



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

**OBSERVADOR CON CONVERGENCIA EN TIEMPO
FIJO PARA SISTEMAS LINEALES MULTIVARIABLES
VARIANTES EN EL TIEMPO**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
PABLO ROBERTO OLIVA FONSECA

Instituto de Ingeniería

TUTOR PRINCIPAL
DR. JAIME A. MORENO PÉREZ

CIUDAD DE MÉXICO, JULIO, 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Yu Tang Xu
Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez
Vocal: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez
1er. Suplente: Dr. Leonid Fridman
2o. Suplente: Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Jaime A. Moreno Pérez

*A mi padres, por sus invaluable consejos y por ayudarme a alcanzar mis sueños.
A Claudia, mi princesa, por apoyarme incondicionalmente, estar a mi lado y creer en
mí más de lo que yo creo en mi mismo.
A mis hermanos, para quienes espero ser un buen ejemplo.*

Agradecimientos

A Dios, porque con él todo lo puedo.

A Gustavo Rueda, por su paciencia y por compartir conmigo su conocimiento.

A mis compañeros de la maestría, cuya amistad me hizo sentir en casa.

A Conacyt, por el apoyo económico, sin el cual esta tesis no sería posible.

A Estuardo Mancio, por creer en mí y motivarme a alcanzar la excelencia.

Índice general

Índice de figuras	VII
Índice de tablas	IX
1. Introducción	1
1.1. Presentación	1
1.2. Objetivos	1
1.3. Motivación	2
1.4. Estado del arte	2
1.5. Contribuciones	4
1.6. Estructura de la tesis	4
2. Marco Teórico	7
2.1. Estabilidad de sistemas	7
2.1.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov para sistemas autónomos	7
2.1.1.1. Estabilidad en tiempo finito y tiempo fijo para sistemas autónomos	8
2.1.2. Estabilidad de sistemas no autónomos	9
2.1.2.1. Estabilidad en tiempo finito y tiempo fijo para sistemas no autónomos	11
2.2. Sistemas lineales	12
2.2.1. Existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial .	13
2.2.2. Matriz de transición de estados	14
2.2.3. Solución general de los sistemas lineales	15
2.2.4. Observabilidad y constructibilidad	15
2.2.4.1. Observabilidad	16
2.2.4.2. Observabilidad completa y uniforme	18
2.2.4.3. Constructibilidad	18
2.2.4.4. Constructibilidad completa y uniforme	20
2.2.4.5. Reconstrucción del estado actual como un problema lineal	21
2.3. Observadores para sistemas lineales	22
2.3.1. Observador de Luenberger	22
2.3.2. Observador determinístico de mínima energía	24

3. Observador con convergencia en tiempo fijo	27
3.1. Planteamiento del problema	27
3.2. Esquema de estimación	28
3.2.1. Demostración de convergencia en tiempo fijo	30
4. Estructura y funcionamiento del observador	35
4.1. Factor de Olvido	36
4.1.1. Condiciones sobre el factor de olvido	38
4.1.2. \bar{N} como gramiano de constructibilidad	39
4.2. Error de Estimación	44
5. Observador para sistemas LIT y observador adaptable	47
5.1. Observador para sistemas LIT	47
5.1.1. Un observador de orden reducido	50
5.2. Observador adaptable para sistemas LIT	53
5.3. Observabilidad del sistema extendido	55
6. Ejemplos Numéricos	61
6.1. Estimación de los estados de un sistema LVT	61
6.1.1. Sistema LVT de segundo orden (Ejemplo 1)	61
6.1.2. Sistemas LVT de tercer orden (Ejemplo 2)	63
6.2. Estimación de los estados de un sistema LIT (Ejemplo 3)	68
6.2.1. Estimación parcial de los estados de un sistema LIT (Ejemplo 4)	71
6.3. Estimación de los estados de un sistema LIT con parámetros desconoci-	
dos (Ejemplo 5)	74
6.4. Estimación de parámetros (Ejemplo 6)	75
7. Conclusiones	83
A.	85
A.1. Propiedades de la matriz de transición de estados	85
A.2. Tiempo de convergencia	88
A.3. Aplicación de la desigualdad de Jensen	89
A.4. Lema de comparación	90
A.5. Funciones Hölder continuas	91
Bibliografía	93

Índice de figuras

3.1. Comportamiento cualitativo de t_1 con respecto a p_2	33
3.2. Comportamiento cualitativo de t_2 con respecto a p_1	34
6.1. Estimación del estado x_1 (Ejemplo 1)	63
6.2. Estimación del estado x_2 (Ejemplo 1)	63
6.3. Error de estimación con el algoritmo de estimación propuesto (Ejemplo 1)	64
6.4. Error de estimación con el EME (Ejemplo 1)	64
6.5. Comportamiento de la función de Lyapunov (Ejemplo 1)	65
6.6. Perturbación p_1 (Ejemplo 1)	65
6.7. Perturbación p_2 (Ejemplo 1)	65
6.8. Señal de salida $y(t)$ bajos los efectos de ruido (Ejemplo 1)	66
6.9. Error de estimación con el algoritmo de estimación propuesto bajo efectos de ruido y perturbaciones (Ejemplo 1)	66
6.10. Error de estimación con el EME bajo efectos de ruido y perturbaciones (Ejemplo 1)	67
6.11. Estimación del estado x_1 (Ejemplo 2)	67
6.12. Estimación del estado x_2 (Ejemplo 2)	68
6.13. Estimación del estado x_3 (Ejemplo 2)	68
6.14. Error de estimación con el algoritmo de estimación propuesto (Ejemplo 2)	69
6.15. Error de estimación con el EME (Ejemplo 2)	69
6.16. Comportamiento de la función de Lyapunov (Ejemplo 2)	69
6.17. Estimación del estado x_1 (Ejemplo 3)	70
6.18. Estimación del estado x_2 (Ejemplo 3)	71
6.19. Error de estimación para el algoritmo de estimación propuesto (Ejemplo 3)	71
6.20. Error de estimación para el EME (Ejemplo 3)	72
6.21. Comportamiento de la función de Lyapunov (Ejemplo 3)	72
6.22. Estimación del estado x_2 (Ejemplo 4)	73
6.23. Estimación del estado x_3 (Ejemplo 4)	74
6.24. Error de estimación para el algoritmo de estimación propuesto (Ejemplo 4)	74
6.25. Error de estimación para el EME (Ejemplo 4)	75
6.26. Estimación del parámetro a_1 (Ejemplo 5)	76

ÍNDICE DE FIGURAS

6.27. Estimación del parámetro a_2 (Ejemplo 5)	76
6.28. Estimación del parámetro b_1 (Ejemplo 5)	76
6.29. Estimación del parámetro b_2 (Ejemplo 5)	77
6.30. Error de estimación del estado x_1 (Ejemplo 5)	77
6.31. Error de estimación del estado x_2 (Ejemplo 5)	77
6.32. Estimación del estado ficticio $x_1(t)$ (Ejemplo 6)	79
6.33. Estimación del parámetro θ_1 (Ejemplo 6)	79
6.34. Estimación del parámetro θ_2 (Ejemplo 6)	80
6.35. Error de estimación para el algoritmo de estimación propuesto (Ejemplo 6)	80
6.36. Error de estimación para el EME (Ejemplo 6)	80
6.37. Comportamiento de la función de Lyapunov (Ejemplo 6)	81

Índice de tablas

6.1. Parámetros del observador para un sistema LTV de segundo orden (Ejemplo 1)	62
6.2. Parámetros del observador para un sistema LTV de tercer orden (Ejemplo 2)	66
6.3. Parámetros del observador para un sistema LIT de segundo orden (Ejemplo 3)	70
6.4. Parámetros del observador para sistemas LIT de orden reducido (Ejemplo 4)	73
6.5. Parámetros del observador adaptable para sistemas SISO (Ejemplo 5)	75
6.6. Parámetros del observador aplicado a un problema de estimación paramétrica (Ejemplo 6)	78

Introducción

1.1. Presentación

Uno de los problemas mas importantes en el área de control automático es el de estimar los estados internos de un sistema dinámico. Esto se puede hacer mediante otro sistema dinámico conocido como observador. En el presente trabajo se muestra un observador de estados internos para sistemas lineales variantes en el tiempo, con múltiples entradas y salidas. Dicho observador presenta la característica que sus salidas convergen a los estados a estimar en tiempo finito, el tiempo de convergencia está acotado por arriba y dicha cota es independiente del error de estimación inicial. Estas condiciones sobre el tipo de convergencia se conocen como convergencia en tiempo fijo [22].

1.2. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es diseñar un esquema de estimación del estado interno para sistemas lineales en el estado, capaz de reconstruir el estado actual de manera exacta en tiempo fijo. Se considerarán sistemas lineales variantes en el tiempo, completa y uniformemente observables con la siguiente estructura

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $A(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{r \times n}$ son funciones matriciales continuas conocidas, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados internos, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de señales de entrada y $y(t) \in \mathbb{R}^r$ es el vector señales de salida.

1.3. Motivación

Los modelos matemáticos lineales son de extrema utilidad al momento de querer aproximar sistemas no lineales. Debido a esto son ampliamente utilizados para el diseño de algoritmos de control y observación.

Dichos algoritmos son en su mayoría sistemas dinámicos lineales, lo cual limita su desempeño. En el caso particular de los observadores, gracias a su estructura lineal, estos no son capaces de converger a las trayectorias del modelo lineal a una velocidad mayor a la exponencial. Esta velocidad de convergencia puede ser insuficiente para aplicaciones de alto desempeño. Debido a esto es de gran interés el desarrollo de algoritmos de observación con velocidad de convergencia mayor a la exponencial y en el caso ideal convergencia en tiempo finito. Esto último implicaría que en tiempo finito las trayectorias del observador serían iguales a las trayectorias del modelo lineal. Es importante destacar que la convergencia a la trayectoria del estado real de un sistema no lineal, por parte de una trayectoria obtenida mediante un observador con estructura lineal, en general, es imposible. En vez de esto, las trayectorias del observador son las del modelo lineal, pero se supone que el modelo lineal propuesto por el diseñador es una aproximación suficientemente buena del sistema no lineal.

Otra desventaja importante por parte de los observadores con estructura lineal es que el tiempo que le toma al observador generar una aproximación del estado suficientemente buena está en función del error inicial. Esto puede ser una limitación importante, por ejemplo, al querer realizar seguimiento de una trayectoria por parte de un sistema no lineal mediante la linealización de dicho sistema sobre una trayectoria deseada. En este caso en particular, entre mayor sea el error de estimación inicial, mayor tiempo le tomará al observador generar un estimado del estado suficientemente bueno y por ende más tiempo el controlador utilizará información errónea. Lo anterior podría provocar que el controlador, al tener información errónea por mucho tiempo, produzca una señal de control que aleje al sistema de la trayectoria deseada. Bajo este razonamiento nace la necesidad de un observador con convergencia en tiempo finito y cuyo tiempo de convergencia sea independiente del error de estimación inicial, lo cual se conoce como convergencia en tiempo fijo.

1.4. Estado del arte

El problema de estimar los estados de un sistema dinámico existe desde antes de los años 60, pero fue Kalman quien propone, en [12], un algoritmo recursivo capaz de estimar los estados de un sistema lineal discreto en presencia de ruido blanco aditivo. Cabe destacar que dicho algoritmo busca minimizar el efecto del ruido en el error de estimación. Kalman y Bucy en [13] extienden esta idea y la aplican a sistemas continuos. Otro trabajo muy importante en el área de estimación de estados, fue desarrollado por Luenberger para sus tesis doctoral y presentado en [18]. Luenberger demuestra que todo sistema lineal invariante estable es capaz de reconstruir un funcional de los estados de

cualquier otro sistema lineal. A partir de estas ideas Luenberger propone un observador de estados internos. Es importante notar que, aunque el observador continuo de Kalman es robusto ante ruido blanco aditivo, tanto en la entrada como en la medición de la salida, este observador para el caso invariante en el tiempo, es una forma particular del observador de Luenberger. Esto puede verse al reconocer al observador de Kalman como un observador de Luenberger identidad.

Es importante notar que tanto en el observador de Luenberger como en el filtro de Kalman se supone que el sistema a observar es completamente conocido. Debido a esto una vez fue resuelto el problema de estimar los estados de un sistema lineal completamente conocido, se atacó el problema de estimar los estados internos de un sistema lineal desconocido. Esto dio paso a los observadores adaptables. Entre los primeros trabajos se encuentra un controlador adaptable para sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LIT) desarrollado por Narendra [21], en donde introduce nociones de optimización para así poder identificar los parámetros necesarios para el correcto funcionamiento del controlador. En años posteriores se reportan algoritmos adaptables de estimación para sistemas SISO LIT tanto discretos como continuos [6], [17], [26], [15] e inclusive dichos algoritmos se extendieron para así estimar tanto los parámetros del sistema como los estados internos [17].

En muchos casos los observador es son utilizados en conjunto con controladores. Esto puede ocasionar que el desempeño del sistema con el observador y el controlador en lazo cerrado dependa en parte de la velocidad de convergencia del observador. Debido a esto, en años posteriores trabajos dedicados a mejorar la velocidad de convergencia fueron presentados. Entre los objetivos planteados está lograr reconstruir el estado de manera exacta en tiempo finito y tiempo fijo.

En el marco de estimación de estados en tiempo finito para sistemas lineales de la forma (1.1) existen resultados ya reportados, de los cuales vale la pena destacar el uso de técnicas de modos deslizantes. Entre los observador es basados en dicha técnica, que satisfacen el tipo de convergencia deseado, está un observador propuesto por Levant, el cual tiene el inconveniente de tener que ser diseñado en un sistema de coordenadas específico [16]. Otros algoritmos de estimación derivados de los modos deslizantes son aquellos basados en el método del control equivalente [8][7][10]. Dicha técnica asegura la convergencia a cero de la dinámica del error en tiempo finito, con el inconveniente de tenerse que calcular el control equivalente. Lo cual en la práctica puede ser muy difícil o hasta imposible. También se pueden mencionar los observadores de horizonte móvil [20][25], los cuales están basados en la obtención en línea de la solución de un problema de optimización dinámica. Para dichos observadores, bajo la suposición de la existencia de la solución del problema de optimización dinámica, es posible estimar los estados en tiempo finito. El inconveniente con esta clase de observadores está en la complejidad del problema de optimización a resolver. Otro técnica reportada son los observadores desfasados [9][19], los cuales permiten reconstruir los estados de un sistema lineal mediante el uso de dos observadores identidad desfasados en el tiempo. El estado es reconstruido a partir de la información de ambos observadores y estos pueden ser utilizados tanto para sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (LVT) como para

sistemas LIT. Un problema que se puede dar al implementar estos últimos esquemas de observación es la complejidad en encontrar el desfase y las matrices de retroalimentación que satisfagan las condiciones necesarias para poder asegurar convergencia en tiempo finito.

1.5. Contribuciones

Como consecuencia del desarrollo presentado en esta tesis se obtiene:

- Un algoritmo de estimación de estados internos para sistemas lineales multivariantes en el tiempo, el cual es capaz de converger al estado real en tiempo finito y cuyo tiempo de convergencia está acotado superiormente, independientemente del error de estimación inicial (es decir, convergencia en tiempo fijo).
- Un algoritmo de estimación de estados internos para sistemas lineales multivariantes invariantes en el tiempo, el cual es capaz de converger al estado real en tiempo finito, que posee una estructura simplificada comparada con el caso general para sistemas LTV
- Un algoritmo de estimación de estados internos, de orden reducido, para sistemas lineales multivariantes invariantes en el tiempo, el cual es capaz de converger al estado real en tiempo finito.
- Un algoritmos de estados internos y parámetros desconocidos para sistemas lineales invariantes en el tiempo en forma canónica de observador, el cual converge a los estados y parámetros exactos en tiempo fijo.

1.6. Estructura de la tesis

El capítulo dos expone el marco teórico, en donde se presentan los conceptos utilizados de estabilidad de sistemas dinámicos, teoría sobre sistemas lineales y sus propiedades, y por último, dos algoritmos de estimación, los cuales se consideran importantes por su trascendencia histórica y relación con el trabajo de tesis

El capítulo tres muestra el objetivo principal de la tesis, el algoritmo de estimación desarrollado y la prueba formal de su funcionamiento.

El capítulo cuatro contiene las ideas y el desarrollo que llevan al algoritmo de estimación propuesto. El punto principal del capítulo es el diseño de una expresión de error, la cual permite medir el error de estimación, o que tan lejos está el estado estimado del estado real.

El capítulo cinco presenta un algoritmo de estimación para sistemas LIT, y se muestra como el algoritmo propuesto en el capítulo tres puede ser utilizado como observador para sistemas LIT con parámetros desconocidos.

El capítulo seis presenta ejemplos numéricos. Dichos ejemplos buscan mostrar, mediante simulaciones por computadora, el funcionamiento y desempeño de los algoritmos de estimación propuestos.

Marco Teórico

En el presente capítulo se presenta tanto la teoría que respalda el desarrollo hecho a lo largo de la tesis como conceptos básicos para su entendimiento. El primer tema a tocar es el de estabilidad en el sentido de Lyapunov, teoría de suma relevancia en el campo del control automático. Los conceptos de estabilidad en el sentido de Lyapunov expuestos cubren tanto sistemas autónomos como no autónomos. Dado que los sistemas de interés son los lineales, su formulación matemática es presentada. Por último se exponen los observadores de estados de Luenberger y Kalman, los cuales representan las bases en la teoría de estimación de estados para sistemas lineales.

2.1. Estabilidad de sistemas

Entre las herramientas disponibles mas importantes utilizadas para analizar las trayectorias de los sistemas dinámicos, diseñar esquemas de control y diseñar esquemas estimación, esta la teoría de estabilidad de Lyapunov.

2.1.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov para sistemas autónomos

Considere el sistema autónomo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{2.1}$$

en dónde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función del dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R}^n y cuya solución se supone siempre existe y es única. Un punto $x = x^*$ se dice que es de equilibrio si se satisface que $f(x^*) = 0$. Los puntos de equilibrio de un sistema dinámico pueden ser clasificados de acuerdo a cómo se comportan las trayectorias que inician arbitrariamente cerca del mismo. Dicha clasificación se presenta en la siguiente definición para puntos

de equilibrio situados en el origen, pero ya que cualquier punto puede ser desplazado al origen, las definiciones aplican a cualquier punto de equilibrio [14].

Definición 1. *El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.1) es:*

- estable, si para todo $\epsilon > 0$ existen un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0; \quad (2.2)$$

- inestable, si no es estable y
- asintóticamente estable, si es estable y existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \forall t \geq 0; \quad (2.3)$$

- exponencialmente estable, si es asintóticamente estable y existen $\alpha, \beta, \delta > 0$ tal que

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)}, \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

2.1.1.1. Estabilidad en tiempo finito y tiempo fijo para sistemas autónomos

Como se vio anteriormente, un punto de equilibrio puede ser estable o asintóticamente estable. Esta última propiedad asegura estabilidad y que las trayectorias son atraídas al punto de equilibrio. En contraste con el concepto de estabilidad asintótica, hay sistemas cuyas trayectorias llegan al origen en tiempo finito. Esto significa que si una trayectoria empieza suficientemente cerca del origen, dicha trayectoria tocará el origen en tiempo finito.

Definición 2 ([23]). *Sea el sistema dinámico (2.1), donde $f(0) = 0$. Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n tal que $0 \in \Omega$. Se dice que el punto $x = 0$, es*

- estable en tiempo finito, si es estable y para todo $x_0 \in \Omega$ existe $0 \leq T(x_0) < +\infty$ tal que $x(t) = 0$ para todo $t \geq t_0 + T(x_0)$, en donde $T(x_0)$ se conoce como la función de tiempo de asentamiento. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces $x = 0$ se dice que es globalmente estable en tiempo finito.
- estable en tiempo fijo, si es estable y existe $0 \leq T < +\infty$ tal que $x(t) = 0$ para todo $t \geq t_0 + T$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces $x = 0$ se dice que es globalmente estable en tiempo fijo.

2.1.2. Estabilidad de sistemas no autónomos

Se dice que un sistema dinámico es no autónomo si el campo vectorial depende explícitamente del tiempo. Las definiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov pueden ser extendidas a este tipo de sistemas. Considere el sistema dinámico variante en el tiempo o no autónomo [14].

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (2.5)$$

cuyas soluciones se asume que siempre existen en el intervalo $[0, \infty)$ y donde $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua a tramos en t . El vector $x(t)$ representa los estados internos y $D \subset \mathbb{R}^n$ contiene al origen. De manera similar al caso de sistemas autónomos, los puntos de equilibrio de un sistema no autónomo pueden ser clasificados mediante sus propiedades de estabilidad.

Definición 3. El origen del sistema (2.5) es un punto de equilibrio si se satisface que

$$f(0, t) = 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.6)$$

Un punto de equilibrio puede ser:

- Estable, si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (2.7)$$

- Uniformemente estable, si para cada $\epsilon > 0$, existe una $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, independiente de t_0 , tal que (2.7) se satisface.

2. MARCO TEÓRICO

- *Inestable, si no es estable.*
- *Asintóticamente estable, si es estable y existe un valor positivo $c = c(t_0)$ tal que $x(t) \rightarrow 0$ mientras $t \rightarrow \infty$, para todo $\|x(t_0)\| < c$.*
- *Uniforme asintóticamente estable, si es uniformemente estable y existe una constante positiva c , independiente del tiempo, tal que para todo $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \rightarrow 0$ mientras $t \rightarrow \infty$, uniformemente en t_0 ; esto es, para cada $\eta > 0$, existe un $T = T(\eta) > 0$ tal que*

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta), \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (2.8)$$

- *Global, uniforme y asintóticamente estable si es uniformemente estable y $\delta(\epsilon)$ puede ser escogida para satisfacer $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \delta(\epsilon) = \infty$ y para cada par de números positivos η y c , existe una $T = T(\eta, c) > 0$ tal que*

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta, c), \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (2.9)$$

Asegurar la estabilidad de un punto de equilibrio a partir de la definición puede ser muy complicado o incluso imposible. Una alternativa es usar el método propuesto por A. M. Lyapunov en [14], en donde se propone el uso de una función positiva definida diferenciable y se dan condiciones sobre su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico a analizar para garantizar la estabilidad del punto de equilibrio. Dicho resultado es presentado mediante el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (2.5) y $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio conexo que contiene a $x = 0$. Si $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable tal que*

$$\begin{aligned} W_1(x) &\leq V(t, x) \leq W_2(x), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x) &\leq 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall x \in D$, donde $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son funciones continuas positivas definidas en D . Entonces $x = 0$ es uniformemente estable.

El resultado anterior puede ser utilizado para asegurar únicamente estabilidad de un punto de equilibrio, pero dicho resultado puede ser extendido para asegurar estabilidad asintótica.

Teorema 2. *Asuma que las suposiciones del Teorema (1) se satisfacen y la desigualdad (2.10) es cambiada por*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x) \leq -W_3(x), \quad (2.11)$$

donde $W_3(x)$ es una función continua positiva definida en D . Entonces $x = 0$ es uniforme y asintóticamente estable.

2.1.2.1. Estabilidad en tiempo finito y tiempo fijo para sistemas no autónomos

Dado que el objetivo es lograr convergencia del error de estimación a cero en tiempo fijo y los sistemas a considerar pueden ser no autónomos es necesario contar con definiciones para estabilidad en tiempo finito y fijo. Dichos conceptos se presentan en la siguiente definición.

Definición 4 ([23]). *Considere el sistema dinámico no autónomo (2.5), donde $f(0, t) = 0$. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n tal que $0 \in \Omega$. Se dice que el punto $x = 0$, es*

- *Uniformemente estable en tiempo finito si es uniformemente estable y para todo $x_0 \in \Omega$ existe $0 \leq T(x_0) < +\infty$ tal que $x(t, t_0, x_0) = 0$ para todo $t \geq t_0 + T(x_0)$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ entonces $x = 0$ se dice que es global y uniformemente estable en tiempo finito.*

- Uniformemente estable en tiempo fijo si es global y uniformemente estable en tiempo finito y existe $\bar{T} < +\infty$ tal que $\bar{T} \geq T(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3 ([4]). Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (2.5) y $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio conexo que contiene a $x = 0$. Si $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable tal que

$$W_2(x) \geq V(t, x) \geq W_1(x) \quad (2.12)$$

$$\dot{V}(t, x) \geq -k(t)(V(t, x))^\lambda \quad (2.13)$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall x \in D$, donde $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son funciones continuas positivas definidas en D , $k(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\int_t^{t+T} k(\tau) d\tau \geq \epsilon > 0$ para un $T \in \mathbb{R}^+$ y λ es un número real tal que $\lambda \in (0, 1)$. Entonces $x = 0$ es uniformemente estable en tiempo finito.

2.2. Sistemas lineales

Sean W y V espacios vectoriales y $w \in W$, $v \in V$. Considere el operador $\mathbb{H} : W \rightarrow V$. Se dice que \mathbb{H} es un operador lineal si satisface las propiedades de aditividad y homogeneidad [27]. Entonces \mathbb{H} define un sistema lineal de la forma

$$v = \mathbb{H}w, \quad (2.14)$$

En el presente trabajo, los operadores de interés son los sistemas dinámicos lineales de dimensión finita, que definen un operador lineal de la forma

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s)ds, \quad (2.15)$$

en donde $\Phi(t, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B(s) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son funciones matriciales que se presentarán más adelante. El operador (2.15) mapea el espacio de condiciones iniciales $X(t_0)$ y funciones $U(s)$ al espacio de soluciones $X(t)$. Ya que la matriz Φ y el operador integral $\int ds$ son operadores lineales, claramente (2.15) satisface las propiedades de aditividad y homogeneidad,

$$\begin{aligned}
& \Phi(t, t_0)(\alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0)) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)(\alpha u_1(s) + \beta u_2(s))ds \\
&= \Phi(t, t_0)\alpha x_2(t_0) + \Phi(t, t_0)\beta x_2(t_0) \\
&+ \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)\alpha u_1(s) + \Phi(t, s)B(s)\beta u_2(s)ds \\
&= \alpha \left(\Phi(t, t_0) x_1(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u_1(s)ds \right) \\
&+ \beta \left(\Phi(t, t_0) x_2(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u_1(s)ds \right)
\end{aligned}$$

El operador (2.15) es comúnmente representado mediante una ecuación diferencial de la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\
y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados internos, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es la salida, y $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es la entrada. $A(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz característica, $B(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de entrada, $C(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{r \times m}$ es la matriz de salida y $D(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$ es la matriz de transmisión directa. En el presente trabajo se supondrá que las matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son funciones matriciales al menos continuas por tramos, y $D(t) = 0$. La equivalencia entre (2.15) y (2.16) será demostrada más adelante.

2.2.1. Existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial

Suponga que se tiene la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad a \leq t \leq b. \tag{2.17}$$

Una condición suficiente para asegurar la existencia y unicidad de la solución es que el campo vectorial $f(x(t), t)$ sea Lipschitz [24], o concretamente

$$\|f(x_1(t), t) - f(x_2(t), t)\| \leq k(t)\|x_1(t) - x_2(t)\|, \tag{2.18}$$

donde $k(t) > \rho > 0$ es por lo menos continua por partes. Para los sistemas dinámicos de la forma (2.16), se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|f(x_1(t), t) - f(x_2(t), t)\| &= \|A(t)x_1(t) + B(t)u(t) - A(t)x_2(t) - B(t)u(t)\| \\
 &= \|A(t)x_1(t) - A(t)x_2(t)\| \\
 &\leq \|A(t)\| \|x_1(t) - x_2(t)\|.
 \end{aligned}$$

Por lo que si cada elemento de la matriz $A(t)$ es una función al menos continua por partes entonces (2.16) tiene solución y esta es única.

2.2.2. Matriz de transición de estados

La matriz de transición de estados $\Phi(t_2, t_1)$ del sistema (2.16) está definida como una transformación lineal que mapea el estado en el tiempo $t = t_1$ en el estado en el tiempo $t = t_2$ [5]. Ésto se puede expresar de la manera siguiente

$$x(t_2) = \Phi(t_2, t_1)x(t_1). \quad (2.19)$$

Dicha matriz satisface el siguiente teorema

Teorema 4. *Sea $\Phi(p, s)$ la matriz de transición de estados del sistema (2.16), la cual se define como*

$$x(t_2) = \Phi(t_2, t_1)x(t_1). \quad (2.20)$$

Entonces, dicha matriz tiene las siguientes propiedades

$$1) \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$$

$$2) \Phi^{-1}(t_1, t_2) = \Phi(t_2, t_1)$$

$$3) \frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0).$$

La prueba del teorema anterior puede ser encontrada en la el Apéndice A.1 . De la propiedad 3 se puede ver que, derivando (2.19), la igualdad

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(x(t)) &= \frac{d}{dt}(\Phi(t, t_0)x(t_0)) \\
 \dot{x}(t) &= A(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) \\
 &= A(t)x(t)
 \end{aligned} \quad (2.21)$$

es obtenida

De (2.21), la expresión $\Phi(t, t_0)x(t_0)$ representa la solución general de (2.5) cuando $u(t) = 0$. Como se vio en la sección (2.2), una de las propiedades características de los sistemas lineales es que satisfacen la propiedad de aditividad. De donde se puede ver que la solución general para el caso $u(t) \neq 0$ es $\Phi(t, t_0)x(t_0)$ mas una función $g = g(u(t))$.

2.2.3. Solución general de los sistemas lineales

Para el caso cuando $u(t) \neq 0$, la solución general de (2.5) está dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (2.22)$$

Esto puede ser probado derivando (2.22) con respecto al tiempo y aplicando las propiedades de la matriz de transición de estados [5]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt} \left[\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right] \\ &= A(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + B(t)u(t) + A(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= A(t) \left[\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right] + B(t)u(t) \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

De la expresión anterior se puede ver que la solución es la suma de dos términos. El primero corresponde al efecto de las condiciones iniciales, y el segundo debido al efecto de la entrada $u(t)$. Dichas soluciones se conocen como la respuesta natural y la respuesta forzada del sistema.

2.2.4. Observabilidad y constructibilidad

El problema de determinar la condición inicial de un sistema dinámico dado, a partir del par de mediciones entrada-salida, se conoce como el problema de observabilidad. De manera similar, el problema de construir el valor de las soluciones en cada instante del tiempo, a partir del par de mediciones entrada-salida, se conoce como el problema de constructibilidad. En un sistema lineal de tiempo continuo la solución es única en cualquier dirección del tiempo (ver (2.22)). Debido a esto, si el estado inicial es conocido entonces el estado en cada instante de tiempo puede ser calculado, y viceversa. Por esta razón los problemas de observabilidad y constructibilidad para sistemas lineales

son equivalentes. Por la linealidad y que el sistema es de dimensión finita, verificar las propiedades de observabilidad y constructibilidad se reduce a verificar la invertibilidad de una matriz variante en el tiempo.

2.2.4.1. Observabilidad

Que un sistema sea observable significa que es posible reconstruir su condición inicial a partir de la información entrada salida [11]. Dada la equivalencia entre las propiedades de constructibilidad y observabilidad, esta última propiedad es importante en el diseño de observadores y presentada de manera precisa a continuación.

Definición 5 ([11]). *Se dice que un sistema dinámico es observable en el intervalo $[t_0, t_1]$ si y solo si, para toda entrada $u_{[t_0, t_1]}$ y toda salida correspondiente $y_{[t_0, t_1]}$, el estado x_0 está unívocamente determinado.*

La propiedad de observabilidad para sistemas lineales es independiente de la entrada al sistema. Esto significa que si un sistema es observable cuando $u(t) = 0$ entonces será observable para todo $u(t) \neq 0$. En el caso de sistemas lineales, la observabilidad del sistema puede ser verificada directamente de la estructura del sistema. El siguiente teorema enuncia éste resultado.

Teorema 5 ([11]). *Sean las matrices $A(t)$ y $C(t)$, donde cada una de sus componentes es una función al menos continua a tramos. Las siguientes proposiciones son equivalentes*

- *El par $(A(t), C(t))$ es observable.*
- *La condición inicial, x_0 , puede ser determinada unívocamente por $u_{[t_0, t_1]}$ y $y_{[t_0, t_1]}$, es decir el sistema es observable en el intervalo $t \in [t_0, t_1]$.*
- *El operador lineal $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Y}_{[t_0, t_1]}^q$, definido como*

$$C(t)\Phi(t, t_0), \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

es inyectivo.

- El determinante de la matriz $M(t_0, t_1)$ es distinto de cero, dicha matriz se define de la manera siguiente

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^\top(t, t_0) C^\top(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt.$$

La matriz $M(t_0, t_1)$ es conocida como el gramiano de observabilidad y tiene las siguientes propiedades

Teorema 6 ([11]). Sea $M(t_0, t_1)$ el gramiano de observabilidad del sistema (2.16), entonces

- $M(t_0, t_1)$ es una matriz simétrica.
- $M(t_0, t_1)$ es positiva semidefinida para $t_1 \geq t_0$, es decir, para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$ se satisface que

$$\eta^\top M(t_0, t_1) \eta \geq 0.$$

- $M(t_0, t_1)$ satisface la ecuación diferencial matricial lineal

$$\frac{d}{dt} M(t, t_1) = -A^\top(t) M(t, t_1) - M(t, t_1) A(t) + C^\top(t) C(t), \quad M(t_1, t_1) = 0.$$

- $M(t_0, t_1)$ satisface la ecuación funcional

$$M(t_0, t_1) = M(t_0, t) + \Phi^\top(t, t_0) M(t, t_1) \Phi(t, t_0). \quad (2.24)$$

en donde $t_0 < t < t_1$.

2.2.4.2. Observabilidad completa y uniforme

De (2.24) y de la definición del gramiano de observabilidad se puede ver que si un sistema es observable en el intervalo $[t_a, t_b]$ entonces será observable en el intervalo $[t_a, t_c]$, en donde $t_a < t_b < t_c$. Es importante notar que la observabilidad en el intervalo $[t_a, t_b]$ no implica observabilidad en el intervalo $[t_b, t_c]$, ya que es posible que el sistema solo sea observable en intervalos que contengan a $[t_a, t_b]$. Esto ilustra que en general la observabilidad de un sistema depende del tiempo en el que se inician las mediciones y la duración de éstas. Si por cualquier razón uno pierde la información del intervalo $[t_a, t_b]$, entonces no será posible conocer la condición inicial. Hay sistemas que pueden ser observables independientemente del momento en el que se inicien las mediciones, siempre que éstas se recaben el tiempo suficiente. Estos sistemas se dice que son *completa y uniformemente observables*. Dicho tipo de observabilidad se caracteriza mediante la siguiente definición.

Definición 6. *Considere el sistema lineal 2.16. Se dice que el sistema es completa y uniformemente observable si y solo existen constantes $T > 0$, $\epsilon_1 > 0$, y $\epsilon_2 > 0$, todas independientes de t , tal que*

$$\epsilon_1 \mathbb{I} \geq M(t+T, t) = \int_t^{t+T} \Phi^\top(s, t) C^\top(s) C(s) \Phi(s, t) ds \geq \epsilon_2 \mathbb{I}, \quad (2.25)$$

para todo t .

De la definición anterior se puede ver que aquellos sistemas que satisfacen (2.25) son observable si se toman mediciones por un tiempo mayor a T .

2.2.4.3. Constructibilidad

De forma similar a la observabilidad, un sistema es construible si es posible reconstruir el estado actual, a partir de la información contenida en la entrada y la salida de sistema [11]. Es importante notar que la observabilidad usa mediciones futuras, con respecto al estado inicial, de las señales de entrada y salida, mientras la constructibilidad usa mediciones pasadas de las señales disponible. A continuación se da la definición de constructibilidad en sistemas dinámicos.

Definición 7 ([11]). *Un sistema dinámico lineal se dice que es construible en el intervalo $[t_0, t_1]$ si y solo si para toda entrada $u_{[t_0, t_1]}$ y su correspondiente salida $y_{[t_0, t_1]}$ el estado $x(t_1)$ está unívocamente determinado.*

El siguiente teorema se satisface para sistemas lineales construibles

Teorema 7 ([11]). *Sean las matrices $A(t)$ y $C(t)$, donde cada una de sus componentes es una función al menos continua a tramos. Las siguientes proposiciones son equivalentes*

- *EL par $(A(t), C(t))$ es construible.*
- *El valor del estado en t_1 , $x(t_1)$, puede ser unívocamente determinado a partir de $y_{[t_0, t_1]}$ y $u_{[t_0, t_1]}$, es decir, el sistema es construible en el intervalo $t \in [t_0, t_1]$.*
- *El operador lineal $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Y}_{[t_0, t_1]}^q$ definido como*

$$C(t)\Phi(t, t_1), \forall t \in [t_0, t_1] \quad (2.26)$$

es inyectivo

- *El determinante de $N(t_0, t_1)$ es distinto de cero, dicha matriz se define de la manera siguiente*

$$N(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^\top(t, t_1) C^\top(t) C(t) \Phi(t, t_1) dt \quad (2.27)$$

Como en el caso de la observabilidad, la matriz $N(t_0, t_1)$ es el gramiano de constructibilidad. El gramiano de constructibilidad tiene las siguientes propiedades

Teorema 8 ([11]). *Sea $N(t_0, t_1)$ el gramiano de constructibilidad del sistema (2.16), entonces*

- *$N(t_0, t_1)$ es simétrica*
- *$N(t_0, t_1)$ positiva semidefinida para $t_1 \geq t_0$, es decir, para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$ se satisface que*

$$\eta^\top N(t_0, t_1) \eta \geq 0 \quad (2.28)$$

- $N(t_0, t)$ *satisface la ecuación diferencial matricial lineal*

$$\frac{d}{dt} N(t_0, t) = -A^\top(t)N(t_0, t) - N(t_0, t)A(t) - C^\top(t)C(t), \quad N(t_0, t_0) = 0 \quad (2.29)$$

- $N(t_0, t_1)$ *satisface la ecuación funcional*

$$N(t_0, t_1) = N(t, t_1) + \Phi^\top(t, t_1)N(t_0, t)\Phi(t, t_1) \quad (2.30)$$

en donde $t_0 < t < t_1$

2.2.4.4. Constructibilidad completa y uniforme

Como se vio en la sección anterior, la observabilidad de un sistema puede depender del tiempo inicial. Este tipo de dependencia también se da en el caso de la constructibilidad. Aquellos sistemas para los cuales el intervalo en el que son construibles es independiente del tiempo inicial, se dice que son *completa y uniformemente construibles*.

Definición 8. *Considere el sistema lineal 2.16. Se dice que el sistema es Completa y Uniformemente Construible si y solo si existen constantes $T > 0$, $\epsilon_1 > 0$, y $\epsilon_2 > 0$, todas independientes de t , tal que*

$$\epsilon_1 \mathbb{I} \geq N(t, t+T) = \int_t^{t+T} \Phi^\top(s, t+T)C^\top(s)C(s)\Phi(s, t+T)ds \geq \epsilon_2 \mathbb{I}, \quad (2.31)$$

para todo t .

2.2.4.5. Reconstrucción del estado actual como un problema lineal

El problema de construir el estado actual de un sistema lineal puede ser reducido a resolver una ecuación lineal de la forma

$$N(t, t_0)x(t) = \psi(t, t_0), \quad (2.32)$$

en donde $N(t, t_0)$, con $N(t_0, t_0) = 0$, es el gramiano de constructibilidad en el intervalo $[t_0, t]$. Entonces, el estado puede ser reconstruido al multiplicar $N^{-1}(t)$ por el vector $\psi(t)$, en cada instante de t .

Para ver esto, tome en consideración el sistema lineal (2.16) y considere su matriz de transición de estados $\Phi(t, s)$. De la definición de la solución general de los sistemas lineales (2.22), podemos ver que el estado $x(t)$ puede ser computado usando el estado en el tiempo $s \in I : [t_0, t]$ y la entrada en el intervalo $[s, t]$. Esto es claro considerando la siguiente expresión:

$$x(t) = \Phi(t, s)x(s) + \int_s^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Dado que el historial de y está disponible, y no el estado completo, es deseable poner la expresión anterior en términos de esta. Con este fin se premultiplica la ecuación anterior por la inversa de $\Phi(t, s)$, $\Phi(s, t)$. Posteriormente, se premultiplica por $C(s)$ y la siguiente expresión surge

$$C(s)\Phi(s, t)x(t) = y(s) + C(s) \int_s^t \Phi(s, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Para completar el procedimiento, premultiplique por $\Phi^\top(s, t)C^\top(s)$ e integre sobre el intervalo I con respecto a s

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \Phi^\top(s, t)C^\top(s)C(s)\Phi(s, t)ds x(t) &= \int_{t_0}^t \Phi^\top(s, t)C^\top(s)y(s)ds \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi^\top(s, t)C^\top(s)C(s) \int_s^t \Phi(s, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau ds. \end{aligned}$$

Definiendo así

$$N(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t \Phi^\top(s, t) C^\top(s) C(s) \Phi(s, t) ds, \quad (2.33)$$

$$\alpha(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t \Phi^\top(s, t) C^\top(s) y(s) ds, \quad (2.34)$$

$$\beta(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t \Phi^\top(s, t) C^\top(s) C(s) \int_s^t \Phi(s, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau ds, \quad (2.35)$$

$$\psi(t_0, t) \triangleq \alpha(t, t_0) + \beta(t, t_0), \quad (2.36)$$

Entonces, si $N(t, t_0)$ es no singular, sólo existe un $x(t)$ que satisfaga (2.32). Es importante mencionar que la invertibilidad de $N(t_0, t)$ puede depender de t_0 . Ésto no ocurre en sistemas que son completa y uniformemente construibles.

Con el fin de implementar un algoritmo capaz estimar el estado interno, aprovechando la igualdad (2.32), las funciones $N(t, t_0)$ y $\psi(t, t_0)$ deben de poder ser construidas en línea con información disponible, es decir, conociendo $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, y mediciones de $y(t)$ y $u(t)$. Es importante considerar que dada la estructura de $N(t_0, t)$, dicha señal puede crecer sin cota dependiendo de el comportamiento del inverso de la matriz de transición de estados $\Phi^{-1}(t, t_0)$. Esto significa que si $A(t)$ impone un movimiento estable en (2.16), el inverso de su matriz de transición de estados estará compuesto por funciones que crecen de forma exponencial. Dado que la igualdad (2.32) siempre se satisface, si los estados son funciones acotadas entonces $\psi(t_0, t)$ también crecerá sin cota.

2.3. Observadores para sistemas lineales

Para el caso de los sistemas lineales existen en la literatura dos resultados importantes en el diseño de observadores. Dada la relevancia de dichos observadores, ambos son expuesto en las siguientes subsecciones.

2.3.1. Observador de Luenberger

Uno de los primeros en plantear la idea de un sistema dinámico como un observador de estados para sistemas lineales fue el Dr. Luenberger. Dicho trabajo fue desarrollado para su tesis doctoral y posteriormente publicado en [18]. En dicho trabajo se presenta el siguiente teorema, del cual se puede deducir el observador de estados que lleva su nombre.

Teorema 9. *Sea S_1 un sistema dinámico de la forma*

$$S_1 : \dot{x}(t) = Ax(t),$$

el cual excita al sistema dinámico S_2 definido como

$$S_2 : \dot{z} = Bz(t) + Cx(t)$$

Si las matrices A y B no tienen valores propios en común, entonces existe una transformación lineal T , tal que si $z(0) = Tx(0)$, entonces $z(t) = Ty(t)$, o en general

$$z(t) = Ty(t) + e^{Bt}(z(t_0) - Ty(t_0))$$

A partir del Teorema anterior Luenberger propone un observador identidad para sistemas LIT de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}$$

La estructura de dicho observador se presenta continuación

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x}(t) + Gu(t) + Hy(t), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0.$$

Definiendo el error de estimación como $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ es posible obtener la dinámica del error

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + [G - B]u(t) + [Hy(t) - A + F]x(t)$$

Haciendo $F = A - HC$, $G = B$, y escogiendo la matriz H de tal manera que el origen del sistema dinámico

$$e(t) = [A - HC]e(t), \quad e(t_0) = \hat{x}(t_0) - x(t_0),$$

sea asintóticamente estable, se obtiene el observador de Luenberger. La estructura final del observador queda entonces

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + H(t)[y(t) - \hat{y}(t)], \quad x(t_0) = x_0.$$

2.3.2. Observador determinístico de mínima energía

En el observador de Luenberger, presentado en la subsección anterior, la matriz H debe de ser diseñada de tal manera que el origen de la dinámica del error sea asintóticamente estable. Para lograr esto, existen infinitas matrices H que satisfacen dicha condición. El observador de mínima energía (EME) es un observador de estados internos para sistemas lineales, con la misma estructura que el observador de Luenberger, donde elección de la matriz $H(t)$ asegura la minimización de una función de costo J en particular. Dicha función de costo es mostrada más adelante.

Considere el sistema LVT

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t) \tag{2.37}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + w(t) \tag{2.38}$$

en donde los vectores $v(t)$ y $w(t)$ representan perturbaciones en los estados y en la salida. Anderson presenta en [3] la deducción del EME a partir del regulador cuadrático lineal y muestra que el estado $x(t_1)$ puede ser estimado mediante la integral

$$\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} M(t, t_1) dt. \tag{2.39}$$

en donde $M(t, t_1)$ se define como

$$M(t, t_1) = R^{-1}(t)C(t)P(t)Z(t, t_1).$$

Si la matriz $P(t)$ es solución de la ecuación diferencial de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= P(t)A^\top(t) + A(t)P(t) \\ &\quad - P(t)C^\top(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) + Q, \quad P(t_0) = P_0 = P_0^\top > 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

y la matriz $Z(t, t_1)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\dot{Z}(t, t_1) = -F^\top Z(t, t_1) + C^\top(t)R^{-1}C(t)P(t)Z(t, t_1), \quad Z(t_1, t_1) = \mathbb{I}, \quad (2.41)$$

entonces el estimado se considera óptimo con respecto a la función de costo.

$$J = \text{tr} \left\{ Z^\top(t_0)P(t_0)Z(t_0) + \int_{t_0}^t [M^\top(\tau)R(\tau)M(\tau) + Z^\top(\tau)Q(\tau)Z(\tau)] d\tau \right\}.$$

Es importante notar que a partir del desarrollo anterior no es posible obtener $\hat{x}(t_1)$ en línea. Para hacer esto es necesario obtener $\hat{x}(t)$ a partir de (2.39) y evitar el tener que calcular $Z(t, t_1)$, ya que esto implica resolver la ecuación diferencial (2.41) hacia atrás en el tiempo. Para solventar este problema es importante notar que $Z(t, t_1)$ es una matriz de transición de estados y por lo tanto

$$\frac{d}{dt_1} Z(t; t_1) = \frac{d}{dt_1} Z^{-1}(t_1; t), \quad (2.42)$$

de donde se puede concluir que

$$\frac{d}{dt_f} Z^\top(t; t_f) = [F(t_1) - P(t_1)C^\top(t_1)R^{-1}(t_1)C(t_1)]Z^\top(t; t_1). \quad (2.43)$$

Derivando (2.39) con respecto al tiempo y substituyendo (2.43) se obtiene

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) - H(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t)), \quad x(t_0) = 0 \quad (2.44)$$

en donde

$$H(t) = -P(t)C^\top(t)R^{-1}(t)$$

2. MARCO TEÓRICO

y $P(t)$ es solución de la ecuación diferencial de Riccati (2.40).

El observador (2.44) puede ser formulado en un contexto estocástico, con el cual se obtiene el Filtro de Kalman. En este último algoritmo de estimación, la función de costo a minimizar está dada en términos de la función del valor esperado $E\{\cdot\}$, dicha función de costo es de la forma

$$J_k = E\{[\hat{x}(t) - x(t)]^\top [\hat{x}(t) - x(t)]\},$$

de donde se puede notar que el funcional a minimizar es la varianza del error de estimación.

Observador con convergencia en tiempo fijo

En el presente capítulo se muestra el planteamiento del problema y el resultado principal obtenido. Dicho resultado es un algoritmo de estimación para sistemas lineales, capaz de estimar los estados en tiempo fijo. Se muestra también la prueba de convergencia de dicho algoritmo, en donde se demuestra que el origen de la dinámica del error de estimación es asintóticamente estable y que la derivada de la función de Lyapunov satisface condiciones necesarias para asegurar convergencia uniforme con respecto al error inicial y en tiempo finito.

3.1. Planteamiento del problema

El objetivo del presente trabajo es diseñar un observador de estados para sistemas lineales cuyo tiempo de convergencia sea finito y uniforme con respecto al error de observación inicial, es decir, que se pueda acotar superiormente para cualquier valor inicial del error.

Los sistemas a tratar se describen mediante la ecuación diferencial vectorial

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde las matrices $A(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{r \times m}$ tienen entradas integrables y acotadas. Se asume que, la entrada $u(t)$, la salida $y(t)$, y las matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$, son conocidas para todo t , pero no así el estado $x(t)$. Además, se asume que el sistema es completa y uniformemente construible, concepto

presentado en la Definición 8

3.2. Esquema de estimación

Una estructura comúnmente utilizada para el diseño de observadores es una copia de la dinámica de la planta con la adición de un término de inyección del error de estimación $g(e(t))$. Dicha estructura se vuelve conveniente al momento de analizar la dinámica del error de estimación. Por lo que el observador tendría la siguiente forma:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + g(e(t)). \quad (3.2)$$

El término $g(e(t))$ puede ser lineal en el error, al igual que en el EME, así como no lineal, o incluso ser una combinación de términos lineales y no lineales. A continuación se propone un algoritmo de estimación de estados para sistemas de la forma (3.1), cuya estructura general corresponde a (3.2) pero aquí se especifica el término $g(e(t))$ usado:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) \\ & - P(t)C^\top(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) \\ & - k_1P(t)\bar{N}(t)[\bar{N}(t)\hat{x}(t) - \bar{\psi}(t)]^{p_1} \\ & - k_2P(t)\bar{N}(t)[\bar{N}(t)\hat{x}(t) - \bar{\psi}(t)]^{p_2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\dot{\bar{N}}(t) = -A^\top(t)\bar{N}(t) - \bar{N}(t)A(t) + C^\top(t)C(t) - 2c(t)\bar{N}(t), \quad \bar{N}(t_0) = 0, \quad (3.4)$$

$$\dot{\bar{\psi}}(t) = -A^\top(t)\bar{\psi}(t) + C^\top(t)y(t) + \bar{N}(t)B(t)u(t) - 2c(t)\bar{\psi}(t), \quad \bar{\psi}(t_0) = 0, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & P(t)A^\top(t) + A(t)P(t) - P(t)C^\top(t)C(t)P(t) \\ & + \delta P(t) + Q(t), \quad P(t_0) = P_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

con $p_1 \in [0, 1)$, $p_2 > 1$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $Q(t) = Q^\top(t) > \gamma\mathbb{I} > 0$, $P_0 = P_0^\top > 0$, $\delta > 2\|A(t)\|$, y $c(t)$ es positivo y es tal que $\frac{1}{2}(A^\top(t) + A(t)) + c(t)\mathbb{I} > \epsilon\mathbb{I} > 0$.

La función $P(t)$ es solución de una ecuación de Riccati por lo que su inversa $P^{-1}(t)$ es también solución de una ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{P}^{-1}(t) = & -A^\top(t)P^{-1}(t) - P^{-1}(t)A(t) + C^\top(t)C(t) \\ & - \delta P^{-1}(t) - P^{-1}(t)Q(t)P^{-1}(t), \quad P^{-1}(t_0) = P_0^{-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La condición impuesta sobre $c(t)$ es para asegurar acotamiento en $\bar{N}(t)$ y $\bar{\psi}(t)$, pero es importante remarcar que dicha condición es suficiente mas no necesaria, esto se debe a

que dicha condición fue obtenida haciendo uso del teorema de estabilidad de Lyapunov. Dado que $A(t)$ debe ser una función acotada del tiempo, siempre existe $c(t)$ que satisfaga la condición dada. De la estructura del algoritmo propuesto se puede ver que el término de inyección del error de estimación $g(e(t))$ tiene 3 partes. El primer término, $P(t)C^T(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t))$, es lineal, y como se verá más adelante en el análisis de convergencia, dicho término estabiliza globalmente al error de estimación. El término $k_1P(t)\bar{N}(t)[\bar{N}(t)\hat{x}(t) - \bar{\psi}(t)]^{p_1}$ es no lineal y Hölder continuo (concepto presentado en el Apéndice 9), cuando $p_1 \in (0, 1)$, y discontinuo cuando $p_1 = 0$. Este término es fuerte en una vecindad de $e = 0$ y dada su naturaleza no lineal permite al observador converger en tiempo finito. El tercer término $k_2P(t)\bar{N}(t)[\bar{N}(t)\hat{x}(t) - \bar{\psi}(t)]^{p_2}$, con $p_2 > 1$, es continuo pero no uniformemente continuo. Debido a la selección de p_2 , este término crece más rápido que el término lineal lejos de $e = 0$. Ésto permite que el error inicial se reduzca muy rápidamente, y permite estimar el tiempo de convergencia a un compacto, con independencia del error inicial.

La convergencia del observador equivale a la estabilidad y atractividad del origen en la dinámica del error. Para estudiar esta propiedad se analizará la dinámica del error por medio de la teoría de Lyapunov. Definiendo el error de observación como

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t), \quad (3.8)$$

y del desarrollo mostrado en la Sección 2.2.4.5, es posible mostrar que $N(t)\hat{x}(t) - \psi(t) = N(t)e(t)$. Este resultado es importante en la obtención de la dinámica del error y es justificado en la Sección 4.2. Derivando la ecuación anterior, se obtiene la dinámica del error.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) \\ &= A(t)\hat{x}(t) - A(t)x(t) + B(t)u(t) - B(t)u(t) \\ &\quad - P(t)C^T(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) \\ &\quad - k_1P(t)\bar{N}(t)[\bar{N}(t)\hat{x}(t) - \bar{\psi}(t)]^{p_1} \\ &\quad - k_2P(t)\bar{N}(t)[\bar{N}(t)\hat{x}(t) - \bar{\psi}(t)]^{p_2} \\ &= A(t)e(t) - P(t)C^T(t)C(t)e(t) \\ &\quad - k_1P(t)\bar{N}(t)[\bar{N}(t)e(t)]^{p_1} - k_2P(t)\bar{N}(t)[\bar{N}(t)e(t)]^{p_2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Las propiedades de estabilidad de la dinámica del error están contenidas en el siguiente teorema

Teorema 10. Sean $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ matrices conocidas y acotadas con elementos

integrables, y sea el par $(A(t), C(t))$ uniforme y completamente observable. Entonces el sistema dinámico (3.9), donde $\bar{N}(t)$ es solución de la ecuación diferencial (3.4), $P(t)$ es solución de (3.6), $p_1 \in [0, 1)$, $p_2 > 1$, $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$ y $c(t) > 0$ tal que $\frac{1}{2}(A(t) + A^\top(t)) + c(t)\mathbb{I} > \epsilon\mathbb{I} > 0$. Entonces el origen de (3.9) es global y uniformemente estable en tiempo fijo.

3.2.1. Demostración de convergencia en tiempo fijo

Considere la función de Lyapunov

$$V(e(t)) = \frac{1}{2}e^\top(t)P^{-1}(t)e(t). \quad (3.10)$$

Derivando la función de Lyapunov (3.10) a lo largo de las trayectorias de la dinámica del error

$$\dot{V}(e(t)) = \frac{1}{2}\dot{e}(t)P^{-1}(t)e(t) + \frac{1}{2}e(t)P^{-1}(t)\dot{e}(t) + \frac{1}{2}e(t)\dot{P}^{-1}(t)e(t),$$

substituyendo tanto la dinámica del error y la ecuación diferencial (3.7), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) = & \frac{1}{2}(A(t)e(t) - P(t)C^\top(t)C(t)e(t) - P(t)\bar{N}(t)(k_1[\bar{N}(t)e(t)]^{p_1} - k_2[\bar{N}(t)e(t)]^{p_2}))^\top P^{-1}(t)e(t) \\ & + \frac{1}{2}e^\top(t)P^{-1}(t)(A(t)e(t) - P(t)C^\top(t)C(t)e(t) - P(t)\bar{N}(t)(k_1[\bar{N}(t)e(t)]^{p_1} - k_2[\bar{N}(t)e(t)]^{p_2})) \\ & + \frac{1}{2}e^\top(t)(-A^\top(t)P^{-1}(t) - P^{-1}(t)A(t) + C^\top(t)C(t) - \delta P^{-1}(t) - P^{-1}(t)Q(t)P^{-1}(t))e(t) \end{aligned}$$

La ecuación anterior se manipula algebraicamente con el fin de obtener funciones para las cuales sea trivial determinar si son o no positivas definidas

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e(t)) &= \frac{1}{2}e^\top(t)A^\top(t)P^{-1}(t)e(t) - \frac{1}{2}e^\top(t)A^\top(t)P^{-1}(t)e(t) - \frac{1}{2}e^\top(t)C^\top(t)C(t)e(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2}e^\top(t)C^\top(t)C(t)e(t) + \frac{1}{2}e^\top(t)P^{-1}(t)A(t)e(t) - \frac{1}{2}e^\top(t)P^{-1}(t)A(t)e(t) \\
 &\quad - \frac{1}{2}e^\top(t)\delta P^{-1}(t)e(t) - e^\top(t)P^{-1}(t)Q(t)P^{-1}(t)e(t) - \frac{1}{2}e^\top(t)C^\top(t)C(t)e(t) \\
 &\quad - \frac{1}{2}k_1 (\bar{N}(t)e(t))^\top [\bar{N}(t)e(t)]^{p_1} - \frac{1}{2}k_1 ([\bar{N}(t)e(t)]^{p_1})^\top \bar{N}(t)e(t) \\
 &\quad - \frac{1}{2}k_2 ([\bar{N}(t)e(t)]^{p_2})^\top \bar{N}(t)e(t) - \frac{1}{2}k_2 (\bar{N}(t)e(t))^\top [\bar{N}(t)e(t)]^{p_2}
 \end{aligned}$$

Agrupando y cancelando términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e(t)) &= -\frac{1}{2}e^\top(t)(C^\top(t)C(t) + \delta P^{-1}(t) + P^{-1}(t)Q(t)P^{-1}(t))e(t) \\
 &\quad - k_1 (\bar{N}(t)e(t))^\top [\bar{N}(t)e(t)]^{p_1} - k_2 (\bar{N}(t)e(t))^\top [\bar{N}(t)e(t)]^{p_2}.
 \end{aligned}$$

De desigualdad de Jensen (presentada en el Apéndice A.3) es posible mostrar que dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$, la siguiente desigualdad se satisface

$$x^\top [x]^p \geq \frac{1}{n^p} \|x\|_1^{p+1}. \quad (3.11)$$

De (3.2.1) y (3.11) se puede concluir que

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e(t)) &\leq -\frac{1}{2}e^\top(t) (\delta P^{-1}(t) + P^{-1}(t)Q(t)P^{-1}(t)) e(t) \\
 &\quad - \frac{k_1}{n^{p_1}} \|\bar{N}(t)e(t)\|_1^{p_1+1} - \frac{k_2}{n^{p_2}} \|\bar{N}(t)e(t)\|_1^{p_2+1}. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

En la última desigualdad, los términos $\delta P^{-1}(t)$, $P^{-1}(t)Q(t)P^{-1}(t)$ y $\|\bar{N}(t)e(t)\|_1$ son siempre positivos para todo t . Debido a esto, se puede asegurar la estabilidad asintótica del origen. Una vez $V(e(t)) = 0$ y mientras el sistema sea observable el error de estimación será cero.

Para probar convergencia uniforme y en tiempo finito una cota del tiempo de convergencia es obtenida a partir de la aplicación del lema de comparación (el cual se presenta en el Apéndice A.2). El tiempo de convergencia es dividido en tres intervalos, $[t_0, t_0 + T]$, $[t_0 + T, t_1]$ y $[t_1, t_2]$, en donde t_1 es el tiempo que le toma a la función de Lyapunov decrecer desde su valor en el tiempo $t_0 + T$, hasta el interior de un conjunto de nivel definido como $|V(e(t_1))| \leq r$, en donde r es finito. El tiempo t_2 corresponde a la

3. OBSERVADOR CON CONVERGENCIA EN TIEMPO FIJO

cota superior del tiempo que le toma a la función de Lyapunov ir desde $|V(e(t_1))| = r$, a cero. De la definición de la función de Lyapunov en (3.10) y de la desigualdad (3.12) es posible mostrar que la derivada de la función de Lyapunov alrededor de la dinámica del error satisface la siguiente desigualdad diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -k_i \kappa_i V^{\frac{p_i+1}{2}}(t), \\ \kappa_1 &= \frac{\zeta_1}{n^{p_1} \varrho^{\frac{p_1+1}{2}}}, \\ \kappa_2 &= \frac{\zeta_2}{n^{p_2} \varrho^{\frac{p_2+1}{2}}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{2} \sup_{t \geq t_0} \lambda_M(P^{-1}(t)), \\ \zeta_1 &= \inf_{t \geq t_0+T} \lambda_m^{p_1+1}(\bar{N}(t))^{p_1+1}, \\ \zeta_2 &= \inf_{t \geq t_0+T} \lambda_m^{p_2+1}(\bar{N}(t))^{p_2+1}. \end{aligned}$$

Cuya solución satisface

$$V(t) \leq ((t - t_0 + T)k_i \kappa_i (\frac{p_i - 1}{2})) + V^{\frac{1-p_i}{2}}(t_0 + T). \quad (3.14)$$

Para $i = 1$ se analiza el intervalo de tiempo $[t_0+T, t_1]$ y para $i = 2$ se analiza el intervalo $[t_1, t_f]$. Tanto t_1 como t_f pueden ser obtenidos a partir del lema de comparación. Debido a la estructura de $V(e(t))$, esta es una función radialmente no acotada. Para el intervalo $[t_0 + T, t_1]$ se tiene que

$$t_1 = \frac{V(t_1)^{\frac{1-p_2}{2}} - \frac{1}{V(e(t_0+T))^{\frac{p_2-1}{2}}}}{k_1 \kappa_1 (\frac{p_2-1}{2})} + t_0 + T \quad (3.15)$$

Calculando el límite de la función anterior cuando $e(t_0 + T)$ tiende a infinito, es posible notar que el tiempo de convergencia a una bola de radio finito, está acotado superiormente. Dicha cota no depende del error inicial. Ésto es ilustrado en la siguiente

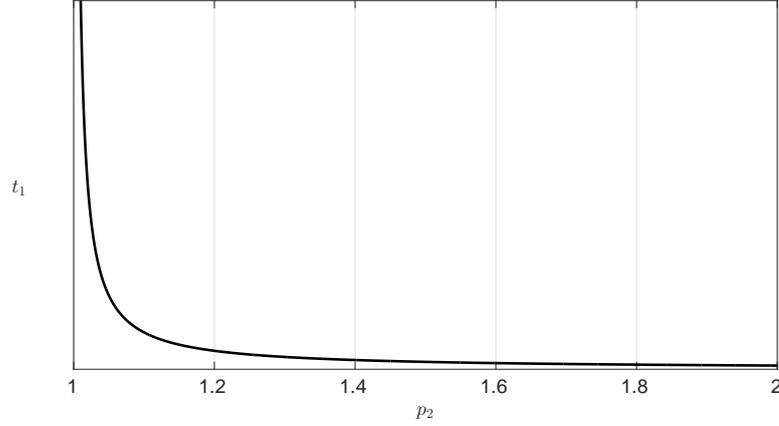


Figura 3.1: Comportamiento cualitativo de t_1 con respecto a p_2

expresión:

$$\lim_{V(e(t_0+T)) \rightarrow \infty} \frac{V(e(t_1))^{\frac{1-p_2}{2}} - \frac{1}{V(e(t_0+T))^{\frac{p_2-1}{2}}}}{k_1 \kappa_1 \left(\frac{p_2-1}{2}\right)} + t_0 + T = \frac{1}{V(e(t_1))^{\frac{p_2-1}{2}} k_1 \kappa_1 \left(\frac{p_2-1}{2}\right)} + t_0 + T. \quad (3.16)$$

El comportamiento cualitativo de t_1 con respecto a p_2 se muestra en la Figura 3.1, de donde se aprecia porque p_2 tiene que ser estrictamente mayor a 1. Un resultado similar es obtenido al calcular una cota superior para el tiempo que le toma a la función de Lyapunov ir desde el conjunto de nivel $|V(e(t_1))| = r$ al origen. Haciendo $i = 2$ y tomando en cuenta que $p_1 \in [0, 1)$, es posible hallar una expresión cerrada para t_2 . Aplicando nuevamente el lema de comparación a (3.13), se obtiene

$$t_2 = \frac{V(e(t_1))^{\frac{1-p_1}{2}}}{k_2 \kappa_2 \left(\frac{1-p_1}{2}\right)} + t_1. \quad (3.17)$$

De la ecuación anterior se puede ver que la cota superior del tiempo desde $|V(e(t_1))| = r$ al origen es finito. El comportamiento cualitativo de t_2 con respecto a p_1 se muestra en la Figura 3.2, de donde se aprecia porque $p_2 \neq 1$.

A partir de este resultado se puede concluir que el tiempo de convergencia es finito e independiente del error de estimación inicial. Por lo que el origen de la dinámica del error, bajo las condiciones dadas en el Teorema 10, es uniformemente estable en tiempo fijo.

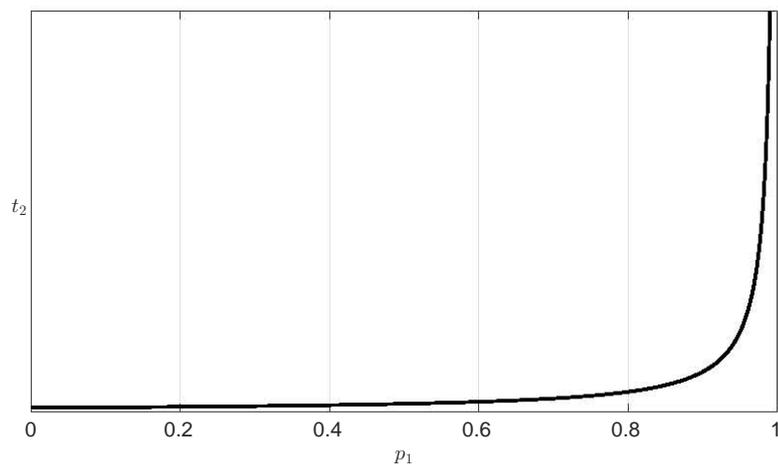


Figura 3.2: Comportamiento cualitativo de t_2 con respecto a p_1

Estructura y funcionamiento del observador

El objetivo de este capítulo es presentar las ideas detrás del algoritmo de estimación propuesto en (3.3). Entre los resultados y conceptos principales a utilizar esta la relación que existe entre el gramiano de constructibilidad, el estado actual y un vector que depende tanto de la entrada como de la salida del sistema. Relación presentada en 2.2.4.5 y repetida a continuación

$$N(t_0, t)x(t) - \psi(t_0, t, u(t), y(t)) = 0. \quad (4.1)$$

A lo largo del capítulo se muestra como, a partir de la igualdad anterior se diseña una medida del error de estimación. El primer paso es notar que en (4.1) los términos $N(t_0, t)$ y $\psi(t_0, t, u(t), y(t))$ pueden, dependiendo de la matriz $A(t)$, ser funciones no acotadas. Una solución a este problema es introducir de manera conveniente un factor de olvido, denotado como $c(t)$. Dicho factor es introducido en las ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son $N(t_0, t)$ y $\psi(t_0, t, u(t), y(t))$. De escoger $c(t)$ de manera correcta, las soluciones a dichas ecuaciones diferenciales son acotadas y se denotan como $\bar{N}(t_0, t)$ y $\bar{\psi}(t_0, t, u(t), y(t))$. A partir de esto se demostrará que la igualdad

$$\bar{N}(t_0, t)x(t) - \bar{\psi}(t_0, t, u(t), y(t)) = 0, \quad (4.2)$$

se mantiene y que si el sistema original es completa y uniformemente construible entonces la matriz $\bar{N}(t_0, t)$ es simétrica positiva definida. Por ultimo se muestra como, a partir de (4.2), se obtiene una medida del error de estimación, con la cual es posible diseñar un término no lineal de inyección del error de estimación.

4.1. Factor de Olvido

La idea detrás del observador propuesto es utilizar el observador de Kalman determinístico y agregarle un término no lineal de inyección del error para así obtener las características de convergencia uniforme con respecto al error inicial y en tiempo finito. Dicho término es obtenido a partir de la relación

$$N(t_0, t)x(t) - \psi(t_0, t) = 0, \quad (4.3)$$

en donde $N(t, t_0)$ es el gramiano de constructibilidad y $\psi(t, t_0)$ es un vector, el cual contiene información sobre la entrada y la salida en el intervalo $[t_0, t]$. Es importante notar que en la ecuación (4.3), dependiendo de la matriz característica del sistema a observar, tanto $N(t_0, t)$ como $\psi(t_0, t)$ pueden tener elementos no acotados. Para solucionar esto el enfoque a seguir es introducir un factor de olvido, definido como $c(t) \in \mathbb{R}$, en las ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son $N(t_0, t)$ y $\psi(t_0, t)$, y así obtener vía análisis de Lyapunov condiciones sobre $c(t)$ que aseguren un movimiento estable en la dinámica de $N(t_0, t)$ y $\psi(t_0, t)$.

Como se vio en la Sección 2.2.3, es posible obtener el estado actual $x(t)$ a partir del estado en el instante $x(s)$, la matriz de transición de estados del sistema $\Phi(t, s)$ y la entrada $u(s)$ en el intervalo $[s, t]$, a partir de la ecuación

$$x(t) = \Phi(t, s)x(s) + \int_s^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.4)$$

Dado que el estado completo $x(s)$ no está disponible para la medición en ningún subintervalo de $[s, t]$, en donde $s < t$, es preferible reescribir la ecuación anterior en función de la salida del sistema $y(s)$. Para esto se premultiplica (4.4) por $C(t)\Phi(s, t)$, para así obtener

$$C(s)\Phi(s, t)x(t) = y(s) + C(s) \int_s^t \Phi(s, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (4.5)$$

en donde el estado $x(s)$ no aparece y en cambio $y(s)$ si lo hace. El factor $c(t)$ es introducido en forma de la matriz $\Theta(t, s) = e^{\int_s^t c(s)ds}\mathbb{I}$ de manera en que la estructura de (4.3) se mantenga. Para esto (4.5) es premultiplicada por $\Theta^\top(s, t)\Phi^\top(s, t)C^\top(s)\Theta(s, t)$, e integrada en el intervalo $[t_0, t]$, para así obtener

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \Theta^\top(s, t) \Phi^\top(s, t) C^\top(s) C(s) \Phi(s, t) \Theta(s, t) ds x(t) \\
&= \int_{t_0}^t \Theta^\top(s, t) \Phi^\top(s, t) C^\top(s) \Theta(s, t) y(s) ds \\
&+ \int_{t_0}^t \Theta^\top(s, t) \Phi^\top(s, t) C^\top(s) C(s) \Theta(s, t) \int_s^t \Phi(s, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau ds. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

de donde se puede hacer las siguientes definiciones:

$$\bar{N}(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t \Theta^\top(s, t) \Phi^\top(s, t) C^\top(s) C(s) \Phi(s, t) \Theta(s, t) ds x(t), \quad (4.7)$$

$$\bar{\alpha}(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t \Theta^\top(s, t) \Phi^\top(s, t) C^\top(s) \Theta(s, t) y(s) ds, \quad (4.8)$$

$$\bar{\beta}(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t \Theta^\top(s, t) \Phi^\top(s, t) C^\top(s) C(s) \Theta(s, t) \int_s^t \Phi(s, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau ds, \quad (4.9)$$

$$\bar{\psi}(t_0, t) \triangleq \bar{\alpha}(t_0, t) + \bar{\beta}(t_0, t). \quad (4.10)$$

De (4.6), una nueva expresión surge, pero con la misma estructura que (4.3)

$$\bar{N}(t, t_0)x(t) = \bar{\psi}(t, t_0). \quad (4.11)$$

Dado que para implementar el observador tanto la matriz $\bar{N}(t_0, t)$ como el vector $\bar{\psi}(t_0, t)$ deben de poder ser construidos en línea, algoritmos recursivos para este fin son deducidos al aplicar la regla de Leibniz a (4.7), (4.8) y (4.9). Empezando con $\bar{N}(t_0, t)$, después de derivar (4.7) con respecto al tiempo, la siguiente expresión es obtenida

$$\frac{d}{dt} \bar{N}(t_0, t) = -(A(t) + c(t)\mathbb{I})^\top \bar{N}(t_0, t) - \bar{N}(t_0, t)(A(t) + c(t)\mathbb{I}) + C^\top(t)C(t). \quad (4.12)$$

De la definición del gramiano de constructibilidad como una integral se deduce que $\bar{N}(t_0, t_0) = 0$. El mismo desarrollo puede ser aplicado a $\bar{\alpha}(t_0, t)$ y $\bar{\beta}(t_0, t)$, con lo que se obtiene

$$\frac{d}{dt}\bar{\alpha}(t_0, t) = C^\top(t)y(t) - A^\top(t)\bar{\alpha}(t_0, t) - 2c(t)\bar{\alpha}(t_0, t). \quad (4.13)$$

y

$$\frac{d}{dt}\bar{\beta}(t_0, t) = -A^\top(t)\bar{\beta}(t_0, t) + \bar{N}(t_0, t)B(t)u(t) - 2c(t)\bar{\beta}(t_0, t) \quad (4.14)$$

Si se desea obtener un algoritmo recursivo para construir directamente el vector $\bar{\psi}(t, t_0)$ en línea, las ecuaciones (4.13) y (4.14) pueden ser substituidas en

$$\dot{\bar{\psi}}(t_0, t) = \dot{\bar{\alpha}}(t_0, t) + \dot{\bar{\beta}}(t_0, t), \quad (4.15)$$

y así obtener

$$\dot{\bar{\psi}}(t_0, t) = -(2c(t)\mathbb{I} + A(t))^\top \bar{\psi}(t_0, t) + C^\top(t)y(t) + \bar{N}(t)B(t)u(t). \quad (4.16)$$

Dado que $\bar{N}(t_0, t_0)x(t) = 0$, entonces $\bar{\psi}(t_0, t_0) = \bar{\alpha}(t_0, t_0) + \bar{\beta}(t_0, t_0) = 0$.

4.1.1. Condiciones sobre el factor de olvido

Como se mencionó al principio del capítulo, un factor de olvido en la forma de una función $c(t)$ es introducido en la estructura del gramiano de constructibilidad. Esto se hizo de tal manera que la igualdad (4.2) se mantenga, por lo que ahora resta encontrar condiciones suficientes sobre $c(t)$ para asegurar acotamiento en los elementos de $\bar{N}(t_0, t)$ y $\bar{\psi}(t_0, t)$. Para esto se analizará la ecuación diferencial de Sylvester, la cual es una generalización de la ecuación diferencial de Lyapunov, de la cual $N(t_0, t)$ es solución.

La ecuación diferencial de Sylvester está definida como [1]

$$\dot{X}(t) = M(t)X(t) + X(t)N(t) + R(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (4.17)$$

y su solución general se expresa de la forma

$$X(t) = \Phi_M(t, t_0)X_0\Phi_{N^\top}^\top(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_M(t, \tau)R(\tau)\Phi_{N^\top}^\top(t, \tau)d\tau. \quad (4.18)$$

Para el caso particular de la ecuación diferencial de Lyapunov se tiene $M(t) = -\bar{A}^\top(t)$ y $N(t) = -\bar{A}(t)$, debido a esto, $\Phi_M(t, t_0) = \Phi_{-\bar{A}^\top(t)}(t, t_0)$ y $\Phi_{N^\top}(t, t_0) = \Phi_{-\bar{A}^\top(t)}(t, t_0)$. Reescribiendo $\Phi_M(t, t_0)$ y $\Phi_{N^\top}(t, t_0)$ en función de $\Phi_{\bar{A}(t)}(t, t_0)$ se obtiene

$$\Phi_M(t, t_0) = -(\Phi_{\bar{A}(t)}^{-1}(t, t_0))^\top$$

y

$$\Phi_{N^\top}(t, t_0) = -(\Phi_{\bar{A}(t)}^{-1}(t, t_0))^\top.$$

De las dos desigualdades anteriores la solución de la ecuación diferencial de Lyapunov es

$$X(t) = (\Phi_{\bar{A}(t)}^{-1}(t, t_0))^\top X_0 \Phi_{\bar{A}(t)}^{-1}(t, t_0) + \int_{t_0}^t (\Phi_{\bar{A}(t)}^{-1}(t, \tau))^\top R(\tau) \Phi_{\bar{A}(t)}^{-1}(t, \tau) d\tau.$$

Para que la función anterior sea acotada, la matriz $\Phi_{\bar{A}(t)}^{-1}(t, t_0)$ debe inducir un movimiento estable y $R(t)$ debe de tener elementos acotados. La matriz $\Phi_{\bar{A}(t)}^{-1}(t, t_0)$ satisface dichas condiciones si corresponde a la matriz de transición de estados de un sistema lineal cuyo origen es exponencialmente estable. Suponga que $\Phi_{\bar{A}(t)}^{-1}(t, t_0)$ es la matriz de transición de estados del sistema

$$\dot{z}_1(t) = -\bar{A}^\top z_1(t) \tag{4.19}$$

y el punto $z(t) = 0$ es exponencialmente estable. Entonces $\Phi_{\bar{A}(t)}(t, t_0)$ es la matriz de transición de estados del sistema

$$\dot{z}_2 = \bar{A}(t) z_2(t), \tag{4.20}$$

cuyo origen debe de ser exponencialmente inestable. Si $\bar{A}(t) = A(t) + c(t)\mathbb{I}$, entonces una condición suficiente para esto es escoger $c(t)$ de tal manera que $\frac{1}{2}(\bar{A}(t) + A^\top(t)) > \alpha\mathbb{I} > 0$.

4.1.2. \bar{N} como gramiano de constructibilidad

El objetivo de esta sección es probar que la matriz $\bar{N}(t, t_0)$ es simétrica positiva definida si el sistema (3.1) es completa y uniformemente construible. Para esto se muestra que la matriz $\bar{N}(t, t_0)$ es el gramiano de constructibilidad de un sistema lineal, el cual es construible si el sistema a estimar es construible.

Considere nuevamente las expresiones para $N(t, t_0)$ y $\bar{N}(t, t_0)$

$$N(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t \Phi^\top(s, t) C^\top(s) C(s) \Phi(s, t) ds, \quad (4.21)$$

$$\bar{N}(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t \Theta^\top(s, t) \Phi^\top(s, t) C^\top(s) C(s) \Phi(s, t) \Theta(s, t) ds, \quad (4.22)$$

se puede ver que en 4.22 la matriz $\Theta^\top(s, t) \Phi^\top(s, t)$ juega el mismo papel que la matriz $\Phi^\top(s, t)$ en (4.21). Por lo que se podría pensar que la matriz $\Phi(s, t) \Theta(s, t)$ es la matriz de transición de estados de algún sistema lineal, cuya matriz característica sera denotada como $\bar{A}(t)$. La relación entre la matriz $\bar{A}(t)$, el factor de olvido $c(t)$ y la matriz característica del sistema a estimar $A(t)$ se presenta mediante el siguiente teorema.

Proposición 1. Sea $\Phi(s, t)$ la matriz de transición de estados del sistema dinámico

$$\dot{x}_1(t) = A_1(t)x_1(t) \quad (4.23)$$

y $\Theta(t, t_0)$ la matriz de transición de estados del sistema

$$\dot{x}_2(t) = A_2(t)x_2(t), \quad (4.24)$$

en donde $A_2(t) = c(t)\mathbb{I}$.

Si $\bar{\Phi}(t, t_0)$ es la matriz de transición de estados del sistema dinámico

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}(t)\bar{x}(t). \quad (4.25)$$

en donde $\bar{A}(t) = A_1(t) + A_2(t)$, entonces $\bar{\Phi}(t, t_0) = \Phi(t, t_0)\Theta(t, t_0)$.

Demostración. Multiplicando las matrices de transición de estados $\Phi(t, t_0)$ y $\Theta(t, t_0)$ y derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t, t_0)\Theta(t, t_0)] = \dot{\Phi}(t, t_0)\Theta(t, t_0) + \Phi(t, t_0)\dot{\Theta}(t, t_0) \quad (4.26)$$

De las propiedades de la matriz de transición de estados, sabemos que

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A_1(t)\Phi(t, t_0) \quad (4.27)$$

y

$$\dot{\Theta}(t, t_0) = A_2(t)\Theta(t, t_0). \quad (4.28)$$

Substituyendo (4.27) y (4.28) en (4.26) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\Phi(t, t_0)\Theta(t, t_0)] &= A_1(t)\Phi(t, t_0)\Theta(t, t_0) + \Phi(t, t_0)A_2(t)\Theta(t, t_0) \\ &= (A_1(t)\Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0)A_2(t))\Theta(t, t_0). \end{aligned}$$

Dado que $A_2(t) = c(t)\mathbb{I}$ y ya que esta matriz puede conmutar con cualquier otra (suponiendo que las dimensiones lo permiten) la ecuación anterior queda como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\Phi(t, t_0)\Theta(t, t_0)] &= (A_1(t)\Phi(t, t_0) + A_2(t)\Phi(t, t_0))\Theta(t, t_0) \\ &= (A_1(t) + A_2(t))\Phi(t, t_0)\Theta(t, t_0). \end{aligned}$$

Ya que $\dot{\tilde{\Phi}}(t, t_0) = \bar{A}(t)\tilde{\Phi}(t, t_0)$ y $\bar{A}(t) = A_1(t) + A_2(t)$ se puede concluir que

$$\bar{\Phi}(t, t_0) = \Phi(t, t_0)\Theta(t, t_0) \quad (4.29)$$

□

De la Proposición 1 podemos concluir que en efecto $\bar{N}(t_0, t)$ es el gramiano de constructibilidad de un sistema lineal cuya matriz característica puede ser expresada como

$$\bar{A}(t) = A_1(t) + c(t)\mathbb{I}. \quad (4.30)$$

Mediante este resultado es posible probar que la invertibilidad del gramiano de constructibilidad $N(t_0, t)$ implica la invertibilidad de $\bar{N}(t_0, t)$. Para esto se propone la siguiente proposición.

Proposición 2. *Sea $A_1(t)$ la matriz característica de un sistema lineal observable en el intervalo $[t_0, t_f]$, de la forma*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1(t)x(t), \\ y &= C(t)x(t), \end{aligned} \quad (4.31)$$

y $\bar{A}(t)$ la matriz característica del sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}(t)x(t), \\ y &= C(t)x(t). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Si $\bar{A}(t) = A_1(t) + c(t)\mathbb{I}$ y $c(t) > 0$ entonces el sistema (4.32) es observable en el intervalo $[t_0, t_f]$.

Demostración. La matriz de transición de estados de (4.31) es definida como $\Phi(t, t_0)$ y su gramiano de observabilidad como $M(t_0, t_f)$. Premultiplicando y postmultiplicando

el gramiano de observabilidad por un vector $x_a \neq 0$ se obtiene

$$x_a^\top M_1(t_0, t_f) x_a = \int_{t_0}^{t_f} x_a^\top \Phi^\top(t, t_0) C^\top(t) C(t) \Phi(t, t_0) x_a dt, \quad (4.33)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} z^\top(t) z(t) dt, \quad (4.34)$$

donde $z(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_a$. Dado que el integrando de la expresión anterior es la norma dos al cuadrado de $z(t)$ y debido a que el sistema (4.31) se supone observable se puede concluir que

$$C(t)\Phi_1(t, t_0)x_a \neq 0, \quad (4.35)$$

en al menos un subintervalo de $[t_0, t_f]$.

Ahora suponga que se tiene el sistema dinámico (4.32) del cual se asume que es inobservable en el intervalo $[t_0, t_f]$. El gramiano de observabilidad para este sistema se define como $\Gamma(t_0, t_f)$. Se premultiplica y postmultiplica el gramiano por un vector $x_b \neq 0$ que satisfaga la desigualdad

$$x_b^\top \Gamma(t_0, t_f) x_b = 0. \quad (4.36)$$

El vector $x_b \neq 0$ siempre existe ya que la matriz $\Gamma(t_0, t_f)$ es singular (ya que el sistema se supone inobservable). De la última ecuación se tiene que

$$x_b^\top \Gamma(t_0, t_f) x_b = \int_{t_0}^{t_f} x_b^\top \bar{\Phi}^\top(t, t_0) C^\top(t) C(t) \bar{\Phi}(t, t_0) x_b dt \quad (4.37)$$

Del Proposición 1 se tiene que $\bar{\Phi}(t, t_0) = \Phi(t, t_0)\Theta(t, t_0)$ por lo que la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$x_b^\top \Gamma(t_0, t_f) x_b = \int_{t_0}^{t_f} x_b^\top \Theta^\top(t, t_0) \Phi^\top(t, t_0) C^\top(t) C(t) \Phi(t, t_0) \Theta(t, t_0) x_b dt \quad (4.38)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} z^{*T}(t) z^*(t) dt = 0, \quad (4.39)$$

donde $z^*(t) = C(t) \Phi(t, t_0) \Theta(t, t_0) x_b$. Ya que el sistema es inobservable se puede concluir que

$$C(t) \Phi(t, t_0) \Theta(t, t_0) x_b = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (4.40)$$

Pero la ultima ecuación puede ser reescrita como

$$C(t) \Phi(t, t_0) x_a e^{\int_{t_0}^t c(\tau) d\tau} = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (4.41)$$

lo que es una contradicción ya que dadas las propiedades de la función exponencial, $e^{\int_{t_0}^t c(\tau) d\tau}$ es siempre positivo y como el sistema original es observable la matriz $C(t) \Phi_1(t, t_0) x_b$ es diferente de cero en al menos un subintervalo de $[t_0, t_f]$. Por lo tanto el sistema (4.32) debe de ser observable y el gramiano de observabilidad $\Gamma(t_0, t_f)$ es no singular.

□

A partir de las Proposiciones 1 y 2 se demuestra que si el gramiano de constructibilidad $N(t, t_0)$ es invertible, entonces la matriz $\bar{N}(t, t_0)$ también lo sera.

4.2. Error de Estimación

Dado que el objetivo es estimar el estado actual de un sistema dinámico lineal, es necesario contar con una expresión del error entre el estado estimado $\hat{x}(t)$ y el estado real $x(t)$. Es importante remarcar que dicha expresión debe poder ser construida con señales medibles. Lo primero es definir el error de estimación como

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t). \quad (4.42)$$

La expresión (4.42) puede ser utilizada únicamente para fines de análisis, esto se debe a que el estado actual $x(t)$ no está disponible. En la sección 2.2.4.5 se mostró la relación

entre el gramiano de constructibilidad $N(t_0, t)$, el estado actual y el vector $\psi(t_0, t)$,

$$N(t_0, t)x(t) - \psi(t_0, t) = 0. \quad (4.43)$$

Dicha relación puede ser utilizada para diseñar una medida del error de estimación, la cual puede ser construida con información disponible. Esto es porque $\psi(t)$ depende de la entrada y la salida del sistema. Las expresiones (4.42) y (4.43) pueden ser manipuladas y así obtener

$$N(t_0, t)\hat{x}(t) - \psi(t_0, t) = N(t_0, t)\hat{x}(t) - N(t_0, t)x(t) = N(t_0, t)e(t). \quad (4.44)$$

Dado que se asume que el sistema es construible, entonces el gramiano de constructibilidad es una matriz de rango completo lo que implica que

$$N(t_0, t)e(t) = 0 \Rightarrow e(t) = 0. \quad (4.45)$$

De la expresión anterior el vector $N(t_0, t)e(t)$ es una medida conveniente del error de estimación que puede ser construida con información disponible.

Como se ha expuesto en las secciones anteriores tanto la matriz $N(t_0, t)$ como el vector $\psi(t_0, t)$ pueden tener elementos no acotados, lo que al momento de implementar el observador en un sistema real puede ser un problema. En la sección 4.1 se obtuvo una expresión con la misma estructura que (4.1), pero con la característica que sus elementos se encuentran acotados,

$$\bar{N}(t_0, t)x(t) = \bar{\psi}(t_0, t). \quad (4.46)$$

Como en (4.44) la expresión (4.46) y (4.42) pueden ser manipuladas para obtener una medida del error cuyos elementos están acotados. Siguiendo el enfoque de (4.44) se obtiene

$$\bar{N}(t_0, t)\hat{x}(t) - \bar{\psi}(t_0, t) = \bar{N}(t_0, t)\hat{x}(t) - \bar{N}(t_0, t)x(t) = \bar{N}(t_0, t)e(t). \quad (4.47)$$

De la definición del gramiano de constructibilidad, si el sistema a estimar es observable entonces la matriz $N(t)$ es no singular y por el resultado en la sección 4.1.2, esto implica que la matriz \bar{N} es de rango completo por lo que

$$\bar{N}(t_0, t)e(t) = 0 \Rightarrow e(t) = 0. \quad (4.48)$$

Este resultado muestra que la función $\tilde{\Upsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$, con regla de correspondencia

$$\tilde{\Upsilon}(t_0, t) = \bar{N}(t_0, t)\hat{x}(t) - \bar{\psi}(t_0, t) \quad (4.49)$$

4. ESTRUCTURA Y FUNCIONAMIENTO DEL OBSERVADOR

es un término de medida del error conveniente, cuyos elementos están acotados para todo t y puede ser construida con información disponible. La función anterior aparece en la dinámica del observador en el argumento de dos términos no lineales, cuyas características dan al observador propiedades de convergencia en tiempo fijo.

Observador para sistemas LIT y observador adaptable

En el presente capítulo se muestra como el resultado obtenido en la sección anterior puede ser aplicado a casos particulares. El primer caso que se presenta es una simplificación del algoritmo para sistemas lineales invariantes en el tiempo. El segundo caso de estudio es el de un observador adaptable para sistemas SISO lineales invariantes en el tiempo.

5.1. Observador para sistemas LIT

En el observador propuesto en la Sección 3.2, la matriz $P(t)$ se diseña para estabilizar el origen de la dinámica del error de estimación, y dado que las matrices $A(t)$ y $C(t)$ varían en el tiempo la matriz $P(t)$ también varía el tiempo. Para el caso de sistemas LIT la matriz $P(t)$ puede ser constante y por lo tanto su diseño es más sencillo. En esta sección se presenta el algoritmo de estimación (3.3) en una forma simplificada para sistemas LIT, en donde la matriz P es invariante en el tiempo, lo que evita tener que calcular $P(t)$ en línea a través de una ecuación de Riccati.

Considere el sistema LIT de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{5.1}$$

$$y = Cx(t), \tag{5.2}$$

donde $x(t)$ es el estado interno, $u(t)$ es la entrada, $y(t)$ la salida y A , B y C son matrices constantes conocidas. Para dichos sistemas se propone el siguiente algoritmo de estimación.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (5.3)$$

$$- P_L^{-1}\bar{N} \left[[\bar{N}(t)\hat{x}(t) - \bar{\psi}(t)]^{p_1} + [\bar{N}(t)\hat{x}(t) - \bar{\psi}(t)]^{p_2} \right] \quad (5.4)$$

$$\dot{\bar{N}}(t) = -A^T\bar{N}(t) - \bar{N}(t)A + C^TC - 2c\bar{N}(t), \quad \bar{N}(t_0) = 0 \quad (5.5)$$

$$\dot{\bar{\psi}}(t) = -A^T\bar{\psi}(t) + C^Ty(t) + \bar{N}(t)Bu(t) - 2c\bar{\psi}(t), \quad \bar{\psi}(t_0) = 0 \quad (5.6)$$

donde $p_1 \in [0, 1)$, $p_2 > 1$, c es tal que $\frac{1}{2}(A^\top + A) + c\mathbb{I} > \epsilon\mathbb{I} > 0$, P_L es la solución de la ecuación de Lyapunov

$$(A - LC)^\top P_L + P_L(A - LC) = -Q, \quad Q = Q^\top > 0 \quad (5.7)$$

y L es tal que la matriz $(A - LC)$ es Hurwitz. La matriz de ganancias L puede ser calculada mediante la fórmula de Ackerman.

Para demostrar que el observador propuesto en (5.4)-(5.6) es capaz de estimar los estados del sistema (5.1) es necesario analizar la dinámica del error. El error de estimación es definido como $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$. Derivando la ecuación de error y substituyendo (5.1) y (5.4), la dinámica del error es obtenida

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) - P_L^{-1}\bar{N}(t) \left[[\bar{N}(t)e(t)]^{p_1} + [\bar{N}(t)e(t)]^{p_2} \right]. \quad (5.8)$$

Teorema 11. Sean A , B y C matrices reales conocidas y el par (A, C) observable. Considere el sistema dinámico

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) - P_L^{-1}\bar{N}(t) \left[[\bar{N}(t)e(t)]^{p_1} + [\bar{N}(t)e(t)]^{p_2} \right] \quad (5.9)$$

Si $\bar{N}(t_0, t)$ es solución de la ecuación diferencial (5.5), P_L es la solución de la ecuación de Lyapunov (5.7) y L es tal que la matriz $(A - LC)$ es Hurwitz, entonces el punto $e(t) = 0$ de (5.9) es estable en tiempo finito.

Demostración. Se propone la función de Lyapunov

$$V(e(t)) = \frac{1}{2}e^\top(t)P_L e(t), \quad (5.10)$$

derivando (5.10) al rededor de la dinámica del error se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \frac{1}{2}\dot{e}(t)P_L e(t) + \frac{1}{2}e^\top(t)P_L \dot{e}(t) \\ &= \frac{1}{2}\left[(A - LC)e(t) - P_L^{-1}\bar{N}(t) \left[|\bar{N}(t)e(t)|^{p_1} + |\bar{N}(t)e(t)|^{p_2}\right]\right]^\top P_L e(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}e^\top(t)P_L \left[(A - LC)e(t) - P_L^{-1}\bar{N}(t) \left[|\bar{N}(t)e(t)|^{p_1} + |\bar{N}(t)e(t)|^{p_2}\right]\right] \\ &= \frac{1}{2}e^\top(t)(A - LC)^\top P_L e(t) - \frac{1}{2}\left[|\bar{N}(t)e(t)|^{p_1} + |\bar{N}(t)e(t)|^{p_2}\right]^\top \bar{N}(t)e(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}e^\top(t)P_L(A - LC)e(t) - \frac{1}{2}e^\top(t)\bar{N}(t) \left[|\bar{N}(t)e(t)|^{p_1} + |\bar{N}(t)e(t)|^{p_2}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^\top(t) \left[(A - LC)^\top P_L + P_L(A - LC)\right] e(t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} &\quad - (\bar{N}e(t))^\top \left[|\bar{N}(t)e(t)|^{p_1} + |\bar{N}(t)e(t)|^{p_2}\right] \\ &\leq -\frac{1}{2}e^\top(t)Qe(t) - \|\bar{N}(t)e(t)\|_1^{p_1+1} - \|\bar{N}(t)e(t)\|_1^{p_2+1}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dado que $Q = Q^\top > 0$ y $\|\bar{N}(t)e(t)\|_1 > 0 \forall e(t) \neq 0$, el punto $e(t) = 0$ es asintóticamente estable. Del desarrollo anterior es posible obtener la siguiente desigualdad

$$\dot{V}(e(t)) \leq -\|\bar{N}(t)e(t)\|_1^{p_i+1} \leq -\alpha\|e(t)\|_2^{p_i+1}, \quad (5.13)$$

donde $\alpha = \inf_{t>t_0} \lambda_m^{p_i+1}(\bar{N}(t)) > 0$ e $i = 1, 2$. Se puede mostrar que la función de Lyapunov (5.10) satisface la desigualdad

$$V(e(t)) = \frac{1}{2}e^\top(t)P_L e(t) \leq \frac{1}{2}\lambda_M(P_L)\|e(t)\|_2^2.$$

De la expresión anterior se obtiene

$$-\|e(t)\|_2^{p_i+1} \leq -kV^{\frac{p_i+1}{2}}, \quad (5.14)$$

donde $k = \left(\frac{2}{\lambda_M(P_L)}\right)^{\frac{p_i+1}{2}} > 0$. Combinando (5.13) y (5.14) se obtiene la siguiente desigualdad

$$\dot{V}(e(t)) \leq -\alpha\|e(t)\|_2^{p_i+1} \leq -\alpha kV^{\frac{p_i+1}{2}},$$

de la cual se concluye que

$$\dot{V}(e(t)) \leq -\alpha kV^{\frac{p_i+1}{2}}. \quad (5.15)$$

De manera similar a la prueba del Teorema 10 el tiempo de convergencia es dividido en dos intervalos $[t_0, t_1]$ y $[t_1, t_2]$. En donde t_1 es el tiempo que le toma a la función de Lyapunov decrecer desde su valor en el tiempo t_0 , hasta el interior de un conjunto de nivel definido como $|V(e(t_1))| \leq r$, en donde r es finito. El tiempo t_2 corresponde a la cota superior del tiempo que le toma a la función de Lyapunov ir desde $|V(e(t_1))| = r$, a cero. En la ecuación (5.15), $i = 2$ corresponde al intervalo de tiempo $[t_0 + T, t_1]$ y dado que $\alpha k > 0$ y $p_2 > 1$ dicho intervalo es finito e uniforme con respecto a $V(e(t_0))$. De la misma forma $i = 1$ corresponde al intervalo $[t_1, t_2]$ y debido a que $p_1 \in [0, 1)$ este ultimo intervalo de tiempo también es finito.

□

5.1.1. Un observador de orden reducido

Para el caso en el que no se desea estimar todos los estado de un sistema es posible diseñar un observador de orden reducido para sistemas LIT a partir del observador propuesto en la sección anterior. Para esto tome en cuenta el siguiente sistema dinámico particionado

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t), \quad (5.16)$$

donde la salida es $y(t) = x_1(t)$ y $x_2(t)$ es el vector de estados a estimar. Haciendo $x_1(t) = y(t)$ y $x_2(t) = z(t)$ el sistema (5.16) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A_{12}z(t) + A_{11}y(t) + B_1u(t), \\ \dot{z}(t) &= A_{22}z(t) + A_{21}y(t) + B_2u(t). \end{aligned}$$

Dado que el sistema (5.16) es un sistema lineal, de la Sección (2.2.4.5) sabemos que la siguiente desigualdad debe de satisfacerse

$$N(t)x(t) = \psi(t), \quad (5.17)$$

en donde $N(t)$ es el gramiano de constructibilidad y $\psi(t)$ es un vector que depende tanto de $u(t)$ como de $y(t)$. El sistema original fue particionado y lo mismo puede hacer en 5.17, por lo que se obtiene

$$\begin{bmatrix} N_{11}(t) & N_{12}(t) \\ N_{21}(t) & N_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Dado que el sistema $y(t)$ es medido directamente y solo el estado $z(t)$ necesita ser estimado, el problema lineal a resolver para obtener el estado deseado debe ser de la forma

$$\bar{N}(t)x_2(t) = \bar{\psi}(t). \quad (5.19)$$

Las funciones $\bar{N}(t)$ y $\bar{\psi}(t)$ pueden ser obtenidas a partir de (5.18), de donde se deduce la igualdad

$$N_{21}(t)x_1(t) + N_{22}(t)x_2(t) = \psi_2(t). \quad (5.20)$$

De (5.20) es obvio que (5.19) se puede construir si $\bar{N}(t) = N_{22}(t)$, $z(t) = x_2(t)$ y $\bar{\psi}(t) = \psi_2(t) - N_{21}(t)x_1(t)$. Con esto en mente se propone el siguiente esquema de

observación

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}(t) &= A_{22}\hat{z}(t) + A_{21}y(t) + B_2u(t) \\ &+ \tilde{K}(\dot{y}(t) - A_{12}\hat{z}(t) - A_{11}y(t) - B_1u(t)) + LP_L^{-1}[\tilde{N}(t)\hat{z}(t) - \tilde{\psi}(t)]^p,\end{aligned}$$

donde $L > 1$, $p \in [0, 1)$, \tilde{K} es tal que la matriz $A_{22} - \tilde{K}A_{12}$ es Hurwitz y P_L es la solución de la ecuación de Lyapunov

$$(A_{22} - \tilde{K}A_{12})^\top P_L + P_L(A_{22} - \tilde{K}A_{12}) = -Q, \quad Q = Q^\top > 0.$$

Dado que $\dot{y}(t)$ no está disponible para la medición se propone el cambio de variables $w(t) = z(t) - \tilde{K}y(t)$. Derivando la expresión anterior se obtiene un algoritmo de estimación parcial de los estados.

Proposición 3. *Sea el sistema (5.16) observable, del estado $x(t) = [x_1^\top(t) \ x_2^\top(t)]^\top$ únicamente el vector $x_1(t)$ es medible y las matrices A , B y C son conocidas. Entonces el estado $x_2(t)$ puede ser estimado en tiempo finito a partir del sistema dinámico*

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= (A_{22} - \tilde{K}A_{12})w(t) + (B_2 - \tilde{K}B_1)u(t) \\ &+ (A_{21} - \tilde{K}A_{11} + A_{22}\tilde{K} - \tilde{K}A_{12}\tilde{K})y(t) \\ &+ LP_L^{-1}[\tilde{N}(t)(w(t) + \tilde{K}y(t)) - \tilde{\psi}(t)]^p \\ \hat{x}_2(t) &= w(t) + \tilde{K}y(t)\end{aligned}$$

donde $L > 1$, $p \in [0, 1)$, \tilde{K} es tal que la matriz $A_{22} - \tilde{K}A_{12}$ es Hurwitz y P_L es la solución de la ecuación de Lyapunov

$$(A_{22} - \tilde{K}A_{12})^\top P_L + P_L(A_{22} - \tilde{K}A_{12}) = -Q, \quad Q = Q^\top > 0.$$

5.2. Observador adaptable para sistemas LIT

En la presente sección un observador adaptable para sistemas SISO en la forma de observador es presentado. El diseño de dicho observador está basado en las ideas presentadas en la sección (3.2). El enfoque a utilizar es volver el problema de estimar los estados y los parámetros desconocidos de un sistema, de una entrada y una salida en la forma de observador, al problema de estimar los estados de un sistema lineal variante en el tiempo [28].

Un sistema SISO en la forma de observador se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{5.21}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada y $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida. Las matrices A , B y C se definen como

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

y

$$C = [1 \ 0 \ \cdots \ 0].$$

Los parámetros a estimar son aquellos en las matrices A y B . Como se indicó al principio de esta sección, se busca reescribir el sistema (5.21) como un sistema LVT, pero en donde los parámetros a estimar son parte del vector de estados. Dicho sistema LVT es de la

forma

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}(t)\bar{x}(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t),\end{aligned}\tag{5.22}$$

en donde $\bar{x}(t) = [x^\top(t) \theta^\top]^\top$ y θ es el vector de parametros desconocidos, definido como

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]^\top.$$

La matriz $\bar{A}(t)$ del sistema (5.22) debe contener únicamente señales disponibles para la medición, que en este caso son $u(t)$ y $y(t)$. Dado que dichas señales no son constantes el sistema (5.22) es una forma particular de los sistemas LVT y por lo tanto un observador para sistemas LVT es necesario. Una forma conveniente de construir la matriz $\bar{A}(t)$ es

$$\bar{A}(t) = \begin{bmatrix} A_o & \Upsilon(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\tag{5.23}$$

en donde

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\Upsilon(t) = [y(t)\mathbb{I} \quad u(t)\mathbb{I}].$$

La salida del sistema (5.22) es la misma que la salida del sistema (5.21), debido a esto la matriz \bar{C} se define como

$$\bar{C} = [C \ 0]\tag{5.24}$$

Una vez que el sistema original es llevado a la forma (5.22), el algoritmo propuesto en la sección (3.2) puede ser utilizado para reconstruir el vector $\bar{x}(t)$, el cual contiene el

estado y los parámetros desconocidos del sistema original.

5.3. Observabilidad del sistema extendido

En el momento de querer aplicar cualquier esquema de observación al sistema extendido (5.22) es necesario conocer las condiciones sobre el sistema y la entrada, para las cuales que este es observable en los estados y en los parámetros. Dichas condiciones serán deducidas a continuación.

En [28], Zhang muestra que la matriz de transición de estados del sistema extendido (5.22) puede ser representada mediante la matriz a bloques

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix},$$

en donde las matrices $\Phi_{11}(t, t_0)$ y $\Phi_{12}(t, t_0)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\dot{\Phi}_{11}(t, t_0) = A_o \Phi_{11}(t, t_0), \quad \Phi_{11}(t_0, t_0) = \mathbb{I},$$

y

$$\dot{\Phi}_{12}(t, t_0) = A_o \Phi_{12}(t, t_0) + \Upsilon(t), \quad \Phi_{12}(t_0, t_0) = 0.$$

A partir de la matriz de transición de estados, el gramiano de constructibilidad $N(t_0, t)$ se define como

$$\begin{aligned} N(t_0, t) &= \int_{t_0}^t \Phi^\top(s, t) C^\top(s) C(s) \Phi(s, t) ds \\ &= \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} N_{11}^*(t, s) & N_{12}^*(t, s) \\ N_{21}^*(t, s) & N_{22}^*(t, s) \end{bmatrix} ds, \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 N_{11}^*(t, s) &= \Phi^\top(s, t)C^\top(s)C(s)\Phi(s, t), \\
 N_{12}^*(t, s) = N_{21}^*(t, s) &= -\Phi^\top(s, t)C^\top(s)C(s) \int_s^t \Phi(s, \tau)\Upsilon(\tau)d\tau, \\
 N_{22}^*(t, s) &= \int_s^t \Upsilon^\top(\tau)\Phi^\top(s, \tau)d\tau C^\top(s)C(s) \int_s^t \Phi(s, \tau)\Upsilon(\tau)d\tau.
 \end{aligned}$$

De la sección 2.2.4.4 sabemos que una forma de determinar si un sistema es uniformemente construible es verificar que

$$N(t_0, t) \geq \epsilon \mathbb{I} > 0.$$

Para que esto ocurra es suficiente que las siguientes condiciones se satisfagan

$$N_{11}(t_0, t) = \int_{t_0}^t N_{11}^*(t, s)ds \geq \alpha \mathbb{I} > 0 \quad (5.25)$$

$$N_{22}(t_0, t) = \int_{t_0}^t N_{22}^*(t, s)ds \geq \beta \mathbb{I} > 0 \quad (5.26)$$

$$N_{22}(t_0, t) - N_{12}^\top(t_0, t)N_{11}^{-1}(t_0, t)N_{12}(t_0, t) > 0 \quad (5.27)$$

Al analizar $\int_{t_0}^t N_{11}^* ds$, se puede apreciar que dicha matriz es el gramiano de constructibilidad del sistema (5.21), por lo que la observabilidad completa y uniforme del par $(A(t), C(t))$ garantiza que la condición (5.25) se satisfaga.

Para analizar la condición 2) debemos de entender primero la estructura de $N_{22}(t_0, t)$. De [28] sabemos que dicha matriz satisface la igualdad

$$N_{22}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi_{12}^\top(\tau, t)C^\top(\tau)C(\tau)\Phi_{12}(\tau, t)d\tau,$$

en donde $\Phi_{12}(\tau, t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\Phi}_{12}(\tau, t) = A_o \Phi_{12}(\tau, t) + \Upsilon(t).$$

Definiendo las funciones

$$\zeta_i(t, t_0) = \frac{1}{(i-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{i-1} y(\tau) d\tau,$$

$$\eta_i(t, t_0) = \frac{1}{(i-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{i-1} u(\tau) d\tau,$$

y el vector

$$\vartheta(t, t_0) = [-y(t), -\zeta_1(t, t_0), \dots, \zeta_{n-1}(t, t_0), -u(t), -\eta_1(t, t_0), \dots, \eta_{m-1}(t, t_0)],$$

el gramiano de constructibilidad $N_{22}(t_0, t)$, puede ser reescrito como

$$N_{22}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \left(\int_t^s \vartheta^\top(\tau, t_0) d\tau \right) \left(\int_t^s \vartheta(\tau, t_0) d\tau \right) ds.$$

A partir de la expresión anterior se puede concluir que satisfacer la condición (5.26) es equivalente a satisfacer la siguiente igualdad

$$\int_{t_0}^t \left(\int_t^s \vartheta^\top(\tau, t) d\tau \right) \left(\int_t^s \vartheta(\tau, t) d\tau \right) ds \geq \beta \mathbb{I} > 0. \quad (5.28)$$

Si $u(t)$ es una función suave a tramos, los intervalos en donde es suave no se contraen hasta ser cero, es uniformemente acotada y su derivada también es uniformemente acotada, entonces la igualdad (5.28) equivale a la condición de excitación persistente sobre $\vartheta(t_0, t)$ [2].

La condición (5.27) nos habla del efecto que tienen las matrices en la antidiagonal de $N(t_0, t)$ sobre la invertibilidad de dicha matriz. Para satisfacer dicha condición considere los vectores

$$p = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta \end{bmatrix}$$

y las funciones

$$\begin{aligned} y_1(s) &= C(s)\Phi(s, t)x(t), \\ y_2(s) &= -C(s) \int_s^t \Phi(s, \tau)\Upsilon(\tau)d\tau \theta. \end{aligned}$$

En [28], Zhang muestra que la salida del sistema (5.22) puede escribirse como

$$y(s) = C(s)\Phi(s, t)x(t) - C(s) \int_s^t \Phi(s, \tau)\Upsilon(\tau)d\tau \theta,$$

por lo que $y(s) = y_1(s) + y_2(s)$. A partir del gramiano de constructibilidad $N(t_0, t)$ y el vector p es posible obtener la siguiente forma cuadrática

$$\begin{aligned} p^\top N(t_0, t)p &= \begin{bmatrix} x^\top(t) & \theta^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11}(t_0, t) & N_{12}(t_0, t) \\ N_{12}^\top(t_0, t) & N_{22}(t_0, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta \end{bmatrix} \\ &= x^\top(t)N_{11}(t_0, t)x(t) + 2x^\top(t)N_{12}(t_0, t)\theta + \theta^\top N_{22}(t_0, t)\theta. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Dada estructura de $N_{11}(t_0, t)$ y ya que los vectores $x(t)$ y θ no dependen de la variable de integración s , estos pueden entrar en la integral, por lo que la forma cuadrática $x^\top(t)N_{11}(t_0, t)x(t)$ satisface la igualdad

$$x^\top(t)N_{11}(t_0, t)x(t) = \int_{t_0}^t x^\top(t)\Phi^\top(s, t)C^\top(s)C(s)\Phi(s, t)x(t)ds.$$

Por como se define la función $y_1(t)$ y dado que la expresión $\int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau)d\tau$ define un producto interno, la ecuación anterior queda como

$$x^\top(t)N_{11}(t_0, t)x(t) = \int_{t_0}^t y_1^\top(s)y_1(s)ds = \langle y_1(s), y_1(s) \rangle. \quad (5.30)$$

De forma análoga, el mismo procedimiento puede ser aplicado a las formas cuadráticas $2x^\top(t)N_{12}(t_0, t)\theta$ y $\theta^\top N_{22}(t_0, t)\theta$

$$\begin{aligned} 2x^\top(t)N_{12}(t_0, t)\theta &= -2 \int_{t_0}^t \left[x^\top(t)\Phi^\top(s, t)C^\top(s)C(s) \int_s^t \Phi(s, \tau)B(\tau)d\tau\theta \right] ds \\ &= -2 \int_{t_0}^t y_1^\top(s)y_2(s)ds = 2\langle y_1(s), y_2(s) \rangle, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \theta^\top N_{22}(t_0, t)\theta &= \int_{t_0}^t \left[\theta^\top \int_s^t B^\top(\tau)\Phi^\top(s, \tau)d\tau C^\top(s)C(s) \int_s^t \Phi(s, \tau)B(\tau)d\tau \theta \right] ds \\ &= \int_{t_0}^t y_2^\top(s)y_2(s)ds = \langle y_2(s), y_2(s) \rangle. \end{aligned} \quad (5.32)$$

A partir de (5.30), (5.31) y (5.32), la igualdad (5.29) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} p^\top N(t_0, t)p &= \langle y_1(s), y_1(s) \rangle + 2\langle y_1(s), y_2(s) \rangle + \langle y_2(s), y_2(s) \rangle \\ &= \langle y_1(s) + y_2(s), y_1(s) + y_2(s) \rangle, \end{aligned}$$

y de las propiedades del producto interno podemos concluir que la condicione 3) no se satisface si

$$y(s) = y_1(s) + y_2(s) = 0 \quad \forall s \in [t_0, t]. \quad (5.33)$$

A partir del desarrollo anterior se concluye que para poder estimar tanto el estado $x(t)$ como los parámetros θ el par (A, C) debe de ser construible y $u(t)$ ser tal que la condición (5.28) se satisface y la condición (5.33) no se satisface.

Ejemplos Numéricos

Con el objetivo de mostrar el funcionamiento de los algoritmos propuestos, 6 ejemplos son presentados. Para cada ejemplo se muestra una comparación con el EME y en algunos casos el observador de Luenberger. En todas las simulaciones se supone que no existe ruido en la medición ni en la entrada del sistema, a menos que se especifique. En los primeros dos ejemplos se muestra el funcionamiento del algoritmo de observación aplicado a sistemas LTV de segundo y tercer orden. En el tercer ejemplo se estima el estado completo de un sistema LIT y en el cuarto ejemplo se estiman solo una parte del estado. El quinto ejemplo muestra el funcionamiento del observador propuesto aplicado como observador adaptable y el último ejemplo se muestra como el algoritmo propuesto puede ser utilizado para hacer estimación de parámetros en una clase de ecuaciones diferenciales de primer orden.

6.1. Estimación de los estados de un sistema LVT

Como ejemplos numéricos para mostrar el funcionamiento del esquema de observación propuesto en sistemas lineales variantes en el tiempo se presentan dos casos, el primer caso es aplicado a un sistema de segundo orden y el segundo caso es para un sistema de tercer orden.

6.1.1. Sistema LVT de segundo orden (Ejemplo 1)

En el primer ejemplo a mostrar se tiene un sistema LTV cuyas matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ están definidas de la siguiente manera.

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2\sin(5t) - 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} \cos(t + \pi) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$C(t) = [-3\sin(2t) + 4 \quad 0] \quad (6.3)$$

Los parámetros del observador se definieron como se muestra en la tabla 6.1

Parámetro	Valor
$u(t)$	$5 \cos(t) + 1$
p_1	0.1
p_2	1.9
L_1	10
L_2	25
Q	\mathbb{I}

Tabla 6.1: Parámetros del observador para un sistema LTV de segundo orden (Ejemplo 1)

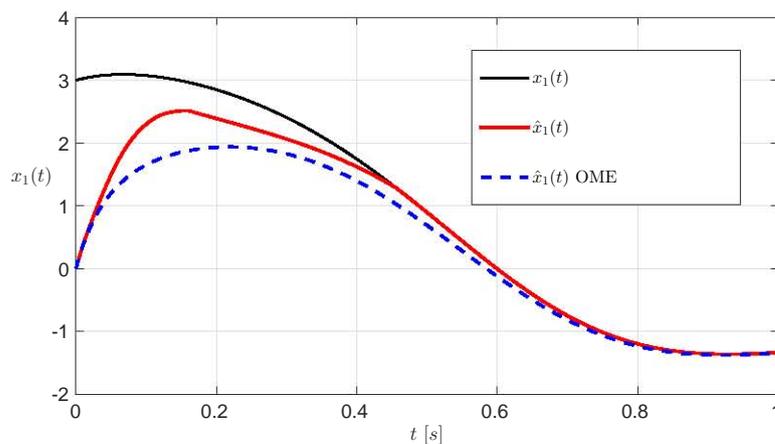
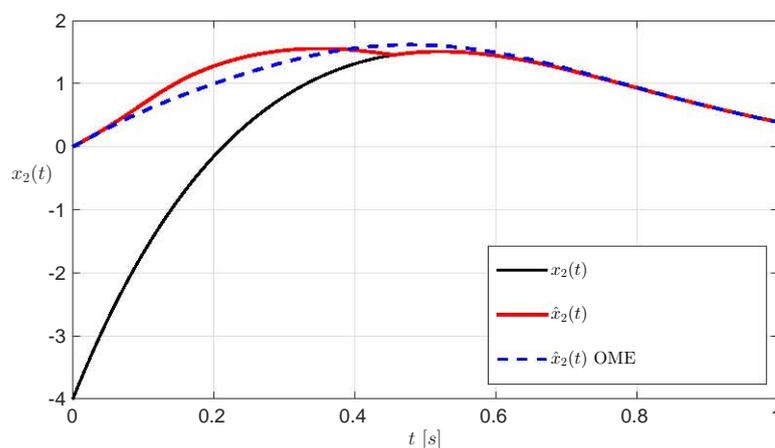
En las figuras 6.1 y 6.2 se comparan los estados reales x_1 y x_2 contra los estimados obtenidos del observador propuesto y del EME. En dicha gráfica se puede apreciar como los estimados obtenidos convergen de manera exacta en tiempo finito, mientras que en los estimados obtenidos por el EME la convergencia es notoriamente mas lenta. El mismo resultado puede ser apreciado en las figuras 6.3 y 6.4 en donde el error de estimación es mostrado. Por ultimo el comportamiento de la Función de Lyapunov es mostrado en la figura 6.5. En dicha gráfica se puede apreciar como la función de Lyapunov es monótonamente decreciente y toca el cero antes de los 0.5s.

Se realizaron simulaciones en donde se introdujo ruido en el termino de salida $y(t)$ y perturbaciones en los estados, en forma de un vector $p = [p_1 \ p_2]^\top$, por lo que el sistema a estimar adquiere la forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + p \quad (6.4)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + r \quad (6.5)$$

Esto se hizo con el objetivo de mostrar de manera experimental el desempeño del observador propuesto ante entradas desconocidas tanto en el sistema a observar como en el observador de estados. En las figuras (6.6) y (6.7) se muestran los componentes p_1 y p_2 . En la figura (6.8) se muestra la señal de salida antes y después de ser contaminada con ruido. El desempeño del observador se muestra en la figura (6.9) en donde se puede

**Figura 6.1:** Estimación del estado x_1 (Ejemplo 1)**Figura 6.2:** Estimación del estado x_2 (Ejemplo 1)

apreciar que el error de estimación está acotado. El resultado puede ser comparado con el EME, cuyo error de estimación es mostrado en la Figura 6.10

6.1.2. Sistemas LVT de tercer orden (Ejemplo 2)

Como segundo ejemplo se presenta un sistema de tercer orden cuyas matrices se definen como

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

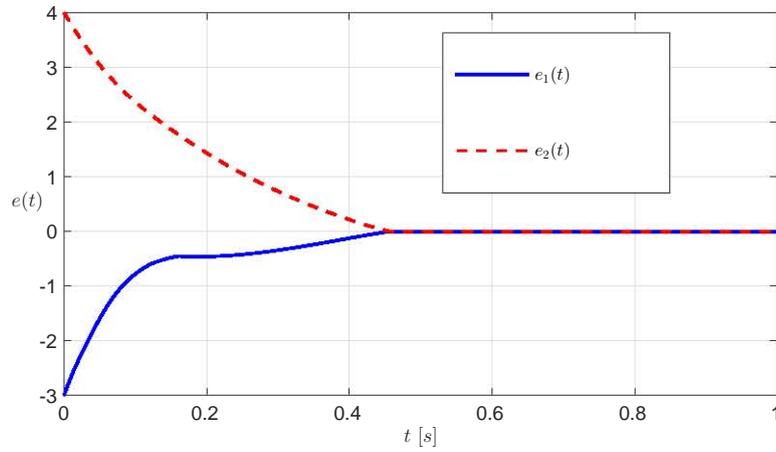


Figura 6.3: Error de estimación con el algoritmo de estimación propuesto (Ejemplo 1)

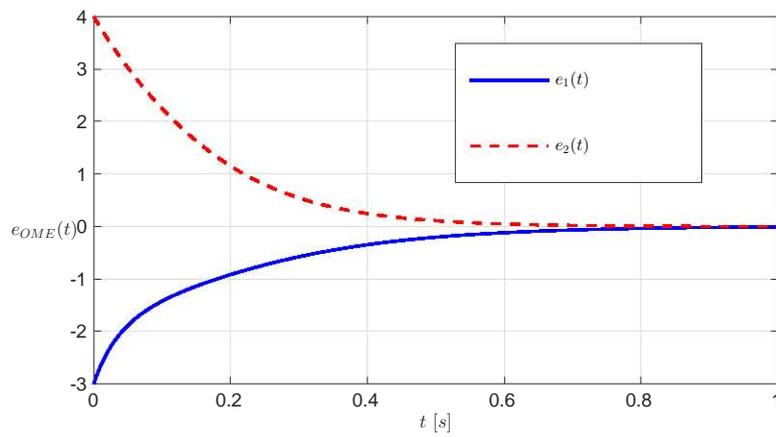


Figura 6.4: Error de estimación con el EME (Ejemplo 1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos(t) \sin(t) - 1 & \frac{1}{2}(1 - \cos(t)^2) & -\cos(t) \\ 2 \cos(t) & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Los parámetros del observador se dan en la tabla [6.2](#)

Los resultados obtenidos son similares a los obtenidos en el ejemplo anterior. El com-

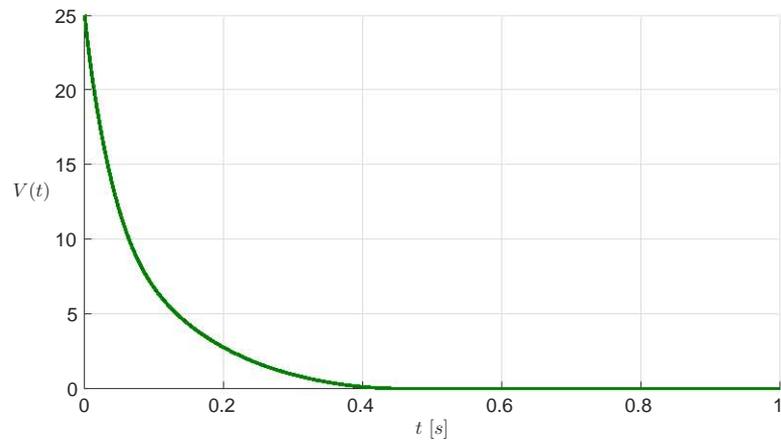


Figura 6.5: Comportamiento de la función de Lyapunov (Ejemplo 1)

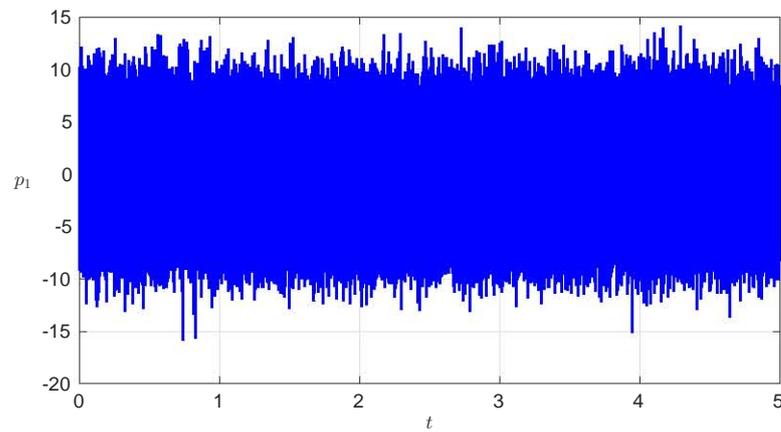


Figura 6.6: Perturbación p_1 (Ejemplo 1)

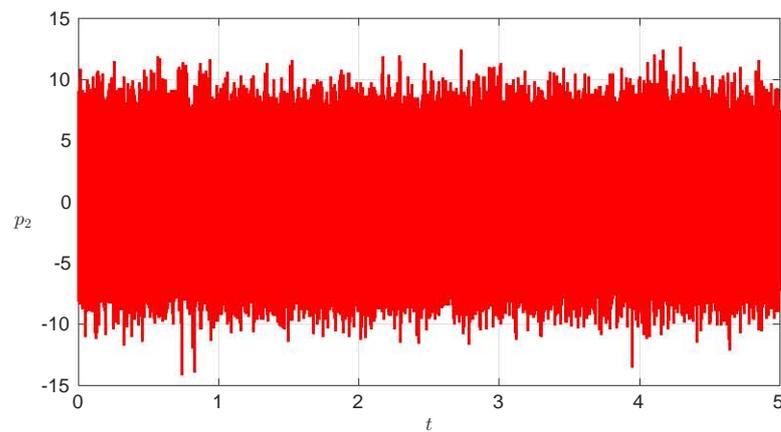


Figura 6.7: Perturbación p_2 (Ejemplo 1)

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

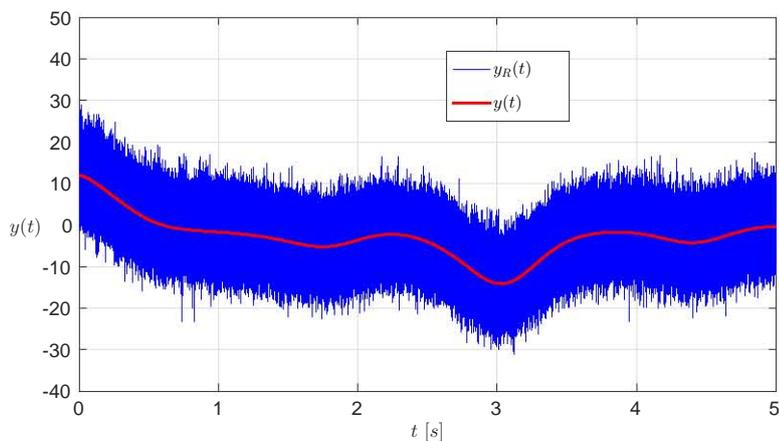


Figura 6.8: Señal de salida $y(t)$ bajos los efectos de ruido (Ejemplo 1)

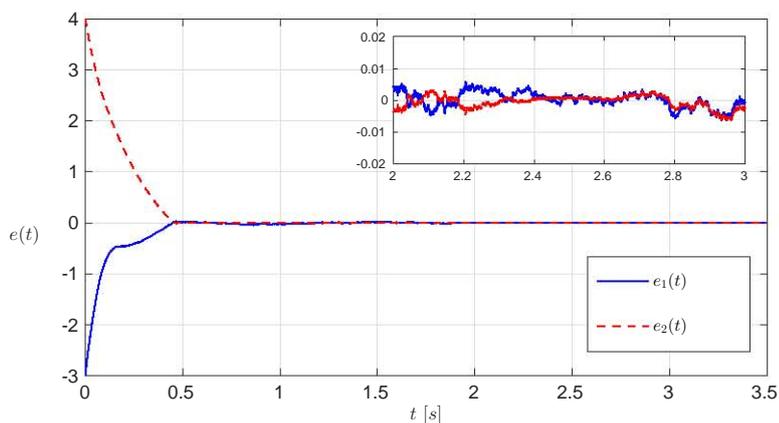


Figura 6.9: Error de estimación con el algoritmo de estimación propuesto bajo efectos de ruido y perturbaciones (Ejemplo 1)

Parámetro	Valor
$u_1(t)$	$\cos(t) \sin(5t)$
$u_2(t)$	$3 \sin(t) + 2 \cos(2t)1$
p_1	0.3
p_2	1.7
L_1	100
L_2	100

Tabla 6.2: Parámetros del observador para un sistema LTV de tercer orden (Ejemplo 2)

portamiento de los estados estimados en comparación a aquellos obtenidos en el EME es mostrado en las figuras 6.11, 6.12 y 6.13. En las figuras 6.14 y 6.15 el error de estimación para ambos observadores es mostrado. La diferencia entre estas últimas dos

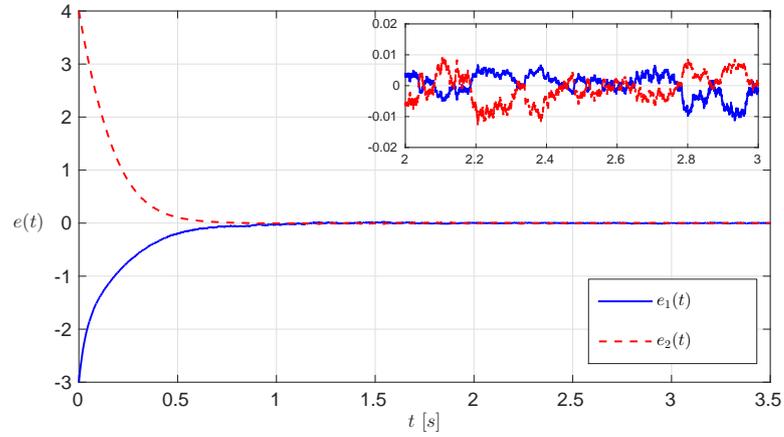


Figura 6.10: Error de estimación con el EME bajo efectos de ruido y perturbaciones (Ejemplo 1)

gráficas es notoria y se puede apreciar como, para el caso del observador propuesto, el error de estimación se hace exactamente cero al rededor del primer segundo. Dicho comportamiento también se puede apreciar en la figura 6.16, en donde la gráfica de la evolución de la función de Lyapunov contra el tiempo es mostrada. Esta función es exactamente cero alrededor del primer segundo.

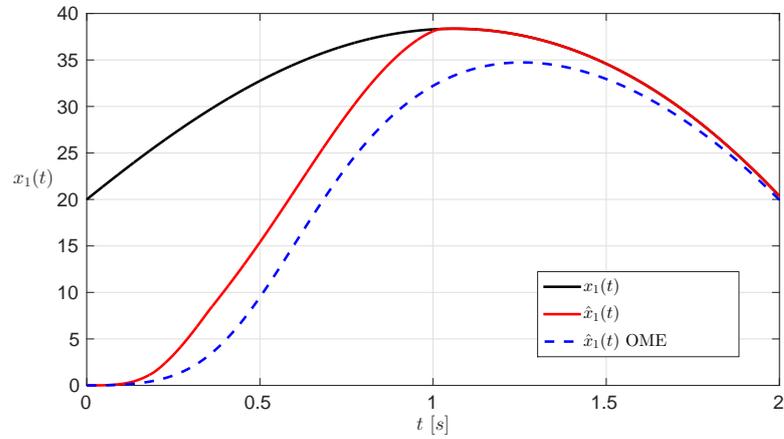


Figura 6.11: Estimación del estado x_1 (Ejemplo 2)

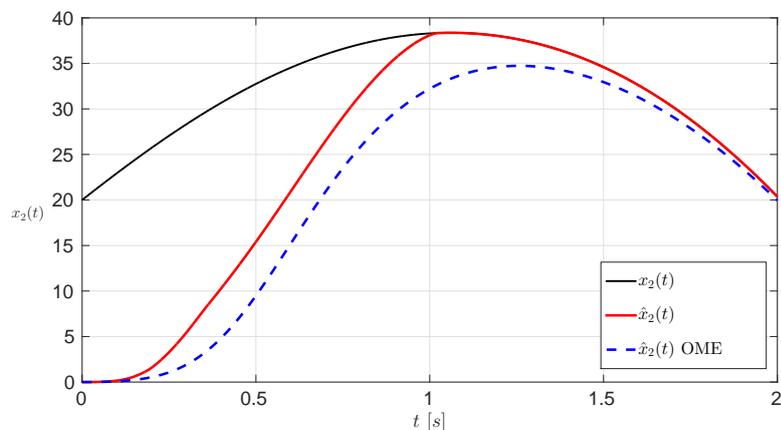


Figura 6.12: Estimación del estado x_2 (Ejemplo 2)

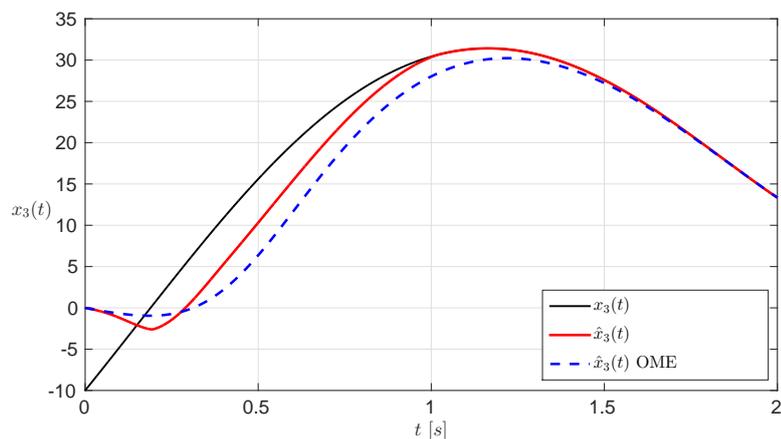


Figura 6.13: Estimación del estado x_3 (Ejemplo 2)

6.2. Estimación de los estados de un sistema LIT (Ejemplo 3)

Para demostrar el funcionamiento del observador para sistemas LIT, un sistema de la forma (5.1) cuyas matrices A , B y C se definen a continuación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$C = [0 \quad 1] \quad (6.11)$$

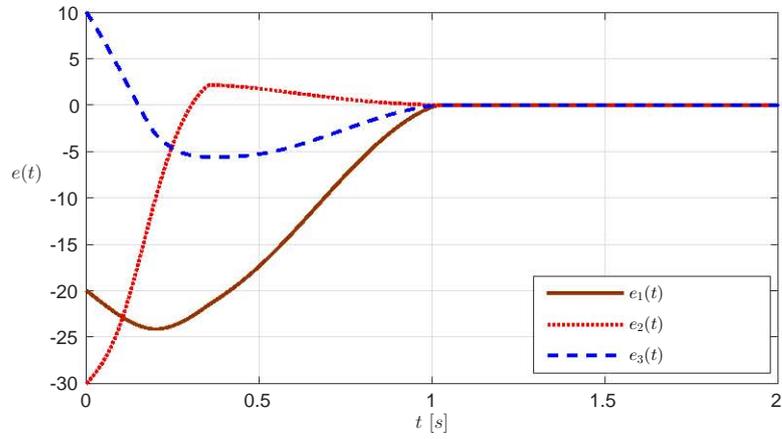


Figura 6.14: Error de estimación con el algoritmo de estimación propuesto (Ejemplo 2)

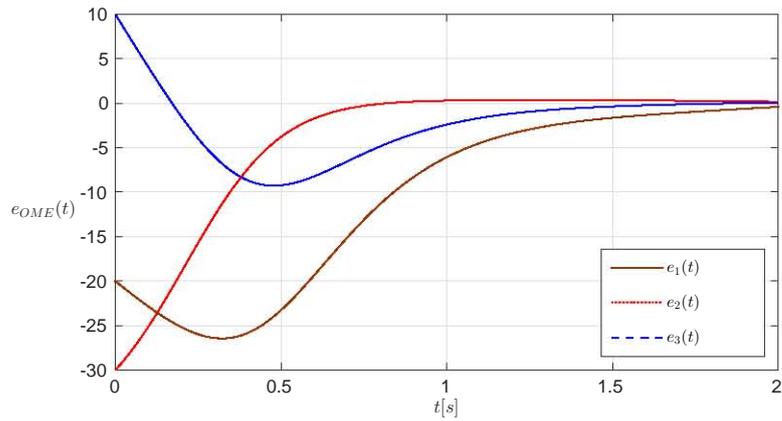


Figura 6.15: Error de estimación con el EME (Ejemplo 2)

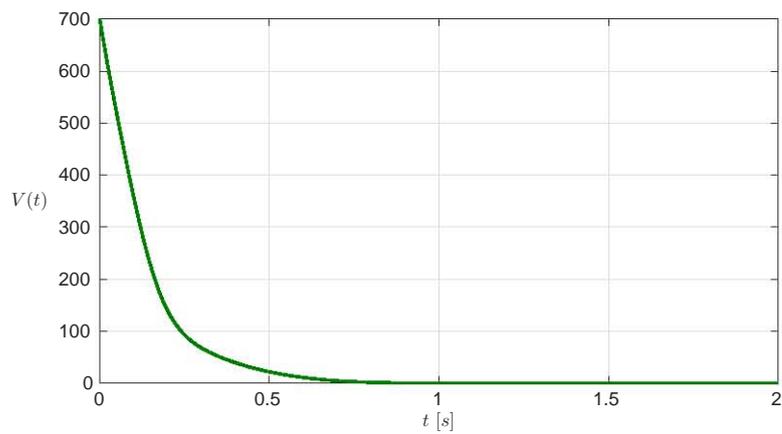


Figura 6.16: Comportamiento de la función de Lyapunov (Ejemplo 2)

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Los parámetros del observador se muestran en la tabla 6.3.

Parámetro	Valor
$u_1(t)$	$\cos(t) \sin(5t)$
$u_2(t)$	$3 \sin(t) + 2 \cos(2t)1$
p_1	0.3
p_2	1.7
L_1	100
L_2	100

Tabla 6.3: Parámetros del observador para un sistema LIT de segundo orden (Ejemplo 3)

La matriz de ganancias L para ambos observadores es

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

En las figuras 6.17 y 6.18 se muestra una comparación entre los estados estimados por el observador propuesto y los estimados obtenidos utilizando un observador de Luenberger. La ganancia L de ambos observadores es la misma. En las figuras 6.19 y 6.20 el error de estimación para ambos observadores es mostrado. En estas últimas figuras se puede apreciar la diferencia en la velocidad de convergencia, y como, para el observador propuesto, el error de estimación se vuelve cero en tiempo finito. Dicho comportamiento también puede verse en la figura 6.21, en donde se muestra la gráfica de la función de Lyapunov.

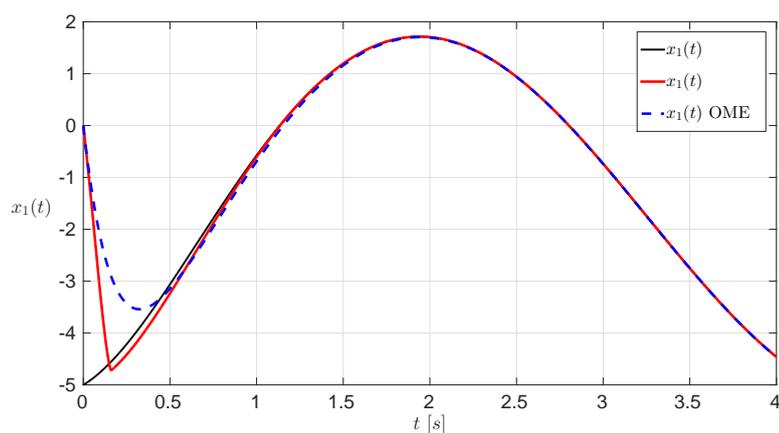


Figura 6.17: Estimación del estado x_1 (Ejemplo 3)

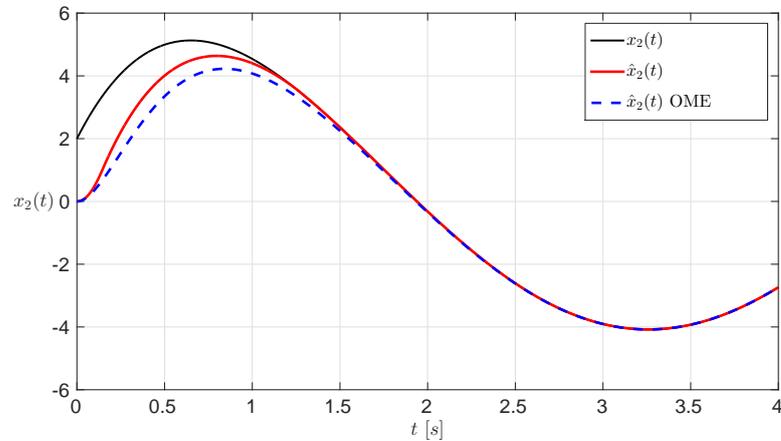


Figura 6.18: Estimación del estado x_2 (Ejemplo 3)

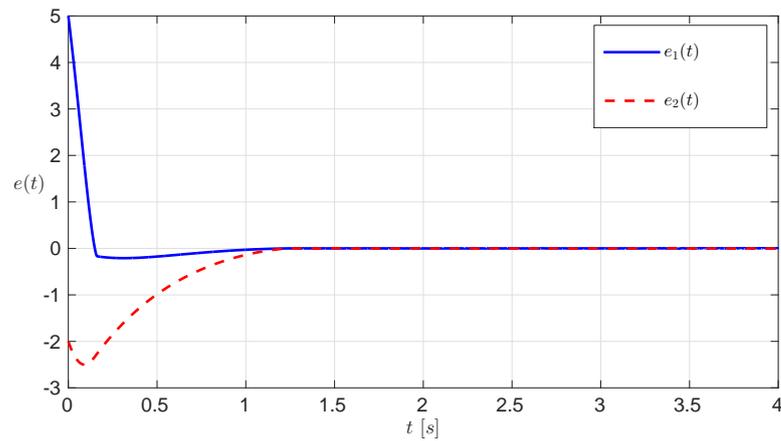


Figura 6.19: Error de estimación para el algoritmo de estimación propuesto (Ejemplo 3)

6.2.1. Estimación parcial de los estados de un sistema LIT (Ejemplo 4)

Para el caso cuando solo es necesario estimar una parte del estado, un observador de orden reducido fue propuesto en la Sección 5.1.1 y probado mediante un ejemplo numérico en un sistema LIT cuyas matrices son definidas a continuación.

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

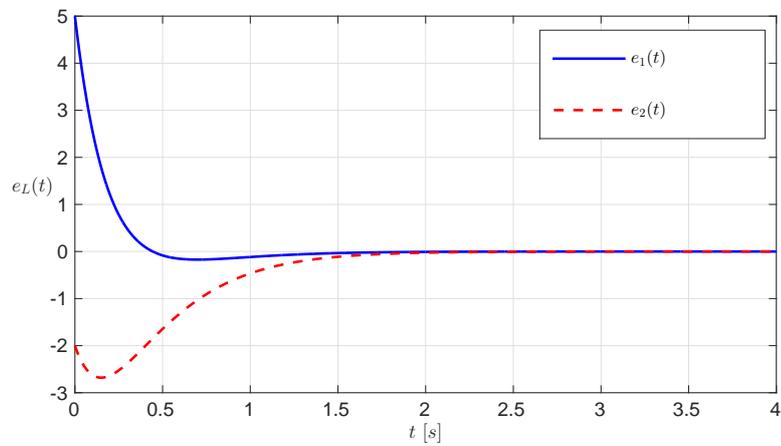


Figura 6.20: Error de estimación para el EME (Ejemplo 3)

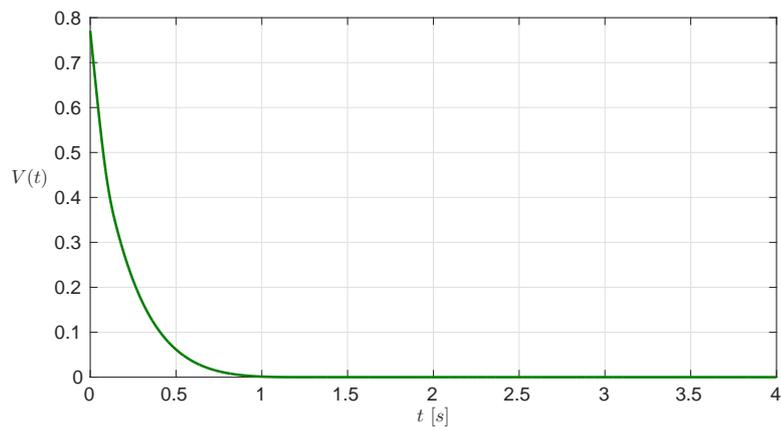


Figura 6.21: Comportamiento de la función de Lyapunov (Ejemplo 3)

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & 9 \\ 2 & -7 & -9 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0] \quad (6.15)$$

Los parámetros del observador se presentan en la tabla 6.4
La matriz de ganancias L para ambos observadores es

Parámetro	Valor
$u(t)$	$10 \cos(t)$
p_1	0.5
p_2	1.5
L_1	1
L_2	10

Tabla 6.4: Parámetros del observador para sistemas LIT de orden reducido (Ejemplo 4)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Los resultados de la simulación numérica puede ser apreciado en las figuras 6.22 y 6.23. Dado que el observadores de orden reducido el estado x_1 no es estimado. En los figuras 6.24 y 6.24 el error de estimación para ambos observadores es mostrado. La diferencia entre los errores de estimación es notable, en especial se puede apreciar como las oscilaciones son significativamente mayores para el observador de Luenberger, mientras que para el otro observador las oscilaciones se detiene por completo antes de los 5s y el error también se vuelve cero.

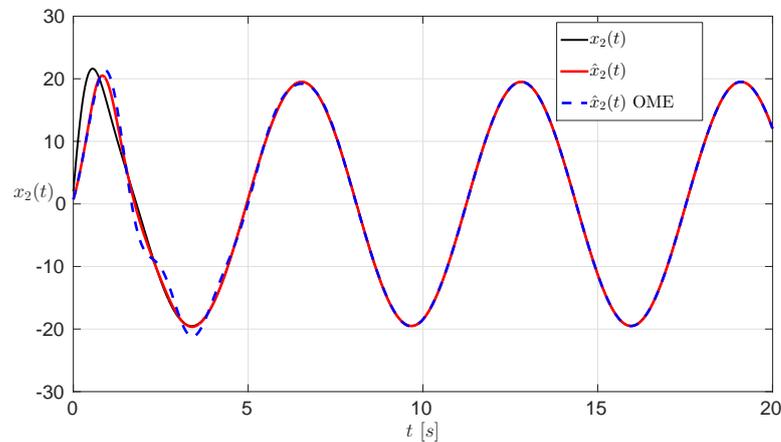


Figura 6.22: Estimación del estado x_2 (Ejemplo 4)

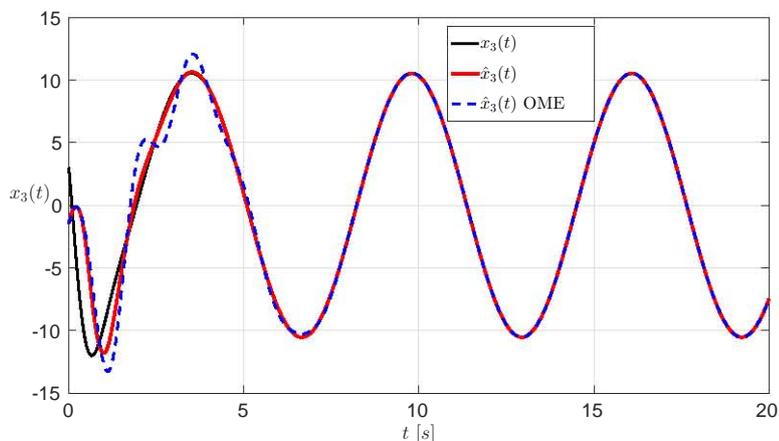


Figura 6.23: Estimación del estado x_3 (Ejemplo 4)

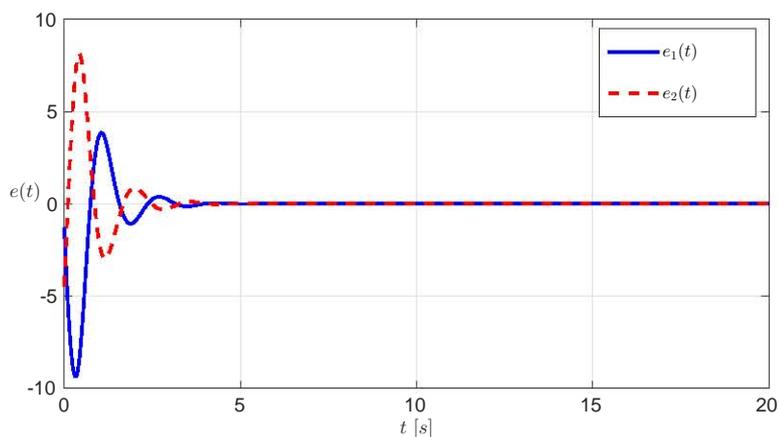


Figura 6.24: Error de estimación para el algoritmo de estimación propuesto (Ejemplo 4)

6.3. Estimación de los estados de un sistema LIT con parámetros desconocidos (Ejemplo 5)

Como ejemplo para demostrar el funcionamiento del observador propuesto como observador adaptable, se pretende estimar los estados del sistema LIT cuyas matrices son mostradas a continuación. Los parámetros a estimar son a_{11} , a_{21} , b_1 y b_2 .

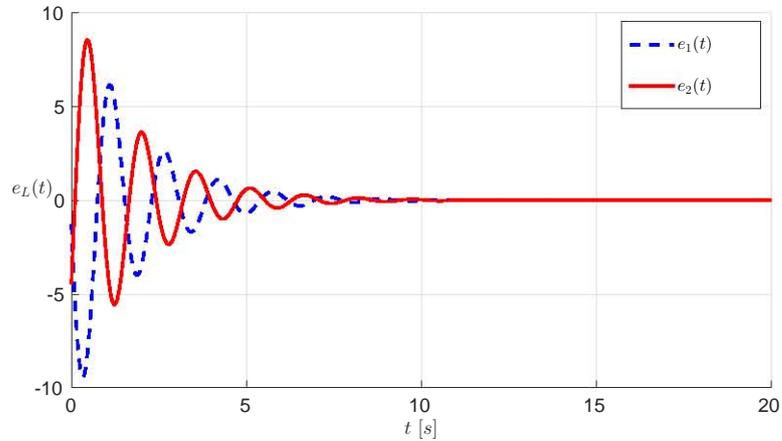


Figura 6.25: Error de estimación para el EME (Ejemplo 4)

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{10} & 1 \\ -\frac{4}{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

$$C = [1 \quad 0] \quad (6.19)$$

Los parámetros del observador se presentan en la tabla 6.5, en donde $f_1(t)$ es un tren de pulsos con amplitud unitaria, periodo 10[s] y ciclo de trabajo de 5%, y $f_2(t)$ es una señal de diente de sierra de amplitud y frecuencia unitaria.

Parámetro	Valor
$u_1(t)$	$\sin(3t) + \sin(\frac{6}{20}t + \frac{\pi}{3}) + f_1(t) + f_2(t)$
p_1	0.25
p_2	2
L_1	50
L_2	50

Tabla 6.5: Parámetros del observador adaptable para sistemas SISO (Ejemplo 5)

6.4. Estimación de parámetros (Ejemplo 6)

A partir de los resultados presentados en la sección (3.2), el algoritmo de estimación propuesto puede ser utilizado para estimar los parámetros θ que satisfacen la ecuación

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

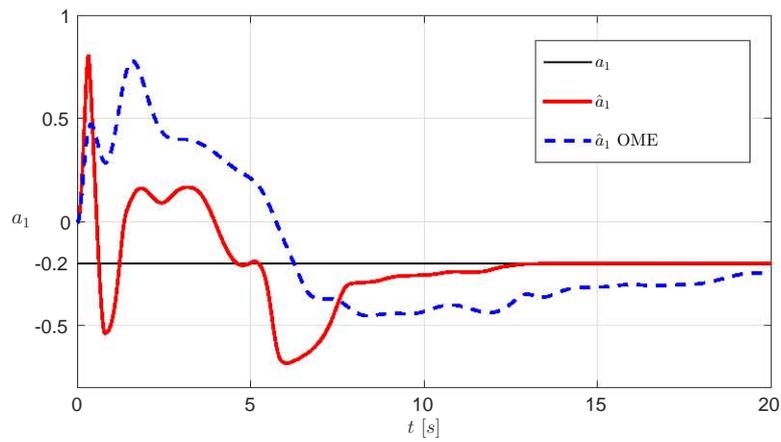


Figura 6.26: Estimación del parámetro a_1 (Ejemplo 5)

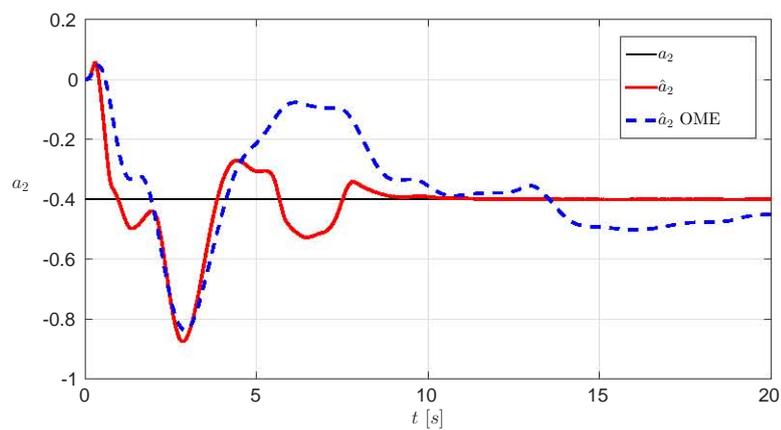


Figura 6.27: Estimación del parámetro a_2 (Ejemplo 5)

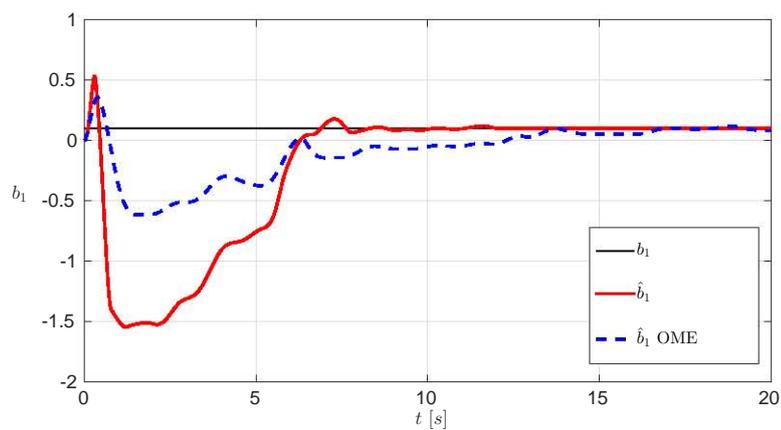


Figura 6.28: Estimación del parámetro b_1 (Ejemplo 5)

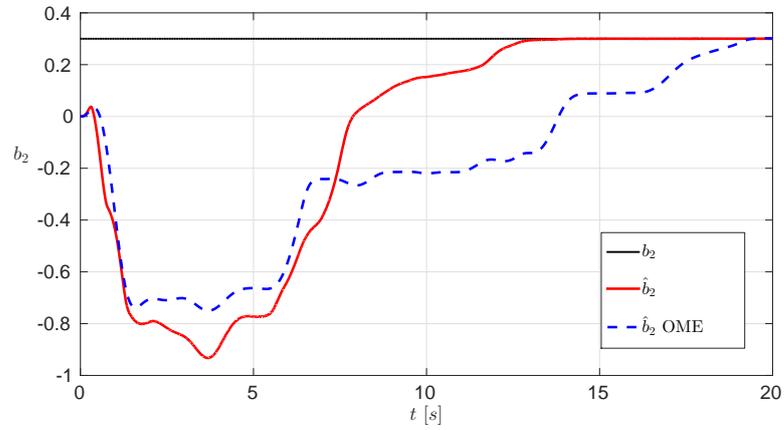


Figura 6.29: Estimación del parámetro b_2 (Ejemplo 5)

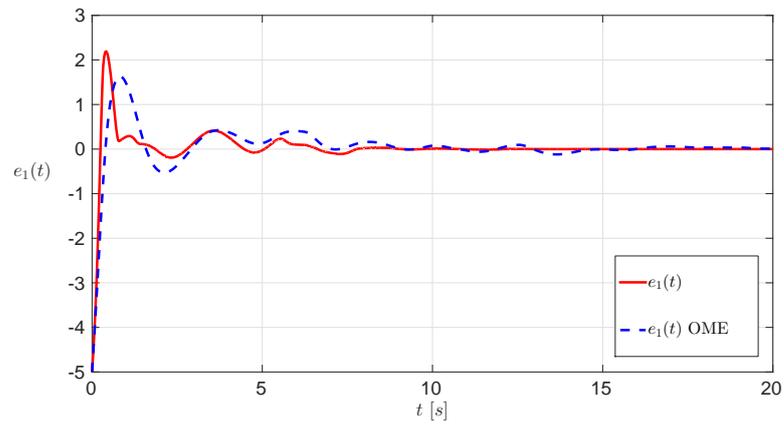


Figura 6.30: Error de estimación del estado x_1 (Ejemplo 5)

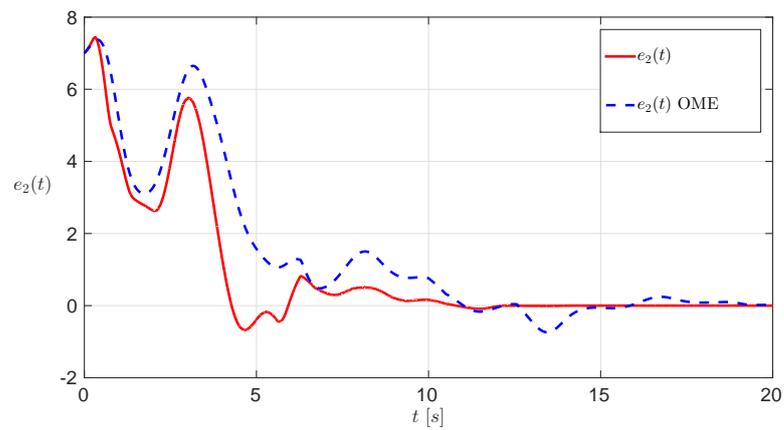


Figura 6.31: Error de estimación del estado x_2 (Ejemplo 5)

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

diferencial

$$\dot{x}(t) = c^\top(t)\theta. \quad (6.20)$$

Para esto basta con reordenar la ecuación anterior llevándola a la forma de un sistema LTV y aplicar el algoritmo de estimación (3.3). Como ejemplo suponga que se desea estimar los parámetros θ de la ecuación diferencial (6.20) en donde el regreso $c(t)$ es de excitación persistente y se define como

$$c^\top(t) = [\cos(2t) \quad \cos(t) + 2]. \quad (6.21)$$

Al llevar el sistema a la forma (3.1) las matrices del sistema ficticio obtenidas son

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(2t) & \cos(t) + 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$C(t) = [1 \quad 0 \quad 0]. \quad (6.24)$$

Los parámetros del observador son presentados tabla 6.6

Parámetro	Valor
u	0
p_1	0.3
p_2	1.7
L_1	50
L_2	50

Tabla 6.6: Parámetros del observador aplicado a un problema de estimación paramétrica (Ejemplo 6)

Es importante notar que en este caso el algoritmo propuesto también estimará el estado ficticio $x(t)$, el cual puede ser no acotado. Debido a esto es necesario detener el algoritmo en el momento en el que la función de Lyapunov se vuelve cero. En las figuras 6.33 y 6.33 se puede ver como los parámetros estimados convergen a los reales, y para el caso en el que el algoritmo no lineal es utilizado dicha convergencia es en tiempo finito.

Este comportamiento se ve claramente en las figuras 6.35 y 6.36, en donde el error de observación para ambos algoritmos es mostrado. El error de estimación para el algoritmo propuesto es exactamente cero antes de los 2 segundos mientras que el error al utilizar el EME sigue sin converger a cero.

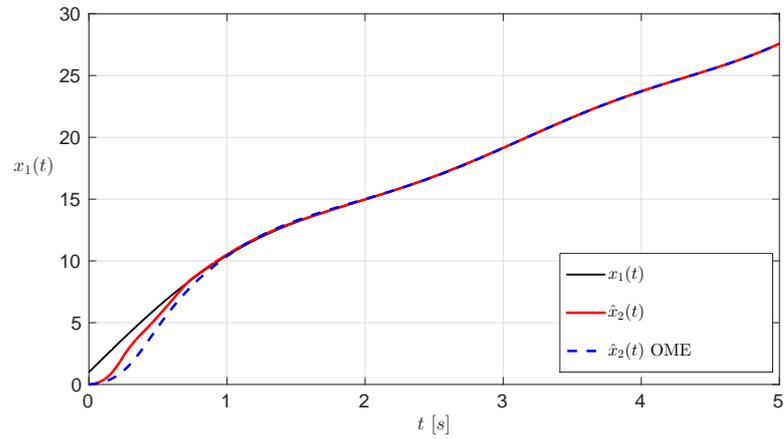


Figura 6.32: Estimación del estado ficticio $x_1(t)$ (Ejemplo 6)

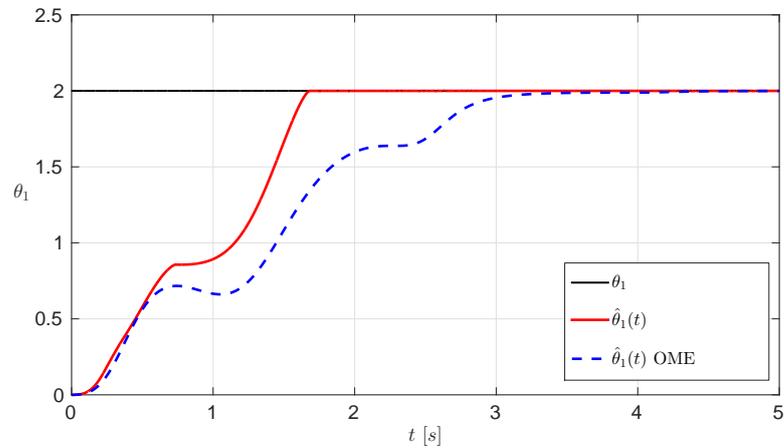


Figura 6.33: Estimación del parámetro θ_1 (Ejemplo 6)

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

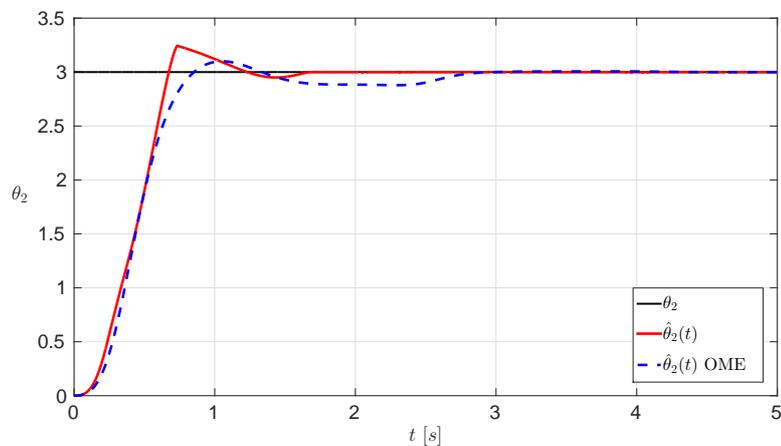


Figura 6.34: Estimación del parámetro θ_2 (Ejemplo 6)

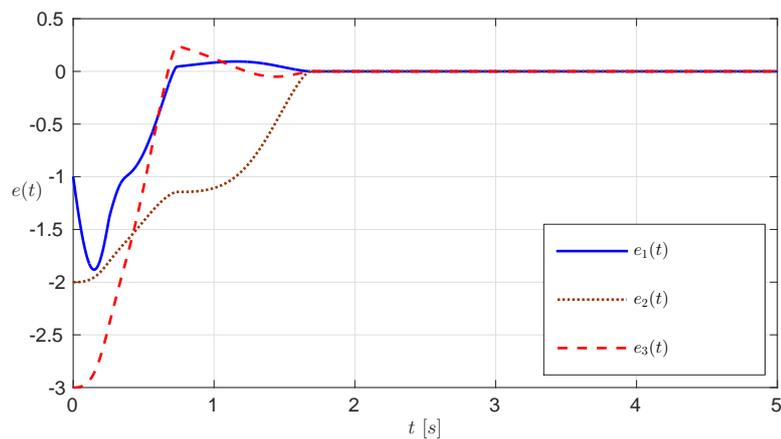


Figura 6.35: Error de estimación para el algoritmo de estimación propuesto (Ejemplo 6)

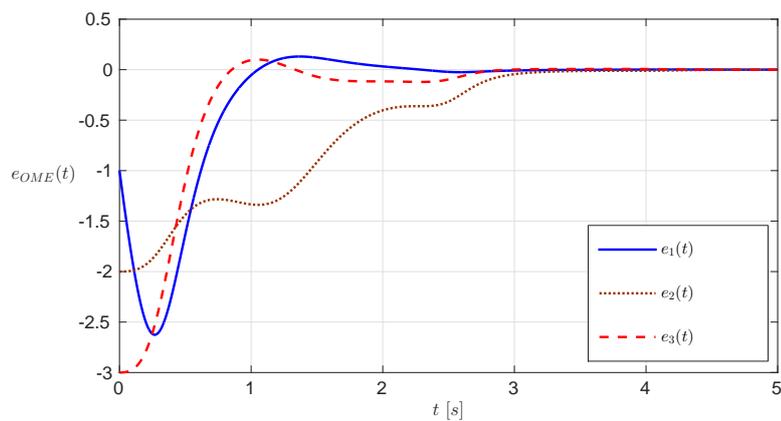


Figura 6.36: Error de estimación para el EME (Ejemplo 6)

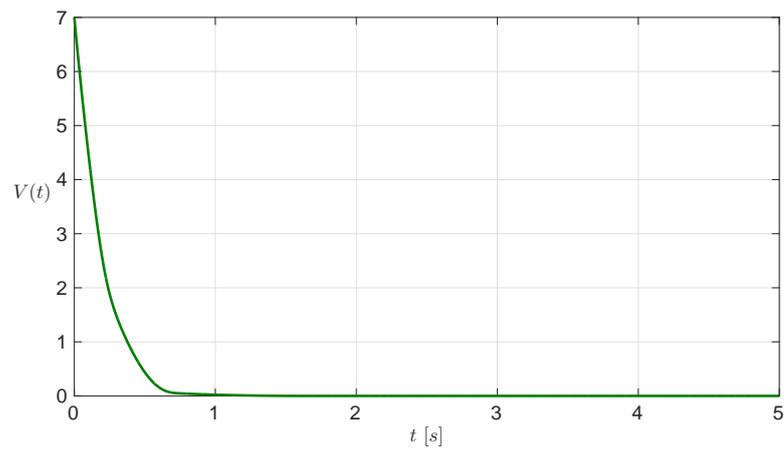


Figura 6.37: Comportamiento de la función de Lyapunov (Ejemplo 6)

Conclusiones

Se logró diseñar un algoritmo de estimación de los estados internos para sistemas lineales multivariables, variantes en el tiempo. Dicho algoritmo es capaz de estimar de manera exacta los estados del sistema a observar en tiempo fijo, es decir, el tiempo de convergencia está acotado por arriba y dicha cota es independiente del error de estimación inicial. Las ganancias y exponentes necesarios para asegurar convergencia en tiempo fijo son sencillas de encontrar, ya que dichos parámetros deben de satisfacer únicamente desigualdades de primer grado independientes de la dinámica del sistema a observar.

A partir del algoritmo propuesto se derivaron dos algoritmos aplicables a sistemas lineales particulares. El primero es una simplificación del algoritmo original para sistemas lineales variantes en el tiempo, que puede ser utilizado en sistemas lineales invariantes en el tiempo. Este observador tiene la ventaja de ser computacionalmente más simple (ya no es necesario construir en línea la matriz $P(t)$). El segundo algoritmo permite estimar los estados y parámetros desconocidos de un sistema lineal, de una entrada y una salida, invariante en el tiempo, en forma canónica de observador. La estimación de dichas variables se realiza en tiempo fijo.

A.1. Propiedades de la matriz de transición de estados

Teorema 12. *Sea $\Phi(t_a, t_b)$ la matriz de transición de estados del sistema (2.16), la cual se define como*

$$x(t_a) = \Phi(t_a, t_b)x(t_b) \tag{A.1}$$

entonces, dicha matriz tiene las siguientes propiedades

- 1) $\Phi(t_c, t_b)\Phi(t_b, t_a) = \Phi(t_c, t_a)$,
- 2) $\Phi^{-1}(t_a, t_b) = \Phi(t_b, t_a)$,
- 3) $\frac{d}{dt}\Phi(t_b, t_a) = A(t)\Phi(t_b, t_a)$.

Demostración. 1) Tomando el producto $\Phi(t_c, t_b)\Phi(t_b, t_a)$, postmultiplicandolo por un vector diferente de cero $x(t_a) \in \mathbb{R}^n$ y aplicando (A.1) se tiene que

$$\Phi(t_c, t_b)\Phi(t_b, t_a)x(t_a) = \Phi(t_c, t_b)x(t_b) = x(t_c). \tag{A.2}$$

De la definición de transición de estados (A.1), la siguiente igualdad se satisface

$$\Phi(t_c, t_a)x(t_a) = x(t_c) \tag{A.3}$$

A partir de (A.2) y (A.3) podemos concluir que

$$\Phi(t_c, t_b)\Phi(t_b, t_a) = \Phi(t_c, t_a).$$

2) A partir de la definición de $\Phi(t_a, t_b)$ se tiene que

$$x(t_a) = \Phi(t_a, t_b)x(t_b).$$

Premultiplicando la ecuación anterior por $\Phi^{-1}(t_a, t_b)$, se obtiene

$$\Phi^{-1}(t_a, t_b)x(t_a) = \Phi^{-1}(t_a, t_b)\Phi(t_a, t_b)x(t_b).$$

Dado que $\Phi^{-1}(t_a, t_b)\Phi(t_a, t_b) = \mathbb{I}$, de la ecuación anterior se obtiene

$$\Phi^{-1}(t_a, t_b)x(t_a) = x(t_b),$$

de la definición de la matriz de transición de estado sabemos que

$$x(t_b) = \Phi(t_b, t_a)x(t_a).$$

Por transitividad se tiene que

$$\Phi(t_b, t_a)x(t_a) = \Phi^{-1}(t_a, t_b)x(t_a) \Rightarrow \Phi(t_b, t_a) = \Phi^{-1}(t_a, t_b) \quad (\text{A.4})$$

3) Tome en cuenta el sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (\text{A.5})$$

De la definición de $\Phi(t_a, t_b)$ sabemos que

$$x(t) = \Phi(t, t_b)x(t_b). \quad (\text{A.6})$$

Derivando la ecuación anterior

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t, t_b)x(t_b), \quad (\text{A.7})$$

y substituyendo (A.6) en (A.5) se obtiene

$$\dot{\Phi}(t, t_b)x(t_b) = A(t)\Phi(t, t_b)x(t_b). \quad (\text{A.8})$$

A partir de la igualdad anterior se puede concluir que

$$\dot{\Phi}(t, t_b) = A(t)\Phi(t, t_b). \quad (\text{A.9})$$

A.2. Tiempo de convergencia

Proposición 4. *Sea la ecuación diferencial*

$$\dot{x}(t) = kx^p(t), \quad (\text{A.10})$$

entonces, su solución es

$$x(t) = \left(k(t - t_0 - T)(1 - q) + x^{1-q}(t_0 + T) \right)^{\frac{1}{1-q}}.$$

Demostración. Tome en cuenta la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = kx^p(t), \quad (\text{A.11})$$

en donde $p > 0$. Integrado con respecto al tiempo en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{t_0+T}^t \frac{1}{x^q} \frac{dx(t)}{dt} dt &= k \int_{t_0+T}^t dt \\ \int_{x(t_0+T)}^{x(t)} x^{-q} &= k(t - t_0 - T) \\ \frac{x^{q-1}}{q-1} \Big|_{x(t_0+T)}^{x(t)} &= k(t - t_0 - T) \\ \frac{x^{1-q}(t) - x^{1-q}(t_0 + T)}{(1-q)} &= k(t - t_0 - T) \end{aligned}$$

De la última ecuación es posible despejar $x(t)$

$$x(t) = (k(t - t_0 - T)(1 - q) + x^{1-q}(t_0 + T))^{\frac{1}{1-q}}.$$

□

A.3. Aplicación de la desigualdad de Jensen

Teorema 13. *Considere el vector $x \in \mathbb{R}^n$, entonces se satisface que*

$$x^\top [x]^p \geq \frac{1}{n^p} \|x\|_1^{p+1} \quad (\text{A.12})$$

Demostración. Para probar el teorema anterior la siguiente desigualdad es de utilidad

Desigualdad 1. *Desigualdad de Jensen*

Dada una función convexa φ y números reales x_1, x_2, \dots, x_n entonces

$$\varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)}{n} \quad (\text{A.13})$$

El lado derecho de la desigualdad (A.12) puede ser reescrito como

$$x^\top [x]^p = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x_1]^p \\ [x_2]^p \\ \vdots \\ [x_n]^p \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Dado que $[x_i]^p = |x_i|^p \text{sign}(x_i)$, entonces cada uno de los elementos del lado derecho de la ecuación anterior se puede escribir como

$$x_i [x_i]^p = |x_i| \text{sign}(x_i) |x_i|^p \text{sign}(x_i) = |x_i|^{p+1}, \quad (\text{A.15})$$

por lo que el lado derecho de (A.14) satisface la igualdad

$$x^\top [x]^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^{p+1}. \quad (\text{A.16})$$

Aplicando la desigualdad de Jensen se obtiene

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^{p+1}}{n} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n |x_i|)^{p+1}}{n}, \quad (\text{A.17})$$

de donde podemos concluir

$$x^\top [x]^p \geq \frac{1}{n^p} \|x\|_1^{p+1}. \quad (\text{A.18})$$

□

A.4. Lema de comparación

Lema 1. *Considere la ecuación diferencial escalar*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0, \quad (\text{A.19})$$

donde $f(t, u(t))$ es lineal en t y localmente Lipschitz en $u(t)$, para todo $t \geq 0$ y todo $u(t) \in \mathbb{J} \subset \mathbb{R}$. Sea $[t_0, T]$ el máximo intervalo de existencia de la solución $u(t)$, y suponga que $u(t) \in \mathbb{J}$ para todo $t \in [t_0, T]$. Sea $v(t)$ una función continua cuya derivada

superior derecha $D^+v(t)$ satisface la desigualdad

$$D^+v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) = v_0 \tag{A.20}$$

con $v(t) \in \mathbb{J}$ para todo $t \in [t_0, T)$. Entonces, $v(t) \leq u(t)$ para todo $t \in [t_0, T)$.

A.5. Funciones Hölder continuas

Definición 9. Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos. Una función $f : M_1 \rightarrow M_2$ se dice que es Hölder continua si y solo si para todo $x, y \in M_1$ existen constantes $L \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ para las cuales la desigualdad

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L(d_1(x, y))^\alpha, \tag{A.21}$$

se satisface.

Bibliografía

- [1] H. Abou-Kandil, G. Freiling, V. Ionescu, and G. Jank. *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Basel, 2012. [38](#)
- [2] B. Anderson. *Exponential stability of linear equations arising in adaptive identification*. IEE, 1977. [57](#)
- [3] B. Anderson and J. Moore. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Dover Books on Engineering. Dover Publications, 2007. [24](#)
- [4] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3):751–766, 2000. [12](#)
- [5] F. Callier and C. Desoer. *Linear System Theory*. Springer Texts in Electrical Engineering. Springer New York, 1994. [14](#), [15](#)
- [6] R. Carroll and D. Lindorff. An adaptive observer for single-input single-output linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(5):428–435, Oct 1973. [3](#)
- [7] S. Drakunov and V. Utkin. Sliding mode observers. tutorial. In *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*, volume 4, pages 3376–3378 vol.4, Dec 1995. [3](#)
- [8] S. V. Drakunov. Sliding-mode observers based on equivalent control method. In *Decision and Control, 1992., Proceedings of the 31st IEEE Conference on*, pages 2368–2369 vol.2, 1992. [3](#)
- [9] R. Engel and G. Kreisselmeier. A continuous-time observer which converges in finite time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7):1202–1204, Jul 2002. [3](#)
- [10] I. Haskara. On sliding mode observers via equivalent control approach. *International Journal of Control*, 71(6):1051–1067, 1998. [3](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [11] J. Hespanha. *Linear Systems Theory*. Princeton University Press, 2009. [16](#), [17](#), [18](#), [19](#)
- [12] R. E. KALMAN. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME*, 82(2):34–45, March 1960. [2](#)
- [13] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83(1):95–108, 1961. [2](#)
- [14] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002. [8](#), [9](#), [10](#)
- [15] P. Kudva and K. S. Narendra. The discrete adaptive observer. In *Decision and Control including the 13th Symposium on Adaptive Processes, 1974 IEEE Conference on*, pages 307–312, Nov 1974. [3](#)
- [16] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10):924–941, 2003. [3](#)
- [17] G. Luders and K. Narendra. An adaptive observer and identifier for a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(5):496–499, Oct 1973. [3](#)
- [18] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2):74–80, April 1964. [2](#), [22](#)
- [19] P. H. Menold, R. Findeisen, and F. Allgöwer. Finite time convergent observers for linear time-varying systems. In *11th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2003. [3](#)
- [20] H. Michalska and D. Q. Mayne. Moving horizon observers and observer-based control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(6):995–1006, Jun 1995. [3](#)
- [21] K. Narendra and D. Streeter. An adaptive procedure for controlling undefined linear processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(4):545–548, Oct 1964. [3](#)
- [22] A. Polyakov. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(8):2106–2110, Aug 2012. [1](#)
- [23] A. Polyakov and L. Fridman. Stability notions and lyapunov functions for sliding mode control systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4):1831 – 1865, 2014. Special Issue on 2010-2012 Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Algorithms. [8](#), [11](#)
- [24] A. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Volume 2: Stochastic Systems*. Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Stochastic Techniques. Elsevier Science, 2009. [13](#)

- [25] C. V. Rao, J. B. Rawlings, and D. Q. Mayne. Constrained state estimation for non-linear discrete-time systems: stability and moving horizon approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(2):246–258, Feb 2003. [3](#)
- [26] E. Tse. Adaptive observer for discrete linear time-invariant systems. In *Decision and Control including the 12th Symposium on Adaptive Processes, 1973 IEEE Conference on*, pages 529–532, Dec 1973. [3](#)
- [27] I. N. Winter, David J.; Herstein. *Matrix theory and linear algebra*. Collier Macmillan, Macmillan, 1988. [12](#)
- [28] Q. Zhang. Revisiting different adaptive observers through a unified formulation. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*, pages 3067–3072, Dec 2005. [53](#), [55](#), [56](#), [58](#)