



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ZARAGOZA

“PERMEABILIDAD EN MEDIOS POROSOS :
MODELO DE ELLIS EN UN SISTEMA FRACTAL”

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA:

LÓPEZ CARREÑO ISAAC

DIRECTOR DE TESIS:

DR.EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA



MEXICO,DF

2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE.

Comunico a usted que al alumno(a) **López Carreño Isaac**, con número de cuenta **30711344-1** de la carrera **Ingeniería Química**, se le ha fijado el día **24** del mes de **Junio** de **2016** a las **15:00 horas** para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	FIS. CARLOS JAVIER MARTÍNEZ GÓMEZ
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	M. EN I. ESTEBAN MINOR PÉREZ
SUPLENTE	DR. MARIANO PÉREZ CAMACHO
SUPLENTE	M. EN C. FRANCISCO JAVIER ALMAZAN RUIZ

[Handwritten signatures and names over lines]
 E. Herrera Valencia
 MARIANO PÉREZ CAMACHO

El título de la tesis que se presenta es: "Permeabilidad en Medios Porosos: Modelo de Ellis en un Sistema Fractal".

Opción de Titulación: Convencional

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
México, D. F. a 01 de Junio de 2016.

DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NUÑEZ
DIRECTOR



RECIBÍ
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES
Y DE GRADO

Vo.Bo. *[Signature]*
I.Q. DOMINGA ORTIZ BAUTISTA
JEFA DE LA CARRERA DE I.Q.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, por haberme formado ética y profesionalmente.

Al Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, porque no hay palabras para expresar la gratitud a su noble trabajo, por la confianza y dedicación que me ha brindado para este trabajo haya sido posible; su infinita paciencia y todo sus valores que me han servido de guía durante este tiempo.

Al Fis. Carlos Javier Martínez Gómez, por compartir su conocimiento, y su gran honestidad que me impulso a seguir mejorando este trabajo.

Al M. en I. Esteban Minor Pérez, por las contribuciones y apoyo incondicional para que este trabajo sea fructífero.

Al Dr. Mariano Pérez Camacho, por las sugerencias, observaciones e intercambio de ideas, así como su experiencia en el área experimental.

Al M. en C. Francisco Javier Almazán Ruiz, por el gran conocimiento adquirido por sus observaciones e intercambio de ideas.

Dedicatorias

Dedico esta tesis a mi dios porque los sueños de él son mejores que los míos; él es mi respuesta en la necesidad, mi refugio en la tormenta, mi consuelo en la tristeza y mi fortaleza en mi debilidad.

A mis padres por haber estado en todos los momentos que me han llevado hasta aquí, por los grandes consejos que me han dado para tomar las decisiones correctas y por el gran esfuerzo que han hecho para que este sueño sea posible.

A mi hermana mi amiga sincera que me da su mano franca, porque no hay nadie en el mundo que pueda reemplazarla y a pesar de todo siempre estaremos juntos.

A Isis por su amor incondicional y por estar siempre mi lado cuando más lo necesitaba.

A mis amigos de la preparatoria E.N.P. 9 “Pedro de alba” y de mi universidad F.E.S Zaragoza, que en los tiempos difíciles me ayudaron a descubrir mis virtudes y mi verdadera vocación.

A todos mis seres queridos que ya no me acompañan en estos momentos de felicidad, especialmente a mis abuelos quienes fueron parte importante de mi vida.

*“Si eh visto más lejos ha sido porque
eh subido a hombros de gigantes”*

Isaac Newton

*“Nuestra mayor gloria no se basa en no haber fracasado
nunca, sino en habernos levantado cada vez que caímos”*

Confucio

“El triunfo no está en vencer siempre, sino en nunca desanimarse”

Napoleón Bonaparte

*“Empieza por hacer lo que es necesario, luego lo que es
posible y de repente, te encontraras haciendo lo imposible”*

Francisco de Asís

Índice

Agradecimientos	I
Dedicatorias.....	II
Índice	III
Índice de figuras	VI
Índice de tablas.....	VII
Nomenclatura	VIII
Glosario.....	XI
Resumen.....	XIV
Abstract.....	XV
CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN	1
1.1 Fluidos no newtonianos en medios porosos.....	2
1.2 Medio poroso	2
1.3 Porosidad.....	4
1.4 Permeabilidad intrínseca.....	5
1.5 Teoría fractal	7
CAPÍTULO II ANTECEDENTES	9
2.1 Ley de Darcy para un fluido newtoniano.....	10
2.1.1 Velocidad superficial en un medio poroso.....	10
2.2 Modelos no-newtonianos para la descripción del flujo en el medio poroso.....	13
2.3 Ley de Darcy para un fluido no newtoniano (Ley de Potencia)	14
2.4 Estado del arte del flujo de fluidos en medios porosos	15
2.6 Objetivos.....	16
2.6.1 Objetivo general.....	16
2.6.2 Objetivo particular.....	16
2.7 Hipótesis.....	17
2.8 Justificación.....	17
CAPÍTULO III MARCO TEÓRICO.....	20
3.1 Fenómenos de transporte	21
3.1.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento.....	22
3.1.2 La ecuación de transporte de energía	22

3.1.3 Ecuación de transporte de masa	23
3.2 Reología	23
3.2.1 Tensor de deformación.....	24
3.2.2 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.....	25
3.2.3 El tensor rapidez de deformación.....	25
3.2.4 El tensor de vorticidad.....	26
3.2.5 Tensor de esfuerzos.....	27
3.3 Tipos de fluido.....	27
3.3.1 Fluido newtoniano.....	27
3.3.2 Fluidos no newtonianos	28
3.4 Teoría fractal.....	29
3.4.1 Definición de fractal.....	30
3.4.2 Dimensión fractal	31
3.4.3 Tipos de fractales.....	32
3.4.4 Características de un fractal en un medio poroso	33
CAPÍTULO IV PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	37
4.1 Descripción del problema físico del flujo de Poiseuille en el medio poroso	38
4.2 Dinámica de flujo	40
4.2.1 Vector de velocidad.....	40
4.2.2 Tensores cinemáticos.....	40
4.3 Ecuaciones de continuidad y momento	43
4.4 Ecuaciones constitutivas	45
CAPÍTULO V MODELADO MATEMÁTICO: A)MODELO DE ELLIS TEORÍA DEL PORO PROMEDIO	47
5.1 Modelo de Ellis.....	48
5.1.1 Perfil de velocidades	49
5.1.2 Flujo volumétrico.....	50
5.1.3 Velocidad promedio.....	51
5.1.4 Viscosidad aparente.....	52
5.1.5 Permeabilidad intrínseca.....	52
CAPÍTULO VI MODELADO MATEMÁTICO: B)MODELO DE ELLIS TEORÍA FRACTAL	54
6.1 Newtoniano con fractal	55
6.1.1 Perfil de velocidades	55

6.1.2 Flujo volumétrico.....	56
6.1.3 Velocidad promedio.....	59
6.1.4 Permeabilidad aparente.....	61
6.2 No newtoniano Ley de potencia (Ostwald de Waele) con fractal	62
6.2.1 Perfil de velocidades	63
6.2.2 Flujo volumétrico.....	64
6.2.3 Velocidad promedio.....	66
6.2.4 Permeabilidad aparente.....	67
6.3 Modelo de Ellis con fractal.....	70
6.3.1 Perfil de velocidades	70
6.3.2 Flujo volumétrico.....	71
6.3.3 Velocidad promedio.....	71
6.3.4 Permeabilidad aparente.....	72
CAPÍTULO VII SIMULACIONES COMPUTACIONALES	74
7.1 Variables adimensionales	75
7.2 Modelo de Ellis (Teoría del poro promedio)	77
7.2.1 Perfil de velocidades	77
7.2.2 Flujo volumétrico.....	81
7.2.3 Viscosidad aparente	82
7.2.4 Esfuerzo cortante	83
7.2.5 Permeabilidad intrínseca.....	84
7.3 Modelo Ellis(Teoría Fractal).....	85
7.3.1 Perfil de velocidades	86
7.3.2 Flujo volumétrico.....	89
7.3.3 Viscosidad aparente	90
7.3.4 Esfuerzo cortante	91
7.3.5 Esfuerzo cortante total.....	92
7.3.6 Permeabilidad aparente.....	93
7.4 Resultados comparativos entre velocidad superficial y gradiente de presión , teórico-experimental	94
CAPÍTULO VIII CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO.....	98
8.1 Perfil de velocidad.....	99
8.2 Flujo volumétrico.....	99

8.3 Viscosidad aparente	100
8.4 Esfuerzo cortante	100
8.5 Permeabilidad Aparente	100
8.6 Trabajo futuro	101
Bibliografía	103

Índice de figuras

Figura 1 Esquema de un medio poroso.....	3
Figura 2.Organización del proyecto de tesis.....	19
Figura 3.Tipos de Fractales Lineales	32
Figura 4.Tipos de Fractales no Lineales.....	33
Figura 5.Illustra la geometría que se utiliza en la descripción de un sistema poroso. En la figura a) se ilustra el sistema físico mediante la teoría del poro promedio, b) los capilares son diferente diámetro teoría fractal,c) todos tienen geometrías irregulares.	38
Figura 6.Illustra el tubo capilar donde pasara el fluido no newtoniano.....	39
Figura 7. Ilustra el perfil de velocidades como función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del parámetro alfa	77
Figura 8. Ilustra el perfil de velocidades en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del esfuerzo en pared. El parámetro utilizado $\alpha = 2$	78
Figura 9. Ilustra el perfil de velocidades en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del esfuerzo en pared. El parámetro utilizado $\alpha = 4$	79
Figura 10. Ilustra el flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared adimensional para diferentes valores del parámetro alfa.....	81
Figura 11.Illustra la viscosidad como función del esfuerzo en la pared adimensional para diferentes valores del parámetro alfa.....	82
Figura 12.Illustra el esfuerzo como función de la coordenada radial para diferentes valores del parámetro sigma	83
Figura 13.Illustra la permeabilidad intrínseca como función del radio del poro con diferentes valores de porosidad.....	84
Figura 14.Illustra el perfil de velocidades como función de la coordenada radial para diferentes valores del parámetro alfa. ($D_T=1.25$, $L_0 = 0.0824$)	86
Figura 15.Illustra el perfil de velocidades en función de la coordenada radial para diferentes valores del esfuerzo en pared. El parámetro utilizado $\alpha = 2$. ($D_T=1.25$, $L_0 = 0.0824$)	87
Figura 16.Illustra el perfil de velocidades en función de la coordenada radial para diferentes valores del esfuerzo en pared. El parámetro utilizado $\alpha = 4$. ($D_T=1.25$, $L_0 = 0.0824$)	88
Figura 17.Illustra el flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del parámetro alfa. ($D_T=1.25$, $D_f=1.79$, $L_0 = 0.0824$)	89

Figura 18. Ilustra la viscosidad como función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del parámetro alfa. ($D_T=1.25$, $D_f=1.79$, $L_0 = 0.0824$) 90

Figura 19. Ilustra el esfuerzo cortante como función de la coordenada radial para diferentes valores del parámetro sigma. ($D_T=1.25$, $L_0 = 0.0824$) 91

Figura 20. Ilustra el esfuerzo cortante total en el haz de capilares como función de la coordenada radial para diferentes valores del parámetro sigma. ($D_T=1.25$, $D_f=1.79$, $L_0 = 0.0824$) 92

Figura 21. Ilustra la permeabilidad aparente para el modelo de Ellis en un Sistema Fractal , con diferentes valores para el parámetro alfa. ($D_T=1.25$, $D_f=1.79$, $L_0 = 0.0824$) 93

Figura 22. Comparación entre Modelo Ellis fractal y datos experimentales de Park 0.5% poliacrilamida 95

Figura 23. Comparación entre Modelo Ellis fractal y datos experimentales de Balhoff y Thompson 0.72 % goma guar. 96

Índice de tablas

Tabla 1. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso. 11

Tabla 2. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso. 13

Tabla 3. Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa respectivamente. 21

Tabla 4. Variables adimensionales modelo de Ellis. 75

Nomenclatura

Vectores y Tensores

σ	Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]
\mathbf{D}	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$\nabla \mathbf{V}$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$[\nabla \mathbf{V}]^T$	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]
\mathbf{V}	Vector de velocidad [m/s]
\mathbf{g}	Vector de aceleración de la gravedad [1/s]

Operadores Matemáticos

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$	Operador Nabla [1/m]
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	Derivada parcial de la coordenada x_i [1/m]
$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{Dt}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla$	Derivada material o sustancial [1/s]
∇	Operador divergencia [1/m]

Variables dimensionales

\mathbf{a}	Longitud característica radio del tubo [m]
L	Longitud del capilar [m]
\mathbf{r}	Coordenada radial [m]
$\langle V \rangle$	Velocidad promedio [m]
V_z	Componente axial del vector velocidad [m/s]
Q	Flujo volumétrico [m ³ /s]

Fractal

A	Área total m ²
-----	---------------------------

D_f	Dimensión del Fractal
D_T	Tortuosidad del Fractal
K	Permeabilidad Promedio
L	Longitud [m]
L_T	Longitud Capilar [m]
L_0	Longitud representativa [m]
M	Área o Volumen o Masa o Longitud de un objeto [m^2 , m^3 , kg ,m]
N	Número de poro o capilares
p	Presión [pa]
q	Flux [m^3/s]
Q	Flujo volumétrico Total [m^3/s]
r	Radio del poro [m]
V	Velocidad de flujo promedio [m/s]
Letras Griegas	
α	Exponente del modelo de Ellis [1]
γ_{rz}	Rapidez de deformación rz [1/s]
ϕ_0	Fluidez a baja rapidez de deformación [1/Pa s]
ϕ_1	Fluidez a moderada rapidez de deformación [1/Pa s ⁿ]
ρ	Densidad [rad/s]
μ	Viscosidad [pa s]

λ	Tamaño del poro [m]
σ	Esfuerzo cortante [pa]

Variables Adimensionales

Q^*	Flujo volumétrico [1]
V_z^*	Velocidad Axial [1]
μ^*	Viscosidad [1]

Glosario

Deformación:	Es el cambio de la posición de una coordenada de un sistema con respecto a otra coordenada.
Rapidez de deformación:	Es la derivada temporal de la deformación.
Esfuerzo en la pared:	Es el gradiente de presión evaluado en la frontera del sistema (pared).
Esfuerzo:	Es el esfuerzo evaluado en la pared
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación)
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no-newtoniano:	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
Fluido adelgazante al corte:	Fluido que decrece su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
Fluido engrosante al corte:	Fluido que aumenta su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo.
Modelo de Ellis:	Ecuación constitutiva no newtoniana que contiene como caso particular el modelo newtoniano y el modelo de ley de potencia.

Fluido:	Es aquel sistema físico que al aplicársele un esfuerzo cortante este se deforma continua e irreversiblemente.
Viscosidad:	Es una medida de la resistencia a fluir de un sistema Físico.
Densidad:	En una propiedad intensiva que relaciona la masa y el volumen en un sistema.
Modelo de ley de potencia:	Es un ecuación constitutiva reológica no lineal la cual describe la zona de transición en el reograma esfuerzo rapidez de deformación y que generaliza al newtoniano.
Medio Poroso:	Un sólido o arreglo de ellos con suficiente espacio abierto dentro o alrededor de las partículas para permitir el paso del fluido
Ley Darcy:	Es la ecuación que relaciona la velocidad volumétrica superficial en función de gradiente de presión , la cual depende de la permeabilidad estática.
Perfil de velocidad:	La distribución de las velocidades dentro de un sistema en función de la coordenada radial.
Permeabilidad estática:	Es una medida de la resistencia a fluir en un medio poroso.
Porosidad:	Medida de espacios vacíos en un material, y es una fracción del volumen de huecos sobre el volumen total.
Tensor de Esfuerzos:	Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en la cual se describe el estado de fuerzas en un elemento de control.
Tensor rapidez deformación:	Es una matriz de 3x3 simétrica que nos describe el cambio temporal del vector desplazamiento.
Teoría del poro promedio:	Teoría que se basa en suponer que todos los poros tiene una geometría regular.
Teoría del poro fractal:	Teoría que se basa en suponer que todos los poros tiene una geometría irregular.
Velocidad promedio:	Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.

Flujo homogéneo:	Es el flujo en el cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.
Flujo cortante:	Es el flujo que se origina al aplicar una fuerza tangencial al sistema (fluido) deformando continua e irreversiblemente al fluido.
Fractal:	Objetos geométrico generados por la iteración infinita de un algoritmo especificado.
Tortuosidad:	Medida de la complejidad geométrica de un medio poroso

Resumen

En este trabajo, se estudia y analiza las características de un fluido no newtoniano en un medio poroso. Para caracterizar la transferencia de momento y reología en el sistema, se emplea el modelo constitutivo de Ellis el cual, acopla el modelo newtoniano y el modelo de Ostwald de Waele. Este modelo contiene tres propiedades materiales asociadas a las fluideces a bajo y moderados esfuerzos de deformación y un exponente relacionado a los mecanismos adelgazantes y engrosantes al corte.

En flujo cortante, el modelo de Ellis describe una primera zona constante de viscosidad, seguido de una zona adelgazante al corte. En flujo cortante en tuberías o capilares admite soluciones analíticas para el perfil de velocidades y flujo volumétrico. Por otra parte, el medio poroso el cual se puede visualizar como un conjunto agrupado de planos geométricos, así mismo tiene una distribución de poro con diferentes radio y tortuosidad esto incrementa la complejidad para la descripción física del flujo.

Para modelar se utiliza el formalismo de los fractales para describir la distribución del medio poroso. La propuesta del modelo fractal no contiene ninguna constante empírica, y todos los parámetros en el modelo tiene claro significado físico tales como ; D_f área de poros dimensión fractal, D_T la tortuosidad del fractal, $(r_{min}, r_{max}$ y L_0) parámetros de estructura del fractal , así como el gradiente de presión y las constantes de materiales.

Tomando en cuenta todos los parámetros antes mencionados el modelo de Fractal se determinó el perfil de velocidades, flujo volumétrico, viscosidad aparente, esfuerzo cortante y permeabilidad para un de fluido Ellis en un medio poroso, basados en los supuestos de que los medios porosos consisten en un conjunto de capilares tortuosos, cuya distribución de tamaños y tortuosidad siguen la ley escala fractal.

Finalmente para verificar la validez del modelo, a partir de datos reométricos experimentales de un fluido de Ellis proveniente de la literatura se comparó con nuestro modelo Ellis fractal, obteniendo una buena concordancia entre ellos.

Palabras Clave: Fractal ,Ellis Fractal, Medio Poroso , Permeabilidad ,Reología , Fluido no-newtoniano.

Abstract

In this work , there are studied and analyze the characteristics of a no Newtonian fluid in a porous media. To characterize the transfer at the moment and rheology in the system, there uses the constitutive model of Ellis , connects the Newtonian model and the model of Ostwald de Waele. This model contains three material properties associated with the fluencies to low and moderate efforts of deformation and an exponent related to the shear thinning and thickening mechanisms.

In cutting flow, the model of Ellis describes the first constant zone of viscosity, followed by a zone shear thinning to the cut. In cutting flow into pipelines or capillaries admits analytical solutions for the profile of speeds and volumetric flow. On the other hand, the porous way which can be visualized as a set grouped of geometric planes, likewise has a distribution of pore with different radius and tortuosity this increases the complexity for the physical description of the flow.

To model the formalism of fractals is in use in order to describe the distribution of the porous media. The offer of the fractal model does not contain any empirical constant, and all the parameters in the model it has clear physical meaning such like; D_f area of pores fractal dimension, D_T the tortuosity of fractal, $(r_{min} , r_{max} \text{ y } L_0)$ parameters of structure of fractal, like that as the gradient of pressure and the constants of materials.

Bearing in mind all the parameters before mentioned the model of Fractal I decide for the velocity profile, volumetric flow, apparent viscosity , shear force and permeability for one of fluid Ellis in porous media, based on the suppositions of

which the porous media consist of a set of tortuous capillaries, which distribution of sizes and tortuosity they follow the law fractal scale.

Finally to check the validity of the model, from information rheometrics experimental of a fluid of Ellis from the literature it was compared by our model fractal Ellis, obtaining a good agreement among them.

Key words: Fractal, Ellis Fractal, Porous Media, Permeability, Rheology, non-Newtonian Fluid.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Fluidos no newtonianos en medios porosos

El movimiento de fluidos puede tener tres variedades de formas (laminar, transición y turbulento), como puede ser el flujo de fluido a través de unas tuberías en régimen laminar o bien para los flujos más complejos, tales como sistemas biológicos, alimentarios y flujos turbulentos, entre otros. De igual forma, el flujo de un fluido en un medio poroso es un fenómeno común en la naturaleza, y en ámbitos del quehacer humano. El interés que encierra el estudio de flujo en un medio poroso estriba en la relación directa que mantiene con los procesos industriales, tales como las explotaciones petrolíferas (desplazamiento del petróleo, deficiencia de la recuperación, modificación de la porosidad, desplazamiento y equilibrio de la interface, etc.), recuperación de aceite, ciencia de los materiales, el secado industrial, el filtrado químico, estudio de movimiento de contaminantes en el suelo, hidráulica de captaciones de agua, etc.^[14] Para poder describir estos flujos deberemos primero definir lo que es un medio poroso.

1.2 Medio poroso

Es un material que consiste en una estructura o matriz sólida que contiene espacios o huecos interconectados, considerando que la fase sólida es rígida o presenta una deformación despreciable, en la Fig. 1 se muestra el esquema de un medio poroso.

La interconexión de los huecos o poros permite que exista el flujo de uno o más fluidos a través del material. Para este caso, se presentan dos situaciones que son:

Flujo en fase simple. Consiste de un fluido simple, el cual llena o satura los huecos.

Flujo bifásico. El cual consiste de la presencia de un gas y un fluido compartiendo el espacio vacío del medio poroso. Un sólido que contiene huecos o vacíos, conectados o no conectados entre sí, dispersos entre ellos de una manera regular

o aleatoria puede ser clasificado como material poroso, aunque existen otros tipos de casos.

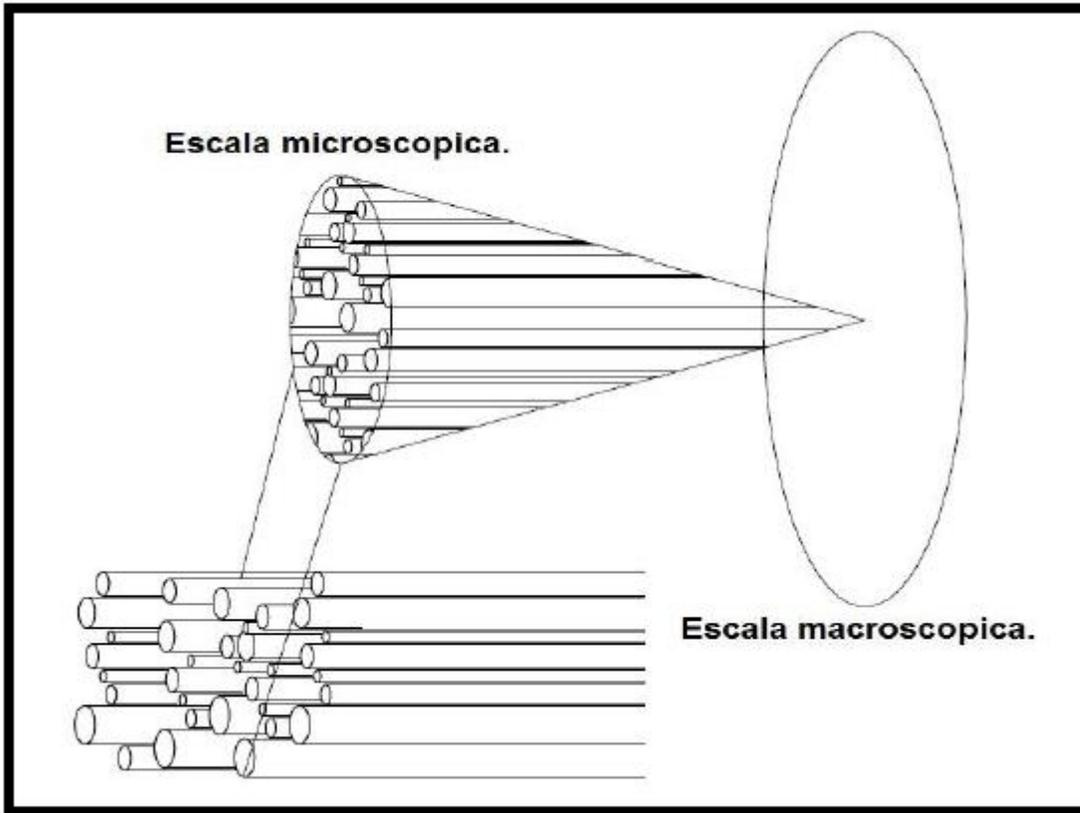


Figura 1 Esquema de un medio poroso

A las entidades huecas se les ha denominado, en forma artificial, como: poros, huecos, antros, cavidades, u oquedades. La International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) ha recomendado la siguiente clasificación de poros de acuerdo a la amplitud del hueco en cuestión: microporos ($d < 2\text{nm}$), mesoporos ($2\text{nm} < d < 50\text{nm}$) y macroporos ($d > 50\text{nm}$). Los microporos, a su vez, presentan dos subgrupos llamados ultramicroporos ($d < 0.7\text{nm}$) y supermicroporos ($0.7 < d < 2\text{nm}$).

Es importante distinguir entre dos tipos de poros o espacios vacíos, uno que forma una fase continua dentro del medio poroso, llamado “interconectado” o espacio del poro “efectivo”, y el otro que consiste de poros o vacíos “aislados” o “no interconectados” dispersos sobre el medio, los huecos del espacio del poro son llamados espacios del poro total. Por otra parte, los espacios o poros no

interconectados no pueden contribuir al transporte de materia a través del medio poroso. Solamente contribuirá el espacio del poro efectivo o interconectado. Algunos parámetros asociados con la mecánica de fluidos a través de lechos porosos son la porosidad y la permeabilidad.

Los medios porosos se clasifican en naturales y sintéticos. En los primeros, la distribución y forma de los poros es generalmente irregular, mientras que en los sintéticos, la distribución y forma son uniformes. Ejemplos de los medios porosos naturales son: arena de playa; madera; granos y cereales en almacenamiento a granel; subsuelo (en estudios geotérmicos, edafológicos y de difusión de contaminantes); masa para panificación, paredes celulares, etc., mientras que entre los medios porosos sintéticos se tienen los lechos empacados de reactores catalíticos; materiales de aislamiento y empaque; materiales de construcción, etc.

1.3 Porosidad

La porosidad ε es definida como la fracción de espacio vacío con respecto al volumen total, en nuestro caso será el espacio interconectado. Es común que en la literatura use el término diámetro promedio de poro, pero esto solo tendría sentido estrictamente si los huecos tuvieran forma cilíndrica o esférica. Sin embargo, el concepto diámetro promedio será de mucha utilidad en este trabajo.^[13]

El símbolo empleado usualmente para este parámetro es ε . La ecuación, expresa lo dicho anteriormente.

$$\varepsilon = \frac{V_P}{V_B} = \frac{\text{Volumen de huecos}}{\text{Volumen total}} \quad (1.1)$$

Debido a que la porción de volumen total no ocupada por poros, es ocupada por los granos sólidos o matriz del material, se tiene que

$$1 - \varepsilon = \frac{V_S}{V_B} = \frac{\text{Volumen de solidos}}{\text{Volumen total}} \quad (1.2)$$

Normalmente se definen dos clases de porosidad, absoluta o total y porosidad efectiva. La primera, corresponde a la fracción de espacios vacíos con respecto al volumen de bulto sin importar la conexión de poros. La segunda, es aquella fracción del volumen de bulto constituida por poros interconectados. Ocurre en muchas rocas naturales, tal como en la lava volcánica, la cual presenta una alta porosidad total pero esencialmente no presenta porosidad efectiva.

1.4 Permeabilidad intrínseca

Es el término asociado a la conductividad del medio poroso con respecto al fluido y nos indica que tan fácilmente fluye un fluido a través de un medio poroso. Existen muchas formas de modelar un medio poroso, por ejemplo considérese un sólido al que se le barrena en múltiples lugares conservando los ejes de los barrenos paralelos, esto sería un manojo de tubos. Otra forma de modelar sería considerar un sistema compuesto por un conglomerado de esferas sólidas fijas azarosamente distribuidas, esta aproximación es la más simple de todas y se conoce como la teoría del poro promedio. Se ha encontrado que algunos medios porosos muestran características de autosimilitud y por ello también se ha tratado de modelar a los medios porosos como fractales.^[25]

Puede ser definida, como una medida cuantitativa de la facilidad con la cual un fluido se transporta a través de un medio poroso. Cuando solo depende de la naturaleza intrínseca del sólido, se trata de un medio isótropo y esta propiedad es un escalar. Por otro lado, cuando también depende de la naturaleza geométrica del sólido (propiedades direccionales de los poros), se trata de un medio anisótropo y la permeabilidad se convierte en un tensor simétrico de segundo orden.^[29]

La base de la teoría del flujo de fluidos a través de un medio poroso está fundamentada en una experiencia muy simple que desarrolló Darcy en 1856, en la ciudad francesa de Dijón. El ingeniero Henry Darcy fue encargado del estudio de la red de abastecimiento de agua a la ciudad. Debía diseñar filtros de arena para

purificar el agua, así que se interesó por los factores que influían en el flujo del agua a través de los materiales arenosos.

Henry Darcy publicó una expresión obtenida a partir de sus experimentos, la cual describe la velocidad media de flujo de un fluido homogéneo en régimen laminar, que pasa a través de un lecho poroso isotrópico.^[11]

$$v = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \right) \quad (1.3)$$

en donde K es la permeabilidad del medio poroso, la cual tiene dimensiones de L².

Aunque la naturaleza de la ley de Darcy es empírica, describe que dicha ley es equivalente a las ecuaciones de Navier-Stokes, por lo que se emplea como ecuación de movimiento de un fluido a través de medios porosos y una de sus aplicaciones prácticas es el estudio de operaciones de filtración.^[29] En forma tridimensional, la ecuación de Darcy toma la forma siguiente:

$$\mathbf{v} = -\frac{\bar{\mathbf{K}}}{\mu} (\nabla \bar{P} - \rho \bar{\mathbf{g}}) \quad (1.4)$$

La ley de Darcy evita la dificultad de representar el perfil de velocidad puntual por la introducción de una velocidad promedio definida como el cociente del flujo volumétrico a través de una sección dada del medio poroso.^[4] En la postulación de la ley de Darcy se han hecho varias consideraciones tales como: los efectos inerciales se han ignorado y las pérdidas por fricción se han balanceado solamente con la caída de presión y las fuerzas volumétricas, flujo saturado, fluido homogéneo, isótropo e incompresible. Por lo tanto, esta ley es sólo válida para pequeñas velocidades de flujo. Una desventaja original de la ley de Darcy, es que no requiere de la condición de la velocidad en las fronteras del medio poroso (paredes que lo contienen), lo cual hace que dicha ley sea únicamente válida lejos de estas fronteras. Con base en lo anterior se han publicado una serie de modificaciones a la ley de Darcy, algunas de las cuales se comentan a continuación.

1.5 Teoría fractal

Todos los sistemas naturales presenta un complejo arreglo estructural a partir de diversas unidades elementales, cuyo origen depende de la naturaleza del sistema.^[15] Los rasgos principales que caracterizan el funcionamiento espacio-temporal de estos sistemas son la variabilidad y heterogeneidad.^[9] Ambos rasgos determinan la rugosidad de los patrones espaciales y temporales de las medidas útiles para describir la estructura de un sistema cuya caracterización precisa y exacta es básica para conocer el mundo real.^[21] Identificar y descubrir cuantitativamente la rugosidad de estos patrones , es el objetivo de la Geometría fractal.

Numerosos patrones estructurales de sistemas y fenómenos naturales, presentan un comportamiento similar dentro de cierto intervalo de escalas de observación , independientemente de su origen.^[3] Los casos que evidencian este comportamiento son: la rugosidad de las fronteras de objetos irregulares, interfaces solido-poro de medios fracturados^[31], sistemas de poros o fracturas que se forman en materiales naturales o artificiales^[27], estructura de los compuestos físicos complejos como geles o polímeros ,heterogeneidad de las aleaciones metálicas^[3], sistemas de cavernas , estructuras geográficas y sistemas ecológicos con organización jerárquica y estructuras biológicas irregulares, entre otros.

Autores consideran que la descripción del comportamiento espacio-temporal de sistemas complejos, tienen que dirigirse a la predicción y prevención de las posibles fallas de estructuras ingenieriles, control de incendios forestales e incremento de la producción de petróleo en yacimientos naturalmente fracturados. Este tipo de estudios es igualmente importante para el análisis de la degradación de los recursos naturales.^[9]

El punto central para modelar los objetos naturales es definir su geometría con la mayor precisión posible.^[16] En cada campo de la ciencia se desarrollan y adoptan conceptos geométricos similares entre sí , que son empleados de manera intuitiva. A través del tiempo, las formas irregulares se han tratado de describir

simplificándolas y empleando la geometría de Euclides.^[2] Sin embargo , la naturaleza tiende a ser accidentada , no diferenciable y no rectificable, por lo que empleando solamente líneas o círculos no puede describirse con la precisión y exactitud necesarias. Aunque la simetría sigue siendo el fenómeno integrador de todos los procesos y sistemas, está lejos de ser regular. La teoría fractal ofrece un nuevo enfoque para el estudio de los sistemas complejos.

Por último, en la tesis abordamos la descripción del flujo un fluido no newtoniano para el modelo Ellis a través de un medio poroso, utilizando la teoría del poro promedio y la teoría fractal .En el capítulo II retomaremos los antecedentes más importantes del flujo en medios porosos, ecuaciones empíricas más importantes en la descripción del medio poroso y ecuaciones reológicas más utilizadas en la caracterización reológica de los fluidos que intervienen en estos sistemas.

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES

2.1 Ley de Darcy para un fluido newtoniano

2.1.1 Velocidad superficial en un medio poroso

El estudio de la mecánica de fluidos (newtonianos y no newtonianos) en medios porosos, es uno de los temas más fascinantes y atractivos para la gente que hace investigación en fenómenos de transporte y reología de todo el mundo. La descripción del transporte de cantidad de movimiento en el medio poroso es bastante complejo, debido a la distribución azarosa de los poros en el medio, la irregularidad del diámetro del poro y la tortuosidad.^[7,8,12,13] (Debido a esto, se han implementado diferentes aproximaciones de tipo analítico, con el fin de describir la dinámica en estos sistemas. Uno de los primeros intentos en la descripción del flujo en medios porosos, es el modelo de Darcy.^[7,8,12,13,32] Esta ecuación empírica se basa en la suposición del poro promedio, i.e. supone que todos los poros tienen el mismo diámetro y que el sistema puede ser descrito por un manojito de capilares. La ecuación de Darcy se representa como:

$$V_0 = \frac{k}{\mu} (-\nabla_z p) \quad (2.1)$$

La Ec. (2.1) describe la velocidad superficial V_0 en función de la permeabilidad k la cual, es una medida de la resistencia que presenta el medio poroso al paso de un fluido, la viscosidad μ que representa la resistencia del fluido a ser deformado mediante un esfuerzo cortante y el gradiente de presión $\nabla_z p$ que en este caso, es la fuerza motriz que genera la deformación en el fluido. La Ec. (2.1) representa el primer intento de describir el flujo en un medio poroso y en particular, para un fluido newtoniano, la permeabilidad k toma la siguiente forma analítica:

$$k(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon a^2}{8} \quad (2.2)$$

La permeabilidad intrínseca k solo depende de la porosidad y del cuadrado del radio del tubo y de un factor numérico que resulta de la integral de superficie en el flujo volumétrico. Evidentemente, se ha tratado de obtener ecuaciones empíricas que describan la permeabilidad intrínseca que es una medida de la capacidad que tiene el sistema (fluido), de ser deformado en un medio poroso [7,8,12,13]. En la tabla 1 se presenta un resumen de los modelos más utilizados en la investigación de fluido en medios porosos. Los modelos más empleados en la literatura son los de: (i) Darcy, (ii) Blake-Kozeny- Carman y (iii) Ergun.

Tabla 1. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso.

Modelo	Ecuación
Darcy	$\frac{\Delta p}{L} = \mu \frac{V_0}{K}$
Blake-Kozeny-Carman	$\frac{\Delta p}{L} = \frac{72 C \mu V_0 (1-\varepsilon)^2}{D_p^2 \varepsilon^3}$
Ergun	$\frac{\Delta p}{L} = \frac{150 \mu V_0 (1-\varepsilon)^2}{D_p^2 \varepsilon^3} + \frac{1.75 p V_0 (1-\varepsilon)}{D_p \varepsilon^3}$

Modelo de Darcy

El modelo de Darcy , es un modelo que puede ser deducido suponiendo la teoría promedio del capilar, es decir que todos los poros son aproximados por medio de un capilar de radio constante. Este puede ser deducido a partir de las ecuaciones Navier-Stokes de la mecánica de fluidos, despreciando la inercia del material y suponiendo estado estacionario. [7,8,12,13,32] Es importante, comentar que el modelo de Darcy solo es válido para flujo isotérmico, estado estacionario y solo toma en cuenta los mecanismos viscosos. El modelo de Darcy ha sido extendido para tomar en cuenta efectos complejos como los observados en fluidos no newtonianos en situaciones de varias fases termodinámicas. Varias generalizaciones del modelo de Darcy han sido deducidas incluyendo efectos no lineales como la inercia y la elasticidad respectivamente. [32,33,34]

Modelo Blake-Kozeny-Carman (BKC)

El modelo empírico de Blake-Kozeny-Carman es uno de los más importantes y populares en la dinámica del medio continuo, para describir el flujo a través de los medios porosos. Este modelo empírico incorpora la porosidad del medio ε , el diámetro del poro D_p y la tortuosidad del medio poroso, i.e. el camino libre que siguen los elementos materiales en el medio poroso. Por último, el modelo de BKC ha sido aplicado en flujo laminar a través de columnas empacadas a números de Reynolds pequeños, en donde los efectos cinéticos debido a la tortuosidad del fluido en la cama empacada son despreciables. Extensiones empíricas de este modelo para describir la transición de flujo laminar a turbulento ha sido reportado en la literatura especializada concerniente al tema.

Modelo de Ergun

El modelo de Ergun contiene dos contribuciones principales. La primera de ellas asociada a los mecanismos viscosos y diámetro del poro, el segundo toma en cuenta los mecanismos inerciales a través de la densidad del medio. Es importante comentar que estos modelos son empíricos y la gran mayoría de estos sistemas relacionan la fuerza motriz con las propiedades materiales del medio como son: (i) La viscosidad, (ii) la inercia, (iii) EL tamaño de partícula y (iv) La tortuosidad del medio. Otra hipótesis importante, en estas propuestas es la de flujo laminar, i.e., que el número de Reynolds es menor a 200, i.e. $Re < 2100$. Por otra parte si, el número de Reynolds aumenta se tendría que modificar las aproximaciones de flujo debido a que los mecanismos inerciales juegan un papel preponderante en la descripción del flujo turbulento.^[7,8,32]

2.2 Modelos no-newtonianos para la descripción del flujo en el medio poroso

Los fluidos newtonianos muestran una relación lineal entre el tensor rapidez de deformación y tensor de esfuerzos. Cuando los sistemas complejos de estudio presentan una relación no lineal, se necesita introducir ecuaciones empíricas o fenomenológicas que describan con un grado mayor de exactitud el flujo y la reología de estos sistemas. Cuando la viscosidad del fluido presenta una dependencia con la rapidez de deformación, puede ser representada por medio de una función llamada función viscosidad. Si el fluido presenta componentes viscosas y elásticas, este puede ser estudiado incorporando la dinámica de Hook en las ecuaciones constitutivas. Los modelos viscoelásticos pueden ser estudiados en el régimen de viscoelasticidad lineal (bajas deformaciones) y en el régimen de viscoelasticidad no lineal (altas deformaciones). En la tabla 2 se muestran alguno de los modelos no newtonianos más empleados en la literatura especializada en fenómenos de transporte y reología.

Tabla 2. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso.

Modelos	Modelo Reológico	Función Viscosidad
Ley de potencia	$\sigma=2\eta(\Pi_D)D$	$\eta(\Pi_D)=m(n\sqrt{2}(D:D))$
Ellis	$\sigma=2\eta(\Pi_D)D$	$\eta(\Pi_\sigma)=\frac{\eta_0}{1+\left(\frac{ \sigma }{\sigma_{1/2}}\right)^{\alpha-1}}$
Reinner Phillipoff	$\sigma=2\eta(\Pi_D)D$	$\eta(\Pi_\sigma)=\frac{1}{\phi_\infty+\frac{\phi_0-\phi_\infty}{1+\left(\frac{ \sigma }{\sigma_s}\right)^2}}$
Carreau	$\sigma=2\eta(\Pi_D)D$	$\eta(\Pi_D)=\eta_\infty\frac{\eta_0-\eta_\infty}{\left[1+(\lambda \Pi_D)^2\right]^{(1-n)/2}}$
Hershel-Burkley	$\sigma=2\eta(\Pi_D)D$	$\eta(\Pi_D)=\frac{\eta_\infty}{\Pi_D}+m(\Pi_D)^{n-1}$

Maxwell	$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2\eta_0 D$	$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$
Jeffreys	$\sigma + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2 \left(1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \eta_0 D$	$\eta = \eta_0 \frac{1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$
Convectiva Superior de Maxwell	$\sigma + \lambda_M \overset{\nabla}{\sigma} = 2\eta_0 D$	En corte es la misma que el fluido newtoniano
Oldroyd-B	$\sigma + \lambda_M \overset{\nabla}{\sigma} = 2\eta_0 \left(D + \lambda_j \overset{\nabla}{D} \right)$	En corte es la misma que el fluido newtoniano

2.3 Ley de Darcy para un fluido no newtoniano (Ley de Potencia)

El modelo de Darcy ha sido modificado para tomar en cuenta los efectos adelgazantes y engrosantes al corte debido a las características no newtonianos de sistemas complejos.^[7,8,12,13,32] La diferencia del modelo de Darcy de un fluido newtoniano y uno no newtoniano radica en la viscosidad aparente μ . Por ejemplo, para un fluido no-newtoniano tipo ley de potencia el modelo de Darcy toma la forma general:

$$V_0 = \varepsilon \langle V \rangle = \varepsilon \frac{Q}{A} = \frac{k}{\mu_{NN}} (-\nabla_z p) \quad (2.3)$$

En donde la viscosidad aparente toma la forma para un fluido tipo ley de potencia tiene la siguiente representación:

$$\mu_{app} = m \left(\frac{\langle V \rangle}{D} \right)^{n-1} \quad (2.4)$$

En la Ec. (2.4) V es la velocidad promedio del sistema y D es la longitud característica del sistema asociado al diámetro del capilar, m y n son los parámetros del modelo de ley de potencia. Es importante, notar que el cociente

$\langle V \rangle / D$ es la rapidez de deformación característica del modelo de ley de potencia.

La velocidad superficial para el modelo de ley de potencia:

$$V_0 = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left(-\frac{1}{2m} \nabla_z p \right)^\alpha \quad (2.5)$$

Cuando $n = 1$ se obtiene el modelo de Darcy para el fluido newtoniano.

2.4 Estado del arte del flujo de fluidos en medios porosos

En 2014 Meijuan Yun Presentó en sistema fractal y calculó el flux, flujo volumétrico, viscosidad efectiva, viscosidad aparente, y la permeabilidad efectiva para el fluido de ley de potencia basado en las propiedades fractales de medios porosos. Las expresiones propuestas dan cuenta de la descripción cuantitativa de la relación entre las propiedades del fluido de ley de potencia y los parámetros de la microestructura del medio poroso. Las predicciones del modelo se compararon con los datos correspondientes y se halló una buena concordancia entre ellos. Las expresiones analíticas contribuirán a la manifestación de los principios físicos para el flujo de fluidos de ley de potencia en medios porosos.

En 2008 Yonghua et al. Presentaron en su artículo las características de flujo de fluido de Ellis en medios porosos saturados. Un modelo fractal es desarrollado para la permeabilidad efectiva de Ellis flujo de fluidos en medios porosos basados en los supuestos de que los medios porosos consisten en un conjunto de capilares tortuosos, cuya distribución y tamaño de tortuosidad seguir las leyes de escala fractal. La velocidad de flujo media y la permeabilidad efectiva para Ellis flujo de fluido en medios porosos son obtenidas. El modelo fractal propuesta no contiene ninguna constante empírica, y cada parámetro en el modelo tiene significado físico claro. Las predicciones del modelo se compararon con los datos medidos, y se obtiene una buena concordancia entre ellos.

En 2013 M. Turcio et al. Presentaron un artículo, en el cual se estudia un modelo fractal que es desarrollado para la permeabilidad efectiva utilizando el modelo Bautista-Manero-Puig (BMP) en medios porosos. Las principales hipótesis de este análisis implican un conjunto de capilares tortuosos cuyo tamaño distribución y tortuosidad seguir las leyes de escala fractal. La velocidad de flujo media y la permeabilidad efectiva para el flujo de fluido BMP en medios porosos son obtenidas. El modelo BMP no contiene parámetros de ajuste y cada constante del material en el modelo puede ser estimado a partir de mediciones reológicas independientes. Las predicciones del modelo fractal propuesto se compararon con los de otros modelos y con los datos experimentales disponibles.

2.6 Objetivos

2.6.1 Objetivo general

Analizar el comportamiento de un fluido no newtoniano en un medio poroso a partir de las teorías de poro promedio y fractal .

2.6.2 Objetivo particular

- a) Describir la transferencia de momento y reología de un fluido no newtoniano. Para caracterizar el estado reológico del sistema se utiliza el modelo constitutivo de Ellis.
El medio poroso es caracterizado con dos teorías:
 - i) teoría del poro promedio
 - ii) teoría fractal
- b) Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales acopladas se propone un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener los grupos adimensionales que describen la física del sistema.

- c) A partir de datos reométricos experimentales de un fluido de Ellis , calcular la velocidad superficial del sistema, y contrastar el resultado obtenido con nuestro modelo (Ellis Fractal).

2.7 Hipótesis

Si la distribución de los poros se puede modelar mediante capilares de distinto radio y longitud entonces la transferencia de momentum y su reología puede ser descrita a través de la teoría fractal que involucra diferentes radios y tortuosidades.

2.8 Justificación

Estudios realizados por la Agencia Internacional de Energía (AIE) revelan que la necesidad energética a nivel mundial, seguirá estando en función principalmente de la producción de hidrocarburos .Muchos de los procesos de la recuperación mejorada de hidrocarburos, especialmente en polímeros y espumas, implican el manejo de fluidos no-newtonianos, un ejemplo de esto es la inyección de tensoactivos viscoelásticos en arenas que contienen fluidos pesados y ligeros. El fluido no newtoniano que se inyecta tiene la función de reducir la tensión interfacial hasta un valor en el cual pueda desplazar el aceite residual y así generar un banco de aceite, donde el agua y el aceite fluyan como fases continuas. Este tipo de sistema presenta propiedades reológicas en estado estacionario y no estacionarios muy complejos por lo que el estudio de estos, con ecuaciones constitutivas sencillas permite cuantificar los efectos físicos que se presentan por efecto del flujo a través de medios porosos. Precisamente, este trabajo va en la dirección de estudiar fluidos no newtonianos a través de medios porosos con teorías que permitan entender la transferencia de momento considerando la naturaleza intrínseca de estos planos geométricos contenidos en el sistema de estudio (medio poroso). El modelo de Ellis en un geometría fractal es un alternativa que se propone con el de elucidar la física inmersa en estos

sistemas. El trabajo de esta tesis se analizó un fluido no-newtoniano a través de un medio poroso caracterizado por un fluido de Ellis, a partir de la ecuación constitutiva de Ellis se modeló la teoría del poro promedio y la teoría fractal respectivamente, la cual contiene tres propiedades materiales las cuales describen una primera zona newtoniana a bajas rapidezces de deformación, y una zona intermedia relacionada con el modelo de ley potencia a moderadas rapidezces de deformación.

Para alcanzar los objetivos e hipótesis antes planteadas el material de este trabajo de investigación se distribuye conforme con Figura 2

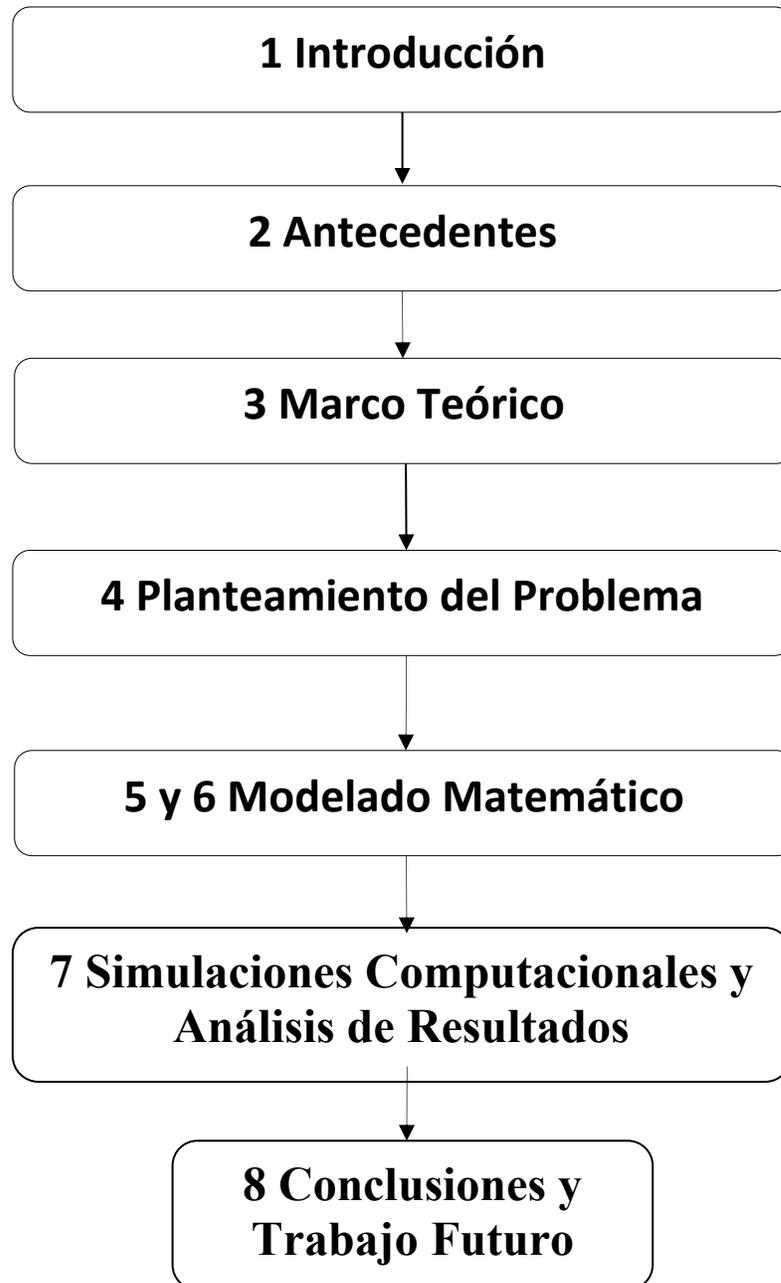


Figura 2. Organización del proyecto de tesis

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

3.1 Fenómenos de transporte

Los Fenómenos de Transporte, se define como la rama de la Ingeniería Química que estudia los mecanismos de transporte en momento, energía y masa. Los fenómenos de transporte pueden ser estudiados a nivel macroscópico, microscópico y molecular.^[7,8] La ecuación diferencial básica de transporte puede ser descrita en término de la derivada material D/Dt .^[7,8]

$$\frac{DX}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{X} = -\nabla \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{f} \quad (3.1)$$

Mecanismo de Transporte	X	Y	f
Momento Newton	$\rho \mathbf{V}$	$\phi = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{T} = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \rho \mathbf{I} + \sigma$	$\rho \mathbf{g}$
Energía Termodinámica Irreversible	$U = \rho C_p T$	$\mathbf{q} = -k \nabla T$	$\sigma : D$
Masa Conservación de los moles en un sistema	C_A	$\mathbf{N}_A = -c D_{AB} \nabla X_A + X_A (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)$	R_A
Continuidad Conservación de la masa	ρ	$\rho \mathbf{V}$	0

Tabla 3. Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa respectivamente.

El primer término de la Ec. (3.1), representa la derivada material de la propiedad X, la cual es igual a los cambios espaciales del flux a través de la divergencia del flux Y y por último la fuente.^[7,8]

3.1.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento

La ecuación de momento, se basa principalmente en la segunda ley de Newton del movimiento en un medio continuo, la cual puede ser escrita de la siguiente manera ^[7,8]:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (3.2)$$

En la Ec. (3.2) ρ es la densidad del líquido, \mathbf{V} es el vector de velocidad, p es el gradiente de presión, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscoso, y \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad, que en el campo terrestre es constante. Si el fluido que describe la relación del tensor de esfuerzos con la rapidez de deformación es lineal, la Ec. (3.2) se transforma en la Ec. de Navier-Stokes para los fluidos newtonianos ^[7,8]:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (3.3)$$

La Ec. (3.3) es base para el cálculo de la porosidad y del flujo en un medio poroso.

3.1.2 La ecuación de transporte de energía

La ecuación de energía $U = \rho C_p T + \text{const.}$, se puede interpretar como una extensión de la primera ley de la termodinámica a un sistema irreversible, en donde el tiempo si es una variable importante, ya que desde el punto de vista clásico, no es tomada en cuenta. Se tiene lo siguiente ^[7,8]:

$$\frac{D}{Dt} U = \rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) T = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = k \nabla^2 T + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (3.4)$$

La Ec. (3.4) describe la evolución temporal y espacial de la temperatura como función como una consecuencia del flux de energía, y del trabajo irreversible realizado por un agente externo sobre los mecanismos viscosos. ^[7,8] La Ec. (3.4) es

punto de partida en los cálculos del perfil de temperatura asociado a los procesos moleculares y los disipativos respectivamente.

3.1.3 Ecuación de transporte de masa

La Ecuación que describe los cambios espaciales y temporales del flujo molar puede ser descrita a través de la siguiente expresión:

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = cD_{AB} \nabla^2 x_A - \nabla x_A \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) - x_A \nabla \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) + R_A \quad (3.5)$$

La Ec. (3.5) describe los cambios temporales y espaciales de la concentración de la especie A por efecto de los mecanismos difusivos y de las contribuciones de los cambios espaciales a través del movimiento global del fluido. Cuando el movimiento global del fluido se desprecia es decir, los cambios espaciales en el movimiento global del fluido son despreciables y solamente los mecanismos difusivos y el término de generación es determinado, se tiene lo siguiente^[7,8]:

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = D_{AB} \nabla^2 (cx_A) - k_n C_A^n = D_{AB} \nabla^2 C_A - k_n C_A^n \quad (3.6)$$

La Ec. (3.6) describe los cambios espaciales y temporales de la concentración como función de los mecanismos difusivos y de reacción química respectivamente.

3.2 Reología

La reología, es decir la ciencia del flujo y la deformación, estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de

Hooke por otra parte. La reología es la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia^[7,8]. Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material. Un sistema es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante. En su forma más simple, la viscosidad μ es una propiedad de transporte, que se puede interpretar como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo.^[7,8]

3.2.1 Tensor de deformación

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual nos describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable. El tensor de deformación, es adimensional debido a que $[u_i] = L; [x_i] = L$. Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera^[7,8]:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Nótese, que el tensor de deformación carece de unidades por ser el cociente de dos longitudes características.

3.2.2 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera [7,8].

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

A diferencia del tensor de deformación, el tensor gradiente tiene unidades de inverso del tiempo.

3.2.3 El tensor rapidez de deformación

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{V}$ puede ser descompuesto en una parte simétrica $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V})_s$ y anti simétrica $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V})_A$ llamados tensor rapidez de deformación y tensor de vorticidad [7,8]:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (3.9)$$

En coordenadas cartesianas (x, y, z), el tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma matricial [7,8].

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Es importante notar, que el tensor rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, esto implica que su transpuesta es igual al tensor, i.e. $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$. Físicamente, esta matriz simétrica nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado el sistema .^[7,8]

3.2.4 El tensor de vorticidad

El tensor de Vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el sistema ^[7,8]:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Es importante notar, que el tensor de Vorticidad, es un tensor de segundo orden simétrico, es decir, $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$. Físicamente nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo.^[7,8]

3.2.5 Tensor de esfuerzos

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzos normales.^[7,8] Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales.

3.3 Tipos de fluido

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos. En Mecánica del medio continuo, una ecuación constitutiva describe la relación entre las variables dinámicas en el sistema, en particular el esfuerzo y la deformación, i.e. $\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon})$.

3.3.1 Fluido newtoniano

Los newtonianos son fluidos en los que el deslizamiento relativo de los elementos de fluido al circular uno sobre otro es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son newtonianos.

Las pastas, emulsiones, fluidos biológicos, polímeros, suspensiones de sólidos y otras mezclas son probablemente no newtonianos. Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton de viscosidad, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. La viscosidad de un fluido newtoniano no depende del tiempo de aplicación de esfuerzo, aunque sí puede depender tanto de la temperatura como de la presión a la que se encuentre. En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} = \mu(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (3.13)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana μ y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (3.13), el tensor de esfuerzo cortante, $\boldsymbol{\sigma}$ tiene unidades de Pa y el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} tiene inverso de segundo respectivamente (1/s). Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen la Ec. (3.13) son newtonianos.

3.3.2 Fluidos no newtonianos

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son, en general, no-newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos no es lineal. Estos fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo.

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan propiedades aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple de un fluido newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto, la viscosidad no es constante y

depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión, composición, pH y la rapidez con la que se deforma.^[7,8]

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D} = \eta(\Pi_D)(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (3.14)$$

En la Ec. (3.14) $\eta(\Pi_D)$ es la función viscosidad generalizada, la cual depende del segundo invariante del tensor de rapidez de deformación, de la siguiente forma:

$$\Pi_D = \sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} \quad (3.15)$$

3.4 Teoría fractal

Geoméricamente existen objetos más complicados que un círculo, un cono o una esfera; sin embargo, podemos servirnos de ellos para simplificar nuestros intentos de reproducir la realidad. Basta hacer a un lado la dificultad de la figura y buscar la facilidad en el método de representación; quizá así descubramos que detrás de la formación de un cuerpo complejo no necesariamente se esconde un mecanismo muy elaborado.

A este tipo de formas geométricas que, entre otras propiedades, contienen una imagen de sí mismas en cada una de sus partes, se le llama ahora fractales, y hace ya más de una década que inundaron el mundo científico con un conjunto de nuevas reglas para enfrentarse con el reto de conocer y describir la naturaleza. Su lenguaje se amplió a campos increíblemente diversos de las ciencias naturales y sociales, y ha hecho de las matemáticas un instrumento novedoso para las artes.

Las herramientas de la geometría fractal son, hoy día, elementos insustituibles en el trabajo de muchos físicos, químicos, biólogos, fisiólogos, economistas, etc., pues les han permitido reformular viejos problemas en términos novedosos, y tratar problemas complejos de forma muy simplificada. Las formas fractales, que durante mucho tiempo se consideraron meras "monstruosidades" geométricas e inaplicables matemáticamente, subyacen en fenómenos y estructuras tan variadas como la distribución de las estrellas del Universo, la

ramificación en los pulmones, la frontera difusa de una nube, las fluctuaciones de precios en un mercado, etc.

Hay fractales en los depósitos y agregados electroquímicos, y en la trayectoria de las partículas de polvo suspendidas en el aire. Fractales escondidos en la dinámica de crecimiento poblacional de colonias de bacterias, y detrás de todo flujo turbulento. Fractales en todas partes.

Un grupo de matemáticos comenzó a darse cuenta que en la naturaleza se daban muy frecuentemente este tipo de irregularidades y que no eran excepciones como se suponía. Los primeros que comenzaron a demostrar teóricamente esta problemática fueron Cantor (con su famoso conjunto de Cantor) y Peano. Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1890 por el francés Henri Poincaré. Sus ideas fueron extendidas más tarde por dos matemáticos también franceses, Gastón Juliá y Pierre Fatou, hacia 1918. Los trabajos realizados en este campo quedaron detenidos en los años 20. El estudio de los fractales fue renovado a partir de 1974 en IBM y fue fuertemente impulsado por el desarrollo de la computadora digital. El doctor Mandelbrot de la Universidad de Yale, que es considerado el padre de la Geometría Fractal, realizó incontables experimentos con computadoras. En su honor uno de los conjuntos que él investigó lleva su nombre. En 1980, la publicación de su libro La Geometría Fractal de la Naturaleza popularizó la geometría fractal a nivel mundial.

3.4.1 Definición de fractal

Según Mandelbrot Benoit los fractales: son curiosos objetos geométricos generados por la iteración infinita de un algoritmo bien especificado. La dimensión de un fractal, es matemáticamente una figura geométrica que es compleja y detallada en estructura a cualquier nivel de magnificación.

Un fractal es un cuerpo irregular, pero lo más importante es que si lo ampliamos arbitrariamente, seguirá siendo irregular ya que es una figura que mantiene su forma original aunque se le cambie la escala, es decir, por más veces

que se le modifique la dimensión seguiremos obteniendo una figura similar a la anterior. En general los fractales son figuras geométricas que se caracterizan por su semejanza, son estructuras infinitas que podrás dividir y dividir, fraccionar y fraccionar cuantas veces desees y seguirán teniendo la misma estructura sin cambiar, a pesar de que siempre se encontraran en una superficie finita.

Para representar gráficamente un fractal basta por tanto encontrar la relación o la ley de recursividad entre las formas que se repiten, es decir, encontrar el objeto elemental y la ley de formación y establecer el algoritmo gráfico.

Las dos características fundamentales que poseen los objetos fractales son:

-Autosimilitud: es la característica que presentan determinados objetos, en los cuales los detalles más pequeños que lo componen tienen alguna relación estadística con sus propiedades globales, repitiéndose tales detalles de una manera infinita.

-Dimensión Fractal o dimensión de Hausdorff: es considerado el concepto principal de la Geometría Fractal, ya que los objetos fractales se caracterizan por poseer dimensión fraccionaria.

3.4.2 Dimensión fractal

Los fractales deben de poseer una dimensión que debe ser no entera y cuya dimensión fractal debe de superar a su dimensión topológica. Las dimensiones topológicas son las siguientes:

Dimensión -1 (conjunto vacío)

Dimensión 0 (un punto)

Dimensión 1 (una línea recta)

Dimensión 2 (un plano)

Dimensión 3 (el espacio)

Como los fractales están compuestos por elementos cada vez más pequeños de sí, el concepto de longitud pasa a ser algo complejo por lo que mediremos los fractales por su dimensión.

El cálculo de la dimensión de un objeto nos permitirá conocer si ese objeto es o no un fractal. La dimensión fractal que sugirió Felix Hausdorff en 1919 es una propiedad que nos indica su capacidad para rellenar el espacio que lo contiene, y puede tomar valores continuos en el espacio de los números, entre 0 y 3.

3.4.3 Tipos de fractales

Podemos clasificar los fractales por las siguientes características:

Los fractales lineales son aquellos que se construyen con un cambio en la variación de sus escalas. Algunos ejemplos son los mostrados en la figura.

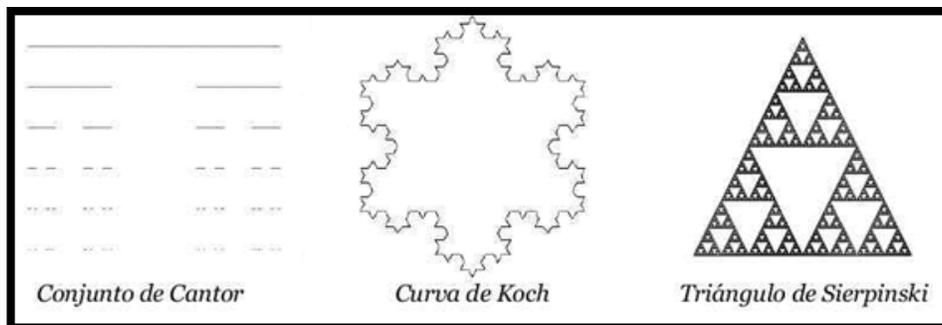


Figura 3. Tipos de Fractales Lineales

En cambio, los fractales no lineales son aquellos que se generan a partir de distorsiones complejas o justamente como lo dice su nombre, y usando un término proveniente de la matemática caótica, distorsiones no lineales.

La mayoría de los objetos fractales puramente matemáticos y naturales son no lineales. Algunos ejemplos se pueden observar en la Figura

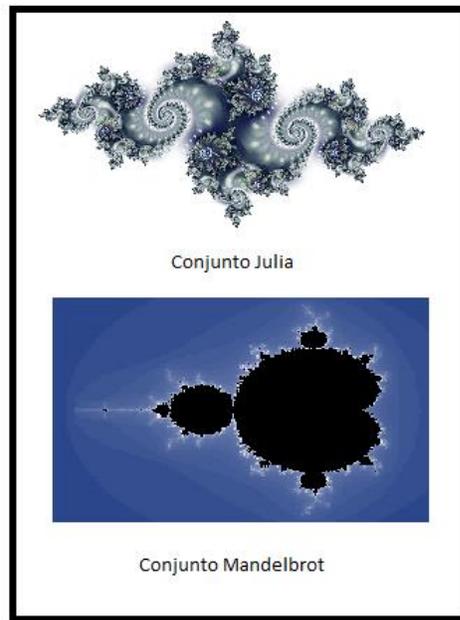


Figura 4. Tipos de Fractales no Lineales

3.4.4 Características de un fractal en un medio poroso

La medida de un objeto fractal, $M(L)$ está relacionado con la escala de longitud L , a través de la Ley de Escala en la forma de^[16,21]:

$$M(L) \sim L^{D_f} \quad (3.16)$$

D_f es la dimensión del fractal, y M puede ser la longitud de una línea, una superficie, el volumen de un cubo o la masa de un objeto.

El número acumulado (N) de unos objetos fractales (el número de poros en un medio poroso) y el tamaño (radio r) de objetos fractales siguen la ley de Escala Fractal.^[5,6]

$$N(L \geq \lambda) = \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda} \right)^{D_f} \quad (3.17)$$

λ es el poro /tamaño capilar y λ_{\max} es el máximo poro/tamaño capilar para un medio poroso. Si el poro es circular con un radio r , Ec. (3.17) se convierte en

$$N(L \geq r) = \left(\frac{r_{\max}}{r} \right)^{D_f} \quad (3.18)$$

r_{\max} es el máximo poro/radio capilar. Derivando la Ec. (3.18) con respecto a r , resulta en el número de poros /capilares cuyos tamaños dentro del intervalo infinito de r a $r+dr$:

$$-dN = D_f r_{\max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr \quad (3.19)$$

Donde $dr > 0$. El signo negativo en la Ec. (3.19) implica que el número de poros disminuye con el aumento del tamaño de los poros y $dN > 0$. El número de poros se convierte infinito como $r \rightarrow 0$, que es una de las propiedades de un fractal. La Ec. (3.19) describe la relación de escala del número de poro acumulativo .El número total de poros, del r_{\min} más pequeño hasta el más grande radio r_{\max} , puede ser obtenida como:

$$N_t(L \geq r_{\min}) = \left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}} \right)^{D_f} \quad (3.20)$$

D_f es la dimensión fractal para espacios porosos, $1 < D_f < 3$, y en dos dimensiones $1 < D_f < 2$. Los capilares tortuosos también pueden ser descritos por la Ley escala Fractal [5]:

$$L_t = L_0^{D_T} \lambda^{1-D_T} \quad (3.21)$$

$$L_t = L_0^{D_T} (2r)^{1-D_T} = 2^{1-D_T} L_0^{D_T} r^{1-D_T} \quad (3.22)$$

D_T es la tortuosidad de un fractal, $1 < D_T < 2$ en dos dimensiones, que representa la convolucion de capilares para un fluido a través de un medio poroso. En la Ec. (3.22) L_0 representa la longitud, $L_T(r)$ es la tortuosidad en la longitud a lo largo de la dirección del flujo. Debido a la tortuosidad natural del capilar $L_t(r) \geq L_0$.

Derivando la Ec. (3.22) con respecto a L_0 :

$$dL_t = L_0^{D_T-1} 2^{1-D_T} r^{1-D_T} D_T dL_0 \quad (3.23)$$

La Dimensión Fractal (D_f) esta dada por :

$$D_f = 2 - \left(\frac{\ln \phi}{\ln \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)} \right) \quad (3.24)$$

En donde ϕ es la porosidad en el medio poroso.

La Tortuosidad Fractal (D_T) se expresa como:

$$D_T = 1 + \frac{\ln T}{\ln \left(\frac{L_0}{2r_{av}} \right)} \quad (3.25)$$

T es la tortuosidad promedio de capilares tortuosos y r_{av} es el radio medio de los capilares. El propósito de introducir la tortuosidad de los capilares tortuosos es para incluir el efecto de la complejidad de la forma geométrica de la permeabilidad del fluido. Para trayectos de flujo en medios porosos, la relación entre la tortuosidad promedio y la porosidad se puede obtener como:

$$T = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{1-\phi} + \sqrt{1-\phi} \right) \left(\frac{\sqrt{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-\phi}} \right) - 1 \right)^2 + \frac{1}{4}}}{1 - \sqrt{1-\phi}} \right) \right] \quad (3.26)$$

El radio medio de los capilares r_{av} puede ser encontrada:

$$r_{av} = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r f(r) dr = \frac{D_f r_{\min}}{D_f - 1} \left(1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_f - 1} \right) \quad (3.27)$$

Y Por ultimo Los parámetros estructurales para medios porosos fractal son:

$$L_0 = R \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}(1-\phi)}} \quad (3.28)$$

$$r_{\max} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{2\phi}{1-\phi}} \quad (3.29)$$

$$\frac{r_{\min}}{r_{\max}} = \frac{\sqrt{2(1-\phi)}}{24} \quad (3.30)$$

En donde R es el radio medio de partículas en medios porosos. Una vez que el valor de la media R, radio de la partícula y la ϕ porosidad se encuentran, los parámetros de la estructura y las dimensiones fractales de medios porosos se pueden determinar. Las Ecs. (3.24 - 3.30) forman la base teórica del presente trabajo.

CAPÍTULO IV

PLANTEAMIENTO DEL

PROBLEMA

4.1 Descripción del problema físico del flujo de Poiseuille en el medio poroso

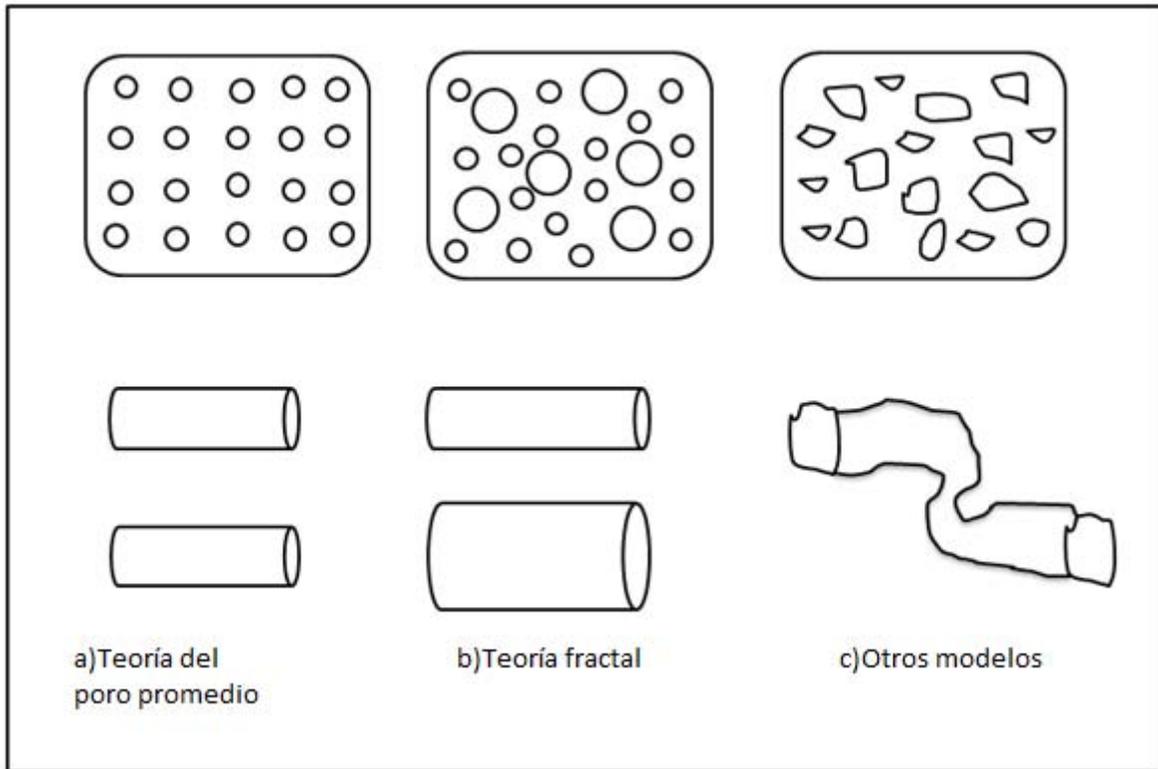


Figura 5. Ilustra la geometría que se utiliza en la descripción de un sistema poroso. En la figura a) se ilustra el sistema físico mediante la teoría del poro promedio, b) los capilares son de diferente diámetro teoría fractal) los capilares tienen geometrías irregulares.

En esta sección se modela el medio poroso caracterizado por la ecuación constitutiva de Ellis en sus dos modalidades sin fractal y con fractal. Esta ecuación acopla el esfuerzo cortante del solvente, con el del polímero por lo que contiene tres parámetros materiales. La Fig. (5) ilustra el sistema de estudio en la presente tesis. Se tienen un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ en donde un fluido complejo fluye por efecto de un gradiente de presión constante.

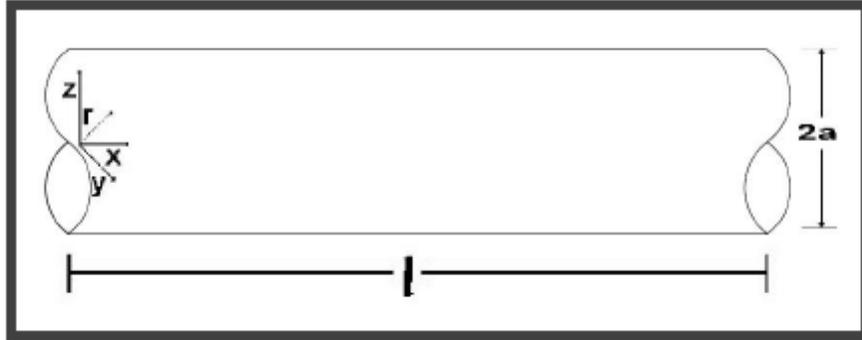


Figura 6. Ilustra el tubo capilar donde pasara el fluido no newtoniano

Las condiciones de proceso son mencionadas a continuación

- a) Proceso en estado estacionario: Ningún atributo o variable dinámica del sistema depende del tiempo, matemáticamente significa que la derivada con respecto al tiempo es cero, i.e. $\partial \{ \} / \partial t = 0$.
- b) Proceso Isotérmico: El sistema mantiene su temperatura constante, i.e. no es necesario incluir el balance de energía térmica en los cálculos. Los cambios temporales y espaciales de la temperatura son cero y matemáticamente se expresa como: $\partial T / \partial i = 0$; $i = \{t, x\}$, en donde x es cualquier coordenada generalizada.
- c) Fluido Incompresible: El fluido mantiene su densidad constante, i.e. la densidad no depende de la posición ni del tiempo. Matemáticamente se tiene un campo solenoidal en donde la divergencia del vector velocidad es cero: $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
- d) Flujo unidireccional, i.e. el campo de velocidades solo tiene una componente en la dirección del eje coordenado z :

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r, \theta, z))$$
- e) Efectos gravitacionales no se toman en cuenta, i.e. el campo gravitacional no es la fuerza motriz que deforma el fluido, por lo que se desprecia en las simulaciones pertinentes.
- f) El sistema de coordenadas se coloca en el centro del tubo en dirección del flujo, como se observa en la Fig. 6. EL eje z corresponde a la velocidad del

sistema, el eje r al del gradiente de velocidad y el eje θ representa al de la Vorticidad.

- g) Existe simetría cilíndrica en el sistema, i.e. ninguna variable, atributo o característica del sistema depende de la coordenada angular θ .

4.2 Dinámica de flujo

4.2.1 Vector de velocidad

El vector de velocidad en este sistema de flujo está dado por el siguiente vector renglón:

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r, \theta, z, t)) \quad (4.1)$$

4.2.2 Tensores cinemáticos

- a) Tensor gradiente de velocidad

Utilizando el tensor gradiente de velocidad definido en el Cap. III en coordenadas cilíndricas, y el vector de velocidad en la Ec. (4.1), se tiene la siguiente matriz cuadrada

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Físicamente el tensor gradiente de velocidad, da información acerca de los cambios de la velocidad en dirección espacial.

b) Transpuesta del tensor gradiente de velocidad

$$(\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_z}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Tensores dinámicos

Físicamente, este tensor nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado el sistema, en este caso, la transferencia de momento se da en la dirección del eje coordenado z y se transmite en la dirección ortogonal a z en este caso r.

c) Tensor rapidez de deformación

A partir de las definiciones del capítulo III, el tensor rapidez de deformación **D** se construye a partir del tensor gradiente de velocidad y su transpuesta respectivamente, i.e. $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T)/2$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_z}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \frac{dV_z}{dr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Físicamente, este tensor nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado el sistema, en este caso, la transferencia de momento se da en la dirección del eje coordenado x y se transmite en la dirección y.

d) Tensor de Vorticidad

A partir de las definiciones del capítulo II, el tensor rapidez de Vorticidad \mathbf{W} se construye a partir del tensor gradiente de velocidad y su transpuesta respectivamente, i.e. $\mathbf{W} = (\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T)/2$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - \nabla\mathbf{V}^T) &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_z}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \frac{dV_z}{dr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Este tensor nos da información acerca de las rotaciones materiales en el sistema. Por lo tanto, en un fluido cortante existen elementos cortantes que se deforman continua e irreversiblemente y que rotan por efecto del flujo

e) Tensor de esfuerzos

Matemáticamente el tensor de esfuerzos es una matriz simétrica que describe la transferencia de cantidad movimiento y físicamente nos da la distribución de las fuerzas en cada área de los elementos de control que son cortados debido al flujo.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

La Ec. (4.6) contiene información acerca de los elementos cortantes y extensionales respectivamente. Por ejemplo, los elementos cortantes son los responsables de deformar continua e irreversiblemente el fluido, y cumplen la condición $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ debido a la simetría del tensor de esfuerzo. Los elementos en la

diagonal principal $\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$, están asociados con la elasticidad del material en flujo cortante en estado estacionario. A partir de estos, se define la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales:

$$N_1 = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \begin{cases} \neq 0; \text{No-Newtoniano viscoelastico} \\ = 0; \text{Newtoniano} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$N_2 = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \begin{cases} \neq 0; \text{No-Newtoniano viscoelastico} \\ = 0; \text{Newtoniano} \end{cases}$$

El cálculo de la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales puede ser aplicado para explicar la formación de vórtices en contracciones y expansiones de flujo.

4.3 Ecuaciones de continuidad y momento

En esta sección se presentan las ecuaciones generales para el estudio del flujo electro-osmótico.

a) Ecuación de continuidad

Suponiendo que el fluido es incompresible y que el flujo es unidireccional, es decir que el vector velocidad solo tiene componente en y, entonces:

$$\overbrace{\frac{\partial p}{\partial t}}^{\text{Fluido-Incompresible}} + \underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0; V_x \neq f(x) \quad (4.8)$$

b) Ecuación de momento modificada por el campo eléctrico

La ecuación de momento es la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo. Aplicando un balance de fuerza a un elemento de control, se tiene la siguiente ecuación de carácter vectorial desacoplada toma la forma:

Componente x de la ecuación de movimiento modificada

“PERMEABILIDAD EN MEDIOS POROSOS: MODELO DE ELLIS EN UN SISTEMA FRACTAL”

$$\begin{aligned}
 \frac{\overset{=0}{\partial V_r}}{\partial t} + \underbrace{V_r \frac{\overset{=0}{\partial V_r}}{\partial r} + V_\theta \frac{\overset{=0}{\partial V_r}}{\partial \theta}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{V_z \frac{\overset{=0}{\partial V_r}}{\partial z}}_{\text{Ecuación de Continuidad}} = - \frac{\overset{=0}{\partial p}}{\partial r} + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{rr}}}{\partial r} + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{\theta r}}}{\partial \theta} + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{zr}}}{\partial z} + \underbrace{\overset{=0}{\rho g_r}}_{\text{Efectos Gravitacionales}} \\
 + F_{e_r}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Componente θ de la ecuación de movimiento modificada

$$\begin{aligned}
 \frac{\overset{=0}{\partial V_\theta}}{\partial t} + \underbrace{V_r \frac{\overset{=0}{\partial V_\theta}}{\partial r} + V_\theta \frac{\overset{=0}{\partial V_\theta}}{\partial \theta}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{V_z \frac{\overset{=0}{\partial V_\theta}}{\partial z}}_{\text{Ecuación de Continuidad}} = - \frac{\overset{=0}{\partial p}}{\partial \theta} + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{r\theta}}}{\partial r} + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{\theta\theta}}}{\partial \theta} \\
 + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{z\theta}}}{\partial z} + \underbrace{\overset{=0}{\rho g_\theta}}_{\text{Efectos Gravitacionales}} + \underbrace{\overset{=0}{F_{e_\theta}}}_{\text{No hay campo Electrico en la dirección } \theta}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Componente z de la ecuación de movimiento modificada

$$\begin{aligned}
 \frac{\overset{=0}{\partial V_z}}{\partial t} + \underbrace{V_r \frac{\overset{=0}{\partial V_z}}{\partial r} + V_\theta \frac{\overset{=0}{\partial V_z}}{\partial \theta}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{V_z \frac{\overset{=0}{\partial V_z}}{\partial z}}_{\text{Ecuación de Continuidad}} = - \frac{\overset{=0}{\partial p}}{\partial z} + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{rz}}}{\partial r} + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{\theta z}}}{\partial \theta} \\
 + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{zz}}}{\partial z} + \underbrace{\overset{=0}{\rho g_z}}_{\text{Efectos Gravitacionales}} + \underbrace{\overset{=0}{F_{e_z}}}_{\text{No hay campo electrico en la dirección } z}
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Aplicando las hipótesis anteriores (estado estacionario, fluido incompresible, solo hay transferencia de momento en la componente yx del tensor de esfuerzos, se llega a la siguiente expresión simplificada.

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = - \frac{\partial p(t)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz})
 \tag{4.12}$$

4.4 Ecuaciones constitutivas

a) Modelo Newtoniano

El modelo Newtoniano es el más simple de todos, este relaciona el tensor de esfuerzos con el tensor rapidez de deformación y solamente contiene una propiedad material conocida como viscosidad cortante

$$\sigma_{rz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{rz} \quad (4.13)$$

b) Modelo de Ostwald (Ley de potencia)

El modelo de ley de potencia es una generalidad del modelo Newtoniano, este relaciona dos variables $\{\alpha, \phi_1\}$ en el cual, α es el exponente asociado a la parte no newtoniana que describe los procesos adelgazantes o engrosantes al corte. Un valor de α mayor a 1, i.e. $\alpha >> 1$ significa que el flujo es adelgazante al corte por lo que la función viscosidad decrece en función de la rapidez de deformación dVz/dr . Por otra parte, cuando $\alpha << 1$ el fluido es engrosante al corte, i.e., aumenta su viscosidad conforme la rapidez de deformación aumenta dVz/dr . Nótese que cuando el valor del exponente $\alpha = 1$, se recupera el modelo Newtoniano. El valor de ϕ_1 puede interpretarse como una fluidez generalizada la cual, describe la zona intermedia en un Reograma viscosidad vs rapidez de deformación.

$$\dot{\gamma}_{rz} = \phi_1 (\sigma_{rz})^{\alpha-1} \sigma_{rz} \quad (4.14)$$

c) Modelo Ellis

El modelo de Ellis, contiene tres propiedades materiales las cuales describen una primera zona newtoniana a bajas rapidezces de deformación, y una zona intermedia relacionada con el modelo de ley potencia .^[7] Este modelo puede ser deducido mediante una combinación del modelo newtoniano y el de ley de potencia respectivamente, suponiendo que la rapidez de deformación es aditiva,

es decir que la rapidez de deformación total es la suma de la contribución newtoniana y la contribución del modelo no-newtoniano (Ostwald) [7]. La ecuación constitutiva de Ellis, contiene tres parámetros ajustables denotados por: $\{\phi_0, \phi_1, \alpha\}$, los cuales están relacionados con la fluidez a cortes bajos y moderados, y al inverso del índice del modelo de ley de potencia. Este modelo admite soluciones analíticas en flujo cortante simple en diferentes situaciones de flujo para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, función viscosidad, rapidez de deformación, etc. La ecuación constitutiva para un fluido de Ellis es descrita por [17]

$$\dot{\gamma}_{rz} = \phi_0 \sigma_{rz} + \phi_1 (\sigma_{rz})^{\alpha-1} \sigma_{rz} \quad (4.15)$$

En el siguiente capítulo se calculará el esfuerzo en la pared, viscosidad aparente, perfil de velocidades, flujo volumétrico, velocidad promedio y la permeabilidad intrínseca para el modelo de Ellis utilizando la teoría del poro promedio anteriormente mencionado.

CAPÍTULO V MODELADO MATEMÁTICO: A) MODELO DE ELLIS TEORÍA DEL PORO PROMEDIO

En este capítulo se presenta el modelado en el medio poroso con la ecuación constitutiva de Ellis utilizando la teoría del poro promedio para describir la geometría del sistema.

5.1 Modelo de Ellis

El modelo de Ellis, es un modelo empírico que contiene como casos particulares al modelo de Newton y el de ley de Potencia. El modelo se puede expresar como una superposición del modelo newtoniano y ley de potencia, es decir:

$$\dot{\gamma}_{rz} = \underbrace{\dot{\gamma}_{rz}}_{\text{Newtoniano}} + \underbrace{\dot{\gamma}_{rz}}_{\text{Ley de Potencia}} \quad (5.1)$$

La rapidez de deformación rz del modelo de Ellis toma la forma:

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{dV_z}{dr} = \phi_0 \sigma_{rz} + \phi_1 (\sigma_{rz})^\alpha \quad (5.2)$$

a) Esfuerzo Cortante

A partir de las ecuaciones generales de momento y suponiendo que los efectos inerciales son despreciables, la ecuación de momento modificada es:

$$\rho \frac{dV_z}{dt} = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\sigma_{rz}) \quad (5.3)$$

Despreciando los efectos inerciales de la Ec. (5.3), i.e.se obtiene un balance entre el gradiente de presión y las fuerzas viscosas, $\rho \frac{dV_z}{dt} = 0$ dado que está en régimen estacionario:

$$\frac{d}{dr} (r\sigma_{rz}) = \frac{dp}{dz} r \quad (5.4)$$

Integrando la Ec. (5.4)

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r^2 + \frac{C_1}{r} \quad (5.5)$$

Aplicando la condición de frontera de que la componente rz del esfuerzo debe ser finito igual $r=0$ la constante C_1 debe ser cero por consistencia física:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r \quad (5.6)$$

Nótese que la componente rz del tensor de esfuerzo Ec.(5.6) es una función lineal de la coordenada radial y la pendiente está determinada por la mitad del negativo de gradiente de presión. Es importante resaltar que la Ec.(5.6) es completamente general y se aplica a cualquier tipo de fluido.

5.1.1 Perfil de velocidades

Sustituyendo el esfuerzo rz (Ec. 5.7) en el modelo de Ellis :

$$\frac{dv_z}{dr} = \phi_0 \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r \right) + \phi_1 \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r \right)^\alpha \quad (5.7)$$

Integrando Ec.(5.9) se tiene lo siguiente:

$$V_z(r) = \frac{\phi_0}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r^2 \right) + \phi_1 \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \right)^\alpha \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (5.8)$$

Aplicando la condición de no deslizamiento en la pared en la Ec.(5.8)

$$C = -\frac{\phi_0}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} a^2 \right) - \phi_1 \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \right)^\alpha \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (5.9)$$

Combinando la Ec. (5.8) en la (5.9) el perfil de velocidades puede ser expresado como:

$$V_z(r) = -\frac{\phi_0 a}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} a \right) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] - \frac{\phi_1 a}{\alpha + 1} \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} a \right)^\alpha \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha + 1} \right] \quad (5.10)$$

Reduciendo la Ec.(5.10)

$$V_z(r) = -\frac{\phi_0 a}{2} \sigma_r \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] - \frac{\phi_1 a}{\alpha + 1} \sigma_r^\alpha \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha + 1} \right] \quad (5.11)$$

La ecuación (5.11) representa el perfil de velocidades de un fluido no newtoniano caracterizado por el modelo reológico de Ellis. Además es importante hacer énfasis, que es la suma de la contribución newtoniana más la no newtoniana asociada con la Ley de Potencia y esta es modificada debido a las propiedades del sistema.

5.1.2 Flujo volumétrico

El cálculo del Flujo volumétrico, es el producto del perfil de velocidades por el área de la sección transversal, el cual se calcula con la doble integral:

$$Q = \int V dS = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta \quad (5.12)$$

Como la velocidad axial no depende de la coordenada angular es evidente la siguiente expresión:

$$Q = 2\pi a^2 \int_{0/a}^{a/a} V_z(r) \left(\frac{r}{a} \right) d \left(\frac{r}{a} \right) \quad (5.13)$$

haciendo el siguiente cambio de variable de integración $u = \frac{r}{a}$; $du = \frac{dr}{a}$ la Ec.(5.13)

toma la forma:

$$Q = \frac{\phi_0 a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \right) \int_0^1 (1-u^2) u du + \frac{\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \right)^\alpha \int_0^1 (1-u^{\alpha+1}) u du \quad (5.14)$$

Sustituyendo la ecuación de perfil de velocidades del modelo de Ellis Ec.(5.11) y haciendo la integración con respecto a la variable u , se tiene la expresión analítica para el flujo volumétrico de la ecuación constitutiva de Ellis :

$$Q=2\pi a^2 \left(\int_0^1 V_z(u) u du \right) = \frac{\phi_0 a^3}{4} \sigma_w + \frac{\phi_1 a^{\alpha+2}}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha \quad (5.15)$$

Integrando la Ec.(5.15) y simplificando se obtiene la siguiente ecuación para el flujo volumétrico modelo Ellis:

$$Q(\sigma_w) = \frac{\phi_0 a^3}{4} \sigma_w + \frac{\phi_1 a^{\alpha+2}}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha \quad (5.16)$$

5.1.3 Velocidad promedio

La velocidad promedio es el cociente entre el flujo volumétrico y el área característica de flujo o de sección transversal. La ecuación está dada por:

$$\langle V \rangle = \frac{Q}{\pi a^2} = 2 \int_0^1 V_z(u) u du \quad (5.17)$$

Dividiendo el Flujo Volumétrico Ec.(5.16) entre el área de sección transversal(área característica) :

$$\langle V \rangle = 2 \left[\frac{\phi_0 a}{2} \sigma_w \int_0^1 (u-u^3) du + \frac{\phi_1 a}{\alpha+1} \sigma_w^\alpha \int_0^1 (u-u^{\alpha+2}) du \right] \quad (5.18)$$

Integrando la Ec.(5.18)

$$\langle V \rangle = \phi_0 a \sigma_w \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right]_0^1 + \phi_1 a \sigma_w^\alpha \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_0^1 \quad (5.19)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, se tiene lo siguiente:

$$\langle V \rangle = \frac{\phi_0 a \sigma_w}{4} + \frac{\phi_1 a \sigma_w^\alpha}{\alpha + 3} \quad (5.20)$$

O en forma alternativa :

$$\langle V \rangle = \frac{\phi_0 a \sigma_w}{4} \left[1 + \frac{4}{\alpha + 3} \left(\frac{\sigma_w}{\sqrt[\alpha-1]{\phi_0 / \phi_1}} \right)^{\alpha-1} \right] \quad (5.21)$$

Finalmente la velocidad promedio del modelo de Ellis, se puede definir en término de un esfuerzo reducido

$$\langle V \rangle = \frac{a \sigma_w}{4 \eta_0} \left[1 + \frac{4}{\alpha + 3} \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_{1/2}} \right)^{\alpha-1} \right] \quad (5.22)$$

La velocidad promedio es la suma de dos contribuciones, la newtoniana y la no newtoniana asociada con el modelo de Ley de Potencia.

5.1.4 Viscosidad aparente

A partir de la velocidad promedio se puede deducir una expresión analítica para la viscosidad aparente en el sistema, por lo que la Ec. (5.22) toma la forma:

$$\langle V \rangle = \frac{a}{\eta_{app}} \frac{\sigma_w}{4}; \eta_{app} = \frac{\eta_0}{1 + \frac{4}{\alpha + 3} \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_{1/2}} \right)^{\alpha-1}} \quad (5.23)$$

5.1.5 Permeabilidad intrínseca

En esta primera parte del trabajo la permeabilidad está determinada por la teoría del poro promedio es decir, i.e se considera la celda del medio poroso un haz de capilares cuyas longitudes características asociadas a la coordenada radial y axial son las mismas $r=a$ y $z=L$. En esta teoría, la permeabilidad K depende de la

estructura del medio poroso, a pesar de innumerables investigaciones, no hay una expresión universalmente aceptada para k . En particular, para la teoría del poro promedio la permeabilidad se expresa como el producto de la porosidad multiplicada por cuadrado del radio del poro entre 8:

$$k = \frac{\varepsilon a^2}{8} \quad (5.24)$$

En el siguiente capítulo se calculará el esfuerzo en la pared, viscosidad aparente, perfil de velocidades, flujo volumétrico, velocidad promedio y la permeabilidad aparente para el modelo de Ellis en un sistema fractal; dado que este modelo puede ser deducido como la combinación del modelo newtoniano y la Ley de potencia, se calculará respectivamente cada uno de ellos en un sistema fractal y finalizando con Ellis fractal.

CAPÍTULO VI
MODELADO
MATEMÁTICO:
B) MODELO DE ELLIS
TEORÍA FRACTAL

En este capítulo se presenta el modelado en el medio poroso con la ecuación constitutiva de Ellis utilizando la Teoría Fractal para describir la geometría del sistema, la cual consiste en suponer diferentes diámetros y longitudes de los capilares en el medio poroso.

6.1 Newtoniano con fractal

A partir del balance de momento y de la componente rz de la ecuación constitutiva de Ellis en caso particular al modelo de Newton (Ec. 5.2) se tiene la siguiente ecuación teórica:

$$\frac{dV_z}{dr'} = \phi_0 \sigma_{rz} \quad (6.1)$$

En donde la variable r' de la Ec. (6.1) esta acotado desde 0 hasta r. Al sustituir la componente rz del tensor de esfuerzos, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$\frac{dV_z}{dr'} = \phi_0 r \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dL_T} r \right) r' \quad (6.2)$$

6.1.1 Perfil de velocidades

Tomando en cuenta la teoría fractal, se sustituye la derivada de la Longitud del capilar (Ec 3.23, Capitulo 3) en la Ec (6.2) obteniendo:

$$\frac{dV_z}{dr'} = \phi_0 r \left(\frac{dp}{2L_0^{D_T-1} 2^{1-D_T} r^{(1-D_T)} D_T dL_0} r \right) r' \quad (6.3)$$

Por linealidad de la integral la Ec.(6.3) toma la forma de:

$$\frac{dV_z}{dr'} = \phi_0 r \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{1-D_T} r^{(D_T)} D_T} \right) \left(\frac{dp}{dL_0} \right) r' \quad (6.4)$$

Integrando la Ec. (6.4)

$$V_z(r') = \phi_0 r \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{-(D_T)} D_T} \right) \left(\frac{dp}{dL_0} \right) \frac{r'^2}{2} + C_1 \quad (6.5)$$

Al aplicar la condición de no deslizamiento en la pared, i.e. $V_z(r) = 0$, se obtiene el valor de la constante C_1 y el perfil de velocidades toma la siguiente forma:

$$V_z(r') = \phi_0 r \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{-(D_T)} D_T} \right) \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) \left(1 - \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right) \quad (6.6)$$

La Ec. (6.6) denota que el perfil de velocidades para un fluido newtoniano en un sistema fractal, es función de la tortuosidad del fractal (D_T), y parámetros de estructura (r , r' y L_0) así como el gradiente de presión y la constante de material (ϕ_0) la cual se puede interpretar físicamente como una fluidez a bajo corte (inverso de la viscosidad). En particular, si $D_T = 1$, la Ec. (6.6) se reduce al perfil de velocidades para un fluido newtoniano.

$$V_z(r') = \frac{\phi_0 r^2}{4} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) \left(1 - \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right) \quad (6.7)$$

La Ec. (6.7) se reduce a la expresión del perfil de velocidades parabólico de un fluido con viscosidad constante y que se deforma continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión constante, sin medio fractal.

6.1.2 Flujo volumétrico

El flujo en un capilar q que depende de r , i.e. $q(r')$ de un fluido newtoniano está dado por:

$$q(r') = \int_0^{2\pi} \int_0^r V_z(r') r' dr' d\theta \quad (6.8)$$

Al sustituir el perfil de velocidades fractal en la expresión de flujo volumétrico (Ec. 6.8), se tiene lo siguiente:

$$q(r') = 2\pi\phi_0 r \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{-(D_T)} D_T} \right) \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) \int_0^r \left(1 - \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right) r' dr' \quad (6.9)$$

Proponiendo el siguiente cambio de variable $u = r'/r$ la Ec. (6.9) toma la forma:

$$q(r') = 2\pi\phi_0 r^3 \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{-(D_T)} D_T} \right) \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) \int_0^1 (1-u^2) u du \quad (6.10)$$

Evaluando los límites de la integral y factorizando la Ec. (6.10) es modificada como:

$$q(r) = \pi r^3 \left[\frac{\phi_0}{4} r^{D_T} \left(-2^{D_T-2} \frac{dp}{L_0^{D_T-1} D_T dL_0} \right) \right] \quad (6.11)$$

La Ec.(6.11) describe la flux en un solo capilar tortuoso. Supongamos que tomamos un elemento del sistema que consta de haz de tubos capilares tortuosos cuyos tamaños siguen la ecuación de la ley de escala fractal, y la tasa total de flujo volumétrico, Q, a través del elemento es la suma de las velocidades de flujo a través de todos los capilares individuales. De esta manera, obtenemos el total de caudal volumétrico Q de la siguiente manera.

$$Q = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} q(r) \cdot dN = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} q(r) (dN) \quad (6.12)$$

Sustituyendo en la Ec.(6.12) , el flujo de un capilar Ec.(6.11) y la derivada del número de poros o capilares Ec.(3.19,Capitulo 3) se tiene lo siguiente:

$$Q = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \pi r^3 \left[\frac{\phi_0}{4} r^{D_T} \left(-2^{D_T-2} \frac{dp}{L_0^{D_T-1} D_T dL_0} \right) \right] \left[D_f r_{\max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr \right] \quad (6.13)$$

Por linealidad de la integral la Ec (6.13) es modificada como:

$$Q = \pi D_f r_{\max}^{D_f} \left\{ \frac{\phi_0}{4} \left(-2^{D_T-2} \frac{dp}{L_0^{D_T-1} D_T dL_0} \right) \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^{D_T+2-D_f} dr \right\} \quad (6.14)$$

Integrando la Ec.(6.14) :

$$Q = \pi D_f r_{\max}^{D_f} \left\{ \frac{\phi_0}{4} \left(-2^{D_T-2} \frac{dp}{L_0^{D_T-1} D_T dL_0} \right) \frac{r^{D_T+3-D_f}}{(D_T+3-D_f)} \right\}_{r_{\min}}^{r_{\max}} \quad (6.15)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, la Ec.(6.15) toma la forma de:

$$Q = \pi D_f r_{\max}^{D_f} \left\{ \frac{\phi_0}{4} \frac{2^{D_T-2} L_0^{1-D_T}}{D_T (D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) r^{D_T+3-D_f} \right\}_{r_{\min}}^{r_{\max}} \quad (6.16)$$

Evaluando los límites de la integral y factorizando:

$$r^{D_T+3-D_f} \Big|_{r_{\min}}^{r_{\max}} = \left(r_{\max}^{D_T-D_f+3} \right) - \left(r_{\min}^{D_T-D_f+3} \right) = \left(r_{\max}^{D_T-D_f+3} \right) \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_T-D_f+3} \right]$$

La última expresión, puede ser rescrita en la forma:

$$\left(r_{\max}^{D_T-D_f+3} \right) \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_T-D_f+3} \right] = \left(r_{\max}^{D_T-D_f+3} \right) \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_f} \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_T+3-2D_f} \right]$$

Por lo que:

$$Q = \pi D_f r_{\max}^{D_f} \left\{ \frac{\phi_0}{4} \frac{2^{D_T-2} L_0^{1-D_T}}{D_T (D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) r_{\max}^{D_T+3-D_f} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_f} \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_T+3-2D_f} \right] \right\} \quad (6.17)$$

Dando como resultado la expresión del flujo volumétrico de un fluido newtoniano en un sistema fractal, cuando este es deformado continua y irreversiblemente con un gradiente de presión.

Sin embargo Desde $1 < D_T < 2$ y $1 < D_F < 2$ en dos dimensiones, el exponente $D_T + 3 - 2D_F > 0$, en general $r_{\min}/r_{\max} \sim 10^{-2}$, por tanto $(r_{\min}/r_{\max})^{D_f} \approx 0$, así que, $0 < (r_{\min}/r_{\max})^{D_T+3-D_f} < 1$. De esta manera la Ec. (6.17) se puede reducir a:

$$Q = \pi D_f r_{\max}^3 \left\{ \frac{\phi_0}{4} \frac{2^{D_T-2} L_0^{1-D_T}}{D_T (D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) r_{\max}^{D_T} \right\} \quad (6.18)$$

La Ec. (6.18) denota que el caudal volumétrico total es una función del área del poro dimensión fractal (D_f), la tortuosidad del fractal (D_T), y parámetros de estructura (r_{max} y L_0) así como la gradiente de presión y las constantes de materiales (ϕ_0)

6.1.3 Velocidad promedio

Para calcular la velocidad promedio, es necesario el desarrollo de las siguientes variables en el sistema de estudio como son :

- a) Volumen de partícula

La expresión para el volumen de partícula está dada como:

$$V_p = - \int_{r_{min}}^{r_{max}} \pi r^2 L_t -dN = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \pi r^2 L_t (dN) \quad (6.19)$$

Sustituyendo en la Ec(6.19) la derivada del número de poros o capilares Ec.(3.19,Capitulo 3) se tiene lo siguiente:

$$V_p = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \pi r^2 \left[2^{1-D_T} L_0^{D_T} r^{1-D_T} \right] \left[D_f r_{max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr \right] \quad (6.20)$$

Por linealidad de la integral la Ec.(6.20) toma la forma de :

$$V_p = 2^{1-D_T} L_0^{D_T} \pi D_f r_{max}^{D_f} \int_{r_{min}}^{r_{max}} r^{2-D_T-D_f} dr \quad (6.21)$$

Integrando la Ec.(6.21) se tiene como resultado:

$$V_p = 2^{1-D_T} L_0^{D_T} \pi D_f r_{max}^{D_f} \frac{r^{3-D_T-D_f}}{3-D_T-D_f} \Bigg|_{r_{min}}^{r_{max}} \quad (6.22)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$V_p = \frac{2^{1-D_T} L_0^{D_T}}{3-D_T-D_f} \pi D_f r_{\max}^{D_f} r^{3-D_T-D_f} \Big|_{r_{\min}}^{r_{\max}} \quad (6.23)$$

Evaluando los límites de la integral y factorizando se tiene la siguiente expresión analítica:

$$r^{3-D_T-D_f} \Big|_{r_{\min}}^{r_{\max}} = (r_{\max}^{3-D_T-D_f}) - (r_{\min}^{3-D_T-D_f}) = (r_{\max}^{3-D_T-D_f}) \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]$$

Puede ser rescrita como:

$$V_p = \frac{2^{1-D_T} L_0^{D_T}}{3-D_T-D_f} \pi D_f r_{\max}^{3-D_T} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right] \quad (6.24)$$

Obteniendo así la expresión del Volumen de Partícula para un fluido newtoniano en un sistema fractal, la Ec. (6.24) implica que todos los poros están conectados para formar capilares tortuosos.

b) Volumen total

El volumen total de un volumen elemento representativo (REV) viene dado por:

$$V_t = AL_0 \quad (6.25)$$

c) Porosidad

Dividiendo el Volumen de Partícula (Ec. 6.23) entre el Volumen Total (Ec. 6.24) se tiene lo siguiente:

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} = \frac{2^{1-D_T} L_0^{D_T-1}}{A(3-D_T-D_f)} \pi D_f r_{\max}^{3-D_T} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right] \quad (6.26)$$

Donde ϕ es la porosidad aparente de un medio poroso

d) Área Total

Despejando A de la Ec.(6.26) , toma la forma de :

$$A = \frac{2^{1-D_T} L_0^{D_T-1}}{\phi(3-D_T-D_f)} \pi D_f r_{\max}^{3-D_T} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right] \quad (6.27)$$

Por lo que la Ec.(6.27) dada es el área total de la sección transversal perpendicular a la dirección del flujo.

e) Velocidad promedio

La velocidad de flujo promedio es entonces obtenida mediante la división del Flujo Volumétrico Total (Ec. 6.18) entre el Área Total (Ec. 6.27) obteniendo lo siguiente:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\phi(3-D_T-D_f) 2^{D_T-1} L_0^{1-D_T}}{\left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]} \left\{ \frac{\phi_0}{4 D_T (D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) r_{\max}^{2D_T} \right\} \quad (6.28)$$

La Ec. (6.28) indica la velocidad de flujo media para un fluido newtoniano en un sistema fractal, la cual está en función del área del poro dimensión fractal (D_f) , tortuosidad dimensión fractal (D_T) , y los parámetros estructurales (r_{\min}, r_{\max}, ϕ y L_0), pero también es una función del gradiente de presión y la constante de material(ϕ_0).

6.1.4 Permeabilidad aparente

Para calcular la permeabilidad aparente, es primordial la expresión analítica de la viscosidad aparente en el sistema de estudio:

a) Viscosidad Aparente

La viscosidad aparente para un fluido newtoniano se puede encontrar como:

$$\mu_a = \frac{1}{\phi_0} = \text{constante} \quad (6.29)$$

$$\mu_a \neq f(\sigma) \quad (6.30)$$

La Ec. (6.29) representa la viscosidad aparente de un fluido newtoniano en un sistema fractal. La viscosidad aparente y la permeabilidad aparente son incorporadas en la ley general de Darcy ^[10]:

$$V = - \frac{k_e}{\mu_a} \frac{dp}{dL_0} \quad (6.31)$$

b) Permeabilidad Aparente

Despejando k de la Ec (6.31) e incorporando la velocidad promedio Ec (6.28) y la viscosidad aparente Ec.(6.29) la permeabilidad aparente puede expresarse como:

$$k_a = \frac{\phi(3-D_T-D_f)2^{D_T-1}L_0^{1-D_T} \left[\frac{\phi_0}{4} \frac{2^{D_T-2}L_0^{1-D_T}}{D_T(D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) r_{\max}^{2D_T} \right]}{\left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right] \phi_0} \quad (6.32)$$

La Ec. (6.32) describe la permeabilidad aparente para un fluido newtoniano en un sistema fractal. Esta ecuación es expresada como función del área del poro dimensión del fractal (D_f) y tortuosidad fractal (D_T), los parámetros estructurales (r_{\max} , r_{\min} , ϕ y L_0) y el gradiente de presión y la constante de material (ϕ_0).

6.2 No newtoniano Ley de potencia (Ostwald de Waele) con fractal

A partir del balance de momento y de la componente rz de la ecuación constitutiva de Ellis en caso particular al modelo de Ley de potencia (Ostwald de Waele) (Ec. 5.2) se tiene la siguiente ecuación teórica:

$$\frac{dV_z}{dr} = \phi_1 (\sigma_{rz})^\alpha \quad (6.33)$$

En donde la variable r' de la Ec. (6.33) está acotada desde 0 hasta r . Al sustituir la componente rz del tensor de esfuerzos, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$\frac{dV_z}{dr'} = \phi_1 r \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dL_T} r \right)^\alpha r'^\alpha \quad (6.34)$$

6.2.1 Perfil de velocidades

Tomando en cuenta la teoría fractal, se sustituye la derivada de la Longitud del capilar (Ec 3.23, Capitulo 3) en la Ec (6.34) obteniendo:

$$\frac{dV_z}{dr'} = \phi_1 r \left(\frac{dp}{2L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{1-D_T} D_T dL_0} r \right)^\alpha r' \quad (6.35)$$

Por linealidad de la integral la Ec.(6.35) toma la forma de:

$$\frac{dV_z}{dr'} = \phi_1 r \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{(D_T)} D_T} \right)^\alpha \left(\frac{dp}{dL_0} \right)^\alpha (r')^\alpha \quad (6.36)$$

Integrando la Ec.(6.36)

$$V_z(r') = \phi_1 r \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{(D_T)} D_T} \right)^\alpha \left(\frac{dp}{dL_0} \right)^\alpha \frac{(r')^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C_1 \quad (6.37)$$

Al aplicar la condición de no deslizamiento en la pared, se obtiene el valor de la constante C_1 y el perfil de velocidades toma la siguiente forma:

$$V_z(r') = -\frac{\phi_1 r}{\alpha+1} \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{(D_T)} D_T} \right)^\alpha \left(\frac{dp}{dL_0} \right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{r'}{r} \right)^{\alpha+1} \right) \quad (6.38)$$

La Ec. (6.38) denota que el perfil de velocidades para un fluido no newtoniano (Ley de Potencia), es una función de la tortuosidad del fractal (D_T), y parámetros de

estructura (r , r' , y L_0) así como la gradiente de presión y las constantes de materiales (ϕ_1 y α)

6.2.2 Flujo volumétrico

El flujo en un capilar q que depende de r , i.e. $q(r)$ de un fluido no newtoniano (Ley de potencia) está dado por:

$$q(r') = \int_0^{2\pi} \int_0^r V_z(r') r' dr' d\theta \quad (6.39)$$

Al sustituir el perfil de velocidades fractal en la expresión de flujo volumétrico (Ec. 6.39), se tiene lo siguiente:

$$q(r') = 2\pi \frac{\phi_1 r^3}{\alpha+1} \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{1-D_T} D_T} \right)^\alpha \left(\frac{dp}{dL_0} r \right)^\alpha \int_0^r \left(1 - \left(\frac{r'}{r} \right)^{\alpha+1} \right) \quad (6.40)$$

Proponiendo el siguiente cambio de variable $u = r'/r$ la Ec. (6.40) toma la forma:

$$q(r') = \pi \frac{\phi_1 r^3}{\alpha+3} \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{1-D_T} D_T} \right)^\alpha \left(\frac{dp}{dL_0} \right)^\alpha \int_0^1 (1-u^{\alpha+1}) u du \quad (6.41)$$

Evaluando los límites de la integral y factorizando la Ec. (6.41) es modificada como:

$$q(r) = \pi r^3 \left[\frac{\phi_1}{\alpha+3} r^{\alpha D_T} \left(-2^{D_T-2} \frac{dp}{L_0^{D_T-1} D_T dL_0} \right)^\alpha \right] \quad (6.42)$$

La Ec. (6.42) describe el flux en un solo capilar tortuoso, Q describe a través del elemento la suma de las velocidades de flujo a través de todos los capilares individuales. De esta manera, obtenemos el total de caudal volumétrico Q de la siguiente manera.

$$Q = - \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} q(r) -dN = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} q(r) dN \quad (6.43)$$

Considerando el flujo de un capilar Ec.(6.42) y la derivada del número de poros o capilares Ec.(3.19 ,Capitulo 3) se sustituyen en la Ec.(6.43) y puede expresarse como:

$$Q = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \pi r^3 \left[\frac{\phi_1}{\alpha+3} r^{\alpha D_T} \left(-2^{D_T-2} \frac{dp}{L_0^{D_T-1} D_T dL_0} \right)^\alpha \right] \left[D_f r_{\max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr \right] \quad (6.44)$$

Por linealidad de la integral la Ec (6.44) por lo que :

$$Q = \pi D_f r_{\max}^{D_f} \left\{ \frac{\phi_1}{\alpha+3} \left(-2^{D_T-2} \frac{dp}{L_0^{D_T-1} D_T dL_0} \right)^\alpha \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^{\alpha D_T + 2 - D_f} dr \right\} \quad (6.45)$$

Integrando la Ec.(6.45) :

$$Q = \pi D_f r_{\max}^{D_f} \left\{ \frac{\phi_1}{\alpha+3} \left(-2^{D_T-2} \frac{dp}{L_0^{D_T-1} D_T dL_0} \right)^\alpha \frac{r^{\alpha D_T + 3 - D_f}}{(\alpha D_T + 3 - D_f)} \Big|_{r_{\min}}^{r_{\max}} \right\} \quad (6.46)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, la Ec.(6.46) toma la forma de:

$$Q = \pi D_f r_{\max}^{D_f} \left\{ \frac{\phi_1}{\alpha+3} \frac{(2^{D_T-2} L_0^{1-D_T})^\alpha}{D_T^\alpha (\alpha D_T + 3 - D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right)^\alpha r^{\alpha D_T + 3 - D_f} \Big|_{r_{\min}}^{r_{\max}} \right\} \quad (6.47)$$

Evaluando los límites de la integral y factorizando:

$$r^{\alpha D_T + 3 - D_f} \Big|_{r_{\min}}^{r_{\max}} = (r_{\max}^{\alpha D_T - D_f + 3}) - (r_{\min}^{\alpha D_T - D_f + 3}) = (r_{\max}^{\alpha D_T - D_f + 3}) \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{\alpha D_T - D_f + 3} \right]$$

La última expresión, puede ser rescrita en la forma:

$$\left(r_{\max}^{\alpha D_T - D_f + 3} \right) \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{\alpha D_T - D_f + 3} \right] = \left(r_{\max}^{\alpha D_T - D_f + 3} \right) \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_f} \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{\alpha D_T + 3 - 2D_f} \right]$$

Se tiene lo siguiente:

$$Q = \pi D_f r_{\max}^{D_f} \left\{ \frac{\phi_1}{\alpha + 3} \frac{(2^{D_T - 2} L_0^{1 - D_T})^\alpha}{D_T^\alpha (\alpha D_T + 3 - D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right)^\alpha r_{\max}^{\alpha D_T + 3 - D_f} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_f} \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{\alpha D_T + 3 - 2D_f} \right] \right\} \quad (6.48)$$

Por lo que se tiene la siguiente expresión analítica para el flujo volumétrico total de un fluido no newtoniano (Ley de Potencia) en un sistema fractal, cuando este es deformado continua y irreversiblemente con un gradiente de presión.

Sin embargo $1 < D_T < 2$ y $1 < D_f < 2$ en dos dimensiones, el exponente $\alpha D_T + 3 - 2D_f > 0$, en general $r_{\min}/r_{\max} \sim 10^{-2}$, por tanto $(r_{\min}/r_{\max})^{D_f} \approx 0$, así que, $0 < (r_{\min}/r_{\max})^{\alpha D_T + 3 - D_f} < 1$. De esta manera la Ec. (6.48) se puede reducir a:

$$Q = \pi D_f r_{\max}^3 \left\{ \frac{\phi_1}{\alpha + 3} \frac{(2^{D_T - 2} L_0^{1 - D_T})^\alpha}{D_T^\alpha (\alpha D_T + 3 - D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right)^\alpha r_{\max}^{\alpha D_T} \right\} \quad (6.49)$$

La Ec. (6.49) denota que el caudal volumétrico total es una función del área del poro dimensión fractal (D_f), la tortuosidad del fractal (D_T), y parámetros de estructura (r_{\max} y L_0) así como la gradiente de presión y las constantes de materiales (ϕ_1 y α)

6.2.3 Velocidad promedio

Considerando las variables calculadas anteriormente para la velocidad promedio para un fluido newtoniano en un sistema fractal (Volumen particular, Volumen total, Porosidad y Área Total) se emplean de tal forma que, el flujo volumétrico total (Ec. 6.49) se divide con el Área Total (Ec. 6.27) y obteniendo así la siguiente expresión analítica :

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\phi (3 - D_T - D_f) 2^{D_T - 1} L_0^{1 - D_T}}{\left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{3 - D_T - D_f} \right]} \left\{ \frac{\phi_1}{\alpha + 3} \frac{(2^{D_T - 2} L_0^{1 - D_T})^\alpha}{D_T^\alpha (\alpha D_T + 3 - D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right)^\alpha r_{\max}^{(\alpha + 1) D_T} \right\} \quad (6.50)$$

La Ec. (6.50) indica que la velocidad de flujo media para un fluido no newtoniano (Ley de Potencia) es función del área del poro dimensión fractal (D_f), tortuosidad dimensión fractal (D_T), los parámetros estructurales (r_{min}, r_{max}, ϕ y L_0), además es una función del gradiente de presión y las constantes de materiales (ϕ_1 y α).

6.2.4 Permeabilidad aparente

Para calcular permeabilidad efectiva, es necesario calcular las siguientes variables en el sistema de estudio:

a) Esfuerzo Cortante

Los capilares en medios porosos son usualmente tortuosos, considerando la Teoría Fractal, y sustituyendo la derivada de la Longitud de capilar (Ec.3.23, Capítulo 3) el esfuerzo cortante es modificado como:

$$\sigma_w = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dL_t} = -\frac{r}{2} \frac{dp}{L_0^{D_T-1} D_T (2r)^{1-D_T} dL_0} \quad (6.51)$$

El esfuerzo cortante total para todas las paredes se puede encontrar a partir de la siguiente integral:

$$\sigma = -\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sigma_w -dN = \sigma = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sigma_w dN \quad (6.52)$$

Sustituyendo en la Ec. (6.52), el esfuerzo en la pared Ec.(6.51) y la derivada del número de poros o capilares Ec.(3.19, Capítulo 3) se tiene lo siguiente:

$$\sigma = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left(-\frac{r}{2} \frac{dp}{L_0^{D_T-1} D_T (2r)^{1-D_T} dL_0} \right) \left(D_f r_{max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr \right) \quad (6.53)$$

Por linealidad de la integral la Ec (6.53) es modificada como:

$$\sigma = - \frac{dp}{2L_0} \frac{D_f r_{\max}^{D_f}}{D_T dL_0} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{r}{(2r)^{1-D_T}} r^{-(D_f+1)} dr \quad (6.54)$$

Considerando el teorema fundamental del cálculo, la Ec.(6.54) puede ser rescrita como:

$$\sigma = - \frac{dp}{2L_0} \frac{D_f r_{\max}^{D_f}}{D_T dL_0} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^{D_T-D_f-1} dr \quad (6.55)$$

Integrando la Ec.(6.55)

$$\sigma = 2^{(D_T-2)} \frac{D_f}{D_T} L_0^{1-D_T} \left(- \frac{dp}{dL_0} \right) r_{\max}^{D_f} \left[\frac{r^{D_T-D_f}}{D_T-D_f} \right]_{r_{\min}}^{r_{\max}} \quad (6.56)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, la Ec.(6.56) toma la forma de:

$$\sigma = 2^{(D_T-2)} \frac{D_f}{D_T} L_0^{1-D_T} \left(- \frac{dp}{dL_0} \right) \frac{r_{\max}^{D_f}}{D_T-D_f} \left[r^{D_T-D_f} \right]_{r_{\min}}^{r_{\max}} \quad (6.57)$$

Evaluando los límites de la integral y factorizando:

$$r^{D_T-D_f} \Big|_{r_{\min}}^{r_{\max}} = (r_{\max}^{D_T-D_f}) - (r_{\min}^{D_T-D_f}) = (r_{\max}^{D_T-D_f}) \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_T-D_f} \right]$$

Por lo que:

$$\sigma = 2^{(D_T-2)} \frac{D_f}{D_T} L_0^{1-D_T} \left(- \frac{dp}{dL_0} \right) \frac{r_{\max}^{D_f}}{D_T-D_f} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_T-D_f} \right] \quad (6.58)$$

Se obtiene la expresión de esfuerzo cortante total para un fluido no newtoniano (Ley de Potencia) en un sistema fractal, cuando este es deformado continua y irreversiblemente con un gradiente de presión. La ecuación (6.58) revela que el

esfuerzo cortante en todas las paredes capilares se relaciona con las dimensiones fractales D_f y D_T , parámetros estructurales, y gradiente de presión.

b) Viscosidad Aparente

La viscosidad aparente para un fluido no newtoniano (Ley de Potencia) se puede encontrar como:

8

$$\mu_a = \frac{1}{\phi_1 \sigma^{\alpha-1}} \quad (6.59)$$

Sustituyendo el esfuerzo cortante total Ec. (6.58) en la Ec. (6.59) se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\mu_a = \frac{1}{\phi_1 \left[2^{(D_T-2)} \frac{D_f}{D_T} L_0^{1-D_T} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) \frac{r_{max}^{D_T}}{D_T - D_f} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{D_T - D_f} \right] \right]^{\alpha-1}} \quad (6.60)$$

La Ec. (6.60) representa la viscosidad aparente de un fluido no newtoniano (Ley de Potencia) en un sistema fractal. La viscosidad aparente y la permeabilidad aparente son incorporadas en la ley general de Darcy ^[10]:

$$V = -\frac{k_c}{\mu_a} \frac{dp}{dL_0} \quad (6.61)$$

c) Permeabilidad Aparente.

Despejando k de la Ec (6.61) e incorporando la velocidad promedio Ec. (6.50) y la viscosidad aparente Ec.(6.60) la permeabilidad aparente puede expresarse como:

$$k_a = \frac{\phi(3-D_T-D_f)2^{D_T-1}L_0^{1-D_T}}{\left[1-\left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}}\right)^{3-D_T-D_f}\right]} \left[\frac{\phi_1 \frac{(2^{D_T-2}L_0^{1-D_T})^\alpha}{\alpha+3} D_T^\alpha (\alpha D_T+3-D_f) \left(-\frac{dp}{dL_0}\right)^\alpha r_{\max}^{(\alpha+1)D_T}}{\phi_1 \left[2^{(D_T-2)} \frac{D_f}{D_T} L_0^{1-D_T} \left(-\frac{dp}{dL_0}\right) \frac{r_{\max}^{D_T}}{D_T-D_f} \left[1-\left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}}\right)^{D_T-D_f}\right]\right]^{\alpha-1}} \right] \quad (6.62)$$

La Ec. (6.62) describe la permeabilidad aparente para un fluido no newtoniano (Ley de Potencia) en un sistema fractal. Esta ecuación es expresada como función del área del poro dimension del fractal (D_f) y la tortuosidad (D_T), los parámetros estructurales (r_{\max} , r_{\min} , ϕ y L_0), así como el gradiente de presión y las constantes de los materiales (ϕ_1 y α).

Sin embargo se observa de la Ec. (6.62) que los parámetros estructurales y las constantes de los materiales puede tener una influencia significativa en la permeabilidad, la determinación de estos parámetros es crucial y puede requerir mediciones experimentales y algunas correlaciones empíricas.

6.3 Modelo de Ellis con fractal

Tomando en consideración que la ecuación constitutiva de Ellis puede ser deducida mediante la combinación del modelo Newtoniano y el de la Ley de Potencia respectivamente. Se puede retomar y utilizar las ecuaciones deducidas anteriormente para un sistema fractal.

6.3.1 Perfil de velocidades

Sumando el perfil de velocidades de un fluido newtoniano con fractal Ec (6.6) y de un fluido no newtoniano con fractal Ec.(6.38) se tiene la siguiente expresión analítica :

$$V_z(r') = \phi_0 r \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{-(D_T)} D_T} \right) \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) \left(1 - \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right) - \frac{\phi_1 r}{\alpha+1} \left(\frac{1}{L_0^{D_T-1} 2^{2-D_T} r^{-(D_T)} D_T} \right)^\alpha \left(-\frac{dp}{dL_0} \right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{r'}{r} \right)^{\alpha+1} \right) \quad (6.63)$$

La Ec. (6.63) denota que el perfil de velocidades para un fluido de Ellis en un sistema fractal, es una función la tortuosidad del fractal (D_T), y parámetros de estructura (r , r' y L_0) así como el gradiente de presión y las constantes de materiales (ϕ_0 , ϕ_1 y α)

6.3.2 Flujo volumétrico

Combinando el flujo volumétrico newtoniano con fractal Ec (6.18) y el no newtoniano con fractal Ec.(6.49) toma la forma de :

$$Q = \pi D_f r_{\max}^3 \left\{ \frac{\phi_0}{4 D_T (D_T + 3 - D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right) r_{\max}^{D_T} + \frac{\phi_1}{\alpha+1} \frac{(2^{D_T-2} L_0^{1-D_T})^\alpha}{D_T^\alpha (\alpha D_T + 3 - D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right)^\alpha r_{\max}^{\alpha D_T} \right\} \quad (6.64)$$

La Ec. (6.64) denota que el flujo volumétrico total para un fluido de Ellis en un sistema fractal, es una función del área de poros dimensión fractal (D_f), la tortuosidad del fractal (D_T), y parámetros de estructura (r_{\max} y L_0) así como la gradiente de presión y las constantes de materiales (ϕ_0 , ϕ_1 y α)

6.3.3 Velocidad promedio

Sumando la velocidad promedio newtoniano con fractal Ec (6.28) y el no newtoniano con fractal Ec.(6.50) se tiene como resultado:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\phi(3-D_T-D_f)2^{D_T-1}L_0^{1-D_T}}{\left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}}\right)^{3-D_T-D_f}\right]} J(\phi_0, \phi_1, D_T, D_f, L_0, \alpha, r_{\min}, r_{\max}) \quad (6.65)$$

$$J(\phi_0, \phi_1, D_T, D_f, L_0, \alpha, r_{\min}, r_{\max}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_0}{4} \frac{2^{D_T-2}L_0^{1-D_T}}{D_T(D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0}\right)_{r_{\max}}^{2D_T} \\ + \frac{\phi_1}{\alpha+3} \frac{(2^{D_T-2}L_0^{1-D_T})^\alpha}{D_T^\alpha(\alpha D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0}\right)_{r_{\max}}^{\alpha(\alpha+1)D_T} \end{array} \right\} \quad (6.66)$$

Las Ecs. (6.65 y 6.66) denotan que la velocidad media para un fluido de Ellis en un sistema fractal, es una función del área de poros dimensión fractal (D_f), la tortuosidad del fractal (D_T), y parámetros de estructura (r_{\max} , r_{\min} , ϕ y L_0) así como la gradiente de presión y las constantes de materiales (ϕ_0 , ϕ_1 y α)

6.3.4 Permeabilidad aparente

Combinando la permeabilidad aparente de un fluido newtoniano con fractal Ec (6.32) y de un fluido no newtoniano con fractal Ec.(6.62) toma la forma de :

$$k_a = \frac{\phi(3-D_T-D_f)2^{D_T-1}L_0^{1-D_T}}{\left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}}\right)^{3-D_T-D_f}\right]} G(\phi_0, \phi_1, D_T, D_f, L_0, \alpha, r_{\min}, r_{\max}) \quad (6.67)$$

$$G(\phi_0, \phi_1, D_T, D_f, L_0, \alpha, r_{\min}, r_{\max}) = \frac{\frac{\phi_0}{4} \frac{2^{D_T-2}L_0^{1-D_T}}{D_T(D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0}\right)_{r_{\max}}^{2D_T} + \frac{\phi_1}{\alpha+3} \frac{(2^{D_T-2}L_0^{1-D_T})^\alpha}{D_T^\alpha(\alpha D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0}\right)_{r_{\max}}^{\alpha(\alpha+1)D_T}}{\left[\phi_0 + \phi_1 \left[2^{(D_T-2)} \frac{D_f}{D_T} L_0^{1-D_T} \left(-\frac{dp}{dL_0}\right) \frac{r_{\max}^{D_T}}{D_T-D_f} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}}\right)^{D_T-D_f} \right] \right]^{\alpha-1}} \right]} \quad (6.68)$$

Las Ecs. (6.67 y 6.68) denotan que la permeabilidad efectiva para un fluido de Ellis en un sistema fractal, es una función del área de poros dimensión fractal (D_f), la tortuosidad del fractal (D_T), y parámetros de estructura (r_{max} , r_{min} , ϕ y L_0) así como el gradiente de presión y las constantes de materiales (ϕ_0 , ϕ_1 y α)

Las Ecs. (6.67 y 6.68) también indican que la permeabilidad para un fluido no newtoniano es significativamente diferente de un fluido newtoniano en un medio poroso, porque la permeabilidad para un fluido newtoniano en un medio poroso se relaciona únicamente con los parámetros estructurales de medios porosos y es independiente a las propiedades de los fluidos.

CAPÍTULO VII

SIMULACIONES

COMPUTACIONALES

7.1 Variables adimensionales

En este capítulo se presentan las principales simulaciones y análisis de resultados del capítulo 5. Para facilitarlas se introducen un conjunto de variables adimensionales las cuales solo se utilizaron en el modelo de Ellis, estas permiten acotar el espacio de soluciones introducir grupos adimensionales que describan la competencia entre los principales mecanismos presentes en la dinámica de flujo de medio fractal. Para esto son escaladas las siguientes variables dinámicas, geométricas y de medio:

Variable Dimensional	Variable Adimensional	Variable Característica
V_z	V_z^*	V_c
Q	Q^*	Q_c
μ	μ^*	μ_c

Tabla 4. Variables adimensionales modelo de Ellis

Ecuaciones adimensionales

A partir de las dos tablas anteriores, a continuación se presenta un resumen de las principales ecuaciones adimensionales deducidas en el presente trabajo.

a) Perfil de Velocidad

$$V_z^*(r^*) = \frac{1}{2} \sigma_w^* (1-r^{*2}) + \frac{1}{\alpha+1} (\sigma_w^*)^\alpha (1-r^{*\alpha+1})$$

b) Flujo Volumétrico

$$Q^* = \frac{1}{4} \sigma_w^* \frac{1}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^\alpha$$

c) Viscosidad Aparente

$$\eta_{ap}^* = \frac{1}{1 + \frac{4}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-1}}$$

En esta sección, se transformaron las ecuaciones dimensionales en adimensionales, con el fin de obtener las respectivas ecuaciones analíticas adimensionales, las cuales son punto de partida en las simulaciones posteriores.

Simulación Computacional

La programación de las ecuaciones fue realizada en Mathematica 9.0 el cual se basa en lenguaje C.. Los datos numéricos, fueron equi-espaciados es decir, a las simulaciones se les dio el mismo tamaño de paso. Después de eso, fueron visualizados para que posteriormente fueran exportados aun hoja de cálculo, en donde se realizaron las gráficas correspondientes.

7.2 Modelo de Ellis (Teoría del poro promedio)

7.2.1 Perfil de velocidades

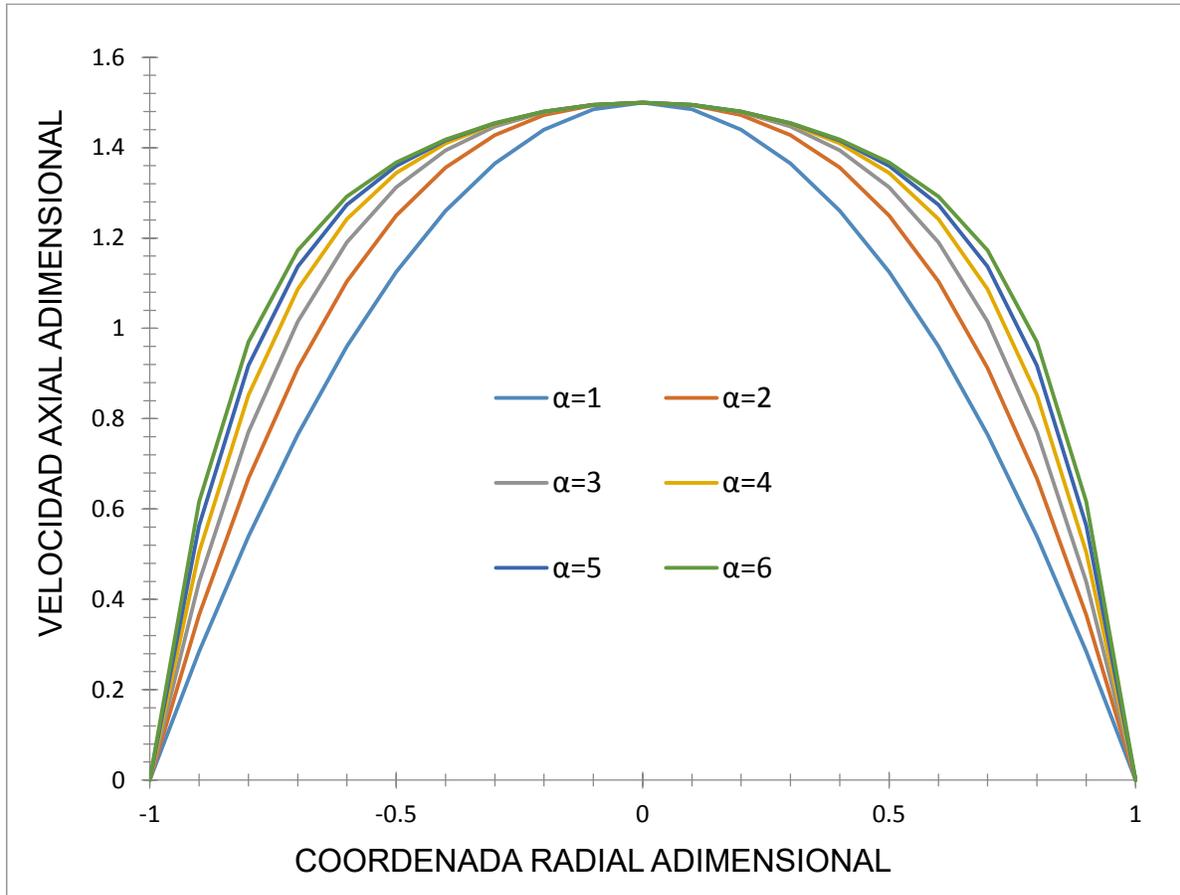


Figura 7. Ilustra el perfil de velocidades como función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del parámetro alfa

En la Fig. 7 se observa todos los perfiles muestran un comportamiento de tipo parabólico. Sin embargo, se nota que el efecto del parámetro alfa, el cual está asociado a los mecanismos adelgazantes o engrosantes al corte, aumenta el máximo en los perfiles parabólicos, es decir, entre más adelgazante sea nuestro fluido mayor velocidad de los elementos materiales se pueden observar. Físicamente, en las paredes del capilar, se cumple la condición de no deslizamiento y en el centro se presenta el máximo en la velocidad del sistema.

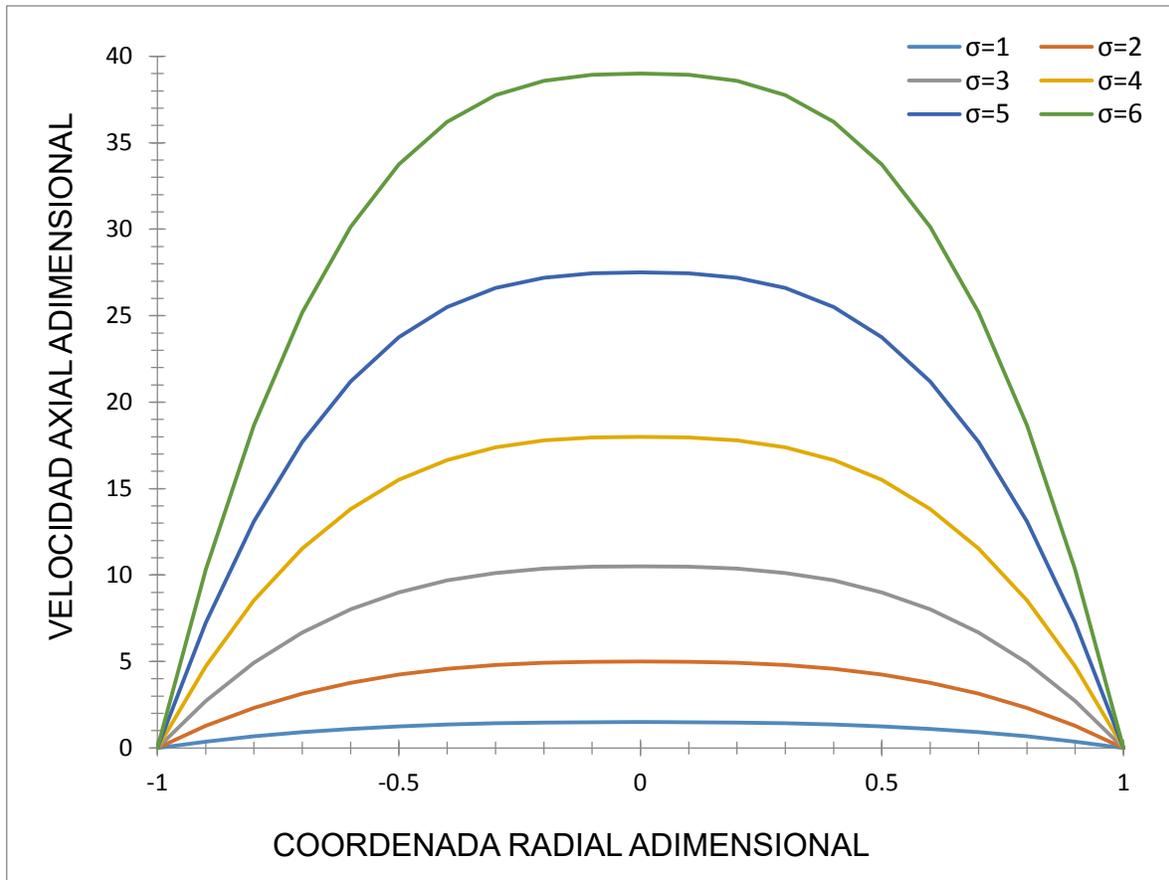


Figura 8. Ilustra el perfil de velocidades en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del esfuerzo en pared. El parámetro utilizado $\alpha = 2$.

En la Fig.8 se simulan los perfiles de velocidad en función de la fuerza que de forma continua e irreversiblemente está asociada con el esfuerzo en la pared. Como en la Fig.7, se observan los perfiles axi-simétricos del perfil de velocidades. El efecto neto del esfuerzo en la pared, es desfasar las curvas a estado de mayor a menor velocidad por efecto del flujo. Nótese que en las paredes la velocidad es cero, debido a que no hay efectos de deslizamiento en la pared. En el centro del capilar $r = 0$, se observa el máximo valor en el perfil de velocidad. Finalmente, el perfil de velocidades se ve afectado por

- a) Los mecanismos adelgazantes o engrozantes al corte
- b) La fuerza irreversible asociada al esfuerzo en la pared.
- c) EL máximo en el perfil de velocidades se debe a un acoplamiento entre las propiedades no newtonianas del sistema.

Se observa todos los perfiles muestran un comportamiento de tipo parabólico. Sin embargo, se nota que el efecto del parámetro alfa, el cual está asociado a los mecanismos adelgazantes o engrozantes al corte, aumenta el máximo en los perfiles parabólicos, es decir, entre más adelgazante sea nuestro fluido mayor velocidad de los elementos materiales se puede observar. Físicamente, en las paredes del capilar, se cumple la condición de no deslizamiento y en el centro se presenta el máximo en la velocidad del sistema.

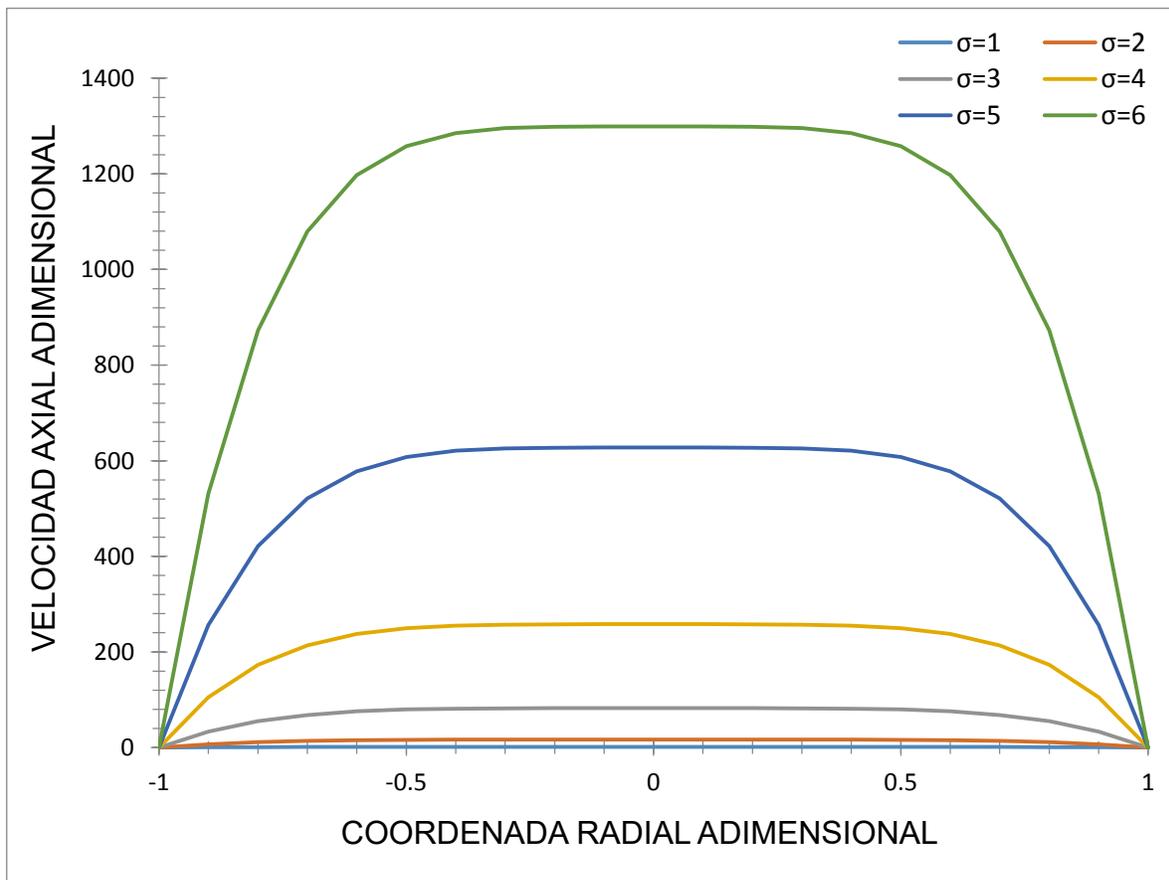


Figura 9. Ilustra el perfil de velocidades en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del esfuerzo en pared. El parámetro utilizado $\alpha = 4$.

En la Fig. 9 se simulan los perfiles de velocidad en función de la fuerza que de forma continua e irreversiblemente está asociada con el esfuerzo en la pared. Como en la Fig.7, se observan los perfiles axi-simétricos del perfil de velocidades. El efecto neto del esfuerzo en la pared, es desfasar las curvas de estados de menor a mayor velocidad por efecto del fuerza motriz asociado a la esfuerzo en la

pared. A valores de esfuerzos de la pared cercanos a 1 se obtiene el menor perfil de velocidades. Es importante resaltar, que existe una zona de -0.6 a 0.6 donde se presenta un frente homogéneo debido a que no existe diferencia relativa, la velocidad de los elementos materiales que se están considerando. Finalmente, el perfil de velocidades se ve afectado por

- a) Los mecanismos adelgazantes o engrozantes al corte
- b) La fuerza irreversible asociada al esfuerzo en la pared.
- c) EL máximo en el perfil de velocidades se debe a un acoplamiento entre las propiedades no newtonianas del sistema.

Se observa todos los perfiles muestran un comportamiento de tipo parabólico. Sin embargo, se nota que el efecto del parámetro alfa, el cual está asociado a los mecanismos adelgazantes o engrozantes al corte, aumenta el máximo en los perfiles parabólicos, es decir, entre más adelgazante sea nuestro fluido mayor velocidad de los elementos materiales se puede observar. Físicamente, en las paredes del capilar, se cumple la condición de no deslizamiento y en el centro se presenta el máximo en la velocidad del sistema.

7.2.2 Flujo volumétrico

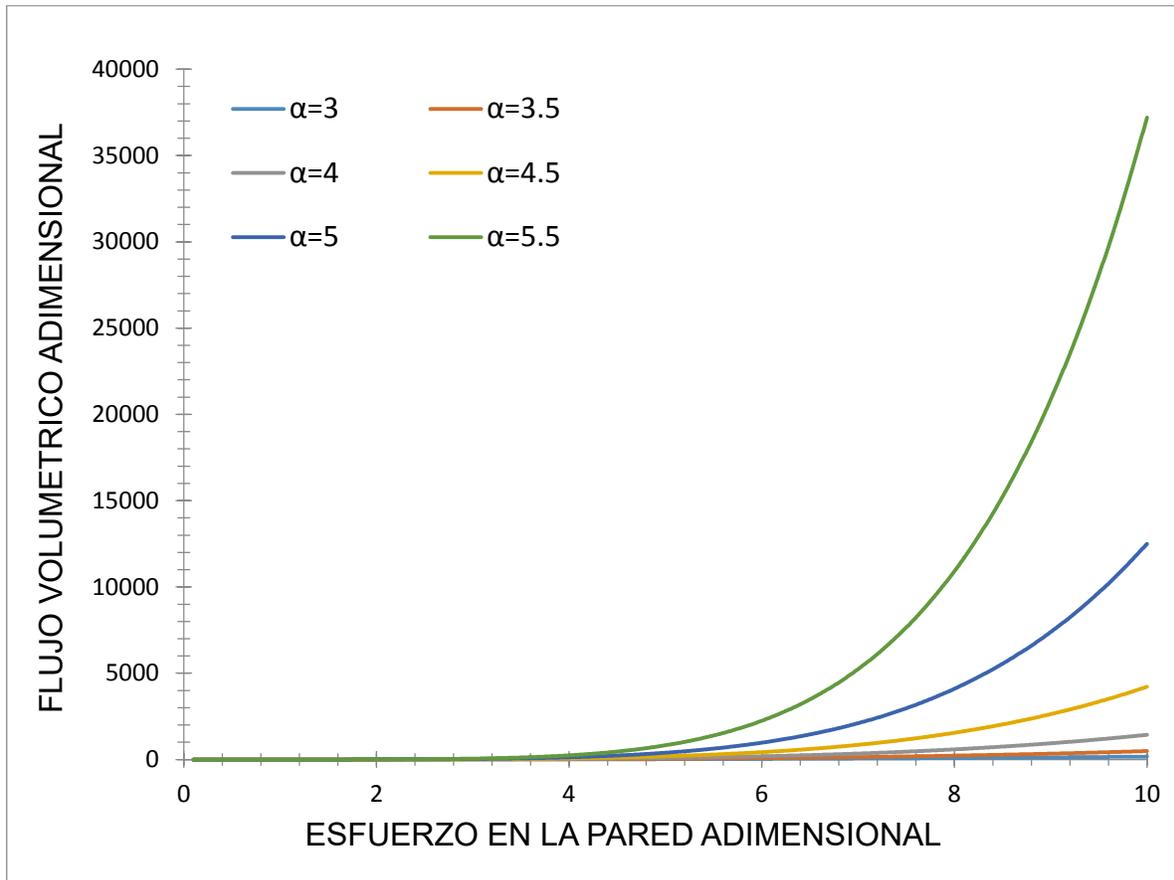


Figura 10. Ilustra el flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared adimensional para diferentes valores del parámetro alfa.

En la Fig.10 se observa la siguiente grafica que ilustra los mecanismos adelgazantes en función del esfuerzo en la pared adimensional. A valores bajos del esfuerzo en la pared el flujo volumétrico se comporta de forma constante sin embargo, para un cierto esfuerzo crítico el sistema presenta un comportamiento monótono creciente y el valor de las pendientes asociadas a los mecanismos adelgazantes está determinado completamente por el parámetro alfa. Nótese, que los mecanismos adelgazantes incrementan notablemente el flujo volumétrico debido a que la estructura se rompe por efecto del flujo y la fuerza motriz asociada el gradiente de presión evaluado en la pared.

7.2.3 Viscosidad aparente

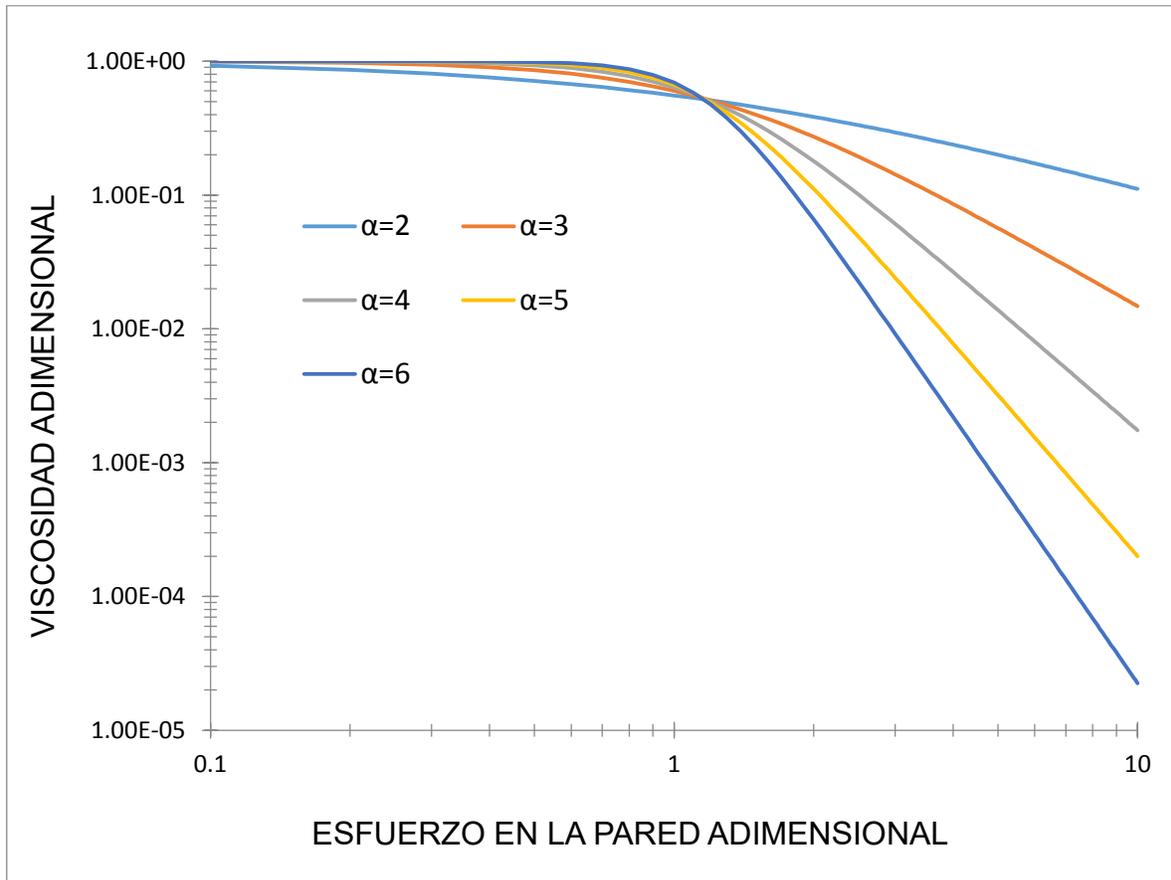


Figura 11. Ilustra la viscosidad como función del esfuerzo en la pared adimensional para diferentes valores del parámetro alfa.

En la Fig.11 se observa que a valores bajos del esfuerzo en la pared cercanos a 1 la viscosidad se comporta de forma constante como un fluido newtoniano. Sin embargo para un cierto esfuerzo en la pared mayor a 1 el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente. Nótese, que los mecanismos adelgazantes decrecen notablemente la viscosidad y el valor de las pendientes están relacionadas con el adelgazamiento del líquido debido a la desestructuración del material por efecto del corte asociado a la fuerza que deforma continuamente e irreversiblemente el fluido (esfuerzo en la pared)

7.2.4 Esfuerzo cortante

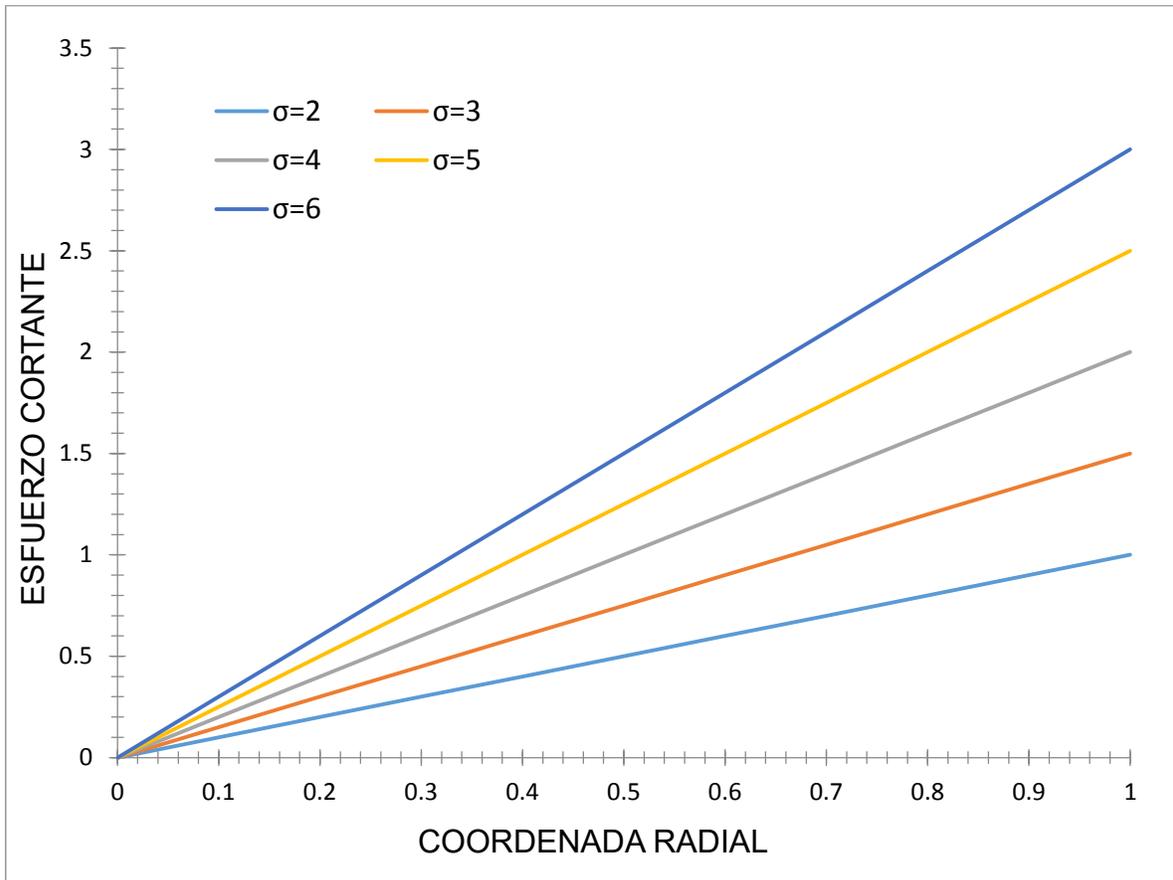


Figura 12. Ilustra el esfuerzo como función de la coordenada radial para diferentes valores del parámetro sigma

En la Fig.12 Se observa que el esfuerzo muestra un comportamiento lineal en el intervalo [0, 1]. Nótese que en la pendientes de cada recta está determinada por el valor del esfuerzo en la pared. Es importante resaltar que en estas curvas el esfuerzo no depende del tipo de fluido que se analiza, por lo tanto es un resultado general.

7.2.5 Permeabilidad intrínseca

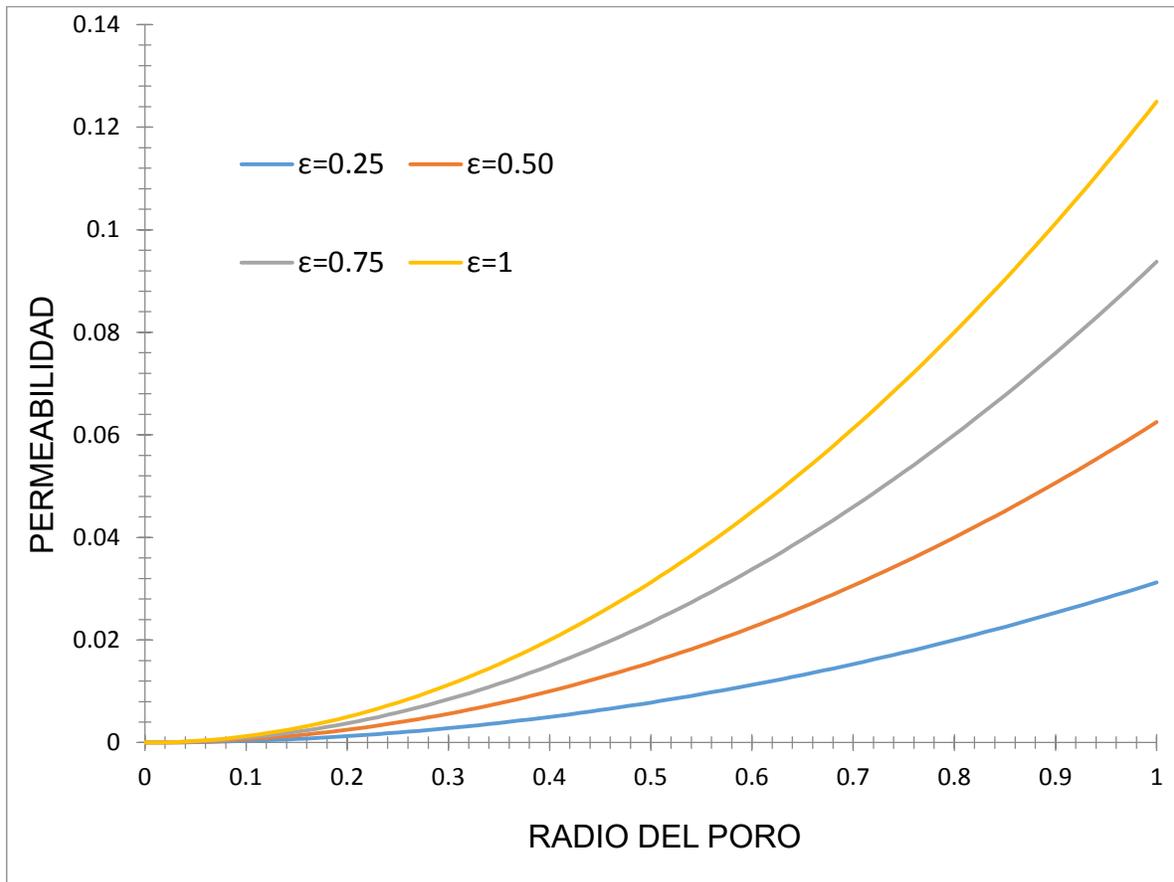


Figura 13. Ilustra la permeabilidad intrínseca como función del radio del poro con diferentes valores de porosidad.

La Fig. 13 nótese el efecto de la permeabilidad como función de la porosidad del medio la cual, es una función del número de huecos en el sistema. Es claro que para este modelo, la permeabilidad muestra un comportamiento monótono creciente en todo el intervalo del radio del poro. Las líneas de la gráfica se desfazan de menor a mayor permeabilidad por efecto de la porosidad. Un material que tiene un mismo radio de poro puede ser más permeable que otro dependiendo de la porosidad del material.

7.3 Modelo Ellis(Teoría Fractal)

El algoritmo para la determinación del perfil de velocidades, flujo volumétrico, viscosidad aparente, esfuerzo cortante y permeabilidad aparente para el flujo de fluidos de Ellis en un sistema Fractal en medios porosos se resumen como:

- a) (ϕ) porosidad y (R) radio de la partícula promedio ($\phi= 0.52$, $R = 0,03$ cm). ^[5]
- b) Obtener los parámetros de estructura (r_{\min} , r_{\max} , L_0) y la dimensión fractal (D_f , D_T) a partir de las Ecs. (3.24 - 3.30) del Capítulo 3.
- c) Los parámetros de propiedades de fluido ($\sigma_{1/2} = 0.719$ Pa , $\mu_0 = 4.35$ Pa s) pueden obtenerse por experimento ^[30].

7.3.1 Perfil de velocidades

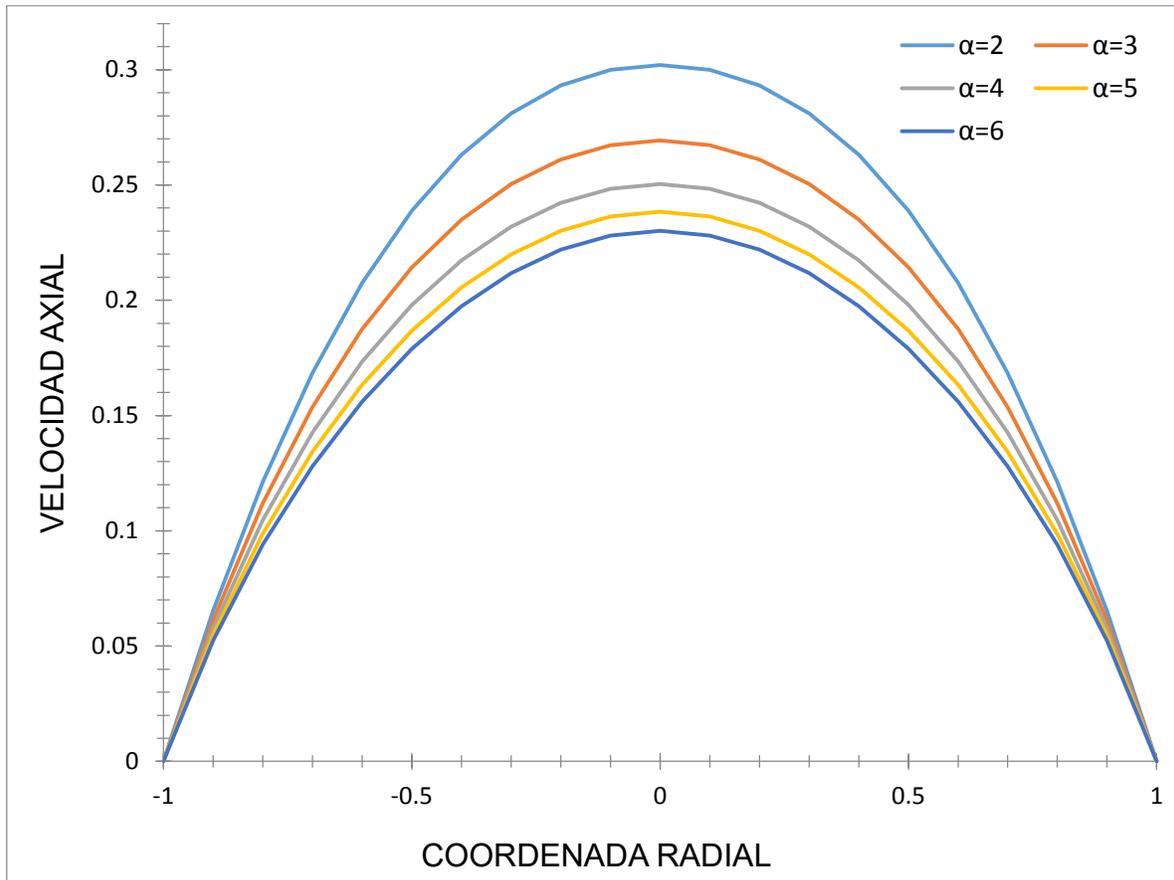


Figura 14. Ilustra el perfil de velocidades como función de la coordenada radial para diferentes valores del parámetro alfa. ($D_T=1.25$, $L_0=0.0824$)

En Fig.14 Se simula el perfil de velocidades del fluido Ellis utilizando la teoría fractal aplicada a la descripción del sistema heterogéneo de poros, se observa lo siguiente: en las paredes la velocidad es cero, debido a que no hay efectos de deslizamiento en la pared. En el centro del capilar $r = 0$, se desarrolla el máximo valor en el perfil de velocidad. El efecto del parámetro alfa, es desfasar las curvas ha estado de mayor a menor velocidad por efecto del flujo.

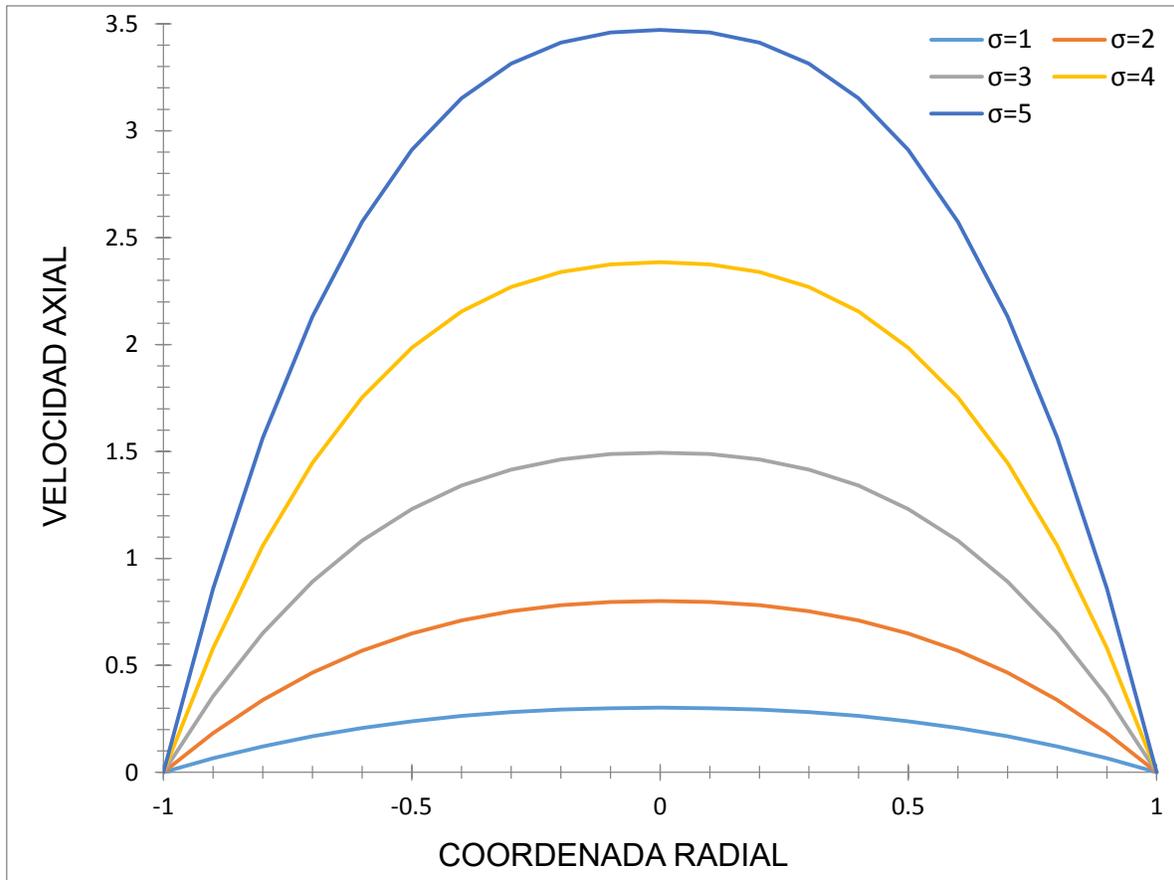


Figura 15. Ilustra el perfil de velocidades en función de la coordenada radial para diferentes valores del esfuerzo en la pared. El parámetro utilizado $\alpha = 2$. ($D_T=1.25, L_0 = 0.0824$)

En Fig. 15 Se simula el perfil de velocidades del fluido Ellis utilizando la teoría fractal aplicada a la descripción del sistema heterogéneo de poros.

El efecto neto del esfuerzo en la pared, es desfasar las curvas hacia estados de mayor a menor velocidad por efecto del flujo. Nótese que en las paredes la velocidad es cero, debido a que no hay efectos de deslizamiento en la pared. Sin embargo, se nota que el efecto del parámetro alfa, el cual está asociado a los mecanismos adelgazantes o engrosantes al corte, aumenta el máximo en los perfiles parabólicos, es decir, entre más adelgazante sea nuestro fluido mayor velocidad de los elementos materiales se puede observar.

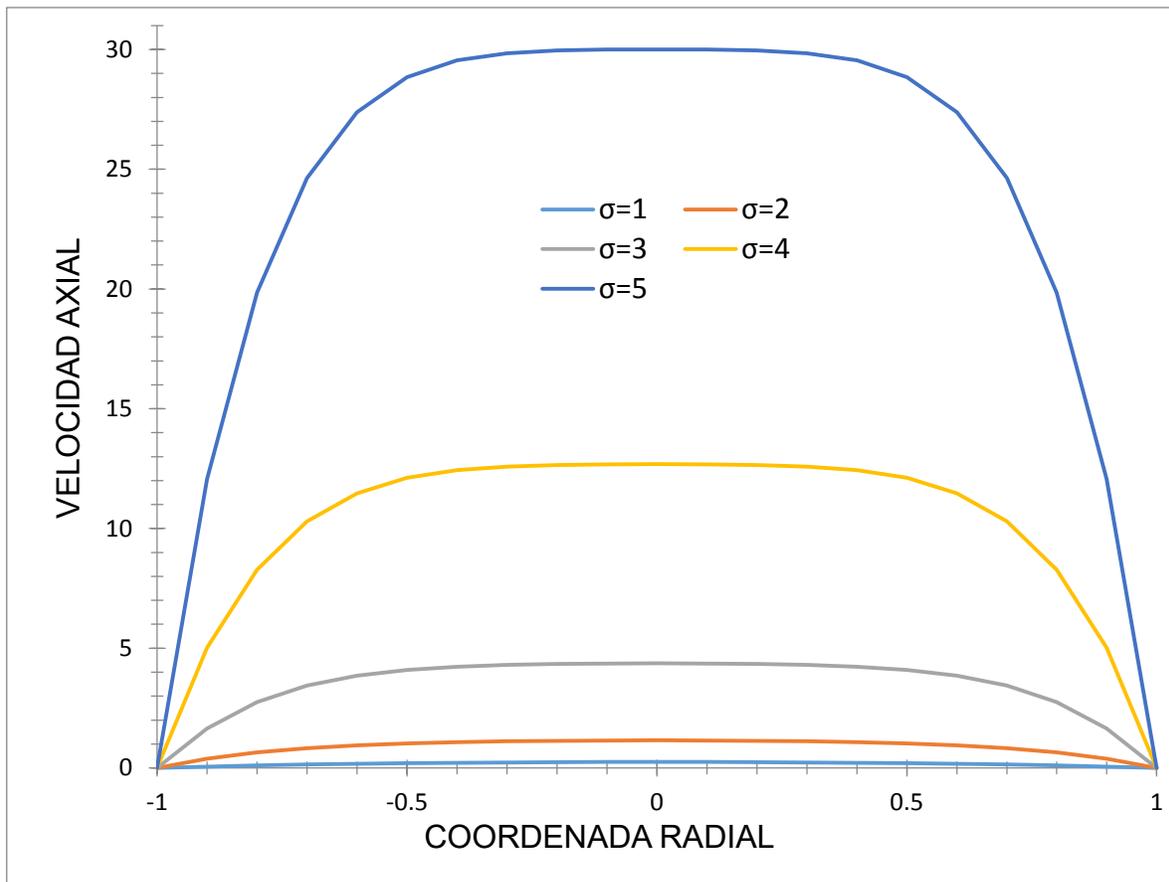


Figura 16. Ilustra el perfil de velocidades en función de la coordenada radial para diferentes valores del esfuerzo en pared. El parámetro utilizado $\alpha = 4$. ($D_T=1.25, L_0 = 0.0824$)

En Fig.16 Se simula el perfil de velocidades del fluido Ellis utilizando la teoría fractal aplicada a la descripción del sistema heterogéneo de poros.

El efecto del esfuerzo en la pared, es desfasar las curvas ha estado de mayor a menor velocidad por efecto del flujo. . A valores de esfuerzos de la pared cercanos a 1 se obtiene el menor perfil de velocidades. Nótese que en las paredes la velocidad es cero, debido a que no hay efectos de deslizamiento en la pared. Es importante resaltar, que existe una zona de -0.6 a 0.6 donde se presenta un frente homogéneo debido a que no existe diferencia relativa, la velo de los elementos materiales que se están considerando.

7.3.2 Flujo volumétrico

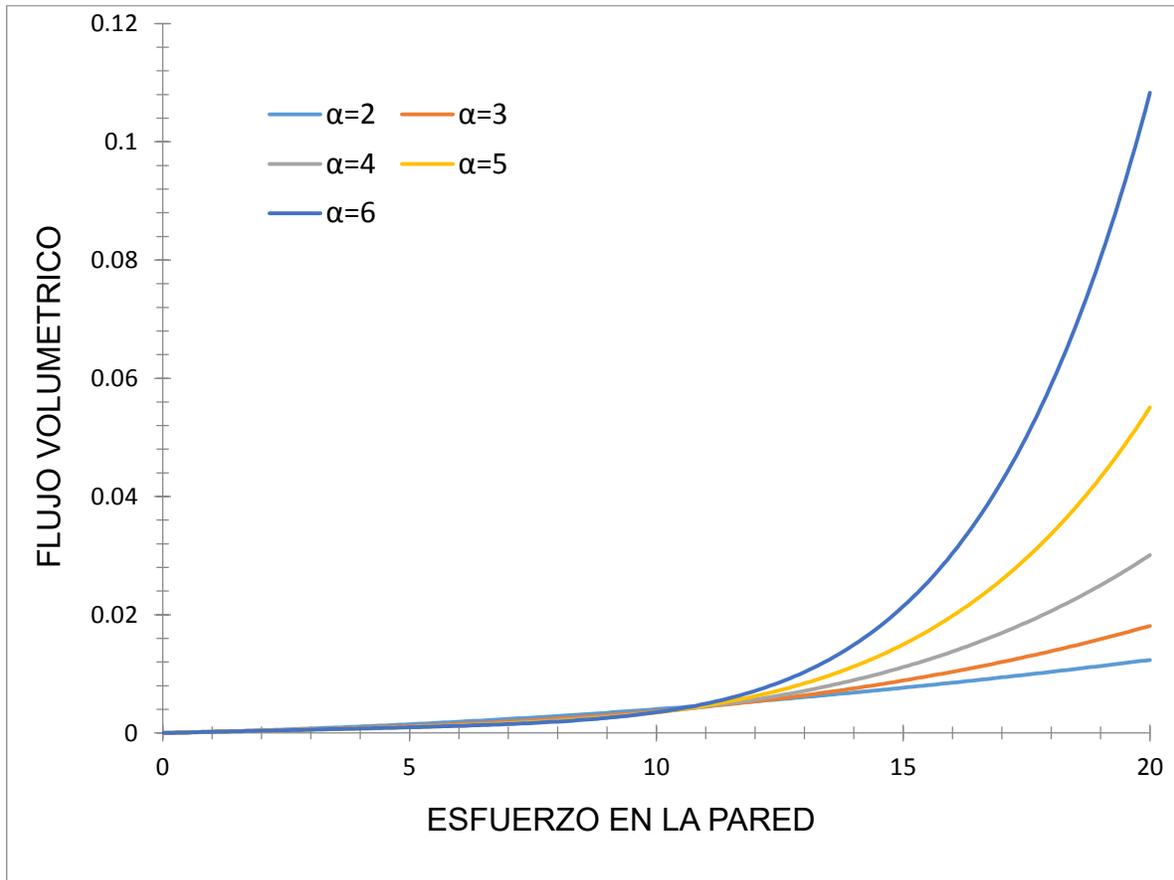


Figura 17. Ilustra el flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del parámetro alfa. ($D_T=1.25$, $D_f=1.79$, $L_0 = 0.0824$)

En Fig.17 Se simula el flujo volumétrico del fluido Ellis utilizando la teoría fractal aplicada a la descripción del sistema heterogéneo de poros.

A valores bajos del esfuerzo en la pared el flujo volumétrico se comporta de forma constante sin embargo, en particular para un esfuerzo crítico el sistema presenta un comportamiento monótono creciente y el valor de las pendientes asociadas a los mecanismos adelgazantes está determinado completamente por el parámetro alfa.

7.3.3 Viscosidad aparente

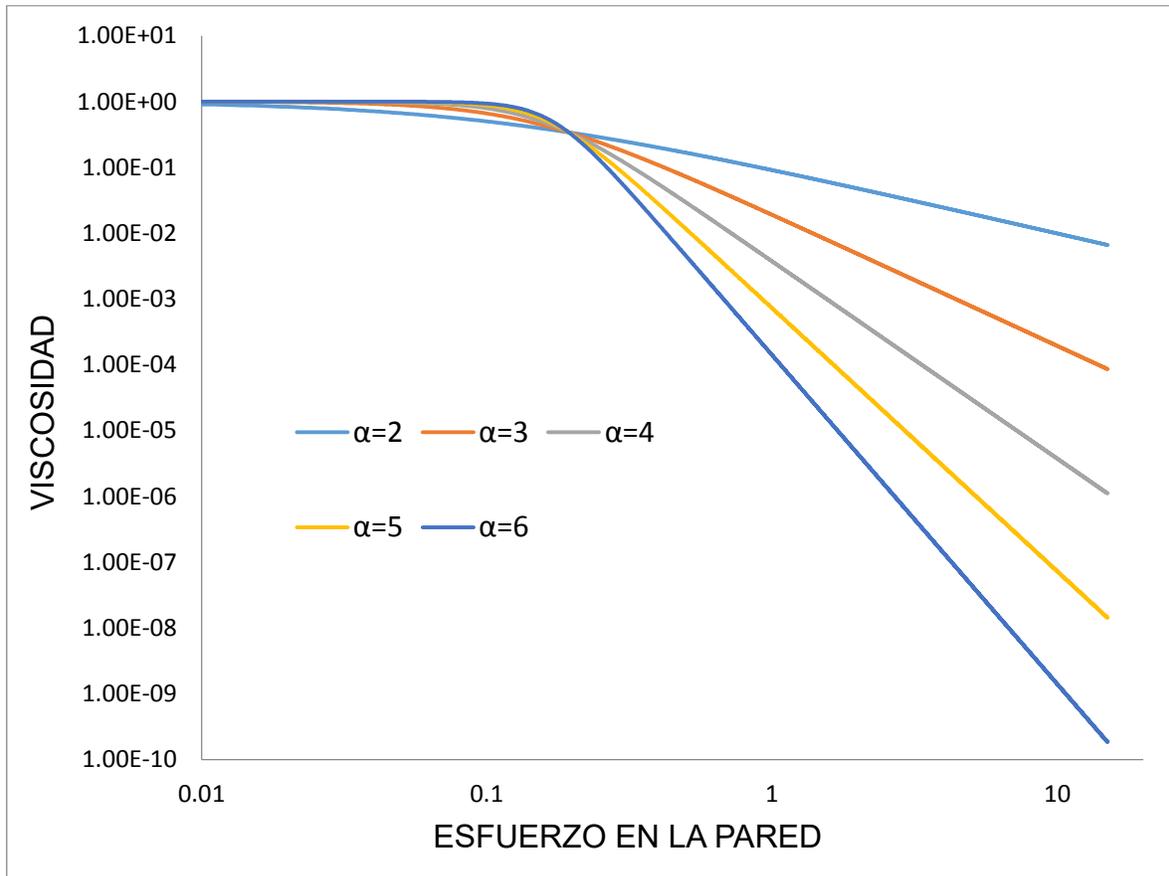


Figura 18. Ilustra la viscosidad como función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del parámetro alfa. ($D_T=1.25$, $D_f=1.79$, $L_0 = 0.0824$)

En Fig.18 Se simula la viscosidad del fluido Ellis utilizando la teoría fractal aplicada a la descripción del sistema heterogéneo de poros, se observan los siguientes puntos importantes:

- a) Se observa que a valores bajos del esfuerzo en la pared cercanos a 0.1 la viscosidad se comporta de forma constante como un fluido newtoniano. Sin embargo para un cierto esfuerzo en la pared mayor a 0.1 el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente.
- b) Los mecanismos adelgazantes decrecen notablemente la viscosidad y el valor de las pendientes están relacionadas con el adelgazamiento del líquido debido a la desestructuración del material por efecto del corte

asociado a la fuerza que deforma continua e irreversiblemente el fluido (esfuerzo en la pared).

7.3.4 Esfuerzo cortante

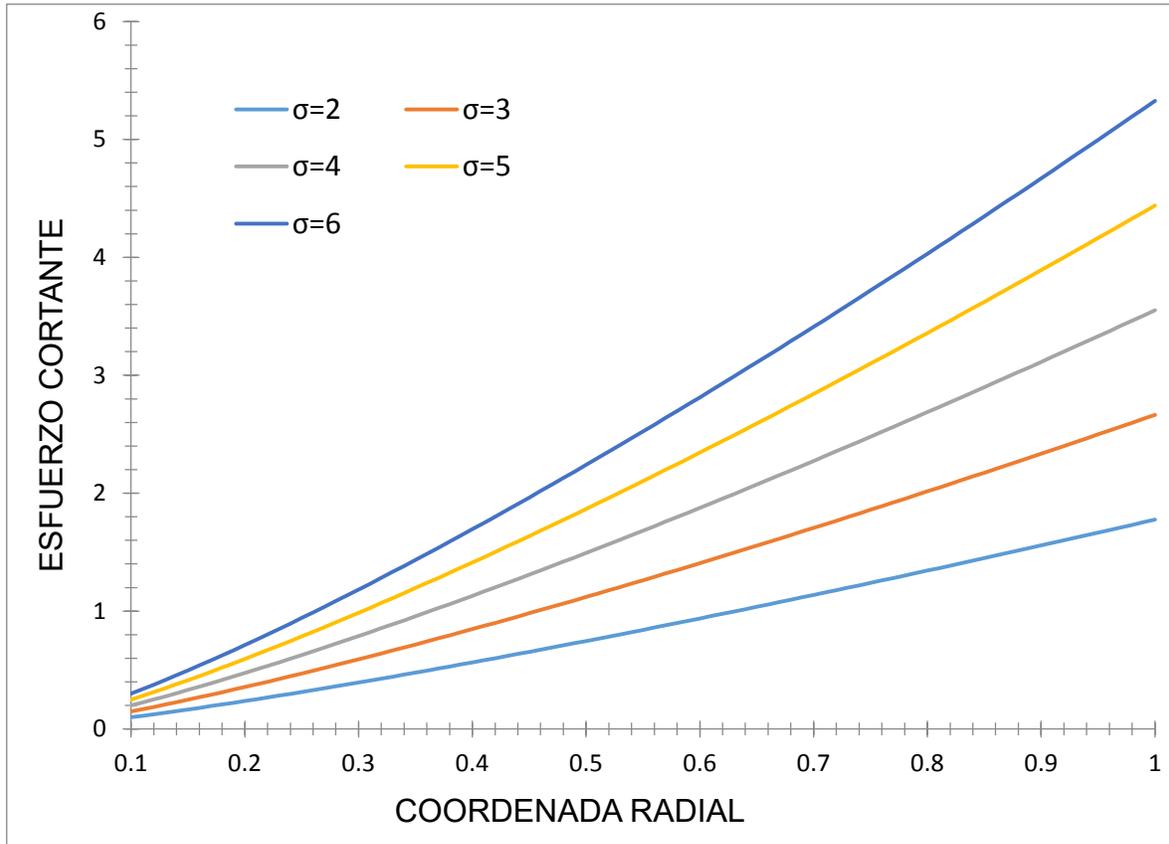


Figura 19. Ilustra el esfuerzo cortante como función de la coordenada radial para diferentes valores del parámetro sigma. ($D_T=1.25$, $L_0 = 0.0824$)

En Fig .19 Se simula la esfuerzo cortante del fluido Ellis utilizando la teoría fractal aplicada a la descripción del sistema heterogéneo de poros .Se observa que el esfuerzo muestra un comportamiento lineal en el intervalo $[0.1,1]$. Nótese que en la pendiente de cada recta está determinada por el valor del esfuerzo en la pared .

7.3.5 Esfuerzo cortante total

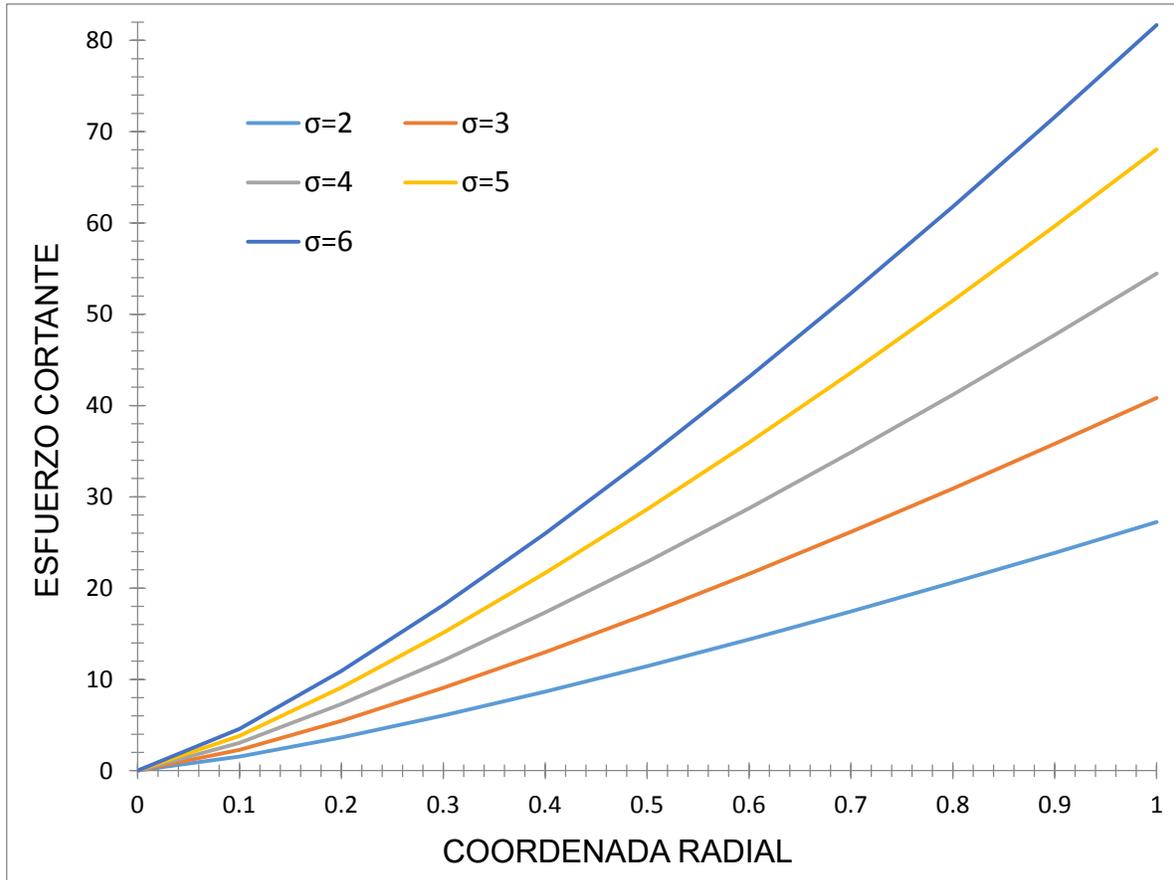


Figura 20. Ilustra el esfuerzo cortante total en el haz de capilares como función de la coordenada radial para diferentes valores del parámetro sigma. ($D_T=1.25$, $D_f=1.79$, $L_0=0.0824$)

En Fig. 20 Se simula la esfuerzo cortante total del fluido Ellis utilizando la teoría fractal aplicada a la descripción del sistema heterogéneo de poros, tomando en cuenta el conjunto de los capilares del medio poroso, se observa que el esfuerzo muestra un comportamiento lineal en el intervalo [0, 1]. Nótese que en la pendiente de cada recta está determinada por el valor del esfuerzo en la pared.

7.3.6 Permeabilidad aparente

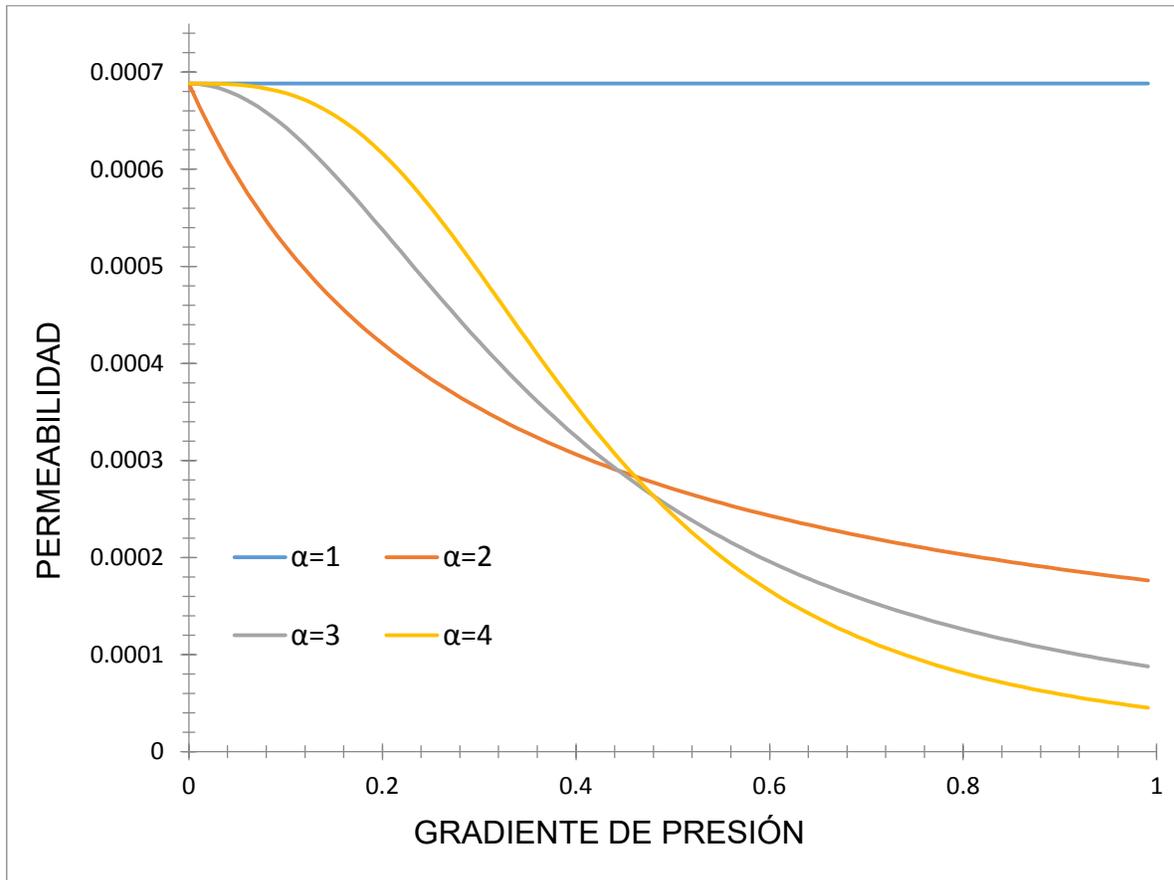


Figura 21. Ilustra la permeabilidad aparente para el modelo de Ellis en un Sistema Fractal, con diferentes valores para el parámetro alfa.

($D_T=1.25$, $D_f=1.79$, $L_0=0.0824$)

En la Fig. 21 En los diferentes casos considerados, se observa que el comportamiento es monótono decreciente para valores bajos de gradiente de presión. Sin embargo, para un valor $\alpha=1$ es constante debido al comportamiento newtoniano del fluido. Para los demás casos de alfa los valores críticos en el gradiente de presión, su comportamiento en la permeabilidad es asintótico en donde, este es independiente al gradiente de presión., así que se concluye que el efecto importantes es a bajos valores en el gradiente de presión. Es importante resaltar, que en estos cálculos no se toma en cuenta la naturaleza elástica del material debido a los alcances del trabajo el cual, será mencionado en el trabajo futuro al final de este trabajo.

7.4 Resultados comparativos entre velocidad superficial y gradiente de presión , teórico-experimental

Se investigaron dos colecciones completas de los datos experimentales encontrados en la literatura sobre un fluido de Ellis:

- Park obtuvo datos experimentales para un fluido adelgazante en lechos empacados que puede ser caracterizado como un fluido de Ellis.^[30]
- Balhoff y Thompson estudiaron la reología de un fluido de Ellis en lechos empacados.^[24]

La relación entre la velocidad promedio y el gradiente de presión está dada por :

$$V = \frac{k}{\mu_0} \frac{\Delta P}{L} + \left(\frac{k}{\mu_{\text{eff}}} \frac{\Delta P}{L} \right)^\alpha \quad (7.1)$$

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_0^{1/\alpha} \left(\frac{3+\alpha}{4} \right) \left(\frac{k\phi\sigma_{1/2}}{\beta^2} \right)^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} \quad (7.2)$$

$$k = \frac{dp^2 \phi^3}{72C(1-\phi)^2} \quad (7.3)$$

Donde k es permeabilidad del medio poroso, β es un constante empírica del modelo macroscópico para fluidos adelgazantes en un medio poroso, C es una constante (C puede encontrarse experimentalmente y es reportada como 25/12), Dp es diámetro de partícula y μ_{eff} es la viscosidad para el fluido de Ellis.

A partir de los datos experimentales se graficó la velocidad superficial para el modelo macroscópico de Ellis Ec.(7.1) y el modelo de Ellis fractal Ec (7.4)

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\phi(3-D_T-D_f)2^{D_T-1}L_0^{1-D_T}}{\left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_0}{4} \frac{2^{D_T-2}L_0^{1-D_T}}{D_T(D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right)_{r_{\max}}^{2D_T} \\ + \frac{\phi_1}{\alpha+3} \frac{(2^{D_T-2}L_0^{1-D_T})^\alpha}{D_T^\alpha(\alpha D_T+3-D_f)} \left(-\frac{dp}{dL_0} \right)_{r_{\max}}^{(\alpha+1)D_T} \end{array} \right\} \quad (7.4)$$

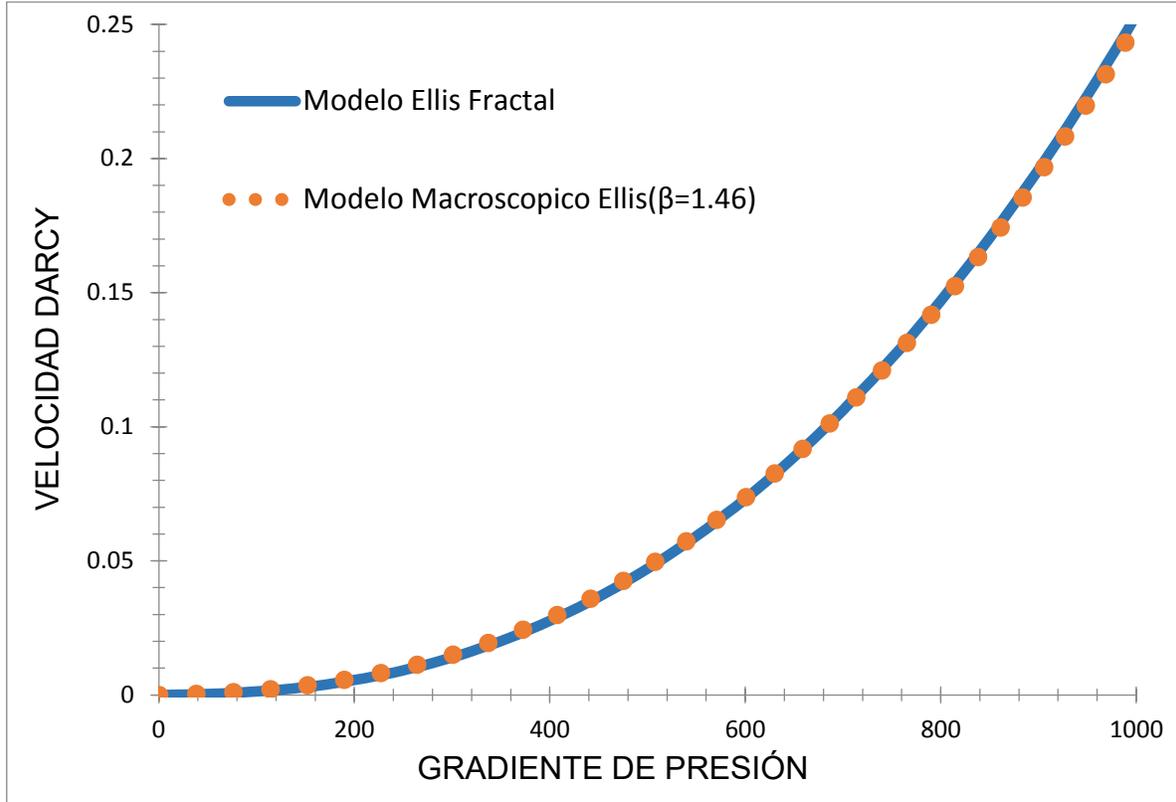


Figura 22. Comparación entre Modelo Ellis fractal y datos experimentales de Park 0.5% poliacrilamida

El fluido es descrito por los parámetros de Ellis $\alpha=2.47$, $\sigma_{1/2}=0.719$ Pa, $\mu_0=4.35$ Pa s. El lecho tiene un diámetro de diámetro de partícula promedio de 0.1621 cm, porosidad 42.3 % y la permeabilidad estimada de $3.76 \times 10^{-5} \text{cm}^2$.

Parámetros fractal ($D_f=1.72, D_T=0.63, L_0=0.075$)

En la Fig. (22) se ilustra la velocidad de Darcy (Superficial) en función del gradiente de presión. El fluido es caracterizado mediante la ecuación constitutiva de Ellis, es decir el fluido a bajos esfuerzos en la pared presenta una zona constante en la viscosidad y para un esfuerzo crítico adelgazamiento al corte respectivamente. Este sistema describe al medio poroso mediante la teoría la fractal respectivamente. Los datos experimentales fueron obtenidos de un homopolímero conocido como Poliacrilamida al 5 % el cual, puede ser sintetizado en forma de cadena lineal o entrecruzado, e incluso se emplea junto con otros monómeros como el acrilato de sodio para formar distintos copolímeros. Este

absorbe agua, por lo que en la práctica es un hidrogel, y uno de los geles más utilizados para realizar electroforesis. En la Fig. (22) se observa que la velocidad de Darcy en función del gradiente de presión muestra un comportamiento monótono creciente en toda la ventana de observación, contrastando con nuestro modelo Ellis fractal se nota una buena concordancia entre los datos .

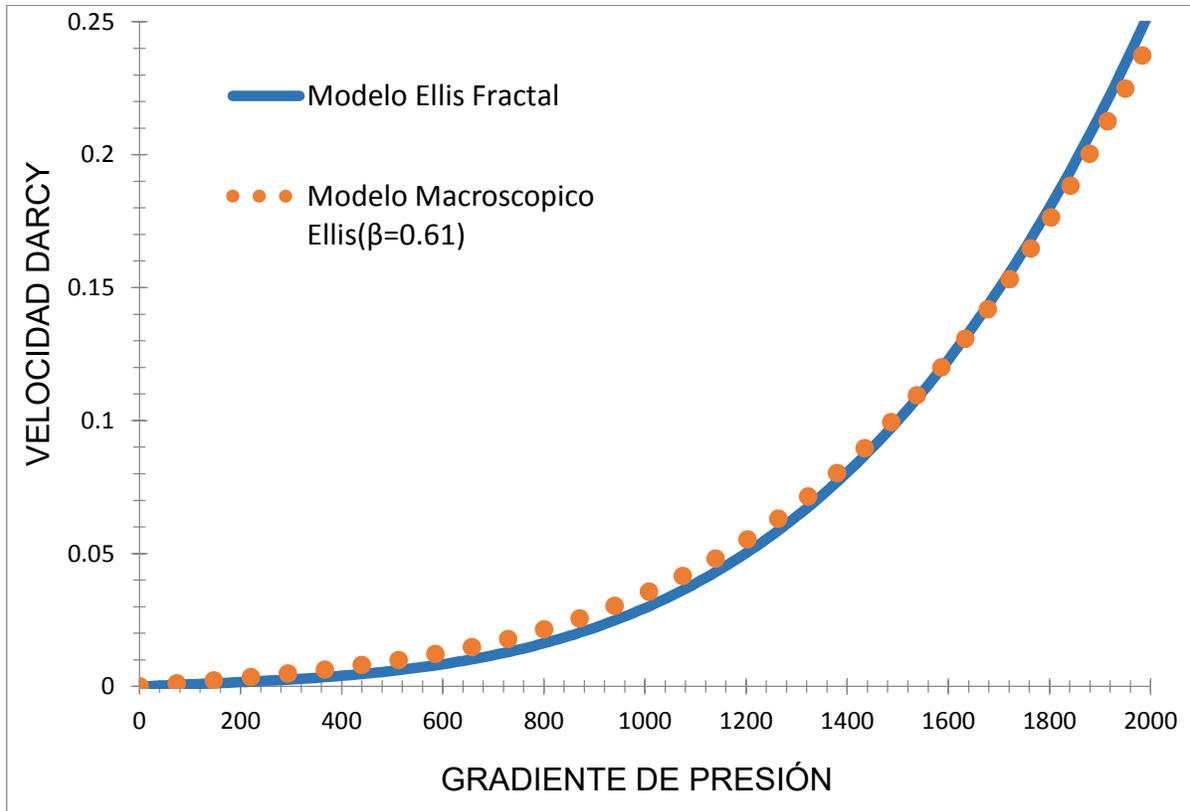


Figura 23.Comparación entre Modelo Ellis fractal y datos experimentales de Balhoff y Thompson 0.72 % goma guar.

El fluido es descrito por los parámetros de Ellis $\alpha=3.46$, $\sigma_{1/2}= 9.01$ Pa, $\mu_0=2.672$ Pa s .El lecho tiene un diámetro de diámetro de partícula promedio de 0.254 cm , porosidad 38 % y la permeabilidad estimada de 4.19×10^{-5} cm².

Parámetros fractal ($D_f=1.68, D_T=0.56, L_0=0.072$)

En la Fig (23) se muestra el contraste entre la velocidad modelo de Ellis fractal y los datos experimentales de Balhoff y Thompson 0.72% goma guar, que es un polisacárido de reserva nutricional de las semillas de *Cyamopsis tetragonoloba*, el cual es soluble en agua, que al mezclarse con esta genera,

un gel viscoso e insípido. Esta propiedad espesante lo ha convertido en ingrediente primordial para extracción de petróleo y gas natural en yacimientos, mediante fracturación hidráulica de lutitas. Como en el caso anterior, se observa un comportamiento monótono creciente en toda la ventana de observación y al comparar con los datos experimentales se observa una concordancia entre estos y las predicciones analíticas de este modelo. Finalmente, los datos experimentales de los fluidos, pueden ser caracterizados mediante el modelo de Ellis utilizando como herramienta los conceptos de la teoría fractal aplicada un medio poroso. Siguiendo en este punto, en el capítulo posterior se presentarán la comparación con los objetivos y la hipótesis, se darán las conclusiones del mismo, y se presentarán las posibles líneas de investigación con el fin de enriquecer esta investigación.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES Y

TRABAJO FUTURO

En este trabajo, se analizó un líquido no newtoniano con la ecuación constitutiva de Ellis mediante la teoría del poro promedio y teoría fractal, con estructura transitoria que fluye a través de una tubería de radio $r=a$ y longitud $z=L$. Las ecuaciones de momento se resolvieron y se dedujeron expresiones analíticas para el perfil de velocidades axial, velocidad promedio, flujo volumétrico, viscosidad aparente, esfuerzo cortante y permeabilidad respectivamente para cada modelo. Finalmente, se analizaron los efectos que puede tener el cambio de geometría en el sistema, utilizando datos reométricos experimentales provenientes de la literatura de un fluido de Ellis y comparándolos con el modelo Ellis fractal. ^[24,30]

8.1 Perfil de velocidad

En el caso de la velocidad axial, el comportamiento de ambos sistemas, Ellis (Teoría del Poro promedio) y Ellis Fractal (Teoría Fractal), muestran el clásico perfil parabólico, los perfiles de velocidad decrecen conforme el fluido se hace más espeso al corte, a través de las propiedades materiales caracterizadas por un fluido de Ellis.

8.2 Flujo volumétrico

En el flujo volumétrico se observan comportamientos similares en ambos sistemas, Ellis (Teoría del Poro promedio) y Ellis Fractal (Teoría Fractal), a valores bajos del esfuerzo en la pared el flujo volumétrico se comporta de forma constante por efecto de la fuerza motriz asociada con el esfuerzo en la pared debido a las propiedades adelgazantes al corte del fluido. Sin embargo, en particular para un esfuerzo crítico el sistema presenta un comportamiento monótono creciente lo que implica que en este régimen los mecanismos no-

newtonianos asociados a las propiedades adelgazantes al corte dominan sobre las viscosas.

8.3 Viscosidad aparente

En el caso de la viscosidad aparente se observan en ambas teorías que los mecanismos adelgazantes decrecen notablemente la viscosidad y el valor de las pendientes están relacionadas con el adelgazamiento del líquido debido a la desestructuración del material por efecto del corte asociado a la fuerza que deforma continua e irreversiblemente el fluido (esfuerzo en la pared).

8.4 Esfuerzo cortante

El esfuerzo cortante en el modelos de Ellis y Ellis Fractal tiene un comportamiento lineal con la coordenada radial, las pendientes de cada recta está determinada por el valor del esfuerzo en la pared. Es importante resaltar que en estas curvas el esfuerzo no depende del tipo de fluido que se analiza, por lo tanto es un resultado general.

8.5 Permeabilidad Aparente

En este trabajo la permeabilidad aparente (medida de resistencia de flujo en un medio) en un Sistema fractal para la ecuación constitutiva de Ellis, los resultados mostraron que la permeabilidad aparente decrece con el incremento del gradiente de presión, y en un valor critico el comportamiento es asintótico. En cuanto mayor sean los valores de la constante material α , es más baja la permeabilidad aparente. En contraste con la permeabilidad intrínseca para el modelo de Ellis que tiene un comportamiento monótono creciente en todo el intervalo por efecto de la porosidad.

La precisión del modelo propuesto puede depender en gran medida de la determinación de tamaños de poro mínimo y máximo, lo que influyó significativamente en la determinación exacta desde las dimensiones fractales,

tamaño medio, y la permeabilidad. Sin embargo, un modelo para determinar con precisión los tamaños máximo y mínimo de los poros actualmente no se dispone, y esto puede ser objeto de estudio a futuro.

8.6 Trabajo futuro

Una continuación natural de esta investigación versa en el estudio de diferentes fenómenos físicos utilizando distintas ecuaciones constitutivas. En este contexto, esta tesis desarrollo un modelo inelástico descrito por el acoplamiento del fluido newtoniano y el de ley de potencia a través del modelo de Ellis. Este modelo, puede ser extendido tomando en cuentas las propiedades elásticas asociadas a la recuperación de distintos fluidos complejos. Ejemplos de estos son: (i) Maxwell, (ii) Jefreys, (iii) Giesekus, (iv) Oldroyd B, etc.

Por otra parte desde un punto matemático al extender este tipo de fluidos en el régimen viscoelástico lineal y no lineal se necesitan métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales como son:

- a) Discretos
- b) Elemento finito
- c) Volumen Finito
- d) Métodos Híbridos

Por ejemplo, se pueden estudiar los sistemas proponiendo técnica analíticas basadas en métodos perturbativos o utilizando diferentes transformadas integrales. Por otra parte, se puede describir el medio poroso como un sistema conformado por expansiones y contracciones de flujo, en este punto se tienen diferentes tipos y relaciones geométricas de contracción para describir este fenómeno.

En este contexto, se puede extender este estudio tomando en cuenta los procesos de flujo pulsátil modificando el gradiente des presión. Estos sistemas, son muy utilizados en la estimulación de yacimientos de petróleo por medios de ondas elásticas. Estos métodos son conocidos como recuperación terciaria de petróleo.

De la misma manera, la extensión experimental con sistemas complejos micelares que están conformados con miles o decenas de miles de agentes tensoactivos, los cuales forman estructura tipo gusano las cuales presentan comportamiento reológico complejo en el régimen lineal y no lineal respectivamente.

Un aspecto importante de esta teoría puede ser la aplicación a sistemas biológicos como la sangre , la repuesta dinámica corazón-sistema vascular en la descripción de flujo sanguíneo con diferentes trastornos alimenticios. Por otra parte, las células ciliadas son motores que amplifican el sonido el oído interno por los que la membrana puede ser descrita por una serie de tortuosidades en donde se intercambian fluidos ricos en iones potasio, calcio, ect.

Bibliografía

- [1] A.J. Katz and A. H. Thompson, 1985, “Fractal sandstone pores: implications for conductivity and pore formation,” *Physical Review Letters*, vol. 54, no. 12, pp. 1325–1328.
- [2] Anderson, A. N. Mcbratney , A. B. and Crawford, J.W.,1998, Applications of fractal to soil studies, in Sparks, D. L., ed., *Advances in Agronomy* , v. 63 , Academic Press , p. 2-76.
- [3] Avery , I. Hall, F.R and Sturgess, C.E.N , 1998, Fractal modelling of materials. *Journal of Materials Processing Technology* 80-81,565 -571.
- [4] B. Gebhart, Y. Jaluria, R.L. Mahajan and B. Sammakia. 1988 .Buoyancy-induced flowsand transport. Hemisphere Publishing Co. New York, N.Y.
- [5] B. M. Yu and P. Cheng, 2002, “A fractal permeability model for bi-dispersed porous media,”*International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 45, no. 14, pp. 2983–2993.
- [6] B. M. Yu, L. J. Lee, and H. Q. Cao, 2002, “A fractal in-plane permeability model for fabrics,”*Polymer Composites*, vol. 23, no. 2, pp. 201–221.
- [7] Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 *Dynamics of polymeric liquids*,vol. 1. New York: John Wiley & Sons.
- [8] Bird, R.B., Stewart, W.E. & Lightfoot, E.N. 2002 *Transport Phenomena*, SecondEdition. John Wiley & Sons.
- [9] Balankin A. Oleschko, K., et al. 2000 , *Comportamiento fractal en sistemas complejos : científica ESIME* , no.22 , p. 19-28.
- [10] C. D. Tsakiroglou, 2002 “A methodology for the derivation of non-Darcian models for the flow of generalized Newtonian fluids in porous media,” *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 105, no. 2-3, pp. 79–110.

- [11] D. A. Nield and A. Bejan. 1992, Convection in porous media. Springer-Verlag, USA.
- [12] Del Rio J.A 1993 Contribuciones teóricas al estudio de los fenómenos de transporte en medios porosos. Ciencia 44, 527-544.
- [13] Del Rio J.A & Castrejón-Pita J.R. 1987 Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. Revista Mexicana de Física. 49 (1) 74-85 p.
- [14] Eiyad Ahmad Moh'd Abu Nada, M.S., 2001, Lattice Boltzmann simulation of complex fluid systems in porous media, PhD Thesis, New Mexico State University.
- [15] Escultura, E.E. 2002 . The Flux theory of gravitation V : the mathematics of the new physics. Applied mathematics and Computation, 130 ,145-169.
- [16] Feder, J., 1988 , Fractals: Plenum Press . New York and London , 283 p.
- [17] G. W. Govier and K. Aziz, 1972 ,The Flow of Complex Mixtures in Pipes, Van Nostrand Reinhold, New York, NY, USA.
- [18] H. Nguyen, B. Chopard, and S. Stoll , 2007, “Hydrodynamic properties and permeability of fractal objects,”International Journal of Modern Physics C, vol. 18, no. 4, pp. 732–738.
- [19] Israelachvili J. N., 1992, Intermolecular and Surface Forces, Academic Press, New York.
- [20] J. C. Cai and S. Y. Sun, 2013, “Fractal analysis of fracture increasing spontaneous imbibition in porous media with gas-saturated,” International Journal of Modern Physics C, vol. 24, no. 8, Article ID 1350056, 13 pages.
- [21] Mandelbroth, B. B., 1983 , The fractal Geometry of Nature : W.H. Freeman and Company, New York, 468 p.

- [22] M. J. Yun, W. Zheng, Y. B. Li, and Y. Li, 2012, “Fractal analysis of Herschel-Bulkley fluid flow in a capillary,” *Acta Physica Sinica*, vol. 61, no. 16, Article ID 164701.
- [23] M. J. Yun and W. Zheng, 2012, “Fractal analysis of Robertson-Stiff fluid flow in porous media,” *Chinese Physics Letters*, vol. 29, no. 6, Article ID 064706.
- [24] M. T. Balhoff and K. E. Thompson, 2006, “A macroscopic model for shear-thinning flow in packed beds based on network modeling,” *Chemical Engineering Science*, vol. 61, no. 2, pp. 698–719.
- [25] M. Turcio, J.M. Reyes, R. Camacho, C. Lira-Galeana, R.O. Vargas, O. Manero. 2013. Calculation of effective permeability for the BMP model in fractal porous media. *Journal of Petroleum Science and Engineering* 103, 51-60.
- [26] Meijuan Yun. 2014. Seepage Characteristics Study on Power-Law Fluid in Fractal Porous Media. *Mathematical Problems in Engineering* 2014, 1-6.
- [27] Nanjo, K., Nagahama H. and Satomura M. 1998. Rates of aftershock decay and the fractal structure of active fault systems. *Tectonophysics*, 287, 173-186.
- [28] O. N. Cavatorta and R. D. Tonini, 1987, “Dimensionless velocity profiles and parameter maps for non-Newtonian fluids,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 14, no. 4, pp. 359–369.
- [29] R. A. Greenkorn. 1983, *Flow Phenomena in Porous Media*. Marcel Dekker Inc. N.Y.
- [30] Park, H.C., Hawley, M.C., and Blanks, R. F. 1975. The flow of non-newtonian solution through packed beds, *Polym. Eng. Sci.* 15(11), 761-1201.
- [31] Perrier, E., Bird, N. and Rieu, M. 1999. Generalizing the fractal model of soil structure: the pore – solid fractal approach. *Geoderma* 88(3-4):137-164.

- [32] Sochi T. 2010, Non-Newtonian flow in porous media. *Polymer* 51 5007-5023.
- [33] Schowalter, W.R. 1978 *Mechanics of non-Newtonian fluids*. Pergamon Press Inc.
- [34] Shenoy, A.V. 1993 Darcy-Forcheimer natural, forced and mixed convection heat transfer in non-Newtonian power-law fluid-saturated porous media. *Trans. Porous Media* 11 219-241.