UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

CAMPO DE CONOCIMIENTO: MATEMÁTICAS

INTERVENCIÓN DIDÁCTICA SOBRE LA DETERMINACIÓN DE LAS LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES EN EL CURSO DE MATEMÁTICAS DEL BACHILLERATO

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN

MEDIA SUPERIOR

PRESENTA:

LETICIA DEL CARMEN DE LA CRUZ MEJÍA

TUTOR PRINCIPAL: M. EN C. JUAN BAUTISTA RECIO ZUBIETA, FES ACATLÁN

DR. MIGUEL MERCADO MARTÍNEZ, CCH NAUCALPAN

DRA. MARÍA TERESA ALICIA SILVA Y ORTIZ, FES ACATLÁN

NAUCALPAN ESTADO DE MÉXICO, JUNIO 2016

Contenido

Introducción

El profesor de matemáticas en bachillerato es generalmente un profesional egresado de la carrera de Física, Matemáticas o Ingeniería, que se inicia en esta profesión usualmente sin experiencia, la cual va adquiriendo en el transcurso de su actividad. Su método de enseñanza es el aprendido, casi siempre, por imitación de sus profesores que sigue dominada por la cultura pedagógica tradicional.

Es necesario que los maestros trasciendan los propósitos exclusivamente disciplinares y apoyen de manera integral la formación de los jóvenes, y sobre todo intenten desarrollar un pensamiento formal en los adolescentes, es decir, capacidad de abstracción, plantear problemas, resolver problemas, analizar situaciones, hacer representaciones simbólicas, deducciones lógicas etc.

En esta tesis se presenta el diseño y aplicación de una Unidad Didáctica realizada sobre la problemática a la que se enfrentan algunos estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades para exponer argumentos que validen sus procesos de razonamiento y soluciones al resolver un problema matemático en temas de geometría asociados con el cálculo y medición de longitudes, áreas y volúmenes.

El trabajo se diseñó considerando el programa de matemáticas II del CCH y se partió de una propuesta de diseño de Unidad Didáctica elaborada por Sánchez y Valcárcel (1993), por considerar que dicha propuesta contiene los elementos importantes que debe incluir toda UD en ciencias, incluyendo matemáticas. La UD está dirigida a estudiantes que presentan edades entre 15 y 16 años y que se sabe tienen dificultades con las matemáticas en sus aspectos centrales como son la abstracción y la formalización a partir de procesos de justificación de la validez de las afirmaciones que se hacen de contenido matemático.

El trabajo se dirigió concretamente a estudiar el discurso argumentativo que realizan los alumnos para la justificación de procedimientos y resultados al resolver con lápiz y papel algunos problemas de geometría y a identificar algunas formas de argumentación detectadas. El análisis y discusión de resultados se realizó a partir de la descripción e identificación de algunas formas de prueba observados en las respuestas de los estudiantes, apoyados para la exposición de algunos casos significativos, haciendo inferencias y formulando las conclusiones pertinentes.

El trabajo que aquí se presenta consta de una introducción, cuatro capítulos y dos anexos. En el primer capítulo se desarrollan algunos elementos que justifican la necesidad de la realización de este trabajo de tesis así como el propósito central del trabajo. En el segundo, se describe el marco teórico del que se parte, para ello se considera el pensamiento del adolescente en esta etapa de desarrollo, así como los procesos cognitivos del aprendizaje y las concepciones de la enseñanza de las matemáticas.

El capítulo tres corresponde al marco metodológico que contiene un modelo para el desarrollo de la Unidad Didáctica y la metodología para analizar los resultados de las respuestas de los alumnos. La descripción del modelo de diseño de Unidades Didácticas de Sánchez y Valcárcel (1993) en la cual se describen cada una de las etapas propuestas por estos autores: análisis de contenido o científico, análisis didáctico, selección de objetivos, selección de estrategias didácticas y la selección de estrategias de evaluación. Así como también las posibles dificultades de llevar a la práctica esta propuesta didáctica de enfrentar al alumno a algunas argumentaciones o justificaciones de afirmaciones matemáticas.

El último capítulo corresponde al análisis e interpretación de algunos de los resultados de la aplicación de la Unidad con los alumnos en el aula así como de un examen que se les aplicó.

Finalmente se presenta en el Anexo I la Unidad Didáctica elaborada con el propósito de que pueda facilitarse la lectura para quien desee contar con una primera mirada hacia el producto obtenido.

1.-Justificación y propósito

A fin de contar con antecedentes relacionados con el propósito de esta tesis, se hizo la revisión de algunos trabajos en educación matemática en los que se aborda la problemática de la argumentación y enseñanza de las matemáticas y se encontró lo siguiente:

Larios O. (2003), en su trabajo con alumnos de bachillerato, explora la concepción de la demostración desde la Matemática misma para exponer razones por las que no es conveniente eliminarla de la formación matemática de los alumnos. Además, se muestra que la función y el sentido de ésta no es único, por lo que debe estar acorde al desarrollo cognitivo de los alumnos y a consideraciones epistemológicas. Se exhibe el hecho de que las conjeturas y las argumentaciones son una manera de aprender a construir demostraciones, presentando como ejemplo el concepto de unidad cognitiva de teoremas.

Ortiz (2006) aborda la discusión filosófica en torno al tema de la validez de la demostración, su importancia en la didáctica de la matemática y su papel como elemento transformador del pensamiento.

En otro trabajo, Larios, M. (2007) identifica y describe qué procesos de validación siguen alumnos de segundo y tercer grado de educación secundaria en México para legitimar proposiciones insertas en la resolución de problemas; también indaga como construyen el significado de lo que es comprobar, en los procesos de comunicación, en forma hablada y escrita, entre ellos y con el profesor.

Arellano (2013) describe un estudio de casos realizada en el periodo 2010-2012 sobre la problemática a la que se enfrentan los estudiantes de bachillerato para exponer argumentos que validen sus procesos de razonamiento y soluciones al resolver un problema matemático. El trabajo se dirigió concretamente a cubrir dos objetivos: Estudiar el discurso argumentativo que realizan los alumnos para la justificación de procedimientos y resultados al resolver con lápiz y papel algunos problemas de geometría euclidiana y categorizar los tipos de argumentos detectados.

Después de hacer una revisión de estos trabajos, vale la pena tomar en cuenta la sugerencia de Arellano, (2013) en desarrollar una estrategia de intervención didáctica orientada a favorecer o enfrentar al estudiante a pensar en formas de validación basadas en un razonamiento, argumentación o demostración.

Importancia del tema seleccionado para la elaboración de la Unidad Didáctica

Este tema de tesis es importante porque forma parte de uno de los tópicos a cubrir en el programa de matemáticas II del Colegio de Ciencias y Humanidades y adicionalmente está orientada de forma consistente con los propósitos que se marcan en el mismo, a saber:

> *Aplicar conocimientos algebraicos y geométricos adquiridos en unidades anteriores en la resolución de problemas sobre figuras y cuerpos que involucren exploraciones geométricas, deducciones y cálculos numéricos. Propiciar el desarrollo de la imaginación espacial.*

Los cuatro cursos de matemáticas abarcan los conocimientos básicos de cinco importantes ejes de desarrollo temático. Álgebra, Geometría Euclidiana, Trigonometría, Geometría Analítica y Funciones. A través de estos cursos, se brinda al alumno un amplio conjunto de conocimientos matemáticos. En los cuales se van recuperando conocimientos previos ya sea profundizando en los mismos o permitiendo acceder posteriormente a conocimientos más especializados.

De acuerdo con el programa de matemáticas II, en Geometría Euclidiana y particular en áreas y volúmenes se puede trabajar en "el análisis lógico de argumentos; construcción de razonamientos, planteamiento de conjeturas a partir de descubrir patrones de comportamiento", (CCH, 2003); Nuestra Unidad Didáctica está adaptada en este sentido.

No obstante que en los propósitos y la orientación de los programas se insiste que se trabajen aspectos relacionados con el pensamiento matemático a nivel elemental y que incluye la argumentación, validación o demostración, no existen materiales (libros, cuadernos de trabajo, entre otros) que se orienten en esa dirección para apoyar el trabajo de los profesores por ello se escogió esta temática y la problemática asociada con el cómo incidir en que los alumnos reconozcan la importancia de argumentar, validar o demostrar las afirmaciones que se hacen en matemáticas, en particular en geometría, que le dé una visión de las matemáticas menos operativa y memorística.

A fin de orientar la planificación de la Unidad y los aspectos relacionados con la validación y argumentación de afirmaciones matemáticas, que se quieren promover con los alumnos se plantean las siguientes preguntas:

1. ¿Se puede lograr que el alumno entienda la importancia de una demostración o al menos de una argumentación en matemáticas básicas?
2. ¿Se puede crear un ambiente propicio en el aula para ayudar al alumno a hacer demostraciones?
3. ¿Es posible elaborar una estrategia didáctica que permita mostrar cambios en la forma de justificar afirmaciones matemáticas en los estudiantes?
4. ¿Los alumnos están en posibilidad de procesar o dar seguimiento a argumentos relativamente elaborados como el cálculo del área del círculo usando un proceso de aproximación exhaustiva que lo lleve a contar con un primer acercamiento al concepto de límite?

Por todo lo anterior nos planteamos en este trabajo el siguiente:

PROPÓSITO

Diseñar una Unidad Didáctica sobre los temas de medición y cálculo de perímetros, áreas y volúmenes que incorpore elementos incipientes de argumentación y validación de afirmaciones matemáticas en el curso de Matemáticas II del Colegio de Ciencias y Humanidades

A continuación se exponen algunos elementos de carácter teórico y conceptual asociados con el aprendizaje de las matemáticas así como de las formas de pensar de los alumnos asociados con las matemáticas y con sus condiciones en la etapa de desarrollo en la que se encuentran, entre otras consideraciones.

2.- Marco teórico

Esta Unidad Didáctica se basó en el aprendizaje por descubrimiento guiado, propuesta por Ausubel, la estrategia didáctica consiste en un acercamiento progresivo de las ideas de los alumnos a los conceptos matemáticos, que no solo tenga la intención formativa en matemáticas, sino también una formación en el desarrollo habilidades del pensamiento.

2.1 El pensamiento del adolescente

En este apartado mencionaremos una serie de elementos generales que están presentes en el periodo de la adolescencia, así como el estado de evolución cognitiva en que se encuentra el pensamiento del adolescente basado en las teorías piagetianas. Esto es un apoyo para el docente en la labor cotidiano de su actividad, para conocer un poco como lograr un aprendizaje significativo y evaluar sus estrategias de enseñanza aprendizaje y modificarlas en caso necesario.

La adolescencia es una etapa de desarrollo del ser humano que sigue del periodo de la pubertad y aproximadamente hasta los 18 años, en esta etapa ocurren una serie de cambios físicos psicológicos y también en una serie de avances en el desarrollo cognitivo. Entre los 11 y 16 años, los individuos experimentan una serie de cambios físicos; en esta etapa ocurre un crecimiento en el tejido adiposo en las mujeres y en los hombres desciende, y se produce un aumento rápido en los aspectos generales y reproductivos. En estas transformaciones, surge en el adolescente una necesidad de asimilar y aceptar su nueva imagen corporal y capacidad motora y sexual.

Los adolescentes establecen una clara relación entre lo físico y la aceptación social, a una aprobación general de sus compañeros le atribuyen una buena dosis de atractivo físico. También se rigen por normas y preferencias del grupo de amigos al que pertenecen.

En esta edad el adolescente cree que sus ideas y teoría pueden tener un efecto en la modificación de la realidad volviéndolos irrealistas, incluso teniendo algunas acciones de carácter extravagante. En esta etapa tienden a creer que sus experiencias positivas y negativas son únicas, incomprensibles e incomunicables para otras personas, hasta llegar a sentirse incomprendidos.

También comienzan una vida afectiva fuera de la familia al margen de lo que hasta ahora había estado en el marco de una relación afectiva, se produce también un comportamiento regresivo como la idealización de la figura materna y paterna.

También se presenta una aceptación acrítica de grupos y pandillas debido a la incapacidad de reconocer e identificar posiciones contrarias a las suyas.

Lo que se refiere al desarrollo cognitivo, presenta implicaciones importantes en la capacidad de razonamiento deductivo e inductivo, así como de plantear hipótesis, comprobarlas y formular teorías. Hasta la pubertad los alumnos realizan procesos propios de las operaciones concretas, en las cuales presentan una confusión entre hipótesis y hechos y poca capacidad en identificar la posición de las acciones correctas de otras personas y que son contrarias a las de ellos. (Henao 1995)

En relación con aspectos cognitivos, Piaget describe principalmente cuatro estadios o fases de desarrollo: el sensoriomotor, el pensamiento preoperativo, estadio de las operaciones concretas y finalmente el pensamiento de operaciones formales. El pensamiento de las operaciones formales del adolescente surge como una consecuencia de un buen desarrollo desde que nace hasta que llega a considerarse como adulto. Este estadio es el que denota la madurez cognitiva de un individuo y algunas de sus características son:

Lo real es concebido como un subconjunto de lo posible.

Las personas que se encuentran en un estadio anterior, operaciones concretas, solo es capaz de pensar en los elementos de un problema tal y como se le presenta, puede pensar en situaciones posibles pero después de tanteos empíricos. Lo posible está subordinado a lo real. Con el pensamiento formal enfoca la solución de un problema invocando todas las situaciones y relaciones causales posibles entre sus elementos. Lo real está subordinado a lo posible.

Carácter hipotético deductivo

La persona somete a prueba varias hipótesis para ver si se confirman, y lo hace en forma simultánea o sucesiva y está verificación puede ser eliminación de hipótesis, construcción de nuevas hipótesis y verificación de las nuevas. Este procedimiento implica realizar un razonamiento deductivo. Los adolescentes logran descartar hipótesis particulares e incompletas para llegar a una hipótesis general que recoja todos los aspectos del fenómeno. Cuando llegan a una hipótesis general ellos saben o entienden que es verdadera en todos los términos y por tanto suficiente para explicar el problema planteado, y al entender que es correcta, general y verificable entonces es necesaria y se convierte en ley. Esto permite generalizar la ley a otros problemas similares. En este análisis se cumple un papel fundamental del llamado control de variables.

Carácter Proposicional

En el estadio anterior, las personas realizan las operaciones mentales sobre los datos de la realidad en cambio en las operaciones formales realizan la conversión de operaciones mentales en proposiciones y operan sobre ellas. Las operaciones formales son operaciones de segundo orden y lo que permite realizar este proceso es la lógica.

Consideramos que el profesor, para no ser solo un trasmisor de conocimientos técnicos, debe conocer también áreas como la inteligencia y el desarrollo cognitivo, ya que con ello podría probablemente plantearse más adecuadamente las estrategias y los medios de enseñanza y aprendizaje acordes con su experiencia sobre el conocimiento científico (Henao 1995).

El pensamiento del profesor

El trabajo del profesor de bachillerato juega un papel importante en el adolescente, pues el intercambio simbólico con su maestro, le permite realizar tareas y resolver

problemas que por sí mismo sería incapaz de resolver, que mediante un proceso paulatino pero constante le permite un desarrollo progresivo de competencias.
Estas ideas se incorporan en un contexto general que está enmarcado en el proyecto Institucional del Colegio de Ciencias y Humanidades. El docente pretende ofrecer en su asignatura, sus enseñanzas y se incorpore el conocimiento al pensamiento del alumno y les sirvan como instrumentos y herramientas en la resolución de problemas y no como memorizaciones que utilicen únicamente para aprobar exámenes.

El profesor continuamente toma decisiones en el contenido y la forma de impartir su clase en el aula, estas pueden tomar diferentes formas de acuerdo a la conceptualización de las matemáticas que comparta. Estos diferentes puntos de vista son trasmitidos a los estudiantes y contribuyen a la formación de sus propios conceptos de la naturaleza de las matemáticas.

Quizá muchos profesores no se cuestionan sobre la naturaleza de las matemáticas. Su trabajo diario no es controlado por la idea de validar cada paso con argumentos formales, sino que éste imparte su clase guiado por la intuición en la exploración de conceptos y sus interacciones, es decir, su proceder, en general, no es gobernado por una escuela de pensamiento.

2.2 Aprendizaje de las matemáticas

La teorías cognitivas del aprendizaje surgen como una respuesta a la interrogante de ¿Cómo el alumno puede construir el conocimiento que el profesor propone a partir de sus conocimientos espontáneos?, (Ortiz, F. 2001) algunos autores a los que haremos referencia son a Jean Piaget y David Ausubel.

En su práctica docente todo profesor parte, consciente o inconscientemente de una serie de concepciones generales, sobre los temas que le competen en su actividad cotidiana como son, los conceptos de aprendizaje, enseñanza, educación, evaluación entre otros. No obstante, para un profesor de bachillerato, es muy importante contar con una visión general de los diferentes enfoques en un área en la que se desarrolla la psicología educativa. Dicha visión le permitirá ubicar los diferentes puntos de vista desde los cuales se aborda la problemática del aprendizaje/enseñanza en general, así como situar de una forma más clara la compleja problemática asociada con la actividad docente.

Considerando lo anterior, a continuación se resumen las ideas que aportan algunos autores aún vigentes que han contribuido en lo que se ha dado en llamar corrientes “constructivistas” de enseñanza-aprendizaje (Díaz y Hernández, 2002). De acuerdo con las condiciones en las que se desarrolla el trabajo de los profesores, puede ocurrir que alguna de esas corrientes domine sobre otros, en la práctica cotidiana de los profesores.

2.2.1 David Ausubel y el aprendizaje significativo

Este enfoque, ha sido llamado también del Procesamiento Humano de la Información (PHI). Dentro de las primeras aplicaciones debemos considerar a dos autores quienes, sin duda, son los pilares de una serie de propuestas que se han prolongado hasta la actualidad: J. Bruner [1] (1988), teórico de la cognición (ha tratado temas como pensamiento, percepción, lenguaje, etc.), y por otro lado, el no menos importante D. P. Ausubel[2] (1972), quien introduce la importante noción de aprendizaje significativo y la orientación de la investigación en el estudio de las preconcepciones.

Bruner es uno de los psicólogos cognitivos de la educación con mayor trayectoria, cuya obra causó un fuerte impacto en los sesenta y parte de los setenta en Estados Unidos, con sus propuestas del aprendizaje por descubrimiento. Ausubel por su parte, durante la década de los sesenta, elaboró la teoría del aprendizaje significativo y fue uno de los teóricos que mayor inquietud ha demostrado por la psicología educativa y por el estudio de los problemas educativos en contextos escolares. Además de la obra de estos dos

---

[1] **Bruner J,(1988);.citado por Hernández(1998)**
[2] **Ausubel D.P. (1972) ;.Citado por Hernández(1998)**

clásicos, aún vigentes, se desarrolló un gran caudal de investigaciones y experiencias que han desembocado en la configuración de la llamada psicología instruccional.
Este paradigma, concibe como fundamental enseñar a los alumnos habilidades de aprender a aprender y a pensar en forma eficiente, independientemente del contexto instruccional. Considera al alumno como un procesador activo de información y al docente, como un guía interesado en enseñarle de manera efectiva conocimientos (aprendizaje significativo), habilidades cognitivas, metacognitivas[3] y autorregulatorias, siempre a partir del conocimiento previo del alumno y sus intereses. Para ello, el maestro puede utilizar distintos tipos de estrategias instruccionales, como por ejemplo: los preinterrogantes y preguntas intercaladas, los organizadores anticipados, los mapas conceptuales y redes semánticas, los resúmenes y las analogías; con el fin de contribuir eficazmente en el aprendizaje significativo de los alumnos (Díaz y Hernández, 2002).

David Ausubel estudia el aprendizaje que se da en un contexto educativo. Su teoría se basa en los procesos de enseñanza aprendizaje del conocimiento científico a partir de los conceptos formados en la vida cotidiana del alumno, y esto lo logra por medio de la instrucción, es decir, acercando los conocimientos cotidianos con conocimiento verdadero.
Ausubel considera que en el aula ocurren diferentes tipos de aprendizaje, y los ubica en dos dimensiones:

a) La primera dimensión se conforma en torno al tipo de aprendizaje realizado por el alumno (forma en que incorpora la nueva información a su esquema cognitivo).
b) La segunda dimensión es el tipo de estrategia o metodología de la enseñanza que se sigue.

---

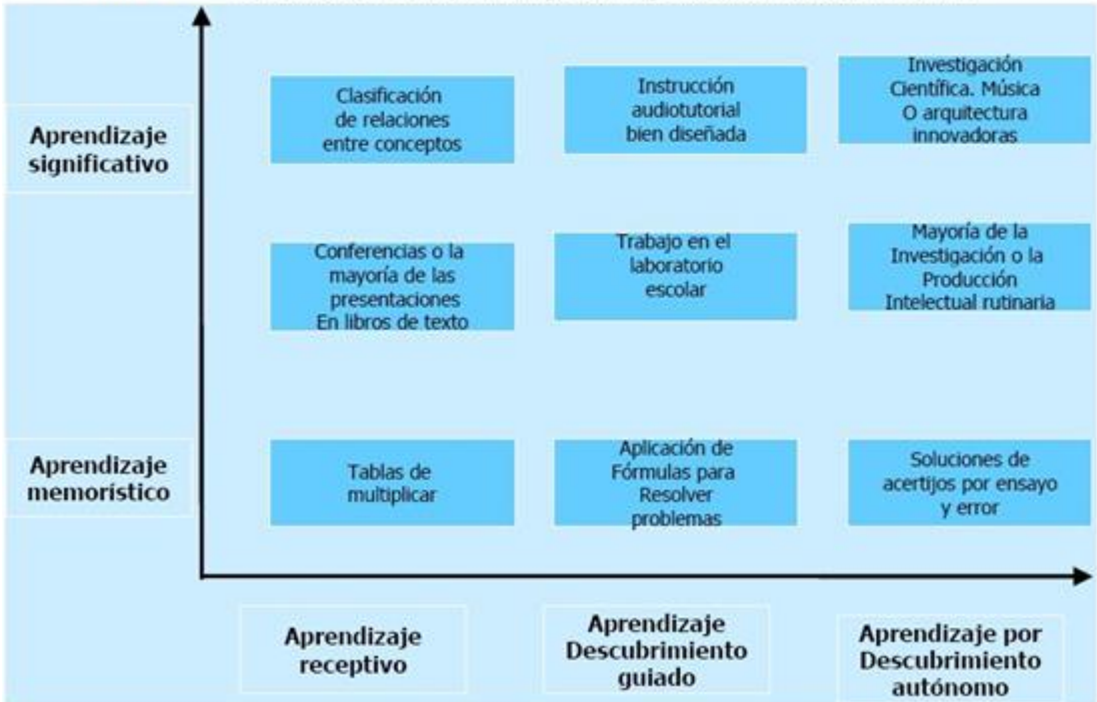
[3] Entendemos por Metacognición la capacidad que tenemos de autorregular el propio aprendizaje, es decir de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia, transferir todo ello a una nueva actuación. Entre los variados aspectos de la metacognición, podemos destacar los siguientes: 1. La metacognición se refiere al conocimiento, concientización, control y naturaleza de los procesos de aprendizaje. 2. El aprendizaje metacognitivo puede ser desarrollado mediante experiencias de aprendizaje adecuadas. 3. Cada persona tiene, de alguna manera, puntos de vista metacognitivos, algunas veces en forma inconsciente.

En la primera dimensión se caracteriza por dos modalidades de aprendizaje: el memorístico y el significativo; la segunda dimensión con el aprendizaje por recepción y por descubrimiento.

El aprendizaje memorístico es al pie de la letra, como pueden ser las tablas de multiplicar. El aprendizaje significativo, incorpora los nuevos conocimientos en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos; pero también es necesario que el alumno se interese por aprender lo que se le está mostrando.

El aprendizaje por recepción es la adquisición de la información ya dada, que el alumno internaliza, este aprendizaje puede ser memorístico o significativo. El aprendizaje por descubrimiento se caracteriza porque el contenido de la información que se va a aprender no se presenta en su forma final; más bien, debe ser descubierta por el alumno para que después la aprenda. (Cuadro 1).

Cuadro 1 Dimensiones del aprendizaje con algunas actividades humanas



Fuente: Díaz y Hernández, 2004.

2.2.2 Jean Piaget y la Teoría genética

Este paradigma se desarrolla a partir de las investigaciones de Jean Piaget (1896-1980), aunque no sin presentar dificultades en su aplicación al campo educativo, ya que originalmente Piaget realiza sus investigaciones,

dirigidas a construir una teoría del conocimiento y son retomadas por algunos investigadores al aplicarlas en diversas formas a la enseñanza. En la teoría de Piaget, el desarrollo intelectual está claramente relacionado con el desarrollo biológico. El desarrollo intelectual es necesariamente lento y también esencialmente cualitativo: la evolución de la inteligencia, supone la aparición progresiva de diferentes etapas[4] que se diferencia entre sí por la construcción de esquemas cualitativamente diferentes.

[4] De acuerdo con Piaget, las etapas del desarrollo cognitivo son; etapa sensomotora (de los cero hasta los dos años aproximadamente), etapa de las operaciones concretas que se divide en dos subetapas; preoperatorio (de 2 a 8 años) y la consolidación de las operaciones concretas (de 8 a 13 años) y por último las operaciones formales. Esta división en etapas no se

La teoría de Piaget descubre los estadios de desarrollo cognitivo desde la infancia a la adolescencia: cómo las estructuras psicológicas se desarrollan a partir de los reflejos innatos, se organizan durante la infancia en esquemas de conducta, se internalizan durante el segundo año de vida como modelos de pensamiento, y se desarrollan durante la infancia y la adolescencia en complejas estructuras intelectuales que caracterizan la vida adulta.

En este paradigma (que también se le conoce como "constructivista cognitivo") se propone que los alumnos son creadores y constructores de sus propios conocimientos y destrezas. Esta consideración supone, interrogarse acerca de cómo llegan a construir esos conocimientos y destrezas. Al respecto señalan, *que son las actividades y los recursos que se les presentan los que hacen que trabaje la mente del alumno, pero que para que dicha mente trabaje es imprescindible que el alumno decida interpretar y explicar sus experiencias*. Pues bien, la consecuencia de esa acción interpretativa del alumnado es la creación y construcción de sus conocimientos y destrezas y precisamente esa reestructuración cognitiva de sus concepciones es el aprendizaje.

En la actualidad la teoría de Piaget ha recibido importantes críticas y se han puesto en tela de juicio desde sus métodos de investigación, hasta la idea de universalidad de las etapas, no obstante la obra de Piaget ha representado una guía importante para otras propuestas de investigación y ha tenido un fuerte impacto a nivel educativo. Entre sus principales aportaciones a la educación se encuentran las ideas de que:

- El niño o adolescente debe construir activamente el conocimiento.
- Los educadores deben ayudarle a aprender a aprender.
- Las actividades de aprendizaje deben adecuarse al nivel de desarrollo conceptual
- La interacción con los compañeros contribuye al desarrollo cognoscitivo.

La teoría de Piaget, pone de relieve la función del profesor en el proceso de aprendizaje como organizador, colaborador estimulador y guía. En este paradigma se elaboran una serie de conceptos importantes que le dan cuerpo a la teoría como son:

---

conserva actualmente, en particular la de operaciones formales, que de acuerdo con Carretero, (1997), puede abarcar en su inicio edades mayores.

inteligencia, conflicto cognitivo, esquema, acomodación, asimilación, equilibración[5], entre otros.

Algunas ideas sobre el Constructivismo

A pesar de que los autores que participan del desarrollo de los paradigmas presentados en el apartado anterior, se sitúan en encuadres teóricos distintos, comparten el principio de la importancia de la actividad constructiva del alumno en la realización de los aprendizajes escolares. Así, de la convergencia de las diversas aportaciones de los paradigmas mencionados, entre otros, surge lo que se ha dado en llamar la concepción constructivista del aprendizaje escolar y la intervención educativa.

---

[5] **La inteligencia.** En el modelo Piagetiano, una de las ideas nucleares es el concepto de inteligencia como proceso de naturaleza biológica. Para él el ser humano es un organismo vivo que llega al mundo con una herencia biológica, que afecta a la inteligencia. Por una parte, las estructuras biológicas limitan aquello que podemos percibir, y por otra hacen posible el progreso intelectual.

Esquema. El concepto de esquema aparece en la obra de Piaget en relación con el tipo de organización cognitiva que, necesariamente implica la asimilación: los objetos externos son siempre asimilados a algo, a un esquema mental, a una estructura mental organizada. Para Piaget, un esquema es una estructura mental determinada que puede ser transferida y generalizada. Un esquema puede producirse en muchos niveles distintos de abstracción. Uno de los primeros esquemas es el del objeto permanente, que permite al niño responder a objetos que no están presentes sensorialmente. Más tarde el niño consigue el esquema de una clase de objetos, lo que le permite agruparlos en clases y ver la relación que tienen los miembros de una clase con los de otras.

La **asimilación** se refiere al modo en que un organismo se enfrenta a un estímulo del entorno en términos de organización actual, mientras que la **acomodación** implica una modificación de la organización actual en respuesta a las demandas del medio. Mediante la asimilación y la acomodación vamos reestructurando cognitivamente nuestro aprendizaje a lo largo del desarrollo (reestructuración cognitiva). Aunque asimilación y acomodación son funciones invariantes en el sentido de estar presentes a lo largo de todo el proceso evolutivo, la relación entre ellas es cambiante de modo que la evolución intelectual es la evolución de esta relación asimilación / acomodación.

Para Piaget el proceso de **equilibración** entre asimilación y acomodación se establece en tres niveles sucesivamente más complejos: 1. El equilibrio se establece entre los esquemas del sujeto y los acontecimientos externos.2. El equilibrio se establece entre los propios esquemas del sujeto 3. El equilibrio se traduce en una integración jerárquica de esquemas diferenciados. Cuando el equilibrio se rompe se genera lo que se llama **conflicto cognitivo**

En relación con lo que podemos entender por “constructivismo”, Carretero (1997) lo plantea en los siguientes términos:

> *Básicamente puede decirse que es la idea que mantiene que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia, que se va produciendo día a día, como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción? Fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que le rodea.*

La postura educativa que subyace a estos planteamientos indica que la institución educativa debe promover el doble proceso, de *socialización* y de *individualización,* permitiendo a los educandos construir una identidad personal en el marco de un contexto social y cultural determinado. Lo anterior implica que "la finalidad última de la intervención pedagógica, es desarrollar en el alumno la capacidad de realizar aprendizajes significativos por sí solo, en una amplia gama de situaciones y circunstancias (aprender a aprender)" (Coll, 1988)[6].

En el enfoque constructivista, tratando de conjuntar el cómo y el qué de la enseñanza, la idea central se resume en la siguiente frase:

> *“Enseñar a pensar y actuar sobre contenidos significativos y contextuados”*

De acuerdo con Coll (1990)[7] la concepción constructivista se organiza en torno a tres ideas fundamentales:

---

[6]Coll,(1988) Citado por Díaz y Hernández (2002)
[7] Coll. (1990) Citado por Díaz y Hernández(2002)

1. El alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje. Él es quien construye (o más bien reconstruye) los saberes de su grupo cultural, y éste puede ser un sujeto activo cuando manipula, explora, descubre o inventa, incluso cuando lee o escucha la exposición de los otros.

2. La actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que poseen ya un grado considerable de elaboración. Esto quiere decir que el alumno no tiene en todo momento que *descubrir o inventar,* en un sentido literal todo el conocimiento escolar. Debido a que el conocimiento que se enseña en las instituciones escolares, es en realidad el resultado de un proceso de construcción a nivel social, los alumnos y profesores encontrarán ya elaborados y definidos una buena parte de los contenidos curriculares.

En este sentido es que decimos, que el alumno más bien reconstruye un conocimiento preexistente en la sociedad, pero lo reconstruye en el plano personal desde el momento que se acerca en forma progresiva y comprehensiva a lo que significan y representan los contenidos curriculares como saberes culturales.

3. La función del docente es conectar los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo culturalmente organizado. Esto implica que la función del profesor, no se limita a crear condiciones óptimas para que el alumno despliegue una actividad mental constructiva, sino que deba orientar y guiar explícita y deliberadamente dicha actividad.

El aprendizaje por descubrimiento

La educación es un medio que ayuda al desarrollo de los individuos, no crea habilidades en el educando, sino que favorece su desenvolvimiento. En el campo educativo se consideran diferentes métodos para favorecer distintos tipos de aprendizaje, según la teoría que se considere como fundamento, la diferenciación de los tipos de aprendizaje, considera diferentes procesos: el aprendizaje repetitivo o memorístico, y el aprendizaje significativo, bien sea por recepción (Ausubel, 1990) o por descubrimiento (Bruner, 1972).

Bruner plantea el concepto de aprendizaje por descubrimiento para alcanzar un aprendizaje significativo, sustentado en que a través del mismo los maestros pueden ofrecer a los estudiantes más oportunidades de aprender por sí mismos. Así pues, el aprendizaje por descubrimiento, es el aprendizaje en el que los estudiantes construyen por si mismos sus propios conocimientos, en contraste con la enseñanza tradicional o transmisora del conocimiento, donde el docente pretende que la información sea simplemente recibida por los estudiantes.

Según Pozo y Gómez, (1998), el aprendizaje por descubrimiento es especialmente efectivo en la enseñanza de las ciencias, según resultados reportados en diversos estudios, en los cuales los estudiantes, que emplean estrategias que favorecen el aprendizaje por descubrimiento, obtienen mejores resultados que aquellos donde enseñanza se basa en la transmisión de información.

Una de las características más relevantes del aprendizaje por descubrimiento, es que el contenido a ser aprendido, no se facilita en su forma final, sino que tiene que ser descubierto por el sujeto, lo que requiere un rol activo de parte del estudiante, que le permitirá aplicar lo aprendido a situaciones nuevas. Existen distintas formas de descubrimiento, desde un descubrimiento "puro", casi autónomo, hasta un descubrimiento guiado, orientado por el profesor. En el contexto de los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas, se utiliza mayoritariamente este último.

Los procedimientos de la enseñanza por descubrimiento guiada, implica proporcionar a los estudiantes oportunidades para manipular activamente objetos y transformarlos por la acción directa, así como actividades para buscar, explorar y analizar. Estas oportunidades, no solo incrementan el conocimiento de los estudiantes acerca del tema, sino que estimulan su curiosidad y los ayudan a desarrollar estrategias para aprender a aprender, descubrir el conocimiento, en otras situaciones (Eleizalde, 2010). Considerando que no hay una real comprensión, hasta que el alumno aplique dicho conocimiento en otras situaciones, el aprender implica describir e interpretar la situación, establecer relaciones entre los factores relevantes, seleccionar, aplicar reglas, métodos, y construir sus propias conclusiones, por supuesto siempre con la ayuda y la guía del profesor.

2.3 Enseñanza de las Matemáticas

La educación matemática es una forma de aproximarse a la forma de proceder del matemático; la lógica, la inducción, la deducción, la resolución de problemas etc.
En los 80s hubo un reconocimiento general de que se había exagerado considerablemente en las tendencias hacia la matemática moderna en lo que respecta al énfasis en la estructura abstracta de la matemática. Es necesario cuidar y cultivar la intuición en general, la manipulación operativa del espacio y de los mismos símbolos. Es preciso no abandonar la comprensión e inteligencia de lo que se hace, por supuesto, pero no debemos permitir que este esfuerzo por entender deje pasar a segundo plano los contenidos intuitivos de nuestra mente en su acercamiento a los objetos matemáticos.

Si la matemática es una ciencia que participa mucho más de lo que hasta ahora se pensaba del carácter de empírica, sobre todo en su invención, que es mucho más interesante que su construcción formal, es necesario que la introducción en ella se realice teniendo en cuenta mucho más intensamente la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge. La formalización rigurosa de las experiencias iniciales corresponde a un estadio posterior (De Guzmán).

A cada fase de desarrollo mental, como a cada etapa histórica o a cada nivel científico, le corresponde su propio rigor. Para entender esta interacción fecunda entre la realidad y la matemática es necesario acudir, por una parte, a la propia historia de la matemática, que nos desvela ese proceso de emergencia de nuestra matemática en el tiempo, y por otra parte, a las aplicaciones de la matemática, que nos hacen patentes la fecundidad y potencia de esta ciencia.

Nuestra enseñanza ideal debería tratar de reflejar este carácter profundamente humano de la matemática, ganando con ello en comprensión, dinamismo, interés y atractivo.

2.3.1 La enseñanza de las matemáticas: centrada en el pensamiento matemático.

La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Una de las tendencias generales más difundidas hoy consiste en el hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más bien que en la mera transferencia de contenidos. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones, en buena parte a los procesos mentales de resolución de problemas.

Por otra parte, existe la conciencia, cada vez más evidente, de la rapidez con la que, por razones muy diversas, se va haciendo necesario traspasar la prioridad de la enseñanza de unos contenidos a otros. En la situación de continua transformación de la civilización en la que nos encontramos, es claro que lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros jóvenes es el conocimiento de procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con rapidez.

En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente cambiante vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten ideas inertes que no son capaces de combinarse con otras para formar cuerpos de conocimiento capaces de abordar los problemas del presente.

En esta dirección se encauzan los intensos esfuerzos por transmitir estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas en general, por estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas, más bien que la mera transmisión de recetas adecuadas en cada materia.

2.3.2 La importancia de la motivación.

La historia de la matemática nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos ayuda a entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés. En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede ser útil conocer, a cualquier nivel, el camino que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas.

Consideramos que la búsqueda de la solución de problemas de matemáticas con la guía del profesor, es un objetivo alcanzable en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la detección de técnicas concretas, de estrategias útiles de pensamiento en el campo en cuestión y de su transmisión a los estudiantes.

No es posible esperar que nuestros alumnos descubran en un par de semanas lo que la humanidad elaboró tal vez a lo largo de varios siglos de trabajo intenso de mentes muy brillantes. La actividad intelectual es tan importante como la actividad física; así el aprender matemática orientada como un saber hacer autónomo bajo una guía adecuada, es un ejercicio atrayente.

El gusto por el descubrimiento en matemáticas es posible y fuertemente motivador para superar otros aspectos rutinarios necesarios de su aprendizaje, la apreciación de las posibles aplicaciones del pensamiento matemático en las ciencias y en las tecnologías actuales puede llenar de asombro y placer a muchas personas más orientadas hacia la práctica o bien por los impactos que la matemática ha ejercido sobre la historia y filosofía del hombre, o ante la biografía de tal o cual matemático famoso.

Al mismo tiempo, se busca cambiar la imagen de la matemática escolar como un saber acabado, aburrido, de estructura rígida, sin contradicciones y secuencial, en donde un concepto es prerrequisito del siguiente, en el que lo importante es establecer leyes o algoritmos para aplicar y solucionar problemas similares, dejando poca opción de crear, y donde las satisfacciones se presentan solo cuando se coincide en los resultados (Malagón, 1988)[8].

Desde el punto de vista didáctico, es importante considerar que como la mayoría de los adolescentes al comenzar al estadio de las operaciones formales se encuentra más interesado en su apariencia física y sus relaciones sociales que por cualquier otro aspecto, se debe pensar en utilizar estrategias motivadoras que les permitan vivir y sentir el aprendizaje, para lograr que ellos construyan sus propios conceptos, y los apliquen en diferentes campos. Esto último, basado siempre en la premisa que aprender puede ser placentero y no algo que se nos dé como obligación por cumplir en un nivel escolar, como lo es en los primeros años de nuestra vida, es decir que se dé la posibilidad de descubrir nuevas cosas y nuevos mundos.

2.3.3 Recuperación del pensamiento geométrico y de la intuición espacial.

Es necesario desde un punto de vista didáctico, científico, histórico, recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática, no ya sólo en lo que se refiere a la geometría sino a algo mucho más básico y profundo que es el cultivo de aquellas porciones de la matemática que provienen de y tratan de estimular la capacidad del hombre para explorar racionalmente el espacio físico en que vive, la figura, la forma física.

La crisis de los fundamentos de principio de siglo XX orientó al matemático hacia el formalismo, hacia un predominio del rigor por sobre la intuición en la construcción de su ciencia. Bajo esta óptica se consideró que lo mismo debería ocurrir en el caso de la transmisión de conocimientos, desgraciadamente las consecuencias para la enseñanza de las matemáticas en general fueron malas, pero especialmente para el pensamiento geométrico.

Parte de las dificultades al parecer se originan en una interpretación no tan clara de los trabajos de Piaget y por ello en alguna etapa se pretendía que los estudiantes

---

[8] **Malagón, 1988 Citado por Uribe Garzón 2014.**

trabajaran de forma teórica la lógica y los conjuntos como parte de aspectos formales y de apoyo al desarrollo del pensamiento de los alumnos, lo cual no ocurría.
El pensamiento geométrico como un apoyo al desarrollo de la intuición espacial es una fuente importante de verdaderos problemas y resultados interesantes abordables con un número pequeño de herramientas y accesibles a los alumnos.
El siglo XIX fue el siglo de oro del desarrollo de la geometría elemental, que vivió ajena al desarrollo de creaciones muy interesantes de la matemática superior tales como la geometría descriptiva, geometría proyectiva, geometrías no euclídeas, entre otras. Como rasgos comunes a todos estos desarrollos se pueden señalar: una fuerte relación con la intuición espacial, una cierta componente de juego y algo de rechazo a desarrollos analíticos excesivos.

De estas materias, cuya profundidad se va manifestando cada vez más claramente, no permitimos jugar a quien más le gusta y a quien más se beneficiaría con el juego matemático.

> *La necesidad de una vuelta del espíritu geométrico a la enseñanza matemática es algo en lo que ya todo el mundo parece estar de acuerdo. Sin embargo, aún no es muy claro cómo se debe llevar a cabo. Es necesario evitar llegar a los extremos en que se incurrió, por ejemplo, con la geometría del triángulo, tan en boga a finales del siglo XIX. También hay que evitar una introducción rigurosamente sostenida de una geometría axiomática. Posiblemente una orientación sana podría consistir en el establecimiento de una base de operaciones a través de unos cuantos principios intuitivamente obvios sobre los que se podrían levantar desarrollos locales interesantes de la geometría métrica clásica, elegidos por su belleza y profundidad (De Guzmán).*

2.3.4 La resolución de problemas en la enseñanza de la matemática.

Existe un consenso en aceptar la idea de que el objetivo primario de la educación matemática debería ser que los alumnos aprendan matemática a partir de la resolución de problemas. Sin embargo, dadas las múltiples interpretaciones del término, este objetivo difícilmente es claro. El término *resolución de problemas* ha sido usado con diversos significados, que van desde trabajar con ejercicios rutinarios hasta hacer matemática profesionalmente; se ha convertido en un lema que acompañó diferentes concepciones sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática y por qué debemos enseñar matemática en general y resolución de problemas en particular.
Se describe brevemente a continuación algunas formas de enfocar la resolución de problemas de acuerdo con Vilanova (2015):

Resolver problemas como contexto.

Desde esta concepción, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando cinco roles principales:

• Como una justificación para enseñar matemática: al menos algunos problemas relacionados con experiencias de la vida cotidiana son incluidos en la enseñanza para mostrar el valor de la matemática.

• Para proveer especial motivación a ciertos temas: los problemas son frecuentemente usados para introducir temas, con el convencimiento implícito o explícito de que favorecerán el aprendizaje de un determinado contenido.

• Como actividad recreativa: muestran que la matemática puede ser “divertida” y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.

• Como medio para desarrollar nuevas habilidades: se cree que, cuidadosamente secuenciados, los problemas pueden proporcionar a los estudiantes nuevas habilidades y proveer el contexto para discusiones relacionadas con algún tema.

• Como práctica: la mayoría de las tareas matemáticas en la escuela caen en esta categoría. Se muestra una técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas de práctica hasta que se ha dominado la técnica.

Sin embargo, en cualquiera de estas cinco formas, los problemas son usados como medios para algunas de las metas señaladas arriba. Esto es, la resolución de problemas no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitador del logro de otros objetivos y tiene una interpretación mínima: resolver las tareas que han sido propuestas.

Resolver problemas como habilidad.

La mayoría de los desarrollos curriculares que ha habido bajo el término resolución de problemas a partir de la década de los 80 son de este tipo. La resolución de problemas es frecuentemente vista como una de tantas habilidades a ser enseñadas en el curriculum. Esto es, resolver problemas no rutinarios es caracterizado como una habilidad de nivel superior, a ser adquirida luego de haber resuelto problemas rutinarios (habilidad que a su vez, es adquirida a partir del aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas básicas).

Resolver problemas es "hacer matemática".

Hay un punto de vista particularmente matemático acerca del rol que los problemas juegan en la vida de aquellos que hacen matemática. Consiste en creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones.

El matemático más conocido que sostiene esta idea de la actividad matemática es Polya. Nos hemos familiarizado con su trabajo a través del libro “Como plantear y resolver problemas” (1996), en el cual introduce el término “heurística” para describir el arte de la resolución de problemas, concepto que desarrolla luego en otras obras de la misma orientación.

Para Polya, la pedagogía y la epistemología de la matemática están estrechamente relacionadas y considera que los estudiantes tienen que adquirir el sentido de la matemática como una actividad; es decir, sus experiencias con la matemática deben ser consistentes con la forma en que la matemática es hecha.

La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

2.3.5 La enseñanza de la argumentación en matemáticas.

Es un hecho que nuestros bachilleres no saben argumentar. Esto es un gran problema, y no solo para los profesores, sino para toda la sociedad en general. Es necesario que el bachiller aprenda a argumentar, de lo contrario estará condenado a aceptar lo que le digan; es claro que la falta de una fundamentación argumentativa tiene implicaciones políticas, sociales y económicas, porque quien no sabe argumentar es, sencillamente, objeto de dominación. En este nivel escolar, se presenta una oportunidad importante en la enseñanza de las matemáticas para promover esta habilidad que puede desarrollarse al abordar temas de geometría como pretexto y no como fin último.

El papel de las demostraciones en el aprendizaje

Las demostraciones ayudan a relacionar la teoría y el mundo físico real, desarrollan su capacidad de observación, aclaran su comprensión de conceptos, los ayudan a conocer el mundo físico real, les afianzan lo aprendido en la clase teórica, les estimula su interés por los conceptos, aumentan su confianza en la teoría y ayudan a definir su interés vocacional.

Larios (2003) plantea en relación con la demostración en matemáticas, “Más que nada, la demostración en la ciencia matemática cumple un papel fundamental y epistemológicamente indispensable. En efecto, este método no es otra cosa que el método de validación del conocimiento científico producido en una ciencia en particular: la Matemática.”

Nápoles (2004), afirma “la Matemática debe ser considerada como una clase de actividad mental, una construcción social que encierra conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados están sometidos a cambios revolucionarios y cuya validez, por tanto, puede ser juzgada con relación a un enclave social y cultural, contrario a la visión absolutista (platónica) del conocimiento matemático”. También señala que “La llamada –no unánimemente ni mucho menos- «teoría» de la argumentación es hoy en realidad un campo de estudio no bien definido, donde se entrecruzan motivos disímiles (desde lógicos y metodológicos hasta retóricos y filosóficos) y programas varios (discursivos, cognitivos, expertos)...”

En relación con el aprendizaje de la demostración matemática Martínez (1999) [9]expresa: “la argumentación y la demostración matemática- como un tipo especial de argumentación- adquieren connotaciones particulares en distintos contextos institucionales en donde se pone en juego. El estudiante de matemática debe aprender en el seno de la clase de matemáticas las características notacionales, conceptuales y fenomenológicas de la demostración. Pero cada estudiante es miembro -y está sujeto, por tanto a las influencias- de distintos contextos institucionales: particularmente no puede evitar participar como ciudadano en la vida cotidiana y emplear todos los recursos característicos del razonamiento informal; es también alumno de las clases impartidas sobre ciencias experimentales, donde es inducido a pensar en términos empíricos e inductivos; en las clases de matemáticas recibe, por otra parte, diferentes modelos de demostración matemática”

La influencia de estos diferentes modos de razonar condiciona su comprensión y dominio de la demostración matemática. La manera particular de interactuar esos distintos modos de argumentación en las clases de matemáticas precisaría diseñar investigaciones pormenorizadas en las que se debe considerar el ejemplo aislado, la analogía y la metáfora, entre otros procedimientos no deductivos, como herramientas de validación y como demostración en la clase de matemáticas.

Godino y Recio (2001), en el tratamiento dentro del contexto de la lógica y fundamentos de las matemáticas citan a Poincaré (1902): “¿Cuál es la naturaleza del razonamiento

[9] Recio M.(1999); citado por Godino D. (2001).

matemático? ¿Es realmente deductivo como ordinariamente se cree? Un análisis profundo nos muestra que no es así; que participa en una cierta medida de la naturaleza del razonamiento inductivo, y que por eso es fecundo". También citan más adelante, cuando abordan los significados personales de la prueba, a Polya (1944): "Las matemáticas presentadas con rigor, son una ciencia sistemática, deductiva, pero las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva".

El concepto de una prueba no sólo como una verificación formal de un resultado, sino como un argumento convincente, como un medio de comunicación, ha adquirido mayor importancia últimamente sobre todo vinculado a ciertos problemas de Educación Matemática. Así, se prefieren en ocasiones pruebas que expliquen en vez de pruebas que sólo "prueben". Tanto las pruebas que prueban como las pruebas que explican son válidas. Han adquirido relevancia en los últimos tiempos incluso, las llamadas "pruebas sin palabras", donde las representaciones geométricas vendrían a jugar el papel de las explicaciones necesarias, una pequeña muestra es de Flores (1993),

3.- Marco metodológico

En este capítulo se presenta el modelo que se siguió para el diseño de la Unidad Didáctica, y el tipo de investigación que se llevó a cabo para describir el trabajo de los alumnos.

3.1 Un modelo para el diseño de una unidad didáctica

Para el diseño de la Unidad Didáctica, se tomó como referencia básica la propuesta de Sánchez y Valcárcel (1993). En esta propuesta, se tomaron en cuenta los siguientes elementos: Análisis científico, Análisis didáctico, Selección de objetivos, Selección de estrategias didácticas y Selección de estrategias de evaluación.

3.1.1 El análisis científico

El análisis científico considera importante la estructuración de los contenidos de enseñanza y la actualización científica del profesor. Por diversas consideraciones el autor considera tres puntos centrales: a) la formación del profesor de matemáticas; b) el profesor es el mediador del conocimiento, o el que va acercando el conocimiento del alumno al conocimiento científico. Es el que toma la decisión de cual conocimiento es prioritario para compartir; c) los problemas relacionados al aprendizaje están condicionados en gran medida por el contenido de la enseñanza, parece lógico que el profesor conozca y reflexione sobre el significado y relaciones de los conceptos implicados, y pueda dirigir ahí su atención en los aprendizajes de los alumnos.

Regresando al objetivo del análisis científico: la estructuración de los contenidos y la actualización científica del profesor.

La selección del contenido de la enseñanza ha de ser coherente con las concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas, y esta última por su epistemología, podría ser algunas veces por intuición, y a veces por formalismos lógicos. Por otra parte la diferenciación de los contenidos de la enseñanza en conceptual, actitudinal y procedimental son por motivos pedagógicos, no debe olvidarse que el conocimiento científico es único y las estrategias de aprendizaje que adoptemos deben integrar los tres contenidos.

La medición de longitudes, áreas y volúmenes

El estudio del tema de las mediciones relacionada con las longitudes, áreas y volúmenes, no requiere ser justificada ya que es una necesidad en la mayoría de las actividades técnicas, científicas e incluso cotidianas. No obstante es importante no sólo contar con conocimientos sobre las características de la medición de longitudes áreas y volúmenes, sino también tener la seguridad de la validez de dicho conocimiento. Para ello podemos invocar una definición de medir como: el proceso por el cual se asignan números o símbolos a atributos de entidades del mundo real de tal forma que los describa de acuerdo con reglas claramente definidas.

La validez de la medición en cualquier disciplina técnica o científica se basa en el respeto a los principios o axiomas básicos y, a partir de ellos, se van estableciendo nuevas conclusiones. Toda medición debe asegurar una adecuada representación del atributo real medido mediante los símbolos o números asignados.

El concepto de medida tiene una historia de más de 5000 años, que surge del manejo de longitudes, áreas y volúmenes fundamentalmente y de la necesidad de su cálculo. Estos tres ejemplos particulares de medidas son los que han servido como guía para sacar a la luz el concepto que detrás de ellos se escondía.

Sin embargo no es hasta el libro de Euclides (300 a.c.) Los Elementos, que aparecen las primeras demostraciones satisfactorias de teoremas relativos a áreas y volúmenes. Aunque, también es cierto, en este libro no hay definiciones de longitud, área ´o volumen; Euclides las considera características que puede medir respectivamente en las figuras que sı define, como son: Línea, superficie, y sólido; tampoco define qué es medir, es una palabra que utiliza no sólo cuando habla de estas tres magnitudes geométricas, sino también en el ámbito de la aritmética.

Las longitudes las daba en comparación con un segmento unidad, las áreas con un cuadrado unidad y los volúmenes con un cubo unidad, de este modo dio los valores correspondientes a figuras simples como polígonos y poliedros y demostró teoremas como el de Pitágoras. Otros autores griegos más que dar la medida de una figura daban resultados del tipo: A y B tienen igual área o volumen.

Arquímedes (287–212 a.c.) atribuye a Eudoxo (408–355 a.c.) la demostración de que el volumen de un cono es un tercio del volumen del cilindro de la misma base y altura. Esto sin conocer este volumen, para el que hace falta conocer el área del círculo, que descubrió casi 100 años después el propio Arquímedes demostrando que es el de un triángulo rectángulo con un cateto el radio y el otro la longitud de la circunferencia; suyo también es que el volumen de la esfera es 2/3 el volumen del cilindro o que el área de la esfera es la del manto del cilindro circunscrito.

Por ultimo suya es también la mejor acotación de π de la época:

$3 + (10/71) < \pi < 3 + (10/70)$.

Tuvieron que pasar aproximadamente 2000 años, hasta que en 1883 G. Cantor enuncia la primera definición de medida m(A) de un conjunto arbitrario (acotado) $A \subset \mathbb{R}^n$.

El primero en considerar que conjuntos A son medibles y dar una definición de su medida fue G. Peano en 1887, el cual considero la medida m[A] de sus predecesores (que en el caso del plano definía mediante aproximaciones externas de A con polígonos) y a la que llamo medida exterior y definió un conjunto medible como aquel cuya medida interna coincide con la externa y demostró que la medida era aditiva.

Además explicó la relación existente entre medida e integración, demostrando que una función acotada f: [a; b] → [0;1), era Riemann integrable si y solo si el conjunto E de R^2 limitado por la gráfica de f y las rectas x = a, x = b e y = 0 era medible, en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = m[E].$$

Longitud de una curva

La longitud de una línea poligonal se obtiene sumando las longitudes de sus lados.

La línea es una curva (no poligonal) su longitud se puede estimar calculando la longitud de una línea poligonal cuyos vértices estén sobre la curva. La aproximación se puede ir mejorando aumentando el número de vértice (Figura 1).

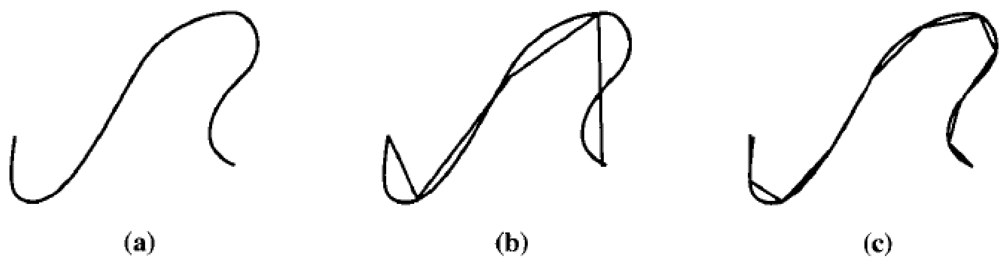


Figura 1

Se trata de un objeto físico con bordes curvilíneos cuya longitud se desea medir poder ajustar un hilo y después extenderlo longitudinalmente para su medición con una regla.

Perímetro

La longitud de una curva cerrada plana se dice que es el *perímetro* de dicha curva. Puesto que es una longitud se medirá en unidades de longitud (centímetros, metros, etc.). Es importante no confundir el perímetro con el área de una región limitada por una curva cerrada simple. El área es una magnitud que expresa el tamaño de una región y se mide en cm^2, m^2, etc.

Longitud de la circunferencia

Para hacerlo hay que acudir a enfoque de Arquímedes. Se procede a inscribir y circunscribir en un círculo de diámetro *1,* polígonos regulares, los cuales en principio serán hexágonos ya que de todos los polígonos regulares, el hexágono es el que se puede inscribir más fácilmente (Figura 2).

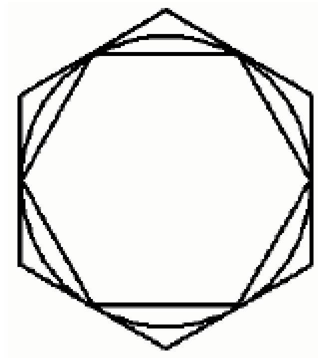


Figura 2

Así, tales polígonos van aumentando progresivamente su cantidad de lados mediante continuas bisecciones de arcos, llegando a tener 16 veces la cantidad de lados que los hexágonos primigenios, esto es, 6 x 16 = 96. De esta manera los perímetros de los polígonos, uno inscrito y otro circunscrito, que por abstracción algebraica se consideran de *n* lados, se aproximan en gran medida a la circunferencia, *tienden* a ella. Tendencia que se considera equivalencia: las tres figuras tienen un valor común, el de la circunferencia, ya que los polígonos en cierto modo *comprimen* a la misma, igualándose con ella.

Se hace casi inevitable la asociación de este método con el del cálculo infinitesimal y su noción de *límite*. Y es que el empleado por Arquímedes constituye un precedente, un paso previo a lo cual vendría a ser el novedoso procedimiento infinitesimal de la Edad Moderna.

Finalmente, se recurre a una reducción al absurdo, evidenciando las contradicciones lógicas de suponer las dos conclusiones posibles distintas a la igualación, esto es, que el área de la figura corresponde a la magnitud de la figura circunscrita o inscrita, mayor o menor a la que se pretende demostrar. Todo este proceso da lugar, como ya se dijo en un párrafo anterior, al resultado:

“La circunferencia de un círculo excede tres veces su diámetro, con una parte que es menor que 10/71 pero mayor que 10/70 del diámetro”.

Como sabemos en la practica el numero pi se considera como aproximación 3.14, o 3.1416, aunque en 1761 John Lambert demostró que π es un número irracional, por ello es imposible expresar su valor mediante un decimal exacto o periódico.

Superficie y Área

La medida de magnitudes es una tarea muy importante desde el punto de vista social y científico. Desde el inicio de las matemáticas hasta nuestros días se viene haciendo referencia a medidas de diversa índole. Cabe pensar que una de las justificaciones del interés de las matemáticas deriva de que satisfacen necesidades que los hombres sienten, relacionadas con las medidas.

No es de extrañar por tanto que la medida de magnitudes haya estado presente en los distintos planes de estudios y en las propuestas curriculares oficiales que se han sucedido en el tiempo. De igual forma en los Estándares para la Educación Matemática del NCTM, también se considera la medición como un tema separado de la aritmética y de la geometría.

Consideramos que en la medición se debe prestar atención a la comprensión de los atributos, unidades y sistemas de medidas, así como la aplicación de una variedad de técnicas y herramientas para resolver problemas relativos a la medida de longitudes y áreas, entre las cuales aparecen las fórmulas de cálculo del área.

Sin embargo, es habitual en nuestras escuelas enfatizar el empleo de las fórmulas del área, su memorización y aplicación ocupan una gran parte del trabajo matemático dedicado a la medida y la geometría. Para combatir esta tendencia tratemos de profundizar en las razones de estas recomendación de los currículos oficiales y de los Estándares de que además de "memorizar y manipular fórmulas" se atienda mayoritariamente a otras destrezas y conceptos. Las directrices actuales en la enseñanza de las matemáticas, especialmente las surgidas de la consideración de la matemática como actividad cultural (Bishop, 1999) [10] , pretenden formar

[10] **Bishop 1999, citado por S/A, S/f.**

matemáticamente a los alumnos de la educación obligatoria en aquellos aspectos que van a necesitar para su vida como ciudadanos.

Comenzaremos por ver de manera resumida el concepto de magnitud y su medida. Consideramos la magnitud como una cualidad de ciertos objetos, y la medida como una comparación entre un objeto y otro tomado como unidad. La medida de superficies consistiría pues en la comparación entre una unidad de medida fijada como unitaria y la cantidad que se quiere medir.

Comencemos por diferenciar dos aspectos matemáticos que hemos mencionado, superficie y de medida de superficie (área), y trataremos de mostrar las relaciones y diferencias entre ambos. ¿Son sinónimos superficie y área o hay diferencias entre ellos? En los diccionarios se define la superficie como una cualidad (extensión) y el área como medida, como un número. La superficie es una cualidad que puede compararse y sumarse. Por ejemplo, podemos comparar la superficie de un rectángulo y un paralelogramo, o la de otras figuras con un rectángulo.

La superficie es una magnitud, lo que se caracteriza matemáticamente como una cantidad asociada a los polígonos (la superficie es una cualidad de los polígonos).

Así un polígono delimita una cantidad de superficie, que será la misma, independientemente de la unidad de medida de superficie que adoptemos, y que es la misma que la de cualquier polígono obtenido por descomposición y recomposición de este polígono (S/A, s.f.).

Esta caracterización matemática de la superficie nos permite buscar tareas escolares que den cuenta de algunas de los elementos que definen formalmente a las magnitudes. En concreto podemos abordar tareas para destacar los siguientes aspectos: la cualidad superficie, la comparación de cantidades de superficie (por descomposición y recomposición), la suma, la multiplicación por un número. Para afrontar y familiarizar al alumno con ellos tenemos que hacerlo trabajar con los elementos que aparecen recogidos en sus definiciones, es decir, los polígonos, la descomposición de polígonos, la búsqueda de descomposiciones y recomposiciones adecuadas para poder comparar su superficie, y la obtención de sumas y multiplicaciones de cantidades de superficie por números racionales.

Una tarea para facilitar que los alumnos se ejerciten en la percepción de la cualidad superficie y en la comparación de cantidades de superficie puede consistir en realizar descomposiciones y recomposiciones de figuras hasta obtener la relación que tiene su superficie con la de un rectángulo que hay que describir (figura 3),

La tarea de la figura 3 puede ayudar al alumno a ejercitarse en la comparación de superficies. Una comparación especialmente llamativa es la que demanda la búsqueda de todas las descomposiciones y recomposiciones posibles para identificar una figura con otros polígonos.

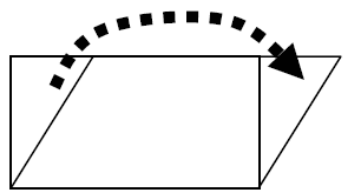
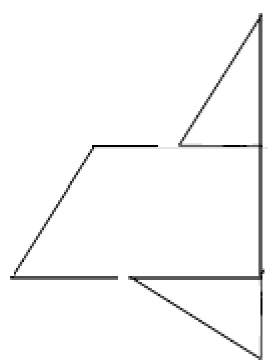


Figura 3

Equivalencia de superficies de polígonos con el rectángulo:



Existe una variedad de descomposiciones que se pueden hacer de una figura, lo que nos da ideas para proponer tareas en el aula que traten de que los alumnos obtengan descomposiciones similares de polígonos, por medio de descomposiciones, búsqueda de líneas auxiliares, descripción de estas líneas y de los resultados obtenidos, división de segmentos y de figuras, etc.

Recordemos que llamamos área a la medida de la cantidad de la superficie, por lo que el área de un polígono es un número, que está relacionado con la unidad de medida

buscada. Por ello medir la superficie de un polígono es buscar un procedimiento para comparar su cantidad de superficie con la superficie unidad.
El método más sencillo sería colocar el polígono unidad tantas veces como sea posible para rellenar el polígono problema (Castro, Flores, & Segovia, 1997) . Para poder hacer esto necesitamos que el polígono unidad tenga una forma que recubra el plano sin solaparse. La figura que se toma habitualmente es el cuadrado, lo que genera el nombre de las unidades de medida de superficie (metro cuadrado). Medir superficies consistiría en ver cuántos cuadrados unidad caben en el polígono que se mide. Se dice que la medida es directa si se hace materialmente la superposición de unidades en el polígono para ver cuántas caben. La comparación entre la unidad y la figura que se pretende medir no es siempre sencilla por lo que se recurre a métodos indirectos que consisten en medir longitudes de los segmentos del polígono problema, y obtener el número de veces que contienen a la unidad por medio de una operación entre esas longitudes de segmentos bien elegidos del polígono.

Esta segunda forma nos lleva a determinar estrategias para determinar el área en función de las longitudes, y a estas estrategias aritméticas se les llama fórmulas.

La repetición en clase de estos procesos de conteo y relación con las fórmulas del área con unidades cuadradas favorece que los alumnos perciban que las fórmulas de cálculo del área son relativas a la forma de la figura, con lo que al decir la frase anterior deberemos tener como referente siempre al número de cuadrados. Tal como hemos visto las fórmulas del área de las figuras dependen de la forma y el tamaño de la unidad.

El área de un círculo

Como ya se ha mencionado, Arquímedes da por primera vez de manera rigurosa la fórmula para calcular el área del círculo $A = \pi r^2$. Una manera de hacerlo sin mucha formalidad pero aceptable es la que se muestra en la figura 4.

Como puede verse la imagen se explica por si sola y la idea es transformar el área del circulo en la de un rectángulo de altura **r** y de largo igual al perímetro del mismo y aplicar la fórmula para calcular el área de un rectángulo (Wiscamb, 1976).

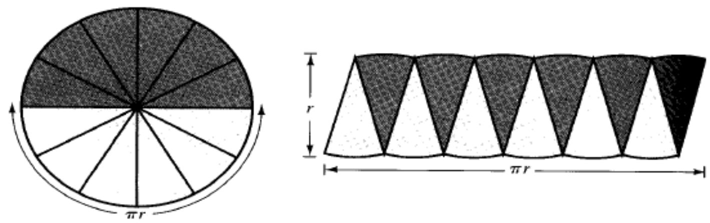


Figura 4

Por supuesto que detrás se esconde un proceso de aproximación y de limite que se obvia en una primera aproximación.

El Volumen

En nuestra opinión en secundaria y bachillerato, la consideración del volumen como medida es el aspecto predominante, quedando en segundo plano las actividades encaminadas a la adquisición del concepto de volumen[11]. Además, de las distintas posibilidades que tenemos para medir el volumen, la que nunca falta en los libros de textos de educación básica el uso de fórmulas. Éstas se presentan frecuentemente como productos terminados, cuya justificación se obvia, quizás por considerarla fuera del alcance de la etapa en que se usan (González López & Flores, 2002).

Consideramos que los métodos de descomposición de unos cuerpos geométricos en otros cuerpos, o de la aplicación del Principio de Cavalieri, basada en la descomposición de un cuerpo en capas, son los idóneos para trabajar el tema de volumen ya que tienen reconocida utilidad en su enseñanza. Están centrados en la obtención de relaciones entre los volúmenes de distintos cuerpos y, como

[11] Aunque el concepto de capacidad está íntimamente ligado al de volumen, tenemos en la capacidad cualidades que dependen de aspectos no matemáticos, como el tipo de sustancia u objeto con que llenar un recipiente, la posición o el grosor físico del mismo etc., que escapan al análisis que pretendemos realizar en estas páginas, por lo que, en lo que sigue, nos ocuparemos exclusivamente del concepto de volumen.

consecuencia de dichas relaciones, permiten justificar las fórmulas, que se presentan así como el final de un proceso.

Podemos así deducir el volumen de cuerpos diversos a partir del volumen, que se supone conocido, del ortoedro, de la misma forma que en el caso de la superficie se pueden deducir las fórmulas del área de cualquier polígono a partir del área del rectángulo o de descomposición en triángulos para el caso de polígonos.
Dado que este proceso es habitual para la enseñanza del área, permiten seguir la misma línea argumental para el caso del volumen. Sin embargo, el tratamiento del volumen mediante métodos de descomposición presenta algunas peculiaridades respecto del área: en lo que sigue detallaremos los puntos críticos que encontramos, desde el punto de vista de los contenidos matemáticos, al usar estos métodos para obtener las relaciones clásicas del volumen del ortoedro, el prisma, el cilindro, la pirámide y el cono. Nuestra intención es recopilar información útil para el profesor, que le ayude a plantear la enseñanza del volumen evitando el uso irreflexivo, cómodo y habitual de las fórmulas, al mismo tiempo que controla los obstáculos encontrados.

Métodos de Descomposición de un Cuerpo en otros Cuerpos

En el caso de la superficie los métodos de descomposición y de completado garantizan relaciones de igualdad de área entre polígonos: el Teorema de Boliay-Gerwien afirma (Boltianski, 1981):

En el plano euclídeo, dos polígonos tienen la misma superficie

- si y sólo si son equicompuestos[12]
- si y sólo si son equiadicionales[13]

12 Dos figuras se llaman equicompuestas si descomponiendo una de ellas en un número finito de partes y disponiendo dichas partes de otra forma, se obtiene la otra.

13 Dos figuras se llaman equiadicionales si ambas pueden ser completadas por partes de igual área (volumen), de modo que resulten figuras de igual área (volumen).

Encontramos numerosas actividades que se pueden realizar con material, que convencen de la veracidad de este resultado en el nivel de primaria. La obtención del área de cualquier superficie poligonal a partir del área del rectángulo es la consecuencia didáctica más significativa que se puede extraer del mismo.

En el caso del volumen no tenemos un resultado equivalente, pero también la descomposición tiene su utilidad, como veremos a continuación.
Cortando un paralelepípedo por planos perpendiculares a su base, obtenemos partes que, dispuestas de otra forma, proporcionan un ortoedro de la misma altura y con el mismo polígono en la base que el paralelepípedo dado (Figura 5).

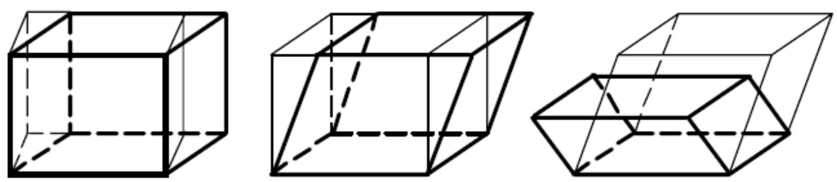


Figura 5

Utilizando el resultado de Bolyai-Gerwien, podemos debilitar la condición sobre las bases: no es necesario que éstas sean el mismo polígono, basta que tengan la misma cantidad de superficie (Saíz Roldan, s.f.).
Así justificamos que:
Cualquier paralelepípedo es equicompuesto con el ortoedro de igual base y altura.
El método de descomposición también es válido para comparar el prisma recto con el ortoedro, pues basta extender al prisma la descomposición de su base. Pero no ocurre lo mismo con el prisma oblicuo, donde la descomposición de la base (que recompuesta formaría un paralelogramo) extendida al prisma no garantiza, la recomposición en un paralelepípedo.
Pero el método de descomposición permite relacionar el prisma recto y el oblicuo a través de otras magnitudes distintas de la base y la altura del prisma. Se trata de la arista lateral y la sección perpendicular: realizando un corte por un plano perpendicular a las aristas de un prisma oblicuo lo transformamos en uno recto que tiene la misma arista (l), pero distintas base y altura (Figura 6).

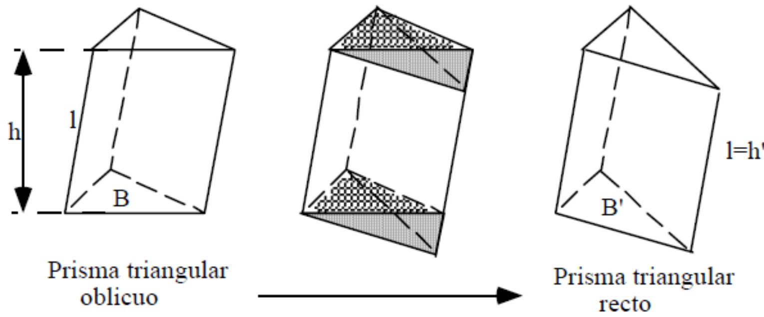


Figura 6

El tipo de descomposición mostrado en la Figura 6 tiene la ventaja de que también es válido para el cilindro oblicuo, produciéndose, en este caso, secciones elípticas.

Algunas pirámides particulares

Sobre cada una de las seis caras de un cubo podemos construir una pirámide cuadrangular de altura la mitad de la arista del cubo, obteniendo así la relación 1:6 entre el volumen de ambos cuerpos (García A. 1998) (Figura 7). También es posible justificar una relación 1:3 entre el volumen del cubo de arista l y la pirámide cuadrangular recta de anchura, largura y altura iguales (l), ya que es posible descomponer dicho cubo en tres de tales pirámides (Figura 8). La generalización de esta relación al caso de una pirámide (triangular) cualquiera no es evidente. Es uno de los puntos clave que debemos tratar. Usar para ello los métodos de descomposición conduce a la necesidad de justificar un proceso infinito, como veremos.

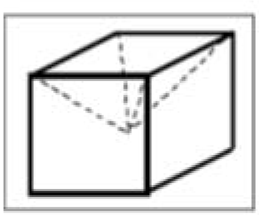


Figura 7

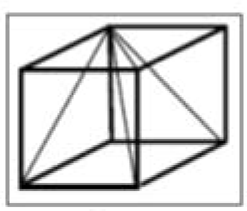


Figura 8

Hemos justificado así que *el volumen de la pirámide triangular es 1/3 del volumen del prisma de su misma base y altura*. Dado que cualquier pirámide se puede descomponer en pirámides triangulares, hemos justificado:

El volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma de igual base y altura.

En el camino hemos necesitado reiterar indefinidamente un proceso de descomposición cuya formalización (el límite) está fuera de lugar en la parte básica del bachillerato. Sin embargo, es posible a ese nivel intuir el final del proceso, convenciéndose de la validez del resultado, a partir de un argumento manipulativo que sí está a su alcance.

El Método de Exhaución

Hay otro método, utilizado por Euclides, que permite justificar completamente dicha propiedad. Se trata del **método de exahución**, propuesto por Eudoxo, que se fundamenta en el llamado Axioma de Arquímedes[14].

Euclides consigue soslayar el proceso infinito mediante una prueba por reducción al absurdo, para la cual, necesita conocer de antemano una cantidad a la que aproximarse. Utiliza la descomposición de la pirámide indicada en la Figura 9 (en dos pirámides y dos prismas triangulares), para probar que *dos pirámides de la misma altura son entre sí como sus bases* (Proposición 5, Libro XII). El punto clave de esta demostración es observar que, dada una cantidad *d* tan pequeña como queramos, podemos descomponer cada una de las pirámides dadas y reiterar la descomposición sobre cada una de las pirámides obtenidas, hasta llegar a tener, en un número finito de pasos (n), pirámides cuyo volumen (Rn) es menor que *d.*

[14] Axioma de Arquímedes: *Dadas dos magnitudes que tengan una razón, entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra.*

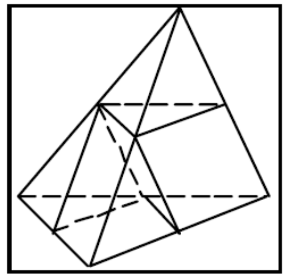


Figura 9

Nuevamente observamos que este proceso es equivalente a probar que la sucesión de volúmenes de las pirámides obtenidas en la descomposición (Rn) converge hacia cero. Ponemos así de manifiesto que el proceso de exahución involucra un paso al límite que se puede resolver en un número finito de pasos (en este caso, utilizando argumentos geométricos), dado que conocemos de antemano el valor de dicho límite. El resultado establecido en la (Proposición 5, Libro XII) es la base, junto con un argumento de descomposición más, para reencontrar la relación 1:3 entre la pirámide y el prisma. En efecto, se trata de la Proposición 7, Libro XII, donde se considera la descomposición de un prisma triangular en tres pirámides triangulares (Saíz Roldan, s.f.), como indica la Figura 10.

El volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma de igual base y altura.

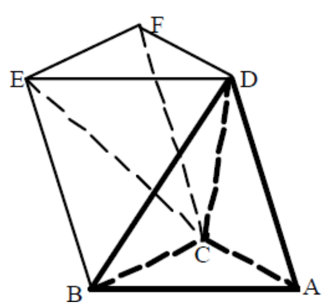


Figura 10

Las tres pirámides consideradas tienen base de igual superficie y la misma altura, por lo que, ahora podemos concluir que tienen el mismo volumen. Además una de ellas tiene la misma base y altura que el prisma de partida. En el caso del cilindro hemos visto una forma de relacionar el cilindro oblicuo y el elíptico recto por descomposición. En el caso del cono no tenemos ninguna descomposición que permita relacionarlo con el cilindro, a fin de obtener las relaciones análogas a las obtenidas para la pirámide y el prisma. Euclides utiliza el método de exahución para justificar la relación 1:3 entre el cono y el cilindro, pero, a diferencia de lo visto para la pirámide (donde se aplica la exahución a la descomposición de la misma en otros cuerpos), en este caso la exahución sirve para probar que *podemos aproximar el cilindro y el cono mediante prismas y pirámides, respectivamente, por dentro y por fuera, tanto como queramos.*

Los Métodos de descomposición en Cuerpos: Imposibilidad en el caso de los Volúmenes

El hecho que sea posible resolver algunos problemas de cálculo de volúmenes mediante procesos bidimensionales no lo hace menos abstracto ni más simple.

Pero en el caso del volumen esto no sucede. David Hilbert observa en 1900 que el método de equidescomponibilidad para calcular volúmenes no parecía aplicable siempre en tres dimensiones. Desde Euclides, todos los que obtenían el volumen de un tetraedro, lo hacían a través de un proceso de límite. Esto es ¿existen poliedros equivalentes (con el mismo volumen) que no son equidescomponibles?

Hilbert lo plantea de esta manera: exhibir dos tetraedros con bases equivalentes y alturas iguales que de ninguna manera puedan descomponerse y reacomodarse para formar dos tetraedros congruentes. Este planteamiento es el tercer problema de Hilbert, Pero desde 1901 nuestra pregunta tiene una respuesta negativa, ya que el matemático alemán Dehn probó:

Teorema de Dehn:

Un tetraedro regular y un cubo del mismo volumen no son equicompuestos.

La demostración de este resultado puede consultarse en (Boltianski, 1981). Así podemos afirmar, a diferencia de lo que ocurre para el área, que los métodos de descomposición no permiten desarrollar una teoría del volumen a partir del ortoedro.

El enfoque de Cavalieri: Consideración de las "Capas" de un Cuerpo

Hasta el momento hemos utilizado técnicas de descomposición de cuerpos *en otros cuerpos* con los que comparar su volumen. Esto nos ha mostrado la primera línea de argumentación que históricamente ha sido utilizada para encontrar relaciones de volumen entre cuerpos. Sin embargo, hay otra vía, desarrollada también desde tiempos remotos, que permite argumentar las relaciones obtenidas.

Se trata del desarrollo de la idea (en sus inicios filosófica) de que una línea está compuesta por puntos, una superficie se compone de segmentos y un cuerpo está compuesto por capas. Los primeros antecedentes de esta idea son los argumentos mecánicos de Arquímedes o de Demócrito, basados en considerar un volumen como la suma infinita de un número de secciones planas paralelas unas a otras. Argumentos que les permite asumir como válidas las relaciones clásicas sobre el volumen de la pirámide o el cono, a pesar de que sus métodos son cuestionados en su época y, por supuesto, no se reconocen como demostraciones formales hasta la formalización del cálculo infinitesimal; más concretamente, hasta la justificación de B. Cavalieri, en el siglo XVII, de la propiedad que lleva su propio nombre: La utilización del Principio de Cavalieri para justificar las relaciones de volumen anteriores empieza comparando unos cuerpos con otros:

El método de Cavalieri para obtener volúmenes consistía en medir los sólidos que se formaban al cortar el cuerpo con planos paralelos a su base (Saíz Roldan, s.f.). La idea de Cavalieri era la de considerar todos (una infinidad) los planos paralelos a la base que cortan al cuerpo, lo que da como consecuencia una serie de sólidos infinitamente delgados. La suma del volumen de estos “sólidos” sería el volumen del cuerpo original.
Cavalieri observó que si se tienen dos o más cuerpos con la misma altura h y éstos son intersecados por cualquier plano paralelo a sus bases (formándose las figuras A1 y A2 como se muestra en la Figura 11 y si siempre las figuras formadas por la intersección de los cuerpos y el plano tienen la misma área, entonces los sólidos tienen el mismo volumen.

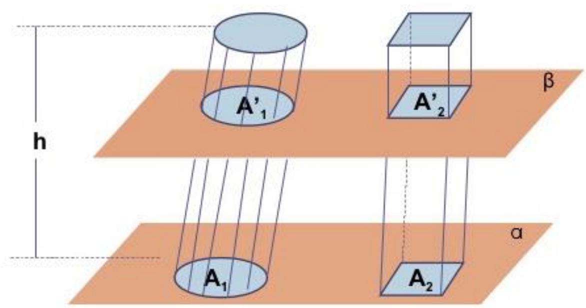


Figura 11

Como se observa, Cavalieri transforma el problema y aprovecha conocer el volumen de un cuerpo a partir de otro cuerpo cuyo volumen es conocido. Este procedimiento se fue refinando con el tiempo hasta la etapa siguiente de formalización en el cálculo de volúmenes que corresponde al cálculo integral que no es tema de este trabajo, por ello no se abordará.

Selección bibliográfica del análisis científico respeto a la longitud área y volumen

En general una de las dificultades de cualquier profesor es que no domina con profundidad todo el conocimiento de la disciplina, entonces una de las características de su trabajo diario es un continuo proceso de consulta y reflexión sobre el conocimiento incluido en la UD. En este sentido la medida y el cálculo de longitud área y volumen no es la excepción. El profesor de bachillerato de la materia en cuestión debe repasar estos conceptos básicos de medida, en libros como medida y realidad de Juan Carlos Gate-Alonso (1989), entre otros. En la parte de longitudes áreas y volúmenes de manera equivalente en el libro de Geometría y Experiencias de Jesús García Arenas y otros (1998).

En este sentido el conocimiento al que se pretende hacer llegar a los alumnos es que describan los objetos y sus partes de acuerdo a sus formas, dimensiones y propiedades; para que contribuye de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando el estudiante en un primer momento, identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, establece relaciones lógicas entre ellas, aun sin llegar necesariamente a un rigor axiomático propio de estudios más especializados. Así, las unidades correspondientes al eje de geometría euclidiana, contemplan las etapas de exploración, deducción y aplicación, mismas que permiten establecer un equilibrio entre formalización axiomática y la presentación mecanicista de la enseñanza de la geometría a nivel bachillerato. En la unidad de Congruencia y Semejanza, a partir del conocimiento básico de estos conceptos, se introduce al alumno al aspecto deductivo y a la comprensión del porqué de las demostraciones; finalmente se da paso a combinar diversos conceptos y resultados geométricos en aplicaciones teóricas y prácticas de la geometría.

Todo lo que se ha presentado en los párrafos anteriores puede considerarse como información básica para el profesor de donde se seleccionarán los contenidos a estudiar con los alumnos.

La unidad didáctica diseñada considera los temas que marca el programa y retoma de lo expuesto anteriormente el conocimiento básico que deberá trabajarse con los estudiantes dentro de estos el concepto de perímetro área y volumen en aquellos casos que es posible acceder a la justificación de las llamadas fórmulas de cálculo a través de procesos de validación empírica y lógica.

3.1.2 Análisis Didáctico

Una vez estructurados los contenidos de la UD, a partir del análisis científico, se continúa con el análisis didáctico, con el fin de ubicar cuáles son las dificultades que se enfrentarán en el proceso de enseñanza aprendizaje relacionadas con la capacidad cognitiva del alumno. Dos indicadores que según Sánchez y Valcárcel (1993) conviene considerar en ésta etapa son: A) sus conocimientos previos sobre el tema y B) el nivel del desarrollo operatorio donde se encuentran los alumnos, en relación con las habilidades intelectuales necesarias para la comprensión del tema.

Al planificar una UD debemos conocer lo que nuestros futuros alumnos saben, aunque prácticamente eso es imposible. No obstante, las aportaciones de la investigación educativa resuelven en parte éste problema, al conocer a partir de ellas, sus características generales y disponer de un amplio inventario de ideas relativas a contenidos usuales en relación de longitud áreas y volumen. Para contrastar la información bibliográfica en nuestro contexto escolar, puede ser necesario realizar exploraciones en nuestras aulas.

A) Conocimientos previos sobre el tema de áreas y volumen

Como ya se ha mencionado, para promover el aprendizaje de los conceptos de área, es necesario conocer, con qué ideas llegan los alumnos en relación con el tema que se va a estudiar, es decir, qué preconcepciones (ideas previas, ideas alternativas, ideas erróneas, etc.) tienen, sin importar cómo hayan sido generadas. A continuación se describe brevemente, el resultado de lo que se sabe de algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje de los conceptos del área y volumen (Ponce Huertas, 2009).

Errores y dificultades

El conocimiento de las dificultades y errores más frecuentes constituye una faceta preventiva de gran ayuda en la enseñanza. Vamos a distinguir entre errores relativos a la medida en general y errores específicos referidos al cálculo de áreas.

Errores atribuibles a la metodología tradicional relativos a la medida

- Uso erróneo de los sentidos: En la enseñanza tradicional, el uso de los sentidos es considerado un lujo, una pérdida de tiempo; sólo en algunos casos se permite el uso de la vista.
- Uso de instrumentos inadecuados y mal manejo de los instrumentos: una mala apreciación sensorial hace elegir a veces un instrumento inadecuado. En otras ocasiones, el reducir los instrumentos de medida a los convencionales hace que la elección sea poco afortunada.
- Errores cometidos en la medición debidos a los malos procedimientos empleados o la elección de una unidad inadecuada:
- Confusión entre magnitudes.
- Resolución de problemas que contienen datos erróneos o no reales: Con frecuencia se propone al alumnado enunciados como que una familia bebe al día 100 litros de agua, 5000 obreros cavan una zanja de 4 m^3 de capacidad, esto puede dificultar la autocorrección, ya que el alumnado se habitúa a resolver problemas cuyo resultado es irreal.
- Abuso de la exactitud en las medidas. Encuadramientos. Se confunde muy a menudo la medida entera con la medida exacta.
- Carencia de estrategia para efectuar medidas de objetos comunes: lo habitual es hallar superficie de terrenos de forma regular, de manera que cuando al alumnado se le pide calcular la tela que se necesita para confeccionar un vestido, es raro que éste disponga de los medios para resolver el problema.

Errores específicos en el cálculo de áreas

- Confusión perímetro-área, este error es muy frecuente. Además el hecho de que dos figuras tengan la misma área, induce a algunos estudiantes a creer que tienen también el mismo perímetro.

- Pensar que las medidas indirectas son las medidas reales y no valorar la medida conceptual del área.
- No reducir a la misma unidad en los cálculos.
- Tratamiento lineal de las medidas de superficie, lo cual induce a creer que al duplicar el lado de una figura se duplicará también su área.
- Cambiar la unidad de referencia al medir distintas superficies.

Dificultades

Entre las dificultades para el alumnado a la hora del cálculo de superficies, podemos destacar:

- Que las figuras tengan una forma irregular.
- Que las figuras no aparezcan entramadas.
- La proporcionalidad inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida.

Si la unidad de medida pasa a ser el centímetro cuadrado a una pequeña baldosa de 0,5 cm x 0,5 cm, a pesar de ver las dos, algunos estudiantes doblan las respuestas que obtuvieron al usar el centímetro cuadrado.

- El contar unidades no enteras, por ejemplo, al medir una figura dividida en cuadrados y aparecen partes del cuadrado que no son mitades.

Algunas dificultades sobre el concepto de volumen.

En relación con el concepto de volumen existe poca información y buena parte de ella se refiere a dificultades encontradas en los niveles básicos, a continuación se presentan algunas de utilidad para este trabajo.

Mientras el área se refiere a la superficie, que es una abstracción, en la noción de volumen se crea una confusión entre la cantidad de materia que es algo concreto y el volumen físico, es decir, el espacio ocupado que es algo abstracto (Castelnuovo,2004).

Adicionalmente y de manera similar a la confusión perímetro área, se presenta la confusión área volumen, por ejemplo cuando se les pregunta, si con una hoja de papel tamaño carta se forma un cilindro a lo largo del ancho y otro a lo largo del lado mayor ¿Cómo son los volúmenes encerrados en cada caso? La respuesta es que son iguales.

Aunque el concepto de capacidad está íntimamente ligado al de volumen, tenemos en la capacidad cualidades que dependen de aspectos no matemáticos, como el tipo de sustancia u objeto con que llenar un recipiente, la posición o el grosor físico del mismo, entre otros.

(González López & Flores, 2002), presentan algunos resultados vinculados con dificultades en los procesos de deducción y demostración de las fórmulas, observando que no sólo tienen que hacer frente a procesos infinitos, tal como ocurre en la superficie sino que además en este caso hay una imposibilidad de razonar por equipartición de figuras.

Nuestra intención es recopilar información útil para el profesor que le ayude a plantear la enseñanza del volumen evitando el uso irreflexivo, cómodo y habitual de las fórmulas, al mismo tiempo que toma en cuenta los obstáculos encontrados.

B) La capacidad cognitiva del alumno: el estadio de desarrollo operatorio.

En esta parte podemos considerar, solamente como referencia para ubicar mejor las actividades que se plantean en el programa guía de actividades, las aportaciones de Piaget, en donde nos describen, por ejemplo, cómo se desarrollan diferentes esquemas de conocimiento necesarios para la comprensión de la ciencia y cómo interacciona el joven con el mundo que le rodea.

La información ayuda a disponer de explicaciones más consistentes de muchas dificultades de los alumnos, como consecuencia de nuestra experiencia docente. Asimismo, nos permite valorar la conveniencia de abordar el tema con un nivel de diferenciación conceptual determinado de manera que ayude a que sea posible su comprensión.

Tabla 1

Características cognitivas de adolescentes en diferentes áreas de acuerdo con (Shayer & Adey, 1986)

RUBRO	**Concreto avanzado**	**Formal inicial**	**Formal avanzado**
interés y actitud investigadora	Incluirá seriación y clasificación como instrumento de percepción para descubrir lo que sucede, pero necesita que se le proporcione un modelo concreto por medio del cual podrá estructurar los resultados experimentales. Encuentra interés en hacer y comprobar predicciones de causa y efecto.	Encuentra gran interés en comenzar a averiguar el porqué de las cosas y en deducir consecuencias a partir de un modelo formal. Experimenta confusión al tener que investigar relaciones empíricas sin un modelo interpretativo. Puede usar un modelo formal, pero requiere que se lo proporcionen otros. Puede generar modelos concretos con interés. Puede ver la razón de formular hipótesis y puede planear experimentos sencillos, pero es probable que necesite ayuda para deducir relaciones de los resultados y para organizar la información de modo que se vayan eliminando las variables irrelevantes en cada fase.	Encuentra interés en generar y comprobar posibles explicaciones de por qué. Tolerara la ausencia de un modelo interpretativo para investigar relaciones empíricas. Considera obvio que en un sistema con diferentes variables él debe mantener todas las demás cosas igual, mientras va alternando una cada vez. Puede planear este tipo de investigaciones e interpretar los resultados. Hará comprobaciones cuantitativas al tratar de relaciones de proporcionalidad.
Uso de modelos	Uso de modelos por seriación, que puede extenderse a cualquier Escala lineal. El modelo tiene ahora una definición semejante a lo que da el diccionario, es decir un modelo simplificado de correspondencia.	El modelo formal es la interpretación indirecta de la realidad por una comparación deductiva a partir de un sistema de postulados con sus propias reglas. En este nivel el estudiante suele necesitar ayuda para deducir el comportamiento de un sistema con múltiples variables. A no ser que la relación cuantitativa sea sencilla, las deducciones es probable que sean simplemente cualitativas. El modelo se considera como algo verdadero, no hipotético, por tanto, en	Puede buscar activamente un modelo formal, ampliar uno que le es dado, y comparar modelos alternativos por la forma en que explican los mismos datos. Como el esquema de la proporcionalidad esta adquirido (relaciones mutuas entre dos variables independientes) puede formular deducciones cuantitativas a partir del

		este nivel no suele darse la comparación crítica de modelos formales alternativos.	modelo y reflexionar sobre las relaciones entre las distintas variables.
Tipo de categorización	**Inclusión en una clase y clasificaciones jerárquicas.** La clasificación es aún la forma dominante de categorizar la realidad, pero ahora las clases están menos ligadas a una simple propiedad y pueden ser parcialmente ordenadas.	**Generalización.** Ahora la operación de clasificación se usa para dar significado a una amplia gama de fenómenos. Una formula general como la del volumen de un cuerpo V=alh se usara como guía para calcular el volumen.	**Abstracción.** Por contrataste con el nivel anterior, el próximo estadio de categorización. Debido a la naturaleza polivalente de la realidad, es mejor algunas veces buscar entre las muchas propiedades la esencia de la asociación subyacente.
Proporcionalidad	No ha llegado aún a las proporciones métricas. Puede hacer deducciones a partir de datos en los que interviene una razón constante, pero solo si esa razón es un simple número entero.	Puede hacer deducciones siempre que se trate de una razón de números enteros. Puede usar, como relaciones funcionales, variables en forma de razón.	Puede formular y calcular cuantitativamente relaciones entre conceptos expresados como razones. Al pensar en relaciones directas o inversas entre variables expresadas en forma de razón.
Operaciones matemáticas	Puede trabajar con operaciones simples (suma resta, multiplicación y división) pero el sistema de números tiene que ser cerrado, es decir, la operación no puede ser ambigua y el resultado de la operación debe quedar dentro de los límites de ese conjunto de números.	Generalización concreta. Puede trabajar con la relación V=pbh o $W_1H_1=W_2H_2$ pero sólo considerando cada paso como una operación con números definidos. Comienza a aceptar las series no definidas, por ejemplo puede resolver ?-7=7-3 por una serie de operaciones abiertas a cada lado de la relación.	Puede concebir adecuadamente una variable y comienza a trabajar con las reglas explicitas de un sistema para desarrollar estrategias de comprobación. En lugar de necesitar una formula en la que se relacionan distintas variables, puede analizar el conjunto de relaciones requeridas por el modelo para deducir correctamente una serie de cálculos simples necesarios.

Con base en lo anterior y en la experiencia personal se puede decir que los estudiantes se pueden ubicar en su mayoría de acuerdo con la tabla que se muestra a continuación

Tabla 2

Características cognitivas de adolescentes en diferentes áreas de acuerdo con Sahyer y Adey (1986)			
RUBRO	**Concreto avanzado**	**Formal inicial**	**Formal avanzado**
interés y actitud investigadora	X		
Uso de modelos	X		
Tipo de categorización	X		
Proporcionalidad	x		
Operaciones matemáticas		X	

Es decir la mayoría se encuentra en la etapa concreto avanzado. La implicación directa es que es posible que se presenten dificultades de comprensión en el desarrollo de algunas actividades diseñadas en la Unidad Didáctica y eso se verá en los resultados de la aplicación.

3.1.3 Selección de Objetivos

Realizados los análisis científico y didáctico, la siguiente tarea es la selección de objetivos, combinando simultáneamente los resultados de los análisis científico y didáctico, y que concrete en objetivos que ayuden a conseguir las intenciones educativas vinculadas con el plan de estudios y sus programas.

Los objetivos propuestos para la unidad didáctica que será desarrollada, se desglosan en los contenidos respectivos: conceptuales, procedimentales y actitudinales, y que se corresponden con la temática descrita en el análisis de contenido (ver Unidad Didáctica).

Aprendizajes:

1.- Razones entre perímetros y razones entre áreas de triángulos semejantes

a) Reconoce y aplica la razón que existe entre los perímetros de triángulos semejantes.

b) Reconoce la razón que existe entre las áreas de triángulos semejantes.

2 Medida en geometría

a) Comprender que la actividad de “medir” en geometría, una longitud, área o volumen, involucra contar cuántas veces cabe una unidad de medida en el objeto que se quiere medir.

b) Distingue la diferencia entre unidades de longitud, superficie y volumen.

c) Calculará el perímetro de triángulos, cuadriláteros y otros tipos de polígonos regulares.

3.- Cálculo de áreas por descomposición y recomposición de figuras

a) Obtener alguna de las fórmulas para calcular el área figuras por el método de descomposición.

4.-Circunferencia

a) Establecer empíricamente la razón que existe entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de ella.

5.- Áreas y volúmenes de prisma, pirámide, cilindro y cono, objetivos:

a) Que los alumnos conozcan algunos elementos de carácter histórico, que muestren cómo se desarrolla el conocimiento matemático.

b) Que los alumnos puedan dar seguimiento a un ejercicio de argumentación, para demostrar un resultado matemático.

3.1.4 Selección de estrategias didácticas.

Para desarrollar una lección, el profesor adopta formas de actuación específicas, ante las que espera que los alumnos respondan de una determinada manera y tienen por objeto el que éstas, sean eficaces para el logro de los objetivos propuestos, Sánchez y Valcárcel (1993), plantean que dentro de las consideraciones que hace un profesor, al elaborar una estrategia didáctica, se encuentran: Sus planteamientos metodológicos , la secuencia de enseñanza, las actividades de enseñanza-aprendizaje; estos elementos nos permiten comprender cómo se concreta la acción en el aula y nos resultan útiles para la realización de ésta tarea.

3.1.5 Selección de estrategias de evaluación.

Esta es la última tarea del modelo. Las valoraciones como las decisiones del profesor están condicionadas por la concepción que él tenga sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. La evaluación debe ser formativa y no solo un proceso de control.

En relación con el desarrollo de la UD en el aula son muchos los aspectos que podemos valorar, pues es un proceso en donde intervienen múltiples factores: ambiente del aula, interacción alumno-alumno, alumno-profesor, motivación, actitud ante la asignatura, etc. Sin embargo podemos poner nuestra atención en las actividades y materiales de aprendizaje utilizados: cuaderno de apuntes; las actividades realizadas a lo largo del desarrollo de la unidad y reportadas por escrito en su cuaderno de apuntes, guía de actividades diarias, tareas, resolución de problemas de lápiz y papel, uso de internet, exámenes etc.

Observación en clase, por parte del profesor, de actividades puntuales intercaladas entre los de aprendizaje, que serían realizados por los alumnos individualmente en el aula o fuera de ella.

El cuaderno de apuntes.

La intención del uso del cuaderno de apuntes, consistió en que el estudiante elaborara una serie de textos, que le ayudarían a comprender algunos conceptos, apoyados por la realización de las actividades que se desarrollaron en la clase.

No se obtuvo la respuesta esperada en éste rubro, lo que en éste caso ocurrió en general, es que los alumnos no contaba con sus notas organizadas, de lo que estábamos elaborando en clase ni de lo que estaban aprendiendo. Lo anterior, no significa que la idea sea mala sino que en éste caso, existieron factores que no propiciaron el que los estudiantes le dieran el peso adecuado a la elaboración de dicha actividad.

De la revisión de las notas elaboradas en sus cuadernos, se observó una enorme dificultad en los alumnos para llevar un seguimiento puntual de todas las actividades en tiempo y forma, por lo que existió flexibilidad para realizar las actividades de la unidad didáctica en dos tiempos específicos: a la mitad del tema y al final del mismo. No obstante de ésta situación, en la mayoría, se notó que sí hubo comprensión de los conceptos abordados, aunque sólo de forma general

Uso de la Internet

Se usó para establecer comunicación con los alumnos

En el caso de la comunicación con los alumnos, ésta fue escasa y con pocos alumnos. No obstante la insistencia en que enviaran tareas por Internet, sólo algunos lo hicieron.

Consideramos que ésta forma de establecer comunicación es útil y puede apoyar el aspecto de la motivación, aunque sólo haya funcionado con algunos.
La segunda forma de uso del Internet, fue el trabajo realizado en una sesión de exploración de las páginas que contenían cuerpos geométricos, fue muy importante como visualizar la pirámide dentro del cubo.

Los exámenes

Se realizó un examen al final de la Unidad, como evaluación sumativa. Como parte de las actividades a realizar en la secuencia planeada, el examen permitió detectar algunas fallas en la comprensión de algunos conceptos, así como en el manejo de algunos procedimientos, al aplicarlo a algunos problemas, los cuales mencionaremos en los resultados. El examen se encuentra en el anexo 2 y está formado por 7 preguntas.

- **Elementos considerados en el diseño del programa-guía de actividades.**

La propuesta de enseñanza de la geometría como ciencia, organizar la enseñanza del razonamiento de una manera incipiente, parece necesario abordar preguntas como éstas:
¿Qué problemas están en el origen de la geometría que queremos que pasen a formar parte de la forma de pensar de nuestros alumnos?,
Como consecuencia, ¿qué problema o problemas se pueden plantear, para originar la estructura del tema? Y, suponiendo un ambiente que suministre oportunidades para la apropiación de una visión constructivista más acorde con la considerada en la sección.
Visto de ésta manera, entonces se debe organizar la enseñanza centrándose en la manera de razonar en el origen de los conceptos que queremos que aprendan y no sólo en los conceptos fundamentales.
Plantear, en el inicio de la unidad, y a lo largo de los temas que la conformen, situaciones problemáticas que, inspirándose en las que desde el punto de vista histórico, esté en el origen de los conocimientos; desde el punto de vista histórico

Organizar el índice, Integrar con sentido la realización de ejercicios, trabajos prácticos, y la resolución de problemas, junto a la introducción de conceptos y sus relaciones, dentro de la estructura de investigación (Gil et al, 1993).
La realización de recapitulaciones periódicas sobre lo que se ha avanzado en la solución al problema. Dejar tiempo en el aula o fuera de ella para que los alumnos piensen, analicen, argumenten y cuestionen.
A partir de lo anterior, se procede a elaborar la secuencia de actividades, que favorezca el logro de los objetivos y contenidos planteados, ayude a responder las preguntas propuestas y siga de cerca el desarrollo de la temática considerada.
La guía de actividades, se ha diseñado para ser desarrollada en un tiempo de 15 horas, aproximadamente, dependiendo de las condiciones del grupo que se vaya a atender. La planeación de las actividades, se realizó de modo tal que la Unidad se lleve a cabo en sesiones de dos horas.
Aunque dicha propuesta se elaboró tomando como referencia el enfoque de aprendizaje por descubrimiento guiado, en ella también se consideran, en particular, algunas estrategias de tipo cognitivo y metacognitivo, que buscan apoyar a los estudiantes en la adquisición de herramientas para desarrollar el aspecto del "aprender a aprender".

- **Algunas posibles dificultades en la operación de la propuesta.**

El modelo de argumentación, intenta generar un ambiente de aula, en el que el aprendizaje y la enseñanza, se desarrollan en un contexto problematizado, hipotético-deductivo, en el que los alumnos, trabajando en pequeños grupos, sobre la secuencia de actividades propuesta por el profesor, tienen oportunidades para pensar, hacer, debatir, argumentar y recapitular.

Esta forma de abordar la enseñanza de las matemáticas, implica grandes dificultades para el profesor y para los alumnos. Para los alumnos requiere una gran implicación personal, por lo que, sólo si se presta una atención explícita a generar y cultivar la implicación afectiva de los alumnos, será posible el cambio conceptual y epistemológico. Para el profesor, implica dejar de ser el protagonista en el aula, así también el organizar el aprendizaje de los alumnos, como una construcción de conocimientos, a partir del tratamiento y desarrollo de situaciones problemáticas.

Esa situación no siempre es adecuada para todos los estudiantes, por lo que es necesario el apoyo y la orientación del profesor, para involucrar a los estudiantes en la tarea así como infundirles seguridad en el desarrollo del trabajo, de modo que superen los obstáculos con ayuda del resto de sus compañeros. Como ya se señaló antes, es necesario favorecer el nivel de participación colectiva, en equipos y de forma grupal, para promover el involucramiento en la solución de los problemas planteados, a partir de las tareas diseñadas.

Adicionalmente, es necesario enfatizar la necesidad de favorecer la máxima interacción entre los grupos de trabajo, a través de la cual los alumnos pueden conocer en forma incipiente una de las características del razonamiento

En el anexo se muestra de forma completa la Unidad Didáctica Diseñada y se describe la secuencia global de la unidad así como los temas que serán abordados en la misma.

3.2 La investigación

3.2.1 Enfoque cualitativo

El enfoque de la investigación corresponde a un estudio cualitativo, en cual el método de recolección de datos es sin medición numérica; las descripciones y observaciones de en relación con los alumnos es tratando de entender los fenómenos desde la perspectiva propia. Sandoval (2002), conceptualiza el estudio cualitativo (fenomenológico) como la descripción de experiencias sin aludir a explicaciones causales. Para Hernández R. (2008), “la investigación cualitativa da profundidad a los datos, la dispersión, la riqueza interpretativa, la contextualización del ambiente o entorno, los detalles y experiencias únicas” (pág. 13).

3.2.2 Tipo de estudio descriptivo

La modalidad de la investigación descriptiva tiene como propósito describir, interpretar, entender y analizar el desempeño del estudiante en el aula; sus actividades, aprendizajes y dificultades que se observaron en el tema en cuestión de la materia de matemáticas II.

3.2.3 Preguntas de investigación

Se plantean algunas preguntas de investigación en el capítulo I y por medio de un estudio de casos con base en las respuestas de los estudiantes se realizan algunas inferencias. En este estudio de tipo cualitativo no se plantearan hipótesis, nos concretaremos a plantear preguntas y con el trabajo de los estudiantes dar respuestas a ellas.

3.2.4 Población y muestra

La Unidad didáctica se aplicó al grupo 206 A turno matutino el cual estaba formado por 25 alumnos del segundo semestre que corresponde a la materia de matemáticas II del Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Naucalpan.

3.2.5 Técnicas de recolección de datos

La selección de las técnicas para la recolección de la información se hizo por medio de estudio de casos, en el cual el profesor titular del grupo proporcionó información de dos de sus mejores alumnos, dos de los alumnos regulares y dos menos aplicados en la materia. Para la descripción de la información se utilizó la guía de actividades diarias, tareas, la observación de los alumnos en clase y su participación y el examen. Con lo anterior se logró: Identificar en qué contenidos se alcanzó un logro satisfactorio, cuales objetivos fueron tratados superficialmente o de manera insuficiente en el aula, conocer la percepción del avance en el aprendizaje individual de los alumnos en relación con contenidos específicos, reconocer dificultades individuales de aprendizaje, en algunos contenidos específicos de la Unidad.

4.- Resultados

Empezaremos a describir algunos resultados generales como representativos de aplicación de la guía de actividades:

Se enfrentó al alumno a formas de razonamiento en geometría en particular en los temas de perímetros, áreas y volúmenes.
Se dio una idea de cómo se construye el conocimiento matemático. Se mostró una manera de aproximarse intuitivamente al cálculo integral, de forma incipiente, se motivó al estudiante para se enfrenté al aprendizaje de las matemáticas invitándolo a pensar.
El trabajo geométrico realizado en cursos previos se debe anclar para que pueda con este curso formar parte del proceso del pensamiento geométrico en los alumnos.

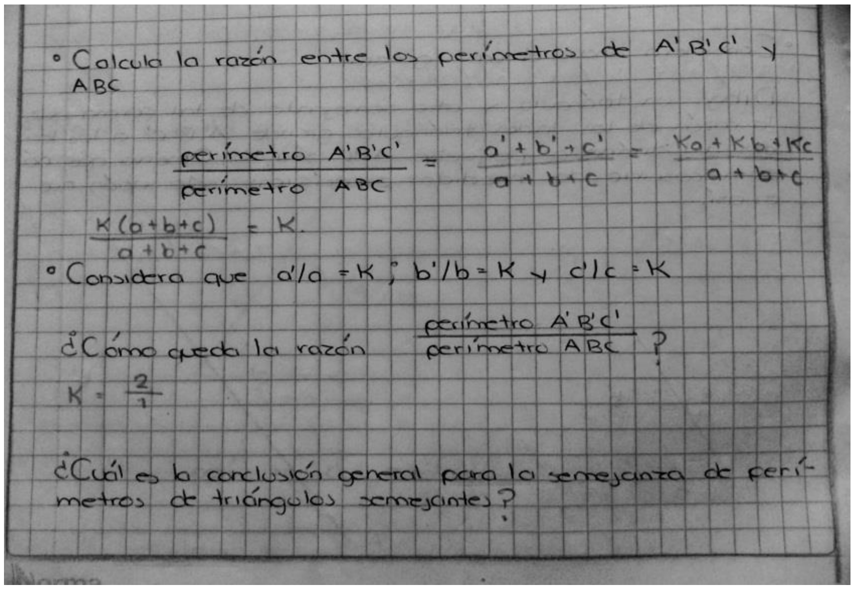
Analizamos el trabajo de los estudiantes, con la intención de responder las preguntas básicas que nos interesan: ¿Que hizo el estudiante?, ¿Qué aprendió? Y ¿Que dificultades se les presentó?

A continuación se describen algunos resultados representativos de las respuestas de los alumnos a las actividades.

4.1.- Razones entre perímetros y razones entre áreas de triángulos semejantes

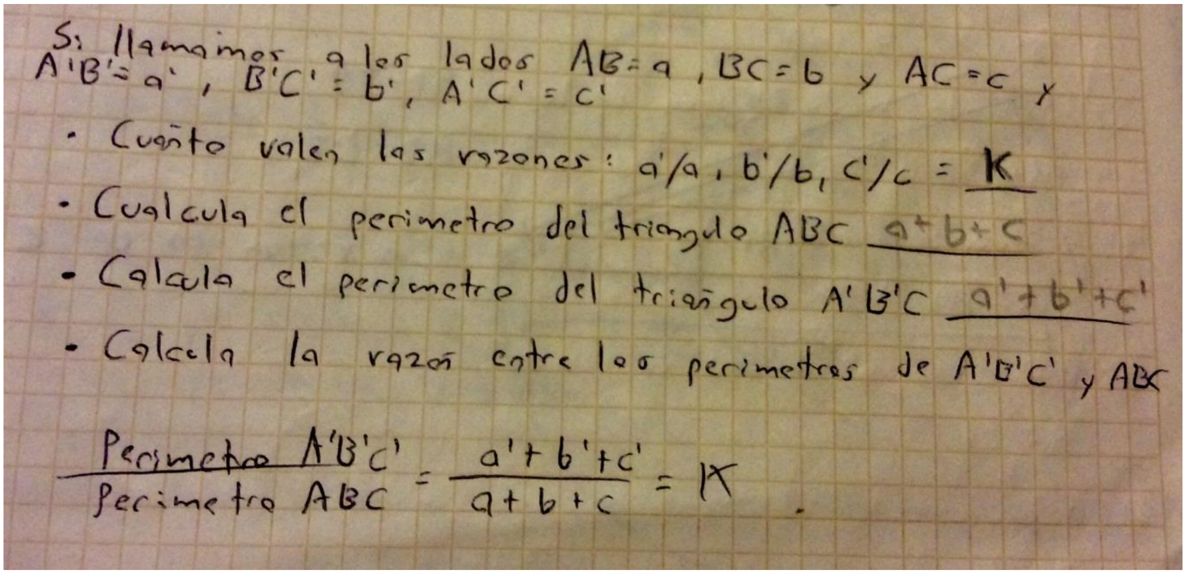
En la Actividad 3 en el inciso i que dice:
i) Considera ahora el caso general. Dibuja un triángulo y otro semejante de tal forma que la razón de los lados triangulo grande A´B´C´ a los lados del triángulo pequeño ABC sea K. Observa que no es necesario dar medidas específicas solo supón que así es. Si llamamos a los lados AB= a; BC=b y AC=c y A´B´= a´; B´C´=b´ y A´C´=c´
Cuánto valen las razones: a´/a; b´/b y c´/c

Lo que se pretende es que el alumno empiece a generalizar el concepto de razones entre perímetros de triángulos semejantes. Se observa que son muy pocos los alumnos que pudieron establecer la razón de semejanza en forma general. Los alumnos que generalizaron, se observa que en las actividades anteriores, saben que la razón entre dos triángulos semejantes se establece cuando la razón entre cada uno de los tres lados con respecto al otro es constante, lo denotan en forma algebraica. Esta notación la utilizan para establecer la generalización de la razón entre perímetros de triángulos semejantes.



Fotografía 1

La mayoría de los alumnos calculan la razón de perímetros entre triángulos semejantes con ejemplos específicos, y en el mejor de los casos saben que la razón entre perímetros es un número y sin ningún problema lo igualan a una letra (K). Los alumnos muestran dificultad en observar la necesidad de justificar.



Si llamamos a los lados AB = a , BC = b y AC = c y
A'B' = a' , B'C' = b', A'C' = c'

- Cuanto valen las razones: a'/a , b'/b, c'/c = K
- Cualcula el perimetro del triangulo ABC a+b+c
- Calcula el perimetro del triangulo A'B'C a'+b'+c'
- Calcula la razón entre los perimetros de A'B'C' y ABC

$$\frac{\text{Perimetro } A'B'C'}{\text{Perimetro } ABC} = \frac{a'+b'+c'}{a+b+c} = K$$

Fotografía 2

En la A4 se les pidió que resolvieran un problema en su casa, y es el siguiente: La razón entre el radio del círculo pequeño y el círculo grande es de 1/3. La cuerda del círculo grande vale 78, y el segmento que une al punto de la cuerda con el punto al extremo del diámetro es tangente al círculo pequeño. Encontrar el valor del radio R1 y el de R2. ¿Cuánto vale la razón de los perímetros del triángulo grande al triangulo pequeño de la figura 1?

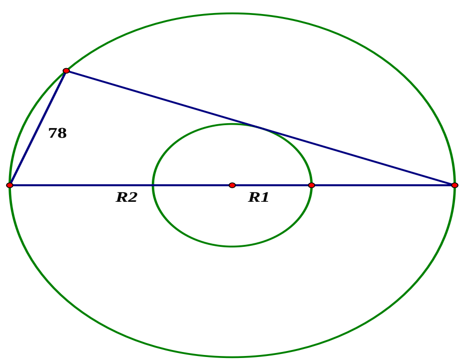
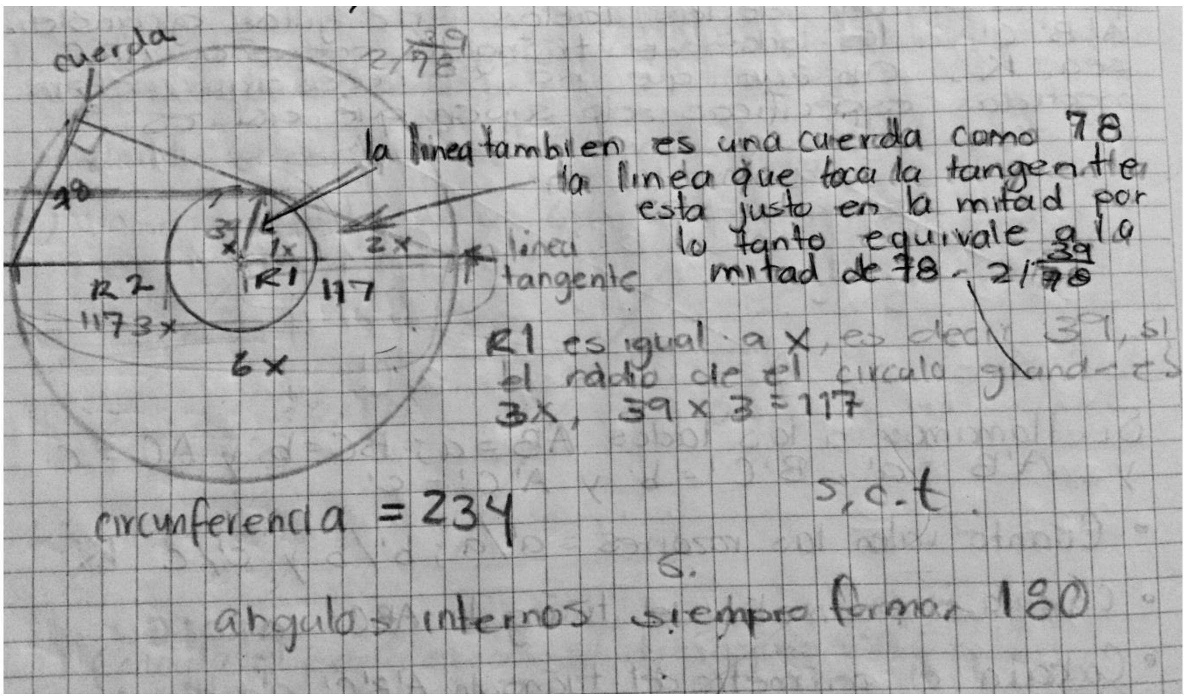


Figura 1

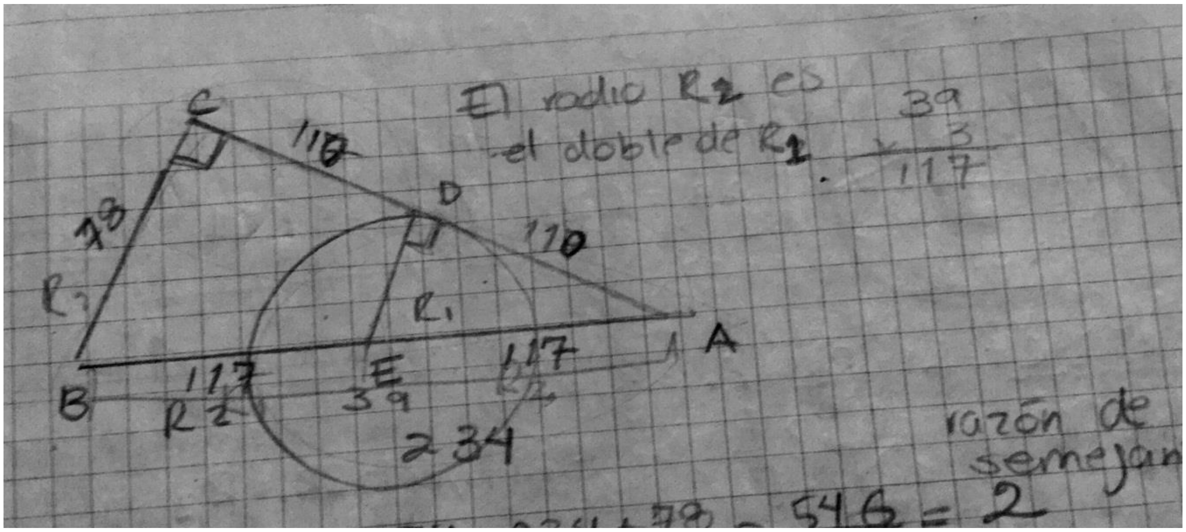
Este ejercicio tiene la intención de profundizar y reafirmar los conceptos de razón y proporción de triángulos semejantes, algunos alumnos identificaron que la razón entre el radio del círculo pequeño y el grande era de 1/3. Y también la razón del triángulo grande entre el pequeño, e inmediatamente identificaron las relaciones del triángulo mayor y el menor y encontraron el valor de los 2 radios.

Algunos otros aplicaron un teoremas que dice que en un triángulo una recta que es paralela a un lado y que pasa por la mitad de otro lado, y encontraron que el radio del circulo menor era una recta paralela a un lado del triángulo y lo cortaba a la mitad. Por lo tanto el radio del circulo menor era la mitad de la cuerda del circulo mayor (lado del triángulo), aplicando la razón entre los radios encontraron el radio del círculo mayor.



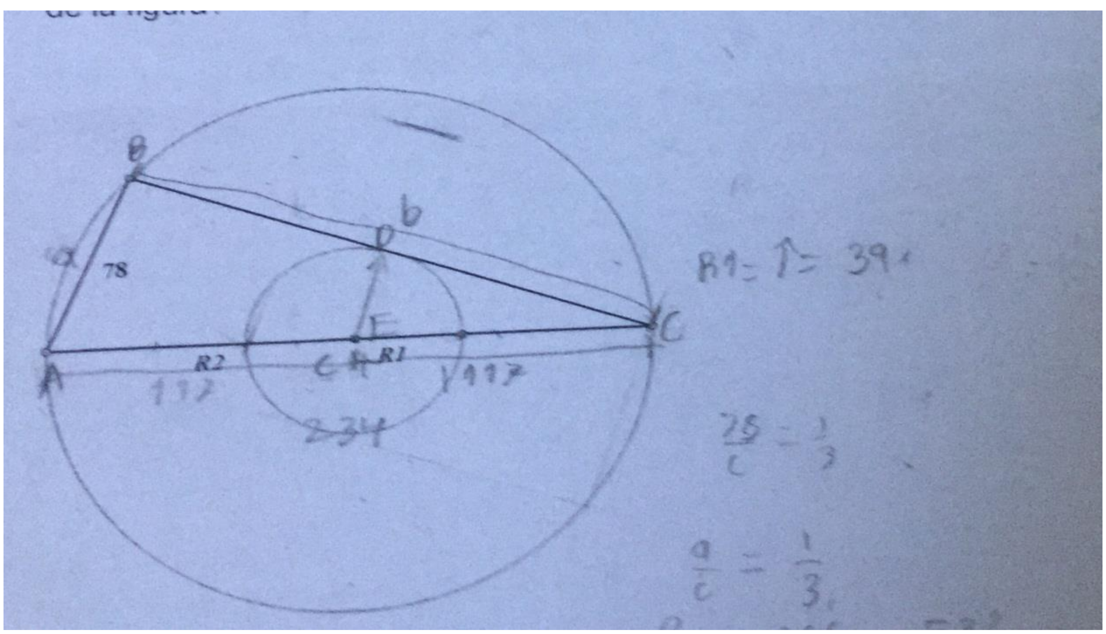
Fotografía 3

A los alumnos se les pidió que lo intentaran resolver el problema ellos solos, pero quizá algunos copiaron a sus compañeros y a otros se los resolvieron en asesoría. Pero se observa que aun así algunos alumnos presentan dificultades en asimilar el concepto de razón entre cantidades. En el ejercicio A4 como información a la solución del problema dice “La razón entre el radio del círculo pequeño y el círculo grande es de 1/3”. Y confunden la razón entre lados del triángulo y la razón entre radios de círculos. Observa cómo se confunden y escriben el radio R2 es el doble de R1.



Fotografía 4

algunos otros estudiantes no identifican las razones entre los radios de los círculos como datos del problema y los confunden al poner las razones de los lados homólogos igualados a la razón de los radios de los círculos.



Fotografía 5

La actividad A5 se refiere a la razón entre áreas de triángulos semejantes

Los alumnos trabajan muy bien cuando encuentran numéricamente la razón entre áreas de triángulos semejantes. Cuando se les pide que llamen K´ a la constante de la razón obtenida, y se les pregunta ¿qué relación hay entre K obtenida en la razón de perímetros de triángulos semejantes y la nueva K´? , ¿Podrías demostrar que en general $K´= (K)^2$? (inciso f de la A5). La mayoría no puede justificar algebraicamente la constante de proporcionalidad del área, únicamente justifican verbalmente y con casos específicos.

Los alumnos presentan dificultad en vincular una situación concreta de dimensiones de un triángulo y su expresión algebraica general, es necesario que se dedique un tiempo importante en este aprendizaje que permita que los estudiantes interioricen el sentido simbólico de las letras; como variables y, como base para el tratamiento algebraico de otros contenidos, y así identificar la necesidad de generalizar de una manera incipiente. Es muy importante que los estudiantes sean conscientes que al realizar, estos procedimientos, de igualar razones de proporcionalidad donde exista una incógnita, están aplicando el concepto de proporcionalidad. Para lograr esta conciencia es necesario que se realicen actividades que pongan de manifiesto la proporcionalidad y ésta se calcule por diversos métodos. La utilización de vídeos, de temas relacionados y programas informáticos va a permitir una visualización más fácil de la proporcionalidad entre las formas, sobre todo en el espacio, y su empleo cotidiano en el aula de trabajo.

El análisis de las relaciones de proporcionalidad entre perímetros y volúmenes resulta complicado. La dificultad que representa el estudio y análisis de la semejanza entre figuras se acrecienta al trabajar las áreas.

El problema con el que nos encontramos frecuentemente es la disociación entre dos ejes temáticos el álgebra y la Geometría que lleva aquellos estudiantes menos capacitados en el razonamiento abstracto, a que se pierdan en un mundo de fórmulas y ecuaciones.

4.2.- Medida en geometría

Uno de los problemas más generales en el aprendizaje de los contenidos de la medida se encuentra en relación con la utilización de los números para medir. En todo estudio de formas geométricas es fundamental el estudio de sus medidas: longitud, área y volumen. En el estudio de la medida hay dos aspectos, fundamentales, *comparar y contar. Así como comprender que no es lo mismo med*ir y calcular.

Es importantes y es básico ser conscientes que en cursos anteriores, se estudiaron algunos contenidos de medida como: unidades de medida, Sistema métrico decimal, instrumentos de medida como regla, compas y transportador, Así como algunas propiedades geométricas, que se utilizaron para realizar construcciones geométricas.

Estos temas y propiedades se utilizarán para profundizar en el tema de la medida. Para establecer la medida directa de una forma geométrica es preciso establecer una comparación entre ella y un patrón establecido, que tendrá una cierta graduación de tal manera que nos permita establecer la medida del objeto con la precisión que necesitemos. Se debe hablar de contenidos sobre la medida, una vez que se haya introducido al tema a los alumnos. Sin embargo, uno de los aspectos más problemáticos se deriva del tipo de magnitud: lineales, cuadráticas o cúbicas, del objeto a medir. Un ejemplo claro está en el problema que se les plantea a los alumnos y alumnas en la distinción entre la variación del perímetro y del área de una figura al realizar una transformación no isométrica en ella, por ejemplo, la variación del área de un rombo al modificar sus ángulos sin modificar la medida de los lados. Este problema se acentúa en el caso del volumen. La dificultad de los conceptos de longitud, área y volumen, debida en parte a su grado de abstracción y a su habitual representación es la raíz de este problema.

En este tema se pretende que el alumno establezca una unidad de longitud, una unidad de área y una unidad de volumen.

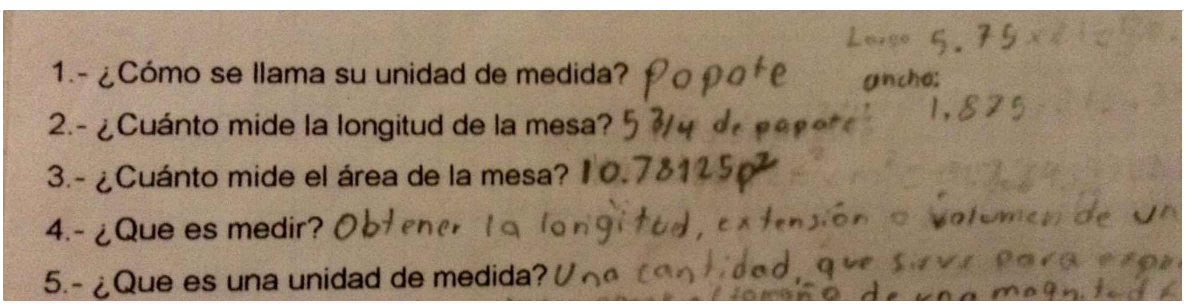
Que justifique verbalmente si podría medir con una unidad de medida arbitraria, superficies y volúmenes de algunos cuerpos como el cono, esfera, etc...

Se trata de lograr que los estudiantes identifiquen que hay una manera de obtener longitudes, áreas y volúmenes en forma directa (empírica) o indirecta (uso de fórmulas)

En la A6 se modificó el material de trabajo, se les entregó a los alumnos palitos, tablitas, listones etc., y se les pidió que respondieran individualmente y posteriormente en equipo las preguntas sobre el concepto de medida, y en la siguiente actividad se les pidió hacer conclusiones en grupo.

Se observó que trabajaron adecuadamente individual y en equipo y algunos fueron muy cuidadosos en observar y analizar su unidad de medida. A los equipos que se les asignó una barra de madera como unidad de medida, describieron su unidad en términos de largo ancho y altura de la tablita de madera. A los equipos que se les asigno popotes y listones la mencionaron como una unidad lineal.

En esta actividad lo que hicieron los alumnos fue definir que es medir y medir longitudes, áreas y volúmenes. Las diferentes definiciones sobre ¿Qué es medir? Fueron aceptables y las diferentes medidas que hicieron fueron también aceptables a acepción que en algunos casos confunden medir la longitud de una mesa con largo de la mesa, concepto que posteriormente se corrigió cuando trabajaron en equipo.



1.- ¿Cómo se llama su unidad de medida? Popote

2.- ¿Cuánto mide la longitud de la mesa? 5 3/4 de popote

3.- ¿Cuánto mide el área de la mesa? 10.78125p²

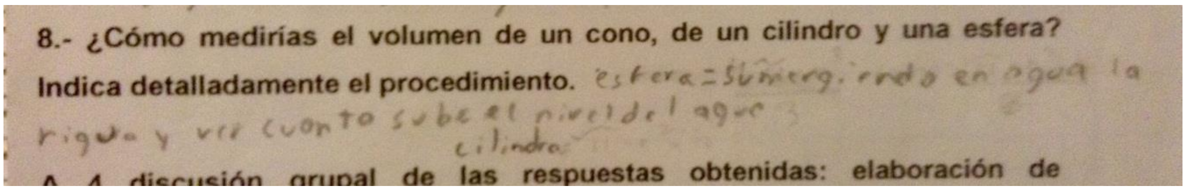
4.- ¿Que es medir? Obtener la longitud, extensión o volumen de un

5.- ¿Que es una unidad de medida? Una cantidad que sirve para expr

Fotografía 6

En la A8 se les pidió que contestaran un cuestionario relacionado con la definición de polígonos y su medida del perímetro, así como la longitud de la circunferencia, establecer unidades de área y volumen. Medir áreas de las paredes del salón (con su unidad de medida que se les asignó en una actividad previa) y pensar cómo medir volúmenes de conos y esferas.

Los alumnos trabajaron adecuadamente, pero algunos alumnos incluso el equipo presentó dificultades en realizar su actividad pues en lugar de medir calcularon con fórmulas la longitud de la circunferencia y el volumen del cono y la esfera. Otros equipos contestaron aceptablemente pues asimilaron el concepto de medir.



8.- ¿Cómo medirías el volumen de un cono, de un cilindro y una esfera? Indica detalladamente el procedimiento. esfera=sumergiendo en agua la figura y ver cuanto sube el nivel del agua cilindro

A 4 discusión grupal de las respuestas obtenidas: elaboración de

Fotografía 7

En la A9 se pide a los estudiantes que calculen el perímetro de algunos cuadriláteros, polígonos y circulo. En seguida se pide describir en su cuaderno, las fórmulas de las áreas y volúmenes de los siguientes casos según corresponda: cuadrado, rectángulo, triangulo, trapecio, trapezoide y círculo, cilindro, cono, prisma rectangular, cubo, prisma octagonal, pirámide triangular, pirámide cuadrangular, pirámide pentagonal y esfera.

Trabajaron adecuadamente el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.

En la A10 en equipo y en grupo verificaron las formulas y se les pregunto ¿Cómo puedes saber que son correctas? Y también ¿Cómo lo puedes demostrar?

En esta actividad los alumnos piensan que es correcta porque se la aprendieron de memoria o la copiaron de los libros y no ven la necesidad o interés de demostrar.

En la A11 se les pidió seleccionar una figura, para argumentar la fórmula de área o volumen, y la mayoría seleccionó el triángulo y su argumento fue verbal.

En la A12 Lo que realizaron los estudiantes fue una actividad dirigida para justificar la fórmula para calcular el área del rectángulo. Algunos alumnos siguieron individualmente la actividad y mostraron asombro, algunos otros no podían realizar individualmente la actividad incluso mostraron confusión con el lenguaje, por ejemplo, en la pregunta 7 ¿Qué relación hay entre el área del cuadrado grande (AG) y el área del cuadrado chico (AM) y los rectángulos de área (A)?.

El alumno al leer relación asumió que se le estaba preguntando "quizá" razón de semejanza y contesto que existía una relación de $\frac{1}{2}$.

En este ejercicio de justificación de la fórmula de área del rectángulo en la pregunta 10 que dice: ¿De qué supuestos estas partiendo? Solamente un estudiante contesto que las áreas se suman.

4.3.- Cálculo de áreas por descomposición y recomposición de figuras

En este tema lo que se busca es que el alumno desarrolle la capacidad de sumar áreas en forma visual y razonada y manipule áreas componiendo y descomponiendo figuras geométricas. En la A13 se justifica el área del triángulo, insertando un triángulo en un rectángulo, por otro lado un triángulo congruente se descompone de tal manera que se coloque en los espacios vacíos del rectángulo, se observa que el área del triángulo es la mitad del rectángulo. Al final de esta actividad se generaliza para cualquier triangulo insertado en el rectángulo.

En la A14 se justifica de la misma manera el trapecio. En la A15 se pide que justifiquen el área del rombo y del romboide y describan con sus propias palabras. En esta actividad los estudiantes insertan fácilmente el rombo dentro del rectángulo y encuentran fácilmente la formula. En el caso del romboide la mayoría de los alumnos lo identifican como un paralelogramo e incluso escriben que se llama así porque sus lados son paralelos y encuentran que su fórmula es igual a la de un rectángulo.

En la A16 Se pide que justifiquen el área de un polígono regular, en este caso la de un hexágono. La actividad se desarrolló sin ningún problema, hasta que se llegó a la última pregunta de la actividad en la que hace referencia a un polígono de n lados, así es la pregunta ¿Cómo podrías justificar que el área de un polígono regular cualquiera de N lados es A = Pa/2? ; En la que “P” es el perímetro del polígono de N lados y, “a” es la apotema del polígono.

Algunos de los estudiantes la contestaron, la intención de esta pregunta es que los estudiantes se enfrenten de una manera intuitiva a los procesos del cálculo integral, que junto con la siguiente actividad se forme un tipo de razonamiento o pensamiento de repetición infinita. La siguiente actividad es: A17 ¿Cómo se te ocurre que podrías calcular el área del circulo a partir de polígonos regulares inscritos? ¿Sería exacto el cálculo? Podrías justificar que el área del círculo es $A = \pi r^2$.

Los alumnos mencionaron que el área del polígono inscrito podría ser una primera medida del área del círculo. Otros alumnos mencionaron que esta medida no sería exacta, pero para dar un cálculo bastante aproximado de su área entre más lados tenga el polígono más cercano será el resultado. Para justificar el área del círculo, se les hizo una sugerencia de que la apotema la aproximaran al radio del círculo. Los alumnos sustituyeron el perímetro del circulo y la apotema por el radio y obtuvieron el área.

4.4.-Circunferencia

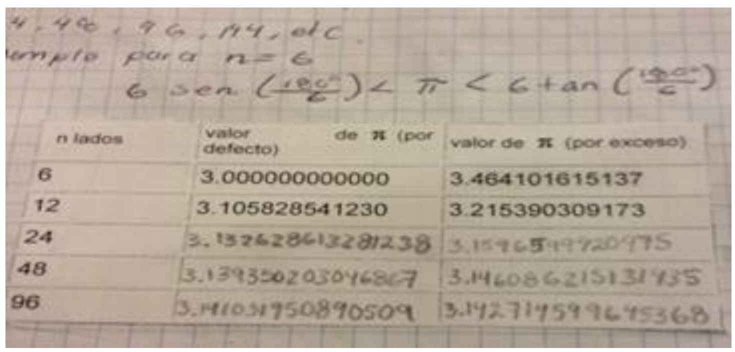
Con una serie de actividades en esta sección se obtuvo la fórmula empírica y teórica del perímetro y área de la circunferencia. En la A18. Mediante un experimento se aproximó el valor de Pi.

Consistía en medir la longitud de la circunferencia y del diámetro del mismo, y hacer la división, para que ellos observaran como se aproxima el valor de Pi.

Posteriormente para encontrar teóricamente el perímetro de la circunferencia, se hizo una nota histórica para ubicar al gran Arquímedes y su Método de Exhaución, después, se pidió dibujar una serie de polígonos regulares inscritos y circunscritos en la circunferencia para observar cómo se aproxima el perímetro del polígono al perímetro de la circunferencia por defecto y por exceso. Entre las Actividades se hizo un pequeño repaso de las principales razones trigonométricas, que supuestamente se estudiaron en nivel de enseñanza media. También se utilizan otros conceptos que se estudiaron en temas anteriores, como son: obtener la medida de los ángulos de un polígono, identificar un Angulo central, relacionar o comparar número de lados de un polígono con perímetro de circunferencia, que en este caso particular el alumno está analizando y elaborando supuestos (concepto de limite) en que caso sería igual el perímetro del polígono y el de la circunferencia. También se estableció una relación esquemática entre el radio de una circunferencia como un lado del polígono y el otro lado de un polígono como la mitad del ángulo central del polígono inscrito, como se muestra en la actividad A22

En el dibujo se muestra la relación del radio del círculo y la mitad del ángulo centra. Los alumnos aprendieron a expresar el ángulo y a calcularlo, y con las funciones trigonométricas relacionaron uno de los lados con la función seno (72^0). Otra presentación de cálculo de este objeto de estudio, perímetro de la circunferencia, podría ser desarrollada con el teorema de Pitágoras.

Esta actividad la pudieron seguir los estudiantes y obtener el lado del polígono en términos de la función seno y obtener el perímetro del polígono inscrito a la circunferencia. Posteriormente realizo el mismo procedimiento pero con polígonos circunscritos Con estas dos actividades los alumnos pudieron establecer la desigualdad de la aproximación de π por defecto y por exceso como lo hizo Arquímedes para el número de lados del polígono: 6, 12, 24, 48,96, etc. (A24).


4, 48, 96, 144, etc.
mplo para n = 6

$6 \text{ sen}\left(\frac{180°}{6}\right) < \pi < 6 \tan\left(\frac{180°}{6}\right)$

n lados	valor de π (por defecto)	valor de π (por exceso)
6	3.000000000000	3.464101615137
12	3.105828541230	3.215390309173
24	3.132628613281238	[illegible]
48	3.139350203046867	3.146086215131435
96	3.141031950890509	3.142714599645368

Fotografia 8

En la actividad A25. Los alumnos calcularon el área del círculo mediante aproximaciones sucesivas, es decir, sumando áreas de triángulos de un polígono regular de n lados.

Posteriormente los alumnos calcularon el área de la circunferencia por aproximaciones de polígonos inscritos, como se procedió en el cálculo del perímetro de la circunferencia. En esta actividad era necesario encontrar dos lados de un triángulo del polígono inscrito en términos de las funciones trigonométricas: el lado de la base y la altura o apotema. Algunos de los alumnos presentaron problemas, pues esta actividad implica un proceso de razonamiento más largo, porque el alumno tiene que repetir dos veces el procedimiento uno para encontrar la base y otro para encontrar la altura, antes de aplicar la fórmula para el área del triángulo. En la A26 trabajaron un poco más rápido pues realizaron el mismo procedimiento pero para polígonos circunscrito.

4.5.- Áreas y volúmenes de prisma, pirámide, cilindro y cono

Una vez que se analizaron los elementos del prisma, se hizo un ejercicio con el prisma hexagonal, posteriormente se hizo lo mismo con la pirámide para después estudiar los cuerpos de revolución. Esta parte no se incluirá en posteriores unidades didácticas, Pues estudiar estos conceptos para su uso en demostraciones se necesita más tiempo. A pesar de que los estudiantes se desenvuelven en un mundo tridimensional carecen, en muchos casos, de intuiciones espaciales. Este problema, bastante generalizado, se basa en la dificultad para representar las formas espaciales en el plano.

Un elemento metodológico muy importante para conseguir desarrollar la capacidad de visión espacial es la utilización de las nuevas tecnologías, tanto de los medios audiovisuales como de distintos juegos y programas informáticos tridimensionales, que simulan y permiten la visualización de las formas espaciales mediante una representación en el plano, potenciando el desarrollo de la abstracción espacial de las propiedades geométricas de las formas.

Otro de los recursos que puede ser útil, para el trabajo con formas espaciales, es la utilización de materiales manipulables. A partir del manejo de cuerpos sólidos, sus cortes y truncamientos, se pueden identificar y analizar propiedades importantes de las formas espaciales.

4.6 Examen

Se realizó un examen al final de la Unidad, como evaluación formativa
Como parte de las actividades a realizar en la secuencia didáctica, se aplicó un examen sobre la unidad didáctica, el examen está formado por 7 preguntas cabe mencionar que de los problemas del examen 5 son problemas tipo de Olimpiada, el examen fue contestado por 21 alumnos en un tiempo de 2 horas. Este examen permitió detectar algunas fallas en la elaboración del examen, avance en el razonamiento de los alumnos así como la comprensión de algunos conceptos y manejo de algunos

procedimientos, así como detectar algunos problemas y tratar de modificar futuras planeaciones de unidades didácticas. Mencionaré que se esperaba que contestaran los alumnos**, ¿Qué hicieron los alumnos? :**

:

1.- Determine la "formula" el área del sector del aro que se muestra en la figura I. El radio interior es "r" y el exterior es "R".

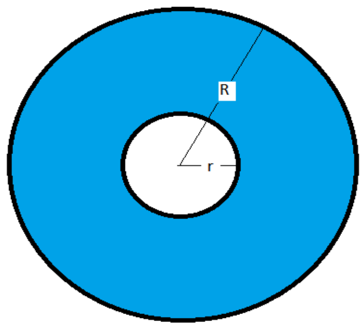


Figura I

La respuesta esperada a esta pregunta, es que fijen la atención a que es lo que se les pregunta, después que apliquen el concepto de área del círculo y realicen los cálculos correspondientes. $A=\pi R^2-\pi r^2$.

Un alumno escribe solamente la fórmula del área mayor. El 50% de los alumnos dan la respuesta correcta y escriben una ecuación en forma funcional y la otra mitad no lo hace, el 15% de los alumnos hacen una justificación verbal del resultado.

En la pregunta: 2.-

¿Cuántos litros de agua le caben a un tinaco cilíndrico de diámetro igual a 2 metros y que tiene un metro de altura? (1 litro de agua ocupa 1 dm^3).

En este problema se esperaría que manejaran las unidades de área que son metros cuadrados, y realicen la conversión a litros.

La mayoría de los alumnos hacen el cálculo y ponen como resultado únicamente π, quizá porque los metros cúbicos los asocien a un número no tan particular como π. Un número menor de alumnos muestran dificultad con las unidades que se están manejando y no pueden convertir las unidades de volumen a litros de agua, y esto tiene que ver con el razonamiento del concepto de proporcionalidad, es decir, $1m^3=1000$litros como $\pi m^3=x$ litros.

En la pregunta 3 que dice:

En el primero de los dibujos que aparecen abajo hay tres cuadrados sombreados, de un total de nueve; por tanto la fracción de la figura *es* $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

¿Qué fracción de figura está sombreada en cada uno de estos casos?

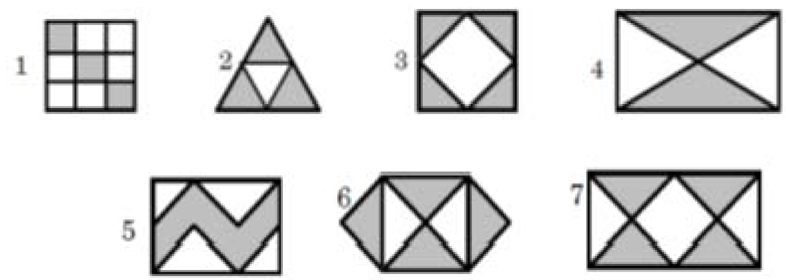


Figura II

Lo que se esperaria es que manejen la descomposicion o recomposicion de las figuras como se hizo en la actividad en clase. La mayoria de los lumnos obtuvieron el resultado, de ésta la mitad de los alumnos hicieron un trazado en las figuras 3, 4, 5 y 7 para observar o justificar las áreas. A los alumnos que dieron respuesta correcta puede interpretar que el problema es muy simple lo cual se puede descartar pues es un problema de olimpiada, o bien, los alumnos procesaron bien la idea de componer o descomponer areas de poligonos regulares lo cual es muy probable.

4.- Tenemos un cuadrado de lado 10 cm. Calcula el área de la figura sombreada, donde A, B, C y D son las puntos medios de los lados del cuadrado.

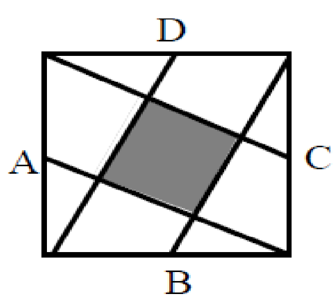
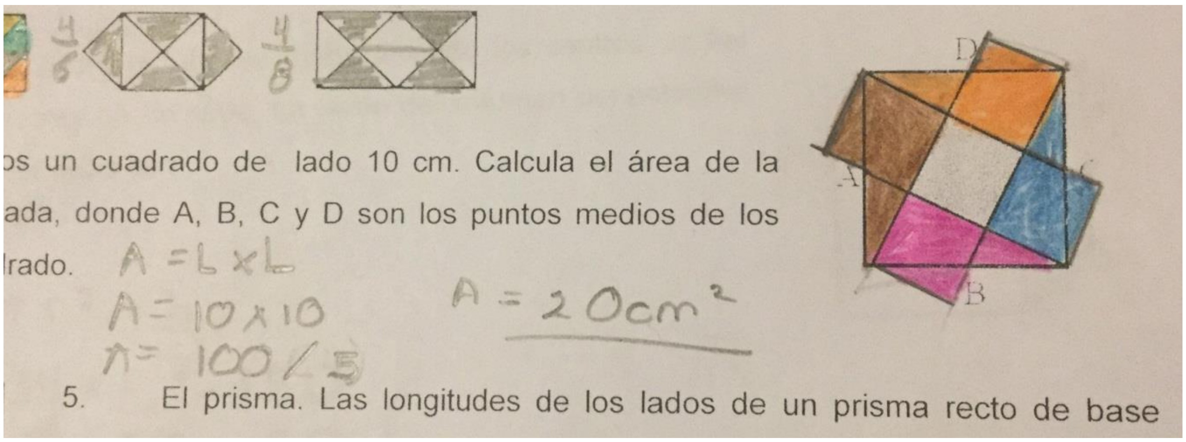


Figura III

Algunos alumnos presentan respuesta incompleta y no argumentan.

Otras muestran respuesta correcta con escritura de relaciones únicamente.

Un 20% hacen argumentación correcta, muestran un trazo, que con el teorema de Tales, algunos observan que la hipotenusa del triángulo menor es ½ igual que el resto de la hipotenusa del triángulo restante, doblan el triángulo menor sobre la hipotenusa del triángulo mayor, de la misma forma con los 4 triángulos y visualmente se observa una cruz formada por cinco cuadrados completos.



Fotografía 9

5.-El prisma. Las longitudes de los lados de un prisma recto de base rectangular son proporcionales a los números 1, 2, y 3. La superficie total del prisma es de 550 cm2. Calcula el volumen.

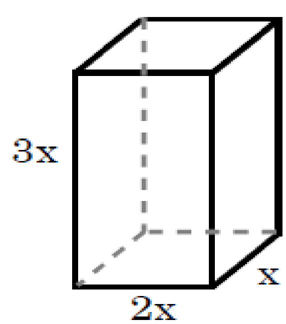


Figura IV

En esta pregunta se espera que expresen correctamente el área lateral, y obtengan el valor de la x, y expresen el valor de cada lado del prisma, y posteriormente encuentren el valor del volumen.

La mitad del grupo no respondió la pregunta, de estos algunos dejaron indicado la fórmula del volumen, algunos otros dejaron indicado la fórmula de la superficie pero no la igualaban al dato que se proporcionaba de la superficie. La mitad del grupo si contesto adecuadamente la pregunta incluso algunos alumnos dibujaron el prisma desarrollado para demostrar la superficie.

En la pregunta 6 se les presentó una figura y se pregunto lo siguiente: ¿todos estos paralelogramos tienen la misma área? ¿Por qué?

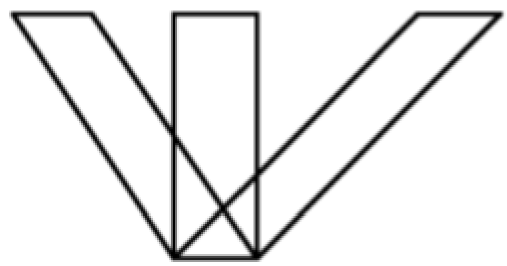


Figura V

La mitad del grupo respondió que sí, pero solamente algunos respondieron que si porque tenían la misma base y la misma altura, se esperaba que algunos alumnos descompusieran el paralelogramo en dos triángulos y observaran que son dos triángulos de igual base e igual altura. No pudieron justificar de la manera que se esperaba. La otra mitad del grupo no identificó que eran de igual área aunque en clase se les mostro la misma figura pero con triángulos y en ese caso sí respondieron verbalmente que era la misma área triángulo.

7.- Para imprimir las revistas de la Olimpiada se han utilizado bobinas de papel que tienen un diámetro de 10 cm, conteniendo en su interior un tubo de 4 cm de diámetro. Sabiendo que la altura de cada una de ellas es de 1.5 metros y que el grosor del papel es de 0.1 mm. Calcular aproximadamente los metros cuadrados de papel que contiene cada bobina.

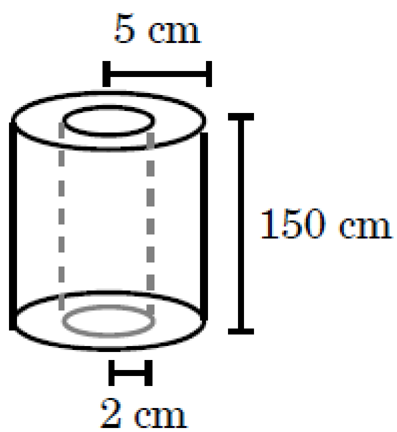


Figura 6

En este problema lo que se espera es que el alumno razone en un primer momento lo que se está pidiendo, que identifique que conceptos aprendió como áreas, volumen, unidades de medida entre otras, y como relacionarlos para resolver una situación que se le presenta en su vida cotidiana. Y no la vean como un problema de solución en clase.

Lo que se observo fue lo siguiente:

El 5% de los alumnos no hizo nada. El 25% de los alumnos no establece la forma funcional del volumen, hace operaciones que no es la forma completa ni correcta del volumen, no sabe en qué unidades está trabajando y escribe un resultado que no es el correcto. Casi un 40% Los alumnos empiezan a reconocer que en un primer paso se calcula el volumen del rollo de papel.

Algunos escriben que el volumen es igual al cilindro grande menos el cilindro pequeño pero únicamente lo dejan indicado (3). Otros escriben la formula correcta pero cometen errores al elevar el radio al cuadrado; lo multiplican por dos, otros escriben el resultado incorrecto y otros sin unidades de medida o unidades incorrectas. Un 20% de los alumnos calculan únicamente el volumen pero presentan la forma funcional del volumen con las unidades de medida llegan al resultado correcto con sus unidades (1) presenta error al elevar al cuadrado; lo multiplica por dos. Y Otro escribe el resultado y en lugar de unidades escribe volumen de hojas. Aproximadamente un 15% de los alumnos saben que se les está solicitando: metros de papel y llegan al resultado.

Adicionalmente, se realizó la evaluación de la actitud individual del alumno con respecto a la asignatura y al grupo, es decir, si asistió regularmente a clase, si realizó las tareas propuestas en la misma o fuera de clase, si participó en las discusiones grupales, si respetó la opinión de sus compañeros, asociada con los puntos anteriores, se asignó una calificación final.

5.- Conclusiones:

En este trabajo se ha desarrollado una Unidad Didáctica consistente con un modelo de diseño y en un enfoque con el modelo de educación en ciencias y humanidades. Ha permitido identificar la necesidad de contar con una orientación clara de cómo se diseña una unidad didáctica y qué elementos debe considerar, la cual representa un aprendizaje importante en la formación didáctica de todo profesor, no importa el área donde se desarrolle.

En la U.D. elaborada, se utilizó un tipo de enseñanza: aprendizaje por descubrimiento guiado, propuesta por Ausubel, la estrategia didáctica consiste en un acercamiento progresivo de las ideas de los alumnos a los conceptos matemáticos, que no solo tenga la intención formativa, sino también una formación en el desarrollo de habilidades de pensamiento, específicamente asociadas con la resolución de problemas y la argumentación de las soluciones.

En la U.D. Que se diseñó, se planteó como propósito promover formas incipientes de razonamiento y argumentación en las Matemáticas en un tema de geometría: longitudes, áreas y volúmenes. Después de aplicar la unidad didáctica y analizar los resultados de las actividades realizadas y los productos elaborados por los alumnos se puede afirmar que es posible a partir de un diseño adecuado de U.D., como la que aquí se presenta con algunos ajustes, promover ese aspecto de la formación en matemáticas de un estudiante de bachillerato, específicamente se pueden enunciar las siguientes conclusiones:

- En términos generales los alumnos perciben los problemas como algo que requiere una solución y no precisamente para justificar o argumentar su solución.
- La actitud de la mayoría de estudiantes se asocia, como es de esperar, con la aprobación del docente ante cada procedimiento que hacen o realizan.
- Los esquemas de prueba que son más frecuentemente usados son aquellos en los cuales los problemas que contienen datos numéricos y que demandan información del mismo tipo.

- No trabajan con generalidades, recurren a casos para validar su respuesta e incluso uno solo puede bastarles como demostración.
- En particular los esquemas perceptuales y de manipulación de objetos concretos están arraigados a su forma de pensamiento, por ello es importante valorar todos los esfuerzos de los estudiantes en la resolución de los problemas de geometría. Ello permite ubicar que sus métodos corresponden en gran medida a las etapas de desarrollo histórico de la geometría y de sus formas de demostración.
- Al parecer no tienen dificultades cuando se trata de justificar afirmaciones a partir de manipulación de objetos concretos y que se asocia con procesos de medición. Eso corresponde con el que aún se ubican muchos de ellos en la etapa de operaciones concretas según Piaget.

Adicionalmente se identificaron algunas problemáticas que no apoyan el propósito que se persiguió en este trabajo y que estaban relacionadas con el diseño de las actividades a realizar dentro y fuera del aula:

- Se identificaron algunas dificultades, relacionadas con la disposición de los alumnos para realizar actividades fuera del aula.
- Aun cuando son temáticas trabajadas en la primaria y secundaria presentan dificultades con el manejo de unidades asociadas con unidades de área y volumen.
- La predisposición o visión de lo que representan las matemáticas y su aprendizaje como el solo aplicar fórmulas para resolver problemas.
- La formación previa en matemáticas de los estudiantes orientados solamente a procesos de tipo algorítmico y memorístico.
- La falta de claridad sobre la importancia de las matemáticas en su formación como alumnos de bachillerato y en el desarrollo de habilidades de pensamiento como la demostración o la argumentación.

También se identificaron algunas dificultades relacionadas con el diseño de la unidad como el contar con elementos más elaborados para identificar hasta donde es posible y de qué forma es posible que un alumno sea capaz de reconocer la necesidad de demostrar o argumentar en matemáticas como un elemento útil de su desarrollo como persona. También es necesario ajustar algunas actividades a las condiciones reales del grupo en el que se esté trabajando.

En lo que se refiere a las forma de evaluación falto incluir algún instrumento de autoevaluación sobre lo aprendido en la U.D. ya que puede servir como una buena herramienta de evaluación formativa, sumativa y de reflexión de tipo metacognitivo que dé cuenta el punto de vista del estudiante sobre su aprendizaje, por ello resultó ser una de las debilidades detectadas.

6.- Bibliografía

Alonso Sanchez, M., Gil Perez, D., & Martinez Torregrosa, J. (1996). Evaluar no es calificar. La evaluación y la calificación en una enseñanza constructivista de las ciencias. *investigaciones en la escuela No. 30*.

Arellano Camacho, C. (2013). La argumentación de alumnos de Bachillerato al resolver problemas matemáticos. *Grado de Maestría en didáctica de las Matemáticas*. Universidad Autónoma de Quéretaro Facultad de Ingeniería: tesis.

Boltianski, V. G. (1981). *Figuras equivalentes y equicompuestas. Lecciones populares de matemáticas.* Moscú: Mir.

Carretero, M. (1997). *Construir y Enseñar las Ciencias Experimentales.* Argentina: Aique.

Castelnuovo, E. (2004). *Didáctica de la matemática moderna. SERIE DE MATEMATICAS.* México, D.F.: Trillas.

Castelnuovo, E. (2004). *Didáctica de la matematica moderna. SERIE DE MATEMATICASr.* méxico, D.F.: trillas.

Castro, E., Flores, P., & Segovia, I. (1997). Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas. *SUMA*, n. (26) 23-32.

CCH. (2003). *Programa de estudios de matemáticas, semestre I-IV.* México.

De Guzman, M. (s.f.). *Organizacion de Estados Iberoamericanos para la Educacion, la Ciencia y la Cultura.* Obtenido de htt:/www.oei.es/oeivirt/edumat.htm

Díaz Barriga Arceo, F., & Hernández Rojas , G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretacion constructivista. Segunda edición .* Mexico: Mc Graw Hill Interamericana.

Eleizalde, M., & et.al. (2010). Aprendizaje por descubrimiento y su eficacia en la enseñanza de Biotecnología. *Revista de Investigación [online]*, vol.34,n.71 271-290.

Flores, A. (1993). Un tratamiento geométrico de la inducción matemática: pruebas que explican. *Miscelánea Matemática*, 19, 11-23.

Galdós, L. (1995). *Consultor Matemático Vol. III.* Cultural S.A.

García Arenas, J. (1998). *Geometría y experiencias.* Madrid España.

Gete-Alonso, J. C., & Del Barrio, V. (1989). *Medida y Realidad. Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra.* Impreso en México: Alhambra.

Gil Pérez, D., & De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas Tendencias e Inovaciones* . España: Popular.

Godino D., J., & Recio, A. M. (2001). Significados Institucionales de la Demostración. Implicaciones para la educacion matemática. *Enseñanza de las Ciencias.*, 19 (3), 405-414.

González López, M., & Flores, P. (2002). Conocimiento profesional del profesor de secundaria Sobre las matemáticas: el caso del volumen. *Educación Matemática*.

Henao, M., & Solorzano Ch., B. A. (1995). Una aproximación al desarrollo del pensamiento en el adolescente. *revista Universidad Eafit*, 53-60.

Hernández , R. (2009). Honduras 2008, Evaluación de los Aprendizajes Vislumbra una Luz de Esperanza en Educación. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, Volumen 2, número 1, pag 90-113.

Hernández Rojas, G. (1998). Paradigmas en psicología de la educación. México: paidos.

Larios Matuk, E. G. (2007). Razonamiento y Prueba en Geometria:Proceso de validacion de proposiciones matematicas en Educacion Secundaria. Universidad Pedagogica Nacional, Mexico D.F.: Tesis.

Larios Osorio, V. (2003). Si no demuestro...¿enseño matematicas? *Educacion Matematica*, 163-178, vol. 15.no. 2, Grupo Santillana Mex.

Nápoles Valdés, J. E. (2004). *La enseñanza de la demostracion matemática.* Obtenido de www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2001/9.../D-021.pdf

Ortiz A., H. H., & Jimenez G., F. N. (2006). la demostracion elemento vivo en la didactica de las matematicas. *Scientia et technica*, Año XII No. 31.

Ortiz Rodriguez, F. (2001). *MATEMATICA ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE, PEDAGOGIA DINAMICA.* Mexico, D.F.: Editorial Pax Mexico.

Polya, G. (1996). *Cómo Plantear y resolver Problemas. Serie de matemáticas.* Trillas.

Ponce Huertas, C. (2009). Matematicas. "Area de figuras Planas". ESO. *Revista Digital. Inovacion y Experiencias Educativas* , No. 21 agosto.

Pozo, J., & Gómez, M. (1998). *Aprender a Enseñar Ciencia. Del Conocimiento cotidiano al conocimiento Científico.* España: Morata.

S/A. (s.f.). *SUPERFICIE Y ÁREA*. Obtenido de http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Propuestas/Praxissuperfi.pdf

Saíz Roldan, M. (s.f.). *El Volumen ¿Por dónde empezar?* Obtenido de http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf

Sánchez Blanco, G., & Valcárcel Pérez, M. (1993). Diseño de Unidades Didácticas en el Área de Ciencias experimentales. 33-34.

Sandoval Casilimas, C. (2002). Investigacion Cualitativa. *Programa de Investigacion en teoría, métodos y técnicas de Investigación Social, ICFES*, 131-161.

Shayer, M., & Adey, P. (1986). *La Ciencia de enseñar Ciencias. Desarrollo Cognoscitivo y Exigencias del Curriculo.* España: Narcea, S.A. de Ediciones.

Uribe Garzon, S., & Cárdenas Forera , O. (2014). Teselaciones para niños: Una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educacion Matematica*, vol 26, num 2, agosto.

Vilanova, S., Rocerau, M., & et. al. (2015). Obtenido de : El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje: http://www.rieoei.org/deloslectores/203vilanova.pdf

Wiscamb Hutchinson, M. (1976). *Geometría. Un enfoque intuitivo.* Trillas.

Anexo I

UNIDAD DIDÁCTICA

Estudio de los temas de longitudes, áreas y volúmenes en el curso de Matemáticas II del CCH (uso de la justificación o argumentación)

Introducción

La unidad didáctica pretende contar con un trabajo organizado que facilite la forma de actuación del profesor en el aula. El profesor debe tener una actitud de guía y apoyo para que el alumno aprenda. A continuación se describe la secuencia global de la Unidad Didáctica que aquí se presenta.

En el tema Razones entre perímetros y razones entre áreas de triángulos semejantes, se hace una revisión de los conceptos como razón, proporción, razón de segmentos, razón de escala en dibujo, conceptos sobre propiedades de semejanza de triángulos. Posteriormente estos conceptos de desarrollan o específicamente en las siguientes actividades en donde miden lados triángulos y cálculo de razones entre ellos, tomando en cuenta o reforzando los conceptos donde haya más problemática en el conocimientos previos detectados en los alumnos. Posteriormente los perímetros de triángulos semejantes y lo establecen como razón, al mismo tiempo se enfrenta a que generalicen. También se trabaja con la razón de áreas de triángulos semejantes.

En lo que se refiere al tema medida en geometría, se pretende que los alumnos comprendan que en el proceso de medir longitudes áreas y volúmenes depende de la unidad de medida que se tome en cuenta. Además que justifiquen y comprendan que medir es un proceso en el que se compare la unidad de medida con la cualidad a medir y asignar un número a esa cantidad. También que aprendan y definan conceptos como polígono, circunferencia, cuadrilátero y justifiquen o verbalicen como medirían su perímetro y área, que es diferente a calcular con las formulas. Una vez que identifican las formulas, que piensen como se les acurre demostrar alguna de ellas, o por qué, es así la formula. Posteriormente realizan una actividad guiada para justificar la fórmula del área del rectángulo.

En el tema Cálculo de áreas por descomposición y recomposición de figuras, se trabaja con el triángulo como recomposición de un rectángulo para que los alumnos encuentren relaciones y justifiquen las formulas del área del triángulo, de igual forma para trapecio rombo y romboide, finalmente con el hexágono y llegando a la justificación de la fórmula del área del círculo (calculo indirecto).

En el tema de Circunferencia, se requiere que los alumnos realicen una medición aproximada del perímetro de la circunferencia, es decir una aproximación directa con instrumentos como reglas, listones etc., de objetos circulares.

En este tema también se incluye el tema de Arquímedes y el método de exhaución en donde se plantea como una forma de aproximarse a la justificación de la fórmula del perímetro y área de la circunferencia como un concepto intuitivo del límite. En esta parte se hace una revisión de las principales razones trigonométricas, y mediante una actividad guiada el alumno va siguiendo en procedimiento, como un ejercicio de razonamiento guiado.

En el último tema, áreas y volúmenes de prisma, pirámide, cilindro y cono, se estudian elementos de prismas y pirámides, así como el estudio de la generación de los llamados cuerpos de revolución, se les pide que describan como obtendrían el área de prismas y pirámides. También como medirían el volumen de prismas y pirámides y también que trataran de demostrar cómo se obtiene las formulas del volumen de los cuerpos.

La unidad didáctica cuenta con la siguiente temática

1.-Razones entre perímetros y razones entre áreas de triángulos semejantes, A1-A5

2.- Medida en geometría, A6-A12

3.- Cálculo de áreas por descomposición y recomposición de figuras, A13-A17

4.-Circunferencia, A18-A26

5.- Áreas y volúmenes de prisma, pirámide, cilindro y cono, A27- A41

Contenidos

Contenidos conceptuales

Razón, proporción, semejanza, perímetro, área, volumen, medición, unidades de medida, descomposición, recomposición, figuras geométricas, cuerpos geométricos

Contenidos procedimentales:

- Resolución de problemas
- Comparación de longitudes, áreas y volúmenes
- Argumentación de afirmaciones (saber hacer)
- Representación e interpretación de figuras y métodos de cálculo de longitud áreas y volúmenes.

Contenidos actitudinales

Que los alumnos:

- Asuman una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas.
- Reconozcan la importancia de las matemáticas en el desarrollo de la civilización y resolución de problemas prácticos.
- Asuman una actitud positiva ante los problemas que abordan a fin de superarlos y resolverlos adecuadamente.
- Establezcan comunicación en forma respetuosa y argumentada, en la discusión de los temas que se trabajan en el aula.
- Reconozcan en las matemáticas a la argumentación y justificación como formas básicas de establecer el conocimiento matemático.

1.- Razones entre perímetros y razones entre áreas de triángulos semejantes

A 1. Cuestionario

Contesta en tu cuaderno, lo que se te pide a continuación:

1.- ¿Qué entiendes por razón?

2.- ¿Qué entiendes por proporción?

3.- Cómo interpretas las siguientes afirmaciones

Un segmento está en razón 2 a 1 con otro segmento.

Un segmento está en razón 1 a 2 con otro segmento.

4. Si se te pide que dibujes un terreno en una escala 1: 200. ¿Cómo se interpreta o qué quiere decir?

5. ¿Cuándo 2 triángulos son semejantes?

6. ¿Qué debe cumplirse para que dos triángulos sean semejantes?

7. ¿Todos los triángulos equiláteros son semejantes? (justifica tu respuesta)

8. ¿Todos los polígonos regulares son semejantes? (justifica tu respuesta)

A 2. Ejercicio de triángulos semejantes

Se tiene un triángulo rectángulo ABC con las medidas que se indican en la figura 1

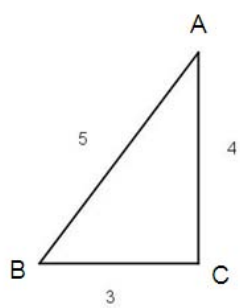


Figura 1

Dibuje un triángulo semejante A´B´C´ que sea el "doble de tamaño" del triángulo ABC.

Al comparar los lados del triángulo A´B´C´ con el triángulo ABC se observa que existe entre sus lados una relación. ¿Cuál es?

Es decir, mientras que el

El lado A´B´ mide ____cm, el correspondiente lado AB mide ____ cm.

El lado B´C´ mide ____ cm, el correspondiente lado BC mide ____cm

El lado C´A´ mide ____cm, el correspondiente lado CA mide ____cm.

Al calcular las siguientes razones entre los lados de los triángulos obtenemos:

A´B´/ AB =____ B´C´/ BC= _____ C´A´/ CA=_____

En consecuencia se puede establecer que:

A´B´/ AB= B´C´/ BC= C´A´/ CA=_____

Esto confirma que existe una razón de proporcionalidad, entre los lados constantes igual a __________.

Es común denominar esta razón con la letra K, por lo que podemos escribir
K =_____.

¿Qué resultado esperas obtener si ahora calculas la razón entre el triángulo ABC, con respecto al triángulo A´B´C´?

AB/ A´B´= BC/ B´C´= CA/ C´A´=_____

Podrías decir ¿cuál es la razón de proporcionalidad entre los lados? K´ =______

A 3. Relación de proporcionalidad entre Perímetros de triángulos.

a) Dado que los lados de triángulos semejantes son proporcionales, es decir la razón del lado de uno de ellos es un múltiplo del otro. ¿Qué relación crees que existe entre el perímetro de un triángulo dado y el perímetro de un triángulo semejante a él? Justifica tu respuesta.
b) ¿Cómo podemos calcular la razón entre los perímetros de triángulos semejantes?
c) Vamos a partir de la figura 1 de la actividad 2:

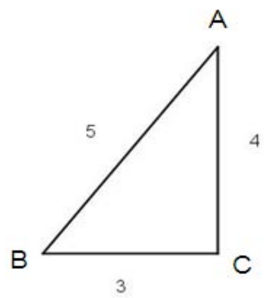


Figura 1

d) Calcula el perímetro del triángulo ABC ________

e) Calcula el perímetro del triángulo A´B´C´_________

f) Calcula la razón entre los perímetros de A´B´C´ y ABC

$$\frac{perímetro \mathrm{A´B´C´}}{perímetro\ \mathrm{ABC}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

g) Calcula la razón entre los perímetros de ABC y A´B´C´

$$\frac{perímetro\ \mathrm{ABC}}{perímetro\ \mathrm{A´B´C´}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

h) El perímetro del ∆A´B´C´ es ___________ veces el perímetro del ∆ABC o de otra manera, el perímetro del ∆ABC es ___________ del perímetro del. ∆A´B´C´

i) Considera ahora el caso general. Dibuja un triángulo y otro semejante de tal forma que la razón de los lados triangulo grande A´B´C´ a los lados del triángulo pequeño ABC sea K. Observa que no es necesario dar medidas específicas solo supón que así es.

Si llamamos a los lados AB= a; BC=b y AC=c y A´B´= a´; B´C´=b´ y A´C´=c´

Cuánto valen las razones:

a´/a; b´/b y c´/c

Calcula el perímetro del triángulo ABC ________

Calcula el perímetro del triángulo A´B´C´_________

Calcula la razón entre los perímetros de A´B´C´ y ABC

$$\frac{perímetro\, \mathrm{A´B´C´}}{perímetro\ \mathrm{ABC}} = \rule{8cm}{0.4pt}$$

Considera que a´/a =K,

b´/b = K y c´/c = K

¿Cómo queda la razón $\frac{perímetro\, \mathrm{A´B´C´}}{perímetro\ \mathrm{ABC}} = \rule{6cm}{0.4pt}$?

¿Cuál es la conclusión general para la semejanza de perímetros de triángulos semejantes?

$$Perímetro\, \mathrm{A´B´C´} = \rule{1.5cm}{0.4pt}\, Perímetro\ \mathrm{ABC}$$

A 4. Resuelve el siguiente problema:

La razón entre el radio del círculo pequeño y el círculo grande es de 1/3. La cuerda del círculo grande vale 78, y el segmento que une al punto de la cuerda con el punto al extremo del diámetro es tangente al círculo pequeño. Encontrar el valor del radio R1 y el de R2?

¿Cuánto vale la razón de los perímetros del triángulo grande al triangulo pequeño de la figura 2?

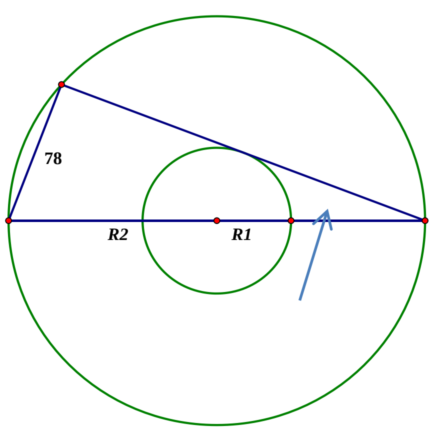


Figura 2

A 5. Razón entre áreas de triángulos semejantes

Considera el triángulo de la actividad A2 y dibuja un triángulo semejante al que se muestra.

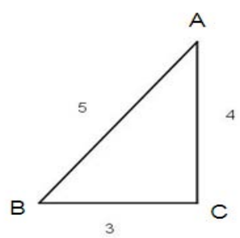


Figura 1

a) ¿Cuánto vale la constante de proporcionalidad que elegiste?

K=_______

b) Ahora vamos a comparar las áreas de ambos triángulos.

Escribe la fórmula del área de un triángulo______________

c) Calcula el área del triángulo A´B´C´ ___________________

d) Calcula el área del triángulo ABC._____________________

e) ¿Cuantas veces cabe el área del triángulo ABC en la del triángulo A´B´C´?

El triángulo de ABC cabe _________ en el triángulo A´B´C´ en consecuencia el área del ΔA´B´C´ está con el área del ΔABC en una relación de ________

(Escribe en palabras)

$$\frac{Área \circ del \circ \Delta A'B'C'}{Área \circ del \circ \Delta ABC} =$$

f) ¿Cómo se relaciona la constante de proporcionalidad de los lados con esta constante de las áreas? Es decir si llamamos K´ a la constante obtenida, qué relación hay entre K y K´ ¿Podrías demostrar que en general K´= (K)2?

Discute con tus compañeros el razonamiento y escríbelo a continuación en forma detallada. Una vez obtenido el resultado compárenlo con otros equipos en forma de plenaria.

2.- Medida en geometría

¿Qué es medir longitudes áreas y volúmenes?

A 6. Medir

Formar equipos de 3 o 4 estudiantes y entregar listones de diferente tamaño a cada equipo. Consideren el trozo de listón, que usarán como unidad de longitud. Asignen en su equipo un nombre a esa unidad. Usando su unidad de medida, mida el largo y ancho de una mesa. Indique de qué manera pueden medir su área mediante el listón. Respondan en su cuaderno, el siguiente cuestionario.

1.- ¿Cómo se llama su unidad de medida?
2.- ¿Cuánto mide la longitud de la mesa?
3.- ¿Cuánto mide el área de la mesa?
4.- ¿Que es medir?
5.- ¿Que es una unidad de medida?
6.- ¿Qué características tiene una unidad de medida?
7.- ¿Desventajas de usar su unidad de medida?

A 7. Discusión grupal de las respuestas obtenidas: elaboración de conclusiones

Perímetro de polígonos regulares y algunos volúmenes de cuerpos regulares

A 8. Responde en tu cuaderno, las siguientes preguntas:

1.- ¿Qué es un polígono?

2.- ¿Cómo se obtiene el perímetro de un polígono regular?

3.- ¿Cómo se puede medir la longitud de la circunferencia?

4.- ¿Cómo obtendrías la longitud del diámetro de la circunferencia?

5.- ¿Cómo establecerías una unidad de área y una unidad de volumen?

6.- ¿Se podría medir con tu unidad de medida las áreas de las paredes del salón?

7.- ¿Se podría medir con tu unidad de medida el volumen del salón?

8.- ¿Cómo medirías el volumen de un cono, de un cilindro y una esfera? Indica detalladamente el procedimiento.

Discute tus respuestas con tus compañeros de equipo y elabora las conclusiones a las que llegaste. Entrega por escrito un reporte breve de ellas.

A 9. Discutir con tu equipo cómo se calcula el perímetro de figuras geométricas.

En el caso de triángulos, cuadriláteros, polígonos, circulo. En seguida escribe en tu cuaderno, las fórmulas de las áreas y volúmenes de los siguientes casos según corresponda: cuadrado, rectángulo, triangulo, trapecio, trapezoide y círculo, cilindro, cono, prisma rectangular, cubo, prisma octagonal, pirámide triangular, pirámide cuadrangular, pirámide pentagonal y esfera.

Llena la tabla 1 que se muestra a continuación

Tabla 1

Figura y Nombre	Parámetros	Área	Volumen
TRIÁNGULO			
CUADRADO			
RECTÁNGULO			
ROMBO			
PARALELOGRAMO			
POLÍGONO REGULAR			
CÍRCULO			
ELIPSE			
CUBO O HEXAEDRO			
TETRAEDRO			
PRISMA RECTO			
PARALELEPIPEDO RECTANGULAR			
PIRÁMIDE REGULAR			
CILINDRO			
CONO			
ESFERA			

A 10. Considera la tabla que contiene las "formulas correctas" para el cálculo en cada caso solicitado en la actividad anterior. Se les entrego una hoja aparte con las fórmulas como la siguiente:

Cuadro de Áreas y volúmenes de algunas figuras y cuerpos

NOMBRE		ÁREA	VOLUMEN
cuadrado	l=lado	A=L^2	-
rectángulo	a=altura b=base	A=axb	-
triángulo	h=altura b=base	A=bxh/2	-
trapecio	B=base mayor b=base menor h=altura	A=(b+B)xh/2	-
cilindro	r =radio h =altura	$A_{total} = 2\pi r(h+r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
cono	r =radio h =altura g=generatriz	$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
prisma rectangular	axb=área de la base h=altura	A = 2(a+b)h + 2xaxb	V = axb xh
cubo	l=lado	A = 6 l^2	V = l^3
prisma octagonal	a=apotema del triangulo l=lado del octágono h=altura	A = lx8xh + lx8xa/2	V = pxaxh/2
pirámide triangular		$A = \frac{perim. base\ x\ ap. lat}{2} + area\ base$	$V = \frac{area\ base\ x\ h}{3}$
pirámide cuadrangular		$A = \frac{perim. base\ x\ ap. lat}{2} + area\ base$	$V = \frac{area\ base\ x\ h}{3}$
pirámide pentagonal		$A = \frac{perim. base\ x\ ap. lat}{2} + area\ base$	$V = \frac{area\ base\ x\ h}{3}$
esfera		$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Fuente: (Galdós 1995).

Identificar cuales escribieron correctamente.

¿Cómo puedes saber que son correctas esas fórmulas?

¿Cómo lo puedes demostrar? Explica brevemente

A 11. Asignará una figura para argumentar formula

Agrupados en equipos de 4 se les asignará una figura para que, a partir de la fórmula conocida intenten, mediante argumentos matemáticos, demostrar por qué es así la fórmula. Rectángulo, Triángulo, Rombo, Trapecio, Circunferencia.

INTRODUCCION A LA DEMOSTRACION, ARGUMENTACION O JUSTIFICACION EN MATEMATICAS

A 12. Justificación de la fórmula para calcular el área del rectángulo

Considera que conoces el área de un cuadrado de lado x y que esta es x2. Considera un rectángulo de lados a y b donde a es el lado menor y b el lado mayor. Vamos a justificar que el área de ese rectángulo, que llamaremos A, es a por b. Para hacerlo considera 4 rectángulos iguales que vas a colocar uno junto con el otro de tal manera que formen un cuadrado como se indica la figura 3.

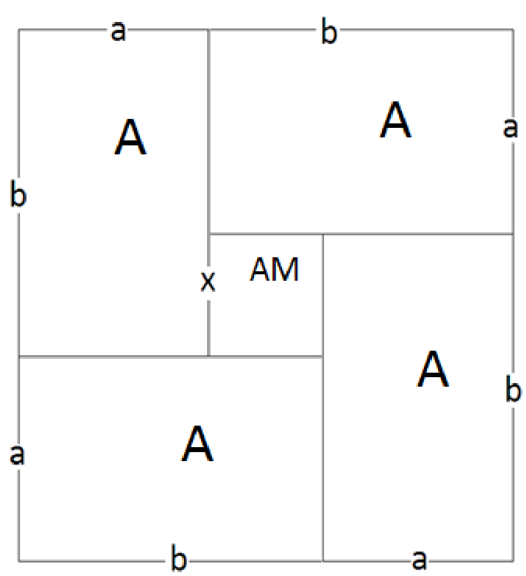


Figura 3

Contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas

1.- ¿Qué figura se forma en el centro del cuadrado mayor?

2.- ¿cómo sabes que es esa figura?

3.- ¿Cuál es el área del cuadrado mayor que se ha formado?

4.- Si llámanos AG al área de ese cuadrado escribe la expresión algebraica para esa área

5.- ¿Cuánto vale x de la figura en términos de a y b?

6.- Si llamamos AM al área del cuadrado pequeño en el interior del cuadrado grande ¿cuánto vale esa área? Escribe una expresión algebraica para ella

7.- Qué relación hay entre el área del cuadrado grande (AG) y el área del cuadrado chico (AM) y los rectángulos de área (A).

8.- Como puedes observar, no conocemos el valor de A, para hallarlo, sustituye en la relación que hallaste las expresiones algebraicas de cada una de las áreas AG y AM, simplifica y despeja el valor de A. ¿Qué es lo que se obtiene?

9.- De esta forma estas justificando que el área de un rectángulo es:

10.- ¿De qué supuestos estas partiendo?

11.- ¿Que suposiciones hiciste sin haberlas escrito?

3.- Cálculo de áreas por descomposición y recomposición de figuras

A 13. Justificación del cálculo del área del Triángulo.

Se tienen dos triángulos dividido por una de sus alturas en dos más pequeños. Si recortas uno de ellos y lo acomodas junto con el otro como se indica en la figura 4. ¿Qué figura se forma?

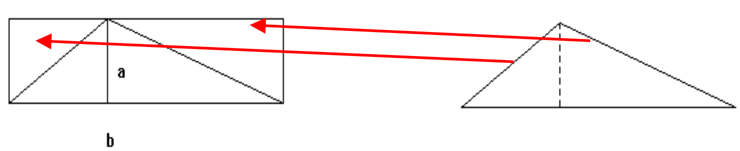


Figura 4

Responder en tu cuaderno:

¿Qué letra representa la base de ese rectángulo?

¿Qué letra representa su altura?

¿Qué parte del área total de rectángulo le corresponde al área del triángulo?

¿Cómo se expresa la fórmula para obtener el área de un triángulo?

¿Qué suposiciones has considerado en este caso?

Considera la figura 5:

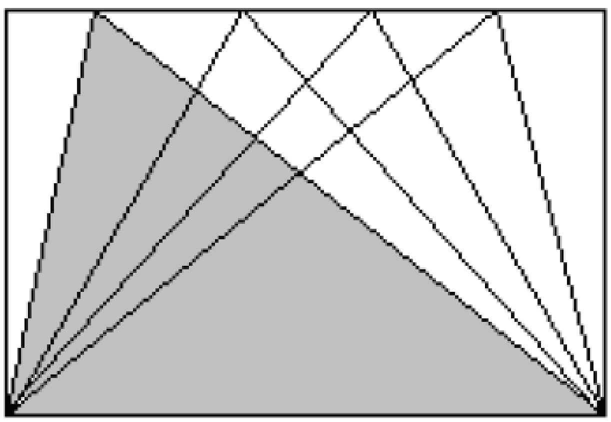


Figura 5

¿Se puede obtener la misma conclusión si cambiamos la forma del triángulo que está dentro del rectángulo para todos los casos? ¿Cómo lo puedes justificar?

Auxíliate de la figura 6:

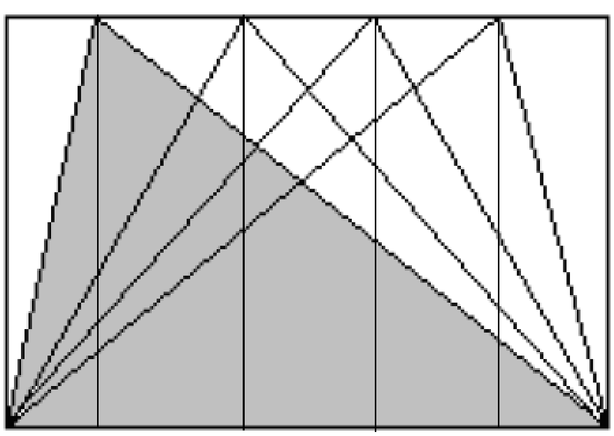


Figura 6

A 14. Justificación para área del trapecio.

Instrucciones. Considera dos trapecios iguales recorta la zona punteada del trapecio de abajo pégalos como se indica en la figura 7, para que formes un rectángulo.

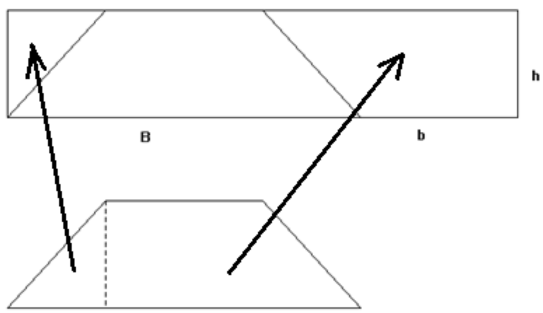


Figura 7

Responde en tu cuaderno:

¿Cuánto vale el área de ese rectángulo?

¿Qué fracción del área total del rectángulo formado le corresponde a la del trapecio?

¿Cómo se expresa la fórmula para el área del trapecio?

¿Qué suposiciones has considerado en este caso?

¿Cómo se puede construir un argumento que incluya a todos los casos posibles de trapecios?

A 15. Justificación del área del rombo y el romboide.

Si procedes de la misma manera que en la actividad anterior realiza la justificación de las fórmulas para calcular el área del rombo y el romboide, descríbelo con tus propias palabras.

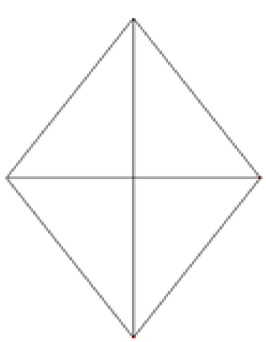


Figura 8

Figura 9

A 16. Justificación del área de un polígono regular.

Deducir la fórmula del área de un hexágono.

Considera un hexágono regular de lado L y apotema a (altura de un triángulo que forma el hexágono)

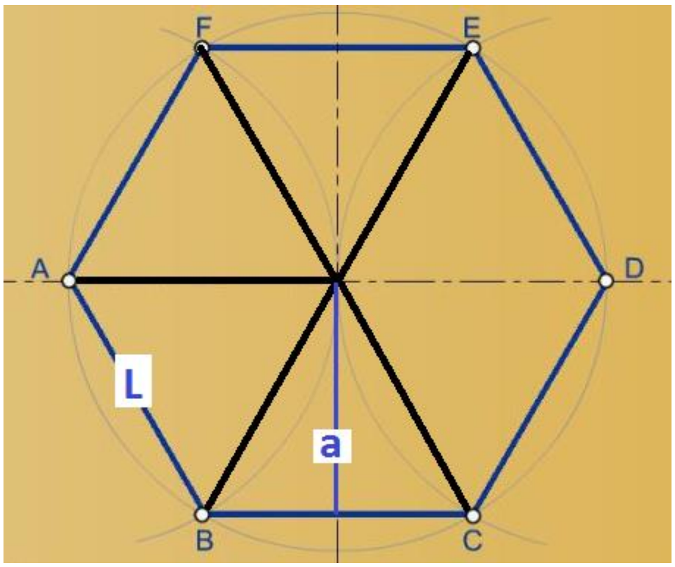


Figura 10

Divide el hexágono en seis triángulos iguales como se indica en la figura 10. ¿Cuánto vale el área de un triángulo en función de L y a?

Por lo tanto, ¿Cuánto valdrá el área del hexágono?

Si expresas la cantidad que corresponde con la suma de las longitudes de los lados como el perímetro P, ¿Cómo queda la fórmula del área? ¿Corresponde con la fórmula que conoces?

¿Cómo podrías justificar que el área de un polígono regular cualquiera de N lados es A = Pa/2? ; En la que "P" es el perímetro del polígono de N lados y, "a" es la apotema del polígono. (DESCRIBE CÓMO HARÍAS EL RAZONAMIENTO)

A17. Área del círculo

¿Cómo se te ocurre que podrías calcular el área del circulo a partir de polígonos regulares inscritos? ¿Sería exacto el cálculo? Podrías justificar que el área del círculo es $\mathbf{A = \pi r^2}$

4.-Circunferencia

Cálculo aproximado del perímetro de la circunferencia. Obtención empírica de la fórmula

A 18. Vamos a obtener mediante un experimento el valor aproximado de Pi

Materiales: Tapas de frascos de diferentes tamaño, aros o bastidores circulares, un metro de listón, regla o escuadra graduada.

Procedimiento:

Coloca el listón y marca con la mayor precisión posible la longitud necesaria para medir la circunferencia de uno de los objetos circulares.

Mide con la mayor precisión posible el diámetro de la circunferencia y anótalos en la tabla 2.

Tabla 2

Objeto	Longitud de la circunferencia	Longitud del diámetro	Perímetro entre longitud del diámetro
Uno			
Dos			
Tres			
Cuatro			

Como puedes observar en todos los casos, se obtiene un valor aproximado a la constante denominada pi (π).

A 19. Lectura del cálculo teórico del perímetro de la circunferencia

Arquímedes y el Método de Exhaución

Se suele citar a Arquímedes como un gran matemático y uno de los primeros en obtener el valor del perímetro y el área del círculo. Para aproximar el valor del perímetro de un circulo lo hace a partir de considerarlo como un polígono regular que tiene un número de lados cada vez mayor y que cuando se aproxima a infinito se obtiene el perímetro del círculo, es decir la longitud de su circunferencia.

El mismo método funciona para el cálculo del área, el método que usa es por aproximaciones sucesivas. En su libro Sobre La Cuadratura de la Parábola, nos presenta el conocido Método de Exahución (Agotamiento). De un modo sencillo puede describirse así: dada una región cuya área deseamos determinar, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la dada, y cuya área sea conocida o de fácil cálculo; ella será una aproximación por defecto. Luego se elige otra región poligonal circunscrita que dé una aproximación por exceso, continuándose el proceso tomando cada vez polígonos de mayor número de lados y que tiendan a llenar la región dada inicialmente, como se muestra en la figura 11.

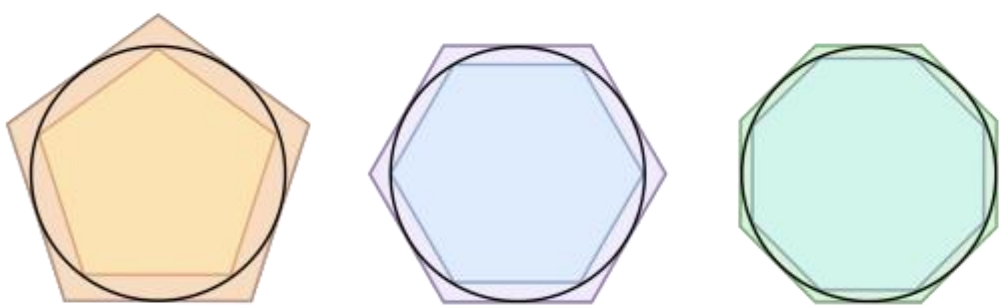
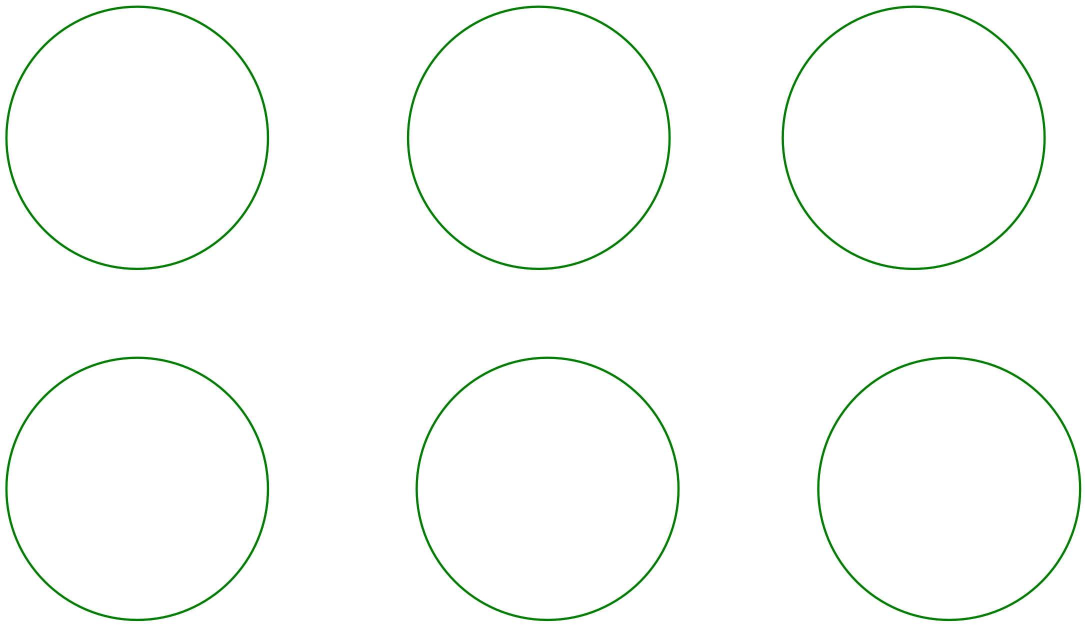


Figura 11

A 20. Dibujo de polígonos en la circunferencia

Dibuja una serie de polígonos regulares inscritos y circunscritos en la circunferencia para observar cómo se aproxima el perímetro del polígono al perímetro de la circunferencia. Considera una circunferencia de radio unidad. (3, 6, 12, 24, 48, 96)



A.21. El método de exhaución de Arquímedes

Con este método se puede calcular aproximadamente el perímetro de la circunferencia, mediante polígonos regulares de 6,12, 24, 48, 96,…. Inscritos y circunscritos. A partir de ahí podemos obtener el valor de Pi cuando consideramos una circunferencia de radio igual a 1 y tomamos la mitad de ella dado que su perímetro seria $2\pi(1)=2\pi$, al comparar el perímetro de la circunferencia de radio unidad con los perímetros inscritos y circunscritos de los polígonos regulares.

Repaso de razones trigonométricas

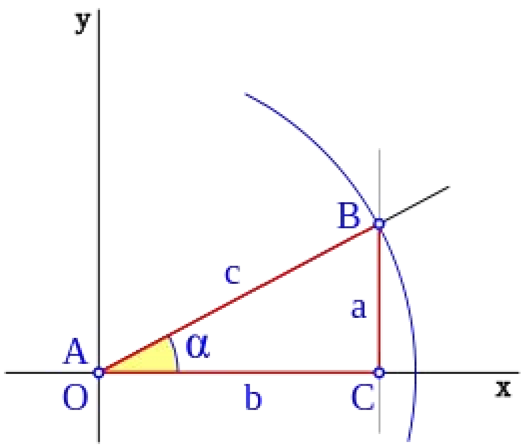


Figura 12

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo α, correspondiente al vértice A, situado en el centro de la circunferencia.

El seno (abreviado como sen, o sin por llamarse "sĭnus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto sobre la hipotenusa.

$$\sin\ \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

El coseno (abreviado como cos) es la razón entre el cateto adyacente sobre la hipotenusa,

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

La tangente (abreviado como tan o tg) es la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente,

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

A22. Perímetro de la circunferencia mediante aproximación por polígonos inscritos.

Consideremos una circunferencia de radio r. Un polígono inscrito queda perfectamente definido por su número de lados n, y el lado l del polígono. Para poder comparar su perímetro que es nl con el de la circunferencia, debemos considerar el valor de l en términos del radio de la circunferencia. Para ello consideremos la figura siguiente, en el caso de un pentágono inscrito en la circunferencia de radio r.

Primeramente consideraremos que, para dibujar el pentágono necesitamos dividir 360 grados entre cinco, que nos da 72 grados que corresponde al ángulo central de los triángulos que forman el pentágono. En general si tuviéramos un polígono de n lados dividiríamos 360/n para hallar el ángulo central de cada triangulo.

En el caso del pentágono, para hallar el perímetro necesitamos establecer una relación entre el radio y el lado del pentágono que corresponde con la base del triángulo ACB de la figura cuyo ángulo a considerar es la mitad del ángulo central (que es 360/5) es decir 36 grados. En el caso general para un polígono de n lados seria 180/n. Para el caso de la figura 13, usaremos la función seno de la cual se tendrá:

$$sen(\frac{180^o}{n}) = \frac{(\frac{l}{2})}{r}$$

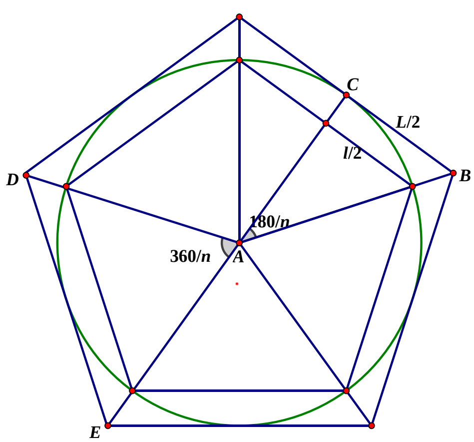


Figura 13

De la ecuación anterior se obtiene que:

$$l = 2rsen(\frac{180^o}{n})$$

Sabiendo que el perímetro del polígono inscrito P(i) es:

$$P(i) = nl$$

Y sustituyendo el valor del lado, tenemos:

$$P(i) = nl = n2rsen(\frac{180^o}{n})$$

Ordenando tenemos:

$$P(i) = nl = 2nrsen(\frac{180^o}{n})$$

El perímetro quedará en general para un polígono de lado n:

$$P(i) = 2nrsen(\frac{180^o}{n}) \quad \text{Ecuación 1}$$

Con esta expresión podemos calcular el perímetro del polígono inscrito, conociendo solamente el número de lados y su radio.

Obsérvese que si tomamos el radio igual a 1 y n=5, la relación queda

$$P(i) = 2(5)(1)sen(\frac{180^o}{5})$$

P (i) =5.87852522

Que es menor a 2(Pi)

A 23. Perímetro de un polígono circunscrito en función del número de lados y el radio del círculo.

De la misma manera que procedimos en el caso anterior, para un polígono circunscrito de lado L queda perfectamente definido por su número de lados n, y el radio r, por tanto podemos determinar cuál es su perímetro en función de esos parámetros, a la vista de la figura 14, tenemos que, si relacionamos el lado CB y el lado CA = r, la función trigonométrica adecuada será la tangente del ángulo:

$$tan\left(\frac{180^o}{n}\right) = \frac{(\frac{L}{2})}{r}$$

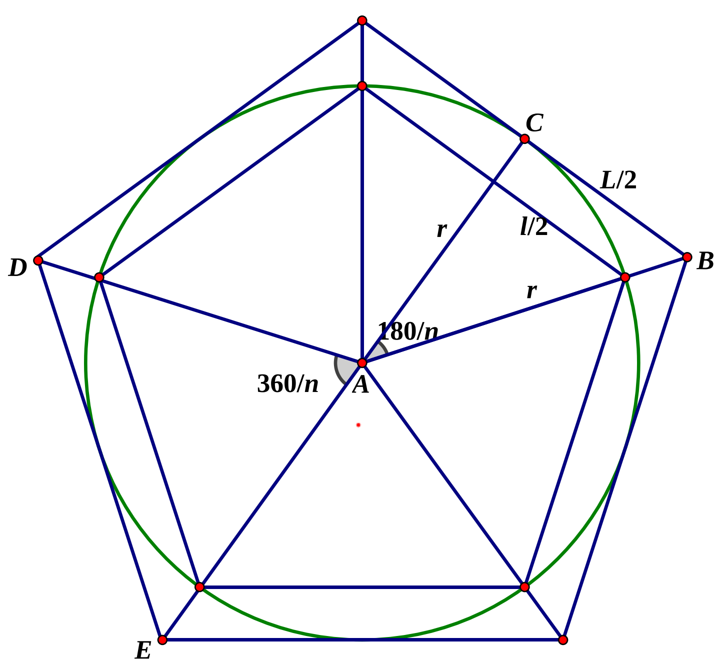


Figura 14

De la ecuación anterior se obtiene que:

$$L = 2rtan(\frac{180^o}{n})$$

Sabiendo que el perímetro del polígono circunscrito P(c) es:

$$P(c) \ = nL$$

Y sustituyendo el valor del lado, tenemos:

$$P(c) = nL = n2rtan\left(\frac{180^o}{n}\right)$$

Ordenando tenemos:

$$P(c) \ = nL = 2nrtan(\frac{180^o}{n}) \qquad ecuación\ 2$$

Con esta expresión podemos calcular el perímetro del polígono circunscrito, conociendo solamente el número de lados y su radio.

Nuevamente considera el caso del pentágono con r= 1 y n= 5

$$P(c) \ = 5L = 2(5)(1)tan(\frac{180^o}{5})$$

$$P\ (c) = 7.26542528$$

Que es mayor a 2(pi)

Ahora regresemos al problema original ¿cómo calcular el perímetro del circulo de radio r a partir de los polígonos inscrito y circunscrito?

De la ecuación 1 y 2, se puede observar que para el caso del pentágono se tiene

P (i) < Perímetro del circulo < P(c)

Recordemos que ya sabemos que el perímetro de la circunferencia es P= $2\pi\mathrm{r}$. Y que si r = 1 el perímetro será P= 2π.

A24. Ahora consideremos las formulas halladas para P (i) y P(c) que corresponde a la ecuación 1 y 2.

$$P(i) \ = \ 2nrsen(\frac{180^o}{n})$$

$$P(c) \ = nL = 2nrtan(\frac{180^o}{n})$$

En ambos casos aparece el 2r pero no el valor de π Además, podemos afirmar que se cumple que

$2rnsen(\frac{180^o}{n})$< Perímetro del circulo < $2rntan(\frac{180^o}{n})$

Tomando en cuenta que el perímetro del circulo es $2\pi\mathrm{r}$. Podemos concluir que:

$2rnsen(\frac{180^o}{n}) < 2\pi\mathrm{r} < 2rntan(\frac{180^o}{n})$

Dividiendo entre 2r toda la desigualdad queda:

$nsen(\frac{180^o}{n}) < \pi < ntan(\frac{180^o}{n})$

Podemos aproximar como lo hizo Arquímedes el valor de Pi por defecto y por exceso para n =6, 12, 24, 48, 96, 144, etcétera.

Por ejemplo para n= 6

$6sen(\frac{180^o}{6}) < \pi < 6tan(\frac{180^o}{6})$

$3.000000000000 < \pi < 3.464101615137$

Usa la desigualdad anterior $nsen(\frac{180^o}{n}) < \pi < ntan(\frac{180^o}{n})$ para diferentes valores de n y llena la tabla 3, que sigue realizando el cálculo para n que se indica en ella

Tabla 3

n lados	valor de π (por defecto)	valor de π (por exceso)
6	3.000000000000	3.464101615137
12	3.105828541230	3.215390309173
24		
48		
96		
192		
384		
768		

Método de Arquímedes doblando el número de lados k veces (Arquímedes, calculando a mano llegó hasta el caso n=48)

Tabla 4

lados	valor de π (por defecto)	valor de π (por exceso)
6	3.0000000000000000	3.4641016151377546
12	3.1058285412302492	3.2153903091734725
24	3.1326286132812382	3.1596599420975005
48	3.1393502030468671	3.1460862151314350
96	3.1410319508905096	3.1427145996453683
192	3.1414524722854620	3.1418730499798238
384	3.1415576079118575	3.1416627470568485

768	3.1415838921483183	3.1416101766046894
1.536	3.1415904632280500	3.1415970343215261
3.072	3.1415921059992714	3.1415937487713519
6.144	3.1415925166921574	3.1415929273850969
12.288	3.1415926193653840	3.1415927220386137
24.576	3.1415926450336908	3.1415926707019980
49.152	3.1415926514507675	3.1415926578678444
98.304	3.1415926530550367	3.1415926546593059
196.608	3.1415926534561041	3.1415926538571713
393.216	3.1415926535563710	3.1415926536566377
786.432	3.1415926535814378	3.1415926536065044
1.572.864	3.1415926535877044	3.1415926535939711
3.145.728	3.1415926535892710	3.1415926535908377
6.291.456	3.1415926535896625	3.1415926535900544

A25. Cálculo del área del círculo

¿Cómo podemos calcular el área de un círculo?

Una primera aproximación al cálculo del área:

Si nosotros dibujamos un círculo, podemos dibujar un polígono regular de n lados inscrito en él, como se muestra en la figura 15.

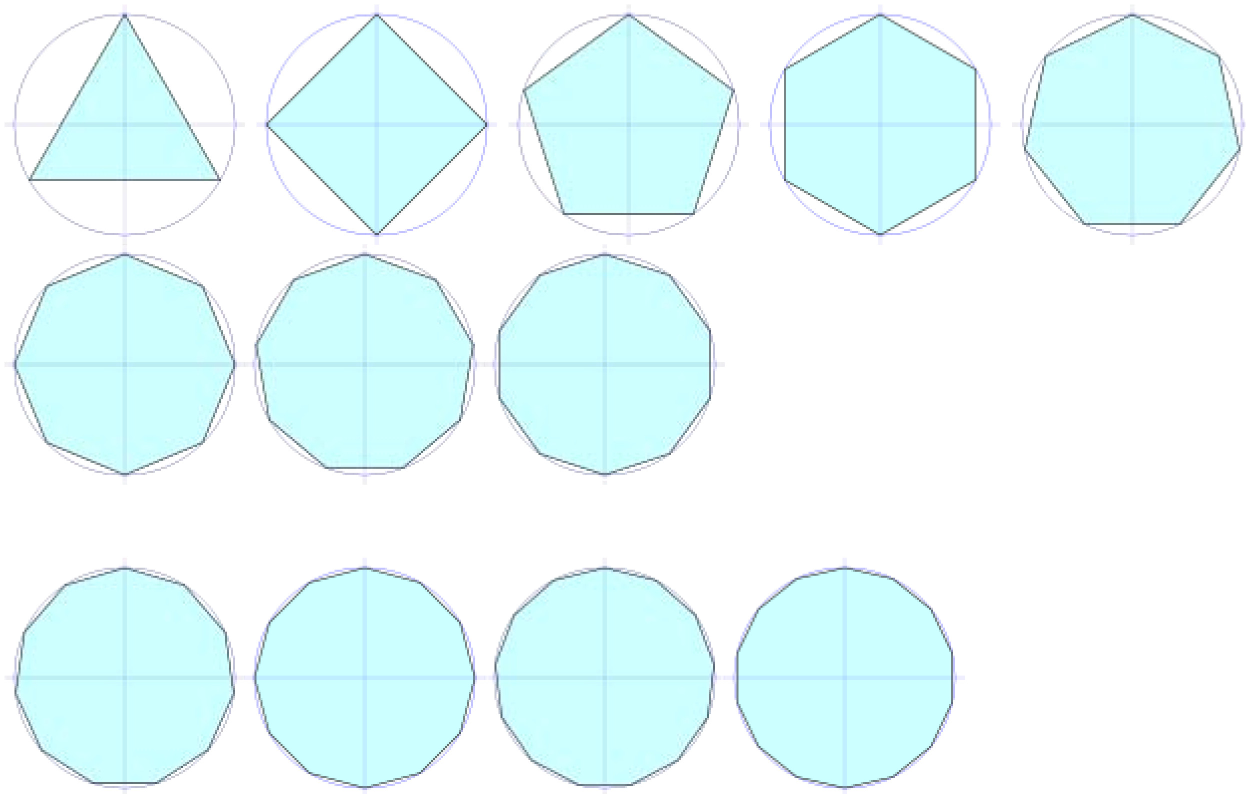


Figura 15

Si hacemos que el número de lados del polígono regular se haga muy grande, el área del polígono se parecerá cada vez más al área del círculo. Ahora vamos a calcular el área del polígono de n lados. Para eso, vamos a dividirlo en triángulos con base en los lados del polígono como se muestra en la figura 16.

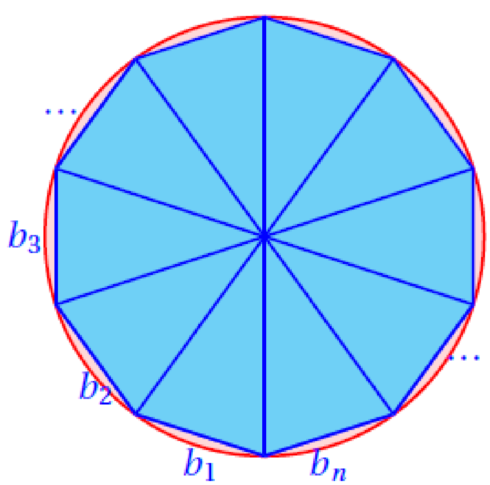


Figura 16

Ahora vamos a calcular el área de un triángulo. Dado que todos los triángulos que hemos dibujado tienen la misma área, cuando multipliquemos el área de un triángulo por n obtendremos el área del polígono regular inscrito al círculo. Observa que el perímetro del polígono regular es muy parecido al de la circunferencia. Cuando n es muy grande, la diferencia es muy pequeña que podemos considerarlas iguales.

Pero el perímetro del polígono es igual a la suma de las bases de los triángulos que dibujamos a partir del polígono. La altura de un triángulo es prácticamente igual al radio del círculo. Entonces el área de cada triángulo es: At =bxr/2. Y la suma de las áreas de todos los triángulos es igual al área del polígono, y aproximadamente igual al área del círculo:

$$\begin{aligned} A_c \approx A_p &= \frac{b_1 \cdot r}{2} + \frac{b_2 \cdot r}{2} + \cdots + \frac{b_n \cdot r}{2} \\ &= \frac{r}{2} \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \end{aligned}$$

La suma de todas las bases de los triángulos es igual al perímetro del polígono inscrito al círculo. Pero se dijo que este perímetro es prácticamente igual al perímetro de la circunferencia, que es igual a 2πr. Sustituyendo esto en la fórmula para calcular el área obtenemos:

$$A_c \approx A_p = \frac{r}{2} \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \frac{r}{2} \cdot (2\pi r) = \pi r^2$$

Cuando el número n de lados del polígono es muy grande, el perímetro del polígono es igual a la longitud de la circunferencia y la fórmula para calcular el área del círculo es:

$$A = \pi r^2$$

Cálculo del área por aproximaciones sucesivas a partir de polígonos inscritos y circunscritos.

Área de un polígono regular

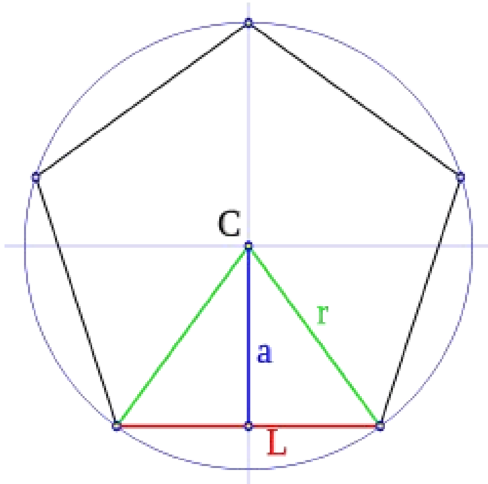


Figura 17

Existen diversas fórmulas para calcular el área de un polígono regular, dependiendo de los elementos conocidos.

En función del perímetro y la apotema

El área de un polígono regular inscrito Ap (i), conociendo el perímetro y la apotema es:

$$A_p(i) = \frac{Pa}{2}$$

En función del número de lados y la apotema

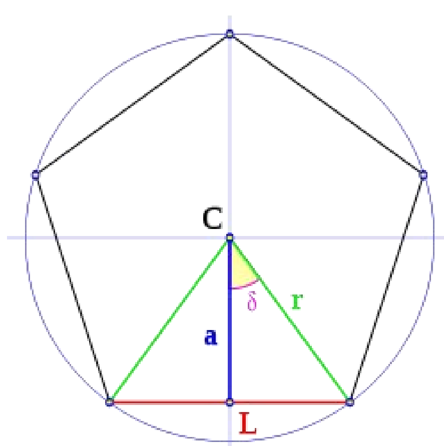


Figura 18

Sabiendo que:

$$A_p(i) = \frac{nLa}{2}$$

En función del número de lados y el radio

Un polígono queda perfectamente definido por su número de lados n, y el radio r, por tanto podemos determinar cuál es su área, a la vista de la figura 18, tenemos que:

$$sen(\delta) = \frac{(\frac{L}{2})}{r}$$

Además, $\delta = \frac{360^{o}}{2n} = \frac{180^{o}}{n}$ ya que es la mitad de un ángulo central formado por los dos segmentos del triángulo (esto es 3600 /n).

De la ecuación anterior se obtiene que por una parte:

$$L = 2rsen(\delta)$$

Por otra parte se puede obtener el apotema (a) nuevamente de la figura como

$$\cos(\delta) = \frac{a}{r}$$

$$a = r\cos(\delta)$$

Sabiendo que el área de un polígono es:

$$A_p(i) = \frac{nLa}{2}$$

y sustituyendo el valor del lado y la apotema calculados antes, tenemos:

$$A_p(i) = \frac{2nrsen(\delta)r\cos(\delta)}{2}$$

Ordenando tenemos:

$$A_p(i) = \frac{2n\,r^2 sen(\delta)\cos(\delta)}{2}$$

Sabiendo que: $\delta = \frac{360^o}{2n} = \frac{180^o}{n}$ el área quedará:

$$A_p(i) = n\, r^2 sen(\frac{180^o}{n}) \cos\left(\frac{180^o}{n}\right)$$

Con esta expresión podemos calcular el área del polígono inscrito, conociendo solamente el número de lados y su radio.

Ahora retomando el problema del cálculo del Área del circulo vamos a suponer que tenemos un polígono inscrito en una circunferencia de radio igual a la unidad, es decir r =1. Si suponemos conocida el área del círculo, esta será $A = \pi r^2$, como r= 1 entonces $A = \pi$. Si sustituimos ese valor en la fórmula para el caso de un polígono inscrito de radio unidad se tendrá: dado que r2 = 1 queda:

$$A_p(i) = n\,(1)^2 sen(\frac{180^o}{n}) \cos\left(\frac{180^o}{n}\right)$$

$$A_p(i) = nsen(\frac{180^o}{n}) \cos\left(\frac{180^o}{n}\right)$$

A26. Considera un polígono de lado n = 5

Se tendrá

$$A_p(5) = 5sen(\frac{180^o}{5}) \cos\left(\frac{180^o}{5}\right)$$

n= 50

$$A_p(50) = 50sen(\frac{180^o}{50}) \cos\left(\frac{180^o}{50}\right)$$

n= 500

$$A_p(500) = 500sen(\frac{180^o}{500}) \cos\left(\frac{180^o}{500}\right)$$

n= 5000

$$A_p(5000) = 5000sen(\frac{180^o}{5000}) \cos\left(\frac{180^o}{5000}\right)$$

n= 100000

$$A_p(100000) = 100000sen(\frac{180^o}{100000}) \cos\left(\frac{180^o}{100000}\right)$$

1.-Calcule cada uno de los casos anteriores e indique el valor que se obtiene. ¿A qué valor se aproxima la expresión anterior?

2.- ¿Esto puede darse como una justificación correcta de que el área del circulo de radio r es $A = \pi r^2$?

3.- ¿Podrías hacer el razonamiento similar pero ahora para el polígono circunscrito como el de la figura 19. ?

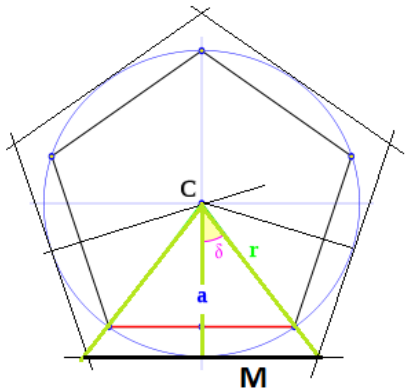


Figura 19

Para ello deberás calcular el área con la fórmula del polígono circunscrito

$A_p(c) = \frac{nMa}{2}$

En la cual ahora el lado del polígono circunscrito es M y la apotema (ver figura 19) coincide con el radio es decir a = r. Para determinar M de la figura se observa que

$$\tan(\delta) = \frac{\frac{M}{2}}{\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{M} = 2\mathrm{a}\tan(\delta)$$

$$A_p(c) = \frac{2n\mathrm{a}^2\tan(\delta)}{2}$$

Pero sabemos de la figura 19, que a= r por lo que tendremos: $A_p = n\mathrm{r}^2\tan(\delta)$

Considerando que $\delta = \frac{180^o}{n}$; queda: $A_p(c) = n\mathrm{r}^2\tan(\frac{180^o}{n})$

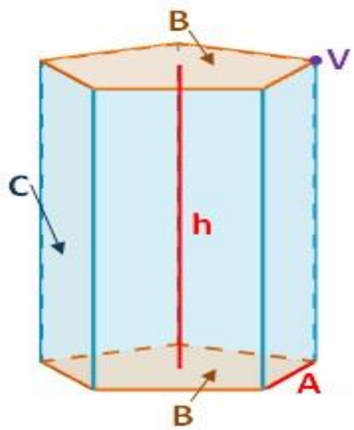
Que es el área del polígono de n lados circunscrito al círculo de radio r.

4.-Tome r = 1 y calcule los valores de$A_p(c)$ para n= 6, 12,24, 48, 96,…

5.- Áreas y volúmenes de prisma, pirámide, cilindro y cono

A27. Elementos de un prisma

Figura 20



En un prisma se pueden diferenciar los siguientes elementos:

Bases (B): puede ser un polígonos cualquiera. Cada prisma tiene dos bases, siendo ambas iguales y paralelas.

Caras (C): siempre son paralelogramos.

Altura (h): distancia entre las dos bases del prisma. En el caso del prisma recto la longitud de la altura h y la de las aristas de las caras laterales coinciden.

Vértices (V): puntos donde confluyen las caras del prisma.

Aristas (A): cada uno de los lados de las caras.

Los prismas se nombran de acuerdo con el polígono que forma sus bases

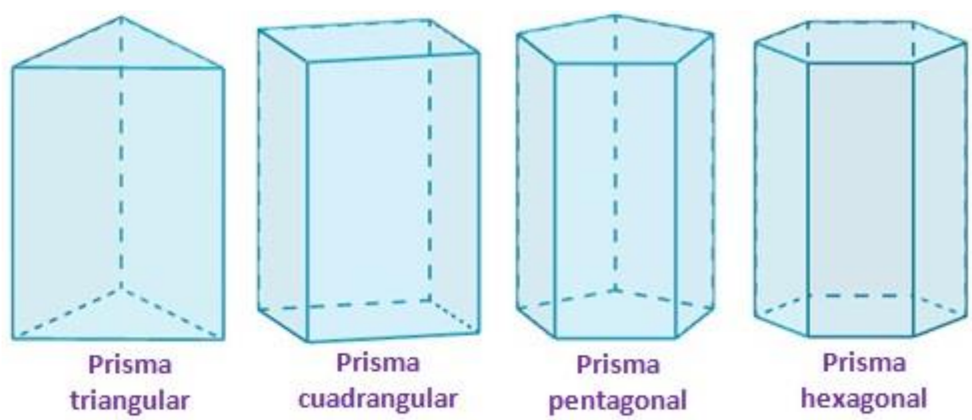


Figura 21

A28. Prisma hexagonal

Indica cuáles son sus elementos. Marca cada uno con una letra y nómbralo según corresponda.

Clasificación de los prismas

Los prismas pueden ser: regulares e irregulares; rectos u oblicuos y cóncavos o convexos como se ilustra en la figura 22.

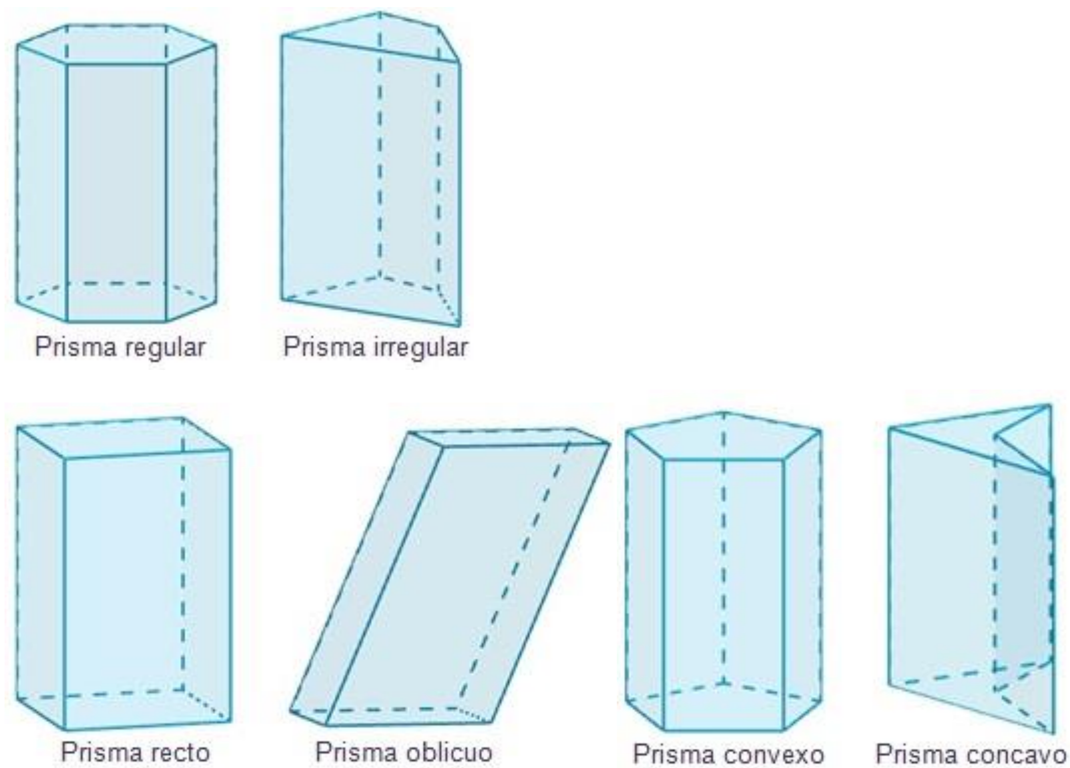
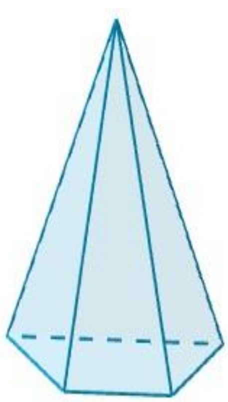


Figura 22

A29. Elementos de la pirámide

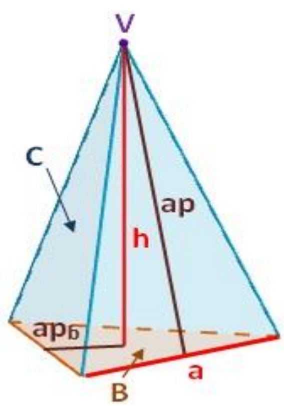
Figura 23



Una pirámide es un poliedro irregular cuya superficie está formada por una base que es un <u>polígono</u> cualquiera y caras laterales triangulares que confluyen en un vértice que se denomina ápice (o vértice de la pirámide). Las pirámides tienen tantos triángulos en las caras laterales como aristas tiene la base.

Como ejemplo pondremos una pirámide triangular en la cual se pueden diferenciar los siguientes elementos:

Figura 24



Base (B): triángulo cualquiera. Es la única cara que no toca al vértice de la pirámide.

Caras (C): los triángulos de los laterales y la base.

Aristas (a): segmentos donde se encuentran dos caras de la pirámide. Podemos distinguir: aristas laterales, que son las que llegan al vértice (o ápice) y aristas básicas, que están en la base.

Altura (h): distancia del plano de la base al vértice de la pirámide.

Vértice de la pirámide (V): punto donde confluyen las caras laterales triangulares. También se llama ápice.

Apotema de la pirámide (ap): distancia del vértice a un lado de la base. Solo existe en las pirámides regulares. Puesto que en este caso las caras laterales son isósceles, la apotema de la pirámide es también la altura de las caras laterales.

Apotema de la base (apb): distancia de un lado de la base al centro de ésta. Solo existe en las pirámides regulares

A 30 Las siguientes son pirámides regulares de 3,4, 5 y 6 lados en su base. Selecciona una de la figura 25, e identifica sus elementos.

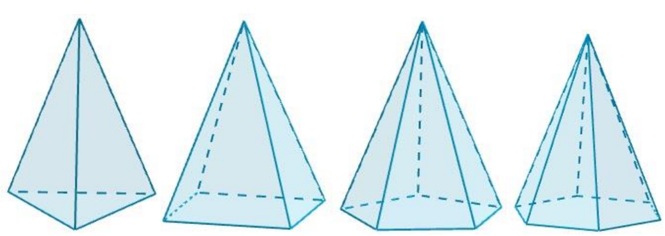


Figura 25

A 31. Cuerpos de Revolución

Un cuerpo de revolución es aquel que se origina al girar una figura plana alrededor de un eje. Las caras de un cuerpo de revolución son curvas.

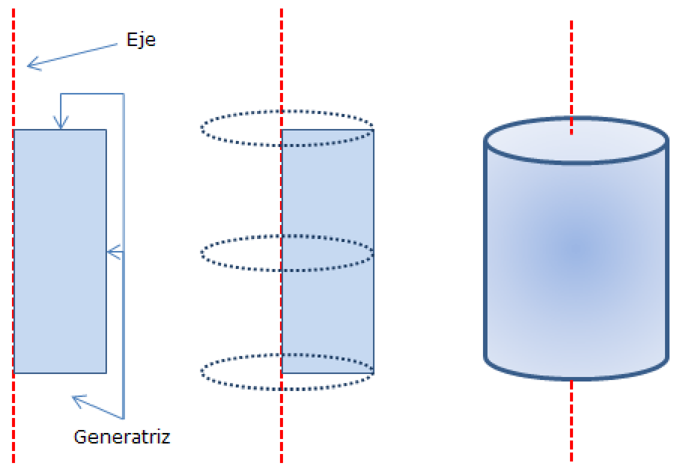


Figura 26

Podemos distinguir:

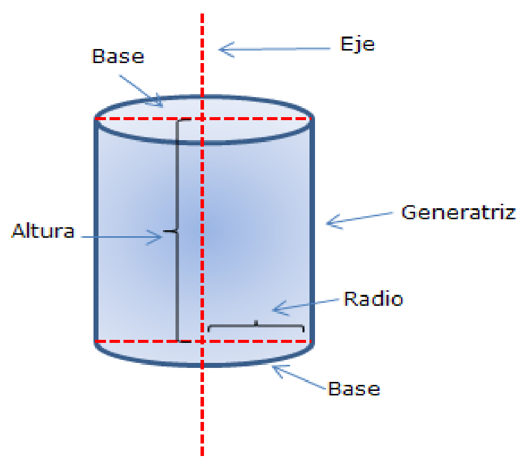
Eje: recta alrededor de la cual gira la figura plana para general el cuerpo de revolución.

Generatriz: son los límites exteriores de la figura plana.

Entre los cuerpos de revolución destacamos: la esfera, el cilindro y el cono.

a) Cilindro:

El cilindro tiene dos bases paralelas con forma de círculo y una cara lateral curva. Se genera al girar un rectángulo alrededor de un eje.



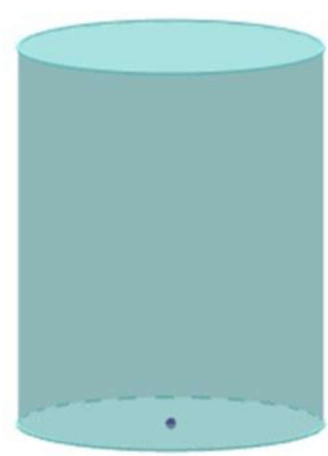


Figura 27

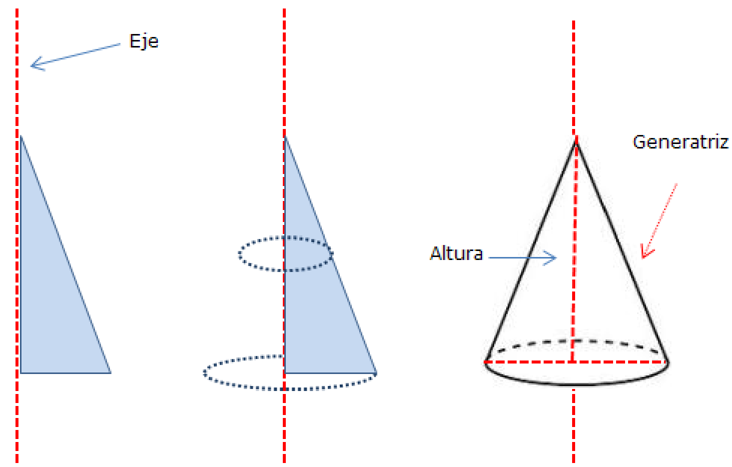
b) Cono:

El cono tiene una sola base en forma de círculo y una cara lateral curva que finaliza en un punto llamado vértice o cúspide.

Esta figura se obtiene girando un triángulo rectángulo alrededor un eje.

La generatriz es el segmento que va desde cualquier punto de la circunferencia de la base al vértice.

Figura 28



c) Esfera:

La esfera se genera al girar una semicircunferencia alrededor de un eje

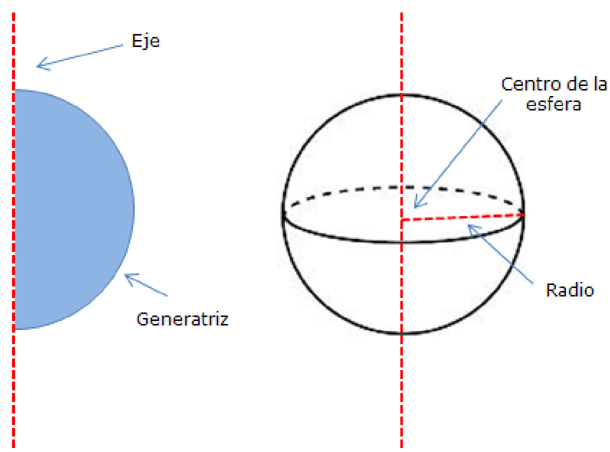
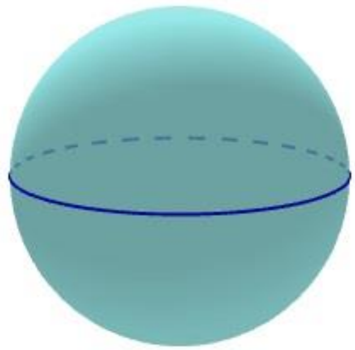


Figura 29

En la esfera todos los puntos están a la misma distancia de su centro. El segmento que une cada punto de la esfera con el centro se denomina radio.



A continuación estudiaremos las áreas y los volúmenes del prisma recto, la pirámide, el cono y el cilindro asociados con prismas rectos solamente

A32. Áreas de prismas, pirámides, cono y cilindro.

A partir de lo estudiado en la sección anterior intenta obtener una fórmula, en cada caso, para las áreas laterales de las siguientes figuras. En cada caso asigna una letra a cada valor de la figura que te permita calcular e área considerando las formulas anteriores. Para poder hacerlo se presentan en forma "desarrollada" los cuerpos geométricos siguientes:

CUBO

PIRÁMIDE DE BASE TRIANGULAR (EQUILATERO)

PRISMA RECTANGULAR

PIRÁMIDE DE BASE CUADRADA

PRISMA DE BASE CUADRADA

PRISMA DE BASE DODECAEDRO

A33. Aumento del número de lados de la pirámide

1 ¿Qué puedes decir sobre el cuerpo que se va formando cuando se aumenta cada vez más el número de lados del polígono de la base del prisma?

2. ¿Cuál es su área?

3. ¿Qué puedes decir sobre el cuerpo que se va formando cuando se aumenta cada vez más el número de lados del polígono de la base de la pirámide?

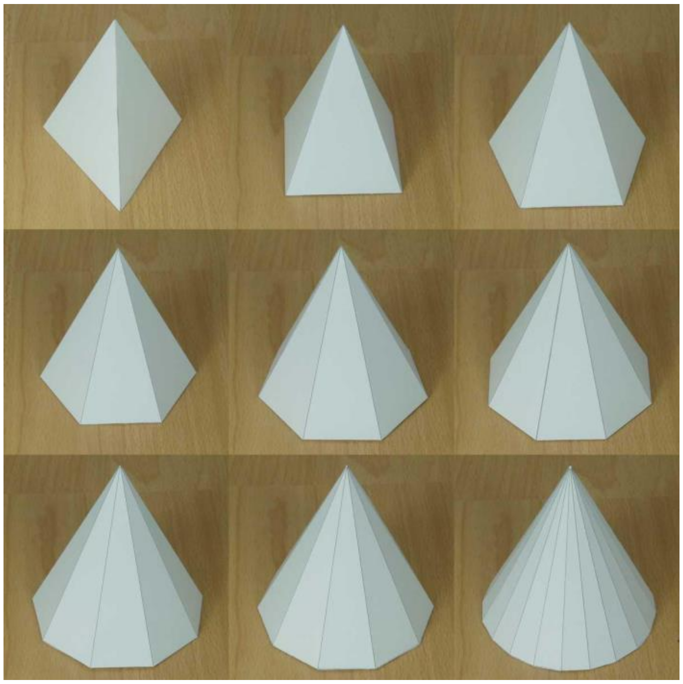


Figura 30

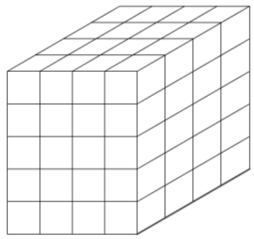
4.- ¿Cuál es su área?

A34. Volúmenes de Prisma y Pirámides regulares.

Contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es volumen de un cuerpo?
2. ¿Por qué es necesario conocer el volumen de un cuerpo, para qué sirve?
3. Si compras una caja de leche de 1 litro ¿cuál es su volumen?
4. ¿Qué unidad de medida se usa para medir la capacidad de un tinaco?
5. ¿Cómo se calcula el volumen de un cubo de un metro de arista?
6. ¿Cuántos centímetros cúbicos contiene un metro cubico? ¿Cuantos litros?
7. Considera un cuerpo como el de la figura 31:

Figura 31



8.- ¿Qué tipo de prisma es?

9.- Si tu unidad de volumen es un cubito ¿cuál es el volumen del prisma?

10.- Si consideramos que el lado de un cubito mide “a”, ¿Cuánto mide el volumen de un cubito?

11.- En términos de esa unidad ¿cuál es el volumen del prisma?

12.- ¿Cuánto mide el área de la base del prisma? Ab=

13.- ¿Cuánto mide la altura de prisma?

14.- Si multiplicamos el área de la base por la altura del prisma cuanto se obtiene:

15.-Se tiene un prisma representado por la figura 32, supón que su base es cuadrada

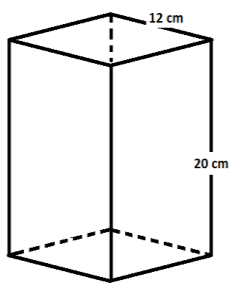


Figura 32

¿Cuánto vale su volumen?

16.-a partir de lo que has contestado en las preguntas anteriores, ¿Cómo expresarías en una fórmula el volumen de un prisma rectangular?

A35. Volumen de un prisma triangular

Tomando en cuenta que el área de un triángulo puede obtenerse de la de un rectángulo que lo encierra, el prisma triangular se puede asociar con un prisma rectangular observando que este último se puede descomponer en dos prismas triangulares de tal forma que el volumen del prisma triangular es la mitad del prisma rectangular o bien área de la base por altura sobre dos que es el área del triángulo por la altura.

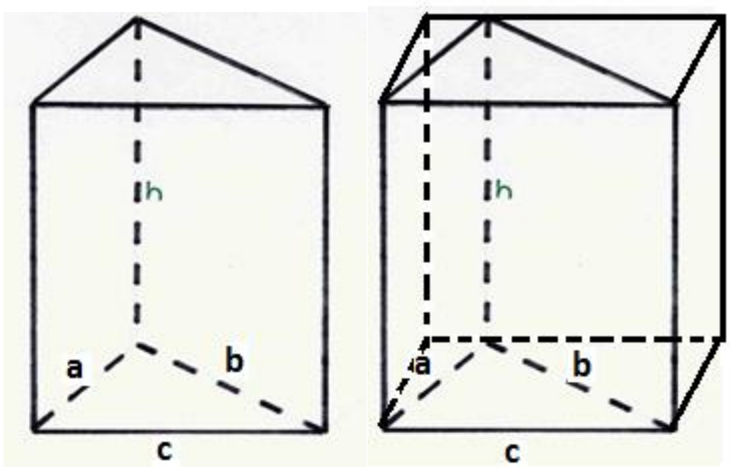


Figura 33

A36. ¿Cómo sería el volumen de un prisma cuya base es un polígono regular?

Considera el caso de un prisma: a) Hexagonal, b) Base de “n” lados

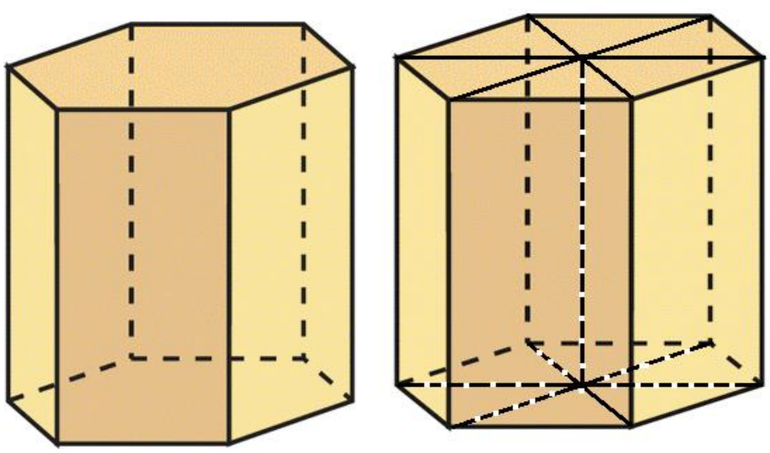


Figura 34

A37. Volumen de la pirámide

Siempre que hablamos sobre pirámides nos acordamos de los vestigios de las grandes civilizaciones de la antigüedad como la egipcia, maya o teotihuacana y las posibles motivaciones para construirlas. Así también las dificultades matemáticas, y tecnológicas para llevar a cabo dichas construcciones.

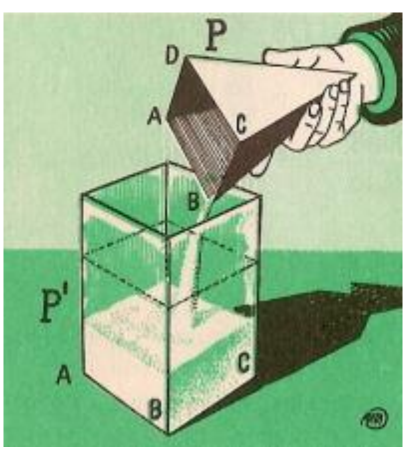
Sin duda las obras son monumentales y el tiempo para realizarlas se calcula en varias décadas en algunos casos. En nuestro caso nos interesa, más que conocer cómo se calcula el volumen de la pirámide, saber cómo es posible justificar que el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma recto que la contiene. Lo haremos solo en el caso de la pirámide regular de base cuadrada

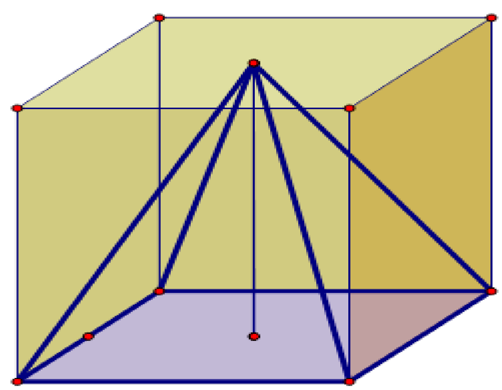
Medición del Volumen de la pirámide.

En el dibujo vemos una pirámide P que tiene la misma base que el prisma P' y la misma altura, la pirámide abierta por la base y el prisma abierto por la base superior. Es necesario verter 3 veces la pirámide llena de arena para llenar el prisma. Luego el volumen de la pirámide es 3 veces el volumen del prisma.

El volumen del prisma es área de la base por altura.

Figura 36





El volumen de la pirámide será: área de la base x altura dividido por 3.

El volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del área de la base por su altura.

A38. Verificar físicamente la afirmación que se hace en el texto con el material que te entrego tu maestro.

A39. Cálculo del Volumen de pirámide

Para iniciar la demostración, consideremos un cubo de lados 2h dentro del cual colocamos seis pirámides como de muestra en la figura. Para calcular el volumen de una pirámide regular lo haremos a partir del volumen de un cubo de lados 2h.

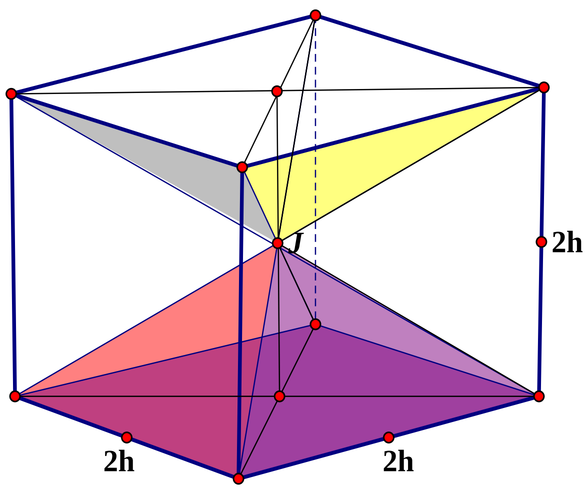


Figura 37

Dentro del cubo que representamos podemos poner seis pirámides cuadrangulares regulares, cuya base es igual a cada una de las caras del cubo y de vértice el centro del cubo. Observe que el área de la base de la pirámide es Ap= (2h) (2h)= 4h2

En la ilustración 37, se representan dos pirámides; tendremos cuatro más. Observa la figura para comprobar que la arista del cubo es el doble de la altura de una de las pirámides.

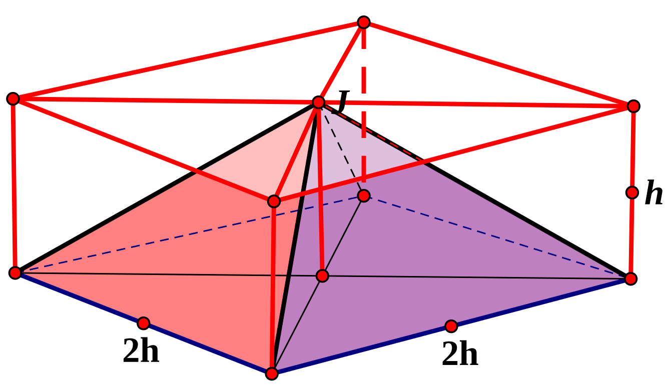


Figura 38

Así, podemos decir que el volumen del cubo de lado 2h es igual a:

V (cubo) = (2h) (2h) (2h)= 8h3

Pero podemos afirmar que el Volumen del cubo de lado 2h es seis veces el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 2h y altura h.

V (cubo) = 6 V (pirámide) = 8h3

Por lo tanto V (pirámide) = 8h3/6

V(pirámide) = 4h3/3

V(pirámide) = (4h2)(h)/3

Pero Ap= 4h2

V(pirámide) = (Ap)(h)/3

Es decir el volumen de la pirámide es el área de su base por su altura sobre tres. Este resultado es extensible para cualquier pirámide regular, y podemos afirmar que:

$$V(piramide) = \frac{A_p h}{3}$$

El área de la base dependerá del tipo de polígono que sea (cuadrado, triángulo, pentágono, etc.).

Pirámide obtenida a partir de un prisma recto

El caso que sigue seria demostrar que, en el caso de una pirámide que tenga la misma altura y la misma base que un prisma recto, el volumen de la pirámide de altura h y área de base A es Ah/3

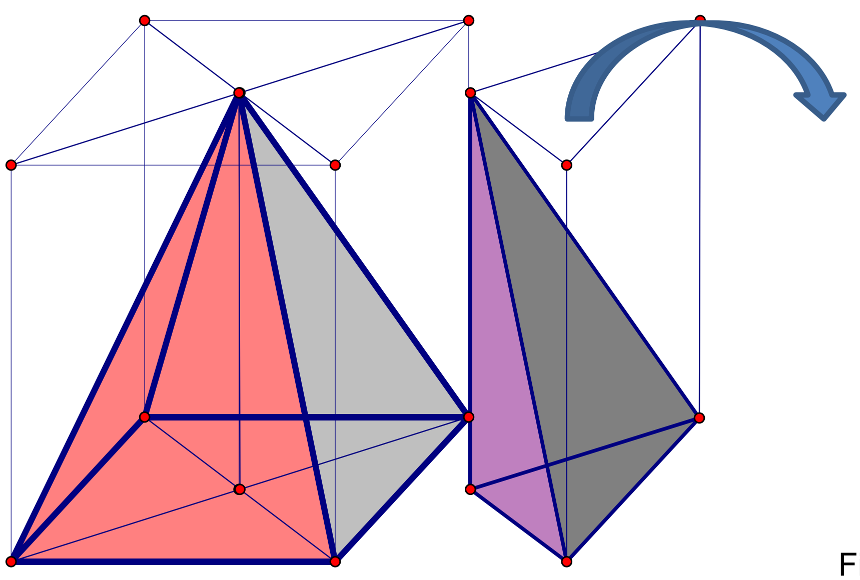


Figura 39

Para ello se observa que la pirámide que está dentro del prisma, está formada por cuatro secciones piramidales de forma irregular (es decir sus caras no son triángulos iguales). Cada una de ellas queda dentro de un prisma de base triangular y altura h. En el dibujo se ve desplazada hacia la derecha y queda como se presenta en la figura

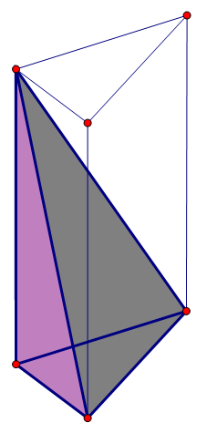


Figura 40

Si logramos demostrar que en el prisma cabe tres veces el trozo de pirámide esto significa que toda pirámide cabra tres veces en todo el prisma

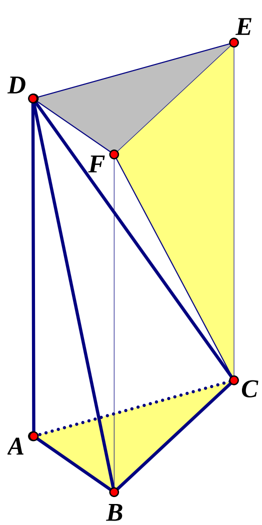


Figura 41

Observe que en la figura se pueden ubicar tres pirámides la pirámide ABCD, la DEFC y la DBCF. Las pirámides ABCD y DEFC son pirámides que tiene la misma base y la misma altura por lo tanto deberán tener el mismo volumen.

Lo mismo se tendrá para las pirámides DBCF y FECD ambas tiene bases iguales y la altura MD es la misma para ambas, por lo tanto:

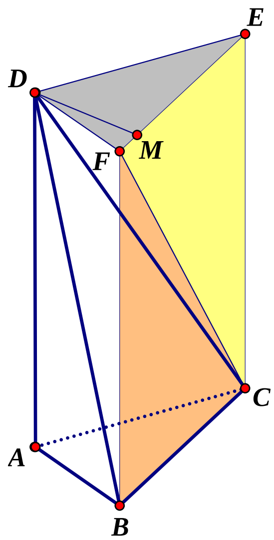


Figura 42

Las tres pirámides dentro del prisma triangular tienen el mismo volumen y en consecuencia son un tercio del volumen del prisma. En conclusión el volumen de la pirámide que está dentro de un prisma de misma base e igual altura es un tercio del área de la base por su altura.

A40. Volumen del Cilindro

Observa tres prismas cuyas bases son polígonos de 6, 10 y 20 lados:

Figura 43

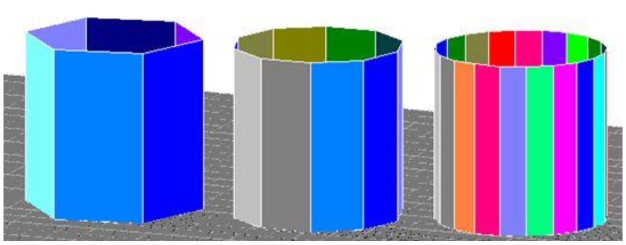
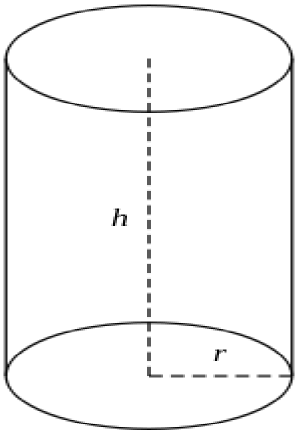
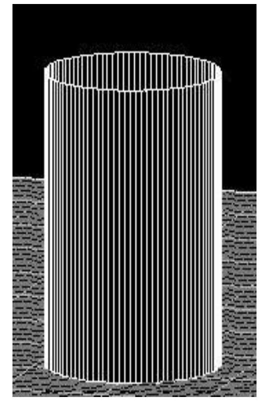


Figura 44



Notarás que a medida que aumentamos el número de lados de los polígonos de las bases, la figura que obtenemos se parece a un cilindro. El prisma de los 20 lados se parece a un cilindro. Si tuviera 100 lados lo confundiríamos con un cilindro. En la figura siguiente tienes un prisma recto con 100 lados. Podríamos considerarlo como cilindro. Si aumentásemos a 1000 el número de lados a la base la podemos considerar como un círculo.



En conclusión el volumen de un cilindro lo calcularemos del mismo modo como si fuésemos a calcular el de un prisma calculando el área de la base por la altura en este caso será:

$$V(cilindro) = \pi r^2 h$$

A41. Volumen del cono

Se puede razonar de la misma forma que en el caso del cilindro al pensar un cono como una pirámide de un número muy grande de caras que coinciden con el número de lados del polígono de la base. Por ello dado que el volumen de la pirámide es un tercio del área de la base por la altura entonces, quedará:

$$V(cono) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Anexo II Examen

En cada una de los siguientes problemas, escribe la respuesta detalladamente y justifica cuidadosamente tu respuesta.

1.- Determine la "formula" el área del sector del aro que se muestra en la figura I. El radio interior es "r" y el exterior es "R".

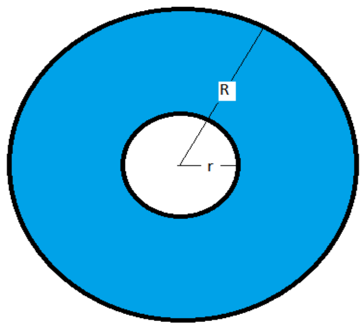


Figura I

Respuesta:

1. ***Área del circulo grande = πR^2***
   Área del circulo pequeño= πr^2
   Área del aro = $\pi R^2 - \pi r^2$
   Área del aro = $\pi(R^2 - r^2)$

2.- ¿Cuántos litros de agua le caben a un tinaco cilíndrico de diámetro igual a 2 metros y que tiene un metro de altura? (1 litro de agua ocupa 1 dm3).

Respuesta:

1. ***Radio=1m***
   Altura=1m
   Volumen del cilindro =Área de la base X altura
   Área de la base = πR^2
   Área de la base = $\pi(1m)^2$
   Volumen del cilindro = πm^2 X1m = πm^3
   Por otro lado tenemos la información
   (1 litro de agua ocupa 1 dm^3)

   $1m^3$=1000litros $\pi m^3=\pi(1000)$ litros.

3.- En el primero de los dibujos que aparecen abajo hay tres cuadrados sombreados, de un total de nueve; por tanto la fracción de la figura es $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

¿Qué fracción de figura está sombreada en cada uno de estos casos?

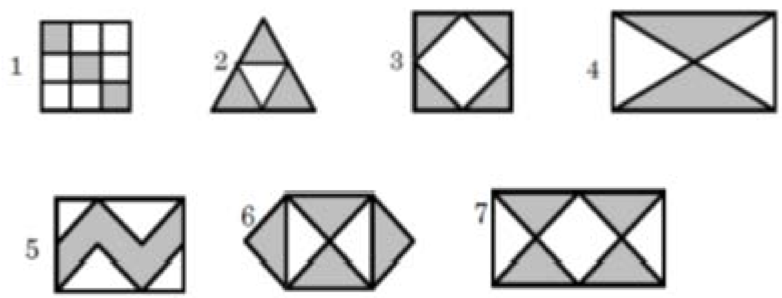
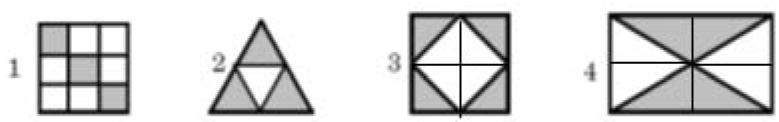
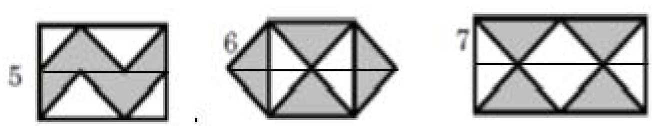


Figura II

Respuesta:



1/3 3/4 1/2 4/8



1/2 1/3 1/2

4.- Tenemos un cuadrado de lado 10 cm. Calcula el área de la figura sombreada, donde A, B, C y D son las puntos medios delas lados del cuadrado.

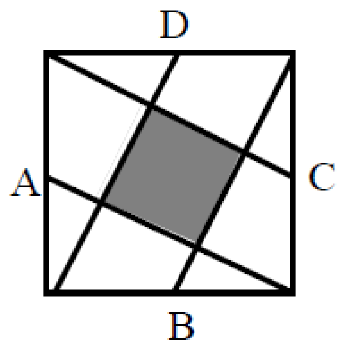
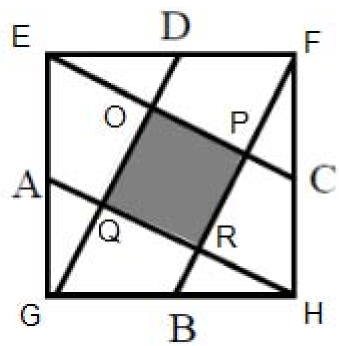
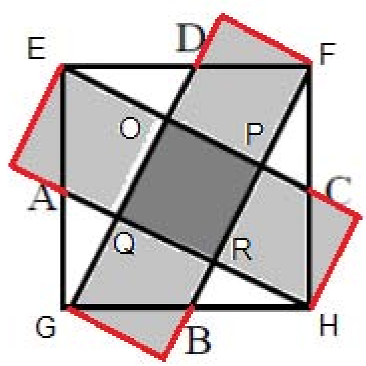


Figura III

Respuesta:



Los triángulos △EFC y △FHB son congruentes dado que tienen dos lados iguales y un ángulo igual. Por lo tanto los segmentos EC y BF son perpendiculares. Por lo tanto Los triángulos △FPC y △BRH son congruentes y lo mismo para los triángulos △AQG y △EOD



Por lo anterior es posible construir cinco cuadrados iguales como se indica en la figura cuyas áreas sumadas corresponden con el área del cuadrado. Asi se tendrá que:

Área del cuadrado = 10cmx10cm = 100cm²^{2}.

Posteriormente los alumnos deben tratar de recomponer cuadrados. Son 5 cuadros, por lo tanto un cuadro vale 20cm^2

5.-El prisma. Las longitudes de los lados de un prisma recto de base rectangular son proporcionales a los números 1, 2, y 3. La superficie total del prisma es de 550 cm2 Calcula el volumen.

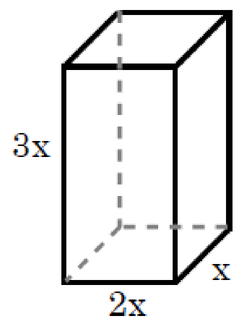


Figura IV

Superficie=(x)(2x)(2)+(2x)(3x)(2)+(x)(3x)(2)

Superficie= 4x^2+12x^2+6x^2

Superficie=22x^2

550cm^2=22x^2

x^2 = 25

$$x = \sqrt{25}$$

X=5cm

Volumen= (x) (2x) (3x)

Volumen= (5) (10) (15)

Volumen= 750cm^3

6.- ¿todos estos paralelogramos tienen la misma área? ¿Por qué?

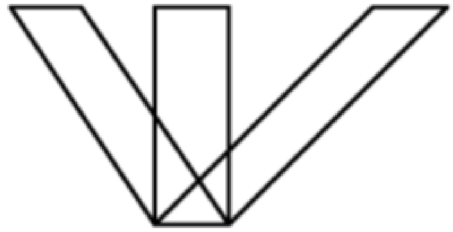
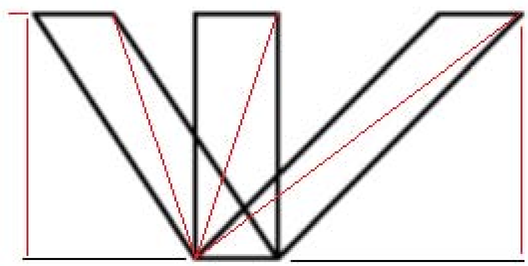


Figura V

Respuesta:

Cada paralelogramo tiene que descomponerse en dos triángulos, después se puede observar que cada par de triángulos tienen la misma base y la misma altura, lo que implica que los paralelogramos tienen la misma área.



7.- Para imprimir las revistas de la Olimpiada se han utilizado bobinas de papel que tienen un diámetro de 10 cm, conteniendo en su interior un tubo de 4 cm de diámetro. Sabiendo que la altura de cada una de ellas es de 1.5 metros y que el grosor del papel es de 0.1 mm. Calcular aproximadamente los metros cuadrados de papel que contiene cada bobina.

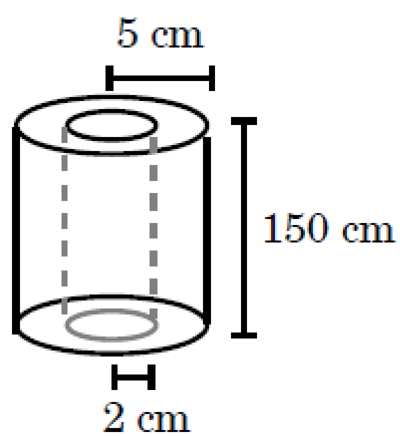


Figura VI

Respuesta:

Vol= $\pi R^2 h - \pi r^2 h$

Vol= $\pi(5^2)(150) - \pi(2^2)(150)$

Vol= $\pi(150)(5^2 - 2^2)$

Vol= $471.24(21) = 9896.04 cm^3$

Volumen= Área por espesor

Área = Volumen / espesor

Área = $9896.04\ cm^3 / .01 cm$

Área = $989604\ cm^2$

Área = $98.9604\ m^2$.