T \rightarrow \infty$ las contribuciones más importantes en la suma de la Ec. (2.79) son $n = 0$ y $n = 1$. En ese caso tenemos

$$\mathcal{F}_C(a, T \rightarrow \infty, \theta) \simeq -\frac{\kappa T}{\pi a^3} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \zeta^2 \frac{\tilde{\theta}^2}{1 + \tilde{\theta}^2 \sinh^2 \zeta e^{-2\zeta}} \sinh \zeta e^{-3\zeta} d\zeta + \int_{t/2}^{\infty} \zeta^2 \frac{\tilde{\theta}^2}{1 + \tilde{\theta}^2 \sinh^2 \zeta e^{-2\zeta}} \sinh \zeta e^{-3\zeta} d\zeta \right\}, \quad (2.81)$$

donde $t = 4\pi a \kappa T$. En el límite que estamos considerando, la segunda integral puede aproximarse como sigue:

$$\int_{t/2}^{\infty} \zeta^2 \frac{\tilde{\theta}^2}{1 + \tilde{\theta}^2 \sinh^2 \zeta e^{-2\zeta}} \sinh \zeta e^{-3\zeta} d\zeta \simeq \frac{\tilde{\theta}^2/4}{4 + \tilde{\theta}^2} \int_t^{\infty} \zeta^2 e^{-\zeta} d\zeta = \frac{\tilde{\theta}^2/2}{4 + \tilde{\theta}^2} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) e^{-t}. \quad (2.82)$$

De esta forma, la fuerza de Casimir, en el límite de altas temperaturas, puede escribirse como

$$\mathcal{F}_C(a, T \rightarrow \infty, \theta) \sim -\frac{\bar{T}}{4\pi^2 a^3} \left\{ \mathcal{M}(\tilde{\theta}) + \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \left(1 + 2a\bar{T} + 2a^2\bar{T}^2 \right) e^{-2a\bar{T}} \right\}, \quad (2.83)$$

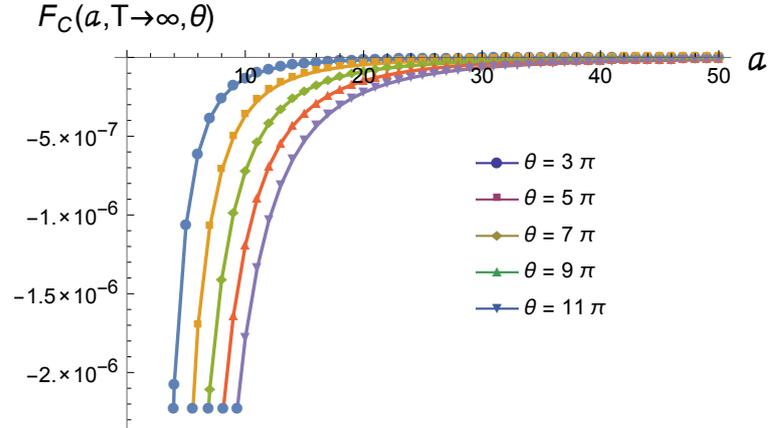


Figura 2.5: Fuerza de Casimir a altas temperaturas como función de a para $\bar{T} = 100$ y diferentes valores de θ .

donde $\bar{T} = 2\pi\kappa T$, y

$$\mathcal{M}(\tilde{\theta}) = \int_0^{\infty} \lambda^2 \frac{\tilde{\theta}^2}{1 + \tilde{\theta}^2 \sinh^2 \lambda e^{-2\lambda}} \sinh \lambda e^{-3\lambda} d\lambda. \quad (2.84)$$

En el límite $\theta \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\mathcal{F}_c(a, T \rightarrow \infty, \theta \rightarrow \infty) \sim -\frac{\bar{T}}{4\pi^2 a^3} \left\{ \frac{\zeta(3)}{2} + \left(1 + 2a\bar{T} + 2a^2\bar{T}^2\right) e^{-2a\bar{T}} \right\}, \quad (2.85)$$

donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann. Esta expresión corresponde a la fuerza de Casimir entre dos placas paralelas conductoras en el límite de altas temperaturas, como puede verse en la Ec. (3.30) de la Ref. [108].

Un análisis de la función $\mathcal{M}(\tilde{\theta})$ nos muestra que está acotada por su límite cuando $\theta \rightarrow \infty$, *i.e.*

$$\mathcal{M}(\tilde{\theta}) \leq \mathcal{M}(\tilde{\theta} \rightarrow \infty). \quad (2.86)$$

Por otro lado, dado que $\frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \leq 1$, concluimos que la fuerza de Casimir para altas temperaturas entre una placa conductora y el TI, es mayor que la asociada a dos placas conductoras. Esto es

$$\mathcal{F}_c(a, T \rightarrow \infty, \theta) \geq \mathcal{F}_c(a, T \rightarrow \infty, \theta \rightarrow \infty). \quad (2.87)$$

En la figura 2.5 presentamos los gráficos de la fuerza de Casimir como función de a para $\bar{T} = 100$ y diferentes valores de θ .

2.5. Discusión

En este capítulo usamos el tensor de energía-impulso para calcular la energía y la fuerza de Casimir para el sistema de la figura 2.2. Nuestra configuración consiste de un bloque de TI con TMEP θ en la región $a < z < L$, que llena parcialmente el espacio entre dos placas paralelas conductoras. En primera aproximación, ignoramos características que son relevantes en situaciones experimentales, tales como las propiedades ópticas de los TIs, que pueden tomarse en cuenta incluyendo estos parámetros en la función de Green de acuerdo a los métodos estándares de las Refs. [99, 108, 109]. El sistema queda bien descrito por la acción de la electrodinámica θ , dada en la Ec. (1.2). En este trabajo, calculamos el valor esperado de vacío renormalizado del tensor de energía-impulso a partir de (derivadas de) la matriz de funciones de Green correspondiente. Para hacerlo, se requiere la matriz de GFs dependiente del tiempo, para lo que se extendieron los resultados del capítulo anterior, en donde tratamos con el caso estático. Esta matriz de GFs puede calcularse exactamente porque el TI introduce una discontinuidad localizada en las ecuaciones de movimiento a lo largo del eje z , mientras que la dependencia en el tiempo y las demás coordenadas son invariantes ante las traslaciones respectivas. Se consideran dos casos: (1) el pistón θ , definido en el intervalo $0 < z < L$. La contribución a la energía de Casimir $\mathcal{E} = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_\theta$, que surge del TI, \mathcal{E}_θ , se grafica en la figura 2.3, en unidades de \mathcal{E}_L , como función de la longitud adimensional χ y para varios valores de θ . La fuerza de Casimir en unidad de área sobre la superficie Σ , $F_{\theta p} = -d\mathcal{E}/da$, se grafica en la figura 2.4, en unidades de F_L . Observamos que esta fuerza tira de Σ hacia la más cercana de las paredes fijas P_1 or P_2 , similar a la conclusión de la Ref. [117]. (2) El segundo caso que consideramos es el límite $L \rightarrow \infty$ del pistón θ , que describe la interacción, por medio de la interfaz Σ , entre una placa conductora en el vacío P_1 y un TI semi-infinito localizado a una distancia a . La fuerza de Casimir correspondiente, en unidades de F_a , se muestra que la tabla 2.1, para diferentes valores de θ . Como se demostró, estos resultados, que se basan en el cálculo de la matriz de GFs y el valor esperado de vacío del tensor de energía-impulso, concuerdan con los que se obtienen siguiendo el enfoque global descrito en las Refs. [79, 80]. Cabe señalar que la discontinuidad en el valor esperado de la densidad de energía que se obtuvo en la Ec. (2.58) es finita, similar a la que reportan en la Ref. [114]. Aunque en nuestro caso una interpretación física de dicha discontinuidad no es inmediata, era de esperarse debido a la no conservación del tensor en energía-impulso en la interfaz Σ , donde se inducen densidades de cargas y corrientes debido al TME.

Una característica general de nuestro análisis es que el TI induce una dependencia en θ en la fuerza de Casimir, que en principio podría ser utilizada para medir θ . Dado que la

fuerza de Casimir se ha medido a distancias de separación en el rango $0,5 - 3,0\mu\text{m}$ [107], estas mediciones requieren de un TI de grosor menor que $0,5\mu\text{m}$ y de un incremento en la precisión experimental de dos o tres órdenes de magnitud. En la práctica, la medición de f_θ depende del valor de la TMEP, que esta cuantizada como $\theta = (2n + 1)\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. Los valores particulares $\theta = \pm 7\pi, \pm 15\pi$ son apropiados para TIs tal como $\text{Bi}_{1-x}\text{Se}_x$ [118], donde tenemos que $f_{\pm 7\pi} \approx 0,0005$ y $f_{\pm 15\pi} \approx 0,0025$, que aún no son medibles con la precisión experimental presente. Este efecto puede explorarse en TIs descritos por un acoplamiento θ más grande, tal como el Cr_2O_3 . Sin embargo, este material induce más acoplamientos magnetoeléctricos que no consideramos en nuestro modelo [79].

Aunque los efectos θ que encontramos en nuestro sistema de Casimir no se puede observar en el laboratorio, hemos tratado de establecer el método de la función de Green como un marco teórico alternativo para estudiar el TME de los TIs.

Capítulo 3

Electrodinámica de Aislantes Topológicos

La respuesta electromagnética de un aislante convencional está descrita por la constante dieléctrica ε y la permeabilidad magnética μ . Un campo eléctrico induce una polarización eléctrica, mientras que un campo magnético induce una polarización magnética. Dado que el campo eléctrico $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ y la inducción magnética $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ están bien definidos al interior de un aislante (aquí ϕ y \mathbf{A} son los potenciales escalar eléctrico y vectorial magnético, respectivamente), la respuesta lineal de un aislante convencional está descrita por la acción efectiva

$$S_0 = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon \mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right) - \rho\phi + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right], \quad (3.1)$$

donde ρ y \mathbf{J} son las densidades de carga y corriente, respectivamente. La variación de la acción (3.1) produce las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad , \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{J}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

con las relaciones constitutivas

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}. \quad (3.4)$$

Un aislante topológico es un material con orden topológico no trivial que se comporta como un aislante en su interior, pero cuya superficie contiene estados de conducción, lo que significa que los electrones pueden moverse solamente a lo largo de la superficie del

material. Como se mencionó, la respuesta electromagnética de estos materiales, independientemente de los detalles microscópicos, está descrita por el acoplamiento adicional de la electrodinámica con el invariante de Pontryagin electromagnético

$$\mathcal{P}_{em} = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.5)$$

por medio de la polarizabilidad topológica magneto-eléctrica θ . La acción efectiva puede escribirse como $\mathcal{S} = S_0 + S_\theta$, donde

$$S_\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} d^4x, \quad (3.6)$$

siendo $\alpha = e^2/\hbar c$ la constante de estructura fina. Como se discutió en los Capítulos anteriores, la acción (3.6) tiene la misma forma que la electrodinámica axiónica introducida por Wilczek en el contexto de física de partículas. En un TI, sin embargo, θ no es un campo dinámico, sino una constante cuantizada al interior del TI: $\theta = (2n+1)\pi$, donde $n \in \mathbb{Z}$ depende de la naturaleza de la capa magnética usada en la superficie del TI para convertirlo en un aislante completo. La naturaleza topológica del término θ en la acción (3.6) puede verse del hecho de que se trata de una derivada total, *i.e.* $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 2\partial^\mu (\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu \partial^\rho A^\sigma)$. Ya se discutió que si θ es constante en todo el espacio, la variación de la acción (3.6) no contribuye a las ecuaciones de movimiento cuando se imponen las condiciones de borde usuales en una frontera o en el infinito. Si θ deja de ser una constante global, el término de Chern-Simons deja de ser un invariante topológico y por lo tanto debemos tomar en cuenta las modificaciones a las ecuaciones de movimiento. De hecho, la variación de la acción completa $S_0 + S_\theta$ produce las mismas ecuaciones de Maxwell en materia (3.3). Sin embargo, las relaciones constitutivas se modifican a

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \frac{\alpha}{\pi} \theta \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} - \frac{\alpha}{\pi} \theta \mathbf{E}. \quad (3.7)$$

Estas relaciones implican que en ausencia de un campo eléctrico, un campo magnético puede generar una polarización eléctrica (y vice versa), lo que justifica el nombre de polarizabilidad topológica magneto-eléctrica para el campo θ . Esta transmutación entre los campos eléctrico y magnético, es lo que define al efecto topológico magneto-eléctrico.

En el Capítulo 1 calculamos la función de Green que describe el TME para diferentes geometrías de la superficie de un TI, restringiéndonos al análisis de los efectos puramente topológicos, es decir, consideramos que el cuerpo del TI tiene las mismas propiedades ópticas que el vacío ($\epsilon = \mu = 1$). El propósito de este Capítulo es estudiar el TME general que ocurre en la superficie de un TI con simetría plana. Cuando consideramos

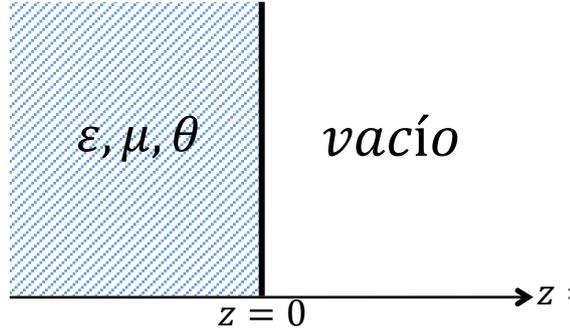


Figura 3.1: Aislante topológico con interfaz plana.

que ε y μ cambian abruptamente en la superficie de un TI, igual que la TMEP θ , las ecuaciones de Maxwell se complican dado que debemos considerar las discontinuidades en estas tres cantidades. El método de solución es parecido al que presentamos en el Capítulo 1, sin embargo, hay ciertos pasos sutiles que merecen ser analizados con detalle. Como introducción al método, en el Apéndice D presentamos con detalle la técnica que usa para calcular la función de Green de un material dieléctrico con interfaz plana, es decir, se considera que un dieléctrico homogéneo ocupa la región $z < 0$, mientras que en la región $z > 0$ tenemos el vacío. Este Capítulo está organizado como sigue: en la Sección 3.1 calculamos la función de Green en el espacio de momentos, y en la Sección 3.2 discutimos la función de Green en la representación de coordenadas. En la Sección 3.3 presentamos algunas aplicaciones simples.

3.1. Función de Green

Consideremos las ecuaciones de Maxwell en materia (3.3) con las relaciones constitutivas modificadas (3.7), *i.e.*

$$\nabla \cdot \left[\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E} + \frac{\alpha}{\pi}\theta(\mathbf{r})\mathbf{B} \right] = 4\pi\rho, \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \left[\tilde{\mu}(\mathbf{r})\mathbf{B} - \frac{\alpha}{\pi}\theta(\mathbf{r})\mathbf{E} \right] = 4\pi\mathbf{J}. \quad (3.9)$$

donde $\tilde{\mu}(\mathbf{r}) = 1/\mu(\mathbf{r})$. Dado que las ecuaciones de Maxwell homogéneas no se modifican en esta teoría, los campos eléctrico y magnético pueden escribirse en términos del cuadripotencial $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ de acuerdo a $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, como en el caso usual. Esto es así dado que el término de Chern-Simons es invariante ante transformaciones de norma, de modo que se preserva la estructura del tensor de campo electromagnético. En

la norma de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$-\varepsilon(\mathbf{r})\nabla^2\phi - \nabla\varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi + \frac{\alpha}{\pi}\nabla\theta(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 4\pi\rho, \quad (3.10)$$

$$-\tilde{\mu}(\mathbf{r})\nabla^2\mathbf{A} + \frac{\alpha}{\pi}\nabla\theta(\mathbf{r}) \times \nabla\phi + \nabla\tilde{\mu}(\mathbf{r}) \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 4\pi\mathbf{J}. \quad (3.11)$$

Vamos a considerar el caso de un TI plano, como el que se describió en la subsección 1.2.2, en contacto con el vacío. Por simplicidad, consideramos la interfaz θ como el plano $z = 0$, como se muestra en la figura 3.1. De esta forma, las funciones ε , μ y θ son constantes por secciones, es decir, están limitadas a una discontinuidad simple a través del plano $z = 0$. Por lo tanto, el gradiente de cualquiera de estas cantidades puede escribirse en la forma

$$\nabla f(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (3.12)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_z$ es el vector unitario en la dirección positiva del eje z (normal saliente del TI) y $f = \varepsilon, \mu, \theta$. De esta manera, las ecuaciones de movimiento para los potenciales (3.10)-(3.11) pueden escribirse como

$$-\varepsilon(z)\nabla^2\phi - \frac{\partial\varepsilon(z)}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla\phi + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 4\pi\rho, \quad (3.13)$$

$$-\tilde{\mu}(z)\nabla^2\mathbf{A} + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla\phi + \frac{\partial\tilde{\mu}(z)}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 4\pi\mathbf{J}. \quad (3.14)$$

Nuestro objetivo es construir la matriz de funciones de Green G^μ_ν que permite obtener la solución de las Ecs. (3.13)-(3.14) para el cuadripotencial A^μ , dada una configuración arbitraria de cargas y corrientes $J^\nu = (\rho, \mathbf{J})$, *i.e.*

$$A^\mu(\mathbf{x}) = \int G^\mu_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') J^\nu(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'. \quad (3.15)$$

Para establecer la ecuación diferencial que satisface la matriz de funciones de Green, es conveniente escribir las ecuaciones de movimiento (3.13)-(3.14) en la forma matricial

$$[\mathcal{O}^\mu_\nu]_{\mathbf{x}} A^\nu(\mathbf{x}) = 4\pi J^\mu, \quad (3.16)$$

donde el operador diferencial $[\mathcal{O}^\mu_\nu]_{\mathbf{x}}$, que se obtiene directamente de las ecuaciones de movimiento, es

$$[\mathcal{O}^\mu_\nu]_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\varepsilon(z)\nabla^2 - \frac{\partial\varepsilon(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} & +\frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -\frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} & -\tilde{\mu}(z)\nabla^2 - \frac{\partial\tilde{\mu}(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial\tilde{\mu}(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \\ +\frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\tilde{\mu}(z)\nabla^2 - \frac{\partial\tilde{\mu}(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial\tilde{\mu}(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{\mu}(z)\nabla^2 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

De esta forma, si sustituímos la Ec. (3.15) en la Ec. (3.16) encontramos que la matriz de funciones de Green satisface la misma ecuación diferencial (3.16) para una fuente puntual, *i.e.*

$$[\mathcal{O}^\mu_\nu]_{\mathbf{x}} G^\nu_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi\eta^\mu_\sigma \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.18)$$

Nuestra tarea ahora consiste en resolver la ecuación diferencial anterior para las componentes de la matriz de funciones de Green. La GF que consideramos, tiene invariancia bajo traslaciones en las direcciones paralelas a la superficie del TI, esto es, en las direcciones transversales x y y , pero la invariancia está rota en la dirección z . Explotamos esta simetría introduciendo la transformada de Fourier en la dirección paralela a la interfaz θ , tomando la dependencia en estas coordenadas de la forma $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\parallel} = (x - x', y - y')$ y definiendo

$$G^\mu_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')_{\parallel}} g^\mu_\nu(z, z', \mathbf{p}), \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ es el momento paralelo a la superficie del TI y $g^\mu_\nu(z, z', \mathbf{p})$ es la función de Green reducida. De aquí en adelante suprimimos la dependencia en \mathbf{p} de la GF reducida g^μ_ν .

En el Capítulo 1 Subsección 1.2.2, se discutió la solución de la Ec. (3.18) en el caso simple en que $\varepsilon = \mu = 1$ en todo el espacio. En ese caso, la GF reducida puede calcularse fácilmente dado que la ecuación diferencial que satisface [Ec. (1.45)] no contiene derivadas respecto a z , y así, es posible integrar dicha ecuación empleando un método similar al que se usa para calcular la GF para el potencial δ unidimensional en mecánica cuántica. En el caso que estamos considerando en este Capítulo, el operador diferencial $[\mathcal{O}^\mu_\nu]_{\mathbf{x}}$ si contiene derivadas respecto a z , de modo que se requiere un tratamiento más sutil. Para lidiar con estas derivadas que aparecen en la Ec. (3.18), empleamos la técnica de Schwinger, que discutimos con detalle en el Apéndice D. En la Ref. [99], Schwinger calcula la GF para un dieléctrico semi-infinito cuya superficie está definida por el plano $z = 0$, *i.e.* resuelve la Ec. (3.18) para $\mu = 1$ y $\theta = 0$ en todo el espacio. La solución que presentamos aquí es una extensión de la técnica de Schwinger. Resolvemos la Ec. (3.18) en tres grupos diferentes,

que corresponden a (I) $\sigma = 0$ y (II) $\sigma = i$, con $i = 1, 2$ y (III) $\sigma = 3$.

Grupo I

El grupo de ecuaciones diferenciales que se deriva de la Ec. (3.18) con $\sigma = 0$ es

$$\left[-\varepsilon(z)\nabla^2 - \frac{\partial\varepsilon(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] G_0^0 - \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \epsilon^{0i3} \partial_i G_0^j = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.20)$$

$$\left[-\tilde{\mu}(z)\nabla^2 - \frac{\partial\tilde{\mu}(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] G_0^i - \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \epsilon^{0ij3} \partial_j G_0^0 = 0, \quad (3.21)$$

donde $i, j = 1, 2$. Siguiendo la técnica de Schwinger, el siguiente paso es dividir las Ecs. (3.20) y (3.21) por $\varepsilon(z)$ y $\tilde{\mu}(z)$, respectivamente. Este paso es muy sutil, dado que estas cantidades son discontinuas en $z = 0$. Para hacerlo, usamos la fórmula

$$\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{\partial\varepsilon(z)}{\partial z} = -\varepsilon(z) \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \delta(z), \quad (3.22)$$

que se deriva con detalle en el Apéndice D; y extendemos el resultado para la función $\tilde{\mu}$, *i.e.*

$$\frac{1}{\tilde{\mu}(z)} \frac{\partial\tilde{\mu}(z)}{\partial z} = -\tilde{\mu}(z) (1 - \mu) \delta(z). \quad (3.23)$$

Aparte de estos términos, también debemos trabajar con el que contiene la derivada de θ respecto a z . Para hacerlo, consideramos la función $\theta(z)/\varepsilon(z) = (\theta/\varepsilon)H(-z)$ y tomamos su derivada respecto a z :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\theta(z)}{\varepsilon(z)} \right] = -(\theta/\varepsilon)\delta(z) = \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} + \theta(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\varepsilon(z)} \right] = \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} + \theta(z) \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \delta(z), \quad (3.24)$$

de donde encontramos que

$$\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} = \left[\frac{\theta(z) - \theta}{\varepsilon} - \theta(z) \right] \delta(z). \quad (3.25)$$

Este resultado podemos extenderlo también para la función $\tilde{\mu}$, *i.e.*

$$\frac{1}{\tilde{\mu}(z)} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} = [(\mu - 1)\theta(z) - \mu\theta] \delta(z). \quad (3.26)$$

De esta manera, el grupo de ecuaciones diferenciales a resolver es

$$\left[-\nabla^2 + \varepsilon(z) \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] G_0^0 - \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\theta(z) - \theta}{\varepsilon} - \theta(z) \right] \delta(z) \epsilon^{0i j 3} \partial_i G_0^j = 4\pi \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\varepsilon(z')}, \quad (3.27)$$

$$\left[-\nabla^2 + \tilde{\mu}(z) (1 - \mu) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] G_0^i - \frac{\alpha}{\pi} [(\mu - 1)\theta(z) - \mu\theta] \delta(z) \epsilon^{0ij3} \partial_j G_0^0 = 0. \quad (3.28)$$

Usando la representación de Fourier de la GF, Ec. (3.19), encontramos las ecuaciones diferenciales para la GF reducida. Éstas son

$$\left[\partial^2 + \varepsilon(z) \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g_0^0 + i \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\theta(z) - \theta}{\varepsilon} - \theta(z) \right] \delta(z) \epsilon^{0i j 3} p_i g_0^j = \frac{\delta(z - z')}{\varepsilon(z')}, \quad (3.29)$$

$$\left[\partial^2 + \tilde{\mu}(z) (1 - \mu) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g_0^i + i \frac{\alpha}{\pi} [(\mu - 1)\theta(z) - \mu\theta] \delta(z) \epsilon^{0ij3} p_j g_0^0 = 0. \quad (3.30)$$

Aquí $\partial^2 = -\nabla^2 = \mathbf{p}^2 - \partial_z^2$ y $p^i = (p_x, p_y)$. Para integrar estas ecuaciones consideramos la función de Green reducida libre,

$$\mathbf{g}(z, z') = (1/2p) e^{-p|z-z'|}, \quad (3.31)$$

que es solución de $\partial^2 \mathbf{g}(z, z') = \delta(z - z')$ con la condición de frontera usual al infinito y cuya transformada de Fourier, de acuerdo a la definición de la Ec. (3.19) da la GF de vacío $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$. La solución general para el grupo I, compuesto por las ecuaciones diferenciales (3.29) y (3.30), es

$$g_0^0(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\varepsilon(z')} - \frac{1}{\varepsilon(z')} \frac{\text{sgn}(z')(\varepsilon - 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|}, \quad (3.32)$$

$$g_0^i(z, z') = \frac{4i\tilde{\theta}\epsilon^{0ij3} p_j}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \mathbf{g}(z, 0) \mathbf{g}(0, z'), \quad (3.33)$$

como demostraremos a continuación. Para hacerlo, resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (3.29)-(3.30) en cada región por separado, $z > 0$ y $z < 0$, para z' arbitraria. En los cálculos siguientes suponemos que z' permanece fijo durante las integraciones.

- $z > 0$

En este caso tenemos que $\varepsilon(z) = \mu(z) = 1$ y $\theta(z) = 0$, de modo que las ecuaciones a

resolver son

$$\left[\partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g_0^0 - i(\tilde{\theta}/\varepsilon) \delta(z) \epsilon^{0i3} p_i g_0^j = \frac{\delta(z - z')}{\varepsilon(z')}, \quad (3.34)$$

$$\left[\partial^2 + (1 - \mu) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g_0^i - i\mu\tilde{\theta} \delta(z) \epsilon^{0ij3} p_j g_0^0 = 0, \quad (3.35)$$

donde $\tilde{\theta} = \alpha\theta/\pi$. Estas ecuaciones pueden integrarse usando la misma técnica que se usó en el Capítulo 1. Se obtiene

$$g_0^0(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\varepsilon(z')} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g_0^0(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^+} + i(\tilde{\theta}/\varepsilon) \epsilon^{0i3} p_i \mathbf{g}(z, 0) g_0^j(0, z'), \quad (3.36)$$

$$g_0^i(z, z') = -(1 - \mu) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g_0^i(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^+} + i\mu\tilde{\theta} \epsilon^{0ij3} p_j \mathbf{g}(z, 0) g_0^0(0, z'). \quad (3.37)$$

Se observa que la Ec. (3.36) depende de $g_0^j(z, 0)$, sin embargo, la Ec. (3.37) contiene una derivada de esta misma cantidad, de manera que no se trata de hacer una simple sustitución. Para resolver este problema, tomamos la derivada respecto a z de la Ec. (3.37) y la evaluamos en $z = 0^+$:

$$\frac{\partial g_0^i(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = -(1 - \mu) \frac{\partial \mathbf{g}(z, 0)}{\partial z} \Big|_{z=0^+} \frac{\partial g_0^i(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} + i\mu\tilde{\theta} \epsilon^{0ij3} p_j \frac{\partial \mathbf{g}(z, 0)}{\partial z} \Big|_{z=0^+} g_0^0(0, z'). \quad (3.38)$$

La derivada que aparece en esta expresión, $\partial_z \mathbf{g}(z, 0) \Big|_{z=0^+}$, podemos obtenerla directamente a partir de la Ec. (3.31). Dado que $\mathbf{g}(z, 0) = (1/2p) \exp(-pz)$, se sigue que $\partial_z \mathbf{g}(z, 0) \Big|_{z=0^+} = -1/2$. Sustituyendo este resultado en la Ec. (3.38) encontramos

$$\frac{\partial g_0^i(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = -\frac{i\mu\tilde{\theta}}{1 + \mu} \epsilon^{0ij3} p_j g_0^0(0, z'). \quad (3.39)$$

Sustituyendo (3.39) en (3.37) obtenemos

$$g_0^i(z, z') = \frac{2i\mu\tilde{\theta}}{1 + \mu} \epsilon^{0ij3} p_j \mathbf{g}(z, 0) g_0^0(0, z'), \quad (3.40)$$

que es una ecuación algebraica para g_0^i en términos de g_0^0 . Sustituyendo este resultado en

(3.36) se obtiene

$$g^0_0(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\varepsilon(z')} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g^0_0(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^+} - \tilde{\theta}^2 \frac{2(\mu/\varepsilon)}{1+\mu} \mathbf{p}^2 \mathbf{g}(0, 0) \mathbf{g}(z, 0) g^0_0(0, z'), \quad (3.41)$$

donde se usó $\epsilon^{0ij3} p_i p_j = 0$ y $\epsilon^{0i j^3} \epsilon^{0jk3} p_i p_k = \mathbf{p}^2$. Nótese que esta expresión contiene sólo la componente g^0_0 , sin embargo, depende también de su derivada. Para resolver esta situación, seguimos el mismo procedimiento descrito en los párrafos anteriores.

$$\frac{\partial g^0_0(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = \frac{1}{\varepsilon(z')} \frac{\partial \mathbf{g}(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial g^0_0(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} + \tilde{\theta}^2 \frac{(\mu/\varepsilon)}{1+\mu} \mathbf{p}^2 \mathbf{g}(0, 0) g^0_0(0, z'), \quad (3.42)$$

donde se usó el resultado $\partial_z \mathbf{g}(z, 0) \Big|_{z=+0} = -1/2$. La derivada que falta puede calcularse directamente de la Ec. (3.31). Se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{g}(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = \frac{\text{sgn}(z')}{2} e^{-p|z'|}. \quad (3.43)$$

Sustituyendo este resultado en (3.42) y despejando encontramos

$$\frac{\partial g^0_0(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left[\frac{\text{sgn}(z')}{\varepsilon(z')} e^{-p|z'|} + \tilde{\theta}^2 \frac{2(\mu/\varepsilon)}{1+\mu} \mathbf{p}^2 \mathbf{g}(0, 0) g^0_0(0, z') \right]. \quad (3.44)$$

Ahora insertamos (3.44) en (3.41) para obtener

$$g^0_0(z, z') = \frac{1}{\varepsilon(z')} \left[\mathbf{g}(z, z') - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \text{sgn}(z') \mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|} \right] - \tilde{\theta}^2 \frac{4\mu}{(1+\varepsilon)(1+\mu)} \mathbf{p}^2 \mathbf{g}(0, 0) \mathbf{g}(z, 0) g^0_0(0, z'), \quad (3.45)$$

que es una ecuación algebraica para la componente g^0_0 . Ahora evaluamos esta ecuación en $z = 0$ y resolvemos para $g^0_0(0, z')$. El resultado es

$$g^0_0(0, z') = \frac{2(\frac{1}{\mu} + 1)}{(1+\varepsilon)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \mathbf{g}(0, z'), \quad (3.46)$$

donde se usó el resultado

$$\frac{1}{\varepsilon(z')} \left[1 - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \text{sgn}(z') \right] = \frac{2}{\varepsilon+1}. \quad (3.47)$$

Finalmente, insertamos (3.46) en (3.45) para obtener la solución:

$$g^0_0(z > 0, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\varepsilon(z')} - \frac{1}{\varepsilon(z')} \frac{\text{sgn}(z')(\varepsilon - 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|}, \quad (3.48)$$

donde se usó

$$\frac{1}{\varepsilon + 1} \left[(\varepsilon - 1) \frac{\text{sgn}(z')}{\varepsilon(z')} + \frac{2\tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \right] = \frac{1}{\varepsilon(z')} \frac{\text{sgn}(z')(\varepsilon - 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2}. \quad (3.49)$$

El resultado final para las componentes restantes puede obtenerse sustituyendo (3.46) en (3.40), *i.e.*

$$g^i_0(z > 0, z') = \frac{4i\tilde{\theta}\epsilon^{0ij3}p_j}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \mathbf{g}(z, 0) \mathbf{g}(0, z'). \quad (3.50)$$

En los argumentos de las soluciones (3.48) y (3.50) se escribe explícitamente $z > 0$ para hacer notar la región en la que se trabajó.

- $z < 0$

Ahora vamos a calcular las funciones de Green correspondientes en el segundo caso ($z < 0$), para el que $\varepsilon(z) = \varepsilon$, $\mu(z) = \mu$ y $\theta(z) = \theta$. Las ecuaciones diferenciales para la GF reducida son:

$$\left[\partial^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g^0_0 - i\tilde{\theta} \delta(z) \epsilon^{0ij3} p_i g^j_0 = \frac{\delta(z - z')}{\varepsilon(z')}, \quad (3.51)$$

$$\left[\partial^2 + \frac{1}{\mu} (1 - \mu) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g^i_0 - i\tilde{\theta} \delta(z) \epsilon^{0ij3} p_j g^0_0 = 0. \quad (3.52)$$

Ahora seguimos el mismo procedimiento descrito en el caso anterior. Integrando las ecuaciones obtenemos

$$g^0_0(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\varepsilon(z')} - \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g^0_0(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^-} + i\tilde{\theta} \epsilon^{0ij3} p_i \mathbf{g}(z, 0) g^j_0(0, z'), \quad (3.53)$$

$$g^i_0(z, z') = -\frac{1}{\mu} (1 - \mu) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g^i_0(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^-} + i\tilde{\theta} \epsilon^{0ij3} p_j \mathbf{g}(z, 0) g^0_0(0, z'). \quad (3.54)$$

El siguiente paso consiste en obtener una expresión algebraica para las componentes g^i_0 . Para ello, derivamos la Ec. (3.54) respecto a z , la evaluamos en $z = 0^-$ y despejamos

$\partial_z g^i_0(z, z')|_{z=0^-}$. El resultado es

$$\frac{\partial g^i_0(z, z')}{\partial z}\Big|_{z=0^-} = \frac{i\tilde{\theta}\mu}{1+\mu} \epsilon^{0ij3} p_j g^0_0(0, z'), \quad (3.55)$$

donde se usó el resultado $\partial_z \mathbf{g}(z, 0)|_{z=0^-} = 1/2$. Sustituyendo este resultado en (3.54) obtenemos

$$g^i_0(z, z') = \frac{2i\tilde{\theta}\mu}{\mu+1} \mathbf{g}(z, 0) \epsilon^{0ij3} p_j g^0_0(0, z'), \quad (3.56)$$

que es una ecuación algebraica para g^i_0 en términos de g^0_0 . El resultado de sustituir (3.56) en (3.53) es

$$g^0_0(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\epsilon(z')} - \epsilon \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g^0_0(z'', z')}{\partial z''}\Big|_{z''=0^-} - \tilde{\theta}^2 \mathbf{P}^2 \frac{2\mu}{\mu+1} \mathbf{g}(0, 0) \mathbf{g}(z, 0) g^0_0(0, z'). \quad (3.57)$$

Nótese que esta ecuación depende sólo de la componentes g^0_0 y su derivada respecto a z . Para eliminar esta dependencia, derivamos (3.57) respecto a z , la evaluamos en $z = 0^-$, y despejamos $\partial_z g^0_0(z, z')|_{z=0^-}$. El resultado es

$$\frac{\partial g^0_0(z, z')}{\partial z}\Big|_{z=0^-} = \frac{1}{1+\epsilon} \left[\frac{\text{sgn}(z')}{\epsilon(z')} e^{-p|z'|} - \tilde{\theta}^2 \frac{2\mu}{1+\mu} \mathbf{P}^2 \mathbf{g}(0, 0) g^0_0(0, z') \right], \quad (3.58)$$

Sustituyendo este resultado en la misma ecuación obtenemos

$$g^0_0(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\epsilon(z')} - \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \frac{\text{sgn}(z')}{\epsilon(z')} \mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|} - \tilde{\theta}^2 \mathbf{P}^2 \frac{4}{(\epsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1)} \mathbf{g}(0, 0) \mathbf{g}(z, 0) g^0_0(0, z'). \quad (3.59)$$

Esta es una ecuación algebraica que podemos resolver fácilmente. Evaluamos (3.59) en $z = 0$, despejamos $g^0_0(0, z')$ y lo sustituimos en la misma expresión. El resultado final para esta región es

$$g^0_0(z < 0, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\epsilon(z')} - \frac{1}{\epsilon(z')} \frac{\text{sgn}(z')(\epsilon-1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2}{(\epsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} \mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|}, \quad (3.60)$$

que es exactamente igual al resultado que se obtuvo para la región $z > 0$. De esta forma, las ecuaciones (3.48) y (3.60) establecen la Ec. (3.32), que es la componente 00 de la GF reducida en todo el espacio. Las componentes restantes para la región $z < 0$ se obtienen evaluando la Ec. (3.60) en $z = 0$ y sustituyendo el resultado en la Ec. (3.56). El resultado

final es

$$g^i_0(z < 0, z') = \frac{4i\tilde{\theta}\epsilon^{0ij3}p_j}{(\epsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \mathbf{g}(z, 0)\mathbf{g}(0, z'), \quad (3.61)$$

que coincide con el resultado obtenido para la región complementaria $z > 0$. De esta forma, las Ecs. (3.50) y (3.61) establecen la Ec. (3.32).

Grupo II

El grupo de ecuaciones diferenciales acopladas que se deriva de la Ec. (3.18) con $\sigma = i$ es

$$\left[-\epsilon(z)\nabla^2 - \frac{\partial\epsilon(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] G^0_i - \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \epsilon^{0j3} \partial_j G^k_i = 0, \quad (3.62)$$

$$\left[-\tilde{\mu}(z)\nabla^2 - \frac{\partial\tilde{\mu}(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] G^i_j - \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \epsilon^{0ik3} \partial_k G^0_j = 4\pi\eta^i_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.63)$$

donde $i, j = 1, 2$. De acuerdo a lo aprendido con el grupo I, debemos dividir estas ecuaciones por ϵ y $\tilde{\mu}$, respectivamente. Usando los resultados (3.22), (3.23), (3.25) y (3.26), obtenemos

$$\left[-\nabla^2 + \epsilon(z) \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] G^0_i - \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\theta(z) - \theta}{\epsilon} - \theta(z) \right] \delta(z) \epsilon^{0j3} \partial_j G^k_i = 0, \quad (3.64)$$

$$\left[-\nabla^2 + \tilde{\mu}(z)(1 - \mu)\delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] G^i_j - \frac{\alpha}{\pi} [(\mu - 1)\theta(z) - \mu\theta] \delta(z) \epsilon^{0ik3} \partial_k G^0_j = 4\pi\eta^i_j \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\tilde{\mu}(z')}. \quad (3.65)$$

Usando la representación de Fourier de la GF, Ec. (3.19), encontramos las ecuaciones diferenciales para la GF reducida. Éstas son

$$\left[\partial^2 + \epsilon(z) \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g^0_i + i \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\theta(z) - \theta}{\epsilon} - \theta(z) \right] \delta(z) \epsilon^{0j3} p_j g^k_i = 0, \quad (3.66)$$

$$\left[\partial^2 + \tilde{\mu}(z)(1 - \mu)\delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g^i_j + i \frac{\alpha}{\pi} [(\mu - 1)\theta(z) - \mu\theta] \delta(z) \epsilon^{0ik3} p_k g^0_j = \eta^i_j \frac{\delta(z - z')}{\tilde{\mu}(z')}. \quad (3.67)$$

Para integrar estas ecuaciones usaremos la GF reducida libre (3.31). La solución general

para el grupo II, compuesto por las ecuaciones diferenciales (3.66) y (3.67), es

$$g^0_i(z, z') = \frac{4i\tilde{\theta}\epsilon^{0j\ 3}p_j}{(\epsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \mathbf{g}(z, 0)\mathbf{g}(0, z'), \quad (3.68)$$

$$g^i_j(z, z') = \eta^i_j \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} - \frac{4\mathbf{g}(0, 0)\mathbf{g}(z, 0)\mathbf{g}(0, z')}{(\epsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \left[\eta^i_j \mathbf{P}^2 \frac{\text{sgn}(z')(\epsilon + 1)(\frac{1}{\mu} - 1) + \tilde{\theta}^2}{\tilde{\mu}(z')} + \frac{2\tilde{\theta}^2}{\frac{1}{\mu} + 1} p^i p_j \right], \quad (3.69)$$

como demostraremos a continuación. Para hacerlo, resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (3.66) y (3.67) en cada región por separado, $z > 0$ y $z < 0$, para z' arbitraria. En los cálculos siguientes suponemos que z' permanece fijo durante las integraciones.

- $z > 0$

En este caso, las ecuaciones diferenciales acopladas que debemos resolver son

$$\left[\partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g^0_i - i(\tilde{\theta}/\epsilon) \delta(z) \epsilon^{0j\ 3} p_j g^k_i = 0, \quad (3.70)$$

$$\left[\partial^2 + (1 - \mu) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g^i_j - i\mu\tilde{\theta} \delta(z) \epsilon^{0ik3} p_k g^0_j = \eta^i_j \frac{\delta(z - z')}{\tilde{\mu}(z')}. \quad (3.71)$$

Integrando estas ecuaciones obtenemos

$$g^0_i(z, z') = - \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g^0_i(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^+} + i(\tilde{\theta}/\epsilon) \epsilon^{0j\ 3} p_j \mathbf{g}(z, 0) g^k_i(0, z'), \quad (3.72)$$

$$g^i_j(z, z') = \eta^i_j \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} - (1 - \mu) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g^i_j(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^+} + i\mu\tilde{\theta} \epsilon^{0ik3} p_k \mathbf{g}(z, 0) g^0_j(0, z'). \quad (3.73)$$

Nótese que la ecuación para la g^0_i depende de su derivada respecto a z evaluada en $z = 0^+$. Lo mismo sucede con la ecuación para la componente ij . En el caso I ya se trabajó con esta situación, de manera que aquí sólo seguimos el mismo procedimiento. Derivamos (3.86) respecto a z y la evaluamos en $z = 0^+$. Con un poco de álgebra aprendemos que

$$\frac{\partial g^0_i(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = -\frac{i\tilde{\theta}}{\epsilon + 1} \epsilon^{0j\ 3} p_j g^k_i(0, z'), \quad (3.74)$$

donde se usó que $\partial_z \mathbf{g}(z, 0) \Big|_{z=+0} = -1/2$. Sustituyendo este resultado en la misma ecuación (3.86) obtenemos

$$g^0_i(z, z') = \frac{2i\tilde{\theta}}{\epsilon + 1} \epsilon^{0j\ 3} p_j \mathbf{g}(z, 0) g^k_i(0, z'). \quad (3.75)$$

Ahora aplicamos el mismo procedimiento a la Ec. (3.87). Los resultados son

$$\left. \frac{\partial g_j^i(z, z')}{\partial z} \right|_{z=0^+} = \frac{1}{1+\mu} \left[\eta_j^i \frac{\text{sgn}(z')}{\tilde{\mu}(z')} e^{-p|z'|} - i\tilde{\theta}\mu\epsilon^{0ik3} p_k g_j^0(0, z') \right] \quad (3.76)$$

y

$$g_j^i(z, z') = \eta_j^i \left[\frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} - \frac{1-\mu \text{sgn}(z')}{1+\mu} \frac{\mathbf{g}(z, 0)}{\tilde{\mu}(z')} e^{-p|z'|} \right] + \frac{2i\mu\tilde{\theta}}{1+\mu} \epsilon^{0ik3} p_k \mathbf{g}(z, 0) g_j^0(0, z'). \quad (3.77)$$

Las ecuaciones (3.75) y (3.77) son un par de ecuaciones algebraicas acopladas que podemos resolver de la manera usual. Evaluando (3.77) en $z = 0$ y sustituyendo el resultado en (3.75) obtenemos

$$g_i^0(z, z') = \frac{4i\tilde{\theta}}{(\epsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1)} \mathbf{g}(z, 0) \left[\epsilon^{0j3} p_j \mathbf{g}(0, z') + i\tilde{\theta} \mathbf{P}^2 \mathbf{g}(0, 0) g_i^0(0, z') \right]. \quad (3.78)$$

donde se usó el resultado

$$\frac{1}{\tilde{\mu}(z')} \left[1 - \frac{1-\mu}{1+\mu} \text{sgn}(z') \right] = \frac{2\mu}{1+\mu}. \quad (3.79)$$

La Ec. (3.78) es una expresión algebraica para la componente g_i^0 . Evaluandola en $z = 0$, depejando $g_i^0(0, z')$ y reinsertando el resultado en la misma expresión, obtenemos el resultado final, que es

$$g_i^0(z > 0, z') = \frac{4i\tilde{\theta}\epsilon^{0j3} p_j}{(\epsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} \mathbf{g}(z, 0) \mathbf{g}(0, z'), \quad (3.80)$$

que es igual al resultado que se obtuvo para las componentes g_i^0 del grupo I. Ahora evaluamos (3.75) en $z = 0$ y sustituimos el resultado en (3.77). Se obtiene

$$g_j^i(z, z') = \eta_j^i \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} - 4\mathbf{g}(0, 0) \mathbf{g}(z, 0) \mathbf{g}(0, z') \left[\mathbf{P}^2 \eta_j^i \frac{1-\mu \text{sgn}(z')}{1+\mu} \frac{1}{\tilde{\mu}(z')} + \frac{2\tilde{\theta}^2 \mu}{1+\mu} \frac{\epsilon^{0ik3} \epsilon_j^{0l3} p_k p_l}{(\epsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} \right]. \quad (3.81)$$

Usando el resultado

$$\frac{1}{1+\mu} \left[(1-\mu) \frac{\text{sgn}(z')}{\tilde{\mu}(z')} + \frac{2\tilde{\theta}^2\mu}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1)+\tilde{\theta}^2} \right] = \frac{1}{\tilde{\mu}(z')} \frac{\text{sgn}(z')(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}-1)+\tilde{\theta}^2}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1)+\tilde{\theta}^2}, \quad (3.82)$$

la Ec. (3.81) puede escribirse en la forma simple

$$g_j^i(z > 0, z') = \eta_j^i \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} - \frac{4\mathbf{g}(0, 0)\mathbf{g}(z, 0)\mathbf{g}(0, z')}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1)+\tilde{\theta}^2} \left[\frac{2\tilde{\theta}^2}{\frac{1}{\mu}+1} p^i p_j + \eta_j^i \mathbf{P}^2 \frac{\text{sgn}(z')(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}-1)+\tilde{\theta}^2}{\tilde{\mu}(z')} \right]. \quad (3.83)$$

Ahora hacemos el mismo análisis para la región complementaria $z < 0$.

- $z < 0$

En esta región, las ecuaciones diferenciales acopladas para la GF reducida que vamos a resolver son

$$\left[\partial^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g_i^0 - i\tilde{\theta} \delta(z) \epsilon^{0j3} p_j g_i^k = 0, \quad (3.84)$$

$$\left[\partial^2 + \frac{1}{\mu} (1 - \mu) \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g_j^i - i\tilde{\theta} \delta(z) \epsilon^{0ik3} p_k g_j^0 = \eta_j^i \frac{\delta(z - z')}{\tilde{\mu}(z')}. \quad (3.85)$$

Integrando obtenemos

$$g_i^0(z, z') = -\varepsilon \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g_i^0(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^-} + i\tilde{\theta} \epsilon^{0j3} p_j \mathbf{g}(z, 0) g_i^k(0, z'), \quad (3.86)$$

$$g_j^i(z, z') = \eta_j^i \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} - \frac{1}{\mu} (1 - \mu) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g_j^i(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^-} + i\tilde{\theta} \epsilon^{0ik3} p_k \mathbf{g}(z, 0) g_j^0(0, z'). \quad (3.87)$$

Derivando estas expresiones respecto a z y evaluando en $z = 0^-$ se obtiene

$$\frac{\partial g_i^0(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{1}{\varepsilon+1} i \epsilon^{0j3} p_j g_i^k(0, z'), \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial g_j^i(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{1}{\frac{1}{\mu}+1} \left[\eta_j^i \frac{\text{sgn}(z')}{\tilde{\mu}(z')} + i\tilde{\theta} \epsilon^{0ik3} p_k g_j^0(0, z') \right], \quad (3.89)$$

donde se usó que $\partial_z \mathbf{g}(z, 0) \Big|_{z=0^-} = 1/2$. El siguiente paso es sustituir estos resultados en

sus ecuaciones respectivas. Para la componente $0i$ obtenemos

$$g^0_i(z, z') = \frac{2i\tilde{\theta}}{\varepsilon + 1} \epsilon^{0j}_k{}^3 p_j \mathbf{g}(z, 0) g^k_i(0, z'). \quad (3.90)$$

que es el mismo resultado que se obtuvo para la región $z > 0$ en la Ec. (3.75). La componentes ij también resulta igual que para la región $z > 0$, *i.e.*

$$g^i_j(z, z') = \eta^i_j \left[\frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} - \frac{1 - \mu \operatorname{sgn}(z')}{1 + \mu} \frac{\mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|}}{\tilde{\mu}(z')} \right] + \frac{2i\mu\tilde{\theta}}{1 + \mu} \epsilon^{0ik3} p_k \mathbf{g}(z, 0) g^0_j(0, z'). \quad (3.91)$$

De acuerdo al procedimiento previamente descrito para la región $z > 0$, ahora debemos resolver de manera simultanea este par de ecuaciones algebraicas acopladas. Dado que este sistema de ecuaciones es idéntico al de la región complementaria, las soluciones buscadas serán exactamente las mismas. Es fácil reproducir el mismo procedimiento presentado después de la Ec. (3.77), que es donde se describe cómo resolver el sistema de ecuaciones. La solución final para la región $z < 0$ es

$$g^0_i(z < 0, z') = \frac{4i\tilde{\theta}\epsilon^{0j}_i{}^3 p_j}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \mathbf{g}(z, 0) \mathbf{g}(0, z'), \quad (3.92)$$

$$g^i_j(z < 0, z') = \eta^i_j \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} - \frac{4\mathbf{g}(0, 0)\mathbf{g}(z, 0)\mathbf{g}(0, z')}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \left[\frac{2\tilde{\theta}^2}{\frac{1}{\mu} + 1} p^i p_j + \eta^i_j \mathbf{P}^2 \frac{\operatorname{sgn}(z')(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \tilde{\theta}^2}{\tilde{\mu}(z')} \right]. \quad (3.93)$$

De esta forma las Ecs. (3.80) y (3.92) establecen la Ec. (3.68); mientras que las Ecs. (3.83) y (3.93) establecen (3.69).

Grupo III

El grupo de ecuaciones diferenciales acopladas que se deriva de la Ec. (3.18) con $\sigma = 3$ es

$$\left[-\varepsilon(z)\nabla^2 - \frac{\partial\varepsilon(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] G^0_3 - \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \epsilon^{0j}_k{}^3 \partial_j G^k_3 = 0, \quad (3.94)$$

$$\left[-\tilde{\mu}(z)\nabla^2 - \frac{\partial\tilde{\mu}(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] G^i_3 - \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial\theta(z)}{\partial z} \epsilon^{0ik3} \partial_k G^0_3 - \frac{\partial\tilde{\mu}(z)}{\partial z} \eta^{ij} \partial_j G^3_3 = 0, \quad (3.95)$$

$$-\tilde{\mu}(z)\nabla^2 G^3_3 = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.96)$$

donde $i, j = 1, 2$. En este caso ocurre una simplificación importante: la componente G^0_3

es idénticamente cero. Esto podemos entenderlo de diferentes maneras. Por ejemplo, de la forma del operador diferencial $[\mathcal{O}_\nu^\mu]_{\mathbf{x}}$, definido en la Ec. (3.17), se observa que la componente 03 del operador inverso es:

$$[\mathcal{O}_3^0]_{\mathbf{x}}^{-1} \propto [\mathcal{O}_1^0]_{\mathbf{x}} [\mathcal{O}_3^1]_{\mathbf{x}} + [\mathcal{O}_2^0]_{\mathbf{x}} [\mathcal{O}_3^2]_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\mu}(z)}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] = 0. \quad (3.97)$$

Esto nos permite elegir $G_3^0 = 0$. Una forma alternativa de ver esto es notando que la componente G_3^0 contribuye al potencial escalar A^0 . De las ecuaciones de Maxwell modificadas se observa que la corriente J^3 genera el potencial A^3 , y éste, a su vez, juega el papel de una corriente efectiva para las componentes A^1 y A^2 , pero no contribuye a A^0 . De esta forma llegamos a la misma conclusión.

De acuerdo al análisis anterior, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver se reduce a:

$$\left[-\tilde{\mu}(z)\nabla^2 - \frac{\partial \tilde{\mu}(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] G_3^i - \frac{\partial \tilde{\mu}(z)}{\partial z} \eta^{ij} \partial_j G_3^3 = 0, \quad (3.98)$$

$$-\tilde{\mu}(z)\nabla^2 G_3^3 = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.99)$$

además de la condición $\epsilon^{0j\ 3} \partial_j G_3^k = 0$. Dividiendo las expresiones por $\tilde{\mu}(z)$ obtenemos

$$\left[-\nabla^2 + \tilde{\mu}(z)(1 - \mu)\delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] G_3^i + \tilde{\mu}(z)(1 - \mu)\eta^{ij} \partial_j G_3^3 = 0, \quad (3.100)$$

$$-\nabla^2 G_3^3 = 4\pi \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\tilde{\mu}(z')}. \quad (3.101)$$

Usando la representación de Fourier de la GF encontramos que las componentes de la GF reducida satisfacen

$$\left[\partial^2 + \tilde{\mu}(z)(1 - \mu)\delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] g_3^i - i\tilde{\mu}(z)(1 - \mu)p^i \delta(z) g_3^3 = 0, \quad (3.102)$$

$$\partial^2 g_3^3 = \frac{\delta(z - z')}{\tilde{\mu}(z')}. \quad (3.103)$$

Estas son las ecuaciones que debemos resolver, y como puede verse, no habrá dependencia en θ . La solución general de este sistema de ecuaciones es

$$g_3^i(z, z') = \eta_3^i \frac{\mathfrak{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} + 2i \frac{1 - \mu}{1 + \mu} p^i \mathfrak{g}(z, 0) \frac{\mathfrak{g}(0, z')}{\tilde{\mu}(z')}, \quad (3.104)$$

como demostraremos a continuación. Primero observamos que la Ec. (3.103) puede inte-

grarse directamente. El resultado es

$$g^3_3(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')}. \quad (3.105)$$

Para resolver la Ec. (3.102) debemos considerar las ecuaciones diferenciales en cada región por separado, $z > 0$ y $z < 0$, para z' arbitraria.

- $z > 0$

La ecuación diferencial a considerar en este caso es:

$$\left[\partial^2 + (1 - \mu)\delta(z)\frac{\partial}{\partial z} \right] g^i_3 - i(1 - \mu)p^i\delta(z)g^3_3 = 0, \quad (3.106)$$

que puede integrarse directamente para obtener

$$g^i_3(z, z') = -(1 - \mu)\mathbf{g}(z, 0)\frac{\partial g^i_3(z'', z')}{\partial z''}\Big|_{z''=0^+} + i(1 - \mu)p^i\mathbf{g}(z, 0)g^3_3(0, z'). \quad (3.107)$$

Para resolver esta ecuación seguimos el mismo procedimiento que se usó para los grupos I y II. Derivando respecto a z y evaluando el resultado en $z = 0^+$ encontramos que

$$\frac{\partial g^i_3(z'', z')}{\partial z''}\Big|_{z''=0^+} = -i\frac{1 - \mu}{1 + \mu}p^i g^3_3(0, z'). \quad (3.108)$$

Insertando este resultado en la Ec. (3.107) obtenemos

$$g^i_3(z > 0, z') = 2i\frac{1 - \mu}{1 + \mu}p^i\mathbf{g}(z, 0)\frac{\mathbf{g}(0, z')}{\tilde{\mu}(z')}, \quad (3.109)$$

donde se usó que $g^3_3(z, z') = \mathbf{g}(z, z')/\tilde{\mu}(z')$.

- $z < 0$

En este caso, la ecuación diferencial que debemos resolver es

$$\left[\partial^2 + \frac{1}{\mu}(1 - \mu)\delta(z)\frac{\partial}{\partial z} \right] g^i_3 - i\frac{1}{\mu}(1 - \mu)p^i\delta(z)g^3_3 = 0. \quad (3.110)$$

Integrando directamente obtenemos

$$g^i_3(z, z') = -\frac{1}{\mu}(1 - \mu)\mathbf{g}(z, 0)\frac{\partial g^i_3(z'', z')}{\partial z''}\Big|_{z''=0^-} + i\frac{1}{\mu}(1 - \mu)p^i\mathbf{g}(z, 0)g^3_3(0, z'). \quad (3.111)$$

Ahora seguimos el mismo procedimiento. Derivando respecto a z y evaluando el resultado

en $z = 0^-$ obtenemos

$$\left. \frac{\partial g_3^i(z'', z')}{\partial z''} \right|_{z''=0^-} = i \frac{1-\mu}{1+\mu} p^i g_3^3(0, z'). \quad (3.112)$$

Insertando este resultado en la Ec. (3.111) obtenemos

$$g_3^i(z < 0, z') = 2i \frac{1-\mu}{1+\mu} p^i \mathbf{g}(z, 0) \frac{\mathbf{g}(0, z')}{\tilde{\mu}(z')}. \quad (3.113)$$

Las Ecs. (3.105), (3.109) y (3.113) establecen (3.104).

Para concluir esta sección, escribiremos de forma compacta las componentes de la GF para un aislante topológico semi-infinito (con interfaz θ plana) en contacto con el vacío (ver figura 3.1), y estudiaremos su consistencia con los casos límite de interés. De acuerdo a nuestros resultados, la matrix de GF reducida es de la forma

$$g^\mu_\nu = \begin{bmatrix} g^0_0 & g^0_1 & g^0_2 & 0 \\ g^1_0 & g^1_1 & g^1_2 & g^1_3 \\ g^2_0 & g^2_1 & g^2_2 & g^2_3 \\ 0 & 0 & 0 & g^3_3 \end{bmatrix}, \quad (3.114)$$

donde sus componentes están dadas por

$$g^0_0(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\varepsilon(z')} + \frac{1}{\varepsilon(z')} \left[\text{sgn}(z')(\varepsilon - 1) \left(\frac{1}{\mu} + 1 \right) + \tilde{\theta}^2 \right] \mathbf{p}^2 \mathbf{g}(0, 0) A(z, z'), \quad (3.115)$$

$$g^i_0(z, z') = i \tilde{\theta} \epsilon^i j^3 p_j A(z, z'), \quad (3.116)$$

$$g^i_j(z, z') = \eta^i_j \left\{ \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} + \frac{1}{\tilde{\mu}(z')} \left[\text{sgn}(z')(\varepsilon + 1) \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) + \tilde{\theta}^2 \right] \mathbf{p}^2 \mathbf{g}(0, 0) A(z, z') \right\} + \frac{2\tilde{\theta}^2}{\frac{1}{\mu} + 1} p^i p_j \mathbf{g}(0, 0) A(z, z'), \quad (3.117)$$

$$g^i_3(z, z') = \eta^i_3 \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} + 2i \frac{1-\mu}{1+\mu} p^i \mathbf{g}(z, 0) \frac{\mathbf{g}(0, z')}{\tilde{\mu}(z')}, \quad (3.118)$$

donde se definió

$$A(z, z') = - \frac{4\mathbf{g}(z, 0)\mathbf{g}(0, z')}{(\varepsilon + 1) \left(\frac{1}{\mu} + 1 \right) + \tilde{\theta}^2}. \quad (3.119)$$

Las componentes g^3_0 , g^3_1 , g^3_2 y g^0_3 son iguales a cero. Esto podemos entenderlos de la siguiente manera. De la solución general en términos de la GF reducida, observamos que

la componente A^3 puede escribirse como sigue

$$A^3(\mathbf{x}) = \int (G^3_0 J^0 + G^3_1 J^1 + G^3_2 J^2 + G^3_3 J^3) d^3 \mathbf{x}'. \quad (3.120)$$

Sin embargo, de la ecuación de movimiento (3.11) observamos que A^3 es generada únicamente por la componente J^3 de la corriente. Esto implica que, en la Ec. (3.120), $G^3_0 = G^3_1 = G^3_2 = 0$. Un argumento similar es válido para concluir que $g^0_3 = 0$. De la Ec. (3.10) observamos que la ecuación diferencial para el potencial escalar se acopla solamente con las componentes A^1 y A^2 del potencial vectorial, de manera que es razonable pedir que $G^0_3 = 0$.

Ahora estudiaremos la consistencia de nuestra solución con los resultados previamente conocidos.

★ $\theta = 0$

En este caso, obtenemos la función de Green reducida de un medio material (con interfaz plana) en contacto con el vacío. En este límite, los efectos eléctrico y magnético están desacoplados, de modo que la GF reducida puede escribirse por bloques:

$$g^\mu_\nu = \begin{bmatrix} g_{\mathbf{E}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g_{\mathbf{B}}^i_j \end{bmatrix}, \quad (3.121)$$

El primer bloque contiene únicamente la componente

$$g_{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\epsilon(z')} - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{\text{sgn}(z')}{\epsilon(z')} \mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|}, \quad (3.122)$$

que corresponde a la GF reducida para un dieléctrico plano con permitividad ϵ . Esta expresión es que la deducimos el Apéndice D. El segundo bloque no es diagonal, dado que en dicho límite, la ecuación de Maxwell (3.14) mezcla las componentes del potencial vectorial. Dicho bloque tiene la forma:

$$g_{\mathbf{B}}^i_j = \begin{bmatrix} g^1_1 & 0 & g^1_3 \\ 0 & g^2_2 & g^2_3 \\ 0 & 0 & g^3_3 \end{bmatrix}, \quad (3.123)$$

donde sus componentes están dadas por

$$g_{\mathbf{B}^i_j}(z, z') = \eta_j^i \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\tilde{\mu}(z')} - (\eta_j^i + n^i n_j) \frac{1 - \mu \operatorname{sgn}(z')}{1 + \mu} \frac{\mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|}}{\tilde{\mu}(z')} + 2i \frac{1 - \mu}{1 + \mu} p^i \eta_j^3 \mathbf{g}(z, 0) \frac{\mathbf{g}(0, z')}{\tilde{\mu}(z')}, \quad (3.124)$$

donde $n_i = (0, 0, 1)$ es la normal a la interfaz, y $p^i = (0, p_x, p_y, 0)$ son las componentes del momento paralelo a dicho plano.

$$\star \quad \epsilon = \mu = 1$$

En este caso, las componentes A^1 y A^2 del potencial vectorial se mezclan con el potencial escalar A^0 , mientras que la ecuación para la componente A^3 se desacopla. De esta forma, las componentes de la GF reducida pueden escribirse como sigue

$$g_{\nu}^{\mu}(z, z') = \eta_{\nu}^{\mu} \mathbf{g}(z, z') - \frac{4\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \left\{ \tilde{\theta} \mathbf{g}(0, 0) [p^{\mu} p_{\nu} + (\eta_{\nu}^{\mu} + n^{\mu} n_{\nu}) p^2] + i \epsilon_{\nu}^{\alpha 3} p_{\alpha} \right\} \mathbf{g}(z, 0) \mathbf{g}(0, z'), \quad (3.125)$$

con $n_{\mu} = (0, 0, 0, 1)$. Como se esperaba, esta expresión coincide con la que se obtuvo en el Capítulo 1, en la Ec. (1.56), para un TI con las mismas propiedades ópticas que el vacío.

3.2. GF en la representación de coordenadas

Para escribir las componentes de la GF en la representación de coordenadas, debemos calcular la transformada de Fourier en el plano, como se definió en la Ec. (3.19), de cada componente de la GF reducida. En este caso resulta una tarea sencilla, dado que podemos usar los resultados del Apéndice A. A continuación escribimos las integrales más importantes:

$$I^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{P}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \mathbf{P}^2 \mathbf{g}(0, 0) \mathbf{g}(z, 0) \mathbf{g}(0, z') = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{R^2 + Z^2}}, \quad (3.126)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{P}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \mathbf{P} \mathbf{g}(z, 0) \mathbf{g}(0, z') = \frac{i}{2} \frac{\mathbf{R}}{R^2} \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \right), \quad (3.127)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{P}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \mathbf{P} \mathbf{g}(0, 0) \mathbf{g}(z, 0) \mathbf{g}(0, z') = \frac{i}{4} \frac{\mathbf{R}}{R^2} \left(\sqrt{R^2 + Z^2} - Z \right), \quad (3.128)$$

donde $\mathbf{g}(z, z') = (1/2p)e^{-p|z-z'|}$, $Z = |z| + |z'|$, y $\mathbf{R} = (x - x', y - y')$. Usando estos resultados, la transformada de Fourier de la GF reducida nos da:

$$G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\varepsilon(z')} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{\varepsilon(z')} \frac{\text{sgn}(z')(\varepsilon - 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + Z^2}}, \quad (3.129)$$

$$G^i_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{i\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \epsilon_0^{i j 3} I_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (3.130)$$

$$G^i_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \eta^i_j \left[\frac{1}{\tilde{\mu}(z')} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{\tilde{\mu}(z')} \frac{\text{sgn}(z')(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} - 1) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \right] - \frac{i}{\frac{1}{\mu} + 1} \frac{\tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \partial_j K^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (3.131)$$

$$G^i_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left[\eta^i_3 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{i}{2} \frac{1 - \mu}{1 + \mu} I^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right]. \quad (3.132)$$

Los vectores \mathbf{I} y \mathbf{K} se definieron en las Ecs. (A.15) y (A.21), respectivamente. Éstos se relacionan con los vectores \mathbf{U} y \mathbf{V} previamente definidos como sigue: $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4}\mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ y $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{8}\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Nótese que en el límite $\theta = 0$, las Ecs. (3.129)-(3.132) se reducen correctamente a las obtenidas en la subsección 1.2.2, Ecs. (1.58)-(1.60), como se esperaba.

3.3. Aplicaciones

3.3.1. Carga puntual cerca de un TI plano

Como primer ejercicio consideremos una carga eléctrica puntual q localizada a una distancia $b > 0$ del plano $z = 0$, es decir, se encuentra en la región de vacío, como se muestra en la figura 3.2. La región $z < 0$ está llena de un TI con propiedades ópticas (ε, μ) y con TMEP θ . Por simplicidad elegimos las coordenadas tal que $x' = y' = 0$. Por lo tanto, la densidad de corriente es $j^\mu(\mathbf{x}') = q\eta_0^\mu \delta(x') \delta(y') \delta(z' - b)$. De acuerdo a la Ec. (3.15), la solución a este problema es

$$A^\mu(\mathbf{x}) = qG^\mu_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}), \quad (3.133)$$

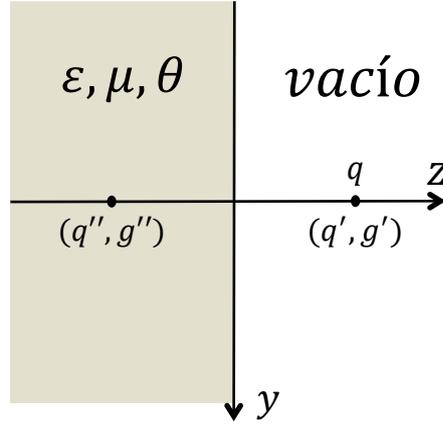


Figura 3.2: La figura ilustra una carga eléctrica q localizada a una distancia b de una interfaz θ definida por el plano $z = 0$. La región $z < 0$ está llena de un TI con propiedades ópticas (ϵ, μ) y con TMEP $\theta \neq 0$, mientras que la región $z > 0$ es el vacío. En la región $z > 0$ el campo eléctrico es originado por la carga original q y por la carga imagen q'' , mientras que el campo magnético es originado por el monopolo g'' . En la región $z < 0$ los campos eléctrico y magnético son originados por la carga q' y monopolo g' imagen, respectivamente.

donde $\mathbf{r} = b\hat{e}_z$. Primero estudiamos el campo eléctrico. De la Ec. (3.129), se observa que la componente 00 de la GF, con $z' > 0$, es

$$z > 0 \quad : \quad G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} - \frac{(\epsilon - 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2}{(\epsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{r}|}, \quad (3.134)$$

$$z < 0 \quad : \quad G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{2(\frac{1}{\mu} + 1)}{(\epsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}. \quad (3.135)$$

Para $z > 0$ la GF nos da el potencial electrostático $A^0(\mathbf{x}) = qG^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})$, que puede interpretarse como el debido a un par de cargas puntuales, la primera de magnitud q en \mathbf{r} , y la otra, la carga imagen, de magnitud

$$q'' = -q \frac{(\epsilon - 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2}{(\epsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \quad (3.136)$$

localizada en $-\mathbf{r}$. Para $z < 0$ sólo aparece una carga imagen, de magnitud

$$q' = \frac{2q(\frac{1}{\mu} + 1)}{(\epsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2}, \quad (3.137)$$

localizada en \mathbf{r} .

Las componentes no cero del potencial vectorial son $A^1(\mathbf{x}) = qG^1_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ y $A^2(\mathbf{x}) = qG^2_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})$; y las componentes requeridas de la matriz de GF son:

$$G^1_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = + \frac{2\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{y}{R^2} \begin{cases} 1 - \frac{z+b}{|\mathbf{x}+\mathbf{r}|} & , \quad z > 0 \\ 1 + \frac{z-b}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}|} & , \quad z < 0 \end{cases} \quad (3.138)$$

$$G^2_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = - \frac{2\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{x}{R^2} \begin{cases} 1 - \frac{z+b}{|\mathbf{x}+\mathbf{r}|} & , \quad z > 0 \\ 1 + \frac{z-b}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}|} & , \quad z < 0 \end{cases} \quad (3.139)$$

Es difícil interpretar las componentes del potencial vectorial directamente, sin embargo el campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ es iluminante. De hecho

$$z > 0 \quad : \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = - \frac{2q\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{x} + \mathbf{r}}{|\mathbf{x} + \mathbf{r}|^3}, \quad (3.140)$$

$$z < 0 \quad : \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = + \frac{2q\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3}. \quad (3.141)$$

Observamos que el campo magnético para $z > 0$ es debido a un monopolo magnético de magnitud

$$g'' = - \frac{2q\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \quad (3.142)$$

localizado en $-\mathbf{r}$. Para $z < 0$ tenemos un monopolo magnético de magnitud

$$g' = + \frac{2q\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \quad (3.143)$$

localizado en \mathbf{r} . Estos resultados coinciden con los reportados en la Ref. [74], en donde se usó el método de imágenes.

Ahora estudiaremos la fuerza entre la carga eléctrica y el bloque de TI. Partimos de la Ec. (1.86) para la energía de interacción, que en este caso nos da

$$E_{int} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' j^0(\mathbf{x}) [G_{00}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \eta_{00}\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] j^0(\mathbf{x}'), \quad (3.144)$$

donde $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ es la GF de vacío, y $J^0(\mathbf{x}) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - b)$. Usando la componente 00 de la GF, dada en la Ec. (3.129), obtenemos

$$E_{int} = - \frac{q^2 (\varepsilon - 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2}{4b (\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2}. \quad (3.145)$$

Ésto implica que la fuerza sobre la carga, ejercida por el TI, es

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial E_{int}}{\partial b} \hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{q^2}{(2b)^2} \frac{(\varepsilon - 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2}, \quad (3.146)$$

que siempre es atractiva. Nótese que este resultado es consistente con la ley de Coulomb, pues es la fuerza entre la carga q y la carga imagen q'' .

3.3.2. Hilo conductor infinito cerca de un TI plano

Ahora consideremos un alambre infinito paralelo al eje x y que porta una corriente I en la dirección $+x$, como se muestra en la figura 3.4. El alambre se localiza en el vacío a una distancia b de un TI plano (cuya interfaz está definida por el plano $z = 0$) con propiedades ópticas (ε, μ) y TMEP $\theta \neq 0$. Por simplicidad elegimos las coordenadas tal que $y' = 0$. De esta forma, la densidad de corrientes es $j^\mu(\mathbf{x}') = I\eta_1^\mu \delta(y') \delta(z' - b)$.

La solución para este problema puede obtenerse siguiendo las mismas líneas descritas en las aplicaciones de la Sección 1.3. El cuadripotencial se expresa en términos de la GF como:

$$A^\mu(\mathbf{x}) = I \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx', \quad (3.147)$$

donde $\mathbf{x} - \mathbf{r} = (x - x')\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + (|z| + b)\hat{\mathbf{e}}_z$. Primero estudiaremos el campo eléctrico. De (3.147) se observa que el potencial escalar es $A^0(\mathbf{x}) = I \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$, donde la componente 01 de la GF se lee de la Ec. (3.130). Ésta es

$$G_1^0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = +\frac{2\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{y}{R^2} \left[1 - \frac{|z| + b}{\sqrt{R^2 + (|z| + b)^2}} \right], \quad (3.148)$$

Nótese que la Ec. (1.101) se obtiene a partir de (3.148) en el límite $\varepsilon = \mu = 1$. Sustituyendo esta expresión en (3.147) obtenemos el potencial escalar, sin embargo, éste carece de una interpretación inmediata. Calculamos el campo eléctrico directamente, $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla A^0(\mathbf{x}) = -I \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla G_1^0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$. El resultado es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{4\tilde{\theta}I}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \left[\frac{|z| + b}{y^2 + (|z| + b)^2} \hat{\mathbf{e}}_y - \frac{y \operatorname{sgn}(z)}{y^2 + (|z| + b)^2} \hat{\mathbf{e}}_z \right], \quad (3.149)$$

y admite una interpretación análoga a la de la Ec. (1.102). En la región $z > 0$, el campo eléctrico puede interpretarse como el producido por una corriente magnética que fluye en la dirección opuesta a la corriente del alambre $\mathbf{j}'' = -J''\hat{\mathbf{e}}_x$, localizada en $z = -b$, y de

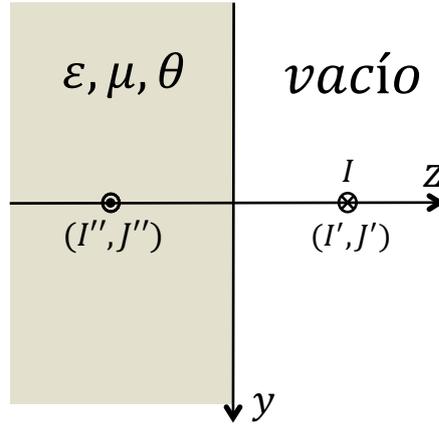


Figura 3.3: La figura ilustra un alambre infinito que porta una corriente I en la dirección $+x$ (saliendo de la página), localizado a una distancia b de una interfaz θ definida por el plano $z = 0$. La región $z < 0$ está llena de un TI no trivial, con propiedades ópticas (ε, μ) y TMEP $\theta \neq 0$, mientras que la región $z > 0$ es el vacío. En la región $z > 0$ el campo eléctrico es originado por una corriente magnética J'' que fluye en la dirección $-x$, mientras que el campo magnético es originado por la corriente original I y una corriente eléctrica imagen I'' que fluye en la dirección $-x$ y se localiza en $z = -b$. En la región $z < 0$ los campos eléctrico y magnético son originados por las corrientes magnética J' y eléctrica I' , respectivamente, ambas fluyendo en la dirección $+x$.

magnitud

$$J'' = \frac{2\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} I. \quad (3.150)$$

Para $z < 0$, el campo eléctrico es producido por una corriente magnética que fluye en la misma dirección que la corriente eléctrica del alambre, $\mathbf{j}' = J' \hat{\mathbf{e}}_x$, localizada en $z = b$, y de la misma magnitud, *i.e.* $J' = J''$.

De manera similar podemos calcular el campo magnético. Las componentes no-cero del potencial vectorial son: $A^1 = I \int_{-\infty}^{+\infty} G^1_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$ y $A^2 = I \int_{-\infty}^{+\infty} G^2_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$, donde las componentes requeridas de la GF son:

$$G^1_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + |z - b|^2}} - \frac{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (|z| + b)^2}} + \frac{2}{\frac{1}{\mu} + 1} \frac{\tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x - x'}{R^2} \left[\sqrt{R^2 + (|z| + b)^2} - (|z| + b) \right] \right\}, \quad (3.151)$$

$$G^2_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{2}{\frac{1}{\mu} + 1} \frac{\tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{y}{R^2} \left[\sqrt{R^2 + (|z| + b)^2} - (|z| + b) \right] \right\}, \quad (3.152)$$

donde $R^2 = (x - x')^2 + y^2$. El potencial vectorial no es iluminante, de manera que calcu-

lamos directamente el campo magnético: $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A} = -\partial_z A^2 \hat{\mathbf{e}}_x + \partial_z A^1 \hat{\mathbf{e}}_y + (\partial_x A^2 - \partial_y A^1) \hat{\mathbf{e}}_z$. El resultado es:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = I \frac{-2(z-b)\hat{\mathbf{e}}_y + 2y\hat{\mathbf{e}}_z}{y^2 + (z-b)^2} - I \frac{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}-1) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} \frac{-2(|z|+b)\text{sgn}(z)\hat{\mathbf{e}}_y + 2y\hat{\mathbf{e}}_z}{y^2 + (|z|+b)^2}. \quad (3.153)$$

Para $z > 0$, el campo magnético corresponde al producido por la corriente original (de magnitud I , que fluye en la dirección $+x$ y se localiza en $z = b$), más una corriente eléctrica imagen que fluye en la dirección opuesta a la corriente del alambre, $\mathbf{J}'' = -I''\hat{\mathbf{e}}_x$, localizada en $z = -b$, y de magnitud

$$I'' = \frac{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}-1) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} I. \quad (3.154)$$

Para $z < 0$, el campo magnético se debe a una única corriente eléctrica que fluye en la misma dirección que la corriente del alambre, *i.e.* $\mathbf{J}' = I'\hat{\mathbf{e}}_x$, localizada en $z = b$, y de magnitud

$$I' = \frac{2(\varepsilon+1)}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} I. \quad (3.155)$$

Esta corriente se obtiene como resultado de la superposición de la corriente original, más una corriente imagen localizada en el mismo punto y de magnitud $-I''$, *i.e.* $I' = I - I''$.

Se observa que, en el caso límite $\varepsilon = \mu = 1$, se recuperan correctamente los campos eléctrico [Ec. (1.102)] y magnético [Ec. (1.104)] calculados en la Sección 1.3 para un hilo conductor frente a una interfaz θ plana. Por otro lado, en el límite $\theta = 0$, se verifica que $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ (no hay TME), y las corrientes eléctricas imagen se reducen a

$$I' = \frac{1-\mu}{1+\mu} I \quad \text{y} \quad I'' = \frac{2\mu}{1+\mu} I, \quad (3.156)$$

como se esperaba.

3.3.3. Hilo infinito cargado cerca de un TI plano

Ahora consideremos un alambre rectilíneo uniformemente cargado, con densidad de carga λ , como se muestra en la figura 3.4. El alambre se localiza en el vacío, a una distancia b de un TI plano (definido por el plano $z = 0$), paralelo al eje x , con propiedades ópticas (ε, μ) y TMEP $\theta \neq 0$. Por simplicidad elegimos las coordenadas tal que $y' = 0$. De esta forma, la densidad de corrientes es $j^\mu(\mathbf{x}') = \lambda \eta^\mu_0 \delta(y') \delta(z' - b)$.

La solución para este problema puede obtenerse siguiendo las mismas líneas descritas en las aplicaciones de la Sección 1.3. El cuadripotencial se expresa en términos de la GF como:

$$A^\mu(\mathbf{x}) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G^\mu_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx', \quad (3.157)$$

donde $\mathbf{r} = x'\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_z$. De (3.147) se observa que el potencial escalar es $A^0(\mathbf{x}) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$, donde la componente 00 de la GF se lee de la Ec. (3.129). Ésta es

$$G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + |z-b|^2}} - \frac{(\varepsilon-1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (|z|+b)^2}}, \quad (3.158)$$

donde $R^2 = (x-x')^2 + y^2$. Calculamos el campo eléctrico directamente, $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla A^0(\mathbf{x}) = -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$. El resultado es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \lambda \frac{2y\hat{\mathbf{e}}_y + 2(z-b)\hat{\mathbf{e}}_z}{y^2 + (z-b)^2} - \lambda \frac{(\varepsilon-1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} \frac{2y\hat{\mathbf{e}}_y + 2(|z|+b)\text{sgn}(z)\hat{\mathbf{e}}_z}{y^2 + (|z|+b)^2}. \quad (3.159)$$

En la región $z > 0$, el campo eléctrico puede interpretarse como el producido por el hilo infinito cargado original (paralelo al eje x con densidad de carga lineal λ), más un hilo cargado imagen, localizado en $z = -b$, y con densidad de carga lineal

$$\lambda'' = -\frac{(\varepsilon-1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} \lambda. \quad (3.160)$$

Para $z < 0$, el campo eléctrico es producido por un hilo infinito, localizado en $z = b$, y con densidad de carga lineal

$$\lambda' = \frac{2(\frac{1}{\mu}+1)}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} \lambda. \quad (3.161)$$

Esta densidad de carga se obtiene como resultado de la superposición del hilo cargado original, más un hilo cargado imagen localizado en el mismo punto y de magnitud λ'' , *i.e.* $\lambda' = \lambda + \lambda''$.

Ahora estudiaremos el campo magnético. Las componentes no-cero del potencial vectorial son: $A^1 = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G^1_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$ y $A^2 = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G^2_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) dx'$, donde las componentes requeridas de la GF son:

$$G^1_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{2\tilde{\theta}}{(\varepsilon+1)(\frac{1}{\mu}+1) + \tilde{\theta}^2} \frac{y}{R^2} \left(1 - \frac{|z|+b}{\sqrt{R^2 + (|z|+b)^2}} \right), \quad (3.162)$$

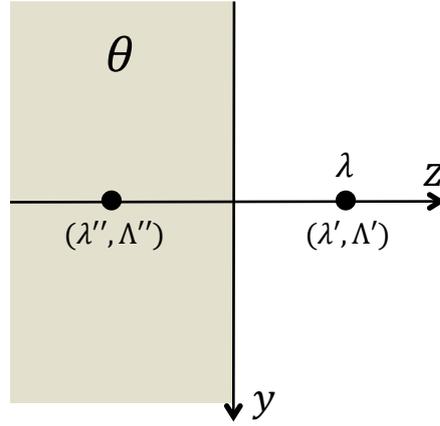


Figura 3.4: La figura ilustra un hilo infinito con densidad de carga uniforme λ , localizado a una distancia b de una interfaz θ definida por el plano $z = 0$. La región $z < 0$ está llena de un TI no trivial, con propiedades ópticas (ε, μ) y TMEP $\theta \neq 0$, mientras que la región $z > 0$ es el vacío. En la región $z > 0$ el campo eléctrico es originado por el hilo infinito original, más un hilo infinito imagen, con densidad de carga uniforme λ'' , localizado en $z = -b$. El campo magnético es originado por un hilo infinito con densidad uniforme de carga magnética Λ'' localizado en el punto imagen. En la región $z < 0$ los campos eléctrico y magnético son originados por hilos infinitos con densidades uniformes de carga eléctrica λ' y magnética Λ' , respectivamente, ambas localizadas en $z = b$.

$$G_0^2(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = -\frac{2\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \frac{x - x'}{R^2} \left(1 - \frac{|z| + b}{\sqrt{R^2 + (|z| + b)^2}}\right), \quad (3.163)$$

donde $R^2 = (x - x')^2 + y^2$. El potencial vectorial no es iluminante, de manera que calculamos directamente el campo magnético: $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A} = -\partial_z A^2 \hat{\mathbf{e}}_x + \partial_z A^1 \hat{\mathbf{e}}_y + (\partial_x A^2 - \partial_y A^1) \hat{\mathbf{e}}_z$. El resultado es:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\lambda \frac{2\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \frac{2y \operatorname{sgn}(z) \hat{\mathbf{e}}_y + 2(|z| + b) \hat{\mathbf{e}}_z}{y^2 + (|z| + b)^2}. \quad (3.164)$$

Para $z > 0$, el campo magnético corresponde al producido por un hilo infinito con densidad uniforme de carga magnética

$$\Lambda'' = -\frac{2\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + \tilde{\theta}^2} \lambda, \quad (3.165)$$

localizado en $z = -b$. En la región $z < 0$, el campo magnético es producido por un hilo infinito con densidad uniforme de carga magnética $\Lambda' = -\Lambda''$, localizado en $z = b$.

Se observa que, en el caso límite $\varepsilon = \mu = 1$, se recuperan correctamente los campos

eléctrico [Ec. (1.106)] y magnético [Ec. (1.109)] calculados en la Sección 1.3 para un hilo infinito uniformemente cargado frente a una interfaz θ plana. Por otro lado, en el límite $\theta = 0$, se verifica que $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ (no hay TME), y las densidades de carga imagen se reducen a

$$\lambda'' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\lambda \quad , \quad \lambda' = \frac{2}{\varepsilon + 1}\lambda \quad (3.166)$$

como se esperaba.

3.4. Discusión

El efecto magnetoelectrico es un fenómeno que consiste en la transmutación entre los campos eléctrico y magnético. Fue predicho por primera vez por P. Curie [119], mientras que el término “magnetoelectrico” fue acuñado por P. Debye [120]. Éste puede ser lineal o no lineal con respecto a los campos externos; y en general, depende de la temperatura. El efecto magnetoelectrico puede expresarse en la siguiente forma

$$P_i(\mathbf{H}) = \sum_j \alpha_{ij}(T)H_j + \sum_{j,k} \beta_{ijk}(T)H_jH_k + \dots \quad (3.167)$$

$$M_i(\mathbf{E}) = \sum_j \alpha_{ij}(T)E_j + \sum_{j,k} \gamma_{ijk}(T)E_jE_k + \dots \quad (3.168)$$

donde P es la polarización eléctrica, M la magnetización; E y H son los campos eléctrico y magnético; y α y β son las susceptibilidades magnetoelectricas, lineal y no lineal, respectivamente. En 1959, I. Dzyaloshinskii usó argumentos de simetría para derivar la forma del acoplamiento magnetoelectrico para el material Cr_2O_3 [121]. La confirmación experimental vino pocos meses después [122, 123]. Otros materiales que exhiben el efecto magnetoelectrico son BiMnO_3 y BiFeO_3 . Desafortunadamente, dicho efecto es muy pequeño para ser medible, dado que el término lineal está limitado por la relación $\alpha_{ij} \leq \varepsilon_{ii}\mu_{jj}$ [124].

El reciente descubrimiento de los aislantes topológicos TR simétricos abre una ventana de posibilidades para estudiar el efecto magnetoelectrico, que a diferencia del descrito en el párrafo anterior, éste tiene un origen topológico. La respuesta electromagnética de los TIs puede describirse por la acción de Maxwell (3.1) más un término θ adicional de la forma $\theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, donde θ es la polarizabilidad topológica magnetoelectrica. La simetría TR implica que θ está cuantizada en múltiplos impares de π : $\theta = (2n + 1)\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, todos los TIs TR simétricos están descritos por $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ (módulo 2π). Entre los efectos topológicos magnetoelectricos que se han reportado destacan: monopolos magnéticos inducidos debido a una carga eléctrica frente a la superficie de un TI (y vice-

versa) [74] y la rotación de Faraday que surge cuando ondas electromagnéticas atraviesan la superficie de un TI [78]. El TME no se ha observado experimentalmente. Una idea de por qué esto es así se puede ganar comparando teoría de Chern-Simons en $(3+1)$ -D con la análoga en $(2+1)$ -D. En $(2+1)$ -dimensiones, el término topológico de Chern-Simons es el término que domina el comportamiento del sistema en el régimen de longitud de onda grande, lo que lleva a la cuantización universal de la conductancia de Hall. Por otro lado, en $(3+1)$ -dimensiones el término topológico en la acción (6) y el término de Maxwell son igualmente importantes en el límite de longitud onda grande [70].

Hasta el momento, todos los TMEs fueron predichos resolviendo las ecuaciones de Maxwell modificadas usando el método de imágenes, el cuál resulta de mucha utilidad cuando las distribuciones de cargas y corrientes son simples, sin embargo, para distribuciones complicadas este método se torna muy difícil. En este Capítulo, se introdujo el método de la función de Green para describir la respuesta electromagnética de TIs. Es decir, presentamos la solución general de las ecuaciones de Maxwell modificadas para un TI con superficie plana, para una distribución arbitraria de cargas y corrientes. De esta forma, aunque las fuentes tengan una estructura matemática complicada, podremos conocer su solución, ya sea analítica o numéricamente. Estos resultados abren una ventana de posibilidades para proponer diferentes tipos de distribuciones de cargas y corrientes que permitan amplificar el TME en la superficie de un TI. Como primer ejercicio, se resolvió el caso de una carga eléctrica puntual q a una distancia b de la superficie de un TI plano y verificamos la consistencia con los resultados previamente reportados por Qi y colaboradores [74]. En la región de vacío, el campo eléctrico es generado por dos cargas eléctricas, la carga original q y una carga imagen q'' localizada en $z = -b$; mientras que el campo magnético es generado por un monopolo magnético de magnitud g'' en el punto imagen. La aparición de monopolos magnéticos en esta solución parece violar la ley de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que permanece sin alteraciones en el caso de la electrodinámica de TIs. Sin embargo, recordando que $(\mathbf{x} \pm \mathbf{r})/|\mathbf{x} \pm \mathbf{r}|^3 \sim \nabla_x(1/|\mathbf{x} \pm \mathbf{r}|)$, obtenemos $\nabla \cdot \mathbf{B} \sim \nabla_x^2(1/|\mathbf{x} \pm \mathbf{r}|) \sim \delta(\mathbf{x} \pm \mathbf{r})$ en una región donde $\mathbf{x} \neq \pm \mathbf{r}$. Físicamente, el campo magnético es inducido por la densidad de corriente en la superficie

$$\mathbf{J} = \tilde{\theta} \delta(z) \mathbf{E} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{4\pi} \frac{2q(\frac{1}{\mu} + 1)\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{\rho}{(\rho^2 + b^2)^{3/2}} \delta(z) \hat{\varphi}, \quad (3.169)$$

que circula alrededor del origen. Aquí $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia radial y $\hat{\varphi}$ es el vector tangente unitario. Esta corriente es la corriente de Hall, que da origen a un campo magnético que tiene la forma correcta del que se esperaría debido a un monopolo magnético.

Como segundo ejemplo se consideró un hilo conductor infinito, cerca de un TI plano, que porta una corriente I en la dirección $+x$. En la región de vacío, el campo magnético es generado por la corriente original, más una corriente imagen I'' que fluye en la dirección opuesta localizada en $z = -b$; mientras que el campo eléctrico es generado por una corriente magnética J'' (compuesta por monopolos magnéticos) localizada en el punto imagen. La aparición de una corriente de monopolos magnéticos en esta solución parece violar la ley de Faraday estática $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, que permanece sin alteraciones en el caso de la electrodinámica de TIs. Sin embargo, el campo eléctrico es inducido por la densidad de carga en la superficie

$$\rho = \tilde{\theta} \delta(z) \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{4\pi} \frac{2q\tilde{\theta}^2}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{b}{(\rho^2 + b^2)^{3/2}} \delta(z). \quad (3.170)$$

Esta densidad de carga da origen a un campo eléctrico que tiene la forma del que se esperaría de una corriente de monopolos magnéticos, es decir, solución de la ecuación $\nabla \times \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j}$, donde $\mathbf{j} = -I'' \hat{\mathbf{e}}_x$ es la corriente magnética.

Como tercer ejemplo, estudiamos un hilo rectilíneo infinito (paralelo al eje x y localizado a una distancia b de éste) con densidad de carga uniforme λ , cerca de la superficie de un TI plano. En la región de vacío ($z > 0$), el campo eléctrico es generado por el hilo original, más un hilo imagen con densidad de carga λ'' localizado en $z = -b$; mientras que el campo magnético es originado por un hilo con densidad uniforme de carga magnética Λ'' localizado en el punto imagen. La aparición de una densidad de cargas magnéticas parece violar la ley de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, sin embargo, ésta se cumple en el bulto del TI y en el vacío, *i.e.* $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{B}_2 = 0$, respectivamente. La condición de continuidad de la componente normal del campo magnético en la interfaz garantiza que dicha ecuación se satisface en todo el espacio, *i.e.* $\nabla \cdot \mathbf{B} = \delta(z)(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$. Dicho campo magnético es producido por la densidad de corriente en la superficie

$$\mathbf{J} = \tilde{\theta} \delta(z) \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi} \frac{2\lambda(\frac{1}{\mu} + 1)\tilde{\theta}}{(\varepsilon + 1)(\frac{1}{\mu} + 1) + \tilde{\theta}^2} \frac{2y}{y^2 + b^2} \delta(z) \hat{\mathbf{e}}_x. \quad (3.171)$$

El campo magnético que resulta de resolver la ley de Ampère estática ($\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}$) con esta densidad de corriente, coincide con el que se obtendría de resolver la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi \Lambda''$, donde Λ'' es la densidad de cargas magnéticas.

El análisis presentado en este Capítulo puede extenderse para el caso de TIs con superficies esférica y cilíndrica, que son las geometrías de mayor interés experimental, además del caso plano que se discutió.

Capítulo 4

Gravedad θ

La gravedad de Chern-Simons es una extensión topológica muy interesante de la relatividad general, donde la acción de Einstein-Hilbert se acopla al invariante de Pontryagin gravitacional por medio de un campo escalar θ , que puede ser un campo dinámico o una cantidad prescrita que es función del espacio-tiempo [81]. Entre las propiedades interesantes de la gravedad de Chern-Simons (de aquí en adelante la llamaremos gravedad CS o simplemente gCS) encontramos que proporciona un marco para la cancelación de la anomalía gravitacional en teoría de cuerdas a través del mecanismo de Green-Schwarz [15], y que emerge naturalmente como un término de cancelación de anomalías en gravedad cuántica de lazos [16].

Las ecuaciones de campo modificadas, incluyen un término extra al que se conoce como tensor de Cotton 4-dimensional, que depende de $\partial_\mu\theta$ y $\partial_\mu\partial_\nu\theta$; y sus soluciones están confinadas a espacios con invariante de Pontryagin igual a cero, *i.e.* $*RR = 0$. Sin embargo, esto no impide que los espacios-tiempo de Schwarzschild, Robertson-Walker y Ondas Gravitacionales (OGs), sean soluciones de las ecuaciones modificadas con el campo de acoplamiento $\theta = \kappa t$, donde $\kappa \in \mathbb{R}$ [82]. En un contexto interesante, la teoría dinámica se usó para acotar las constantes de acoplamiento a partir de ondas gravitacionales viniendo de agujeros negros binarios [83].

En este trabajo, consideramos una realización particular de la gCS en donde θ donde θ no es un campo dinámico, sino que es constante por secciones, *i.e.* toma diferentes valores constantes en diferentes regiones del espacio separadas por una interfaz común Σ , a la que llamaremos interfaz θ . Nos referiremos a este modelo como gravedad θ o simplemente $G\theta$. Nuestra motivación surge de la formulación análoga de la electrodinámica θ , que es el modelo efectivo que describe el efecto topológico magnetoeléctrico de los aislantes topológicos. Este modelo tiene una forma análoga a la electrodinámica axiónica que se ha usado en el contexto de física de partículas [26, 27], excepto que el campo θ , que es

un campo dinámico en la teoría axiónica, es constante a trozos en un aislante topológico. Como se discutió en los capítulos anteriores, un valor constante de θ no tiene efectos electrodinámicos en el cuerpo de un TI, sin embargo, en una interfaz a través de la cuál el valor de θ cambia en $\Delta\theta$, aparece la conductividad de Hall superficial $\sigma_{\Sigma} = \Delta\theta e^2/2\pi h$. Muchos otros efectos topológicos magnetoeléctricos ocurren en la interfaz de un TI, como se discutió ampliamente en la sección de aplicaciones del capítulo 1.

En el caso gravitacional, el comportamiento del campo θ (constante a trozos) induce potenciales discontinuidades en la métrica y sus derivadas a través de Σ , que es el lugar donde la dinámica modificada afecta al campo gravitacional. Tales métricas pueden jugar un papel importante en relatividad general; en particular, de acuerdo a la Ref. [125], es posible interpretar métricas discontinuas como fluctuaciones cuánticas del campo gravitacional y por lo tanto, estas geometrías pueden ser relevantes en el problema de conciliar la mecánica cuántica y la relatividad general en una teoría unificada. Contrario al caso de la electrodinámica θ , donde los aislantes topológicos han sido encontrados en el laboratorio, la situación gravitacional que describimos en este trabajo es de naturaleza teórica por el momento. Coleman utilizó una idea similar en Cosmología, en donde estudió la evolución de una burbuja de vacío en un fluido cosmológico que pertenece a un vacío diferente (los vacíos distintos se distinguen, por ejemplo, por el valor de la constante cosmológica) [84]. En nuestro caso, el vacío puede distinguirse por el valor de θ , como en el caso de los TIs.

El problema de discontinuidades métricas se ha discutido ampliamente en la literatura [126–134] y surgen en situaciones físicas como líneas de fuentes, ondas de choque y capas delgadas de materia, por ejemplo. Métricas discontinuas también aparecen en las llamadas ondas gravitacionales refractivas, que introdujo Barret [125] como una generalización de las ondas gravitacionales impulsivas de Penrose [135]. Éstas permiten la existencia de discontinuidades métricas finitas en las fronteras de subvariedades en el espacio-tiempo, siempre que la condición de coincidencia de áreas se satisfaga. Este requerimiento es una extensión de las condiciones de juntura estándar en relatividad general, y permite que la métrica inducida en una hipersuperficie nula N sea discontinua, pero de tal manera que la medición del área de cualquier 2-superficie tipo espacio en N dé un único resultado, independientemente de tal discontinuidad. La condición de coincidencia de áreas también surge en soluciones particulares en el cálculo de Regge [136] y también en el modelo de Barrett-Crane [137, 138].

En este trabajo estudiamos la propagación de OGs en $G\theta$ linealizada, a través de una hipersuperficie Σ , que elegimos como el plano $z = 0$. Demostramos que las soluciones más generales de la ecuación de ondas modificada proporciona una métrica que es discontinua en Σ , *i.e.* $g_{\mu\nu}(0^+) \neq g_{\mu\nu}(0^-)$, que sin embargo satisface la condición de coincidencia de

áreas medidas en Σ a un tiempo dado. La notación es la estándar, 0^+ y 0^- denotan el límite cuando uno se aproxima a Σ desde $z > 0$ y $z < 0$, respectivamente.

Este capítulo está organizado como sigue. En la sección 4.1 revisamos brevemente la formulación de la gravedad de Chern-Simons, siguiendo de cerca las Refs. [81, 82]. En la sección 4.2 introducimos el caso particular de la gravedad de Chern-Simons que vamos a estudiar, la $G\theta$, que se trata de la gCS definida en una variedad $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$ donde se introduce una hipersuperficie adicional Σ , tal que el campo escalar θ toma valores constantes (pero diferentes) en cada región del espacio, implicando así contribuciones distribucionales del tipo $\delta(\Sigma)$ y $\delta'(\Sigma)$ en las ecuaciones de campo modificadas. La sección 4.3 la dedicamos a analizar la propagación de OGs a través de la interfaz θ . Resolvemos el problema de encontrar las condiciones de frontera inducidas por las contribuciones distribucionales a la ecuación de ondas en Σ , demostrando que el operador adicional es una extensión autoadjunta del operador $-d^2/dz^2$, para el que las condiciones de frontera ya se determinaron previamente en la literatura. De esta manera, nuestros resultados son independientes de cualquier modelo de las distribuciones δ y δ' . En la sección 4.5 discutimos cómo emerge la condición de coincidencia de áreas en $G\theta$ linealizada. Un resumen final de los resultados comprende la última sección 4.6. Los detalles de algunos cálculos se presentan en los Apéndices. Nuestras convenciones son las de la Ref. [139]. Usamos la signatura $(-, +, +, +)$, el tensor de Riemann es $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma{}_{\nu\beta} - (\alpha \leftrightarrow \beta)$, el tensor de Ricci está dado por $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ y $R = R^\mu{}_\mu$ es el escalar de Ricci. El símbolo de Levi-Civita es $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$.

4.1. Gravedad de Chern-Simons

Consideremos el espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) , donde \mathcal{M} es una variedad 4-dimensional y g una métrica en \mathcal{M} . En analogía con el electromagnetismo, la acción para la gravedad de Chern-Simons puede escribirse como

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{EH} + \mathcal{S}_{CS} + \mathcal{S}_{mat} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \left(\sqrt{-g} R + \frac{\theta}{4} \mathcal{P} \right) + \mathcal{S}_{mat}(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (4.1)$$

donde $\kappa = 8\pi G$, \mathcal{V} es un 4-volumen en \mathcal{M} con frontera $\partial\mathcal{V}$, g es el determinante de la métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$, θ es el campo escalar de CS, y \mathcal{S}_{mat} es la acción de materia que no depende de θ . El campo ψ denota colectivamente los campos de materia no gravitacionales. La cantidad \mathcal{P} en la acción es el invariante de Pontryagin definido por

$$\mathcal{P} = {}^* R^\sigma{}_\tau{}^{\mu\nu} R^\tau{}_{\sigma\mu\nu}, \quad (4.2)$$

donde $*R^\sigma{}_\tau{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}R^\sigma{}_{\tau\alpha\beta}$ es el tensor de Riemann dual. Formalmente, si $\theta = \text{const.}$ en todos los puntos del espacio-tiempo, la gravedad de CS se reduce idénticamente a la relatividad general. Esto es porque el término de Pontryagin [Ec. (4.2)] puede expresarse como la divergencia covariante

$$\mathcal{P} = 2\nabla_\mu K^\mu \quad (4.3)$$

de la corriente topológica de Chern-Simons

$$K^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} \left(\partial_\alpha\Gamma^\sigma{}_{\beta\lambda} + \frac{2}{3}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\xi}\Gamma^\xi{}_{\beta\lambda} \right), \quad (4.4)$$

donde Γ es la conexión de Christoffel. De esta manera, el término de CS se convierte en un término topológico que no contribuye a las ecuaciones de movimiento dado que su variación es un término de borde que puede anularse bajo las condiciones de borde usuales. Las ecuaciones de campo modificadas se obtienen variando la acción [Ec. (4.1)] respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$. Encontramos

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} (G^{\mu\nu} + C^{\mu\nu} - \kappa T^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} + \delta\mathcal{S}_{BT}, \quad (4.5)$$

donde $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein, y $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-impulso de materia definido a través de $\delta\mathcal{S}_{mat} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$. El tensor simétrico y sin traza de segundo rango $C^{\mu\nu}$ esta dado por

$$C^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} [v_\lambda \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \nabla_\alpha R^\nu{}_\beta + v_{\lambda\sigma} *R^{\sigma\mu\lambda\nu} + (\mu \leftrightarrow \nu)]. \quad (4.6)$$

Este tensor es la generalización 4-dimensional del tensor de Cotton-York 3-dimensional, de manera que lo llamaremos tensor de Cotton 4-dimensional. Aquí

$$v_\lambda = \nabla_\lambda \theta, \quad (4.7)$$

se conoce como coordenada de encajamiento y $v_{\lambda\sigma} = \nabla_\sigma v_\lambda$ es su derivada covariante. El último término en la Ec. (4.5), $\delta\mathcal{S}_{BT}$, contiene los términos de superficie que surgen de integraciones por parte repetidas. Este aspecto se discutirá más adelante. A continuación derivamos la fórmula (4.6) variando el término \mathcal{S}_{CS} de la acción (4.1). Fijamos la variación con la condición $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{V}} = 0$. Esto implica que h_{ab} , la métrica inducida en $\partial\mathcal{V}$, se mantiene fija durante las variaciones. Usando la identidad de Palatini

$$\delta R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \nabla_\mu \delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}, \quad (4.8)$$

la variación del término de Chern-Simons en la acción es

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{S}_{CS} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \frac{\theta}{8} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (R^\sigma{}_{\tau\alpha\beta} \delta R^\tau{}_{\sigma\mu\nu} + R^\tau{}_{\sigma\mu\nu} \delta R^\sigma{}_{\tau\alpha\beta}) \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \frac{\theta}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (R^\sigma{}_{\tau\alpha\beta} \nabla_\mu \delta\Gamma^\tau{}_{\sigma\nu} + R^\tau{}_{\sigma\mu\nu} \nabla_\alpha \delta\Gamma^\sigma{}_{\tau\beta}) \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \theta^* R^\sigma{}_{\tau}{}^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta\Gamma^\tau{}_{\sigma\nu}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Después de integrar por partes nos queda

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x [-v_\mu{}^* R^\sigma{}_{\tau}{}^{\mu\nu} \delta\Gamma^\tau{}_{\sigma\nu} + \nabla_\mu (\theta^* R^\sigma{}_{\tau}{}^{\mu\nu} \delta\Gamma^\tau{}_{\sigma\nu})], \tag{4.10}$$

donde v_μ está dada en la Ec. (4.7). La variación de la conexión surge de la variación del tensor métrico de acuerdo con la relación

$$\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\xi} (\nabla_\beta \delta g_{\xi\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\xi\beta} - \nabla_\xi \delta g_{\beta\nu}). \tag{4.11}$$

De esta manera, la Ec. (4.10) se convierte en

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x [-v_\lambda{}^* R^{\sigma\mu\lambda\nu} \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} + \nabla_\mu (\theta^* R^\sigma{}_{\tau}{}^{\mu\nu} \delta\Gamma^\tau{}_{\sigma\nu})]. \tag{4.12}$$

Ahora podemos integrar por partes de nuevo para obtener

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x [\nabla_\sigma (v_\lambda{}^* R^{\sigma\mu\lambda\nu}) \delta g_{\mu\nu} + \nabla_\mu (\theta^* R^\sigma{}_{\tau}{}^{\mu\nu} \delta\Gamma^\tau{}_{\sigma\nu} - v_\lambda{}^* R^{\mu\sigma\lambda\nu} \delta g_{\sigma\nu})]. \tag{4.13}$$

Nótese que el último término no contribuye a la integral de superficie porque $\delta g_{\mu\nu}$ es cero en $\partial\mathcal{V}$. Por otro lado, la derivada covariante que aparece en el primer término puede escribirse como sigue

$$\nabla_\sigma (v_\lambda{}^* R^{\sigma\mu\lambda\nu}) = \frac{1}{2} v_\lambda \epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} \nabla_\sigma R^{\sigma\mu}{}_{\alpha\beta} + v_{\lambda\sigma}{}^* R^{\sigma\mu\lambda\nu}, \tag{4.14}$$

donde $v_{\lambda\sigma} = \nabla_\sigma v_\lambda = \nabla_\sigma \nabla_\lambda \theta$ es la derivada covariante de la coordenada de encajamiento. Usando la identidad de Bianchi $\nabla_\sigma R^{\sigma\mu}{}_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha R^\mu{}_\beta - \nabla_\beta R^\mu{}_\alpha$ en la Ec. (4.14) y sustituyendo el resultado en la Ec. (4.13) encontramos

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} C^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \nabla_\mu (\theta^* R^\sigma{}_{\tau}{}^{\mu\nu} \delta\Gamma^\tau{}_{\sigma\nu}), \tag{4.15}$$

donde $C^{\mu\nu}$ es el tensor de Cotton 4-dimensional definido en la Ec. (4.6).

El último término de la Ec. (4.15) representa un término de superficie que surge de las integraciones por partes repetidas, y está contenido en $\delta\mathcal{S}_{BT}$ de la Ec. (4.5). Tal término puede jugar un papel muy interesante para la termodinámica de agujeros negros. Para los propósitos de este trabajo, no consideramos dicho término.

Como es usual, pidiendo que el primer término en la Ec. (4.5) sea cero para una variación arbitraria $\delta g_{\mu\nu}$ obtenemos las ecuaciones de campo

$$G^{\mu\nu} + C^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

Es necesario considerar la condición de consistencia que se sigue de tomar la derivada covariante de la Ec. (4.16). La identidad de Bianchi implica que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, mientras que la dinámica invariante bajo difeomorfismos para los grados de libertad de materia implican que el tensor de energía-impulso $T^{\mu\nu}$ satisface de la misma forma $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. De esta manera, la anulación de $\nabla_\mu C^{\mu\nu}$ es una condición de consistencia de las ecuaciones de campo modificadas, sin embargo $C^{\mu\nu}$ no está covariantemente conservado. De hecho se obtiene que

$$\nabla_\mu C^{\mu\nu} = \frac{\partial^\nu \theta}{2\sqrt{-g}} \mathcal{P}, \quad (4.17)$$

y por lo tanto la condición de consistencia de la Ec. (4.16) demanda que $\mathcal{P} = 0$, a menos que $\partial^\nu \theta = 0$. Esta condición, a la que se le conoce como condición de Pontryagin, restringe severamente las soluciones a las ecuaciones de campo modificadas.

Podemos derivar la Ec. (4.17) evaluando explícitamente la divergencia covariante (que involucra sólo las identidades de Bianchi) del tensor de Cotton 4-dimensional. Otra ruta para obtener tal fórmula, que es la que presentamos aquí, es examinando la respuesta del término de Chern-Simons ante cambios en las coordenadas, teniendo en mente que θ es una cantidad externa prescrita. Para una transformación infinitesimal de las coordenadas

$$\delta x^\mu = -\xi^\mu(x) \quad (4.18)$$

tenemos

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \quad (4.19)$$

y la acción de Einstein-Hilbert es, por supuesto, invariante. Para evaluar las propiedades de la variación del término topológico procedemos como sigue. Dado que \mathcal{P} es una densidad coordenada, se transforma como $\delta\mathcal{P} = \partial_\mu(\xi^\mu \mathcal{P})$; y θ , siendo un parámetro externo, no se transforma. Entonces

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \theta \partial_\mu(\xi^\mu \mathcal{P}) = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \nu_\mu \xi^\mu \mathcal{P}. \quad (4.20)$$

Alternativamente, podemos calcular la variación de \mathcal{S}_{CS} variando $g_{\mu\nu}$. Usando las Ecs. (4.5) y (4.19) se sigue que

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} C^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \xi_{\nu} = -\frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} \xi_{\nu} \nabla_{\mu} C^{\mu\nu}. \quad (4.21)$$

Igualando ambas expresiones para $\delta\mathcal{S}_{CS}$ establecemos la Ec. (4.17), y también demostramos que \mathcal{P} es una medida de la ruptura de la invariancia ante difeomorfismos cuando $\partial^{\nu}\theta$ no es cero. Por otro lado, si consideramos θ como un campo dinámico (y no una cantidad externa prescrita), se transforma como un escalar, $\delta\theta = \xi^{\mu} \partial_{\mu} \theta$, y entonces la Ec. (4.20) adquiere la contribución adicional

$$\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \mathcal{P} \delta\theta = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} v_{\mu} \xi^{\mu} \mathcal{P} \quad (4.22)$$

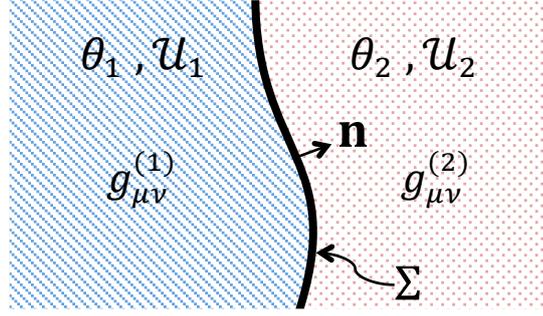
que cancela la variación total $\delta\mathcal{S}_{CS}$ en la Ec. (4.20), demostrando así que la extensión topológica con θ dinámico es invariante ante difeomorfismos. Sin embargo, las ecuaciones de movimiento que surgen de las variaciones de $g_{\mu\nu}$ permanecen iguales a las de la Ec. (4.16), mientras que la variación del campo dinámico θ requiere que \mathcal{P} se anule. De esta forma, las ecuaciones de la teoría dinámica invariante bajos difeomorfismos, coincide con las ecuaciones de la teoría no invariante, donde θ es una cantidad externa prescrita.

Una diferencia importante entre las ecuaciones de campo modificadas [Ec. (4.16)] y las ecuaciones de Einstein estándar, es la aparición de primeras derivadas del tensor de Ricci, o equivalentemente, de terceras derivadas de la métrica en las ecuaciones de movimiento. La aparición de estas derivadas de orden superior tiene importantes repercusiones en los problemas de fronteras. Sabemos que la acción de Einstein-Hilbert no admite un problema de valores de frontera tipo Dirichlet, a menos que se incluya el término de borde de Gibbons-Hawking-York (GHY) [140, 141],

$$\mathcal{S}_{GHY} = \frac{1}{\kappa} \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3x \sqrt{h} K, \quad (4.23)$$

donde h es el determinante de la métrica inducida $h_{\mu\nu}$ sobre $\partial\mathcal{V}$, $K_{\mu\nu} = h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu}_{\beta} \nabla^{\alpha} n^{\beta}$ es la curvatura extrínseca, $K = K^{\mu}_{\mu}$ su traza, y n^{β} es la normal unitaria saliente a $\partial\mathcal{V}$. La variación del término GHY cancela los términos de borde que surgen cuando obtenemos las ecuaciones de movimiento, haciendo que la acción de Einstein-Hilbert sea verdaderamente estacionaria.

El análogo al término de borde GHY para el término de Chern-Simons se deriva en la Ref. [142], de tal forma que la acción total [Eq. (4.1)] tenga un problema de valores de frontera tipo Dirichlet bien formulado. La variación del término de Chern-Simons, dada


 Figura 4.1: Región sobre la que definimos la gravedad θ .

en la Ec. (4.15), contiene un término de borde que surge de integraciones por partes repetidas. Como se demuestra en la Ref. [142], la variación del término de borde,

$$\mathcal{S}_{bCS} = \frac{1}{2\kappa} \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3x \sqrt{h} \theta n_\mu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\alpha\beta} K_\nu{}^\lambda \nabla_\alpha K_{\beta\lambda} \quad (4.24)$$

cancela correctamente a dicho término. De esta manera, la gravedad de Chern-Simons no dinámica, admite un problema de valores de frontera tipo Dirichlet bien establecido cuando la acción [Ec. (4.1)] se suplementa con los términos de borde GHY y bCS.

4.2. Gravedad θ

En esta sección definimos la gravedad θ o $G\theta$, que es un caso particular de la gravedad de Chern-Simons, y es la teoría que discutiremos en este trabajo. Partimos de la acción (4.1) y consideramos un campo gravitacional en un espacio-tiempo $(3+1)$ -dimensional $\mathcal{M} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}$, donde \mathcal{U} es una variedad 3-dimensional, y \mathbb{R} es el eje temporal. El espacio \mathcal{U} se divide en dos regiones, \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , y suponemos que la región \mathcal{U}_1 se caracteriza por un valor constante $\theta = \theta_1$, mientras que la región \mathcal{U}_2 tiene un valor constante diferente $\theta = \theta_2$. Las variedades \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 se intersectan a lo largo de una interfaz 2-dimensional común Σ , tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ y $\Sigma = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, como se muestra en la Fig. 4.1. En analogía con el caso electromagnético de los capítulos anteriores, a la superficie Σ la llamaremos interfaz θ . Esta situación se expresa en la función característica

$$\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \theta_1 & , \quad \mathbf{x} \in \mathcal{U}_1 \\ \theta_2 & , \quad \mathbf{x} \in \mathcal{U}_2 \end{cases} . \quad (4.25)$$

Este es el escenario más simple en que θ no es un campo dinámico, pero toma valores constantes diferentes en dominios diferentes, es decir, tiene un salto finito a través de

la interfaz entre las dos regiones. En este esquema, el término θ en la acción no es un invariante topológico global puesto que está definido en una variedad con la interfaz Σ . Dentro de cada región \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 tenemos las ecuaciones de Einstein estándar, pero la discontinuidad en la superficie Σ introduce contribuciones distribucionales a las ecuaciones de movimiento que vienen del campo gravitacional mismo.

Usando la Ec. (4.25) junto con la definición de la Ec. (4.7) encontramos que la coordenada de encajamiento y su primera derivada son

$$v_\mu = \tilde{\theta} \delta(\Sigma) n_\mu \quad , \quad v_{\mu\nu} = \tilde{\theta} [n_\mu \partial_\nu \delta(\Sigma) + \delta(\Sigma) \nabla_\nu n_\mu] , \quad (4.26)$$

donde n_μ es la normal unitaria a la superficie Σ , que elegimos como saliente respecto de \mathcal{U}_1 , y $\tilde{\theta} = \theta_1 - \theta_2$. De acuerdo a los resultados previos, el tensor de Cotton [Ec. (4.6)] puede escribirse en coordenadas adaptadas a la superficie como

$$C^{\mu\nu} = -\frac{\tilde{\theta}}{2\sqrt{-g}} \left\{ \delta(\Sigma) [\epsilon^{n\mu\alpha\beta} \nabla_\alpha R^\nu{}_\beta - \Gamma_{n\sigma}^n {}^*R^{\sigma\mu\nu}] + \delta'(\Sigma) {}^*R^{n\mu\nu} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right\} , \quad (4.27)$$

donde la prima denota derivada respecto de la coordenada normal a Σ y el índice n se refiere a la dirección normal a Σ . La derivada de la distribución delta es consecuencia de las terceras derivadas del tensor métrico que aparecen en las ecuaciones de movimiento. La presencia de la función delta de Dirac y su derivada en la Ec. (4.27) implican que el tensor de Cotton está definido sólo en la superficie Σ y se anula en los cuerpos. Una consecuencia inmediata es que la constricción de Pontryagin [Ec. (4.17)] se satisface en los cuerpos. Sin embargo, debemos mirar cuidadosamente lo que sucede en la interfaz Σ para establecer la consistencia de la teoría. En realidad, las ecuaciones de campo de Einstein se valen en los cuerpos (\mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2), pero la interfaz θ modifica el comportamiento del campo gravitacional en Σ , actuando como una fuente de materia que depende del campo gravitacional mismo. Esta situación lleva de forma inevitable a la presencia de discontinuidades distribucionales en las ecuaciones de campo.

Las ecuaciones de campo modificadas [Ec. (4.16)], con el tensor de Cotton dado por la Ec. (4.27) junto con el hecho de que el tensor de Einstein contiene a lo más derivadas de segundo orden de la métrica, implican que (al menos algunas componentes) de la métrica y su primera derivada son discontinuas en Σ . Por lo tanto, la novedad aquí es que el término adicional de Chern-Simons en la acción [Ec. (4.1)] proporciona un mecanismo natural que lleva a discontinuidades métricas en relatividad general, donde las ecuaciones de campo dictan las condiciones de juntura para la métrica en la superficie. Como primer paso en esta dirección, en este trabajo analizamos la aproximación lineal de las ecuaciones de movimiento, que se espera tenga un comportamiento similar al de la ED θ [97, 98].

4.3. Ondas gravitacionales propagándose a través de la interfaz θ

El problema de la generación de ondas gravitacionales (OGs) en la gravedad de Chern-Simons con una coordenda de encajamiento no dinámica de tipo tiempo v_μ se estudió primero en la Ref. [81]. En un esquema más interesante, los autores en la Ref. [83] estudian el problema de la generación de OGs en la gravedad CS dinámica. En esta sección nos concentramos en analizar la propagación de OGs a través de la interfaz θ , pero no ponemos atención en su generación.

4.3.1. Gravedad θ a orden lineal

El punto de partida de esta sección son las ecuaciones de movimiento [Ec. (4.16)] en ausencia de materia

$$G^{\mu\nu} + C^{\mu\nu} = 0. \quad (4.28)$$

Ahora consideramos la versión linealizada de la ecuación anterior que surge de la expansión $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ de la métrica $g_{\mu\nu}$ alrededor de la métrica de Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$ a primer orden en ε , que es un parámetro asociado con lo pequeño de la perturbación métrica $h_{\mu\nu}$ relativo a la métrica de fondo.

Las ecuaciones de campo modificadas, a orden lineal en ε , se obtienen fácilmente y son consistentes con las encontradas en la Ref. [81]. En coordenadas adaptadas a la superficie, la Ec. (4.28) nos da

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial^\alpha h^\nu{}_\alpha + \partial^\nu \partial^\alpha h^\mu{}_\alpha - \partial^2 h^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu h^\alpha{}_\alpha + \eta^{\mu\nu} (\partial^2 h^\alpha{}_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}) &= \frac{\tilde{\theta}}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu} \times \\ \left[\delta(\Sigma) \partial_\alpha (\partial^\nu \partial^\rho h_{\rho\beta} - \partial^2 h^\nu{}_\beta) + \delta'(\Sigma) \partial_\alpha (\partial^\nu h^n{}_\beta - \partial^n h^\nu{}_\beta) \right] + (\mu \leftrightarrow \nu), \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $\partial^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \nabla^2 - \partial_t^2$ es el operador de D'Alembert. La condición de consistencia que requiere que la Ec. (4.29) tenga divergencia cero se demuestra a continuación. El lado izquierdo de la Ec. (4.29), siendo el tensor de Einstein linealizado, claramente satisface dicha condición. Para proceder separamos la contribución $D^{\mu\nu}$ del lado derecho de la Ec. (4.29) como sigue

$$D_1^{\mu\nu} = \frac{\tilde{\theta}}{2} \left[\epsilon^{3\alpha\beta\mu} \delta(z) \partial_\alpha (\partial^\nu \partial^\rho h_{\rho\beta} - \partial^2 h^\nu{}_\beta) + \epsilon^{3\alpha\beta\nu} \delta(z) \partial_\alpha (\partial^\mu \partial^\rho h_{\rho\beta} - \partial^2 h^\mu{}_\beta) \right], \quad (4.30)$$

$$D_2^{\mu\nu} = \frac{\tilde{\theta}}{2} \delta'(z) \left[\epsilon^{3\alpha\beta\mu} \partial_\alpha (\partial^\nu h^3{}_\beta - \partial^3 h^\nu{}_\beta) + \epsilon^{3\alpha\beta\nu} \partial_\alpha (\partial^\mu h^3{}_\beta - \partial^3 h^\mu{}_\beta) \right], \quad (4.31)$$

tal que $D^{\mu\nu} = D_1^{\mu\nu} + D_2^{\mu\nu}$. Aquí tomamos $\delta(\Sigma) = \delta(z)$ lo que implica que la dirección 3 es la componente normal a la interfaz θ . Tomando la divergencia de la Ec. (4.30) obtenemos

$$\partial_\mu D_1^{\mu\nu} = \frac{\tilde{\theta}}{2} \left\{ \epsilon^{3\alpha\beta\mu} \partial_\mu [\delta(z) \partial_\alpha (\partial^\nu \partial^\rho h_{\rho\beta} - \partial^2 h^\nu_\beta)] + \epsilon^{3\alpha\beta\nu} \partial_\mu [\delta(z) \partial_\alpha (\partial^\mu \partial^\rho h_{\rho\beta} - \partial^2 h^\mu_\beta)] \right\}. \quad (4.32)$$

El primer término del lado derecho de la Ec. (4.32) es idénticamente cero porque la derivada parcial ∂_μ no puede ser ∂_3 , y como tal, pasa a través de $\delta(z)$, implicando una contribución de la forma $\epsilon^{3\alpha\beta\mu} \partial_\mu \partial_\alpha = 0$. Nos quedamos con la contribución del segundo término, donde aplicando la derivada ∂_μ al producto indicado obtenemos

$$\partial_\mu D_1^{\mu\nu} = \frac{\tilde{\theta}}{2} \epsilon^{3\alpha\beta\nu} \left\{ [\partial_\mu \delta(z)] \partial_\alpha (\partial^\mu \partial^\rho h_{\rho\beta} - \partial^2 h^\mu_\beta) + \delta(z) \partial_\alpha \partial_\mu (\partial^\mu \partial^\rho h_{\rho\beta} - \partial^2 h^\mu_\beta) \right\}. \quad (4.33)$$

El último término del lado derecho de la Ec. (4.33) es idénticamente cero debido a la acción de ∂_μ , *i.e.*

$$\partial_\mu (\partial^\mu \partial^\rho h_{\rho\beta} - \partial^2 h^\mu_\beta) = \partial^2 \partial^\rho h_{\rho\beta} - \partial^2 \partial_\mu h^\mu_\beta = 0. \quad (4.34)$$

Finalmente, usando la relación $\partial_\mu \delta(z) = \delta'(z) \delta^3_\mu$ obtenemos

$$\partial_\mu D_1^{\mu\nu} = \frac{\tilde{\theta}}{2} \epsilon^{3\alpha\beta\nu} \delta'(z) \partial_\alpha (\partial^3 \partial^\rho h_{\rho\beta} - \partial^2 h^3_\beta). \quad (4.35)$$

Ahora vamos a considerar la divergencia de la segunda contribución $D_2^{\mu\nu}$, *i.e.*

$$\partial_\mu D_2^{\mu\nu} = \frac{\Delta\theta}{2} \partial_\mu \left\{ \delta'(z) [\epsilon^{3\alpha\beta\mu} \partial_\alpha (\partial^\nu h^3_\beta - \partial^3 h^\nu_\beta) + \epsilon^{3\alpha\beta\nu} \partial_\alpha (\partial^\mu h^3_\beta - \partial^3 h^\mu_\beta)] \right\}. \quad (4.36)$$

En este caso, la contribución a la divergencia de $\mu = 3$ es cero por simetría, de tal manera que ∂_μ de nuevo pasa a través de $\delta'(z)$, resultando

$$\partial_\mu D_2^{\mu\nu} = \frac{\tilde{\theta}}{2} \delta'(z) [\epsilon^{3\alpha\beta\mu} \partial_\mu \partial_\alpha (\partial^\nu h^3_\beta - \partial^3 h^\nu_\beta) + \epsilon^{3\alpha\beta\nu} \partial_\mu \partial_\alpha (\partial^\mu h^3_\beta - \partial^3 h^\mu_\beta)]. \quad (4.37)$$

El primer término en el lado derecho de la Ec. (4.37) es cero, y el segundo término se reduce a

$$\partial_\mu D_2^{\mu\nu} = \frac{\tilde{\theta}}{2} \epsilon^{3\alpha\beta\nu} \delta'(z) \partial_\alpha (\partial^2 h^3_\beta - \partial^3 \partial^\rho h_{\rho\beta}). \quad (4.38)$$

Recordando la expresión (4.35) para $\partial_\mu D_1^{\mu\nu}$ y sumando las dos contribuciones completamos la prueba de que la Ec. (4.29) tiene divergencia cero.

Ahora simplificamos las ecuaciones de campo usando la libertad de norma de la aproximación lineal. De aquí en adelante trabajamos en la norma transversa-sin traza (TT), definida por

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad h^\mu{}_\mu = 0 \quad , \quad U^\mu h_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (4.39)$$

donde U^μ es cualquier cuadrivector constante tipo tiempo. Aquí tomamos ventaja de que las ecuaciones de Einstein estándar se satisfacen en los cuerpos $\mathcal{U}_1 \setminus \Sigma$ y $\mathcal{U}_2 \setminus \Sigma$, en donde podemos fijar la norma TT en estas regiones de acuerdo a los pasos estándares [139]. Ocurre una simplificación importante si elegimos al vector tipo tiempo U^μ igual para ambas regiones. Como demostraremos a continuación, podemos hacer $h_{3\mu} = 0$ con la elección apropiada del cuadrivector U^μ . Sea $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$ la normal adaptada a la superficie Σ y consideremos una onda plana monocromática que incide en la interfaz θ desde la izquierda, a un ángulo α con respecto a la normal Σ , con cuadrimomento dado por $k^\mu = \omega(1, \sin \alpha, 0, \cos \alpha) = \omega \hat{k}^\mu$. Tomando $U^\mu = \hat{k}^\mu - \cos \alpha n^\mu = (1, \sin \alpha, 0, 0)$, tal que $U^\mu U_\mu = -\cos^2 \alpha < 0$, las condiciones de la norma TT implican que $n^\mu h_{\mu\nu} = h_{3\nu} = 0$, como se anticipó. Bajo estas elecciones, las ecuaciones de campo modificadas (4.29) adoptan la forma simple

$$\partial^2 h^{\mu\nu} = \frac{\tilde{\theta}}{2} \epsilon^{n\alpha\beta\mu} [\delta(\Sigma) \partial^2 + \delta'(\Sigma) \partial_n] \partial_\alpha h^\nu{}_\beta + (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (4.40)$$

Claramente la traza y las componentes μn de la expresión tensorial anterior son cero. También la condición de Lorentz $\partial^2 \partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$ se satisface del lado derecho y se sigue directamente de la condición de consistencia para la Ec. (4.40), que verificamos en el Apéndice E.

4.3.2. Condiciones de frontera inducidas por la interfaz θ

Para estudiar los efectos de la interfaz θ , suponemos que la superficie Σ en $z = 0$ divide al espacio \mathcal{U} en dos regiones \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , como se muestra en la Fig. (4.1). Para empezar, consideremos ondas planas monocromáticas θ , a un ángulo α con respecto a la normal a Σ , con 4-momento dado por $k^\mu = \omega(1, \sin \alpha, 0, \cos \alpha) = \omega \hat{k}^\mu$. En la norma TT, el tensor métrico $h_{\mu\nu}$ tiene la forma

$$h_{\mu\nu}(t, x, z) = \tilde{e}_{\mu\nu}^{(+)} h_+(t, x, z) + \tilde{e}_{\mu\nu}^{(\times)} h_\times(t, x, z). \quad (4.41)$$

Aquí h_+ y h_\times son las amplitudes de las dos componentes independientes de la onda y

$$\tilde{e}_{\mu\nu}^{(+)} = \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_{\mu\nu}^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

son los tensores de polarización correspondientes. La norma elegida nos da una identidad cuando proyectamos la Ec. (4.40) a lo largo de n^μ . La Ec. (4.40) acopla los modos de polarización $+$ y \times , que pueden desacoplarse introduciendo los modos de polarización circulares

$$h_{R/L} = \cos \alpha h_+ \pm i h_\times, \quad (4.43)$$

dándonos

$$\partial^2 h_{R/L} = \mp i \tilde{\theta} \cos \alpha \mathcal{O}(\partial_t, \partial_x, \partial_z) h_{R/L}, \quad (4.44)$$

donde

$$\mathcal{O}(\partial_t, \partial_x, \partial_z) = i [\delta(z) \partial^2 + \delta'(z) \partial_z] \partial_t \quad (4.45)$$

y $\partial^2 = \partial_x^2 + \partial_z^2 - \partial_t^2$. Por simplicidad se suprimió la dependencia en t, x, z de $h_{R/L}$. El operador \mathcal{O} introduce discontinuidades en $z = 0$ a través de las interacciones puntuales δ y δ' , que sugieren tomar el ansatz

$$h_{R/L} = h_{R/L}^{(1)} H(-z) + h_{R/L}^{(2)} H(z), \quad (4.46)$$

donde las perturbaciones métricas en cada región son

$$h_{R/L}^{(1)} = e^{ik_\mu x^\mu} + \mathcal{R}_{R/L} e^{i\tilde{k}_\mu x^\mu}, \quad h_{R/L}^{(2)} = \mathcal{T}_{R/L} e^{ik_\mu x^\mu}, \quad (4.47)$$

respectivamente. El vector $\tilde{k}^\mu = \omega(1, \sin \alpha, 0, -\cos \alpha)$ es el cuádrimomento de la onda reflejada y $\mathcal{R}_{R/L}$ y $\mathcal{T}_{R/L}$ son las amplitudes de reflexión y transmisión correspondientes. Nótese que las condiciones $\tilde{e}_{3\nu}^{(+,\times)} = 0$ son cruciales para garantizar la condición de Lorentz $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ en la forma $k^\mu \tilde{e}_{\mu\nu}^{(+,\times)} = 0$ y $\tilde{k}^\mu \tilde{e}_{\mu\nu}^{(+,\times)} = 0$. La dependencia (x, t) de todas las ondas es $\exp[i\omega(x \sin \alpha - t)]$, lo que permite hacer los reemplazos* $\partial_t \rightarrow -i\omega$ y $\partial_x \rightarrow +i\omega \sin \alpha$. De esta manera, la Ec. (4.44) se reduce a

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} \mp \omega \tilde{\theta} \cos \alpha \frac{d}{dz} \delta(z) \frac{d}{dz} \mp \omega^3 \tilde{\theta} \cos^3 \alpha \delta(z) - \omega^2 \cos^2 \alpha \right) h_{R/L} = 0. \quad (4.48)$$

Enfatizamos que en nuestra notación, $\frac{d}{dz}\delta(z)\frac{d}{dz} = \delta(z)\frac{d^2}{dz^2} + \delta'(z)\frac{d}{dz}$, en lugar de $\frac{d}{dz}\delta(z)\frac{d}{dz} = \delta'(z)\frac{d}{dz}$, como se considera en la Ref. [143]. Nuestro siguiente problema consiste en establecer las condiciones de frontera correctas que se deriven de la Ec. (4.48) con el fin de calcular las amplitudes de reflexión y transmisión. Esta situación se asemeja al caso de las interacciones puntuales en mecánica cuántica no relativista, que usualmente se describen por los llamados pseudo-potenciales de Fermi. Las interacciones puntuales se modelan por una interacción localizada de rango cero definida en un punto del espacio. Una de estas interacciones es el pseudo-potencial familiar $\delta(z)$, que está bien entendido y que tiene soluciones bien conocidas. Este tipo de interacciones pueden describirse de forma alternativa por el sistema libre en los reales quitando el punto singular, *i.e.* definida en la región $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, en donde la interacción queda codificada en las condiciones de frontera en el punto singular. Para el caso especial de la interacción δ , la ecuación de Schrödinger puede integrarse dos veces para obtener las condiciones de frontera en $z = 0$, que demandan la: (i) continuidad de la función de onda y (ii) discontinuidad de su primera derivada, consistentemente determinada por la integración correspondiente. Sin embargo, hay intentos por considerar interacciones más generales, todos ellos plagados con dificultades asociadas a la definición del término de interacción. Por ejemplo, hay controversia en cuanto al significado del pseudo-potencial $\delta'(z)$, en vista de que diferentes modelos de $\delta(z)$ producen diferentes coeficientes de reflexión y transmisión [144–148]. El origen de estas dificultades radica en el hecho de que las interacciones puntuales no son descritas por funciones ordinarias sino por distribuciones. Un enfoque matemáticamente riguroso para lidiar con interacciones puntuales generalizadas en mecánica cuántica no relativista, se debe a Kurasov y colaboradores en las Refs. [149, 150]. En este enfoque, las interacciones y las funciones de onda discontinuas se consideran como distribuciones, evitando la definición del término de interacción como el producto usual entre la función de onda y la energía potencial, puesto que este producto en general no está bien definido. Kurasov también aborda el problema de las interacciones puntuales desde la perspectiva de que éstas se definen como una extensión autoadjunta del operador $-d^2/dz^2$, que es un problema ampliamente estudiado en la literatura. Este punto de vista tiene la ventaja de que la definición del pseudo-potencial singular, depende sólo de las condiciones de frontera en el punto de singularidad y no de la elección de un modelo para la función delta y sus derivadas. Siguiendo el enfoque de Kurasov, los autores en la Ref. [151] estudian los estados ligados y los coeficientes de dispersión del pseudo potencial $-a\delta(z) + b\delta'(z)$.

En el problema que consideramos, tenemos que trabajar con una ecuación diferencial de segundo orden para la métrica, sujeta a la interacción puntual $\mathcal{O}(\partial_t, \partial_x, \partial_z)$ definida en la Ec. (4.45). El objetivo del resto de esta subsección es analizar la ecuación diferencial

unidimensional (4.48) siguiendo la prescripción de Kurasov, que se discute ampliamente en el Apéndice E en términos de pseudo-potenciales y funciones discontinuas. De esta manera, siguiendo las Refs. [143, 151], somos capaces de determinar las condiciones de frontera para la Ec. (4.48) mediante la manipulación estándar de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Para comenzar recordamos las expresiones (E.16) y (E.17), que surgen del enfoque de la Ref. [149], para el producto de una función $\psi(z)$ que es discontinua en $z = 0$ por $\delta(z)$ y $\delta'(z)$

$$\psi(z)\delta(z) = \overline{\psi(0)}\delta(z), \quad (4.49)$$

$$\psi(z)\delta'(z) = \overline{\psi(0)}\delta'(z) - \overline{\psi'(0)}\delta(z) \quad (4.50)$$

con

$$\overline{\chi(0)} = \frac{1}{2} [\chi(0^+) + \chi(0^-)]. \quad (4.51)$$

Aquí χ denota ya sea a ψ o ψ' , y $\chi(0^+)$ y $\chi(0^-)$ son los límites de $\chi(z)$ cuando z se aproxima a 0 por los lados positivo y negativo, respectivamente. Ahora estamos en posición de obtener el primer conjunto de relaciones para las condiciones de frontera en nuestro problema. Introduciendo las relaciones (4.49)-(4.50) en la ecuación de ondas con la interacción puntual (4.48) tenemos

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \cos^2 \alpha\right) h_{R/L} \mp \omega \tilde{\theta} \cos \alpha \left[\delta'(z) \overline{h'_{R/L}(0)} + \omega^2 \cos^2 \alpha \delta(z) \overline{h_{R/L}(0)}\right] = 0. \quad (4.52)$$

La primera condición de borde para la métrica en la interfaz θ puede obtenerse integrando la Ec. (4.52) en el intervalo $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ y tomando el límite $\varepsilon \rightarrow 0^+$. El resultado es

$$h'_{R/L}(0^+) - h'_{R/L}(0^-) = \mp \tilde{\theta} \omega^3 \cos^3 \alpha \overline{h_{R/L}(0)}, \quad (4.53)$$

donde se usaron las relaciones $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(z) dz = 1$ y $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta'(z) dz = 0$. Mientras tanto, integrando la Ec. (4.52) de $-L$ (con L positivo) a z obtenemos

$$h'_{R/L}(z) - h'_{R/L}(-L) + \omega^2 \cos^2 \alpha \int_{-L}^z h_{R/L}(z') dz' = \mp \tilde{\theta} \omega \cos \alpha \times \left[\delta(z) \overline{h'_{R/L}(0)} + \omega^2 \cos^2 \alpha H(z) \overline{h_{R/L}(0)}\right], \quad (4.54)$$

donde $H(z)$ es la función de Heaviside. Aquí se usaron las relaciones $\int_{-L}^z \delta(y) dy = H(z)$ y $\int_{-L}^z \delta'(y) dy = \delta(z)$. Integrando la Ec. (4.54) con respecto a z de $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$, y tomando

el límite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, encontramos

$$h_{R/L}(0^+) - h_{R/L}(0^-) = \mp \tilde{\theta} \omega \cos \alpha \overline{h'_{R/L}(0)}, \quad (4.55)$$

que es la segunda condición de borde para la perturbación métrica en Σ . Las condiciones de frontera (E.9) y (E.10) pueden escribirse como sigue

$$\begin{bmatrix} h_{R/L}(0^+) \\ h'_{R/L}(0^+) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - (\xi/2)^2} \begin{bmatrix} 1 + (\xi/2)^2 & \mp \xi / (\omega \cos \alpha) \\ \mp \xi \omega \cos \alpha & 1 + (\xi/2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{R/L}(0^-) \\ h'_{R/L}(0^-) \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

con $\xi \equiv \tilde{\theta} \omega^2 \cos^2 \alpha$. Como se demuestra en el Apéndice E, este resultado corresponde a la elección

$$X_1 = \mp \xi \omega \cos \alpha \quad , \quad X_4 = \pm \xi / (\omega \cos \alpha) \quad , \quad X_2 = X_3 = 0, \quad (4.57)$$

en el enfoque general de la Ref. [149]. Esto corrobora que el operador (4.45) pertenece a una de las familias que define una extensión autoadjunta del operador $-d^2/dz^2$. En otras palabras, elegimos las condiciones de frontera (4.56) para la ecuación (4.45) pidiendo que el operador

$$-\frac{d^2}{dz^2} \mp \tilde{\theta} \mathcal{O}(\omega, \alpha, \partial_z) = -\frac{d^2}{dz^2} \mp \omega \tilde{\theta} \cos \alpha \left[\frac{d}{dz} \delta(z) \frac{d}{dz} + \omega^2 \cos^2 \alpha \delta(z) \right] \quad (4.58)$$

sea autoadjunto. Ahora tenemos las herramientas para estudiar la propagación de OGs a través de la interfaz θ .

4.3.3. Dispersión de OGs por la interfaz θ

Es bien sabido que las ecuaciones de Einstein linealizadas en el vacío ($T^{\mu\nu} = 0$), en regiones lejanas de las fuentes, tienen soluciones de la forma

$$h^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (4.59)$$

que describen ondas gravitacionales planas, donde $A^{\mu\nu}$ son las componentes constantes de algún tensor independiente y $k^\mu = \omega(1, \sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ es el cuadrivector (nulo) de onda [139]. En esta sección usaremos esta solución simple para ilustrar los efectos de la interfaz θ en la propagación de OGs.

Suponiendo que la fuente que genera la onda está en el medio con $\theta = \theta_1$, la perturbación métrica propagándose en la dirección z y que incide en la superficie Σ está dada

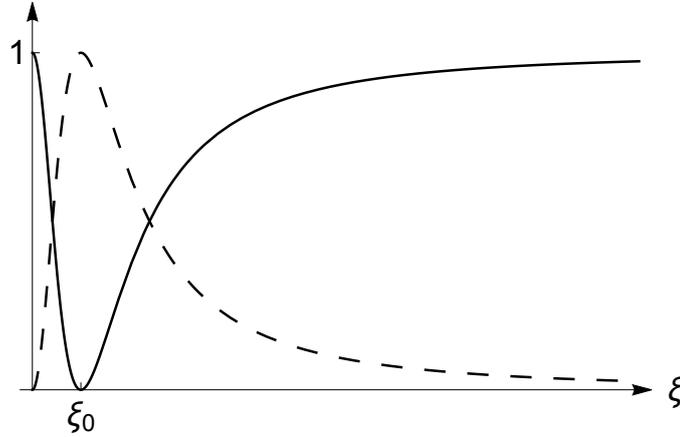


Figura 4.2: Coeficientes de transmisión (línea continua) y reflexión (línea discontinua), $|\mathcal{T}_{R/L}|^2$ y $|\mathcal{R}_{R/L}|^2$, respectivamente, como función del parámetro ξ .

por las Ecs. (4.46) y (4.47). Imponiendo las condiciones de borde para $h_{R/L}$ obtenemos

$$\mathcal{T}_{R/L}(\xi) = \frac{4 - \xi^2}{4 + \xi^2} \quad , \quad \mathcal{R}_{R/L}(\xi) = \pm i \frac{4\xi}{4 + \xi^2} \quad , \quad (4.60)$$

donde $\xi = \tilde{\theta}\omega^2 \cos^2 \alpha$. Podemos verificar fácilmente que $|\mathcal{T}_{R/L}|^2 + |\mathcal{R}_{R/L}|^2 = 1$, que es consistente con la conservación de la energía.

Volviendo a la analogía con la mecánica cuántica, recordemos en la dispersión unidimensional, la fracción de partículas que es transmitida (para un potencial arbitrario dado) en general se anula en el umbral, *i.e.* cuando la energía cinética de las partículas incidentes se aproxima a cero. Intuitivamente, esto ocurre porque el potencial es grande comparado con la energía (pequeña) de las partículas incidentes. Sin embargo, se ha demostrado que para un potencial que consiste de dos funciones delta de Dirac de intensidad arbitraria, una porción finita de las partículas se transmite en el umbral para una cierta elección de los parámetros que definen el potencial [152, 153]. En el problema que estamos estudiando, el único parámetro asociado con la interacción puntual en la Ec. (4.48) es $\tilde{\theta}$, y claramente nuestro resultado (4.60) sugiere una anomalía umbral para un valor arbitrario de $\tilde{\theta}$. En ausencia de la interfaz θ , nuestro resultado lleva a transmisión total y consecuentemente a la no reflexión, como es de esperarse. Sin embargo, este resultado también puede obtenerse en el límite $\omega \rightarrow \infty$, *i.e.* cuando la energía de las ondas incidentes es muy grande comparada con la intensidad del potencial $\tilde{\theta}$. La figura 4.2 muestra que el efecto de la interfaz θ se vuelve importante cuando $\tilde{\theta}\omega^2 \cos^2 \alpha \simeq 2$. Es notable que para $\omega^2 = 2/(\tilde{\theta} \cos^2 \alpha) = \omega_0^2$, la onda incidente es completamente reflejada, *i.e.* la interfaz θ juega el papel de espejo de ondas gravitacionales.

4.4. Propagación de OGs a través de una interfaz θ en Gravedad de Euler

Otro ejercicio interesante es estudiar el problema análogo con otro invariante topológico. En cuatro dimensiones, hay otro invariante escalar de segundo orden del tensor de Riemann, el invariante de Euler $\mathcal{E} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} {}^*R^{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\sigma}$, que podemos agregar a la acción de Einstein-Hilbert de la misma manera en que lo hicimos con el invariante de Pontryagin. En esta sección discutiremos brevemente esta extensión, a la que llamaremos gravedad de Euler, y sus efectos en la propagación de ondas gravitacionales. La variación de la acción de Euler

$$\mathcal{S}_E = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \left(\sqrt{-g}R + \frac{\theta}{4}\mathcal{E} \right) + \mathcal{S}_{mat}(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (4.61)$$

produce

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} (G^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} - \kappa T^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} + \delta\mathcal{S}_{BT}. \quad (4.62)$$

Aquí $E^{\mu\nu}$ es un tensor manifiestamente simétrico y sin traza, dado por

$$E^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} v_{\alpha\beta} ({}^{**}R^{\mu\alpha\nu\beta} + {}^{**}R^{\nu\alpha\mu\beta}), \quad (4.63)$$

al que llamaremos tensor de Euler. En esta expresión se definió el tensor dual doble de Riemann como

$${}^{**}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \epsilon^{\alpha\beta}{}_{\gamma\xi} {}^*R^{\mu\nu\gamma\xi}. \quad (4.64)$$

A partir de la Ec. (4.62) leemos las ecuaciones de campo como

$$G^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}. \quad (4.65)$$

Aquí no tomaremos en cuenta los términos de borde que aparecen en la Ec. (4.62). Como en el caso de la gravedad de Chern-Simons, la anulación de $\nabla_{\mu}E^{\mu\nu}$ es una condición de consistencia de las ecuaciones modificadas. Sin embargo, $E^{\mu\nu}$ no está covariantemente conservado, sino que tenemos

$$\nabla_{\mu}E^{\mu\nu} = \frac{\partial^{\nu}\theta}{2\sqrt{-g}}\mathcal{E}. \quad (4.66)$$

En completa analogía con el caso de Chern-Simons, soluciones de la gravedad de Euler exigen $\mathcal{E} = 0$. En regiones con interfaz θ (como se describió en la subsección 4.2), las ecuaciones de campo en ausencia de materia son

$$G^{\mu\nu} = -\frac{\tilde{\theta}}{2\sqrt{-g}} \nabla_{\beta} [\delta(\Sigma) n_{\alpha}] ({}^{**}R^{\mu\alpha\nu\beta} + {}^{**}R^{\nu\alpha\mu\beta}). \quad (4.67)$$

Para estudiar la propagación de OGs, consideraremos la gravedad de Euler linealizada. El tensor de Euler esta definido sólo en la interfaz θ , de manera que es cero en los cuerpos. En analogía con el caso de Chern-Simons, la consistencia de la Ec. (4.67) que indica que el lado derecho debe tener divergencia cero en la interfaz θ puede verificarse explícitamente en la aproximación lineal. Por lo tanto, las OGs son soluciones de la gravedad de Euler. Como lo hicimos en la subsección 4.3 consideremos una OG propagándose perpendicular al plano $z = 0$, que divide al espacio en dos regiones (ver la Fig. 1.1). Las ecuaciones de campo en la norma TT, definida en la Ec. (4.39), son

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = 2\tilde{\theta}\delta'(z) \partial_t^2 h_{\mu\nu}, \quad (4.68)$$

donde $\partial^2 = \partial_z^2 - \partial_t^2$. Aquí hacemos notar que, a diferencia del caso de la gravedad θ , las ecuaciones de movimiento no mezclan las amplitudes $+$ y \times , y también que sólo aparece la derivada de la función delta. Las condiciones de frontera para este caso pueden obtenerse fácilmente de la misma manera en que se hizo en la subsección 4.3.2. El resultado es

$$h'_{\mu\nu}(0^+) - h'_{\mu\nu}(0^-) = -2\tilde{\theta}\overline{\partial_t^2 h'_{\mu\nu}(0)}, \quad (4.69)$$

$$h_{\mu\nu}(0^+) - h_{\mu\nu}(0^-) = +2\tilde{\theta}\overline{\partial_t^2 h_{\mu\nu}(0)}, \quad (4.70)$$

donde la línea arriba denota el promedio en el punto de discontinuidad, como se definió en la Ec. (4.51).

Usando el mismo ansatz que en las Ecs. (4.46) y (4.47), junto con las condiciones de frontera de las Ecs. (4.69) y (4.70), la solución para las amplitudes de transmisión y reflexión en la gravedad de Euler, puede escribirse en términos de las soluciones en gravedad θ (4.60) como

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\text{Euler}}(\xi) = \mathcal{T}_{R/L}(2\xi) \quad , \quad \mathcal{R}_{\mu\nu}^{\text{Euler}} = \mp i\mathcal{R}_{R/L}(2\xi), \quad (4.71)$$

respectivamente, con $\xi = \tilde{\theta}\omega^2$.

En la notación de la Ec. (E.11), el pseudo-potencial H que corresponde al caso de la gravedad de Euler está dado por la siguiente elección de los parámetros

$$X_1 = X_3 = X_4 = 0 \quad , \quad X_2 = -2\xi, \quad (4.72)$$

lo que lleva a las condiciones de frontera

$$\begin{bmatrix} \psi(0_+) \\ \psi'(0_+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{1+\xi} & 0 \\ 0 & \frac{1+\xi}{1-\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(0_-) \\ \psi'(0_-) \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

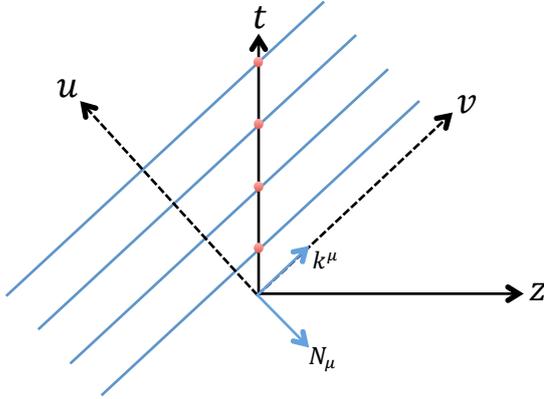


Figura 4.3: Caso de una onda que se propaga en la dirección $+z$ y que incide normalmente. Las líneas paralelas $u = cte$ corresponden a la fase $\Phi = z - t = cte$. El eje que sale de la página desde el origen representa al plano $x - y$. La hipersuperficie tipo espacio Σ es $z = 0$, con normal $n_\mu = (0, 0, 0, 1)$. Las hipersuperficies nulas N están dadas por $u = cte$, con normal $N_\mu = (-1, 0, 0, 1)$. Las superficies 2-dimensionales, donde se miden las áreas a un tiempo t , corresponden a la intersección $\Sigma \cap N$ y se muestran como puntos en el eje t .

que reproduce las obtenidas en las Ecs. (4.69) y (4.70).

4.5. Condición de coincidencia de áreas

En esta sección vamos a demostrar que la métrica discontinua en $z = 0$, que encontramos en la sección 4.3.3, satisface la condición de coincidencia de áreas sobre la superficie tipo espacio 2-dimensional que resulta de la intersección de la hipersuperficie nula N que describe la onda incidente y la hipersuperficie Σ que describe la interfaz θ . En la figura 4.3 ilustramos este proceso para el caso de incidencia normal ($\alpha = 0$), pero a continuación vamos a considerar el caso general. Recordemos que, en un sistema de coordenadas dado (η^2, η^3) , el área \mathcal{A} de una 2-superficie tipo espacio se calcula como

$$\mathcal{A} = \int \sqrt{\sigma} d\eta^2 d\eta^3. \quad (4.74)$$

En nuestro caso σ es el determinante de la 2-métrica inducida correspondiente σ_{AB} en $N \cap \Sigma$, y $A, B = 2, 3$. De esta manera, necesitamos demostrar que σ es continuo ahí, aún si la métrica σ_{AB} es discontinua. Como veremos en lo siguiente, la expresión para la 4-métrica discontinua $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(1)} H(-z) + g_{\mu\nu}^{(2)} H(z)$ es irrelevante para nuestros propósitos, de manera que la demostración que presentamos es válida para las extensiones topológicas de Chern-Simons y Euler de la relatividad general.

Recordemos que la hipersuperficie nula N , determinada por la OG incidente, está definida por las fases constantes $\Phi = \hat{k}_\mu x^\mu$, *i.e.*

$$\Phi = -t + x \sin \alpha + z \cos \alpha = C. \quad (4.75)$$

El vector normal a N es $N_\mu = \partial\Phi/\partial x^\mu = (-1, \sin\alpha, 0, \cos\alpha)$. Siguiendo la Ref. [154], introducimos en la hipersuperficie N un sistema de coordenadas $y^a = (\lambda, \eta^2, \eta^3)$, $a = 1, 2, 3$, de tal manera que su reparametrización $x^\mu = (t, x, y, z) = x^\mu(\lambda, \eta^2, \eta^3)$ satisface

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} = k^\mu = e_1^\mu \quad , \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \eta^A} = e_A^\mu \quad , \quad A = 2, 3 \quad , \quad (4.76)$$

con e_A^μ generando cualquier subespacio 2-dimensional ortogonal a k^μ . Las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} t &= \lambda - C \quad , \quad x = \lambda \sin\alpha + \eta^2 \cos\alpha, \\ y &= \eta^3 \quad , \quad z = \lambda \cos\alpha - \eta^2 \sin\alpha, \end{aligned} \quad (4.77)$$

son una parametrización de Φ y nos conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} &= (1, \sin\alpha, 0, \cos\alpha) = k^\mu, \\ e_2^\mu &= (0, \cos\alpha, 0, -\sin\alpha) \quad , \quad e_3^\mu = (0, 0, 1, 0). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Para el caso de incidencia normal tenemos $k^\mu = (1, 0, 0, 1)$ junto con $e_2^\mu = (0, 1, 0, 0)$ y $e_3^\mu = (0, 0, 1, 0)$, siendo estos últimos los dos vectores bases para el plano $x - y$ localizado en la hipersuperficie Σ para t constante. El siguiente paso consiste en obtener la 2-métrica inducida $\sigma_{AB} = g_{\mu\nu} e_A^\mu e_B^\nu$, en N . Recordando la expresión general

$$g_{\mu\nu}^{(1,2)} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon \tilde{e}_{\mu\nu}^{(+)} h_+^{(1,2)} + \varepsilon \tilde{e}_{\mu\nu}^{(\times)} h_\times^{(1,2)}, \quad (4.79)$$

donde los tensores de polarización están dados por la Ec. (4.42), un cálculo directo nos muestra que

$$\left[\sigma_{AB}^{(1,2)} \right] = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon h_+^{(1,2)} \cos^2 \alpha & \varepsilon h_\times^{(1,2)} \cos \alpha \\ \varepsilon h_\times^{(1,2)} \cos \alpha & 1 - \varepsilon h_+^{(1,2)} \cos^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

Dado que estamos considerando sólo la aproximación lineal en nuestros cálculos, ignoraremos los términos proporcionales a ε^2 . Esto nos lleva a

$$\sigma^{(1,2)} = \det[\sigma_{AB}^{(1,2)}] = 1 + O(\varepsilon^2). \quad (4.81)$$

Es decir, el determinante de la 2-métrica inducida es continuo en N , en particular en $N \cap \Sigma$, haciendo que la discontinuidad de la métrica no contribuya al cálculo de áreas de 2-superficies tipo espacio en N .

4.6. Discusión

Se estudió, a orden lineal, el acoplamiento de la gravedad de Einstein-Hilbert con los invariantes topológicos gravitacionales de Chern-Simons y Euler por medio del campo no dinámico θ que es constante a trozos en diferentes regiones del espacio, como se ilustra en la figura 4.1. Estas regiones están separadas por la interfaz común Σ , a la que denominamos interfaz θ . Las ecuaciones de movimiento para la métrica que describen cómo se propagan las OGs incluye contribuciones distribucionales del tipo $\delta(\Sigma)$ y $\delta'(\Sigma)$. De esta manera, la interfaz θ actúa como una fuente de materia en forma de cáscara delgada que está dada por las componentes del campo gravitacional mismo, de manera análoga a la conductividad de Hall en la superficie de aislantes topológicos [155]. Esto produce una métrica espacio-tiempo que es discontinua en Σ , con primeras derivadas discontinuas, que sin embargo satisface la condición de coincidencia de áreas propuesta en la Ref. [125], en $N \cap \Sigma$. Aquí N denota la hipersuperficie nula definida por la OG incidente. La aparición de la condición de coincidencia de áreas fue prevista en la Ref. [125].

Después de demostrar la consistencia de la Ec. (4.29), que describe la propagación de OG en $G\theta$, lidiamos con el problema de determinar las condiciones de frontera apropiadas que debemos imponer a la métrica y su derivada en la interfaz Σ , que tomamos como el plano $z = 0$. Para este fin demostramos que las ecuaciones que describen cómo se propagan las OGs se reduce a la Ec. (E.24), donde surgen contribuciones distribucionales del tipo $\delta(z)$ y $\delta'(z)$. La ecuación que resulta se identifica como una de las extensiones autoadjuntas del operador $-d^2/dz^2$, para el que se conocen las condiciones de borde en el punto de singularidad $z = 0$ [149].

Las condiciones de borde que obtenemos para la perturbación métrica las presentamos en la Ec. (4.56). Además, demostramos que el operador diferencial que aparece en la Ec. (4.48) corresponde a una configuración particular de los pseudo-potenciales de la Ec. (E.1). En otras palabras, demostramos que las interacciones puntuales que surgen del término de Chern-Simons corresponden a una extensión autoadjunta del operador $-d^2/dz^2$. Hacemos esto recuperando las condiciones de juntura correspondientes en cada caso después de manipular la Ec. (E.11) de la manera estándar. Fue necesario introducir las relaciones (4.49) y (4.50) para el producto de funciones discontinuas por δ y δ' , que surgen del enfoque distribucional en la Ref. [149].

Después se consideró la configuración estándar de ondas que inciden en la interfaz $z = 0$ desde la izquierda, es decir, consideramos amplitudes de reflexión para $z < 0$ y transmisión para $z > 0$, de acuerdo a las Ecs. (4.46) y (4.47). Demostramos que la ecuación de ondas (4.40) se desacopla para las polarizaciones circulares, dándonos la Ec.

(4.44) y finalmente aplicamos las condiciones de borde determinadas para calcular las amplitudes h_R y h_L . Las amplitudes de reflexión y transmisión están dadas en la Ec. (4.60), y sus gráficas se presentan en la figura 4.2 como función de la frecuencia de la onda.

Obtuvimos resultados similares cuando estudiamos la propagación de OGs en la gravedad de Euler, que consiste en extender la acción de Einstein-Hilbert con el invariante topológico de Euler por medio de un campo escalar, que es constante a trozos en diferentes regiones del espacio. Las contribuciones adicionales a las ecuaciones que describen la propagación de OGs en este caso también pueden interpretarse como otra extensión autoadjunta del operador $-d^2/dz^2$, con las condiciones de juntura dadas en la Ec. (4.73). Las amplitudes $+$ y \times no se mezclan en este caso y aunque las condiciones de frontera en el caso de Euler son muy diferentes de las obtenidas para el caso de Chern-Simons en la Ec. (4.56), un cálculo detallado nos muestra que las amplitudes de reflexión y transmisión están relacionadas de forma simple de acuerdo a las Ecs. (4.71).

En la sección 4.5 verificamos detalladamente que la métrica discontinua para las OGs que encontramos en $G\theta$ y la gravedad de Euler satisfacen la condición de coincidencia de áreas. La demostración depende fuertemente de las características generales de N , así como de la aproximación lineal que estamos considerando para estudiar la perturbación métrica. Las OGs que encontramos, junto con la interfaz θ que las produce, tienen muchas propiedades interesantes que no poseen los espacio-tiempos estándar de OGs: (i) En general, tenemos ondas reflejada y transmitida que son consecuencia de la discontinuidad de la métrica en $z = 0$. (ii) Para el valor $\omega_0 = \sqrt{2/(\tilde{\theta} \cos^2 \alpha)}$ de la frecuencia de la onda incidente, la interfaz θ actúa como un reflector perfecto, *i.e.* $\mathcal{T}_{R/L} = 0$. La existencia de espejos gravitacionales ya se había previsto en la Ref. [156]. (iii) Estas OGs de anomalía umbral, lo que significa que la amplitud de transmisión no se anula cuando la frecuencia de las ondas tiende a cero. Este comportamiento está presente en algunos casos de dispersión en mecánica cuántica unidimensional [153]. Un fenómeno similar se ha medido en algunos procesos de dispersión núcleo-núcleo en física nuclear [157]. (iv) Algunas componentes del tensor de Riemann linealizado son singulares en la interfaz Σ , *e.g.*

$$\begin{aligned} R_{0xzx} &= R_{0xzx}^{(1)} + R_{0xzx}^{(2)} - i\omega \frac{\xi^2}{4 + \xi^2} \delta(z) h_+^{(1)}, \\ R_{zxxx} &= \frac{\xi^2}{4 + \xi^2} \delta'(z) h_+^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Una extensión del análisis presentado en este trabajo para el caso no lineal, podría ser de interés, sobre todo debido a la posible relevancia de la condición de coincidencia de áreas en el problema de la gravedad cuántica [125, 136, 137].

Apéndice A

GF para una interfaz θ plana

Aquí derivamos las Ecs. (1.58)-(1.60) calculando explícitamente la transformada de Fourier de la GF reducida, cuya fórmula tomamos de (1.56). En el caso estándar ($\tilde{\theta} = 0$), la GF reducida en el vacío es [99]

$$\mathfrak{g}(z, z') = \frac{1}{2p} e^{-p|z-z'|}. \quad (\text{A.1})$$

En la representación de coordenadas, la GF correspondiente se obtiene calculando la transformada de Fourier de la Ec. (A.1) como se definió en la Ec. (2.7),

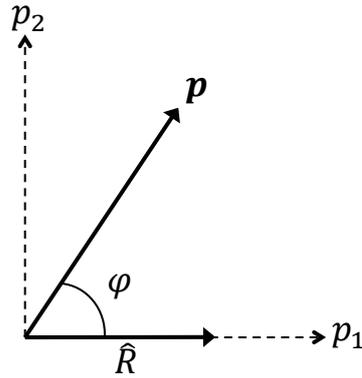
$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')_{\parallel}} \frac{1}{2p} e^{-p|z-z'|}. \quad (\text{A.2})$$

Esta integral doble se puede realizar de forma más simple si expresamos el elemento de área en coordenadas polares, $d^2\mathbf{p} = pdpd\varphi$ (en lugar de las coordenadas Cartesianas), y elegimos el eje p_x en la dirección del vector $\mathbf{R} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\parallel}$, como se muestra en la figura A.1. Notando que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{R} = pR \cos \varphi$, podemos escribir

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_0^{\infty} dp e^{-p|z-z'|} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ipR \cos \varphi} d\varphi \right\}. \quad (\text{A.3})$$

donde $R = |(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\parallel}|$. Las llaves encierran una representación integral de la función de Bessel $J_0(pR)$. La integral resultante,

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_0^{\infty} J_0(pR) e^{-p|z-z'|} dp, \quad (\text{A.4})$$


 Figura A.1: Plano \mathbf{p} .

se ha estudiado extensamente, ver por ejemplo la Ref. [105]. El resultado final es

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{R^2 + |z - z'|^2}} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (\text{A.5})$$

que es la GF de vacío en la representación de coordenadas [99]. A continuación usaremos un procedimiento similar para calcular las integrales que requerimos para establecer las Ecs. (1.58)-(1.59). Primero consideramos la componente G^0_0 . De la Ec. (1.56) encontramos

$$g^0_0(z, z') = \mathbf{g}(z, z') + A(z, z') p^2 \tilde{\theta} \mathbf{g}(a, a), \quad (\text{A.6})$$

donde la función $A(z, z')$ es

$$A(z, z') = -\frac{\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} p^{-2} e^{-pZ}, \quad (\text{A.7})$$

con la notación $Z = |z - a| + |z' - a|$. De esta manera, la componente G^0_0 está dada por

$$G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \int_0^\infty J_0(pR) e^{-pZ} dp, \quad (\text{A.8})$$

en la representación de coordenadas. Como antes, usamos la representación integral de la función de Bessel $J_0(pR)$ para realizar la integración angular. La integral resultante es la misma que en la Ec. (A.4), obteniendo así

$$G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + Z^2}}. \quad (\text{A.9})$$

Ahora evaluamos las componentes G^0_i . La GF reducida correspondiente es

$$g^0_i(z, z') = -i\epsilon_{0ij3}p^j A(z, z'), \quad (\text{A.10})$$

con $A(z, z')$ dado por la Ec. (A.7). Convenientemente, definimos el vector

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (I^1, I^2) = 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')_{\parallel}} \mathbf{p}p^{-2} e^{-pZ}, \quad (\text{A.11})$$

con $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$, en términos del que tenemos

$$G^0_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = i \frac{\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \epsilon_{0ij3} I^j(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (\text{A.12})$$

Calculamos la integral (A.11) en el mismo sistema de coordenadas de la figura A.1, y luego escribimos el resultado en forma vectorial. La integral puede escribirse como

$$\mathbf{I}_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2 \int_0^\infty dp e^{-pZ} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} e^{ipR \cos \varphi} d\varphi \right\}, \quad (\text{A.13})$$

donde el subíndice p indica que el vector \mathbf{p} está escrito en el sistema de coordenadas particular de la figura A.1. Las integrales angular y radial requeridas son bien conocidas, y el resultado final es

$$\mathbf{I}_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2i\hat{\mathbf{R}} \int_0^\infty J_1(pR) e^{-pZ} dp = \frac{2i}{R} \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \right) \hat{\mathbf{R}}. \quad (\text{A.14})$$

Como consecuencia del sistema de coordenadas elegido encontramos que $I_2 = 0$, de tal manera que el vector \mathbf{I}_p resulta paralelo a $\hat{\mathbf{R}}$. Este resultado puede generalizarse a un sistema de coordenadas arbitrario mediante una rotación,

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2i \frac{\mathbf{R}}{R^2} \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \right). \quad (\text{A.15})$$

Así encontramos

$$G^0_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{2\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} \frac{\epsilon_{0ij3} R^j}{R^2} \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \right). \quad (\text{A.16})$$

Para evaluar las componentes G^i_j primero observamos que la GF reducida correspondiente

puede escribirse como

$$g_j^i(z, z') = \eta_j^i g_0^0(z, z') + \tilde{\theta} \mathbf{g}(a, a) A(z, z') p^i p_j, \quad (\text{A.17})$$

donde g_0^0 esta dada en la Ec. (A.6). Ahora necesitamos calcular la transformada de Fourier de la Ec. (A.17) como se definió en (2.7). Sin embargo, el primer término ya se estudió antes y el resultado está dado por la Ec. (A.9), dejándonos a estudiar sólo el último término. Para ello introducimos el vector

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (K^1, K^2) = 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\parallel}} \frac{\mathbf{p}}{p} p^{-2} e^{-pZ}, \quad (\text{A.18})$$

de donde pueden obtenerse las integrales requeridas tomando derivadas espaciales. La integral (A.18) puede evaluarse de nuevo en el sistema de coordenadas particular de la figura A.1. En las coordenadas polares definidas en el plano \mathbf{p} la integral se lee como

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2 \int_0^\infty \frac{dp}{p} e^{-pZ} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} e^{ipR \cos \varphi} d\varphi \right\}. \quad (\text{A.19})$$

Notamos que el término entre llaves, es una representación integral de la función de Bessel $J_1(pR)$. La integral resultante es conocida y el resultado final es

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2i \int_0^\infty \frac{dp}{p} J_1(pR) e^{-pZ} \hat{\mathbf{R}} = 2i \frac{\sqrt{R^2 + Z^2} - Z}{R} \hat{\mathbf{R}}, \quad (\text{A.20})$$

donde $\hat{\mathbf{R}}$ es el vector unitario que se muestra en la figura A.1. La generalización a un sistema de coordenadas arbitrario es entonces

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2i \frac{\sqrt{R^2 + Z^2} - Z}{R^2} \mathbf{R}. \quad (\text{A.21})$$

Las integrales requeridas contienen el término $p^i p_j$, que puede generarse a partir de (A.18) como sigue

$$i \partial_j K^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_{\parallel}} \frac{p^i p_j}{p} p^{-2} e^{-pZ}. \quad (\text{A.22})$$

Usando la forma final de $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, dada por la Ec. (A.21), se verifica la condición de consistencia $\partial_1 K^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \partial_2 K^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ requerida por los términos cruzados que involucran $p^1 p_2 = p^2 p_1 = -p_x p_y$. De los resultados anteriores, las componentes G_j^i de la matriz de

GF pueden escribirse, en la representación de coordenadas, como

$$G^i_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \eta^i_j G^0_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \frac{i}{2} \frac{\tilde{\theta}^2}{4 + \tilde{\theta}^2} \partial_j K^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (\text{A.23})$$

Estos resultados establecen las Ecs. (1.60).

Apéndice B

GF para una interfaz θ esférica

En esta sección, construimos la GF en coordenadas esféricas para la configuración que se muestra que la figura 1.5, donde la interfaz θ es la superficie de una esfera de radio a con centro en el origen. Aquí las coordenadas adaptadas son las coordenadas esféricas. Las componentes de la matriz de GF son solución de la ecuación diferencial

$$\left[-\eta^\mu_\alpha \nabla^2 - i \frac{\tilde{\theta}}{a} \delta(r-a) (\eta^\mu_0 \eta^k_\alpha - \eta^{\mu k} \eta^0_\alpha) \hat{\mathbf{L}}_k \right] G^\alpha_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \eta^\mu_\nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{B.1})$$

con $k = 1, 2, 3$. Aquí $\hat{\mathbf{L}}_k$ son las componentes del operador de momento angular. Dado que la relación de completéz de los armónicos esféricos es

$$\delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'), \quad (\text{B.2})$$

buscaremos una solución de la forma

$$G^\mu_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sum_{m'=-l'}^{+l'} g_{ll'mm',\nu}^\mu(r, r') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\vartheta', \varphi'), \quad (\text{B.3})$$

donde $g_{ll'mm',\nu}^\mu(r, r')$ es la GF reducida, análoga a $g^\mu_\nu(z, z')$ en el caso de simetría plana. El operador en el lado izquierdo de la Ec. (B.1) conmuta con $\hat{\mathbf{L}}^2$, de tal manera que

$$g_{ll'mm',\nu}^\mu(r, r') = \delta_{ll'} g_{lmm',\nu}^\mu(r, r'). \quad (\text{B.4})$$

En el caso límite $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ los elementos de matriz adquieren la forma simple $g_{lm,\nu}^\mu(r, r') =$

$\eta^\mu_\nu \mathbf{g}_l(r, r')$, where $\mathbf{g}_l(r, r')$ es solución de la ecuación diferencial

$$\hat{\mathcal{O}}_r \mathbf{g}_l(r, r') = \frac{\delta(r - r')}{r^2}, \quad (\text{B.5})$$

donde el operador radial es

$$\hat{\mathcal{O}}_r = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (\text{B.6})$$

La solución de la Ec. (B.5) para diferentes configuraciones es conocida (ver por ejemplo la Ref. [99]). En el vacío, con la condición de borde al infinito, la solución es

$$\mathbf{g}_l(r, r') = \frac{r^l_{<}}{r^{l+1}_{>}} \frac{1}{2l+1}, \quad (\text{B.7})$$

donde $r_>$ ($r_<$) es el mayor (menor) entre r y r' . La sustitución de la Ec. (B.7) en la Ec. (B.3) reproduce correctamente el resultado bien conocido $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$.

Ahora nos enfocamos en determinar las componentes de la matriz de GF en la Ec. (B.1). El método que emplearemos es similar al que se usó para resolver el caso con simetría plana, aunque las técnicas matemáticas requeridas son más sutiles debido a que la ecuación diferencial contiene las componentes del operador de momento angular.

Sustituyendo la Ec. (B.3) en la Ec. (B.1) y usando $-\nabla^2 \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_r$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\eta^\mu_\alpha \hat{\mathcal{O}}_r - i \frac{\tilde{\theta}}{a} \delta(r-a) (\eta^\mu_0 \eta^k_\alpha - \eta^{\mu k} \eta^0_\alpha) \hat{\mathbf{L}}_k \right] g_{lmm',\nu}^\alpha(r, r') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm'}^*(\vartheta', \varphi') \\ = \eta^\mu_\nu \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm'}^*(\vartheta', \varphi') \frac{\delta(r-r')}{r^2} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

La independencia lineal de los armónicos esféricos $Y_{lm'}^*(\vartheta', \varphi')$ implica

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\eta^\mu_\alpha \hat{\mathcal{O}}_r - i \frac{\tilde{\theta}}{a} \delta(r-a) (\eta^\mu_0 \eta^k_\alpha - \eta^{\mu k} \eta^0_\alpha) \hat{\mathbf{L}}_k \right] g_{lmm',\nu}^\alpha(r, r') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\ = \eta^\mu_\nu \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \frac{\delta(r-r')}{r^2} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Ahora multiplicamos la Ec. (B.9) por $Y_{l''m''}^*(\vartheta', \varphi')$ a la izquierda, e integramos sobre el ángulo sólido $d\Omega(\vartheta, \varphi)$. Usando las propiedades de los armónicos esféricos

$$\langle l''m'' | lm \rangle = \delta_{l''l} \delta_{m''m}, \quad \langle l''m'' | \hat{\mathbf{L}}_k | lm \rangle = \delta_{l''l} \langle l''m'' | \hat{\mathbf{L}}_k | l''m \rangle, \quad (\text{B.10})$$

donde

$$\langle lm | \hat{\mathbf{L}}_k | lm'' \rangle = \int_{\Omega} Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \hat{\mathbf{L}}_k Y_{lm''}(\vartheta, \varphi) d\Omega, \quad (\text{B.11})$$

obtenemos

$$\hat{\mathcal{O}}_r g_{lmm',\nu}^{\mu}(r, r') - \eta^{\mu}_{\nu} \frac{\delta(r-r')}{r^2} \delta_{mm'} = i \frac{\tilde{\theta}}{a} \delta(r-a) (\eta^{\mu}_0 \eta^k_{\alpha} - \eta^{\mu k} \eta^0_{\alpha}) \times \sum_{m''=-l}^{+l} \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_k | lm'' \rangle g_{lm''m',\nu}^{\alpha}(r, r'), \quad (\text{B.12})$$

donde se renombraron los índices $l'' \rightarrow l$ y $m'' \leftrightarrow m$.

La ecuación resultante puede integrarse usando la GF reducida $\mathfrak{g}_l(r, r')$ que satisface la Ec. (B.5), resultando

$$g_{lmm',\nu}^{\mu}(r, r') = \eta^{\mu}_{\nu} \mathfrak{g}_l(r, r') \delta_{mm'} + ia\tilde{\theta} (\eta^{\mu}_0 \eta^k_{\alpha} - \eta^{\mu k} \eta^0_{\alpha}) \mathfrak{g}_l(r, a) \times \sum_{m''=-l}^{+l} g_{lm''m',\nu}^{\alpha}(a, r') \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_k | lm'' \rangle. \quad (\text{B.13})$$

Esta es una ecuación algebraica que debemos resolver para las diferentes componentes. Con este fin, separamos la Ec. (B.13) en sus componentes con $\mu = 0$ Y $\mu = k$;

$$g_{lmm',\nu}^0(r, r') = \eta^0_{\nu} \mathfrak{g}_l(r, r') \delta_{mm'} + ia\tilde{\theta} \mathfrak{g}_l(r, a) \sum_{k=1}^3 \sum_{m''=-l}^{+l} g_{lm''m',\nu}^k(a, r') \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_k | lm'' \rangle, \quad (\text{B.14})$$

$$g_{lmm',\nu}^k(r, r') = \eta^k_{\nu} \mathfrak{g}_l(r, r') \delta_{mm'} + ia\tilde{\theta} \mathfrak{g}_l(r, a) \sum_{m''=-l}^{+l} g_{lm''m',\nu}^0(a, r') \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_k | lm'' \rangle, \quad (\text{B.15})$$

donde el segundo término del lado derecho produce un acoplamiento entre dos tipos de componentes. Ahora evaluamos en $r = a$ la Ec. (B.15) y luego sustituimos el resultado en la Ec. (B.14) para obtener

$$g_{lmm',\nu}^0(r, r') = \eta^0_{\nu} \mathfrak{g}_l(r, r') \delta_{mm'} + ia\tilde{\theta} \mathfrak{g}_l(r, a) \mathfrak{g}_l(a, r') \langle lm | \eta^k_{\nu} \hat{\mathbf{L}}_k | lm' \rangle - a^2 \tilde{\theta}^2 l(l+1) \mathfrak{g}_l(a, a) \mathfrak{g}_l(r, a) g_{lmm',\nu}^0(a, r') \quad (\text{B.16})$$

donde se uso el resultado

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{m'=-l}^{+l} \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_k | lm' \rangle \langle lm' | \hat{\mathbf{L}}_k | lm'' \rangle = \sum_{k=1}^3 \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_k^2 | lm'' \rangle = l(l+1) \delta_{mm''}. \quad (\text{B.17})$$

Ahora evaluamos la Ec. (B.16) en $r = a$ y la resolvemos para $g_{lmm',\nu}^0(a, r')$, obteniendo

$$g_{lmm',\nu}^0(a, r') = \frac{\eta_{\nu}^0 \delta_{mm'} + ia\tilde{\theta} \mathbf{g}_l(a, a) \sum_{k=1}^3 \langle lm | \eta_{\nu}^k \hat{\mathbf{L}}_k | lm' \rangle}{1 + a^2 \tilde{\theta}^2 l(l+1) \mathbf{g}_l^2(a, a)} \mathbf{g}_l(a, r'), \quad (\text{B.18})$$

que reinsertamos nuevamente en la Ec. (B.16) para obtener el resultado final

$$g_{lmm',\nu}^0(r, r') = \eta_{\nu}^0 \delta_{mm'} \left[\mathbf{g}_l(r, r') - a^2 \tilde{\theta}^2 l(l+1) S_l(r, r') \right] + ia\tilde{\theta} S_l(r, r') \langle lm | \eta_{\nu}^k \hat{\mathbf{L}}_k | lm' \rangle. \quad (\text{B.19})$$

donde la función $S_l(r, r')$ se definió en la Ec. (1.66).

Las componentes restantes pueden calcularse directamente. La sustitución de la Ec. (B.18) en la Ec. (B.15) produce

$$g_{lmm',\nu}^k(r, r') = \eta_{\nu}^k \mathbf{g}_l(r, r') \delta_{mm'} + ia\tilde{\theta} S_l(r, r') \eta_{\nu}^0 \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_k | lm' \rangle - a^2 \tilde{\theta}^2 l(l+1) \mathbf{g}_l(a, a) S_l(r, r') \langle lm | \eta_{\nu}^r \hat{\mathbf{L}}_k \hat{\mathbf{L}}_r | lm' \rangle. \quad (\text{B.20})$$

Se puede verificar que $g_{lmm',k}^0(r, r') = g_{lmm',0}^k(r, r')$. De esta forma la solución general puede escribirse de forma compacta como

$$g_{lmm',\nu}^{\mu}(r, r') = \eta_{\nu}^{\mu} \mathbf{g}_l(r, r') \delta_{mm'} - a^2 \tilde{\theta}^2 l(l+1) \mathbf{g}_l(a, a) S_l(r, r') \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_{\mu} \hat{\mathbf{L}}_{\nu} | lm' \rangle + ia\tilde{\theta} S_l(r, r') (\eta_{\nu}^{\mu} \Gamma_{\nu}^{\alpha} + \Gamma^{\mu\alpha} \eta_{\nu}^0) \langle lm | \hat{\mathbf{L}}_{\alpha} | lm' \rangle \quad (\text{B.21})$$

donde $\hat{\mathbf{L}}_0$ es el operador identidad y $\Gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \eta_{\nu}^{\mu} \eta_0^{\nu}$.

Apéndice C

GF para una interfaz θ cilíndrica

Ahora nos concentramos en construir la GF en coordenadas cilíndricas para la configuración que se muestra en la figura 1.6, donde la interfaz θ es la superficie de un cilindro de radio a con eje de simetría a lo largo de la dirección z . Las componentes de la GF son solución de

$$\left[-\eta^\mu{}_\nu \nabla^2 - \tilde{\theta} \delta(\rho - a) n_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\beta}{}_\nu \partial_\beta \right] G^\nu{}_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \eta^\mu{}_\sigma \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{C.1})$$

donde $n_\alpha = (0, \cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ es la normal a la interfaz θ . Dada la relación de completitud

$$\delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \delta_{mm'} e^{i(m\varphi - m'\varphi')}, \quad (\text{C.2})$$

buscaremos una solución de la forma

$$G^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} g_{mm',\nu}^\mu(\rho, \rho'; k) e^{i(m\varphi - m'\varphi')}, \quad (\text{C.3})$$

donde $g_{mm',\nu}^\mu(\rho, \rho'; k)$ es la GF reducida, análoga a $g^\mu{}_\nu(z, z')$ en el caso con simetría plana.

En el caso límite $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ los elementos de matriz toman la forma simple $g_{mm',\nu}^\mu(\rho, \rho'; k) = \eta^\mu{}_\nu \delta_{mm'} \mathfrak{g}_m(\rho, \rho'; k)$, donde $\mathfrak{g}_m(\rho, \rho'; k)$ es solución de

$$\hat{\mathcal{O}}_\rho^{(m)} \mathfrak{g}_m(\rho, \rho'; k) = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho}, \quad (\text{C.4})$$

con el operador radial definido por

$$\hat{\mathcal{O}}_\rho^{(m)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{m^2}{\rho^2} + k^2. \quad (\text{C.5})$$

La solución a la Ec. (C.4) en el vacío, con la condición de borde estándar al infinito, es

$$\mathfrak{g}_m(\rho, \rho'; k) = I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}), \quad (\text{C.6})$$

donde $\rho_{>}$ ($\rho_{<}$) es el mayor (menor) entre ρ y ρ' . Aquí I_m y K_m son las funciones de Bessel modificadas de primero y segundo tipo, respectivamente. La sustitución de la Ec. (C.6) en la Ec. (C.3) reproduce correctamente el resultado ya conocido $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ para la GF en el vacío.

Ahora nos enfocamos en resolver la Ec. (C.1) para las componentes de la matriz de GF. Para ello, primero observamos que el operador adicional en la Ec. (C.1) no contiene derivadas radiales, sino sólo derivadas respecto a las coordenadas z y φ . Esto se ve claramente a partir del siguiente resultado

$$n_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\beta} \nu \partial_\beta = (\cos \varphi \epsilon^{1\mu 3} \nu + \sin \varphi \epsilon^{2\mu 3} \nu) \partial_z + \epsilon^{1\mu 2} \nu \frac{1}{\rho} \partial_\varphi. \quad (\text{C.7})$$

Sustituyendo la Ec. (C.3) en la Ec. (C.1) y usando $\partial_z \rightarrow ik$, $\partial_\varphi \rightarrow im$, $-\nabla^2 \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_\rho^{(m)}$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{1}{2\pi} \sum_{m,m'=-\infty}^{+\infty} e^{i(m\varphi-m'\varphi')} \left\{ \eta_\nu^\mu \hat{\mathcal{O}}_\rho^{(m)} - i\tilde{\theta} \delta(\rho-a) \left[k (\cos \varphi \epsilon^{1\mu 3} \nu + \sin \varphi \epsilon^{2\mu 3} \nu) + \epsilon^{1\mu 2} \nu \frac{m}{\rho} \right] \right\} g_{mm',\sigma}^\nu = \eta_\sigma^\mu \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{1}{2\pi} \sum_{m,m'=-\infty}^{+\infty} \delta_{mm'} e^{i(m\varphi-m'\varphi')} \quad (\text{C.8})$$

Usando la independencia lineal de $e^{-im'\varphi'}$ y $e^{-ikz'}$ nos quedamos con la ecuación

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \left\{ \eta_\nu^\mu \hat{\mathcal{O}}_\rho^{(m)} - i\tilde{\theta} \delta(\rho-a) \left[k (\cos \varphi \epsilon^{1\mu 3} \nu + \sin \varphi \epsilon^{2\mu 3} \nu) + \epsilon^{1\mu 2} \nu \frac{m}{\rho} \right] \right\} g_{mm',\sigma}^\nu = \eta_\sigma^\mu \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{mm'} e^{im\varphi} \quad (\text{C.9})$$

En analogía con el caso esférico, multiplicamos la Ec. (C.9) por $e^{-im''\varphi}$ a la izquierda e integramos respecto a φ . Después de usar las relaciones

$$\delta_{mm'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi, \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned}
 A_{mm'',\nu}^\mu &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{im\varphi} (\cos \varphi \epsilon^{1\mu 3}_\nu + \sin \varphi \epsilon^{2\mu 3}_\nu) e^{-im''\varphi} \\
 &= \frac{1}{2} [\delta_{m,m''-1} \tilde{\epsilon}^\mu_\nu{}^* + \delta_{m,m''+1} \tilde{\epsilon}^\mu_\nu], \tag{C.11}
 \end{aligned}$$

donde $\tilde{\epsilon}^\mu_\nu = \epsilon^{1\mu 3}_\nu + i\epsilon^{2\mu 3}_\nu$, la Ec. (C.9) se simplifica a

$$\hat{\mathcal{O}}_\rho^{(m)} g_{mm',\sigma}^\mu - i\tilde{\theta}\delta(\rho - a) \left[k \sum_{m''=-\infty}^{+\infty} A_{m''m,\nu}^\mu g_{m''m',\sigma}^\nu + \epsilon^{1\mu 2}_\nu \frac{m}{\rho} \delta_{mm'} g_{mm',\sigma}^\nu \right] = \eta^\mu_\sigma \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta_{mm'}, \tag{C.12}$$

donde hemos renombrado los índices $m'' \leftrightarrow m$.

La ecuación resultante puede integrarse usando la GF en el vacío $\mathfrak{g}_m(\rho, \rho'; k)$, que satisface la Ec. (C.4), con el resultado

$$\begin{aligned}
 g_{mm',\sigma}^\mu(\rho, \rho') &= \eta^\mu_\sigma \delta_{mm'} \mathfrak{g}_m(\rho, \rho') + i\tilde{\theta} m \epsilon^{1\mu 2}_\nu \mathfrak{g}_m(\rho, a) g_{mm',\sigma}^\nu(a, \rho') \\
 &\quad + i\tilde{\theta} k a \mathfrak{g}_m(\rho, a) \sum_{m''=-\infty}^{+\infty} A_{m''m,\nu}^\mu g_{m''m',\sigma}^\nu(a, \rho'). \tag{C.13}
 \end{aligned}$$

Por simplicidad en la notación suprimimos la dependencia en k de la GF. Ahora debemos resolver para las componentes. Para ello observamos que las componentes no cero de $A_{mm'',\nu}^\mu$ son

$$A_{mm'',0}^1 = A_{mm'',1}^0 = +\frac{i}{2} (\delta_{m,m''+1} - \delta_{m,m''-1}), \tag{C.14}$$

$$A_{mm'',0}^2 = A_{mm'',2}^0 = -\frac{1}{2} (\delta_{m,m''+1} + \delta_{m,m''-1}). \tag{C.15}$$

Este resultado nos permite separar la Ec. (C.13) en sus componentes con $\mu = 0$, $\mu = 3$ y $\mu = j = 1, 2$, obteniendo

$$\begin{aligned}
 g_{mm',\sigma}^0(\rho, \rho') &= \eta^0_\sigma \delta_{mm'} \mathfrak{g}_m(\rho, \rho') + i\tilde{\theta} m \mathfrak{g}_m(\rho, a) g_{mm',\sigma}^3(a, \rho') \\
 &\quad + i\tilde{\theta} k a \mathfrak{g}_m(\rho, a) \sum_{m''=-\infty}^{+\infty} A_{m''m,i}^0 g_{m''m',\sigma}^i(a, \rho'), \tag{C.16}
 \end{aligned}$$

$$g_{mm',\sigma}^3(\rho, \rho') = \eta^3_\sigma \delta_{mm'} \mathfrak{g}_m(\rho, \rho') + i\tilde{\theta} m \mathfrak{g}_m(\rho, a) g_{mm',\sigma}^0(a, \rho'), \tag{C.17}$$

$$g_{mm',\sigma}^j(\rho, \rho') = \eta^j_\sigma \delta_{mm'} \mathfrak{g}_m(\rho, \rho') + i\tilde{\theta} k a \mathfrak{g}_m(\rho, a) \sum_{m''=-\infty}^{+\infty} A_{m''m,0}^j g_{m''m',\sigma}^0(a, \rho'). \tag{C.18}$$

donde $i = 1, 2$.

Evaluamos las Ecs. (C.17) y (C.18) en $\rho = a$, y sustituímos el resultado en la Ec.

(C.16) para obtener

$$g_{mm',\sigma}^0(\rho, \rho') = \eta_\sigma^0 \delta_{mm'} \mathfrak{g}_m(\rho, \rho') + i\tilde{\theta} [m\delta_{mm'}\eta_\sigma^3 + kaA_{m'm,\sigma}^0] \mathfrak{g}_m(\rho, a) \mathfrak{g}_{m'}(a, \rho') - \tilde{\theta}^2 \mathfrak{g}_m(\rho, a) \mathfrak{f}_m(k) g_{mm',\sigma}^0(a, \rho'), \quad (\text{C.19})$$

donde se definió

$$\mathfrak{f}_m(k) = m^2 \mathfrak{g}_m(a, a) + \frac{k^2 a^2}{2} [\mathfrak{g}_{m+1}(a, a) + \mathfrak{g}_{m-1}(a, a)] \quad (\text{C.20})$$

Para derivar la Ec. (C.19) se usó el resultado

$$\sum_{i=1}^2 A_{mm'',i}^0 A_{m'm,0}^i = \frac{1}{2} (\delta_{m,m''+1} \delta_{m',m-1} + \delta_{m,m''-1} \delta_{m',m+1}), \quad (\text{C.21})$$

que puede verificarse directamente de las Ecs. (C.14)-(C.15).

Resolviendo para $g_{mm',\sigma}^0(a, \rho')$ evaluando la Ec. (C.19) en $\rho = a$ e insertando el resultado de nuevo en esta ecuación obtenemos

$$g_{mm',\sigma}^0(\rho, \rho') = \eta_\sigma^0 \delta_{mm'} \left[\mathfrak{g}_m(\rho, \rho') - \tilde{\theta}^2 \mathfrak{f}_m(k) C_{mm}(\rho, \rho') \right] + i\tilde{\theta} (m\delta_{mm'}\eta_\sigma^3 + kaA_{m'm,\sigma}^0) C_{mm'}(\rho, \rho'), \quad (\text{C.22})$$

donde la función $C_{mm'}(\rho, \rho')$ se definió en la Ec. (1.75).

Las componentes restantes pueden calcularse de la misma manera. La sustitución de $g_{mm',\sigma}^0(a, \rho')$ en las Ecs. (C.17) y (C.18) nos da

$$g_{mm',\sigma}^3(\rho, \rho') = \eta_\sigma^3 \delta_{mm'} \left[\mathfrak{g}_m(\rho, \rho') - m^2 \tilde{\theta}^2 \mathfrak{g}_m(a, a) C_{mm}(\rho, \rho') \right] + im\tilde{\theta} \left(\eta_\sigma^0 + ika\tilde{\theta} A_{mm',\sigma}^0 \right) C_{mm'}(\rho, \rho'), \quad (\text{C.23})$$

$$g_{mm',\sigma}^i(\rho, \rho') = \eta_\sigma^i \delta_{mm'} \mathfrak{g}_m(\rho, \rho') + ika\tilde{\theta} [\eta_\sigma^0 + i\eta_\sigma^3 m' \mathfrak{g}_{m'}(a, a)] A_{m'm,0}^i C_{m'm}(\rho', \rho) - \tilde{\theta}^2 k^2 a^2 \mathfrak{g}_m(\rho, a) \sum_{m''=-\infty}^{+\infty} A_{m'm,0}^j A_{m'm'',\sigma}^0 C_{m''m'}(a, \rho'). \quad (\text{C.24})$$

Estos resultados establecen las Ecs. (1.71)-(1.73).

Apéndice D

Técnica de Schwinger

Partimos de la ecuación diferencial que satisface el potencial escalar para una distribución de cargas arbitraria en un medio dieléctrico,

$$-\epsilon \nabla^2 \phi - \nabla \epsilon \cdot \nabla \phi = 4\pi \rho. \quad (\text{D.1})$$

Para obtener esta ecuación se combinan las expresiones $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{E} = -\nabla \phi$. En un medio dieléctrico homogéneo (*e.g.* el vacío, $\epsilon = 1$), la Ec. (D.1) se reduce a la ecuación de Poisson, $-\nabla^2 \phi = 4\pi \rho$, cuya solución general es

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \quad (\text{D.2})$$

donde $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función de Green, que satisface la ecuación de Poisson para una carga puntual unitaria, *i.e.* $-\nabla^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Nuestra tarea, es calcular la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ para la situación más simple que involucre un medio dieléctrico inhomogéneo, que es la de un material dieléctrico homogéneo ocupando la región $z < 0$, mientras que en la región $z > 0$ tenemos el vacío. Es decir, la inhomogeneidad en $\epsilon(\mathbf{r})$ está limitada a una discontinuidad finita a través de la superficie $z = 0$. La función dieléctrica para este caso puede escribirse como

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon H(-z) + H(z), \quad (\text{D.3})$$

donde $H(x)$ es la función de Heaviside. La función de Green completa satisface la ecuación diferencial

$$-\epsilon(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \nabla \epsilon(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{D.4})$$

La configuración física que estamos considerando, tiene invariancia traslacional en el plano paralelo a la interfaz dieléctrico-vacío, es decir en las direcciones x y y . Por lo tanto,

podemos introducir la función de Green reducida $g(z, z')$ a través de la transformada de Fourier en el plano, *i.e.*

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} g(z, z'), \quad (\text{D.5})$$

que satisface

$$\epsilon(z) \partial^2 g(z, z') - \frac{\partial \epsilon(z)}{\partial z} \frac{\partial g(z, z')}{\partial z} = \delta(z - z'). \quad (\text{D.6})$$

donde ahora $\partial^2 = \mathbf{p}^2 - \partial_z^2$. Para integrar esta ecuación, usaremos la función de Green reducida libre

$$\mathbf{g}(z, z') = \frac{1}{2p} e^{-p|z-z'|}, \quad (\text{D.7})$$

que es solución de $\partial^2 \mathbf{g}(z, z') = \delta(z - z')$ con la condición de frontera usual al infinito, y cuya transformada de Fourier de acuerdo a la definición de la Ec. (D.5) produce la función de Green en el vacío $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$. De esta forma, el primer paso para resolver la Ec. (D.6) consiste en dividirla por $\epsilon(z)$, que es una función discontinua en $z = 0$. De acuerdo a la técnica de Schwinger [99], se usa el resultado

$$\frac{1}{\epsilon(z)} \frac{\partial \epsilon(z)}{\partial z} = -\epsilon(z) \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \delta(z). \quad (\text{D.8})$$

Para deducir esta fórmula, primero derivamos $1 = \epsilon(z)/\epsilon(z)$ respecto de z ,

$$0 = \frac{1}{\epsilon(z)} \frac{\partial \epsilon(z)}{\partial z} + \epsilon(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\epsilon(z)} \right]. \quad (\text{D.9})$$

Ahora usamos la función $\epsilon(z)$ de la Ec. (D.3) para obtener

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\epsilon(z)} \right] = \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \delta(z). \quad (\text{D.10})$$

Sustituyendo (D.10) en (D.9) establecemos la fórmula (D.8). De esta forma, usando la Ec. (D.8) para dividir la Ec. (D.6) por $\epsilon(z)$ obtenemos

$$\partial^2 g(z, z') + \epsilon(z) \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \delta(z) \frac{\partial g(z, z')}{\partial z} = \frac{\delta(z - z')}{\epsilon(z')}, \quad (\text{D.11})$$

que corresponde a la Ec. (14.49) del libro de Schwinger. La solución general de la Ec. (D.11) es

$$g(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\epsilon(z')} - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{\text{sgn}(z')}{\epsilon(z')} \mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|}, \quad (\text{D.12})$$

como demostraremos a continuación. Para hacerlo, resolvemos la Ec. (D.11) en cada región por separado, $z > 0$ y $z < 0$, para z' arbitraria. En los cálculos siguientes consideramos que z' permanece fijo.

- $z > 0$

En esta región $\epsilon(z) = 1$, de manera que la Ec. (D.11) puede escribirse como sigue

$$\partial^2 g(z, z') + \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \delta(z) \frac{\partial g(z, z')}{\partial z} = \frac{\delta(z - z')}{\epsilon(z')}. \quad (\text{D.13})$$

Integramos usando la función de Green reducida libre de la Ec. (D.7). El resultado es

$$g(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\epsilon(z')} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial \mathbf{g}(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^+}. \quad (\text{D.14})$$

El siguiente paso, es calcular la derivada de la expresión anterior respecto a z y evaluarla en la región de vacío de la interfaz dieléctrico-vacío, *i.e.* en $z = 0^+$,

$$\frac{\partial g(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = \frac{1}{\epsilon(z')} \frac{\partial \mathbf{g}(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \frac{\partial \mathbf{g}(z, 0)}{\partial z} \Big|_{z=0^+} \frac{\partial g(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+}. \quad (\text{D.15})$$

Usando la función de Green reducida libre (D.7), podemos calcular las derivadas involucradas en la Ec. (D.15). El resultado es

$$\frac{\partial \mathbf{g}(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = \frac{\text{sgn}(z')}{2} e^{-p|z'|} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{g}(z, 0)}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = -\frac{1}{2}. \quad (\text{D.16})$$

Sustituyendo estos resultados en la Ec. (D.15) obtenemos

$$\frac{\partial g(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = \frac{\text{sgn}(z')}{2\epsilon(z')} e^{-p|z'|} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \frac{\partial g(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+}, \quad (\text{D.17})$$

de donde se aprende que

$$\frac{\partial g(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} \frac{\text{sgn}(z')}{\epsilon(z')} e^{-p|z'|}. \quad (\text{D.18})$$

El resultado final se obtiene sustituyendo la Ec. (D.18) en la Ec. (D.14),

$$g(z > 0, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\epsilon(z')} - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{\text{sgn}(z')}{\epsilon(z')} \mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|}, \quad (\text{D.19})$$

que corresponde a las ecuaciones (14.56) y (14.62) del libro de Schwinger.

- $z' < 0$

Este caso corresponde a una carga puntual inmersa en el medio dieléctrico. En esta región $\epsilon(z) = \epsilon$, de manera que la ecuación a resolver es

$$\partial^2 g(z, z') + \epsilon \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \delta(z) \frac{\partial g(z, z')}{\partial z} = \frac{\delta(z - z')}{\epsilon(z')}. \quad (\text{D.20})$$

Seguimos los mismos pasos que en el caso anterior. Integrando obtenemos

$$g(z, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\epsilon(z')} - \epsilon \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \mathbf{g}(z, 0) \frac{\partial g(z'', z')}{\partial z''} \Big|_{z''=0^-}. \quad (\text{D.21})$$

Tomamos la derivada de la Ec. (D.21) respecto a z y la evaluamos en la región de dieléctrico de la interfaz dieléctrico-vacío, *i.e.* en $z = 0^-$,

$$\frac{\partial g(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{1}{\epsilon(z')} \frac{\partial \mathbf{g}(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^-} - \epsilon \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \frac{\partial \mathbf{g}(z, 0)}{\partial z} \Big|_{z=0^-} \frac{\partial g(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^-}. \quad (\text{D.22})$$

Usando la función de Green libre reducida calculamos las derivadas requeridas, estas son

$$\frac{\partial \mathbf{g}(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{\text{sgn}(z')}{2} e^{-p|z'|} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{g}(z, 0)}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{1}{2}. \quad (\text{D.23})$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (D.22), obtenemos

$$\frac{\partial g(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{\text{sgn}(z')}{2\epsilon(z')} e^{-p|z'|} - \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \frac{\partial g(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^-}. \quad (\text{D.24})$$

de donde aprendemos que

$$\frac{\partial g(z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{1}{\epsilon + 1} \frac{\text{sgn}(z')}{\epsilon(z')} e^{-p|z'|}. \quad (\text{D.25})$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (D.21) obtenemos la expresión final para la función de Green reducida, *i.e.*

$$g(z < 0, z') = \frac{\mathbf{g}(z, z')}{\epsilon(z')} - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{\text{sgn}(z')}{\epsilon(z')} \mathbf{g}(z, 0) e^{-p|z'|}, \quad (\text{D.26})$$

que corresponde a las ecuaciones (14.57) y (14.61) del libro de Schwinger.

Nótese que los resultados para las regiones $z > 0$ y $z < 0$, (D.19) y (D.26) respectivamente, tienen la misma estructura matemática. De esta forma establecemos el resultado de la Ec. (D.12).

Apéndice E

Interacciones puntuales unidimensionales como una extensión autoadjunta del operador $-d^2/dx^2$

Las interacciones puntuales, también conocidas como potenciales singulares o interacciones de rango cero, se pueden entender como potenciales fuertemente localizados que forman parte de algún Hamiltoniano. Como discutiremos en esta sección, éstas pueden ser descritas como un sistema libre sin el punto de singularidad, es decir, la interacción se modela exclusivamente por las condiciones de frontera en dicho punto, y no por un Hamiltoniano singular. En mecánica cuántica no-relativista, las interacciones puntuales (también conocidas como pseudo-potenciales de Fermi) están asociadas con la ecuación de Schrödinger y corresponden a potenciales $V_{FP}(x)$ que no son cero sólo en algunos puntos específicos, donde son singulares. La ecuación diferencial que consideramos aquí es de la forma

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{FP}(x) \right] \psi(x) = E\psi(x), \quad (\text{E.1})$$

cuya versión física más simple corresponde al ejemplo clásico del pseudo-potencial δ en mecánica cuántica no-relativista. En el plano formal, podemos asociar a éste sistema el operador de Schrödinger

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + \lambda\delta(z), \quad (\text{E.2})$$

donde λ es una constante de acoplamiento real y $z \in \mathbb{R}$. La ecuación de eigenvalores resultante, $H\psi = E\psi$, adquiere un significado preciso cuando la convertimos en un problema de condiciones de frontera. Heurísticamente, esta ecuación se puede interpretar como la

ecuación de Schrödinger libre, $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi$ para $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, junto con las condiciones de frontera $\psi(0^+) = \psi(0^-)$ y $\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0)$ en $z = 0$. El argumento anterior se puede expresar en términos rigurosos usando la teoría de distribuciones. Para hacerlo, debemos considerar que las observables en mecánica cuántica deben ser operadores autoadjuntos. En nuestro caso la observable es la energía, que se representa formalmente por el operador $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2}$. Cada función ψ en el dominio de H_0 , debe vivir en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ de funciones de cuadrado integrable sobre \mathbb{R} , y debe ser tal que ψ' es absolutamente continua en todos los puntos $z \neq 0$, satisfaciendo también que $\psi'' \in \mathcal{H}$.

Para decir que el operador H_0 es autoadjunto, se requieren las siguientes dos condiciones. (i) Para empezar, H_0 debe ser hermitiano (o simétrico en el lenguaje matemático), lo que significa que para todo ψ y φ en el dominio de H_0 ,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \left[\left(H_0^\dagger \psi(z) \right)^* \varphi(z) - \psi^*(z) H_0 \varphi(z) \right] dz = 0 \quad \longleftrightarrow \quad H_0^\dagger = H_0. \quad (\text{E.3})$$

Por integración parcial, esta relación se traduce en la condición de borde

$$[\psi^* \varphi' - \psi'^* \varphi]_{z=0^+} = [\psi^* \varphi' - \psi'^* \varphi]_{z=0^-}. \quad (\text{E.4})$$

Nótese que este resultado no requiere que la función y/o su primera derivada sean continuas en $z = 0$. Tampoco requiere que las condiciones de borde para la función ψ al lado derecho, sean exactamente las mismas que las condiciones de borde para la función φ en el lado izquierdo. De hecho, las funciones $\psi(x)$, definidas en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que están en el dominio del adjunto H_0^\dagger se requiere que sean continuas con primeras derivadas continuas excepto en el origen, donde pueden tener discontinuidades finitas en ψ y ψ' . Ésta última propiedad significa que los límites correspondientes en 0^+ y en 0^- son finitos y están bien definidos.

En general, las condiciones de borde que involucran a la función ψ y su primera derivada ψ' son de la forma

$$\begin{bmatrix} \psi(0^+) \\ \psi'(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(0^-) \\ \psi'(0^-) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \psi(0^-) \\ \psi'(0^-) \end{bmatrix}, \quad (\text{E.5})$$

parametrizada por la matriz compleja de 2×2 , $U = [u_{ij}]$. (ii) La segunda condición para que un operador sea autoadjunto es que ambos, el dominio y la acción del operador actuando a la derecha, sean iguales al dominio y la acción del operador actuando a la izquierda. En este caso sólo tenemos una matriz U para ambos tipos de funciones ψ y φ ,

y la condición (E.4) se traduce en [143]

$$U^+JU = J \quad , \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.6})$$

La condición de arriba implica que el $\det(U)$ es una fase y también reduce la parametrización de U , de ocho a cuatro números reales independientes. Las condiciones de frontera para el pseudo-potencial δ corresponden a la elección simple $u_{11} = u_{22} = 1$, $u_{12} = 0$ y $u_{21} = 2m\lambda/\hbar^2$. De esta manera, ahora podemos interpretar la interacción δ como una extensión autoadjunta del operador H_0 .

Para resumir, cuando estudiamos interacciones puntuales, el problema de fondo consiste en determinar las condiciones de frontera que las soluciones $\psi(x)$ de la ecuación diferencial asociada debe satisfacer en el punto donde el pseudo-potencial es singular. En la mayoría de los casos discutidos en la literatura, éste punto ha suscitado muchas controversias que están lejos de resolverse [144]. Como se mencionó antes, en mecánica cuántica el operador del lado izquierdo de la Ec. (E.1) es usualmente el Hamiltoniano del sistema. Esto sugiere que la manera natural de definir las condiciones de borde es pidiendo que dicho operador sea autoadjunto. Aunque no estamos tratando con un problema mecano-cuántico, adoptamos el mismo enfoque para definir las condiciones de juntura que debe satisfacer una onda gravitacional cuando se propaga a través de la interfaz θ .

Las extensiones autoadjuntas del operador $-d^2/dz^2$ se han estudiado ampliamente, ver por ejemplo las Refs. [143, 149, 150, 152], entre otros, obteniéndose interacciones puntuales generalizadas que dependen de las distribuciones δ y δ' . Este método para definir las condiciones de frontera requeridas tiene la ventaja de que sus resultados son independientes del modelo usado para la distribución delta y sus derivadas.

Es bien sabido, que la extensión autoadjunta más general del operador $-d^2/dz^2$ está parametrizada por cuatro números reales independientes que denotamos por X_i , con $i = 1, 2, 3, 4$. La aplicación del método distribucional de la Ref. [149] al problema de la extensión autoadjunta del operador H_0 lleva al siguiente resultado para la matriz U

$$U = \frac{1}{|D|} e^{-i \arg(D)} \begin{bmatrix} (2 + X_2)^2 - X_1 X_4 + X_3^2 & -4X_4 \\ 4X_1 & (2 - X_2)^2 - X_1 X_4 + X_3^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.7})$$

donde

$$D = 4 + X_1 X_4 - X_2^2 - X_3^2 - 4i X_3 \quad (\text{E.8})$$

es en general un número complejo. La ecuación anterior (E.7) corresponde a la Ec. (4.45) de la Ref. [149] y muestra la forma general de la matriz U , que el producto de una fase

por una matriz con determinante 1. La forma explícita de las condiciones de borde es

$$-X_1\psi(0^+) + [2 + (X_2 - iX_3)]\psi'(0^+) = X_1\psi(0^-) + [2 - (X_2 - iX_3)]\psi'(0^-), \quad (\text{E.9})$$

$$[2 - (X_2 + iX_3)]\psi(0^+) + X_4\psi'(0^+) = [2 + (X_2 + iX_3)]\psi(0^-) - X_4\psi'(0^-). \quad (\text{E.10})$$

Nuestro problema ahora es obtener la matriz U de la Ec. (E.7) partiendo de la formulación del problema en términos de pseudo-potenciales, esto con el fin de identificar el operador que surge de la modificación topológica a la ecuación de ondas con una de las extensiones autoadjuntas de H_0 , lo que nos llevará a las condiciones de frontera apropiadas para la métrica. Basado en los resultados de Kurasov [149], proponemos la siguiente interpretación de su operador distribucional en términos de pseudo-potenciales de Fermi, definiendo así una ecuación diferencial de segundo orden para las funciones $\psi(z)$ definidas anteriormente

$$H\psi \equiv -\frac{d^2}{dz^2}\psi - X_4\frac{d}{dz}\delta(z)\frac{d}{dz}\psi + iX_3\left(\delta'(z) + 2\delta(z)\frac{d}{dz}\right)\psi + X_1\delta(z)\psi + X_2\delta'(z)\psi = E\psi \quad (\text{E.11})$$

Enfatizamos que en nuestra notación

$$\frac{d}{dz}\delta(z)\frac{d}{dz} = \delta(z)\frac{d^2}{dz^2} + \delta'(z)\frac{d}{dz} \quad (\text{E.12})$$

en lugar de $\frac{d}{dz}\delta(z)\frac{d}{dz} = \delta'(z)\frac{d}{dz}$ como se considera en la Ref. [143]. Ahora necesitamos que los productos del tipo $\psi(z)\delta(z)$ y $\psi(z)\delta'(z)$ tengan sentido. Para funciones continuas $\varphi(z)$, con derivadas continuas, en $z = 0$, las siguientes propiedades son bien conocidas [151]

$$\varphi(z)\delta(z) = \varphi(0)\delta(z), \quad (\text{E.13})$$

$$\varphi(z)\delta'(z) = \varphi(0)\delta'(z) - \varphi'(0)\delta(z). \quad (\text{E.14})$$

La generalización de las ecuaciones anteriores para el caso de funciones $\psi(z)$, definidas en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que surgen de la construcción distribucional de la Ref. [149], consiste en remplazar el valor de $\varphi(0)$ (y de $\varphi'(0)$) por su valor promedio en el origen

$$\overline{\psi(0)} = \frac{1}{2} [\psi(0^+) + \psi(0^-)], \quad (\text{E.15})$$

donde $\psi(0^+)$ y $\psi(0^-)$ son los límites de $\psi(z)$ cuando z se acerca a 0 por la derecha y por la izquierda, respectivamente. Por lo tanto, las definiciones (E.13)-(E.14) debemos leerlas

como

$$\psi(z)\delta(z) = \overline{\psi(0)}\delta(z), \quad (\text{E.16})$$

$$\psi(z)\delta'(z) = \overline{\psi(0)}\delta'(z) - \overline{\psi'(0)}\delta(z). \quad (\text{E.17})$$

Sustituyendo las expresiones (E.16) y (E.17) en la Ec. (E.11) obtenemos

$$\begin{aligned} H\psi = -\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left[X_1\overline{\psi(0)} - (X_2 - iX_3)\overline{\psi'(0)} \right] \delta(z) \\ + \left[(X_2 + iX_3)\overline{\psi(0)} - X_4\overline{\psi'(0)} \right] \delta'(z) = E\psi \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Nótese que la dependencia en $\psi''(0^+)$ y $\psi''(0^-)$ se cancela entre las contribuciones que vienen de (E.12) y la sustitución de (E.17) cuando $\psi(z) \rightarrow \psi'(z)$. Siguiendo la Ref. [149], recuperamos las condiciones de borde determinadas por U en la Ec. (E.7) cuando se trabaja con la Ec. (E.18) de la manera estándar. Primero integramos la ecuación de $-\epsilon$ a $+\epsilon$ usando

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dz\delta(z) = 1 \quad , \quad \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dz\delta'(z) = 0. \quad (\text{E.19})$$

El resultado es

$$- [\psi'(0^+) - \psi'(0^-)] + X_1\overline{\psi(0)} - (X_2 - iX_3)\overline{\psi'(0)} = 0 \quad (\text{E.20})$$

que podemos reescribir como

$$[-2 + iX_3 - X_2]\psi'(0^+) + X_1\psi(0^+) + [2 + iX_3 - X_2]\psi'(0^-) + X_1\psi(0^-) = 0, \quad (\text{E.21})$$

que es precisamente la condición de frontera de la Ec. (E.9). La condición de frontera restante se obtiene integrando la Ec. (E.18) de $-L$ a z positivo, y luego de $-\epsilon$ a $+\epsilon$. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} E \int_{-L}^z \psi(z')dz' = -[\psi'(z) - \psi'(L)] + \left[(X_2 + iX_3)\overline{\psi(0)} - X_4\overline{\psi'(0)} \right] \delta(z) \\ + \left[X_1\overline{\psi(0)} - (X_2 - iX_3)\overline{\psi'(0)} \right] H(z) \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

donde $H(z)$ es la función de Heaviside. Haciendo la segunda integración en z de $-\epsilon$ a $+\epsilon$ obtenemos

$$[2 - (X_2 + iX_3)]\psi(0^+) + X_4\psi'(0^+) = [2 + (X_2 + iX_3)]\psi(0^-) - X_4\psi'(0^-) \quad (\text{E.23})$$

en el límite, dado que las discontinuidades producidas por $H(z)$ son finitas. La ecuación (E.23) reproduce la condición de frontera de la Ec. (E.10).

Para resumir, hemos recuperado las condiciones (E.9) y (E.10) que definen la extensión autoadjunta del operador $-d^2/dz^2$ de una manera rigurosa, proporcionando una interpretación en términos de pseudo-potenciales (dados por la Ec. (E.11)) del operador distribucional de la Ref. [149], junto con el uso de las relaciones (E.16) y (E.17).

Ahora aplicaremos estos resultados a nuestro problema. Claramente, hay una analogía cercana entre el caso mecano-cuántico y las ecuaciones de ondas con interacciones puntuales en $G\theta$ y la gravedad de Euler, que obtuvimos en las secciones 4.2 y 4.4, respectivamente. En ambos casos, el operador hermitiano básico es el mismo que en la mecánica cuántica, con $H_0 = -\frac{d^2}{dz^2}$ y $E = \omega^2$. De la Ec. (4.48) leemos la ecuación de ondas modificada

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} \mp \tilde{\theta}\omega \cos \alpha \frac{d}{dz} \delta(z) \frac{d}{dz} \mp \tilde{\theta}\omega^3 \cos^3 \alpha \delta(z) \right] h = \omega^2 \cos^2 \alpha h \quad (\text{E.24})$$

Es fácil verificar que la interacción puntual de Chern-Simons que surge en la Ec. (E.24) corresponde a una extensión autoadjunta del operador H_0 . De hecho, comparando la Ec. (E.24) con la Ec. (E.11), identificamos

$$X_1 = \mp \tilde{\theta}\omega^3 \cos^3 \alpha \quad , \quad X_4 = \pm \tilde{\theta}\omega \cos \alpha \quad , \quad X_2 = X_3 = 0, \quad (\text{E.25})$$

de tal manera que la matriz U que determina las condiciones de frontera es

$$U = \frac{1}{1 - (\xi/2)^2} \begin{bmatrix} 1 + (\xi/2)^2 & \mp \xi/(\omega \cos \alpha) \\ \mp \xi \omega \cos \alpha & 1 + (\xi/2)^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \xi = \tilde{\theta}\omega^2 \cos^2 \alpha \quad , \quad (\text{E.26})$$

donde podemos verificar que $U^+ J U = J$. Por lo tanto, hemos demostrado que a orden lineal, la contribución a la ecuación de ondas que surge de la discontinuidad del campo θ en $z = 0$, puede describirse como una extensión autoadjunta del operador unidimensional $-d^2/dz^2$, con condiciones de frontera determinadas por la matriz U de la Ec. (E.26), de acuerdo a las relaciones (E.5). Una situación similar ocurre en la gravedad de Euler con la elección apropiada de los parámetros X_i junto con las condiciones de borde en $z = 0$ que hemos escrito en la Ec. (4.72) y la Ec. (4.73), respectivamente.

Bibliografía

- [1] S. S. Chern and J. Simons, *Annals Math.* **99**, 48 (1974).
- [2] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 975 (1982).
- [3] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. Phys. (NY)* **140**, 372 (1982).
- [4] A. Achúcarro and P. K. Townsend, *Phys. Lett. B* **180**, 89 (1986).
- [5] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B311**, 46 (1988).
- [6] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **117**, 353 (1988).
- [7] M. Mariño, *Rev. Mod. Phys.* **77** 675 (2005).
- [8] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. B* **23**, 5632(R) (1981).
- [9] A. D. Sakharov, *Soviet Physics Uspekhi* **34**, 392 (1967).
- [10] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **155**, 36 (1985).
- [11] J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cim. A* **60**, 47 (1969).
- [12] S. L. Adler, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969).
- [13] G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976).
- [14] L. Alvarez and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234**, 269 (1984).
- [15] M.B. Green and J.H. Schwarz, *Phys. Lett. B* **149**, 117 (1984).
- [16] V. Taveras and N. Yunes, *Phys. Rev. D* **78**, 064070 (2008).
- [17] R. Bonezzi, O. Corradini and A. Waldron, *Phys. Rev. D* **90**, 084018 (2014).
- [18] J. Zanelli, *Class. Quant. Grav.* **29**, 133001 (2012).

-
- [19] S. H. S. Alexander, M. E. Peskin and M. M. Sheikh-Jabbari, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 081301 (2006).
- [20] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, *Phys. Rev. D* **30**, 2212 (1984).
- [21] P. Arnold and L. McLerran, *Phys. Rev. D* **36**, 581 (1987).
- [22] M. Fukugita and T. Yanagida, *Phys. Lett. B* **174**, 45 (1986).
- [23] G. 't Hooft, *Phys. Rept.* **142**, 357 (1986).
- [24] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 172 (1976).
- [25] C. G. Callan, R. F. Dashen and D. J. Gross, *Phys. Lett. B* **63**, 334 (1976).
- [26] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977).
- [27] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. D.* **16**, 1791 (1977).
- [28] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1799 (1987).
- [29] E. Witten, *Phys. Lett. B* **86**, 283 (1979).
- [30] L. Huerta and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **85**, 085024 (2012).
- [31] L. Huerta, *Phys. Rev. D* **90**, 105026 (2014).
- [32] F. Canfora, L. Rosa and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **84**, 105008 (2011).
- [33] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [34] H. Belich, Jr., M. M. Ferreira, Jr., J. A. Helayel-Neto and M. T. D. Orlando, *Phys. Rev. D* **68**, 025005 (2003).
- [35] M. A. Anacleto, A. Ilha, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro and C. Wotzasek, *Phys. Lett. B* **504**, 268 (2001).
- [36] D. Yu. Pis'mak, Yu. M. Pis'mak and F. Wegner, *Phys. Rev. D* **92**, 013204 (2015).
- [37] P. Mukherjee and B. Paul, *Phys. Rev. D* **85**, 045028 (2012).
- [38] A. Blasi, N. Maggiore, N. Magnoli and S. Storace, *Class. Quant. Grav.* **27**, 165018 (2010).
- [39] F. P. Devecchi, M. Fleck, H. O. Girotti, M. Gomes and A. J. da Silva, *Annals Phys.* **242**, 275 (1995).

- [40] S. Ozonder, Phys. Rev. C **81**, 062201 (2010).
- [41] G. Tallarita and S. Thomas, JHEP **1012**, 090 (2010).
- [42] T. Andrade, J. I. Jottar and R. G. Leigh, JHEP **1205**, 071 (2012).
- [43] Y. Concha-Sánchez, A. Raya and M. E. Tejeda-Yeomans, Phys. Rev. D **87**, 035001 (2013).
- [44] H. C. Chang, M. Fujita and M. Kaminski, JHEP **1410**, 118 (2014).
- [45] K. A. Milton and Y. J. Ng, Phys. Rev. D **42**, 2875 (1990).
- [46] K. A. Milton and Y. J. Ng, Phys. Rev. D **46**, 842 (1992).
- [47] V. N. Markov and Yu. M. Pis'mak, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 6525 (2006).
- [48] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997).
- [49] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [50] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004).
- [51] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004).
- [52] J. Alfaro, A. A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi and R. Soldati, Phys. Lett. B **639**, 586 (2006).
- [53] A. J. Hariton and R. Lehnert, Phys. Lett. A **367**, 11 (2007).
- [54] C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007).
- [55] O. G. Kharlanov and V. C. Zhukovsky, Phys. Rev. D **81**, 025015 (2010).
- [56] J. Alfaro, A. A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi and R. Soldati, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3271 (2010).
- [57] P. W. Anderson, *Basic Notions of Condensed Matter Physics* (Westview Press, Boulder, CO, 1997).
- [58] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [59] X. G. Wen, Advances in Physics **44**, 405 (1995).
- [60] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).

- [61] X. L. Qi and S. C. Zhang, *Phys. Today* **63**, 33 (2010).
- [62] B. A. Bernevig, T. L. Hughes and S. C. Zhang, *Science* **314**, 1757 (2006).
- [63] M. König, S. Weidmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X. L. Qi and S. C. Zhang, *Science* **318**, 766 (2007).
- [64] L. Fu and C. L. Kane, *Phys. Rev. B* **76**, 045302 (2007).
- [65] D. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y. R. Hor, R. J. Cava and M. Z. Hasan, *Nature* **452**, 970 (2008).
- [66] Y. L. Chen *et al.*, *Science*, **325**, 178 (2009).
- [67] A.R. Mellnik *et al.*, *Nature (London)* **511**, 449 (2014).
- [68] Q. G. Bailey and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* **70**, 076006 (2004).
- [69] X. L. Qi, T. Hughes and S. C. Zhang, *Phys. Rev. B* **78**, 195424 (2008).
- [70] J. Maciejko, X. L. Qi, H. D. Drew and S. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 166803 (2010).
- [71] J. Maciejko, X. L. Qi, A. Karch and S. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 246809 (2010).
- [72] Z. Wang, X. L. Qi and S. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 256803 (2010).
- [73] S. Y. Xu *et al.*, *Science* **349**, 613 (2015).
- [74] X. L. Qi, R. Li, J. Zang and S. C. Zhang, *Science* **323**, 1184 (2009).
- [75] L. Ge, T. Zhan, D. Han, X. Liu, and J. Zi. *Scientific Reports*, 5, 01 (2015).
- [76] X. L. Qi and S. C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).
- [77] M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
- [78] Y. N. Obukhov and F. W. Hehl, *Phys. Lett. A* **341**, 357 (2005)
- [79] A. G. Grushin and A. Cortijo, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 020403 (2011).
- [80] A. G. Grushin, P. Rodriguez-Lopez and A. Cortijo, *Phys. Rev. B* **84**, 045119 (2011).
- [81] R. Jackiw and S. Y. Pi, *Phys. Rev. D* **68**, 104012 (2003).

- [82] S. Alexander and N. Yunes, *Physics Reports* **480** 1, (2009)
- [83] K. Yagi, N. Yunes and T. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 251105 (2012).
- [84] S. Coleman and F. De Luccia, *Phys. Rev. D* **21**, 3305 (1980).
- [85] A.B. Clark, D.Z. Freedmann, A. Karch and M. Schnabl, *Phys. Rev. D* **71**, 066003 (2005).
- [86] E. D'Hoker, J. Estes and M. Gutperle, *Nucl. Phys. B* **753**, 16 (2006).
- [87] B. Chen, Z. Xu and C. Liu, *Journal of High Energy Physics* **0902**, 036 (2009).
- [88] D. Gaiotto, E. Witten, *Journal of High Energy Physics* **1006**, 097 (2010).
- [89] C. Kim, E. Koh, and K. Lee, *Journal of High Energy Physics* **0806**, 040 (2008).
- [90] C. Kim, E. Koh, and K. Lee, *Phys. Rev. D* **79**, 126013 (2009).
- [91] D. Bak, M. Gutperle and S. Hirano, *Journal of High Energy Physics* **0305**, 072 (2003).
- [92] D.Z. Freedman, C. Núñez, M. Schnabl, and K. Skenderis, *Phys. Rev. D* **69**, 104027 (2004).
- [93] A. Celi, A. Ceresole, G. Dall'Agata, A. Van Proyen, and M. Zagermann, *Phys. Rev. D* **71**, 045009 (2005).
- [94] S. Q. Shen, *“Topological insulators, Dirac Equation in Condensed Matter”*, (Springer, 2012).
- [95] B. A. Bernevig and T. L. Hughes, *“Topological Insulators and Topological Superconductors”*, (Princeton University Press, 2013).
- [96] M. V. Berry and A. K. Geim, *Eur. J. Phys.* **18**, 307 (1997).
- [97] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso and L. F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **92**, 125015 (2015).
- [98] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso and L. F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **93**, 045022 (2016).
- [99] J. Schwinger, L. DeRaad, K. Milton and W. Tsai, *“Classical Electrodynamics”*, Advanced Book Program, (Perseus Books 1998).
- [100] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov, *Sov. Phys. Usp.* **31**, 965 (1988) [*Usp. Fiz. Nauk* **156**].

- [101] L. S. Brown and G. J. Maclay, Phys. Rev. **184**, 1272 (1969).
- [102] V. Sopova and L. H. Ford, Phys. Rev. D **72**, 033001 (2005).
- [103] W. J. Nie, R. Zeng, Y. Lang and S. Zhu, Phys. Rev. B **88**, 085421 (2011).
- [104] A. Karch, Phys. Rev. Lett. **103**, 171601 (2009).
- [105] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series, and Products*”, edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger, 4th ed. (Academic Press, New York, 1994).
- [106] H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [107] G. Bressi *et al*, Phys. Rev. Lett. **88**, 041804 (2002).
- [108] K. A. Milton, *The Casimir effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [109] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, *Advances in Casimir effect* (Oxford University Press, Great Britain, 2009).
- [110] M. Frank and I. Turan, Phys. Rev. D **74**, 033016 (2006).
- [111] J. Q. Quach, Phys. Rev. Lett. **114**, 081104 (2015).
- [112] G. Rosenberg and M. Franz, Phys. Rev. B **82**, 035105 (2010).
- [113] M. Bordag, D. Hennig and D. Robaschik, J. Phys. A **25**, 4483 (1992).
- [114] K. A. Milton, J. Phys. A **37**, 6391 (2004).
- [115] J. Schwinger, L. DeRaad and K. Milton, Ann. Phys. (N.Y.) **115**, 1 (1978).
- [116] D. Deutsch and P. Candelas, Phys. Rev. D **20**, 3063 (1979).
- [117] R. M. Cavalcanti, Phys. Rev. D **69**, 065015 (2004).
- [118] X. Zhou, *et al*, Phys. Rev. A **88**, 053840 (2013).
- [119] P. Curie, J. de Physique (3rd Series) **3**, 393 (1894).
- [120] P. Debye, Z. Phys. **36**, 300 (1926).
- [121] I. E. Dzyaloshinskii, J. Exptl. Teor. Fiz. **37**, 881 (1959); Sov. Phys. JETP **10**, 628 (1959)

-
- [122] D. N. Astrov, J. Exptl. Teor. Fiz. **38**, 984 (1960); Sov. Phys. JETP **11**, 708 (1960).
- [123] V. J. Folen, G. T. Rado, and E. W. Stalder, Phys. Rev. Lett. **6**, 607 (1961).
- [124] W. F. Brown, R. M. Hornreich, S. Shtrikman, Phys. Rev. **168**, 574 (1968).
- [125] J. W. Barrett 2000 *Refractive gravitational waves and quantum fluctuations* , arXiv: gr-qc/001105.
- [126] W. Israel, Phys. Rev. D **15**, 935 (1977).
- [127] A. H. Taub, J. Math. Phys. **21**, 1423 (1980).
- [128] C. K. Raju, J. Phys. A: Math. Gen. **15**, 1785 (1982).
- [129] R. Geroch and J. Traschen, Phys. Rev. D **36**, 1017 (1987).
- [130] C. J. S. Clarke and T. Dray, Class. Quant. Grav. **4**, 265 (1987).
- [131] P. A. Hogan, Phys. Rev. Letts. **70**, 117 (1993).
- [132] P. S. Letelier and A. Wang, J. Math. Phys. **36**, 3023 (1995).
- [133] J. Podolský and K. Veselý, Phys. Lett. A **241**, 145 (1998).
- [134] M. Mars and J. M. M. Senovilla, Class. Quantum Grav. **10**, 1865 (1993).
- [135] R. Penrose, *General Relativity* edited by L. O’Raifeartaigh (Clarendon, Oxford, 1972), p. 101.
- [136] C. Wainwrigth and R. M. Williams, Class. Quant. Grav. **21**, 4864 (2004).
- [137] J. W. Barrett and L. Crane, J. Math. Phys. **39**, 3296 (1998), *ibid.* Class. Quant. Grav. **17**, 3101 (2000).
- [138] E. R. Livine and D. Oriti, Nucl. Phys. **B663**, 231 (2003).
- [139] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2009)
- [140] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **15**, 2752 (1977).
- [141] J. W. York Jr., Phys. Rev. Lett. **28**, 1082 (1972).
- [142] D. Grumiller, R. Mann and R. McNees, Phys. Rev. D **78**, 081502 (2008).

-
- [143] M. Hallnäs, E. Langmann and C. Paufler, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 4957 (2005).
- [144] D. J. Griffiths, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 2265 (1993).
- [145] F. A. B. Coutinho, Y. Nogami and J. F. Perez, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 3937 (1997).
- [146] P. Seba, *Rep. Math. Phys.* **24**, 111 (1986).
- [147] P. L. Christiansen et al., *J. Phys. A: math Gen.* **36**, 7589 (2003).
- [148] F. M. Toyama and Y. Nogami, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, F685 (2007).
- [149] P. Kurasov, *J. Math. Anal. Appl.* **201**, 297 (1996).
- [150] S. Albeverio, L. Dabrowski and P. Kurasov, *Lett. Math. Phys.* **45**, 33 (1998).
- [151] M. Gadella, J. Negro and L. M. Nieto, *Physics Letters A* **373**, 1310 (2009).
- [152] V. S. Araujo, F. A. B. Coutinho and J. F. Perez, *Am. J. Phys.* **72**, 203 (2004).
- [153] P. Senn, *Am. J. Phys.* **56**, 916 (1988).
- [154] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [155] Xiao-Liang Qi, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).
- [156] S. J. Minter, K. Wegter-McNelly and R. Y. Chiao, *Physica E* **42**, 234 (2010).
- [157] M. E. Brandan and G. E. Satchler, *Phys. Rep.* **285**, 143 (1997).