



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**RESTRICCIONES UNIVERSALES
PARA GRUPOS FUCHSIANOS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

**CARLOS EDUARDO MARTÍNEZ
AGUILAR**

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

2016





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Apellido paterno: Martínez
Apellido materno: Aguilar
Nombre(s): Carlos Edudardo
Teléfono: 12853972
Universidad Nacional Autnoma de México
Facultad de Ciencias
Carrera: Matemáticas
Número de cuenta: 309165570

2. Datos del tutor

Grado: Doctor
Nombre(s): Antonio
Apellido paterno: Lascurain
Apellido materno: Orive

3. Datos del sinodal 1

Grado: Doctora
Nombre(s): Adriana
Apellido paterno: Ortiz
Apellido materno: Rodríguez

4. Datos del sinodal 2

Grado: Maestro en Ciencias
Nombre(s): José Atonio
Apellido paterno: Gómez
Apellido materno: Ortega

5. Datos del sinodal 3

Grado: Doctor
Nombre(s): Ernesto
Apellido paterno: Rosales
Apellido materno: González

6. Datos del sinodal 4

Grado: Maestro en Ciencias
Nombre(s): Raybel Andrés
Apellido paterno: García
Apellido materno: Ancona

7. Datos del trabajo escrito.

Título: Restricciones universales para grupos Fuchsianos
Número de páginas: 57
Año: 2016

Contenido

1. Preliminares	3
1.0.1. Preliminares analíticos	3
1.0.2. Preliminares geométricos	6
2. Restricciones universales para ciclos de vértices	13
3. Grupos de Hecke	31
4. Desigualdades de la traza	35

Introducción

La teoría de los grupos Fuchsianos es de gran importancia en diversas ramas de la matemática moderna, de forma más específica, interactúa con la teoría de las superficies de Riemann, la teoría de números, los sistemas dinámicos, la teoría de mapeos *quasi* conformes y la teoría de Teichmüller entre otras áreas. Un caso que es de particular importancia es el de la teoría de nudos y la topología de las 3-variedades, donde los trabajos de Thurston y Jørgensen probaron que la mayoría de éstas tienen estructura hiperbólica, es decir, son cocientes de la acción de un grupo Kleniano en el espacio hiperbólico tridimensional (véase [7]). Al ser los grupos fuchsianos un caso particular de los grupos Klenianos, resulta de gran importancia estudiar los grupos fuchsianos dichos contextos.

En esta tesis exploraremos varios resultados sobre rigidez de los grupos Fuchsianos, es decir, encontraremos restricciones universales para estos grupos. En particular las restricciones a ciclos de vértices accidentales y elípticos juegan un papel protagónico. En el capítulo 2 se exhiben cotas superiores para las partes imaginarias de ciclos en los polígonos de Ford (teorema 2.0.4). Se muestran también cotas inferiores de las distancias entre ciclos al centro del polígono de Dirichlet (teorema 2.0.9), además se muestra que en el caso de ciclos de orden tres no existen cotas inferiores. Todos estos teoremas vienen acompañados de ejemplos que prueban que las cotas dadas son las mejores posibles.

En estos contextos los grupos de Hecke cobran una singular importancia. Por lo tanto estos son el objeto de estudio en el capítulo 3, donde se prueba que si un grupo fuchsiano tiene área menor a π , entonces se trata de un grupo de Hecke o uno de tres grupos triangulares específicos (teorema 3.0.13). También se prueba que si un grupo Fuchsiano contiene como subgrupo a un grupo de Hecke, entonces también es de Hecke (teorema 3.0.15).

En el capítulo 4 se estudian cotas para las trazas de los generadores de grupos Fuchsianos de rango 2. Un primer resultado muestra que si el grupo se encuentra generado por dos parabólicas, entonces su conmutador tiene traza mayor a 18, salvo dos casos específicos que corresponden grupos triangulares (teorema 4.0.17). Un segundo resultado establece cotas inferiores para la traza del conmutador de los generadores de un grupo Fuchsiano generado por una parabólica y una transformación cualquiera. Se prueba que si el grupo tiene elementos elípticos, entonces dicha traza es menor a 18 y si la traza se encuentra entre 3 y 6, entonces se trata de un grupo de Hecke (teorema 4.0.18). Finalmente, se prueba un resultado análogo a la desigualdad de Jørgensen para un grupo Fuchsiano de rango 2 generado por una elíptica y una transformación cualquiera. Se prueba que salvo ciertos grupos triangulares la traza del conmutador de los generadores es mayor o igual a 3 y se exhibe una cota más fuerte para la desigualdad de Jørgensen (teorema 4.0.19).

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.0.1. Preliminares analíticos

En la presente tesis se utilizarán algunos conceptos de la teoría general de la medida, comenzaremos con la definición del concepto más fundamental en dicha teoría: el de sigma álgebra. Durante toda la siguiente exposición denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de un conjunto X .

Definición 1 Sea X un conjunto, se dice que una familia $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra de subconjuntos de X si cumple las siguientes propiedades

1. $X \in \Sigma$
2. Si $A, B \in \Sigma$, entonces $A \setminus B \in \Sigma$
3. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de Σ , entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

A los elementos de una σ -álgebra se les conocen como conjuntos medibles. Si Σ es una σ -álgebra de subconjuntos de X , entonces al par (X, Σ) se le llama un espacio medible.

Nótese que para cualquier σ -álgebra Σ se tiene que $\emptyset \in \Sigma$ pues como $X \in \Sigma \Rightarrow \emptyset = X \setminus X \in \Sigma$, nótese también que para cualquier conjunto X $\mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra.

Otra observación que podemos hacer sobre las σ -álgebras es que si $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de σ -álgebras de subconjuntos de un conjunto X , entonces

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \Sigma_\alpha$$

es también una σ -álgebra, la cual claramente es la σ -álgebra más grande (en el sentido de contención de conjuntos) que está contenida en Σ_α para cualquier $\alpha \in \Lambda$. La demostración es bastante sencilla y el lector puede consultarla en [5, p. 12]. Gracias a este hecho obtenemos la siguiente definición

Definición 2 Sea X un conjunto y sea A una familia cualquiera de subconjuntos de X , definimos la σ -álgebra generada por A de la siguiente manera; sea

$$\mathcal{F} := \{ \Sigma \subset \mathcal{P}(X) \mid A \subset \Sigma \text{ y } \Sigma \text{ es } \sigma\text{-álgebra} \},$$

proseguimos a definir

$$S(A) := \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{F}} \Sigma,$$

a este conjunto le llamamos la σ -álgebra generada por A , es claro de la discusión anterior que $S(A)$ es una σ -álgebra y que $A \subset S(A)$.

Un ejemplo muy importante se obtiene al considerar (X, τ) un espacio topológico, entonces podemos generar una σ -álgebra a través de la topología τ , la cual la denotaremos como $S(\tau) := \mathbb{B}_\tau$. A esta σ -álgebra se le conoce como la σ -álgebra de Borel de τ , de este tipo de σ -álgebras tiene particular importancia el caso cuando $X = \mathbb{R}^n$ (n cualquier natural) y τ son los abiertos usuales de \mathbb{R}^n , a esta σ -álgebra la denotaremos por $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Definición 3 Sean (X, Σ) y (Y, Σ') espacios medibles, consideremos $f : X \rightarrow Y$, decimos que f es una función medible si para todo $E \in \Sigma'$ ocurre que $f^{-1}(E) \in \Sigma$.

Las funciones medibles las utilizaremos para definir integrales, pero primero necesitamos definir el concepto principal de la teoría de la medida.

Definición 4 Sea (X, Σ) un espacio medible. Una medida en (X, Σ) es una función $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que cumple las siguientes propiedades

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Sigma$
3. μ es σ -aditiva, es decir que si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos medibles disjuntos de X , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Si $\mu(X) < \infty$ decimos que μ es una medida finita.

A la terna (X, Σ, μ) se le llama un espacio de medida.

Un ejemplo de medida finita se obtiene al considerar $X := \{1, \dots, n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma := \mathcal{P}(X)$ y $\mu(A) = |A|$, donde $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A , entonces es claro de las propiedades de la cardinalidad que μ es medida y que $\mu(X) = n$. Sin embargo el ejemplo más importante dentro de la teoría de la medida es el de la medida de Lebesgue cuya construcción puede consultar en [5, cap 2]

Definición 5 Sea (X, Σ) un espacio medible. Una función $S : X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama Σ -simple si S es medible y S sólo toma un número finito de valores.

Es facil observar que si S es Σ -simple y $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ son todos los valores que toma, entonces

$$S = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$$

donde $E_i = s^{-1}(\alpha_i)$, el cual claramente es medible. Aquí χ_{E_i} denota a la función característica, es decir

$$\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E_i \\ 0 & \text{si } x \notin E_i \end{cases}$$

Gracias a este hecho podemos definir la integral para funciones Σ -simples no negativas.

Definición 6 Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función Σ -simple no negativa, entonces

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}.$$

Definimos la integral de f con respecto a μ como

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i).$$

Es interesante notar que si X es finito y $\Sigma = \mathcal{P}(X)$, entonces toda función de X en \mathbb{R} es $\mathcal{P}(X)$ -simple. Por lo que si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y μ es cualquier medida, por la aditividad de la medida se cumple que

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n f(x_i) \mu(\{x_i\}),$$

donde suponemos que $X = \{x_i\}_{i=1}^n$.

Definición 7 Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible no negativa, llamaremos por

$$S(f) := \{s : X \rightarrow \mathbb{R} \mid s \text{ es } \Sigma\text{-simple y } s \leq f\}.$$

Así definimos

$$\int f d\mu := \sup \left\{ \int s d\mu \mid s \in S(f) \right\}.$$

Si f toma valores negativos, definimos las funciones $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ y $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ las cuales son medibles no negativas y cumplen que $f = f^+ - f^-$. Si f es tal que

$$\int f^+ d\mu < \infty \quad \int f^- d\mu < \infty$$

entonces decimos que f es integrable y definimos

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

La integral sobre una medida μ nos permite (entre muchas cosas) definir nuevas medidas a partir de la medida original, las cuales se encuentran definidas sobre la misma σ -álgebra. Para definir una nueva medida, simplemente se toma una función medible no negativa f y define la nueva medida ν como

$$\nu(E) := \int_E f d\mu := \int f \chi_E d\mu.$$

Para el siguiente resultado haremos uso de las funciones convexas y propiedades sobre ellas, los cuales puede consultar en [6, pp. 302-313].

Definición 8 Una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si para cualesquiera $t \in [0, 1]$ $x, y \in (a, b)$, se cumple

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad (1.1)$$

Teorema 1.0.1 Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, si f' es creciente, entonces f es convexa, por lo tanto si f es de clase $\mathcal{C}^2((a, b))$ y $f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$, quiere decir que f es convexa.

Para ilustrar esto estudiaremos a las funciones *tangente* y *cotangente*, las cuales nos serán útiles más adelante. Notamos que tanto *tangente* como *cotangente* son infinitamente diferenciables en sus respectivos dominios. Por lo tanto lo único que tenemos que hacer es fijarnos en sus segundas derivadas

$$\tan'' x = \frac{2\operatorname{sen}x}{\cos^3 x} \quad \cot'' x = \frac{2\operatorname{cos}x}{\operatorname{sen}^3 x},$$

Las cuales son positivas en el intervalo $(0, \pi/2)$. Por lo tanto *tangente* y *cotangente* son convexas en el intervalo $(0, \pi/2)$.

Como parte final de esta sección enunciamos la desigualdad de Jensen cuya prueba se puede consultar en [5, Teo. 3.3].

Teorema 1.0.2 (Desigualdad de Jensen) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$. Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y f es integrable, entonces

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f d\mu.$$

1.0.2. Preliminares geométricos

En la presente tesis se usarán ampliamente las propiedades básicas de las transformaciones de Möbius, así como definiciones y resultados elementales de la geometría hiperbólica, las pruebas a estos hechos se pueden encontrar en [1] y [3].

Denotamos al plano complejo extendido como $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, a éste se le puede identificar con el conjunto $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$. Mediante la proyección estereográfica

$$\psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad \psi(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{si } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) \end{cases} \quad (1.2)$$

cuya inversa es

$$\pi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \pi(z) := \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z| - 1}{|z|^2 + 1} \right), \quad \pi(\infty) = (0, 0, 1). \quad (1.3)$$

Esta biyección permite medir distancias en $\widehat{\mathbb{C}}$ por medio de la métrica cordal, la cual está dada por

$$d_c(z, w) := \begin{cases} \frac{2|z-w|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|w|^2)^{1/2}} & \text{si } z, w \neq \infty \\ \frac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}} & \text{si } w = \infty \end{cases}. \quad (1.4)$$

Definición 9 Una transformación de Möbius en $\widehat{\mathbb{C}}$ es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1$$

donde se define

$$T(\infty) := \frac{a}{c}, \quad T\left(\frac{-d}{c}\right) := \infty, \quad \text{si } c \neq 0$$

y

$$T(\infty) := \infty \quad \text{si } c = 0.$$

Adoptaremos la convención de decir que algo es un “círculo” si es una recta o un círculo. Es fácil demostrar que las transformaciones de Möbius son continuas con la métrica cordal y mandan “círculos” en “círculos”. Para trabajar resultará muy conveniente representar a las transformaciones de Möbius por medio de matrices invertibles mediante la siguiente asignación

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

con la cual nos podemos dar cuenta que el grupo de transformaciones de Möbius es isomorfo al grupo $PSL(2, \mathbb{C}) := SL(2, \mathbb{C})/\{\pm Id_2\}$, simplemente utilizando el primer teorema de isomorfismo (cf. [4]).

Otra observación que podemos hacer acerca de las transformaciones de Möbius es que se pueden clasificar por sus puntos fijos, de los cuales existen por lo menos uno y a lo más dos. Esto se debe a que si

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d} = z, \quad \Rightarrow \quad cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (1.5)$$

Por lo tanto el teorema fundamental del álgebra (cf.[2]) implica lo afirmado. Esto implica que si una transformación tiene más de dos puntos fijos, es trivial.

Ahora si $\{\alpha, \beta\}$ son los puntos fijos distintos de una transformación T , entonces consideramos la transformación

$$\varphi(z) := \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad \text{o} \quad \varphi(z) := z - \alpha, \quad \text{si } \beta = \infty.$$

Así, si conjugamos T con φ , obtenemos que $\varphi T \varphi^{-1}(z) = \lambda z$, con esto clasificamos a las transformaciones de Möbius de la siguiente manera

Definición 10 Sea T una transformación de Möbius no trivial, entonces siguiendo la discusión anterior, decimos que

- i) Si T tiene sólo un punto fijo decimos que T es parabólica
- ii) T es elíptica si es conjugada a $S(z) := \lambda z$ con $|\lambda| = 1$
- iii) T es hiperbólica si es conjugada a $S(z) := \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
- iv) Si T no es ninguna de las anteriores, decimos que es loxodrómica.

Definición 11 Sea T una transformación de Möbius, es decir $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ tal que $ad - bc \neq 0$, entonces definimos la traza de T como

$$\text{tr}(T) := \frac{a + d}{\sqrt{ad - bc}}$$

Es sencillo demostrar que se pueden clasificar a las transformaciones de Möbius por su traza, la prueba a este hecho se puede encontrar en [3, p. 40].

Teorema 1.0.3 Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, $T \neq Id_2$, entonces se tiene la siguiente clasificación

- i) T es parabólica si y sólo si $\text{tr}(T) = \pm 2$
- ii) T es elíptica si y sólo si $\text{tr}(T) \in (-2, 2)$
- iii) T es hiperbólica si y sólo si $\text{tr}(T) \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
- iv) T es loxodrómica si y sólo si $\text{tr}(T) \notin \mathbb{R}$.

Definición 12 Dada una transformación de Möbius $f \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que $f(\infty) \neq \infty$, se define el círculo isométrico de f como

$$I_f := \{z \in \mathbb{C} \mid |f'(z)| = 1\}.$$

Claramente I_f es un círculo, ya que

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad \Rightarrow \quad I_f = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \left(-\frac{d}{c} \right) \right| = \frac{1}{|c|} \right\}.$$

Es fácil probar que si $z, w \in I_f$, entonces $|f(z) - f(w)| = |z - w|$. Otras propiedades de éstos círculos son las siguientes

- i) $f(I_f) = I_{f^{-1}}$,
- ii) $f(Int(I_f)) = Ext(I_{f^{-1}})$,

$$\text{iii) } f(\text{Ext}(I_f)) = \text{Int}(I_{f^{-1}}),$$

donde $\text{Int}(I_f)$ representa el disco delimitado por el círculo I_f y $\text{Ext}(I_f)$ representa el exterior (complemento) del disco (cf. [3]).

Ahora, un concepto de importancia fundamental para la geometría en general y en particular la geometría hiperbólica es el de métrica o distancia. Nuestra aproximación al tema de la métrica hiperbólica será un poco distinto al tratamiento usual, el cual utiliza el concepto de métricas riemannianas, en lugar de esto, definiremos el concepto de densidad

Definición 13 Una densidad es una función $\lambda : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua, donde Ω es una región.

Definición 14 Sea Ω una región y λ una densidad en dicha región, consideremos $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva \mathcal{C}^1 por tramos. Se define la λ -longitud de γ como

$$\ell_\lambda(\gamma) := \int_0^1 \lambda(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Con esto en mente podemos construir una métrica (distinta a la métrica usual) en Ω , simplemente dados dos puntos $x, y \in \Omega$ definimos el conjunto

$$\mathcal{T}_x^y := \{\gamma \in \mathcal{C}_t^1([0, 1], \Omega) \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\},$$

donde $\mathcal{C}_t^1([0, 1], \Omega)$ representa al conjunto de trayectorias \mathcal{C}^1 por tramos. Así definimos la métrica en Ω asociada a la densidad λ como sigue

$$\rho_\lambda(x, y) := \min\{\ell_\lambda(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{T}_x^y\}.$$

A nosotros nos interesará el conjunto $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$, al cual dotaremos de la métrica dada por la densidad $\lambda(z) := \text{Im}(z)^{-1}$, a dicha métrica la llamaremos la métrica hiperbólica y al conjunto \mathbb{H}^2 lo llamaremos el modelo hiperbólico dado por el semiplano superior. Dada la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^2 , se puede demostrar que su conjunto de isometrías que preservan orientación está dado por

$$PSL(2, \mathbb{R}) := \{T \in PSL(2, \mathbb{C}) \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}, ab - cd = 1\}.$$

Otro modelo que nos interesará para la geometría hiperbólica (o plano hiperbólico), es el modelo del disco de Poincaré, el cual consiste del conjunto $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y la métrica inducida por la densidad

$$\lambda(z) := \frac{2}{1 - |z|^2}.$$

Las isometrías que preservan orientación en este espacio son el grupo

$$M(\Delta) := \{T \in PSL(2, \mathbb{C}) \mid T(z) = \frac{az + c}{\bar{c}z + \bar{a}}, |a|^2 - |c|^2 = 1\}.$$

Dada la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^2 o en Δ , uno puede demostrar que dados dos puntos cualesquiera z, w , existe una única curva que une a dichos dos puntos

cuya longitud es la distancia entre z y w , a ésta única curva la denotamos por el segmento $[z, w]$, también se puede demostrar que cualquier segmento se puede prolongar en segmentos minimizantes con longitudes arbitrarias. Lo anterior nos indica que la geometría hiperbólica cumple con los primeros dos axiomas de Euclides.

A dichas curvas minimizantes de longitud, las conocemos por geodésicas, y se puede demostrar que éstas corresponden a circunferencias ortogonales al eje real o al círculo unitario (dependiendo de en qué modelo se encuentre uno). También se puede demostrar que dada la métrica hiperbólica, ésta induce la misma topología que la inducida por la métrica usual, esto se deduce del hecho de que los círculos hiperbólicos son también círculos euclidianos.

Otro hecho de la geometría hiperbólica es que dados dos puntos z, w existe una única geodésica perpendicular al segmento $[z, w]$, que pasa por el punto medio de dicho segmento (los ángulos entre curvas se miden de la forma usual en \mathbb{R}^n). A esta única geodésica perpendicular se le llama el bisector perpendicular de z y w . Una prueba a todas las afirmaciones anteriores se encuentran en [3, cap 2].

Definición 15 *Definimos el área hiperbólica (o h-Área para resumir) como la medida $\mathcal{A}_h : \mathbb{B}_{\mathbb{H}^2} \rightarrow \mathbb{R}^+$ o $\mathcal{A}_h : \mathbb{B}_{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por*

$$\mathcal{A}_h(E) := \int_E \frac{d\mu}{(\operatorname{Im}(z))^2}, \quad \mathcal{A}_h(E) := \int_E \frac{4d\mu}{(1 - |z|^2)^2},$$

respectivamente, donde μ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 .

Una forma en la que podemos cambiar de modelos de la geometría hiperbólica es por medio de la transformación de Cayley, la cual está dada por $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$,

$$\varphi(z) := \frac{z - i}{z + i}.$$

La transformación de Cayley nos es bastante útil ya que es una isometría entre los modelos, lo cual significa que transforma de forma adecuada todo lo anteriormente mencionado.

Si denotamos por ρ a la métrica hiperbólica (sin importar en qué modelo), podemos derivar una ecuación para calcular dicha métrica, la cual es de fundamental importancia para la geometría hiperbólica en general y en particular particular para esta tesis. Es posible ver que dados dos puntos z, w en el plano hiperbólico, se tiene que

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}}. \quad (1.6)$$

Recordamos que $SL(2, \mathbb{C})$ es un subconjunto de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, el cual se puede identificar de forma canónica con \mathbb{R}^8 , por lo tanto podemos otorgarle a $SL(2, \mathbb{C})$ la topología relativa de subconjunto de \mathbb{R}^8 . Por lo que decimos que un subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$ es discreto si es un espacio topológico discreto con su topología relativa. Decimos que un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ es discreto si su grupo correspondiente en $SL(2, \mathbb{C})$ lo es.

Definición 16 Decimos que un subgrupo $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$ es fuchsiano si es conjugado a un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Uno de los ejemplos primordiales de grupos fuchsianos es el de el grupo modular, el cual se define como

$$PSL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ T \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid T(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Definición 17 Dado un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$, decimos que un punto $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un punto límite de Γ si existe $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y una sucesión infinita $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$f_n(z) \rightarrow \alpha, \quad n \rightarrow \infty,$$

definimos el conjunto límite de Γ el cual denotamos por $\mathbb{L}(\Gamma)$, como el conjunto de puntos límite de Γ .

Decimos que Γ es elemental si $|\mathbb{L}(\Gamma)| \leq 2$, diremos que Γ es no elemental en cualquier otro caso.

Definición 18 Decimos que un conjunto \mathcal{H} es h -convexo si para cualesquiera $\{z, w\} \subset \mathcal{H}$ el segmento de geodésica $[z, w]$, cumple que $[z, w] \subset \mathcal{H}$.

En esta tesis diferenciamos entre la cerradura en $\widehat{\mathbb{C}}$ y la cerradura en el plano hiperbólico por medio de la siguiente notación: \overline{A} denota la cerradura usual de A y \tilde{A} denota a la cerradura hiperbólica. Nótese que si \mathcal{H} es h -convexo, entonces \overline{A} también lo es.

Definición 19 Sea Γ subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$. Decimos que un conjunto $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es una región fundamental de Γ si se cumplen las siguientes propiedades

- a) D es región
- b) Cualquiera dos puntos en D no están Γ -relacionados
- c) $\widehat{\mathbb{C}} = \bigcup_{g \in \Gamma} g(\overline{D})$
- d) $\mu(\partial D) = 0$, donde μ es la medida de Lebesgue y ∂ denota la frontera en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Este concepto se extiende de manera natural a acciones en \mathbb{H}^2 o Δ

Los ejemplos más notorios de regiones fundamentales son los polígonos de Ford y de Dirichlet, los cuales se usarán en la mayor parte de los resultados de esta tesis. La construcción de éstos polígonos se puede encontrar en [1].

Definición 20 Sean S_1 y S_2 dos “círculos”, entonces definimos el producto inversivo entre S_1 y S_2 como

$$(S_1, S_2) = \frac{|r^2 + s^2 - |a - b|^2|}{2rs},$$

donde $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |a - z| = r\}$ y $S_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |a - z| = s\}$. Si en vez de dos círculos tenemos una recta, digamos $S_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid b \cdot z = t\}$, entonces el producto inversivo se define como

$$(S_1, S_2) = \frac{|a \cdot b - t|}{2r|b|}.$$

Existe una definición más general del producto inversivo, la cual puede consultar en [1, cap 3]. El producto inversivo nos permite encontrar ángulos entre “círculos” ya que si θ es el ángulo entre S_1 y S_2 , entonces $(S_1, S_2) = |\cos\theta|$.

Para finalizar con los preliminares, discutimos uno de los teoremas más importantes para esta tesis y para la geometría hiperbólica en general, el teorema de Poincaré, cuya prueba se encuentra en [1, cap 9]. Éste teorema nos otorga condiciones necesarias para saber si un polígono hiperbólico convexo con un número finito de lados y apareamientos de dichos lados (dados por transformaciones de Möbius) es una región fundamental del grupo generado por dichos apareamientos. Las condiciones se reducen a fijarse en la suma angular de ciclos de vértices en la frontera del polígono. Esta suma tiene que ser $2\pi/q$ $q \in \mathbb{N}$, de donde se distinguen los casos $q = 1$ y $q > 1$. Si $q > 1$, entonces el ciclo tiene que ser elíptico, es decir éste se encuentra compuesto de puntos fijos de transformaciones elípticas. En dado caso se tiene que cumplir que q es el orden del estabilizador de un punto del ciclo (esto no es ambiguo ya que los estabilizadores de un ciclo son conjugados). Si $q = 1$, entonces los vértices no son puntos fijos y les llamamos un ciclo accidental. Además si el polígono tiene vértices en la recta al infinito, entonces se tiene que cumplir que éstos son ciclos finitos de puntos fijos de transformaciones parabólicas. Bajo estas hipótesis se deduce que el grupo generado por los apareamientos previamente mencionados, es fuchsiano y el polígono P es una región fundamental de dicho grupo.

CAPÍTULO 2

Restricciones universales para ciclos de vértices

Sea G un grupo fuchsiano actuando en \mathbb{H}^2 de tal forma que su estabilizador en el ∞ esté generado por la transformación $g(z) = z + 1$, entonces podemos construir una región fundamental (de Ford) R , la cual consiste en la intersección de una banda horizontal de longitud uno, digamos $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid x_0 < \operatorname{Re}(z) < x_0 + 1\}$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ y el exterior de todos los círculos isométricos.

Sea $f \in PSL(2, \mathbb{R})$, es decir

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $ad - bc = 1$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, al derivar obtenemos

$$f'(z) := \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

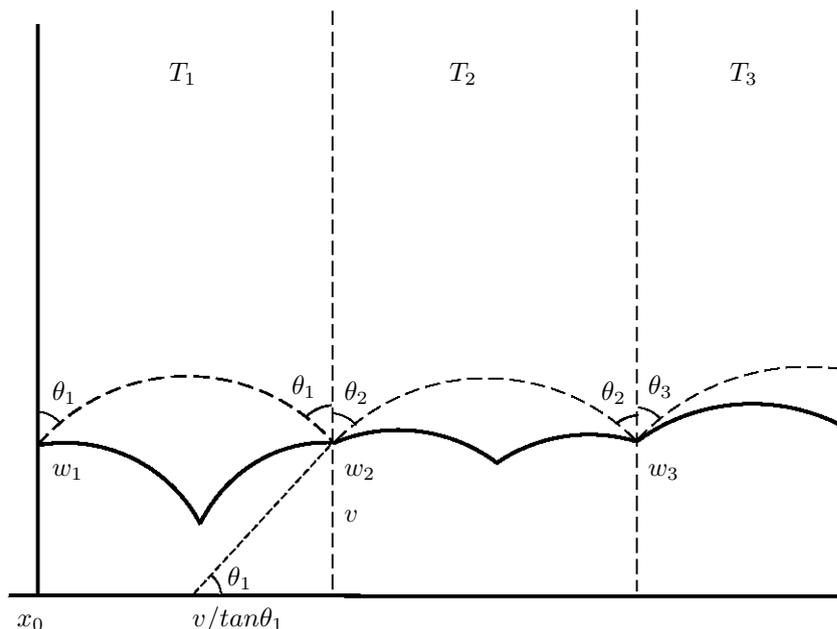
Por lo tanto si $z \in I(f)$, entonces $f'(z) = 1$, lo cual implica que $cz + d = 1$ y como $f \in PSL(2, \mathbb{R})$, entonces

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{cz + d} = \operatorname{Im}(z),$$

(cf. [3]). Por consiguiente, si tomamos un ciclo de vértices en la región, digamos $\{w_j\}_{j=1}^{n+1}$, como los vertices se encuentran en los círculos isométricos y los lados del polígono de Ford se aparean, se sigue de la discusión anterior que $\operatorname{Im}(w_j) = \operatorname{Im}(w_i) \forall i, j \in \{1, \dots, n+1\}$. En consecuencia tomamos $w_j = u_j + iv$ los cuales ordenamos tal que $x_0 = u_1 < \dots < u_{n+1} = x_0 + 1$.

Ahora construimos una familia de triángulos $\{T_j\}_{j=1}^{n+1}$ cuyos vértices sean $\{\infty, w_j, w_{j+1}\}$ para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Como la altura de los vértices w_j es invariante, se sigue que en los triángulos T_j los ángulos que no son cero son iguales y, a este valor común lo denotamos por θ_j . Lo anterior nos muestra una situación similar a la figura 2.1.

Cada T_j se encuentra incluido en la región R pues las regiones de Ford son h -convexas y los vértices de los triángulos claramente se encuentran en la región, además cada ángulo θ_j es menor o igual al ángulo que hacen los círculos isométricos en el vértice $w_j \forall j \in \{1, \dots, n+1\}$. Por lo cual si suponemos también que dicho ciclo de vértices es de orden q tenemos la siguiente desigualdad

Figura 2.1: Polígono de Dirichlet de G

$$\sum_{j=1}^{n+1} 2\theta_j \leq \frac{2\pi}{q} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} \theta_j \leq \frac{\pi}{q}. \quad (2.1)$$

Esto se sigue ya que al repetirse el ángulo θ_j dos veces en cada T_j obtenemos que la suma de los ángulos de los triángulos T_j es dos veces la suma de los ángulos θ_j , es un hecho que la suma de los ángulos de un ciclo de orden q es $2\pi/q$ [1, p. 221].

Si proyectamos cada w_j al eje real, obtenemos $Re(w_j) = u_j$ con lo cual observamos que

$$vcot\theta_j = \frac{(u_{j+1} - u_j)}{2},$$

ya que si nos fijamos en el triángulo euclideo cuyos vértices sean el conjunto $\{w_{j+1}, u_{j+1}, u_j + (u_{j+1} - u_j)/2\}$, al ser $u_j + (u_{j+1} - u_j)/2$ el punto medio entre u_j y u_{j+1} , tenemos que $u_j + (u_{j+1} - u_j)/2$ es el centro de la geodésica que une a w_j con w_{j+1} (vista como arco de circunferencia), lo cual nos indica que el ángulo de dicho triángulo euclideo en el vértice $u_j + (u_{j+1} - u_j)/2$ es θ_j , lo que implica que

$$\tan\theta_j = \frac{2v}{(u_{j+1} - u_j)} \Rightarrow vcot\theta_j = \frac{1}{2}(u_{j+1} - u_j).$$

Esto se sigue ya que la altura de el triángulo euclideo es la misma que la altura de los vértices w_j . Notamos que esta última igualdad implica que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} v \cot \theta_j &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2} (u_{j+1} - u_j) \\
&= \frac{1}{2} (u_{n+1} - u_1) \\
&= \frac{1}{2} (x_0 + 1 - x_0) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por último si consideramos el conjunto $\Omega = \{1, \dots, n+1\}$ y tomamos el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$, donde $\mu(A) = |A|/n$, es claro que $\mu(\Omega) = 1$. Por lo tanto si definimos la siguiente función $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta(j) = \theta_j$, claramente esta función tiene integral finita. Ahora como $\cot : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, por la desigualdad de Jensen 1.0.2 tenemos

$$\cot\left(\int_{\Omega} \theta d\mu\right) \leq \int_{\Omega} \cot \theta d\mu.$$

Lo cual al calcular las integrales implica que

$$\cot\left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\theta_j}{n}\right) \leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n} \cot \theta_j = \frac{1}{2nv}$$

También usando (2.1) y el hecho de que cotangente es decreciente en $(0, \pi)$, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\cot\left(\frac{\pi}{qn}\right) \leq \cot\left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\theta_j}{n}\right) \leq \frac{1}{2nv}$$

En consecuencia obtenemos una cota para la altura de los vértices

$$\operatorname{Im}(w_j) = v \leq \frac{\tan\left(\frac{\pi}{qn}\right)}{2n}.$$

Con lo cual hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 2.0.4 *Sea G un grupo fuchsiano actuando en \mathbb{H}^2 de tal modo que $G_{\infty} = \langle T(z) := z + 1 \rangle$. Consideremos R el polígono de Ford de G y $\{w_j\}_{j=1}^{n+1}$ un ciclo de vértices de orden q en R , entonces*

$$\operatorname{Im}(w_j) \leq \frac{\tan\left(\frac{\pi}{qn}\right)}{2n}. \quad (2.2)$$

Gracias a que tangente es creciente podemos obtener cotas universales (constantes) para ciclos de vértices accidentales

Corolario 2.0.5 *Siguiendo las hipótesis del teorema anterior, si el ciclo es accidental tenemos que $q = 1$ y $n \geq 3$*

$$\operatorname{Im}(w_j) \leq \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (2.3)$$

o también

$$\operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}\rho(w_j, Tw_j)\right) \geq \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3} \quad (2.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Como la primera desigualdad sale directa del teorema anterior, sólo hay que probar que ésta implica la segunda desigualdad

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}\rho(w_j, Tw_j)\right) &= \frac{|w_j - Tw_j|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(w_j)\operatorname{Im}(Tw_j)}} \\ &= \frac{|w_j - w_j + 1|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(w_j)\operatorname{Im}(w_j + 1)}} \\ &= \frac{1}{2\operatorname{Im}(w_j)} \geq \frac{\tan(\frac{\pi}{3})}{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

■

La primera igualdad que se usó en la prueba del corolario anterior se puede consultar en [1, p. 130].

Resulta que la cota dada en el corolario 2.0.6 es la mejor posible, esto es pues si consideramos el polígono D formado por la intersección entre la región delimitada por $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ y los exteriores de los círculos $S_1 = S(1/6, 1/3)$, $S_2 = S(3/6, 1/3)$ y $S_3 = S(5/6, 1/3)$, y tomamos las transformaciones f_1 , f_2 y f_3 , las cuales son rotaciones por π con centros en $1/6 + i/3$, $3/6 + i/3$ y $5/6 + i/3$, respectivamente. Notemos que las intersecciones de dichos círculos tienen parte imaginaria $1/2\sqrt{3}$. Ahora tomando el producto inversivo entre $\{\operatorname{Re}(z) = 0\}$ y S_1 , obtenemos

$$\frac{|a \cdot b - t|}{r} = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

donde $r = 1/3$, $t = 0$, $a = (1/6, 0)$ y $b = (1, 0)$. Asimismo el producto inversivo de S_1 con $\{\operatorname{Re}(z) = 1/3\}$, S_2 con $\{\operatorname{Re}(z) = 1/3\}$, S_2 con $\{\operatorname{Re}(z) = 2/3\}$, S_3 con $\{\operatorname{Re}(z) = 2/3\}$ y S_3 con $\{\operatorname{Re}(z) = 1\}$ nos otorga el mismo resultado (véase la Figura 2.2). Por lo tanto la suma angular de los vértices en las intersecciones anteriores es igual a 2π . Observamos que estos vértices forman un ciclo accidental apareado por las f_i , además los punto fijos elípticos tienen orden 2 y ángulos π . Por lo tanto por el Teorema de Poincaré D (c.f [1, cap 9]) es una región fundamental de $G = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$.

Por último, notamos $f_1 \circ f_2 \circ f_3 = T$, donde $T(z) := z + 1$, esto es ya que claramente $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ manda $i/2\sqrt{3}$ a $i/2\sqrt{3} + 1$. Además $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ es parabólica que fija a ∞ , pues $f_k = \sigma_k \tau_k$, donde σ_k es la reflexión en S_k y τ_k es la reflexión en $\{\operatorname{Re}(z) = (2k-1)/6\}$, $k \in \{1, 2, 3\}$, de esto último es fácil ver que $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ fija ∞ . Esto quiere decir que $f_1 \circ f_2 \circ f_3(z) = \alpha z + \beta$ y del hecho de que $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ manda $i/2\sqrt{3}$ a $i/2\sqrt{3} + 1$ se deduce fácilmente que $\alpha = \beta = 1$. Por lo tanto la cota dada por el corolario anterior es la mejor posible ya que

$$\operatorname{Im}(w_j) = \frac{\tan(\frac{\pi}{3})}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Corolario 2.0.6 *De igual forma siguiendo las hipótesis del teorema anterior, si el ciclo es elíptico, entonces*

$$\operatorname{Im}(w_j) \leq \frac{\tan(\frac{\pi}{q})}{2} \quad (2.5)$$

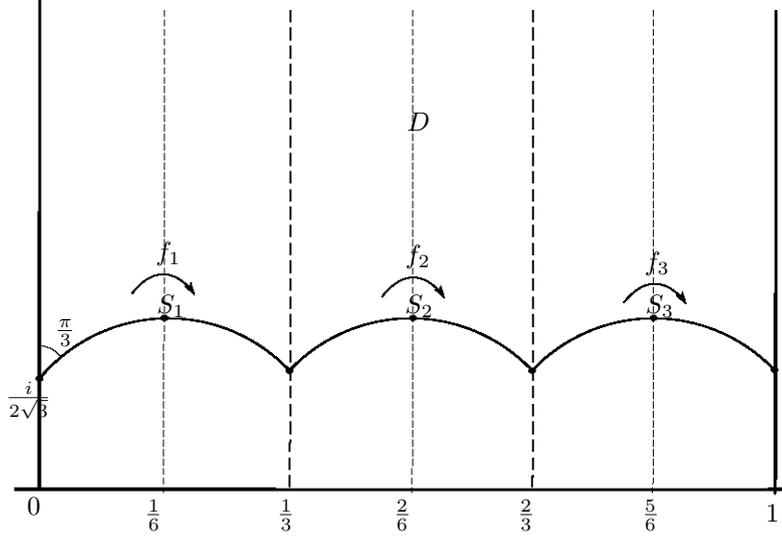


Figura 2.2: Ejemplo de que la cota dada en 2.3 es la mejor posible.

o de forma equivalente

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(w_j, Tw_j)\right) \geq \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{q})}. \quad (2.6)$$

La prueba de la segunda desigualdad es idéntica a la del corolario anterior.

Usaremos el siguiente resultado, cuya prueba puede consultar en [1, pp. 198,199].

Teorema 2.0.7 *Sea G un grupo de isometrías del plano hiperbólico sin elementos elípticos, entonces G es discreto o elemental. Más aun si $\{f, g\} \subset G$ y $\langle f, g \rangle$ es no elemental, entonces $\forall z \in \Delta$*

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, fz)\right)\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, gz)\right) \geq 1. \quad (2.7)$$

Usaremos este teorema para establecer cotas inferiores de ciclos accidentales sobre polígonos de Dirichlet. Comenzaremos con el caso cuando nuestro grupo no tiene elementos elípticos, el cual es el más fácil.

Teorema 2.0.8 *Sea G un grupo fuchsiano no elemental sin elementos elípticos, si $\{v_j\}_{j=1}^n$ es un ciclo de vértices accidentales en la frontera del polígono de Dirichlet con centro en w , entonces*

$$\cosh\rho(w, v_j) \geq \sqrt{2} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que el ciclo $\{v_j\}_{j=1}^n$ se encuentra contenido en una circunferencia hiperbólica con centro en w (cf. [1, p. 229]), digamos

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, w) = r\}.$$

Además, el ciclo debe tener por lo menos tres vértices (véase [1, p. 222]). Por lo cual podemos tomar tres vértices del ciclo, digamos $\{v_1, v_2, v_3\}$ donde

$$v_2 = T(v_1) \quad y \quad v_3 = S(v_1)$$

Ahora, sea $G_0 = \langle T, S \rangle$. Si G_0 es elemental, entonces G_0 tiene que ser cíclico hiperbólico o cíclico parabólico. En cualquier caso por la dinámica de los grupos cíclicos parabólicos o hiperbólicos (i.e transformaciones hiperbólicas y parabólicas no preservan círculos) no podría ocurrir que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathcal{C}$. Por lo tanto G_0 no puede ser elemental, en consecuencia usando el teorema 2.0.7 se sigue que

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(v_1, Tv_1)\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(v_1, Sv_1)\right) \geq 1. \quad (2.9)$$

Asimismo por la desigualdad del triángulo sabemos que

$$\rho(v_1, Tv_1) = \rho(v_1, v_2) \leq \rho(v_1, w) + \rho(w, v_2) = 2r,$$

$$\rho(v_1, Sv_1) = \rho(v_1, v_3) \leq \rho(v_1, w) + \rho(w, v_3) = 2r,$$

Sustituyendo esto en (2.9), como el seno hiperbólico es creciente obtenemos

$$\sinh^2(r) \geq \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(v_1, Tv_1)\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(v_1, Sv_1)\right) \geq 1.$$

Por lo tanto $\sinh^2(r) \geq 1$. Utilizando que $\cosh^2(r) - \sinh^2(r) = 1$ se tiene

$$\cosh^2(r) - 1 \geq 1 \Rightarrow \cosh^2(r) \geq 2,$$

Por último si recordamos que $\rho(w, v_j) = r$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ y sustituimos en la desigualdad anterior obtenemos que

$$\cosh\rho(w, v_j) \geq \sqrt{2} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

■

Encontrar cotas universales de este estilo para grupos fuchsianos con elementos elípticos resulta ser una tarea mucho más complicada, la cual requiere de más restricciones, como nos muestra el siguiente ejemplo. Este ejemplo surge al considerar cotas universales para un grupo fuchsiano G y $\{v_i\}_{i=1}^n$ un ciclo accidental en la frontera del polígono de Dirichlet con centro en w . El ejemplo nos dice que si $n = 3$, entonces los vértices se encuentran tan cerca como queramos del centro w .

Construimos un polígono P con cuatro pares de lados, los cuales se aparean a través de las transformaciones f, g, h y hg , donde g y h son elípticas de orden dos, f es parabólica y hg es hiperbólica (véase la Figura 2.3).

Dicho polígono lo podemos construir de la siguiente forma: usando el modelo del disco construimos un triángulo hiperbólico de tal forma que dos de sus vértices se encuentren en el eje imaginario y el ángulo en uno de dichos vértices sea $\pi/3$, el vértice que cumple esto le llamamos v_1 . Al vértice que no se encuentre en el eje imaginario le llamamos p_1 y el triángulo lo construimos de tal forma que el ángulo en dicho vértice sea $\pi/2$. Esto significa que el ángulo restante, el cual llamaremos θ , tiene que ser menor a $\pi/6$. Este triángulo claramente es construible (cf. [1, p. 155]) y además por medio de traslaciones hiperbólicas podemos suponer que p_1 se encuentra en el eje real (véase la Figura 2.4).

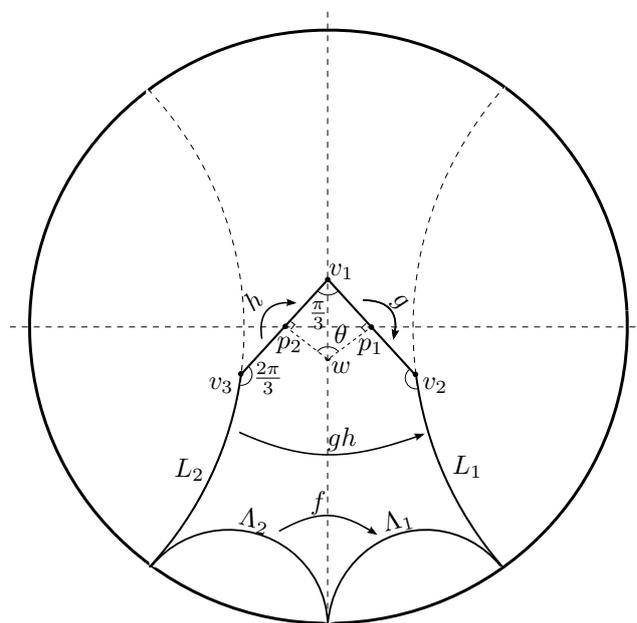


Figura 2.3: Un ciclo accidental de orden 3 se acerca tanto como se quiera al centro del polígono de Dirichlet

Ahora podemos continuar el segmento de geodésica que une v_1 con p_1 de tal forma que p_1 sea el punto medio del segmento y denotaremos por v_2 al punto final de dicho segmento (véase la Figura 2.5). Lo que prosigue es tomar la geodésica que hace un ángulo de $2\pi/3$ con el segmento de geodésica $[v_1, v_2]$ y que cruce por v_2 . A esta geodésica le llamamos L_1 , es claro que L_1 no corta al eje imaginario, ya que de lo contrario obtendríamos un triángulo hiperbólico cuya suma angular sería mayor a π . Luego nos fijamos en el punto al infinito de L_1 (del lado donde se hace el ángulo de $2\pi/3$) y tomamos la geodésica que pasa por dicho punto al infinito y el punto al infinito del eje imaginario (del mismo lado con respecto al eje real), a esta geodésica la llamaremos Λ_1 . El siguiente paso es reflejar esta figura sobre el eje imaginario con lo que obtenemos el polígono deseado, el cual lo denotaremos por P . Nótese que esta construcción es posible si y sólo si el ángulo θ es menor a $\pi/6$. Por último llamamos v_3, p_2, L_2 y Λ_2 a las reflexiones de v_2, p_1, L_1 y Λ_1 respectivamente (véase figura 2.5).

Apareamos los lados de nuestro polígono por medio de las transformaciones $\{f, g, h, hg\}$, las cuales actúan de la siguiente forma: g y h son las rotaciones por π con centro en p_1 y p_2 respectivamente y f es la composición de la reflexión sobre Λ_2 con la reflexión sobre el eje imaginario. De la descripción anterior es claro que f aparea Λ_2 con Λ_1 , h y g aparean $[v_3, p_2]$ con $[p_2, v_1]$ y $[v_1, p_1]$ con $[p_1, v_2]$, respectivamente. Más aún gh aparea L_2 con L_1 pues h manda L_2 al eje imaginario, ya que tanto el eje imaginario como L_1 hacen un ángulo de $2\pi/3$ con $[v_1, v_3]$, y g manda al eje imaginario en L_1 por una razón similar a la anterior. También es claro que h y g son elípticas de orden 2 con puntos fijos p_2 y p_1 , respectivamente y que f es parabólica donde su punto fijo es la intersección de

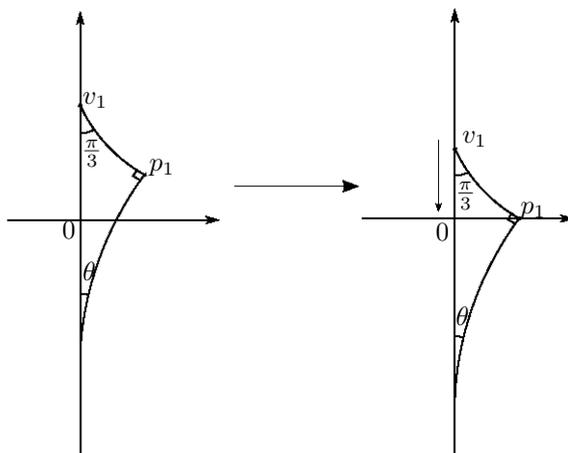


Figura 2.4: Traslación de un triángulo

Λ_1 y el eje imaginario, además gh es hiperbólica ya que es composición de dos elípticas de orden dos cuyos puntos fijos se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$.

La descripción anterior cumple las hipótesis del teorema de Poincaré pues la suma angular del ciclo accidental $\{v_1, v_2, v_3\}$ es 2π , además la suma angular en los ciclos elípticos es la adecuada ya que el orden de dichos ciclos es 2 y los ángulos en dichos ciclos suman π , también los puntos al infinito del polígono son puntos fijos parabólicos lo cual es fácil de ver. Esto último nos dice que P es un dominio fundamental de un grupo fuchsiano no elemental el cual cumple que $G = \langle f, g, h \rangle$, notamos que si llamamos $2t = \rho(v_1, v_2)$ y nos fijamos en nuestro triángulo original se cumple que

$$\operatorname{cosh} t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cos} \theta. \quad (2.10)$$

(cf. [1, p. 229]) Como nuestra construcción del polígono siempre es posible mientras $\theta < \pi/6$, podemos preguntarnos qué sucede si $\theta \rightarrow \pi/6$. Como $\operatorname{sen}(\pi/3) = \operatorname{cos}(\pi/6)$, entonces al hacer θ tender a $\pi/6$, notamos que $\operatorname{cosh} t$ tiende a 1 por la igualdad (2.10). Por lo cual necesariamente sucede que $t \rightarrow 0$. Lo cual significa que $\rho(v_1, v_2)$ la podemos hacer tan pequeña como queramos, y claramente por simetría lo mismo aplica a $\rho(v_1, v_3)$.

Ahora si nombramos por w al vértice restante de nuestro triángulo original, entonces observamos que cada v_i está a la misma distancia de w , ya que w está en el eje imaginario y también v_2 y v_3 son reflejados, la otra igualdad se obtiene utilizando pitágoras hiperbólico (cf. [1, Teo. 7.11.1]). Por lo tanto si probamos que $\rho(w, v_1)$ la podemos hacer tan pequeña como queramos, entonces eso es cierto con v_2 y v_3 .

Si nos fijamos en nuestro triángulo original, por trigonometría hiperbólica tenemos que

$$\operatorname{cosh}(\rho(w, v_1)) \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \tan \theta = 1.$$

(cf. [1, Teo. 7.11.3]) Por lo cual si acercamos θ a $\pi/6$, entonces $\operatorname{cosh}(\rho(w, v_1))$

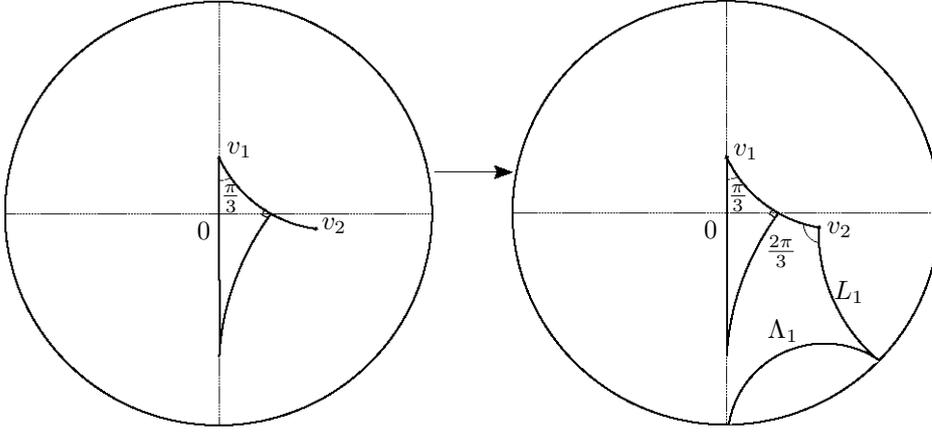


Figura 2.5: Continuación de la construcción del ejemplo en la figura 2.3

tiende a 1 pues $\tan(\pi/6) = \tan(\pi/3)^{-1}$, lo que quiere decir que $\rho(w, v_1) \rightarrow 0$, por lo que las distancias de los vértices a w se hacen tan pequeñas como queramos. Sólo falta probar que P es el polígono de Dirichlet de G con centro en w . Para probar esto notamos que los lados apareados por f son los bisectores ortogonales de los segmentos $[w, f(w)]$ y $[w, f^{-1}(w)]$. Esto se sigue ya que f es la composición de las reflexiones en Λ_2 seguida la reflexión en el eje imaginario, entonces de esto se sigue que $f(w)$ coincide con la reflexión en Λ_1 . Esta última afirmación se debe a que si llamamos σ_2 , σ_1 y σ_0 a las reflexiones en Λ_2 , Λ_1 y el eje imaginario respectivamente, sabemos que $f = \sigma_0\sigma_2$, pero también se cumple que $\sigma_2 = \sigma_0\sigma_1\sigma_0$. Esto último es ya que $\sigma_0\sigma_1\sigma_0$ es una reflexión (al ser una composición impar de reflexiones) que fija a Λ_2 . Por lo tanto

$$f = \sigma_0\sigma_2 = \sigma_0\sigma_0\sigma_1\sigma_0 = \sigma_1\sigma_0.$$

Esto implica que $f(w) = \sigma_1\sigma_0(w) = \sigma_1(w)$, lo cual implica que Λ_1 es ortogonal a $[w, f(w)]$. De forma totalmente análoga se prueba que Λ_2 es ortogonal a $[w, f^{-1}(w)]$.

De manera similar los pares L_1 y L_2 son los bisectores de $[w, gh(w)]$ y $[w, h^{-1}g^{-1}(w)]$ respectivamente ya que gh es la composición de la reflexión sobre L_2 con la reflexión sobre el eje imaginario. Por lo que si llamamos τ_2 , τ_1 y τ_0 a las reflexiones en L_2 , L_1 y el eje imaginario respectivamente, entonces siguiendo un argumento similar al anterior tenemos que $\tau_2 = \tau_0\tau_1\tau_0$. Por lo tanto

$$gh = \tau_0\tau_2 = \tau_1\tau_0$$

y por lo mismo que en la prueba anterior, esto implica que $gh(w) = \tau_1(w)$. De forma totalmente análoga se prueba que L_2 es bisector perpendicular de $[w, h^{-1}g^{-1}(w)]$.

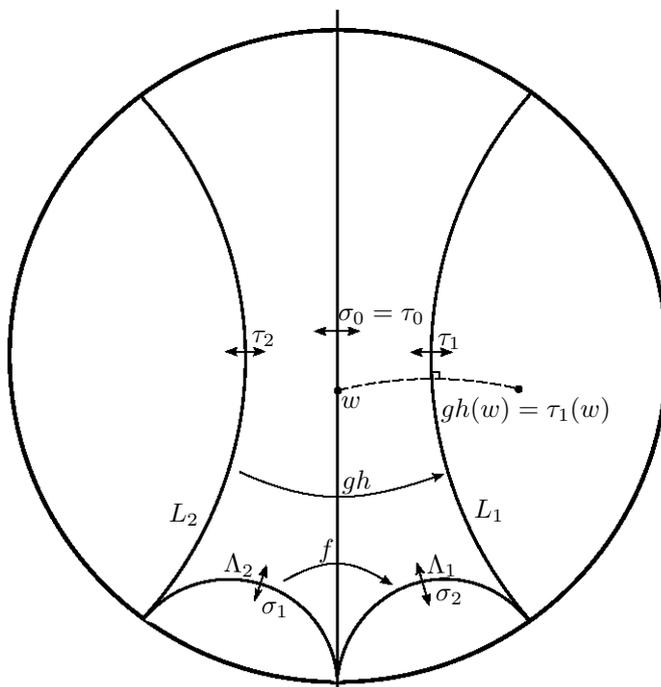


Figura 2.6: Composición de reflexiones

Por último notamos que el lado $[v_1, v_2]$ se encuentra contenido en el bisector de $[w, g(w)]$, esto es pues g es la rotación por π en el punto medio de $[v_1, v_2]$ y como el segmento que une a dicho punto medio con w es ortogonal a $[v_1, v_2]$ por construcción, entonces se sigue lo anteriormente dicho. Análogamente el lado $[v_1, v_3]$ cae en el bisector de $[w, h(w)]$. Por lo tanto al ser $G = \langle f, g, h \rangle$, tenemos que P es el polígono de Dirichlet $D(w)$ de G .

Afortunadamente para los casos donde $n > 3$, sí existen cotas inferiores para las distancias del centro de un polígono de Dirichlet a ciclos de vértices accidentales que se encuentran en la frontera de dicho polígono.

Teorema 2.0.9 *Sea G un grupo fuchsiano no elemental y sea $\{v_j\}_{j=1}^n$ un ciclo accidental en la frontera del polígono de Dirichlet con centro en w , entonces si $n \geq 5$, tenemos la siguiente cota*

$$\cosh \rho(w, v_j) \geq \frac{1}{\tan^2(\frac{\pi}{n})} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.11)$$

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar la demostración suponemos que G actúa en Δ y que $w = 0$, esto es posible ya que todos los términos mencionados son invariantes bajo la conjugación con la transformación de Cayley.

Recordamos que un ciclo de vértices en la frontera del polígono de Dirichlet con centro en w equidista de w , por ende $\{v_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{C}$, donde

$$\mathcal{C} = \{z \in \Delta \mid \rho(z, 0) = r\}.$$

Ahora si nos fijamos en los arcos de geodésica $[v_j, v_{j+1}]$ (suponemos que $\{v_j\}_{j=1}^n$ se encuentran ordenados de forma cíclica), estos arcos de geodésica son opuestos a los ángulos $2\alpha_j$ en el origen (véase la Figura 2.7), por lo tanto si sumamos estos ángulos obtenemos

$$\sum_{j=1}^n 2\alpha_j = 2\pi \Rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j = \pi. \quad (2.12)$$

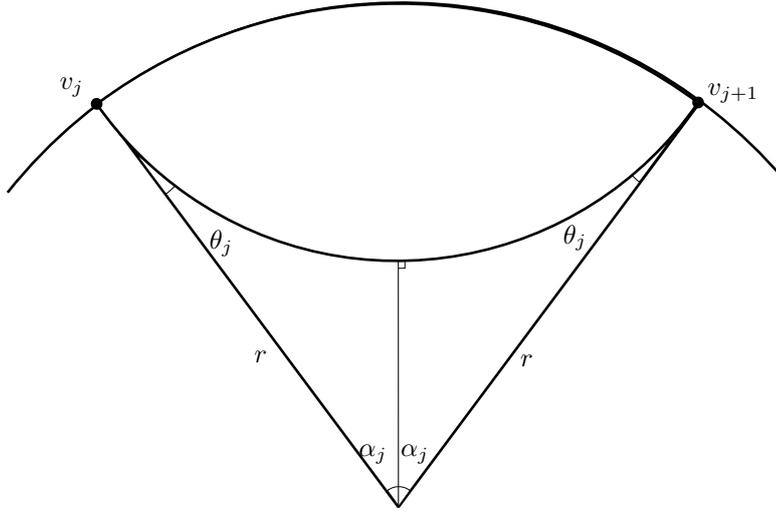


Figura 2.7: Triángulo T_j

Ahora si nombramos como T_j al triángulo hiperbólico cuyos vértices sean $\{0, v_j, v_{j+1}\}$, entonces por h -convexidad del polígono de Dirichlet, tenemos que dichos triángulos se encuentran contenidos dentro del polígono. Los triángulos T_j son isósceles y por lo tanto dos de sus ángulos son iguales y de hecho estos son los que se encuentran en los vértices v_j y v_{j+1} , a estos ángulos los llamaremos θ_j . Como tenemos más de tres vértices, entonces existe a lo más una j tal que $2\alpha_j \geq \pi$, además por el hecho de que la suma de los ángulos en un ciclo accidental es 2π , tenemos que

$$\sum_{j=1}^n 2\theta_j \leq 2\pi \Rightarrow \sum_{j=1}^n \theta_j \leq \pi. \quad (2.13)$$

Lo que prosigue es tomar la bisectriz del ángulo $2\alpha_j$, como T_j es isósceles, esta bisectriz resulta también ser altura de dicho triángulo. Por lo cual si nos fijamos en los triángulos resultantes (los cuales son congruentes), se cumple que

$$\cosh r = \frac{1}{\tan \alpha_j \tan \theta_j} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.14)$$

Esta última igualdad se sigue de la trigonometría hiperbólica (cf [1, pp. 147]). Siguiendo lo anterior tenemos los siguientes casos:

1. Si cada $\alpha_j < \pi/2$, entonces por (2.12) y (2.13) tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \theta_j + \alpha_j \leq 2\pi.$$

2. Si existe una i tal que $\alpha_i > \pi/2$, entonces el ángulo $\theta_i = 0$ y

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \theta_j + \alpha_j = \sum_{j=1}^n \theta_j + \alpha_j - \alpha_i \leq 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

En ambos casos se cumple que existe una $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\theta_k + \alpha_k \leq \frac{2\pi}{n}.$$

Por lo que si usamos la siguiente desigualdad de la tangente

$$\tan\theta_k \tan\alpha_k \leq \tan\left(\frac{\theta_k + \alpha_k}{2}\right) \leq \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Por último recordando la ecuación (2.14) y el hecho de que $r = \rho(0, v_j)$ para toda $j \in \{1, \dots, n\}$ obtenemos

$$\cosh\rho(0, v_j) = \frac{1}{\tan\alpha_k \tan\theta_k} \geq \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

■

El siguiente ejemplo nos dice que la cota del resultado anterior no se puede mejorar.

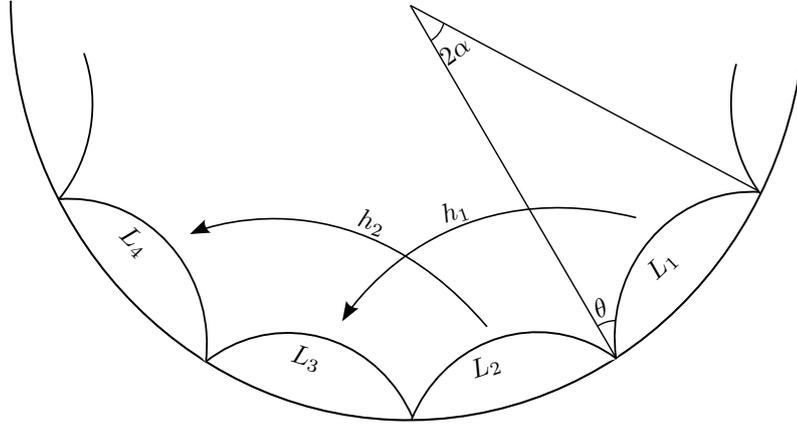
Sea $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 2$, entonces vamos a construir un grupo fuchsiano G actuando en Δ cuyo dominio fundamental sea el $4k$ -ágono regular hiperbólico. Además queremos que todos sus vértices se encuentren en un ciclo accidental de $4k$ elementos.

Utilizamos el teorema de la signatura para contruir un polígono P que sea el $4k$ -ágono regular hiperbólico con centro en 0, tal que $4k\theta = 2\pi$, donde θ es el ángulo que se forma en cada vértice de P (cf. [1, p. 271]). Sean $\{L_i\}_{i=1}^{4k}$ los lados de P ordenados de forma cíclica, entonces podemos aparear sus lados de la siguiente forma: cada L_i , se aparea con L_{i+2} donde $i \in \{1, 2, 5, 6, \dots, 4k-2\} = I$. Estos apareamientos se hacen a través de las funciones $\{h_i\}_{i \in I}$ donde h_i es la composición de la reflexión sobre L_i con la reflexión sobre la recta que pasa por 0 y el punto medio de L_{i+1} , entonces $G = \langle \{h_i\}_{i \in I} \rangle$ es el grupo deseado.

Ahora si nos remitimos a la prueba del teorema anterior, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{4k} 2\alpha_j = 4k\theta = 2\pi,$$

Esto se debe a como están distribuidos los vértices del polígono (los cuales forman un ciclo accidental) a los que llamaremos $\{v_j\}_{j=1}^{4k}$. Ahora como el polígono es regular se cumple que $2\alpha_j = 2\alpha_i$ para cualquier $i \in \{1, \dots, 4k\}$. Lo anterior nos indica que

Figura 2.8: Apareamientos de un $4k$ -ágono

$$\alpha_j = \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4k} \quad \forall j \in \{1, \dots, 4k\}.$$

Por último siguiendo el mismo procedimiento del teorema anterior (es decir bisectando los ángulos $2\alpha_j$) obtenemos que

$$\cosh \rho(0, v_j) = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4k}\right)}.$$

Por lo tanto nuestra cota no se puede mejorar.

Teorema 2.0.10 *Sea D un polígono fundamental de un grupo fuchsiano G , y $\{w_1, w_2\} \subset \overline{D}$, donde $\{w_1, w_2\}$ son puntos al infinito. Si $\mathcal{L} = [w_1, w_2]$ y v es un punto fijo elíptico de orden n en la frontera de D , entonces*

$$\cosh \rho(v, \mathcal{L}) \geq \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por h -convexidad el triángulo hiperbólico cuyos vértices son $\{w_1, w_2, v\}$ se encuentra contenido en \overline{D} , además en dicho triángulo los ángulos en w_1 y w_2 son cero y el ángulo en v , el cual llamaremos α , no puede ser mayor a $2\pi/n$, ya que la suma angular en un ciclo elíptico de orden n es $2\pi/n$.

Si tomamos la perpendicular a \mathcal{L} que pase por v , esta cruza a \mathcal{L} en un punto, digamos w . Como dicha perpendicular parte a α en dos ángulos digamos β y γ , entonces ya sea β o γ tiene que ser menor o igual a $\alpha/2$, entonces supongamos que $\beta \leq \alpha/2$ y supongamos también que β se encuentra del mismo lado que w_1 .

Ahora como el triángulo cuyos vértices son $\{w, w_1, v\}$ es rectángulo, tenemos por trigonometría hiperbólica que

$$\cosh\rho(v, w) = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} \geq \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \geq \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Ya que la función seno es en el rango $[0, \pi]$ (el cual claramente es nuestro caso). Por último recordamos que $\cosh\rho(v, w) = \cosh\rho(v, \mathcal{L})$ y obtenemos el resultado deseado. ■

En [1, Teo. 11.2.7] se menciona que $\cosh\rho(v, \mathcal{L}) \geq 2/\sqrt{3}$, esto no es correcto ya que es posible que $\rho(v, \mathcal{L}) = 0$, como es el caso de $\Gamma_0(2)$, donde

$$\Gamma_0(2) = \{T \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ab - bc = 1, \quad c \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

En este ejemplo \mathcal{L} es la geodésica que pasa por 0 y 1 (es decir euclideanamente es el arco de circunferencia de radio $1/2$ con centro en $1/2$), y $v = (1 + i)/2$ es el punto fijo de

$$T(z) = \frac{z - 1}{2z - 1} \in \Gamma_0(2),$$

la cual claramente es elíptica de orden 2. Notamos que $v \in \mathcal{L}$ ya que su distancia euclideana con $1/2$ es $1/2$. Como claramente \mathcal{L} se encuentra contenida en el polígono fundamental que contiene a v (el cual es fácil de encontrar), y $T \in \Gamma_0(2)$, entonces $\rho(v, \mathcal{L}) = 0$.

Un caso similar al teorema anterior es el siguiente teorema, el cual se aplica cuando tenemos un ciclo accidental en vez de un punto fijo elíptico.

Teorema 2.0.11 *Sea D un polígono fundamental convexo para un grupo fuchsiano G actuando en Δ y supongamos que D contiene una geodésica \mathcal{L} , entonces si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un ciclo accidental en ∂D , se cumple que*

$$\sum_{i=1}^n \cosh\rho(v_i, \mathcal{L}) \geq \frac{n}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \geq \frac{n^2}{\pi} \quad (2.15)$$

DEMOSTRACIÓN. Usando que $\csc x$ es convexa en $(0, \pi/2)$, se tiene por la desigualdad de Jensen 1.0.2 que

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \csc \frac{\theta_i}{2} \right) \geq \csc \left(\sum_{i=1}^n \frac{\theta_i}{2n} \right) = \csc \left(\frac{\pi}{n} \right), \quad (2.16)$$

donde θ_i es el ángulo en el vértice v_i . Esta desigualdad se obtiene de la misma forma que la desigualdad en la demostración del teorema 2.0.4. Como $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un ciclo accidental y nuestro polígono es convexo, entonces $n \geq 3$ y se cumplen las siguientes propiedades

- i) $0 < \theta_i/2 < \pi/2 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- ii) $\frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n \theta_i \right) = \pi/n$.

Basta probar la siguiente desigualdad

$$\cosh\rho(\mathcal{L}, v_i) \geq \csc\left(\frac{\theta_i}{2}\right).$$

Para hacer esto seguimos el mismo procedimiento de la demostración del teorema 2.0.10. Para cada v_i , consideramos el triángulo T_i cuyos vértices sean los puntos al infinito de \mathcal{L} y v_i , por h -convexidad $T_i \subset D$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.

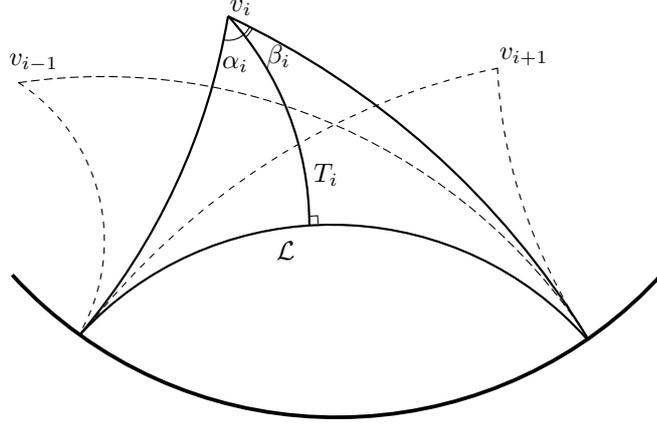


Figura 2.9: Construcción de los triángulos T_i

Por lo cual, si llamamos α_i al ángulo no cero del triángulo T_i , éste cumple que $\alpha_i \leq \theta_i$. Ahora si tomamos la perpendicular a \mathcal{L} que pasa por v_i , ésta divide a α_i en dos ángulos, uno de los cuales tiene que ser menor o igual a $\alpha_i/2$, a dicho ángulo lo denotamos por β_i . Por último, usando paralelismo hiperbólico (cf. [1, teo. 7.9.1]) obtenemos que

$$\cosh\rho(\mathcal{L}, v_i) = \csc\beta \geq \csc\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \geq \csc\left(\frac{\theta_i}{2}\right).$$

Para las desigualdades anteriores usamos el hecho de que $\csc x$ es decreciente en $(0, \pi/2)$. Como esto se cumple para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces usando (2.16) obtenemos

$$\sum_{i=1}^n \cosh\rho(v_i, \mathcal{L}) \geq n \left(\sum_{i=1}^n \csc\frac{\theta_i}{2} \right) \geq \frac{n}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \geq \frac{n^2}{\pi}.$$

Que es lo que queríamos demostrar ■

Vale la pena mencionar que en el caso de tener un ciclo elíptico podemos derivar una desigualdad similar a la anterior siguiendo los mismos pasos. Si tenemos un ciclo elíptico de orden q , obtenemos la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=1}^n \cosh\rho(v_i, \mathcal{L}) \geq \frac{n}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{qn}\right)} \geq \frac{qn^2}{\pi}.$$

Teorema 2.0.12 *Sea G un grupo fuchsiano no elemental y sea $\{v_j\}_{j=1}^n$ un ciclo elíptico de orden q en la frontera del polígono de Dirichlet con centro en w , entonces si $n \geq 4$ o si $n \geq 3$ y $q \geq 3$, tenemos la siguiente cota*

$$\cosh \rho(w, v_j) \geq \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(q+1)\pi}{2qn}\right)} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.17)$$

DEMOSTRACIÓN. Siguiendo la notación y procedimiento del Teorema 2.0.9, construimos una familia de triángulos $\{T_j\}_{j=1}^n$, formados por el centro del polígono de Dirichlet y los vértices del ciclo. Denotamos a sus ángulos por α_j y θ_j para cada j . Así tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = \pi,$$

y también

$$\sum_{j=1}^n \theta_j \leq \frac{\pi}{q}. \quad (2.18)$$

Esto es ya que la suma angular en un ciclo elíptico de orden q es $2\pi/q$. Como en cualquier caso tenemos que $n \geq 3$, al igual que en el Teorema 2.0.9, tenemos que existe a lo más una $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_j \geq \pi/2$. De igual forma que en el Teorema 2.0.9 bisectando el ángulo $2\alpha_j$ obtenemos que

$$\cosh r \tan \theta_i \tan \alpha_i = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.19)$$

donde $r \in \mathbb{R}^+$ es tal que el ciclo de vértices se encuentre contenido en la circunferencia hiperbólica

$$\mathcal{C} = \{z \in \Delta \mid \rho(z, 0) = r\}.$$

Ahora tenemos los siguientes dos casos:

1. Si cada $\alpha_j < \pi/2$, entonces por (2.12) y (2.18) tenemos que

$$\sum_{j=1}^n (\theta_j + \alpha_j) \leq \pi + \frac{\pi}{q} = \frac{(q+1)\pi}{q}.$$

2. Si existe una i tal que $\alpha_i > \pi/2$, entonces el ángulo $\theta_i = 0$ y

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\theta_j + \alpha_j) = \sum_{j=1}^n (\theta_j + \alpha_j) - \alpha_i \leq \frac{(q+1)\pi}{q} - \frac{\pi}{2} = \frac{(q+2)\pi}{2q}.$$

En cualquiera de los casos como $n \geq 4$ o $q \geq 3$ y $n \geq 3$, se cumple que

$$\exists k \in \{1, \dots, n\} \quad \text{tal que} \quad \alpha_k + \theta_k \leq \frac{(q+1)\pi}{qn}.$$

Por lo tanto si usamos que tangente es creciente y convexa, usando (2.19) obtenemos

$$\tan\alpha_k \tan\theta_k \leq \tan^2\left(\frac{\theta_k + \alpha_k}{2}\right) \leq \tan^2\left(\frac{(q+1)\pi}{2qn}\right).$$

Por último recordando que $r = \rho(v_j, 0)$ obtenemos que

$$\cosh\rho(0, v_j) = \frac{1}{\tan\alpha_k \tan\theta_k} \geq \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(q+1)\pi}{2qn}\right)} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

■

CAPÍTULO 3

Grupos de Hecke

Dentro de la teoría de los grupos discretos son de peculiar importancia los grupos triangulares, en particular los grupos de Hecke por su conexión con la teoría de números. Para propósitos de esta tesis los grupos de Hecke serán importantes en las discusiones siguientes y por lo tanto se le dedica un pequeño capítulo a ellos.

Definición 21 *Se dice que un grupo fuchsiano es un Grupo de Hecke si tiene una signatura $(0 : 2, q, \infty)$ donde q es tal que $3 \leq q \leq \infty$.*

Sea $3 \leq q \leq \infty$, si consideramos las siguientes transformaciones

$$g(z) := \frac{-1}{z} \quad y \quad h(z) := z + 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right),$$

entonces $G_q = \langle g, h \rangle$ tiene signatura $(0 : 2, q, \infty)$ y por lo tanto es un grupo triangular, más aún, como cualesquiera dos grupos triangulares con la misma signatura son conjugados ([1, pp. 279-281]), esto quiere decir que cualquier grupo de Hecke con signatura $(0 : 2, q, \infty)$ es conjugado a G_q . Nótese que una matriz que determina hg está dada por

$$\begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

lo que quiere decir que $tr(hg) = 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) < 2$, por lo cual hg es elíptica, además es fácil ver que es de orden q , ya que tiene la misma traza que la rotación $e^{\pi/q}$. Si nos fijamos en el círculo isométrico de hg , notamos que éste es el círculo unitario.

A veces es conveniente conjugar a G_q de tal modo que $h(z) = z + 1$, por lo que

$$g(z) := \frac{1}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)z},$$

la cual es elíptica de orden dos cuyo punto fijo es $i/2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$. Es de notarse que con esta normalización, el punto fijo w de hg y $g^{-1}h^{-1}$ cumple que

$$Im(w) = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{q}\right),$$

esto es, ya que $I(g)$ tiene un radio de $1/2\cos(\frac{\pi}{q})$ con centro en 0. Por lo cual si nos fijamos en el polígono de Ford de G_q obtenemos

$$\operatorname{Im}(w) = \sqrt{\frac{1}{4\cos^2(\frac{\pi}{q})} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2(\frac{\pi}{q})}{4\cos^2(\frac{\pi}{q})}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{q})}{4\cos^2(\frac{\pi}{q})}} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{q}\right).$$

(véase la Figura 3.1).

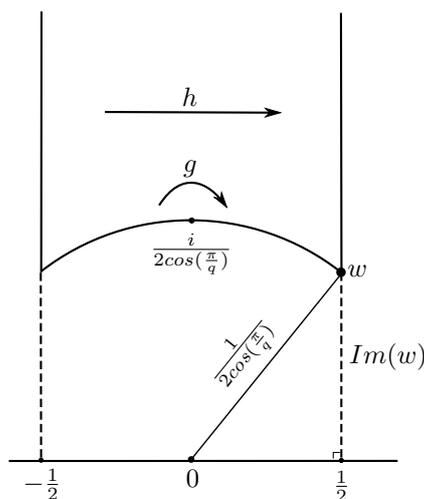


Figura 3.1: Región fundamental de un Grupo de Hecke

Por lo tanto la cota que dimos en (2.2) es la mejor posible.

Teorema 3.0.13 *Sea G un grupo fuchsiano con elementos parabólicos. Si G tiene un área menor a π , entonces G tiene signatura $(0 : 2, q, \infty)$ donde $3 \leq q \leq \infty$ o $(0 : 3, q, \infty)$, y $q \in \{3, 4, 5\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como el dominio fundamental tiene área finita, entonces no tenemos elemento hiperbólicos de frontera, por lo cual G tiene una signatura de la forma $(g : m_1, \dots, m_n, t)$ ($t > 0$ pues por hipótesis tenemos clases parabólicas). Por lo tanto usando la fórmula del área (cf. [1, Teo. 10.4.4]) tenemos que

$$2\pi \left[2g - 2 + \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) + t \right] < \pi. \quad (3.1)$$

Ahora, como $m_j \geq 2 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$, entonces $-1/2 \leq -1/m_j$ para cualquier $j \in \{1, \dots, n\}$. Lo que nos indica que

$$\frac{n}{2} = n - \frac{n}{2} \leq \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{m_j} \right),$$

esto quiere decir que al sustituirlo en la desigualdad (2.18) obtenemos

$$2\left[2g - 2 + \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) + t\right] < 1 \Rightarrow 4g + n + 2t < 5. \quad (3.2)$$

Si $g \geq 1$, de la desigualdad anterior obtenemos que $n + 2t < 1$, lo cual necesariamente quiere decir que $t = 0$, de esto último se deduce que $g = 0$. Ahora veamos que $t = 1$, por hipótesis $t \geq 1$, pero si sustituimos $g = 0$ en (3.2), obtenemos que $t \leq 2$. Supongamos que $t = 2$, entonces sustituyendo en (3.2) obtenemos que $n < 1$ lo que implica que $n = 0$, esto quiere decir que

$$2\left[2g - 2 + \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) + t\right] = 0.$$

Esto contradice el teorema de la signatura [1, Teo. 10.4.2]. Por lo tanto $t = 1$, con esto deducimos utilizando una vez mas (3.2) que $n < 3$, lo que quiere decir que $n = 2$, ya que si $n \in \{0, 1\}$ no se cumple el teorema de la signatura. Sustituyendo en (3.1), obtenemos que

$$2\left[-\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + 1\right] < 1 \Rightarrow \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} > \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Como se cumple la siguiente desigualdad

$$2 \max\left\{\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}\right\} \geq \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} > \frac{1}{2},$$

se tiene $\max\{1/m_1, 1/m_2\} > 1/4$, lo que significa que $\min\{m_1, m_2\} \leq 3$. Como $m_i \geq 2$ para cualquier i , tenemos dos posibilidades:

1. Si algún m_i , digamos m_1 cumple que $m_1 = 2$, entonces tomamos $m_2 = q$ y así se cumple que $3 \leq q \leq \infty$, ya que si $m_1 = m_2 = 2$ no se cumple el teorema de la signatura. Por lo tanto G es de Hecke
2. Si $m_i > 2$ para cualquier i , entonces digamos que $m_1 = 3$, como $1/m_1 + 1/m_2 > 1/2$, esto implica que $m_2 < 6$. Por lo tanto tomando $q = m_2$, tenemos que $q \in \{3, 4, 5\}$ que era lo que queríamos probar. ■

En las discusiones posteriores será útil saber cuál es el área de un grupo de Hecke con signatura $(0; 2, q, \infty)$, un cálculo sencillito nos muestra que ésta es

$$\pi\left(1 - \frac{2}{q}\right). \quad (3.4)$$

Para el siguiente teorema usaremos el siguiente resultado, el cual puede consultar en [1, Teo. 9.6.1]

Teorema 3.0.14 *Sea G un grupo fuschiano y $H \leq G$, entonces si $k = [G : H]$, se tiene que*

$$k\mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G) = \mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/H).$$

Teorema 3.0.15 *Sea G_0 un grupo de Hecke y G un grupo fuchsiano que contiene a G_0 , entonces $G_0 = G$*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que G actúa en \mathbb{H}^2 , entonces por el teorema

$$k\mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G) = \mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G_0), \quad (3.5)$$

donde $k = [G : G_0]$. Esto quiere decir que k es finito ya que G_0 tiene área finita por hipótesis. En virtud del teorema 3.0.13 y la ecuación (3.5) tenemos que G tiene signatura $(0 : 2, q, \infty)$ o $(0 : 3, s, \infty)$, donde $3 \leq q \leq \infty$ en el primer caso o $s \in \{3, 4, 5\}$ en el segundo. Usando el teorema 3.0.14 y la ecuación (3.4), obtenemos

$$\mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G) = \frac{1}{k}\mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G_0) < \frac{\pi}{k}.$$

Lo cual significa que G cumple con las hipótesis del teorema anterior. Si suponemos que $k \geq 2$, entonces $\mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G) < \pi/2$, esto quiere decir que G tiene signatura $(0 : 2, q, \infty)$. Esto se sigue pues si nos remitimos a la prueba del teorema anterior, obtenemos una desigualdad similar a (3.3) pero en nuestro caso es

$$2\left[-\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + 1\right] < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} > \frac{3}{4},$$

Con esta desigualdad obtenemos que $\min\{m_1, m_2\} < 8/3 < 3$ y por lo tanto $\min\{m_1, m_2\} \leq 2$, lo que implica que G tiene signatura $(0 : 2, q, \infty)$.

Como G_0 es de Hecke, tiene signatura $(0 : 2, p, \infty)$, donde $3 \leq p \leq \infty$. Además es G_0 subgrupo de G y sabemos que la clase elíptica de p corresponde a la clase elíptica de q , entonces por el teorema de Lagrange se cumple que $\exists t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $q = tp$. Ahora usando la fórmula del área de un grupo fuchsiano [1, Teo. 10.4.3] y la ecuación en (3.3) obtenemos

$$k\pi\left(1 - \frac{2}{q}\right) = \pi\left(1 - \frac{2}{p}\right).$$

Sin embargo, como $tp \geq p$ significa que

$$1 - \frac{2}{tp} \geq 1 - \frac{2}{p},$$

entonces si $k > 1$ significa que $k\mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G) > \mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G_0)$ lo cual es imposible. Por lo tanto $k = 1$, con lo cual $G = G_0$. ■

CAPÍTULO 4

Desigualdades de la traza

Durante esta sección será de mucha importancia la desigualdad del Jørgensen, la cual enunciaremos a continuación, la prueba a se puede consultar en [1, Teo 5.4.1].

Teorema 4.0.16 (Desigualdad de Jørgensen) *Sea $G = \langle f, g \rangle$, de tal forma que G sea discreto y no elemental, entonces*

$$|\operatorname{tr}^2(f) - 4| + |\operatorname{tr}([f, g]) - 2| \geq 1$$

y ésta es la mejor cota posible

Teorema 4.0.17 *Sea $G = \langle g, h \rangle$ fuchsiano no elemental, con g, h parabólicas, entonces se cumple alguna de las siguientes propiedades*

i) $\operatorname{tr}[g, h] \geq 18$

ii) $\operatorname{tr}[g, h] = 2 + 16\cos^4\left(\frac{\pi}{r}\right)$ y G tiene signatura $(0 : 2, r, \infty)$

iii) $\operatorname{tr}[g, h] = 2 + 16\cos^4\left(\frac{\pi}{2r}\right)$ y G tiene signatura $(0 : r, \infty, \infty)$

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que G actúa en \mathbb{H}^2 y que

$$h(z) = z + 1 \quad g(z) = \frac{z}{cz + 1}$$

donde $c \geq 0$, pues si conjugamos a G con la transformación que manda el punto fijo de h a ∞ y el punto fijo de g a 0, obtenemos las transformaciones deseadas. Tenemos $c \geq 0$ ya que si al conjugar se diera que $c \leq 0$, simplemente se toma a g^{-1} en vez de g pues viendo a g y g^{-1} de forma matricial se tiene que

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}.$$

También si representamos matricialmente a h y h^{-1}

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$[g, h] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + c + c^2 & -c \\ c^2 & -c + 1 \end{pmatrix}.$$

Así tenemos que $tr[g, h] = c^2 + 2$. Aplicando la desigualdad de Jørgensen obtenemos que $c \geq 1$. Es fácil demostrar que si mostramos que se cumple alguna de las siguientes opciones, obtenemos el resultado deseado:

- i) $c \geq 4$
- ii) $c = 2 + 2\cos(\frac{2\pi}{r})$
- iii) $c = 2 + 2\cos(\frac{\pi}{r})$.

Si suponemos que $1 \leq c < 4$, entonces consideramos el cuadrilátero formado por los círculos isométricos de g y g^{-1} y las líneas $\{Re(z) = 1/2\}$ y $\{Re(z) = -1/2\}$ (véase la figura 4.1).

Como $I(g)$ y $I(g^{-1})$ tienen radio $1/c$ y centros en $-1/c$ y $1/c$ respectivamente, si $c < 4$, entonces $1/c > 1/4$, lo que quiere decir que

$$I(g) \cap \{Re(z) = -\frac{1}{2}\} \neq \emptyset,$$

de forma análoga $I(g^{-1})$ y $\{Re(z) = 1/2\}$ se intersecan. Por lo tanto sea

$$w \in I(g^{-1}) \cap \{Re(z) = \frac{1}{2}\}$$

y sean $\sigma_{-\frac{1}{2}}$, σ_0 , $\sigma_{\frac{1}{2}}$, σ_1 y σ_2 las reflexiones en $\{Re(z) = -1/2\}$, $\{Re(z) = 0\}$, $\{Re(z) = 1/2\}$, $I(g)$ y $I(g^{-1})$.

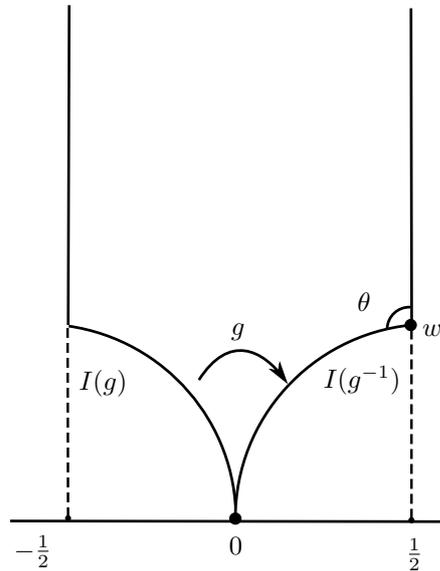


Figura 4.1: Cuadrilátero formado por los círculos isométricos de g y g^{-1} y las líneas $\{Re(z) = 1/2\}$ y $\{Re(z) = -1/2\}$.

Ahora notamos que

$$g = \sigma_0\sigma_1 \quad y \quad h = \sigma_{\frac{1}{2}}\sigma_0,$$

ya que en ambos casos las dos son parabólicas, y se cumple que $\sigma_0\sigma_1$ fija 0 y $\sigma_{\frac{1}{2}}\sigma_0$ fija ∞ . Además que $\sigma_0\sigma_1$ manda $I(g)$ a $I(g^{-1})$ y $\sigma_{\frac{1}{2}}\sigma_0$ manda $\{Re(z) = -1/2\}$ a $\{Re(z) = 1/2\}$. Así tenemos que

$$gh^{-1} = \sigma_0\sigma_1(\sigma_{\frac{1}{2}}\sigma_0)^{-1} = (\sigma_0\sigma_1\sigma_0)\sigma_{\frac{1}{2}}.$$

Nótese que $\sigma_0\sigma_1\sigma_0 = \sigma_2$, ya que ambas son reflexiones que fijan a $I(g^{-1})$. Por lo tanto $gh^{-1} = \sigma_2\sigma_{\frac{1}{2}}$. Esto nos indica que gh^{-1} es la rotación por 2θ en w , donde θ es el ángulo entre $I(g^{-1})$ y $\{Re(z) = 1/2\}$. Como G es fuchsiano, se tiene que gh^{-1} es de orden finito (pues es elíptica), por lo cual

$$\theta = \frac{k\pi}{r} \quad k, r \in \mathbb{Z}, (k, r) = 1.$$

Ahora aplicando el producto inversivo entre $I(g^{-1})$ y $\{Re(z) = 1/2\}$ obtenemos que

$$\cos\left(\frac{k\pi}{r}\right) = \frac{c-2}{2}.$$

Sin importar si $c < 2$ o $2 < c$, la igualdad se da ya que si $c < 2$, entonces $1/c > 1/2$ y por lo tanto el ángulo es agudo y el coseno es positivo, y si $c > 2$, $1/c < 1/2$ y el coseno es negativo. Por lo tanto siempre coinciden en signo $\cos\theta$ y $c-2$, lo que al final nos da que $c = 2 + 2\cos(\frac{k\pi}{r})$. Notamos que si $k = 1$ podemos aplicar el teorema de Poincaré a nuestro cuadrilátero, lo cual nos dice que éste es una región fundamental de G . Notamos que es este caso la signatura de G es $(0 : r, \infty, \infty)$, la cual corresponde con el caso *iii*).

Supongamos que $k \geq 2$, entonces la rotación por $2\pi/r$ en w , la cual llamaremos f , se encuentra en G , esto es gracias a que $(k, r) = 1$, lo cual implica que $ord(gh^{-1}) = r$ y por lo tanto $f \in \langle hg^{-1} \rangle \leq G$.

Proseguimos a construir un cuadrilátero a partir de f como en la Figura 4.2, simplemente tomamos la geodésica \mathcal{L} que pasa por w y que hace un ángulo de π/r con la recta $\{Re(z) = 1/2\}$ y que interseca a la recta $\{Re(z) = 0\}$. Ésta geodésica hace un ángulo ϕ con la recta $\{Re(z) = 0\}$. Ahora si tomamos la geodésica $f(\mathcal{L})$, notamos que ésta corta a $\{Re(z) = 1\}$ en un ángulo ϕ por simetría, entonces obtenemos un cuadrilátero formado por \mathcal{L} , $f(\mathcal{L})$, $\{Re(z) = 1\}$ y $\{Re(z) = 0\}$. Observamos que como $k \geq 2$ y $\theta = k\pi/r$

$$\frac{\pi}{r} = \frac{\theta}{k} \leq \frac{\theta}{2},$$

esto implica que

$$\phi \geq \frac{\pi}{2}.$$

Esto se verifica pues tanto $I(g^{-1})$ como $\{Re(z) = 1/2\}$ son tangentes a $\{Re(z) = 0\}$, además el hecho de que $\pi/r < \theta/2$ dice que el punto donde se hace el ángulo ϕ se encuentra por encima del punto en el cual corta la bisectriz del ángulo θ , la cual corta en un ángulo recto a $\{Re(z) = 0\}$, esto se verifica notando que la reflexión en esta geodésica, deja invariante a $\{Re(z) = 0\}$. Por lo tanto $\phi \leq \pi/2$.

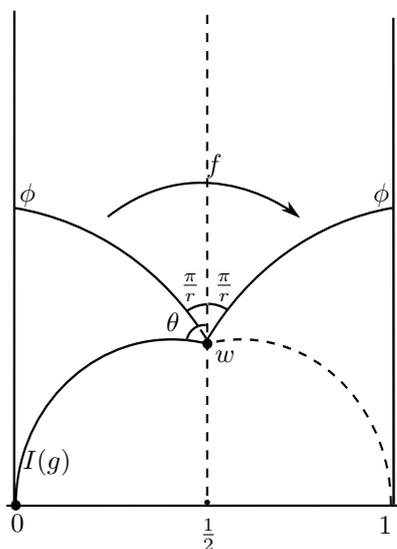


Figura 4.2: Cuadrilátero formado rotando con f .

Por último notamos que las imágenes de nuestro cuadrilátero bajo G cubren a todo \mathbb{H}^2 , esto es sencillo de ver, ya que la acción de f tesela alrededor de w . Ahora para cualquier otro punto $z \in \mathbb{H}^2$, tomamos una curva que una z con w y notamos que podemos ir teselando vecindades con un radio fijo alrededor de puntos en la curva, esto se debe a que gracias a las traslaciones, podemos teselar alrededor de infinito, además gracias a las roaciones podemos teselar alrededor de cualquier punto en los lados del cuadrilátero. Por lo tanto podemos teselar localmente con nuestro cuadrilátero alrededor de la curva y concluimos que podemos teselar alrededor de z y como z fue arbitrario, esto significa que las imágenes de nuestro cuadrilátero cubren a todo \mathbb{H}^2 . Por lo tanto existe una región fundamental dentro de nuestro cuadrilátero, la cual, tiene que contener a w pues éste es un vértice elíptico.

Ahora el área de dicha región es menor al área del cuadrilátero, es decir el área de la región es menor a

$$2\pi - 2\phi - \frac{2\pi}{r} < 2\pi - 2\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{r} < \pi.$$

Por lo tanto por el Teorema 3.0.13, G tiene signatura $(0 : s, r_1, \infty)$, donde $r_1 | r$ y $s \in \{2, 3\}$ (ya que la región se encuentra contenida en nuestro cuadrilátero y contiene a w). Por último nos fijamos que como el área de nuestro cuadrilátero es $2\pi - 2\phi - 2\pi/r$, se tiene la siguiente desigualdad

$$2\pi \left(1 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{s}\right) \leq 2\pi - 2\phi - \frac{2\pi}{r} \leq \pi - \frac{2\pi}{r} \leq \pi - \frac{2\pi}{r_1},$$

pues $r_1 \geq r$ y $\phi \geq \pi/2$. Por lo tanto de las desigualdades anteriores implican que $s = 2$, lo que significa que $r_1 = r$ y que $\phi = \pi/2$, que esto a su vez nos demuestra que $\theta = 2\pi/r$. ■

Teorema 4.0.18 *Sea h una transformación parabólica y g una transformación cualquiera tal que $G = \langle g, h \rangle$ sea fuchsiano no elemental, entonces se cumple alguna de las siguientes propiedades*

i) $tr[g, h] \geq 3$

ii) Si $3 \leq tr[g, h] < 6$, entonces G tiene signatura $(0 : 2, q, \infty)$ y

$$tr[g, h] = 4 + 2\cos(2\pi/q)$$

iii) Si $tr[g, h] < 18$, entonces G tiene elementos elípticos.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que G actúa en \mathbb{H}^2 y que $h(z) = z + 1$, también suponemos que g es de la forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, con $c \geq 0$ y $ad - bc = 1$. Ahora calculando el conmutador, obtenemos

$$[g, h] = \begin{pmatrix} 1 - ac & * \\ * & 1 + c^2 + ac \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $tr[g, h] = 2 + c^2 \geq 2$. La desigualdad de Jørgensen y el hecho de que h es parabólica implican que $tr[g, h] \geq 3$, de lo que se sigue *i*).

Si suponemos que $tr[g, h] < 6$, entonces $c < 2$, esto aunado a que $I(g)$ tiene un radio de $1/c$ (el cual es mayor a $1/2$) y centro en $-d/c$, implica que

$$I(g) \cap \{Re(z) = -d/c \pm 1/2\} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto tenemos una región fundamental de Ford incluida en el triángulo

$$T = Ext(I(g)) \cap \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid \frac{-d}{c} - \frac{1}{2} < Re(z) < \frac{-d}{c} + \frac{1}{2} \right\},$$

(véase la Figura 4.3). Notamos que el área de T es menor a $\pi - 2\theta < \pi$, donde θ es el ángulo entre $I(g)$ y $\{Re(z) = -d/c \pm 1/2\}$, entonces por el Teorema 3.0.13, G tiene signatura $(0 : 2, q, \infty)$, $3 \leq q < \infty$ o $(0 : 3, q, \infty)$, $q \in \{3, 4, 5\}$.

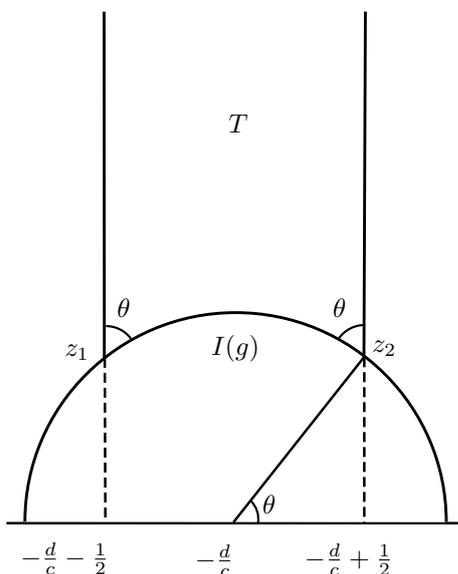


Figura 4.3: Triángulo formado por $I(g)$ y $\{Re(z) = -d/c \pm 1/2\}$.

Ahora, escribimos $g = \sigma_0\sigma_1$, donde σ_0 es la reflexión sobre $I(g)$ y σ_1 es la reflexión sobre alguna recta vertical \mathcal{L}_1 (cf. [1, Sec 3.5]). Sean

$$\mathcal{L}_2^n = \mathcal{L}_1 + n/2 \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

llamaremos por $\sigma_{2,n}$ a la reflexión sobre \mathcal{L}_2^n , entonces se tiene que $h^n = \sigma_{2,n}\sigma_1$, lo cual implica que

$$h^n g = (\sigma_{2,n}\sigma_1)(\sigma_1\sigma_0) = \sigma_{2,n}\sigma_0.$$

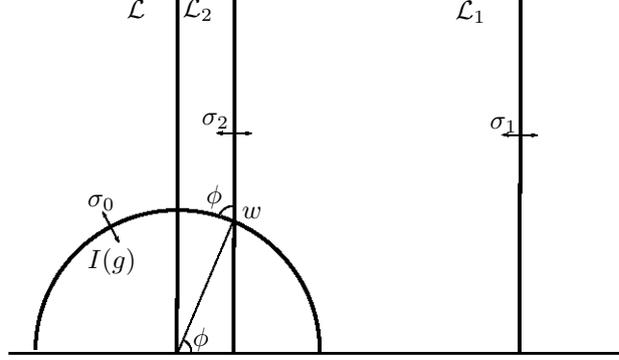
Denotaremos por \mathcal{L} a la recta vertical ortogonal a $I(g)$ y por \mathcal{L}_2 a la recta \mathcal{L}_2^N , $N \in \mathbb{Z}$, que cumple que

$$d(\mathcal{L}_2^N, \mathcal{L}) \leq d(\mathcal{L}_2^n, \mathcal{L}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como el diámetro de $I(g)$ es mayor a 1, entonces $\mathcal{L}_2 \cap I(g) \neq \emptyset$. Por lo tanto si llamamos σ_2 a la reflexión sobre \mathcal{L}_2 , y $w \in \mathcal{L}_2 \cap I(g)$, se cumple que $h^N g$ es la rotación hiperbólica en w con ángulo 2ϕ , donde ϕ es el ángulo entre \mathcal{L}_2 y $I(g)$.

Si llamamos $r = d(\mathcal{L}_2, \mathcal{L})$, entonces $r \leq 1/4$, ya que si se diera que $r > 1/4$, se tendría que la traslación de \mathcal{L}_2 por $\pm 1/2$ se encontraría a una distancia menor que $1/4$, pero \mathcal{L}_2 es la que minimiza la distancia. Usando esto y el producto inversivo obtenemos que

$$\cos\phi = rc < 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Figura 4.4: Traslación de \mathcal{L}_1 .

Por lo tanto $\phi \in [\pi/2, \pi/3)$, además como G es fuchsiano y $h^N g \in G$, entonces $\phi = k\pi/p$, $(k, p) = 1$, donde p es el orden de $h^N g$. Por la discusión anterior se cumple que $1/2 \leq k/p < 1/3$. Ahora por el Corolario 2.0.6, tenemos que $2Im(w) \leq \tan(\pi/p)$, sin embargo $Im(w) = \sin\phi/c$, (véase la Figura 4.4). Por lo cual

$$\tan\left(\frac{\pi}{p}\right) \geq 2Im(w) = \frac{2}{c} \sin\phi \geq \sin\phi \geq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo cual $p \in \{2, 3, 4\}$, aunado esto al hecho de que $1/2 \leq k/p < 1/3$, y que $(p, k) = 1$, obtenemos que las únicas soluciones son $k = 1$ y $p = 2$. Lo que significa que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2$ y que $f = h^N g \in G$ es elíptica de orden 2 que fija a w .

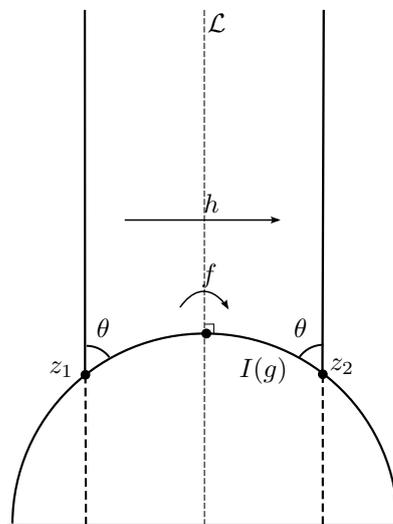
Suponiendo que la signatura de G es $(0 : 3, q, \infty)$, $q \in \{3, 4, 5\}$, entonces como $ord(f) = 2$, se tiene que $2|q$, ya que la clase de w tiene que estar representada en el grupo. Por lo que $q = 4$, sin embargo, usando el Corolario 2.0.9, obtenemos que $2Im(w) \leq \tan(\pi/4) = 1$. Pero sabemos que

$$2Im(w) = c/2 \sin\phi > \sin\phi = \sin(\pi/2) = 1,$$

lo cual es imposible y por lo tanto G tiene signatura $(0 : 2, q, \infty)$. Notamos que $g \in \langle f, h \rangle$, lo que significa que $G = \langle f, h \rangle$. Por último, considerando las áreas de T y nuestra región fundamental, tenemos que

$$\mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G) = \pi - \frac{2\pi}{q} \leq \pi - 2\theta = \mathcal{A}_h(T).$$

Lo cual implica que $\theta \leq \pi/q$. Del hecho que $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$, se deduce que las rotaciones por 2θ en los vértices del triángulo T (los cuales llamaremos z_1 y z_2), se encuentran en el grupo ya que dichos vértices son puntos fijos elípticos gracias a la acción de f y de h (véase la Figura 4.5). Como el ángulo mínimo de rotación en los vértices de la región fundamental es $2\pi/q$, entonces $2\theta \geq 2\pi/q$. Por lo tanto $\theta = \pi/q$ y usando el producto inversivo, obtenemos que $c = 2\cos(\pi/q)$, lo cual prueba *ii*).

Figura 4.5: Acción de f en el triángulo T .

Para *iii*) notamos que si G no tuviera elementos elípticos, entonces $c \geq 4$ ya que esto garantiza que al menos una de las rectas \mathcal{L}_2^n interseccionen a $I(g)$. Lo cual implica que

$$\text{tr}[g, h] = 2 + c^2 \geq 18$$

■

En el teorema anterior una forma alternativa de probar que G tiene elementos elípticos es la siguiente. Sea

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{tal que } |\gamma| \text{ sea el menor valor positivo para toda } g \in G.$$

Ahora calculamos

$$f^2 = \begin{pmatrix} * & * \\ \gamma(\alpha + \delta) & * \end{pmatrix},$$

entonces como $|\gamma|$ es el menor positivo para cualquier transformación en G , se cumple alguna de las siguientes dos opciones:

- i) $|\gamma||\alpha + \delta| \geq |\gamma|$
- ii) $|\gamma||\alpha + \delta| = 0$.

Si ocurre *ii*), entonces necesariamente ocurre que $\text{tr}(f) = \alpha + \delta = 0$, lo que implica que f es elíptica de orden 2. Si en cambio sucede *i*), tenemos que $|\alpha + \delta| \geq 1$, por lo tanto si consideramos a las transformaciones $h^n(z) = z + n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$h^n f = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + n\gamma & \beta + n\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Así $tr(h^n f) = \alpha + \delta + n\gamma$, por lo que existe una $k \in \mathbb{Z}$ tal que $tr(h^k f) \in (-1, 1)$. De esto se deduce inmediatamente que $h^k f$ es elíptica, además como G es fuchsiano, se tiene que $tr(h^k f) = 2\cos(\pi/m)$, donde $m = ord(h^k f)$. Puesto que $|tr(h^n f)| < 1$, entonces claramente $|\cos(\pi/m)| < 1/2$, del cual al fijarnos en el comportamiento de la función $\cos x$, obtenemos que esto ocurre sólo si $m = 2$.

Notamos que si G es un grupo fuchsiano actuando en \mathbb{H}^2 , que contiene a las transformaciones

$$h(z) = z + 1, \quad g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad c \neq 0 \quad ad - bc = 1,$$

entonces se cumplen las siguientes propiedades

- i) $\mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G) \geq \pi/3$
- ii) G tiene una región fundamental incluida en

$$D = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) \in \left[\frac{-d}{c} - \frac{1}{2}, \frac{-d}{c} + \frac{1}{2} \right] \right\} \cap Ext(I(g)),$$

con lo cual se puede deducir que $|c| \geq 1$.

La propiedad *i*) se debe a que si suponemos que $\mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G) < \pi/3$, entonces por la Proposición 21, tendríamos que G tiene signatura $(0 : 2, q, \infty)$, donde $3 \leq q < \infty$ o $(0 : 3, q, \infty)$, donde $q \in \{3, 4, 5\}$. Por lo tanto, al considerar la fórmula del área tenemos que

$$2\pi \left[-2 + \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + 1 \right] = 2\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right] < \frac{\pi}{3}, \Rightarrow q < 3,$$

en el primer caso, y en el segundo caso obtenemos

$$2\pi \left[-2 + \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + 1 \right] = 2\pi \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{q} \right] < \frac{\pi}{3}, \Rightarrow q < 2,$$

lo cual nos da una contradicción en ambos casos. Por lo que se cumple *i*). Ahora por definición de la región de Ford es claro que D contiene un dominio fundamental. Sin embargo si $|c| < 1$, tendríamos que el radio de $I(g)$, el cual llamaremos r , cumpliría que $r = 1/|c| > 1$, por lo que

$$\left\{ Re(z) = \frac{-d}{c} + \frac{1}{2} \right\} \cap I(g) \neq \emptyset,$$

entonces calculamos el ángulo θ entre estas dos geodésicas con el producto inverso y obtenemos que $\cos \theta = 1/2r < 1/2$. Por lo tanto $\theta > \pi/3$, y con esto obtenemos la siguiente cota para el área

$$\mathcal{A}_h(\mathbb{H}^2/G) \leq \mathcal{A}_h(D) = \pi - 2\theta < \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

lo que contradice el inciso *i*). Lo que quiere decir que *ii*) se cumple.

Como última observación de este teorema, revisemos el ejemplo de los grupos generados por

$$h(z) = z + 1, \quad g(z) = \frac{z}{cz + 1},$$

en el caso en que $c > 4$. Primero notemos que un grupo generado por dichas transformaciones es discreto ya que se puede aplicar el teorema de Poicaré al polígono (véase la Figura 4.6)

$$\left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}(z) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\} \cap \operatorname{Ext}(I(g)) \cap \operatorname{Ext}(g^{-1}).$$

Además estos grupos contienen hipébolicas de frontera (cf. [1, Cap 9]), lo que implica que son de área infinita. Por lo tanto es facil ver que su signatura es $(0 : 2, 1)$, donde la característica de Euler la obtenemos del polígono previamente mencionado. Las clases parabólicas son 0 e ∞ , también es facil notar que sólo hay una hiperbólica de frontera.

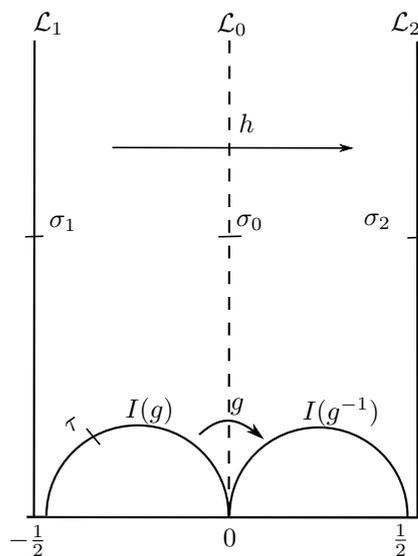


Figura 4.6: Reflexiones en polígono fundamental

Para acabar con el ejemplo probaremos de dos formas distintas que gh^{-1} es hiperbólica con longitud de traslación

$$T = \rho \left(\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}, I(g) \right). \quad (4.1)$$

Para la primera prueba nombraremos a las rectas $\mathcal{L}_0 = \{\operatorname{Re}(z) = 0\}$, $\mathcal{L}_1 = \{\operatorname{Re}(z) = -1/2\}$ y $\mathcal{L}_2 = \{\operatorname{Re}(z) = 1/2\}$. Ahora sea σ_i la reflexión sobre \mathcal{L}_i y sea τ la reflexión sobre $I(g)$, entonces tenemos que

$$g = \sigma_0 \tau, \quad h = \sigma_0 \sigma_1,$$

por lo tanto $gh^{-1} = \sigma_0 \tau (\sigma_1 \sigma_0) = \sigma_0 (\tau \sigma_1) \sigma_0 = \sigma_0 f \sigma_0$, donde $f = \tau \sigma_1$ es hiperbólica ya que $\{\operatorname{Re}(z) = -1/2\}$ e $I(g)$ no se intersecan pues $c > 4$. Por lo tanto

gh^{-1} es conjugada a una transformación hiperbólica por medio de isometrías euclidianas, esto significa que gh^{-1} es hiperbólica, pero además por definición de la longitud de traslación, la longitud de traslación de f es $\rho(\text{Re}(z) = 1/2, I(g))$, pero al conjugar por isometrías euclidianas, ésta no se modifica, lo cual prueba lo que queríamos.

Para la segunda prueba representamos a gh^{-1} de forma matricial

$$gh^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ c & 1-c \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto como $c > 4$, $\text{tr}(gh^{-1}) = 2 - c < 2 - 4 = -2$, lo que implica que gh^{-1} es hiperbólica. Por lo que si usamos la fórmula en [1, p. 173], tenemos que

$$\frac{c}{2} - 1 = \frac{1}{2} |\text{tr}(gh^{-1})| = \cosh\left(\frac{T}{2}\right),$$

donde T es la longitud de traslación de gh^{-1} . Ahora si nombramos a los puntos $z_1 = -1/2$, $z_2 = \infty$, $w_1 = -2/c$ y $w_2 = 0$. Notamos que estos puntos son los puntos al infinito de \mathcal{L}_1 e $I(g)$ respectivamente, entonces usando la fórmula [1, 7.23.1], tenemos que

$$1 = [z_1, w_1, w_2, z_2] \tanh^2\left(\frac{1}{2}\rho(\mathcal{L}_1, I(g))\right).$$

por otra parte calculando la razón cruzada obtenemos que

$$[z_1, w_1, w_2, z_2] = \frac{(z_1 - w_2)}{(z_1 - w_1)} = \frac{-1/2}{-1/2 + c/2} = \frac{c}{c-4}.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\tanh^2\left(\frac{1}{2}\rho(\mathcal{L}_1, I(g))\right) = \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho(\mathcal{L}_1, I(g))\right) - 1}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho(\mathcal{L}_1, I(g))\right)} = \frac{c-4}{c},$$

lo que implica que

$$2\cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho(\mathcal{L}_1, I(g))\right) = \frac{c}{2},$$

entonces usando esto y (4.1), obtenemos el resultado deseado.

Teorema 4.0.19 *Sea g una rotación hiperbólica por $2\pi/n$ con $n \geq 3$. Suponga que $G = \langle f, g \rangle$ es un grupo fuchsiano no elemental, entonces salvo algunos ejemplos que se obtienen en la demostración se cumple que*

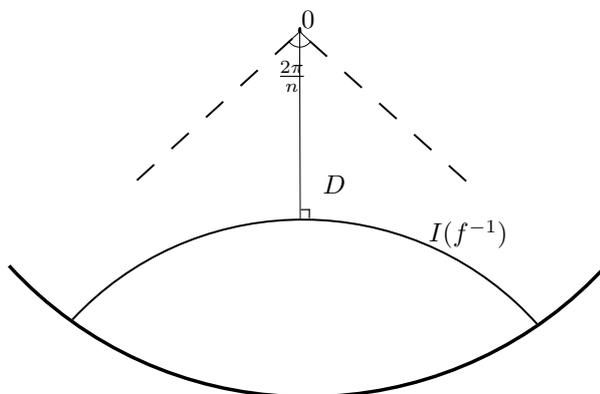
$$i) \text{tr}[f, g] \geq 2 + 4\cos(\pi/n)^2 \geq 3$$

$$ii) |\text{tr}(g)^2 - 4| + |\text{tr}[f, g] - 2| \geq 4$$

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que G actúa en Δ y que

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{n}} \end{pmatrix} \quad y \quad f = \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ \bar{a} & c \end{pmatrix} \quad |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

Por lo tanto G tiene un dominio fundamental incluido en la región delimitada por el exterior del círculo isométrico de f^{-1} y el ángulo por $2\pi/n$ simétrico con respecto a $I(f^{-1})$ (cf. [1, p. 239]).



De forma más precisa, denotaremos por

$$D = \text{Ext}(I(f^{-1})) \cap \left\{ z \in \Delta \mid \arg(z) \in [\theta - 2\pi/n, \theta + 2\pi/n] \right\}.$$

donde θ es el argumento del punto medio de $I(f^{-1})$. Si suponemos que D es acotada, entonces la signatura de G tiene que ser de la forma $(k; m_1, \dots, m_s)$ con $m_i \geq 2$, esto es pues la región es acotada y por lo tanto no tiene elementos parabólicos ni hiperbólicos de frontera. Notamos que 0 es un punto fijo elíptico, entonces si llamamos R a nuestra región, se tiene que cumplir que $0 \in R$. Por lo tanto para algún m_i , digamos m_s , se tiene que $n \mid m_s$, además como $R \subset D$ y D es un triángulo hiperbólico, entonces tenemos la siguiente desigualdad

$$2\pi \left[2k - 2 + \sum_{j=1}^s \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) \right] = \mathcal{A}_h(R) \leq \mathcal{A}_h(D) < \pi - \frac{2\pi}{n} \leq \pi - \frac{2\pi}{m_s}.$$

Lo que quiere decir que

$$4k - 4 + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) + 1 < 0. \quad (4.2)$$

Por lo tanto, como $m_j \geq 2$, si $k \geq 1$, tendríamos que (4.2) sería estrictamente positiva, lo que quiere decir que $k = 0$. Claramente $1 - 1/m_j \geq 1/2$, por lo que considerando esto en (4.2) tenemos que $-4 + s - 1 + 1 < 0$, lo que implica $s < 4$, esto quiere decir que $s = 3$ ya que no es posible que $3 < s$ por el teorema de la signatura, pues $[-2 + (1 - 1/m_1 + 1 - 1/m_2)] < 0$.

De aquí obtenemos los grupos excepcionales que no cumplen las propiedades *i)* y *ii)*, estos resultan ser los grupos en los que la región D es acotada, sin embargo desde el punto de vista de la signatura, son los grupos triangulares que cumplen que

$$m_1 = 2 \quad \text{o} \quad (m_1, m_2) \in \{(3, 3), (3, 4), (3, 5)\}.$$

Esto es, ya que si sustituimos todo lo obtenido en (4.2), obtenemos la siguiente desigualdad

$$-4 + 2(1 - 1/m_1 + 1 - 1/m_2) + 1 < 0,$$

lo que implica que $1/m_1 + 1/m_2 > 1/2$, lo cual inmediatamente nos indica los valores de los m_i . Demostraremos al final que estos grupos no cumplen *i*) y *ii*).

Ahora supongamos que G no es uno de estos grupos excepcionales, es decir supongamos que D no es acotada. Notamos que $I(f^{-1})$ es el bisector perpendicular del segmento de geodésica $[0, f(0)]$, la demostración de este hecho se encuentra en [1, sec. 7.21]. Por lo tanto usando que el seno es creciente en $(0, \pi/2)$ y el teorema del ángulo de paralelismo (cf. [1, Teo 7.9.1]) obtenemos que

$$\cosh \frac{1}{2}\rho(0, f(0)) \operatorname{sen}(\pi/n) \geq 1,$$

o de forma equivalente

$$\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2}\rho(0, f(0)) \operatorname{sen}^2(\pi/n) \geq \cos^2(\pi/n).$$

Como $|c| = \operatorname{senh} \frac{1}{2}\rho(0, f(0))$ (cf. [1, p. 138]), obteniendo la traza tenemos el resultado deseado. Pues calculamos la traza del conmutador

$$\begin{aligned} [f, g] &= \begin{pmatrix} e^{i\pi/n} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/n} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |a|^2 - e^{i2\pi/n}|c|^2 & * \\ * & |a|^2 - e^{-i2\pi/n}|c|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\operatorname{tr}[f, g] = 2|a|^2 - 2\cos(2\pi/n)|c|^2 = 2(|c|^2 + 1) - 2\cos(2\pi/n)$ y usando identidades trigonométricas obtenemos que

$$\operatorname{tr}[f, g] = 2 + 4|c|^2 \operatorname{sen}^2(\pi/n)$$

y por lo tanto

$$\operatorname{tr}[f, g] = 2 + 4|c|^2 \operatorname{sen}^2(\pi/n) \geq 2 + 4\cos^2(\pi/n).$$

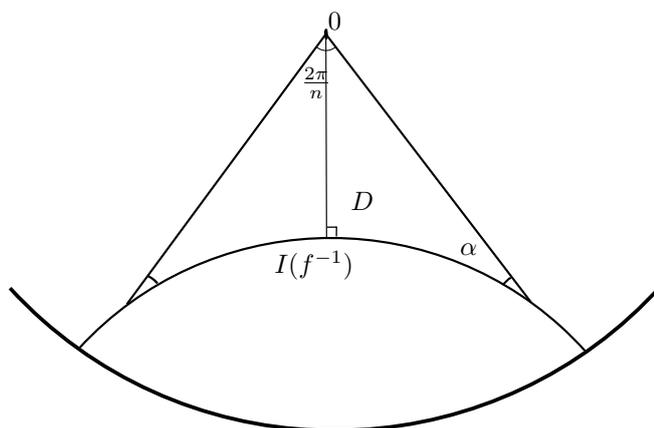
Con lo cual hemos probado *i*). Ahora para probar *ii*) usaremos la siguiente igualdad $|a| = \cosh \frac{1}{2}\rho(0, f(0))$, cuya prueba se encuentra en [1, p. 108], entonces calculamos

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(g)^2 - 4| + |\operatorname{tr}[f, g] - 2| &= 4(\cos^2(\pi/n) - 1) + 4|c|^2 \operatorname{sen}^2(\pi/n) \\ &= 4\left(\operatorname{sen}^2(\pi/n) + |c|^2 \operatorname{sen}^2(\pi/n)\right) \\ &= 4\operatorname{sen}^2(\pi/n)|a|^2 \\ &= 4\operatorname{sen}^2(\pi/n) \cosh^2 \frac{1}{2}\rho(0, f(0)) \geq 4. \end{aligned}$$

Ahora por último notamos que en el caso en el que D es acotada tenemos de la fórmula del ángulo de paralelismo que

$$\cosh \frac{1}{2}\rho(0, f(0)) \operatorname{sen}(\pi/n) = \cos \alpha < 1,$$

donde $\alpha \in (0, \pi/2)$, entonces al calcular la traza obtenemos desigualdades en el sentido opuesto, por lo tanto siguiendo el mismo procedimiento que antes para probar *i*) y *ii*), obtenemos que los grupos para los cuales D es acotada no cumplen las conclusiones del teorema.



Para finalizar con la tesis notaremos que la desigualdad

$$|tr(g)^2 - 4| + |tr[f, g] - 2| \geq 4, \quad (4.3)$$

dónde f y g son como en el teorema anterior. Tiene un significado geométrico importante, ya que $|tr(g)^2 - 4|$ es menor o igual a tres, si $ord(g) \geq 3$, de hecho $|tr(g)^2 - 4| \rightarrow 0$, cuando $ord(g)$ tiende a ∞ . Esto se verifica pues como g es elíptica, entonces

$$tr(g)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

donde $n = ord(g)$. Por lo tanto

$$|tr(g)^2 - 4| = 4\left|\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1\right|.$$

Así si n tiende a ∞ , tenemos que claramente $|tr(g)^2 - 4|$ tiende a cero, además por el comportamiento de $\cos x$, la sucesión es decreciente. Así si verificamos que $|tr(g)^2 - 4| \leq 3$ para $n = 3$, entonces de inmediato se verifica para toda $n \geq 3$.

Si $n = 3$, entonces $tr(g) = 2\cos(\pi/3) = 2(1/2) = 1$. Por lo tanto $|tr(g)^2 - 4| = 3$, que demuestra que si $n = 3$, se cumple la desigualdad y de esto se sigue para toda $n \geq 3$ (de hecho es fácil ver que si $n > 3$, la desigualdad es estricta). Por lo cual si suponemos en (4.3) que $ord(g) \geq 3$, obtenemos que

$$3 + |tr[f, g] - 2| \geq |tr(g)^2 - 4| + |tr[f, g] - 2| \geq 4.$$

Lo que implica que

$$|tr[f, g] - 2| \geq 1. \quad (4.4)$$

Esto es significativo desde el punto de vista geométrico, pues si utilizamos el teorema [1, teo. 7.39.2] que dice:

Teorema 4.0.20 *Sea g una transformación elíptica con punto fijo v y ángulo de rotación 2θ , donde $0 \leq \theta \leq \pi$. Sea h cualquier otra transformación que no fije a v , entonces $[g, h]$ es hiperbólica con longitud de traslación T que cumple que*

$$\sinh\left(\frac{T}{4}\right) = \sinh\frac{1}{2}\rho(v, h(v)).$$

Utilizamos también el hecho de que si φ es una transformación hiperbólica con longitud de traslación T , entonces

$$\frac{1}{2}|tr(\varphi)| = \cosh\left(\frac{T}{2}\right).$$

Estos dos hechos aunados a la desigualdad (4.4), nos dicen que $[f, g]$ es en general hiperbólica con una longitud de traslación no muy chica. De forma más específica, sustituyendo en (4.4) obtenemos que

$$\left|2\cosh\left(\frac{T}{2}\right) - 2\right| \geq 1 \Rightarrow \left|\cosh\left(\frac{T}{2}\right) - 1\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Lo cual por continuidad nos dice que la longitud de traslación no puede ser arbitrariamente pequeña.

Bibliografía

- [1] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [2] HOFFMAN, M. AND MARSDEN, J. E., *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Company, 1996.
- [3] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional-2a Edición-*, Las prensas de ciencias UNAM, 2015.
- [4] ROTMAN, J, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer, 1995.
- [5] RUDIN, W, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [6] SPIVAK, M *Cálculo Infinitesimal*, Editorial Reverté, 1992.
- [7] GROMOV M., *Hyperbolic Manifolds (according to Thurston and Jørgensen)*, Bourbaki Seminar. vol 1979/80. Lecture Notes in Math Springer Berlin-New York, 1981