



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**CONSTELACIONES DE MAJORANA, ESTADOS DE  
ESPÍN ARQUIMÍDEOS Y ANTICOHERENCIA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICO**

**P R E S E N T A :**

**CHRISTIAN LOUIS HANOTEL PINZÓN**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS  
2016**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno.

Hanotel, Pinzón, Christian Louis:

5517040591

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

309218133

2. Datos del tutor

Dr.

Chryssomalis

Chryssomalakos

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Chumin

Wang

Chen

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Jerónimo Alonso

Cortez

Quezada

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Hernando

Quevedo

Cubillos

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Héctor

Hernández

Coronado

7. Datos del trabajo escrito.

Constelaciones de Majorana, estados de espín arquimídeos y anticoherencia

74 p.

2016

# Índice general

Índice	I
Índice general	I
Introducción	1
<b>1. Conceptos Fundamentales</b>	<b>5</b>
1.1. Representación estelar del espín . . . . .	5
1.2. Sólidos platónicos y arquimídeos . . . . .	10
1.2.1. Definiciones básicas . . . . .	10
1.2.2. Simetrías . . . . .	12
1.3. Anticoherencia de estados de espín . . . . .	15
1.4. Diseños esféricos . . . . .	18
1.4.1. Polinomios ultraesféricos . . . . .	19
1.4.2. Polinomios homogéneos y polinomios armónicos . . . . .	20
1.4.3. Teorema de equivalencia . . . . .	21
1.5. <i>Dessins d'enfants</i> . . . . .	23
1.5.1. Mapeos e hipermapeos . . . . .	23
1.5.2. Funciones de Belyi . . . . .	24
<b>2. Propiedades de los estados platónicos y arquimídeos</b>	<b>27</b>
2.1. Estados platónicos y arquimídeos de espín . . . . .	27
2.2. Relación entre simetría de constelaciones de Majorana y anticoherencia . . . . .	29

2.2.1.	Simetría y forma de los estados cuánticos . . . . .	29
2.2.2.	Simetrías y orden de anticoherencia . . . . .	32
2.3.	Conexión con $t$ -diseños esféricos . . . . .	34
2.4.	Matriz de densidad . . . . .	35
2.4.1.	Armónicos esféricos matriciales y un criterio de anticoherencia . . . . .	37
2.4.2.	Simetrías de la matriz de densidad en términos de armónicos esféricos matriciales . . . . .	38
2.5.	Aplicaciones de estados anticoherentes . . . . .	42
2.5.1.	Estados sensibles a rotaciones del marco de referencia . . . . .	42
2.5.2.	Anticoherencia y entropía de enredamiento cuántico . . . . .	44
2.6.	Estados platónicos y arquimídeos y funciones de Belyi . . . . .	45
<b>3.</b>	<b>Discusión</b>	<b>49</b>
3.1.	Trabajo a futuro . . . . .	52
	<b>Appendices</b>	<b>55</b>
	<b>A. La proyección estereográfica</b>	<b>57</b>
	<b>B. Estados platónicos y arquimídeos</b>	<b>59</b>
B.1.	Estados platónicos . . . . .	59
B.2.	Estados arquimídeos . . . . .	60
B.3.	Código en Mathematica . . . . .	63
	<b>C. Cálculo del orden de anticoherencia de estados platónicos y arquimídeos</b>	<b>65</b>
	<b>D. Prueba de que los sólidos platónicos y arquimídeos son <math>t</math>-diseños esféricos</b>	<b>69</b>
	<b>Referencias</b>	<b>71</b>

# Introducción

---

A lo largo de la historia de la física se ha demostrado que las representaciones geométricas de los sistemas físicos son capaces de dar aportaciones importantes en el entendimiento de la naturaleza, y es un hecho que la mecánica cuántica no constituye una excepción. La *representación de Majorana* es una manera de visualizar estados cuánticos de espín como conjuntos discretos de puntos en la esfera unitaria. Haciendo una analogía con la bóveda celeste se podría llamar a esos puntos *estrellas* y al conjunto de ellos *constelación*, de aquí que a esta representación también se le conozca como *representación estelar*.

Los estados de espín en la actualidad y desde hace un par de décadas han sido ampliamente explorados, tanto por su valor intrínseco como por las aplicaciones que pudiesen tener en varios campos, destacando entre ellos, la computación cuántica. En particular, ciertos estados llamados *estados coherentes* han recibido mucha atención por tener una direccionalidad pronunciada, convirtiéndose así en los estados de espín con un mayor parecido a los estados clásicos.

Con la introducción del concepto de *estados anticoherentes* en 2006 se ha puesto atención en estados que, en discrepancia con los estados coherentes, tienen la menor cantidad posible de información direccional, de esta manera, son estados que son los “menos clásicos”. Esta propiedad los hace candidatos interesantes para aplicaciones en las que se requiere que el estado presente efectos cuánticos de manera maximizada, por ejemplo, casos en los que se busca la mayor entropía de

enredamiento posible.

Usando la representación estelar se pueden estudiar constelaciones que formen cualquier tipo de conjunto discreto de puntos en la esfera, sin embargo, si esta constelación tiene propiedades de simetría es posible obtener información específica de los estados cuánticos representados por ésta.

En este trabajo se estudiarán las propiedades de los estados cuánticos cuyas representaciones estelares sean los conjuntos de vértices de un sólido platónico, o de manera más general, de un sólido arquimídeo.

Los sólidos platónicos y arquimídeos a pesar de conocerse desde hace más de 2000 años, siguen siendo objetos con muchas propiedades inexploradas, y a lo largo de esta investigación se apreciará cómo temas de física actual y conocimiento clásico matemático pueden entrelazarse para entender un poco más el comportamiento de algunos sistemas físicos.

Se analizará la relación existente entre las simetrías de los poliedros mencionados y los estados de espín anticoherentes, en donde se va a mostrar que todos los estados de espín con una representación estelar constituida por los vértices de un sólido arquimídeo son anticoherentes.

Las relación entre anticoherencia y simetría no es la única que se halla en este tipo de estados cuánticos puesto que existe una relación entre anticoherencia y *diseños esféricos*. De manera breve, se puede decir que los diseños esféricos son conjuntos discretos sobre la esfera unitaria que tienen la propiedad de que al promediar cualquier polinomio armónico homogéneo (hasta cierto grado polinomial), se encuentra que la diferencia del promedio con el resultado exacto es cero.

En el capítulo 1 se presenta el material teórico y las herramientas matemáticas necesarias para poder desarrollar el estudio de diferentes tópicos en la materia. Se comienza con un estudio breve de la representación estelar, destacando la interpretación física de las estrellas de Majorana y de manera breve se sistematiza el camino entre un estado cuántico y un conjunto discreto de puntos en la esfera y viceversa. Posteriormente, se hace una breve revisión de los sólidos arquimídeos, destacando el especial subconjunto de los sólidos platónicos, haciendo énfasis en los grupos de simetría subyacentes a cada uno de ellos. En este primer capítulo se introduce el concepto de

anticoherencia así como una generalización inmediata a la que denominaremos *anticoherencia de alto orden*.

Las últimas secciones de este capítulo están dedicadas a exponer las definiciones y teoremas básicos de la teoría de diseños esféricos, fundamentada en la teoría de polinomios armónicos; y la teoría de *dessins d'enfants*, que está estrechamente relacionada con diversos campos de las matemáticas como teoría de Galois o bien, la teoría de superficies de Riemann. Estas herramientas matemáticas serán de gran relevancia para estudiar aspectos interesantes de estados de espín.

En el segundo capítulo se definen los estados cuánticos que serán de interés para nuestro estudio, a los cuáles denominaremos *estados platónicos* y *estados arquimídeos* de espín. Se estudiarán propiedades de anticoherencia de alto orden y de simetría de estos tipos de estados cuánticos, apoyándonos en los hechos conocidos de la teoría de poliedros y la representación de Majorana. Más adelante se estudiarán las relaciones de estos resultados con la teoría de diseños esféricos.

Después de hacer el estudio de los estados cuánticos, analizaremos la información que puede obtenerse a partir de sus matrices de densidad, poniendo un énfasis particular en las simetrías heredadas de la constelación de la cual proviene el estado de interés. También se muestra otro criterio para la anticoherencia a partir de un comportamiento especial de los coeficientes de la expansión de una matriz de densidad en armónicos esféricos matriciales.

Se muestran en este capítulo un par de aplicaciones de los estados anticoherentes, aprovechando la propiedad que tienen de ser los mejores detectores de rotaciones de un marco de referencia y como estados que maximizan la entropía de enredamiento.

Finalmente, este capítulo termina formulando algunas cuestiones sobre posibles relaciones entre estados de espín y la teoría de *Dessins d'enfants*.

El capítulo 3 está dedicado a discutir los resultados de los cálculos principales y unificar las relaciones que entrelazan las múltiples perspectivas abordadas a lo largo de los otros capítulos. También en este capítulo se exploran diversos casos específicos de problemas interesantes relacionados con lo que se desarrolló en esta tesis, asimismo se exhiben varios problemas abiertos en el campo y se muestran algunos contraejemplos a posibles conjeturas que podrían hacerse sobre estados



anticoherentes en general, y sobre estados platónicos y arquimídeos en particular.

# Capítulo 1

## Conceptos Fundamentales

---

### 1.1. Representación estelar del espín

Un estado de espín  $j$  puede escribirse de manera genérica como

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^j \psi_m |j, m\rangle \quad (1.1)$$

en donde  $\psi_m \in \mathbb{C}$ .

En muchas ocasiones, tener una representación geométrica de estos estados puede ser de gran utilidad, como veremos a lo largo de este trabajo. En 1932, Ettore Majorana realizó una contribución sin precedentes al dar una representación geométrica de los estados de espín, la cual se conoce como *representación estelar*, o bien, *representación de Majorana* [1].

Para entender la importancia de la representación estelar, comenzaremos recordando algunos hechos generales de uno de los sistemas cuánticos más sencillos: el estado de espín 1/2. Un estado

de espín  $1/2$  está representado por un vector unitario en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión compleja 2 ( $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H} = 4$ ). Una posible base para este tipo de estados puede ser la dada por los vectores  $\{|\hat{z}, +\rangle, |\hat{z}, -\rangle\}$  de  $\mathcal{H}$ .

De esta manera, un estado general de espín  $1/2$  se escribe como:

$$|\psi\rangle = \alpha|\hat{z}, +\rangle + \beta|\hat{z}, -\rangle . \quad (1.2)$$

Como debe ser un vector unitario, la condición de normalización exige que

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 ,$$

de modo que si  $\alpha = a + ib$  y  $\beta = c + id$ , entonces la 3-esfera en la que están todos los estados de espín  $1/2$  es la dada por la ecuación

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 .$$

Si se ignora el factor de fase global, puede proyectarse  $\mathcal{S}^3$  a  $\mathcal{S}^2$ , de manera tal que a cada estado de espín le corresponderá un único punto en la esfera<sup>1</sup>. Con el resultado anterior, se puede afirmar que un estado de espín  $1/2$  corresponde a una dirección en el espacio físico, la cual puede interpretarse como la dirección en la que si se colocase un aparato de Stern Gerlach, siempre se obtendría espín “arriba”, o dicho de otra manera, es la dirección en la que con certeza la proyección “abajo” ( $m = -1/2$ ) es cero, para una discusión detallada véase [2].

Es fácil notar que una generalización de esto no es posible, ya que para estados con espín más alto no hay una correspondencia evidente con el espacio físico (las proyecciones no resultarán ser subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ ). Sin embargo, existe un resultado que permite asociar un estado de espín más alto con direcciones en el espacio físico: para un estado de espín 1 existen 2 direcciones en las que la probabilidad de tener proyección  $-1$  es nula, en el caso general de un espín  $j$  existen  $2j$  direcciones en las que esto sucede (salvo que la constelación tenga estrellas repetidas); esta observación es muy

---

<sup>1</sup>Lo que en esencia se está haciendo es pasar del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  al espacio proyectivo  $\tilde{\mathcal{H}}$  en donde todos los estados que difieren por una fase global quedan identificados.

interesante porque conduce a una definición operacional del espín y la representación de Majorana es el camino para hallar esas direcciones.

Primero se explicará a detalle en qué consiste la representación estelar para el caso de espín  $j = 1/2$  y después se generalizará para un estado de espín arbitrario. Un estado de la forma (1.2) puede escribirse, salvo por una fase global, de la forma siguiente:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\hat{z}+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |\hat{z}-\rangle ,$$

en donde  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas esféricas de un punto en la esfera unitaria. Este punto es la representación estelar del estado (1.2), en donde los ángulos se obtienen de la igualdad

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} = \frac{\beta}{\alpha} .$$

De esta manera, un estado de espín  $1/2$  queda asociado a un punto en la esfera, el cual tiene la propiedad de que la probabilidad de medir su proyección  $-j$  es cero en esa dirección. Esto sólo es una manera de ver la correspondencia uno a uno entre elementos de la esfera  $\mathcal{S}^2$  y el plano proyectivo complejo  $\mathbb{CP}^1$ .

Una manera de demostrar que esas son las coordenadas esféricas del punto asociado a ese estado de espín  $1/2$  podemos escribir al estado más general normalizado de espín en el espacio proyectivo como:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha|^2}} (|\hat{z}, +\rangle + \alpha |\hat{z}, -\rangle) ,$$

el cual queda parametrizado por un número complejo  $\alpha$ . Mediante la proyección estereográfica podemos llevar ese punto del plano complejo al punto  $P$  en la esfera, el cual será

$$P = \left( \frac{2\text{Re}(\alpha)}{1+|\alpha|^2}, \frac{2\text{Im}(\alpha)}{1+|\alpha|^2}, \frac{1-|\alpha|^2}{1+|\alpha|^2} \right) .$$

Si pasamos a coordenadas esféricas podemos notar que el  $\alpha$  es el que se mencionó anteriormente, puesto que:

$$\alpha = \frac{\text{sen}(\theta)}{1+\text{cos}(\theta)} e^{i\phi} = \tan(\theta/2) e^{i\phi} .$$

Para un estado de espín  $j$  de la forma 1.1, se tiene una representación estelar formada por  $2j$  puntos en la esfera unitaria o *estrellas*, a este conjunto de puntos se le conoce como *constelación* de espín. Las coordenadas de estos puntos,  $(\theta_i, \phi_i)$ , se obtienen al realizar la proyección estereográfica<sup>2</sup> desde el polo sur (por convención) de las  $2j$  raíces del siguiente polinomio, conocido como *polinomio de Majorana* :

$$P_{|\psi\rangle}(z) = \sum_{m=-j}^j (-1)^m \sqrt{\frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!}} \psi_m z^{j+m} . \quad (1.3)$$

En el caso que  $k$  raíces del polinomio de Majorana coincidan (es decir, que hayan estrellas en un mismo punto sobre la esfera), se tendrá que en las direcciones degeneradas de la constelación la probabilidad de medir las  $k$  proyecciones menores  $(-j, -j+1, \dots, -j+k-1)$  será cero.

Si un estado es eigenestado de espín en una cierta dirección  $\hat{n}$ , i.e. eigenestado de  $\hat{n} \cdot \vec{S}$  con eigenvalor  $m$ , tendrá una representación de Majorana con  $j+m$  estrellas en la dirección  $\hat{n}$  y  $j-m$  estrellas en la dirección antipodal [4].

Otra propiedad interesante de la representación estelar es que la constelación correspondiente a un estado que ha sido rotado por una rotación en  $\mathcal{H}$  es la misma que la del estado no rotado salvo por una rotación rígida de las estrellas en la esfera de Riemann [4].

El ejemplo siguiente muestra cómo obtener el estado cuántico de un sistema de espín 2 a partir de un conjunto de puntos en la esfera, los vértices de un tetraedro:

**Ejemplo.** Determinación del estado cuántico a partir de una constelación dada.

Para comenzar, se debe conocer el conjunto de las coordenadas de los vértices del tetraedro que conforman la constelación, que en este caso es:

$$\left\{ \left( 0, 0, \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2\sqrt{6}} \right), \left( -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right), \left( -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right) \right\}$$

En la figura 1.1, se muestra este tetraedro proyectado en la esfera.

Lo siguiente es hacer la proyección estereográfica inversa desde el polo sur de cada uno de esos

---

<sup>2</sup>Para más detalles véase el apéndice A.

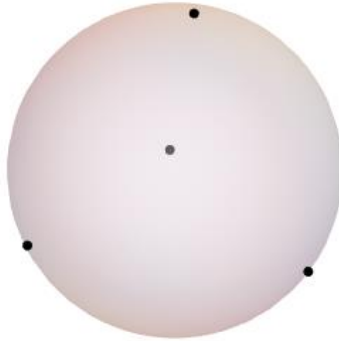


Figura 1.1: Constelación tetraédrica.

puntos. Como no están normalizadas las coordenadas del tetraedro (y deben estarlo porque si no las estrellas no estarían en la esfera unitaria), la proyección toma la forma:

$$(x, y, z) \rightarrow \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + z}} .$$

Aplicando la fórmula anterior a todos los vértices del tetraedro, obtenemos los siguientes cuatro puntos en el plano complejo:

$$\left\{ 0, -\frac{\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{3} - 3i}{\sqrt{6}}, \sqrt{2} \right\} .$$

La figura siguiente muestra la ubicación de los puntos en el plano complejo.

Ahora es necesario construir un polinomio cuyas raíces sean esos puntos del plano complejo, esto es fácil de obtener, basta multiplicar hacer el producto de 4 términos  $(z - r_i)$  donde  $r_1, r_2, r_3, r_4$  son las raíces halladas en el paso anterior. El polinomio obtenido es:

$$z^4 - 2\sqrt{2}z .$$

Comparando con la fórmula (1.3) para  $j = 2$  (porque tenemos 4 estrellas), podemos hallar los coeficientes del estado, resultando que el estado cuántico normalizado en el espacio de Hilbert

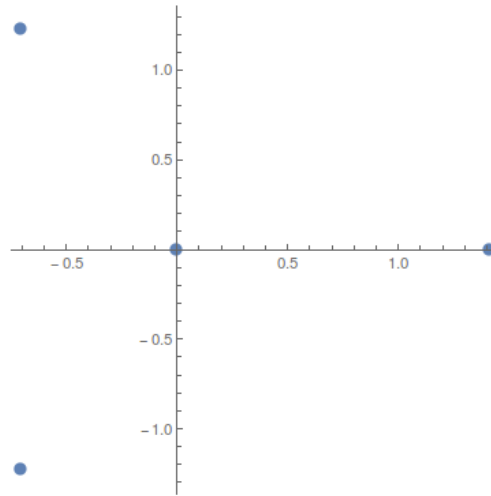


Figura 1.2: Estrellas en el plano complejo.

para estados de espín 2 correspondiente al tetraedro dado es:

$$|\psi_{tet}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|2, -2\rangle .$$

## 1.2. Sólidos platónicos y arquimídeos

### 1.2.1. Definiciones básicas

Con la representación de Majorana podemos estudiar estados de espín a partir de sus constelaciones. En particular, podemos analizar qué propiedades tienen los estados de espín cuya representación de Majorana tenga una simetría particular [5]. A lo largo de esta investigación, estudiaremos estados de espín cuyas constelaciones son los vértices de sólidos platónicos o arquimídeos, que más allá de su belleza, son objetos matemáticos con mucha simetría y propiedades matemáticas (y cuánticas) interesantes.

Antes de comenzar nuestro estudio, recordemos que los *sólidos platónicos* o poliedros regulares

convexos<sup>3</sup> son objetos matemáticos conocidos desde la antigüedad, tienen la propiedad de que todas sus caras son polígonos regulares iguales así como todos sus ángulos sólidos internos son iguales. Reciben ese nombre porque se cree que Platón fue el primero en estudiarlos hace más de 2000 años.

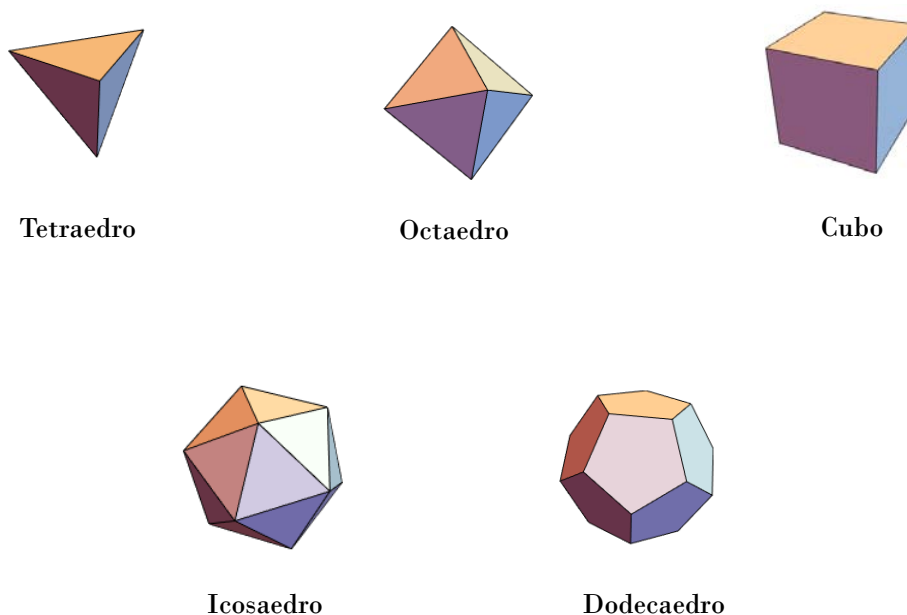


Figura 1.3: Sólidos platónicos

Es fácil notar que sólo pueden existir 5 sólidos platónicos: tetraedro, octaedro, cubo, dodecaedro e icosaedro. Esto se debe a que la suma de los ángulos de cada una de las caras que inciden en un mismo vértice debe ser menor a  $360^\circ$  (si se alcanzan los  $360^\circ$  se aplanan completamente el poliedro), entonces es fácil ver que sólo con triángulos, cuadrados o pentágonos es posible satisfacer este requerimiento. Por ejemplo, si se colocan tres hexágonos en un mismo vértice se tienen  $120^\circ \times 3 = 360^\circ$ , lo cual no está permitido (y es claro que para polígonos regulares con mayor número de lados que el hexágono tampoco es posible). El tetraedro tiene 3 triángulos incidentes

<sup>3</sup>Hay varios caminos para definir a un poliedro, véase por ejemplo [6].



en cada vértice, el octaedro 4 y el icosaedro 5, mientras que el cubo tiene 3 cuadrados que inciden en cada vértice y el dodecaedro 3 pentágonos por vértice. En la figura 1.3 pueden observarse los diferentes sólidos platónicos.

Los *sólidos de Arquímedes*, a diferencia de los anteriores, admiten caras que son polígonos regulares de dos o más tipos. Al igual que los platónicos, los sólidos arquimédeos son ricos en propiedades de simetría y reciben ese nombre porque Pappus atribuyó a Arquímedes un tratado sobre estos objetos matemáticos [7]. Años más tarde, Kepler, en *Harmonices Mundi* hace un estudio amplio de estos sólidos<sup>4</sup> que, como hoy sabemos, son trece<sup>5</sup> [9]. Una demostración de este teorema<sup>6</sup> puede encontrarse en [7]. Las figuras 1.4, 1.5 y 1.6 muestran a los 13 sólidos de Arquímedes clasificados en tres grupos: los sólidos arquimédeos que provienen de truncar algún sólido platónico, los sólidos romos y los restantes.

### 1.2.2. Simetrías

#### Grupo $O(3)$

Un grupo de especial interés en este trabajo es el grupo de rotaciones en tres dimensiones, denotado frecuentemente por  $O(3)$ . Este grupo tiene como elementos a las rotaciones respecto al origen en el espacio tridimensional y adicionalmente consideraremos también las reflexiones y rotaciones por ejes de simetría como elementos del grupo y como operación la composición de las anteriores. Existen algunos subgrupos finitos de  $O(3)$  que son de nuestro interés porque es en éstos en donde están las operaciones que dejan invariantes a los sólidos platónicos y arquimédeos.

<sup>4</sup>Los sólidos arquimédeos a pesar de su antigüedad han sido objetos que hasta la actualidad no han sido completamente explorados, se cree que el trabajo original de Arquímedes se perdió junto con la biblioteca de Alejandría. Kepler redescubrió estos sólidos de manera incompleta y la lista no se terminó ¡hasta el siglo XX! Temas recientes de investigación como la teoría de *dessins d'enfants* aún encuentran interesantes propiedades ocultas en estos poliedros. La enseñanza de las propiedades de estos poliedros formaba parte de los temas del *quadrivium*[8].

<sup>5</sup>El número de sólidos de Arquímedes depende de la definición que se utilice, son 13 si no se permite cambiar el orden en el que inciden en cada cara los vértices mientras que si se relaja está condición existe un sólido adicional conocido como *pseudorombicuboctaedro* o como *sólido de Miller*. También se sabe que dos familias infinitas de sólidos (prismas y antiprismas) satisfacen la definición de sólido arquimédeo, pero para los fines de este trabajo sólo consideraremos a los 13 sólidos arquimédeos clásicos.

<sup>6</sup>La prueba consiste básicamente en una exploración de todos los casos posibles que preserven convexidad y los requerimientos sobre ángulos y regularidad.

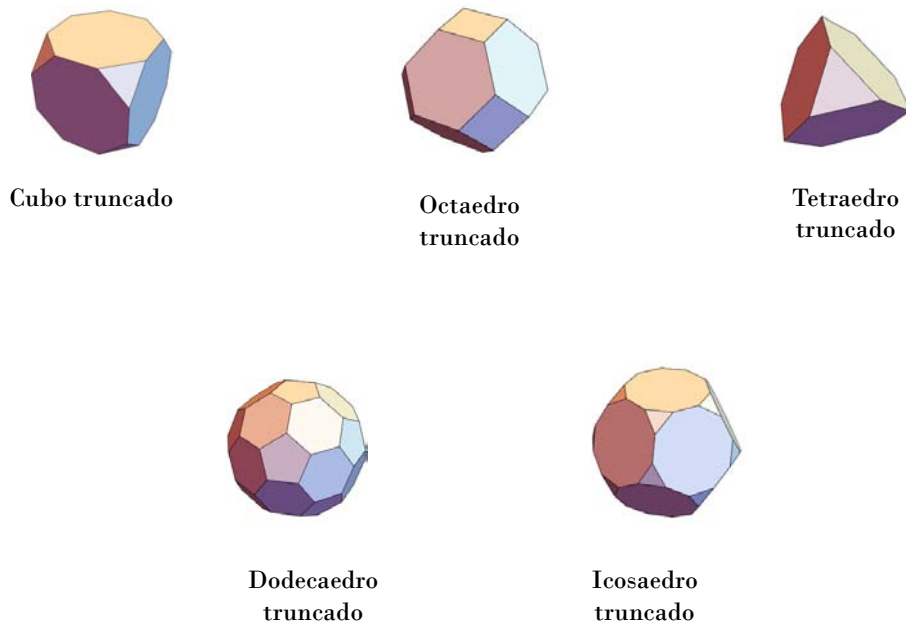


Figura 1.4: Sólidos arquimídeos que provienen de truncar un platónico.

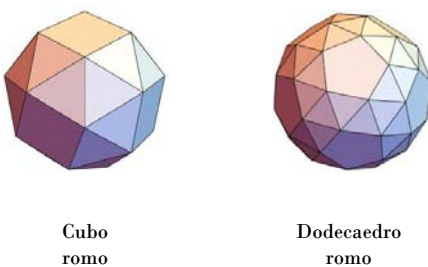


Figura 1.5: Sólidos arquimídeos romos

Dentro de los subgrupos discretos de  $O(3)$  se encuentran los grupos puntuales, que son los que contienen las simetrías de los sólidos que estudiaremos. Algunas de esas operaciones básicas de simetría son las siguientes: rotaciones alrededor del eje  $z$  por un ángulo  $2\pi/n$ <sup>7</sup> (denotadas por  $r_n$ ),

<sup>7</sup>Si la configuración de puntos tiene simetría en torno a otro eje, es posible llevarlo por una rotación a una constelación con simetría en torno al eje  $z$  [5].

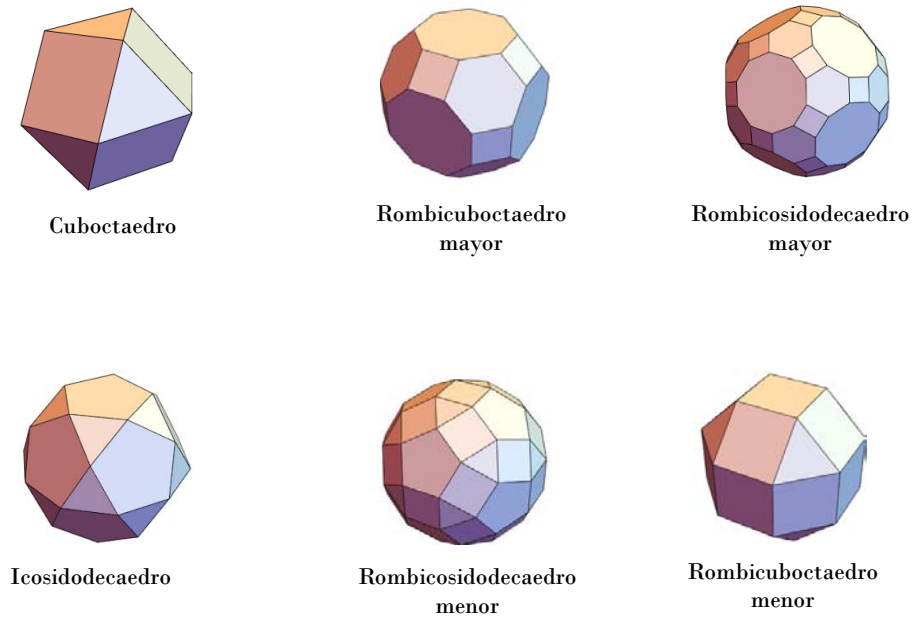


Figura 1.6: Los sólidos arquimídeos restantes

reflexiones respecto al plano  $xz$ <sup>8</sup> ( $\sigma_v$ ), respecto al plano  $xy$  ( $\sigma_h$ ). Se denotará por  $\sigma_{d,n}$  a planos de simetría que se obtienen por rotar el plano de  $\sigma_v$  por un ángulo  $\pi/n$  alrededor del eje  $z$ ; para una discusión amplia de los grupos discretos<sup>9</sup> véase [10].

### Grupo tetraédrico

Este subgrupo tiene como elementos a las operaciones de simetría que dejan invariante a un tetraedro. Por ejemplo, un elemento de este grupo es la rotación de 120 grados que puede hacerse alrededor del eje que pasa por un vértice y por el centro del triángulo que contiene a los tres restantes vértices del tetraedro. También existe un sólido arquimídeo invariante ante la acción de los elementos del grupo tetraédrico: el tetraedro truncado. El grupo tetraédrico será denotado por  $T_d$ .

<sup>8</sup>Al igual que en la operación de simetría anterior, siempre se puede mover la constelación para que si tiene un plano de simetría que contenga al eje  $z$ , éste sea el plano  $xz$ .

<sup>9</sup>También llamados *grupos cristalográficos*.

### Grupo octaédrico

Este es el grupo de simetrías del octaedro (por ejemplo, una rotación de  $90^\circ$  alrededor del eje  $z$  deja invariante a un octaedro en posición canónica, lo mismo para una rotación de  $180^\circ$ , o bien, una rotación de  $90^\circ$  o  $180^\circ$  alrededor de los ejes  $x$  o  $y$ , etc.). Las simetrías del cubo también pertenecen a operaciones del grupo octaédrico. La simetría octaédrica es la simetría más común en los sólidos arquimídeos: el cuboctaedro, el rombicuboctaedro mayor<sup>10</sup>, el rombicuboctaedro menor, el cubo romo, el cubo truncado y el octaedro truncado tienen como grupo de simetría al grupo octaédrico, al cual denotaremos por  $O_h$ .

### Grupo icosaédrico

El grupo icosaédrico ( $I_h$ ) es el correspondiente grupo de simetría del icosaedro y en esta categoría están además del dodecaedro todos los sólidos arquimídeos restantes. Cabe mencionar que el dodecaedro romo (con simetría icosaédrica) y el cubo romo (con simetría octaédrica) tienen un grupo de simetría mayor pero que contiene al subgrupo anteriormente mencionado, a sus correspondientes grupos de simetrías las denotaremos simplemente por  $I$  y  $O$ , respectivamente.

## 1.3. Anticoherencia de estados de espín

Se entiende por estado coherente a un estado cuántico que tiene propiedades direccionales semejantes a las de un estado clásico, en ese sentido, un estado anticoherente es el que podría exhibir un comportamiento “más cuántico”, lo cual, de acuerdo con [11], podría tener aplicaciones en el contexto de información cuántica (en los que se busca que el estado cuántico haga cosas diferentes a lo que haría un estado clásico). Los estados coherentes, a diferencia de los anticoherentes, han sido ampliamente estudiados [12] y tienen muchas aplicaciones en diversas áreas en donde su *parentesco* con los estados clásicos es el factor determinante.

<sup>10</sup>También conocido como cuboctaedro truncado.

Bajo la perspectiva de la representación de Majorana, los estados coherentes se “parecen” más a un estado clásico en el sentido de que tienen una dirección privilegiada en el espacio, puesto que las estrellas en las constelaciones que representan estados coherentes se encuentran acumuladas en un solo punto (una sola estrella con degeneración  $2j$ ). En oposición al hecho anterior, se espera que los estados anticoherentes estén distribuidos de manera uniforme sobre la superficie de la esfera.

La idea que se presenta en [11] permite establecer una posible definición del concepto de anticoherencia. Se considera que como la proposición opuesta a *un estado apunta en cierta dirección es un estado no apunta a ninguna parte*, los estados anticoherentes serán aquellos con la propiedad de *no apuntar a ninguna parte*, una posible manera de satisfacer esto es bajo el requerimiento de que su vector de polarización se anule, es decir,

$$\vec{p} \equiv \langle \psi | \vec{S} | \psi \rangle = 0 .$$

Un criterio más estricto para anticoherencia pide además del requerimiento anterior, que la varianza  $\Delta S_{\hat{n}}^2$  sea uniforme en la esfera unitaria (esto con la finalidad de borrar información orientacional del estado que esté codificada en esa función). Los estados que tienen un valor de  $\Delta S_{\hat{n}}^2$  independiente de  $\hat{n}$  se llaman *estados uniformes*.

Se define un *estado anticoherente* como aquel que tiene un vector de polarización cero. Un *estado 2-anticoherente* será aquél que además de tener un vector de polarización nulo es un estado uniforme.

Para estados normalizados se tiene que

$$\Delta S_{\hat{n}}^2 = \langle \psi | (\hat{n} \cdot \vec{S})^2 | \psi \rangle - \langle \psi | (\hat{n} \cdot \vec{S}) | \psi \rangle^2 .$$

Como consecuencia de esta definición, todo estado 2-anticoherente debe cumplir que  $\Delta S_{\hat{n}}^2 = s(s+1)/3$  (que no depende de  $\hat{n}$ ).

En el caso general, para momentos estadísticos más altos, aún existirá información sobre la orientación, así que es natural que exista una generalización del concepto de anticoherencia como sigue: de-

mos que un estado de espín  $|\psi\rangle$  es  $k$ -anticoherente o *anticoherente de orden  $k$*  si  $\langle\psi|(\hat{n}\cdot\vec{S})^m|\psi\rangle$  es independiente de  $\hat{n}$  para  $m = 1, 2, \dots, k$ .

A continuación se muestra un ejemplo de estado 3-anticoherente.

**Ejemplo.** El cubo como estado 3-anticoherente. Siguiendo la técnica mostrada en el ejemplo anterior, se puede obtener el estado cuántico correspondiente a una constelación de Majorana configurada como cubo con coordenadas  $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ . El estado es:

$$|\psi_{cubo}\rangle = \frac{1}{\sqrt{24}} \left( \sqrt{5}|4, 4\rangle + \sqrt{14}|4, 0\rangle + \sqrt{5}|4, -4\rangle \right)$$

Para demostrar que es anticoherente, se requiere calcular el valor esperado de  $\hat{n}\cdot\vec{S}$ . En este caso, al tratarse de una sistema de espín 4,  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ , donde  $S_x, S_y, S_z$  están dadas por:

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{\frac{7}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{7}{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{\frac{7}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{7}{2}} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{\frac{7}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{7}{2}} & 0 & -\frac{3i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3i}{\sqrt{2}} & 0 & -i\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\sqrt{5} & 0 & -i\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\sqrt{5} & 0 & -\frac{3i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3i}{\sqrt{2}} & 0 & -i\sqrt{\frac{7}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\sqrt{\frac{7}{2}} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$S_z = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Es fácil notar que  $\langle \psi_{cubo} | \hat{n} \cdot \vec{S} | \psi_{cubo} \rangle = 0$ ,  $\langle \psi_{cubo} | (\hat{n} \cdot \vec{S})^2 | \psi_{cubo} \rangle = 20/3$  y  $\langle \psi_{cubo} | (\hat{n} \cdot \vec{S})^3 | \psi_{cubo} \rangle = 0$ .

De esta manera,  $|\psi_{cubo}\rangle$  es un estado 3-anticoherente. También es fácil notar que  $\langle \psi_{cubo} | (\hat{n} \cdot \vec{S})^4 | \psi_{cubo} \rangle$  es independiente de  $\hat{n}$ .

## 1.4. Diseños esféricos

Los *t-diseños esféricos*<sup>11</sup> son conjuntos discretos sobre la esfera que tienen la característica de que al evaluar cualquier polinomio homogéneo hasta un cierto grado  $t$  en  $n$  variables, el muestreo que

<sup>11</sup>Conocidos en la literatura en inglés como *spherical t-designs*.

se puede hacer sobre los valores del polinomio con ese conjunto discreto de puntos en dicha esfera (inmersa en un espacio de  $n$  dimensiones) coincide con el promedio exacto sobre toda la esfera. Fueron originalmente introducidos en la literatura en 1977 en [13] y posteriormente utilizados en el contexto de estados anticoherentes [14]. Actualmente hay una gran cantidad de trabajos en el tema, como se muestra en [15]. Una definición para ellos es la siguiente:

**Definición 1.** *Un  $t$ -diseño esférico es un conjunto finito  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m : x_i \in \mathcal{S}^{n-1}\}$  tal que*

$$\frac{1}{\text{vol}(\mathcal{S}^{n-1})} \int_{\mathcal{S}^{n-1}} p(x) dx = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p(x_i)$$

para todo polinomio  $p(\vec{x})$  en  $n$  variables, homogéneo de grado menor o igual a  $t$ .

En las secciones siguientes se presentan algunas ideas básicas sobre polinomios, ya que serán de utilidad más adelante.

### 1.4.1. Polinomios ultraesféricos

Los *polinomios ultraesféricos* o *polinomios de Gegenbauer* son un tipo de funciones especiales (polinomios ortogonales) que tienen relación con el grupo  $\text{SO}(n)$  [16]. Para los fines de nuestro trabajo es suficiente dar una definición [13] que es para dimensión 3 o mayor equivalente a la definición estándar de estos polinomios [17].

El polinomio ultraesférico de grado  $k$ ,  $Q_k(x)$ , se define en dimensión  $d$  por medio de la recursión siguiente<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} Q_{k+1}(x) &= x Q_k(x) - (1 - \lambda_{k-1}) Q_{k-1}(x) , \\ \lambda_k &= k / (d - 2 + 2k), \quad Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = dx . \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Esto sólo se menciona para justificar el escalamiento de los polinomios de Gegenbauer que se presenta en el apéndice C.



### 1.4.2. Polinomios homogéneos y polinomios armónicos

Un polinomio homogéneo de grado  $k$  en  $n$  variables es una función polinomial  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con la propiedad de que  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : P(\lambda \vec{x}) = \lambda^k P(\vec{x})$ .

De la definición anterior, puede notarse que un polinomio homogéneo queda determinado por sus valores en la esfera unitaria de  $\mathbb{R}^n$ . Los polinomios homogéneos de grado  $k$  en  $n$  variables  $P : \mathcal{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  forman un espacio vectorial para cada  $k \geq 0$  y lo denotaremos por  $\text{Hom}_n(k)$ .

Se dice que un polinomio  $P(\vec{x})$  es armónico [16] si su laplaciano es cero, es decir, si  $\Delta P(\vec{x}) = 0$ , donde

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Se representará por  $\text{Arm}_n(k)$  al subespacio de  $\text{Hom}_n(k)$  que consiste de polinomios armónicos homogéneos de grado  $k$  en  $n$  variables.

Sea  $P^k \in \text{Hom}_n(k)$ . En general,  $\Delta P^k(\vec{x})$  es diferente de cero, se puede demostrar que  $P^k$  es expresable como una suma de dos polinomios, uno en  $\text{Arm}_n(k)$  y otro de la forma  $r^2 P^{k-2}(\vec{x})$  que tiene laplaciano distinto de cero,

$$P^k(\vec{x}) = h^k(\vec{x}) + r^2 P^{k-2}(\vec{x}),$$

donde  $r^2 := x_1^2 + \cdots + x_n^2$ ,  $h^k(\vec{x}) \in \text{Arm}_n(k)$  y  $P^{k-2}(\vec{x}) \in \text{Hom}_n(k-2)$ .

Es válido hacer la misma descomposición para  $P^{k-2}(\vec{x})$ , se separa al polinomio como una suma de dos polinomios, donde uno satisface la ecuación de Laplace y el otro es de la forma  $r^2 P^{k-4}(\vec{x})$ . De este modo, cualquier polinomio de  $\text{Hom}_n(k)$  puede verse como una suma de polinomios armónicos homogéneos de diferente grado (impares si  $k$  es impar y pares si  $k$  es par), al estar evaluando a los vectores en la esfera unitaria se cumple que  $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ . De esta observación, se sigue el siguiente teorema (descomposición canónica de polinomios homogéneos):

**Teorema 1.4.1.**

$$\text{Hom}_n(k) = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \text{Arm}_n(k - 2i) , \quad (1.4)$$

$$\text{Hom}_n(k) \oplus \text{Hom}_n(k - 1) = \bigoplus_{i=0}^k \text{Arm}_n(i) . \quad (1.5)$$

Una relación interesante entre polinomios ultrasféricos y polinomios armónicos es el hecho de que

$$\dim \text{Arm}_n(k) = \binom{d+k-1}{d-1} - \binom{d+k-3}{d-1} = Q_k(1) .$$

Este resultado vincula, a través del teorema 1.4.1, al espacio de polinomios homogéneos con los polinomios ultrasféricos. Esta relación entre polinomios será la motivación para el teorema principal de esta sección, que es una condición equivalente a la de ser un diseño  $t$ -esférico, que será mucho más fácil de manejar que la definición 1 en los casos de nuestro interés.

**1.4.3. Teorema de equivalencia**

A continuación se presentan un par de definiciones que serán necesarias para poder enunciar el teorema, sin embargo, los detalles técnicos no serán tratados. Para una discusión amplia del tema y la demostración del teorema (y de muchos otros resultados concernientes a  $t$ -diseños esféricos), véase [13].

**Definición 2.** Sea  $X \subset \mathcal{S}^{n-1}$  un conjunto finito no vacío. Para  $\alpha \in [-1, 1]$  se define la matriz de distancia  $D_\alpha$ <sup>13</sup> como:

$$D_\alpha(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \cdot \vec{y} = \alpha \\ 0 & \text{en otro caso ,} \end{cases}$$

con  $\vec{x}, \vec{y} \in X$ . Se denotará por  $d_\alpha$  a la suma de los elementos de la matriz de distancia.

---

<sup>13</sup> $D_\alpha$  es una matriz de tamaño  $|X| \times |X|$ .

**Definición 3.** Sea  $X$  como en la definición anterior. Sea

$$A_X := \{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle; \forall \vec{x}, \vec{y} \in X\} .$$

Si no hay ambigüedad, se denotará simplemente por  $A$ .

**Teorema 1.4.2.** Usando la notación de las definiciones anteriores,

$$\sum_{\alpha \in A} d_\alpha Q_k(\alpha) = 0 ,$$

para  $k = 1, 2, \dots, t$  si y sólo si  $X$  es un  $t$ -diseño esférico.

**Ejemplo.** 2-diseño esférico.

Como un ejemplo de la teoría anterior, se demostrará que el tetraedro con coordenadas

$$\left\{ \left( 0, 0, \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2\sqrt{6}} \right), \left( -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right), \left( -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right) \right\}$$

es un 2-diseño esférico.

Para ello se normalizan todos los vectores de posición de las estrellas, resultando que el tetraedro proyectado en la esfera tiene las siguientes coordenadas:

$$\left\{ (0, 0, 1), \left( -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3} \right), \left( -\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3} \right), \left( \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3} \right) \right\}$$

En este ejemplo puede observarse fácilmente que  $A = \{1, -1/3\}$ , que  $D_1 = \mathbb{I}_{4 \times 4}$  y que además

$$D_{-1/3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Como  $d_\alpha$  es la suma de los elementos de  $D_\alpha$ , entonces  $d_1 = 4$  y  $d_{-1/3} = 12$ .

Por lo que usando el teorema 1.4.2 se encuentra que el tetraedro es un 2-diseño esférico (y no hasta orden 3 puesto que la suma mostrada en 1.4.2 resulta mayor que cero).

## 1.5. Dessins d'enfants

La teoría de *dessins d'enfants*, iniciada en 1984 por A. Grothendieck, ha cobrado en los últimos años un interés vasto por ser un puente entre diversos campos de las matemáticas como la teoría de superficies de Riemann, la teoría de Galois, la teoría de gráficas, y como se tratará aquí, la teoría de poliedros. Para definir a los *dessins d'enfants*<sup>14</sup> será necesario introducir algunos conceptos generales.

### 1.5.1. Mapeos e hipermapeos

En la teoría de gráficas, se entiende una gráfica como un par de conjuntos, uno de *vértices* y otro que está formado por parejas de vértices, llamado conjunto de *aristas*.

Un *mapeo* es una gráfica encajada en una variedad bidimensional compacta orientada de modo que sus aristas no se intersecan entre sí y que el complemento de la gráfica en la superficie es la unión disjunta de regiones homeomorfas a discos abiertos. A esas regiones se les conoce como *caras* del mapeo. El grado de un vértice se define como el número de aristas incidentes en él y el grado de una cara es el número de aristas que la rodean [18].

Un *hipermapeo* es un mapeo de dos colores. Es decir, sus vértices están coloreados (blancos y negros) de modo que vértices adyacentes (que se conectan por una arista) tienen colores opuestos.

Es claro que dado un mapeo siempre es posible construir un hipermapeo por medio de la inserción de un vértice del color opuesto en el punto medio de cada arista.

<sup>14</sup>En la literatura sobre el tema, incluso en lengua inglesa, se ha conservado el nombre en francés, se seguirá esa convención.

### 1.5.2. Funciones de Belyi

Entenderemos como superficie de Riemann a una variedad sobre  $\mathbb{C}$  de dimensión uno, o visto de otra manera, como una variedad real de dimensión dos. Ejemplos de estas superficies son la esfera, el toro o muchas extensiones de dominio de funciones de variable compleja [19]. Una superficie de Riemann de particular interés es la *esfera de Riemann* o plano complejo extendido, que denotaremos por  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Si consideramos una función racional  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  que tiene la propiedad de que para casi todo valor  $p \in \bar{\mathbb{C}}$ , la ecuación  $f(z) = p$  tiene  $n$  raíces diferentes, decimos que tiene grado  $n$ . Los valores  $p$  para los cuales  $f(z) = p$  tiene menos de  $n$  raíces (es decir, que algunas están repetidas), se denominan *valores críticos*, mientras que las raíces repetidas de esa ecuación son llamadas *puntos críticos*.

Decimos que  $f$  es una *función de Belyi* si sus valores críticos están en el conjunto  $\{0, 1, \infty\}$ . Si en particular, todos los puntos  $z$  tales que  $f(z) = 1$  son puntos críticos de grado dos, decimos que  $f$  es una función de Belyi *limpia*; si este es el caso, el conjunto  $f^{-1}(\{1, \infty\})$  es un mapeo plano, mientras que para una función de Belyi arbitraria es una hipermapeo plano.

Un aspecto de particular relevancia es que hay una relación entre mapeos y funciones de Belyi [18]. Los vértices del mapeo son los puntos de  $f^{-1}(\infty)$  y su grado es igual a la multiplicidad de la correspondiente raíz de la ecuación  $f(z) = \infty$ . Por otro lado, como las aristas abiertas del mapeo son intervalos disjuntos del conjunto  $f^{-1}(\{1, \infty\})$ , entonces cada arista tiene una raíz de la ecuación  $f(z) = 1$  y denominamos a este punto como *punto medio* de la arista. Finalmente, dentro de cada cara hay una raíz de la ecuación  $f(z) = 0$  y tiene multiplicidad igual al grado de la cara. A este punto lo llamamos *centro* de la cara. Fuera de los anteriores, no hay más puntos críticos para estas funciones.

Existe un teorema que garantiza la existencia y unicidad de la función de Belyi para cada hipermapeo salvo por una transformación lineal fraccional de la variable  $z$ . Este teorema (conocido como teorema de existencia de Riemann) funciona incluso si hay aristas múltiples, bucles así como vértices de grado 1 y 2. El único requerimiento es conexidad de la gráfica.

Ese mismo mapeo puede dibujarse en el plano de infinitas maneras, pero se distingue entre ellas la dada por la preimagen del segmento  $\{1, \infty\}$  vía la correspondiente función de Belyi del mapeo. Esta manera particular se llama *dessin d'enfant* del mapeo.

Si se piensa en el caso de poliedros, la preimagen de la función de Belyi parte en cero de un poliedro y termina en el poliedro dual<sup>15</sup> (en infinito). Primero lleva los vértices con cierta multiplicidad a los puntos medios de las aristas del poliedro y después los mapea a los centros de las caras, esto implica que la configuración final tiene vértices en los centros de las caras de la configuración inicial y por lo tanto la función de Belyi generó el poliedro dual. Por esta razón, si  $f$  es la función de Belyi asociada a un poliedro,  $1/f$  es la función de Belyi correspondiente al dual de éste.

El cálculo de estas funciones es muy complicado, pero para algunos casos con mucha simetría ha sido posible hallarlas. Para los sólidos platónicos [20] y los arquimídeos [18] han sido todas calculadas.

La teoría de *dessins d'enfants* recientemente ha tenido interés en aplicaciones en física matemática [21] y en particular, se tiene interés en posibles relaciones que puedan existir entre los estados de espín, las funciones de Belyi y los *dessins d'enfants*.

---

<sup>15</sup>El dual de un poliedro es otro poliedro que tiene vértices en los centros de las caras del poliedro original y centros de cara en los vértices del poliedro inicial.



## Capítulo 2

# Propiedades de los estados platónicos y arquimídeos

---

### 2.1. Estados platónicos y arquimídeos de espín

Con la representación estelar podemos estudiar estados de espín que tengan cualquier configuración de estrellas de Majorana, en particular, estamos interesados en entender las propiedades de estados cuánticos cuya representación estelar es el conjunto de vértices de un sólido platónico o arquimídeo proyectado en la esfera unitaria. Definiremos un *estado platónico* de espín<sup>16</sup>, como aquel estado cuya representación estelar sea el conjunto de vértices de un poliedro regular, mientras que un *estado arquimídeo* será un estado de espín que tenga una constelación que describa los vértices de un sólido arquimídeo.

---

<sup>16</sup>En la literatura este tipo de estados son llamados *estados perfectos* [11], dado que a los sólidos platónicos también se les conoce como *sólidos perfectos*.



En el caso de los estados platónicos hay diversos estudios [22, 23, 24, 25] sobre propiedades interesantes de estos estados en información cuántica, ya que son propuestos como estados cuánticos que presentan un alto nivel de enredamiento. También en [11] se encuentra que todos los estados platónicos son anticoherentes y además que presentan órdenes de anticoherencia muy particulares. Estas relaciones fueron explicadas en [14] utilizando la propiedad que tienen los sólidos platónicos de ser diseños esféricos.

Por otro lado, la literatura sobre estados arquimídeos es inexistente. En esta investigación exploramos, en analogía con los estados platónicos, algunas propiedades interesantes de este tipo de estados cuánticos, los cuales son candidatos para aplicaciones a futuro, al igual que los platónicos, por sus privilegiadas propiedades de simetría. En general, se estudiarán propiedades de los estados cuya representación estelar corresponde a uno de los 13 sólidos arquimídeos, excluyendo prismas, antiprismas y el pseudorombicuboctaedro.

Cabe mencionar que la aparición en la física de este tipo de sólidos no está restringida al contexto de estados de espín anticoherentes. En cristalografía y en física molecular los sólidos platónicos y arquimídeos han sido ampliamente estudiados, de hecho, desde hace cientos de años se conocían cristales que tenían la forma de algunos de estos sólidos [8]. En electromagnetismo, algunos de los sólidos platónicos son solución al problema de Thomson [26], el cual consiste en buscar configuraciones de cargas eléctricas iguales (puntuales) que minimicen la energía potencial al estar constreñidas a permanecer en una esfera con interacción coulombiana. Las referencias [27, 10, 28, 29] muestran algunos ejemplos de aplicaciones físicas de sólidos platónicos y arquimídeos.

A continuación, se muestran los estados (no normalizados) provenientes de una constelación descrita por un sólido platónico con una estrella por vértice, esto se encuentra reportado en la literatura, por ejemplo en [30]<sup>17</sup>:

En el apéndice B se encuentran los vectores en el correspondiente espacio de espín  $j$  (normalizados) de todos los estados platónicos y arquimídeos. El cálculo fue realizado con el programa que se muestra en ese mismo apéndice.

---

<sup>17</sup>Es importante notar que sólo se está considerando un representante posible de cada sólido, más adelante, se verá que muchas de las propiedades de nuestro interés son esencialmente invariantes ante rotaciones de la constelación.

Sólido	Estado de espín
Tetraedro	$ 2, -2\rangle + \sqrt{2} 2, 1\rangle$
Octaedro	$ 3, -2\rangle -  3, 2\rangle$
Cubo	$ 4, -4\rangle + \sqrt{\frac{14}{5}} 4, 0\rangle +  4, 4\rangle$
Dodecaedro	$ 10, -10\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} 10, -5\rangle + \sqrt{\frac{6}{5}} 10, 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} 10, 5\rangle -  10, 10\rangle$
Icosaedro	$ 6, -5\rangle + \sqrt{\frac{11}{7}} 6, 0\rangle +  6, 5\rangle$

Tabla 2.1: Estados platónicos de espín.

## 2.2. Relación entre simetría de constelaciones de Majorana y anticoherencia

### 2.2.1. Simetría y forma de los estados cuánticos

Cuando se tienen constelaciones de Majorana en configuraciones invariantes ante ciertas operaciones de simetría, los estados de espín quedan restringidos a tener relaciones entre los coeficientes de expansión del estado cuántico, como se mostrará a continuación. Esto además de constituir una interesante relación entre simetría y anticoherencia de estados cuánticos. Las relaciones entre los coeficientes pueden apreciarse de manera simple en la base de Dicke, la cual es presentada en lo que sigue: Un estado puro simétrico de  $N$  qubits  $|\psi_s\rangle$  puede escribirse como:

$$|\psi_s\rangle = \sum_{k=0}^N d_k |D_N^{(k)}\rangle,$$

donde los estados de Dicke son una base de estados simétricos y ortogonales dados por

$$|D_n^{(k)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_N^k}} \sum_{\sigma} |\underbrace{0, \dots, 0}_{N-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k\rangle$$

donde  $k = 0, \dots, N$  es el número de unos, la suma corre sobre todas las permutaciones de los qubits,  $C_N^k$  denota al coeficiente binomial.

Simetría	Constricciones sobre los coeficientes del estado
$r_n$	$d_k = 0 \forall k \neq n_S(\text{mod } n)$
$\sigma_h$	$n_N = n_S, \exists \xi \in \mathbb{R} : d_{N-k} = e^{i\xi} d_k^* \forall k$
$\sigma_v$	$d_k \in \mathbb{R} \forall k$
$\sigma_d$	$d_k = \pm  d_k  e^{\frac{ik\pi}{n}} \forall k$
$\sigma_h \sigma_v$	$d_{N-k} = d_k \text{ o } d_{N-k} = -d_k \forall k$
$s_n$	$d_k = 0 \forall k \neq n_S(\text{mod } n) \text{ y } d_{N-k} = (-1)^q e^{i\xi} d_k^* \text{ e.o.c.}$

Tabla 2.2: Efectos de simetrías de la constelación en la forma del estado

Hay una correspondencia entre esta base y la estándar para espín  $j$ , puesto que  $|D_n^{(k)}\rangle \rightarrow |\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - k\rangle$  y  $|j, m\rangle \rightarrow |D_{2j}^{(j-m)}\rangle$ . En la tabla 2.2 se observa que cada tipo de simetría en la constelación tiene consecuencias específicas en la forma de los coeficientes de expansión de los estados en el espacio de Hilbert; esta tabla resume algunos resultados de [5] escritos en la base de Dicke.

Se denotará por  $n_S$  el índice del primer coeficiente de Dicke no nulo y por  $N - n_N$  el último. Para estados expresados en la base de Dicke el polinomio de Majorana toma la forma siguiente:

$$P(z) = \sum_{k=n_S}^{N-n_N} (-1)^k \sqrt{\frac{N!}{(N-k)! k!}} d_k z^k, \quad (2.1)$$

la cual también puede escribirse de la forma

$$P(z) = (-1)^{N-n_N} \sqrt{\frac{N!}{(N-n_N)! n_N!}} d_{N-n_N} z^{n_S} \prod_{k=1}^{N-n_N-n_S} (z - z_k). \quad (2.2)$$

La manera en la que los autores de [5] llegaron a esos resultados fue la siguiente: primero observaron el efecto que tenía la operación de simetría en cada una de las estrellas en el plano complejo, después esto conduce ciertas relaciones entre los coeficientes del polinomio de Majorana entre las estrellas antes y después de la operación de simetría. Como ejemplo de esta técnica, demostremos que en el caso de una simetría bajo rotaciones  $r_n$ , es decir, rotaciones alrededor del eje  $z$  por un ángulo  $2\pi/n$ , la relación entre los coeficientes del estado en la base de Dicke es la que se muestra en la

tabla anterior.

Bajo una rotación  $r_n$  un punto  $z \in \mathbb{C}$  es mapeado al punto  $ze^{-2i\pi/n}$ . Si una constelación es invariante ante tal rotación entonces:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{N-n_N-n_S} (z - z_k) &= \prod_{k=1}^{N-n_N-n_S} (z - z_k e^{-2i\pi/n}) \\ &= e^{-\frac{2i\pi}{n}(N-n_N-n_S)} \prod_{k=1}^{N-n_N-n_S} (ze^{\frac{2i\pi}{n}} - z_k) \end{aligned}$$

Usando la ecuación 2.2 se observa que

$$P(z) = e^{-\frac{2i\pi}{n}(N-n_N)} P(ze^{\frac{2i\pi}{n}}).$$

Por medio de la ecuación 2.1 es posible identificar los términos correspondientes a los coeficientes de expansión en ambos lados de la ecuación anterior, obteniéndose que para toda  $k$  tal que  $n_S \leq k \leq N - n_N$ ,

$$d_k = e^{-\frac{2i\pi}{n}(N-n_N-k)} d_k.$$

Esta condición se cumple si  $k = N - n_N + qn$  con  $q \in \mathbb{N}$ . Por la simetría,  $N - n_N - n_S$  debe ser un múltiplo de  $n$ , lo que implica que  $k = n_S \pmod{n}$ .

Los resultados de la tabla 2.2 sirven para entender la forma de los estados platónicos y arquimídeos.

**Ejemplo.** Simetrías en los coeficientes de expansión del estado cuántico correspondiente a una constelación de Majorana dada por los vértices del cubo  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  proyectado en la esfera.

Al ser el cubo un poliedro con 8 vértices, y asumiendo una estrella por vértice, se tendrá un estado cuántico de espín  $j = 4$ . Por lo que un estado así tiene la forma genérica

$$|\psi_{cubo}\rangle = \sum_{k=-4}^4 \alpha_k |4, k\rangle.$$

El cubo que estamos utilizando es invariante ante rotaciones por un ángulo  $\pi/2 = 2\pi/4$  alrededor

del eje  $z$ , por lo que  $r_4$  es una simetría de este cubo. Usando la tabla 2.2 se concluye que el estado cuántico sólo tendrá elementos distintos de cero espaciados por grupos de 3 ceros, entonces como  $n_S = 1$  el estado del cubo sólo puede ser de la forma

$$|\psi_{cubo}\rangle = \alpha_{-4}|4, -4\rangle + \alpha_0|4, 0\rangle + \alpha_4|4, 4\rangle ,$$

pero como el cubo también es simétrico respecto al plano vertical  $xz$  entonces esos  $\alpha_k$  deben ser números reales. Finalmente, el hecho de que el cubo también sea invariante ante la operación de simetría  $\sigma_h\sigma_v$  (rotación por un ángulo  $\pi$  alrededor del eje  $x$ ) implica que sucede una de las igualdades:  $\alpha_{-4} = \pm\alpha_4$ . En el caso del cubo  $\alpha_{-4} = \alpha_4$  y este breve análisis nos permite entender por qué el estado cuántico correspondiente a los vértices de un cubo tiene la forma antes calculada:

$$|\psi_{cubo}\rangle = |4, -4\rangle + \sqrt{\frac{14}{5}}|4, 0\rangle + |4, 4\rangle .$$

Este tipo de análisis nos ayuda a explicar los resultados de la tabla 2.1 y del apéndice B.

### 2.2.2. Simetrías y orden de anticoherencia

Con el programa que se encuentra en el apéndice C se logró determinar que todos los estados platónicos y arquimídeos son estados de espín anticoherentes y se determinó el orden de anticoherencia en cada caso (con errores acotados a  $10^{-8}$ ). El procedimiento que se sigue puede verse en el ejemplo que realizamos sobre la anticoherencia del cubo.

Al calcular el orden de anticoherencia para todos los estados platónicos y arquimídeos es fácil apreciar una relación entre el grupo de simetrías del poliedro y dicho orden de anticoherencia.

Las tablas siguientes muestran a los sólidos estudiados (platónicos y arquimídeos en cada caso) con su orden de anticoherencia, también se menciona el espín de la constelación y el grupo de simetrías que le corresponde. Los grupos de simetría de cada poliedro se consultaron en [21].

Los estados que tienen el grupo de simetría tetraédrico tienen un orden de anticoherencia 2, mientras que los estados platónicos o arquimídeos con orden de anticoherencia 3 y 5 corresponden

Sólido	Espín	Orden de anticoherencia	Grupo de simetría
Tetraedro	2	2	$T_d$
Octaedro	3	3	$O_h$
Cubo	4	3	$O_h$
Dodecaedro	10	5	$I_h$
Icosaedro	6	5	$I_h$

Tabla 2.3: Orden de anticoherencia en sólidos platónicos.

Sólido	Espín	Orden de anticoherencia	Grupo de simetría
Cuboctaedro	6	3	$O_h$
Rombicosidodecaedro mayor	60	5	$I_h$
Rombicuboctaedro mayor	24	3	$O_h$
Icosidodecaedro	15	5	$I_h$
Rombicosidodecaedro menor	30	5	$I_h$
Rombicuboctaedro menor	12	3	$O_h$
Cubo romo	12	3	$O$
Dodecaedro romo	30	5	$I$
Cubo truncado	12	3	$O_h$
Dodecaedro truncado	30	5	$I_h$
Icosaedro truncado	30	5	$I_h$
Octaedro truncado	12	3	$O_h$
Tetraedro truncado	6	2	$T_d$

Tabla 2.4: Orden de anticoherencia en sólidos arquimídeos.

a sólidos con grupo de simetría octaédrico e icosaédrico, respectivamente.

En [14] se presenta un teorema que relaciona grupos de simetría y orden de anticoherencia. Se dice que un subgrupo discreto de  $O_3$  es un subgrupo *t-homogéneo* si todas sus órbitas son *t-diseños esféricos*.

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $G$  un subgrupo  $t$ -homogéneo de  $O(3)$ . Entonces, cualquier estado cuya representación de Majorana es una órbita de  $G$  es un estado de espín anticoherente de orden mayor o igual que  $t$ .*

La demostración de este teorema recurre a la teoría de polinomios armónicos. El grupo tetraédrico es 2-homogéneo, el octaédrico es 3-homogéneo mientras que el icosaédrico es 5-homogéneo. Con esto, puede verse que en el caso de los sólidos platónicos y arquimídeos se da exactamente la igualdad.

### 2.3. Conexión con *t*-diseños esféricos

Por medio del programa que se muestra en el apéndice D, se verificó el hecho de que los sólidos platónicos son *t-diseños esféricos* (reportado en [14]) y se encontró *t* en cada caso. Asimismo, se ha mostrado aquí que los sólidos arquimídeos son *t-diseños esféricos* y se halló *t* para cada uno de ellos.

En ambos casos, *t* coincide con el orden de anticoherencia para cada uno de los sólidos estudiados. En [14] se tenía la conjetura de que un estado de espín era anticoherente de orden *t* si y solamente si su constelación de Majorana formaba un *t-diseño esférico*. En [31] se demuestra que la conjetura no puede ser cierta, sin embargo, para los estados que estamos estudiando se verifica la veracidad de esta conjetura en este caso particular.

Un problema que hasta el momento queda abierto es el de encontrar las condiciones necesarias para definir completamente la correspondencia entre *t-diseños esféricos* y estados anticoherentes.

## 2.4. Matriz de densidad

Para un estado cuántico puro  $|\psi\rangle$  definimos su matriz de densidad como

$$\rho_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi| .$$

Para un estado  $|\psi\rangle$  de espín  $j$ ,  $\rho_{|\psi\rangle}$  es una matriz de tamaño  $(2j + 1) \times (2j + 1)$ . A pesar de ello, se sabe que la información contenida en esa matriz es equivalente a la contenida en  $|\psi\rangle$ , que queda completamente determinado mediante  $4j$  parámetros reales (se pierde un parámetro por la pérdida de información de fase global al pasar al marco de matriz de densidad y otra por la condición de normalización). Esto implica que en la matriz de densidad hay “información redundante”, y a continuación se justificará que en efecto no se tienen  $2 \times (2j + 1)^2$  parámetros independientes para determinar completamente la matriz de densidad.

Por construcción, la matriz de densidad es el producto de Kronecker de  $|\psi\rangle$  con  $\langle\psi|$ , de modo que las entradas diagonales serán los módulos al cuadrado de los coeficientes de expansión del estado. Como estamos suponiendo que el estado está normalizado, concluimos que:

$$\text{Tr}(\rho_{|\psi\rangle}) = 1 .$$

Como las matrices de densidad son autoadjuntas, las entradas diagonales deben ser reales, esto quita  $2j + 1$  parámetros reales, y por la ecuación para la traza perdemos uno más. Al ser una matriz hermítica (por construcción), basta conocer a la diagonal y a los elementos que están por encima (debajo) de la diagonal para conocer toda la matriz, esto resta el número de parámetros en  $(2j + 1)^2 - 2j - 1$ . Otra propiedad interesante de estas matrices es que son proyectores (en la dirección de  $|\psi\rangle$ ) y por ello, el cuadrado de una matriz de densidad es igual a ella misma, esto es fácil de probar usando la notación de Dirac:

$$\rho_{|\psi\rangle}^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho_{|\psi\rangle} .$$



Simetría	Constricciones sobre la matriz de densidad
$r_n$	$\rho_{ij} = 0 \forall i, j \neq n_S(\text{ mód } n)$
$\sigma_h$	$\rho_{ij} = \rho_{N-j}^*_{N-i}$
$\sigma_v$	$\rho_{ij} = \rho_{ji}$
$\sigma_{d,n}$	$\rho_{kp} = \rho_{pk}^*, k = p + n\alpha$
$\sigma_h\sigma_v$	$\rho_{ij} = \rho_{ji}$
$s_n$	$\rho_{ij} = 0 \forall i, j \neq n_S(\text{ mód } n) \text{ y } \rho_{ij} = \rho_{N-j}^*_{N-i}$

Tabla 2.5: Efectos de simetrías de la constelación en la matriz de densidad.

Si se escribe a la matriz de densidad en una base que contenga a  $|\psi\rangle$  como primer vector, tomará la forma de una matriz cuya entrada 11 es 1 y las restantes cero. Esto hace que haya un bloque de ceros de tamaño  $2j \times 2j$ , lo que significa que ese bloque es invariante ante la acción de elementos de  $U(2j)$  y esto quita  $4j^2$  parámetros. Haciendo la resta obtenemos exactamente  $4j$  como número de parámetros reales independientes necesarios para determinar completamente la matriz de densidad correspondiente a un estado de espín  $j$ .

Así como las simetrías de la constelación dan constricciones sobre la forma de los estados cuánticos, también las dan para la forma de las matrices de densidad asociadas a esos estados. En la tabla siguiente se traducen los resultados de la tabla 2.2 a constricciones sobre las entradas de las correspondientes matrices de densidad, esto es una consecuencia directa de la forma de los estados.

Existe una forma de ver a la anticoherencia de estados de espín directamente en términos de la matriz de densidad, para ello es necesario hacer la expansión de la misma en una base de *armónicos esféricos matriciales*<sup>18</sup>, los cuales serán presentados a continuación.

<sup>18</sup>conocidos en la literatura como *matrices de polarización*.

### 2.4.1. Armónicos esféricos matriciales y un criterio de anticonherencia

Sabemos que en el caso de funciones sobre la esfera podemos hacer una expansión de éstas en una base de armónicos esféricos,  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ , ya que forman una base completa para el espacio de funciones. De manera análoga, para el caso matricial existen  $\hat{Y}_{lm}$ , a los que llamaremos *armónicos esféricos matriciales* y que funcionan como una base para el espacio de matrices  $N \times N$ . De modo que una matriz  $A$  puede expandirse como [32]:

$$A = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \hat{Y}_{lm}^{(j)},$$

donde  $A_{lm} = \text{Tr}(\hat{Y}_{lm}^\dagger)$  y  $\hat{Y}_{lm}^{(j)}$  (exhibiendo que para cada dimensión hay una base distinta) es el armónico esférico matricial  $lm$  para matrices de tamaño  $(2j+1) \times (2j+1)$ , que se define como [33]

$$\hat{Y}_{lm}^{(j)} = \sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}} \sum_{\alpha, \beta=-j}^j C_{j\alpha, lm}^{j\beta} |j, \beta\rangle \langle j, \alpha|$$

donde  $C_{j\alpha, lm}^{j\beta}$  son los coeficientes de Clebsch-Gordan.

Los armónicos esféricos matriciales tienen relaciones de ortogonalidad y algunas propiedades análogas a las de los armónicos esféricos. Tres de estas propiedades son:

- (i)  $\text{Tr}(\hat{Y}_{lm}^\dagger \hat{Y}_{rs}) = \delta_{lr} \delta_{ms}$
- (ii)  $\hat{Y}_{lm} = (-1)^m \hat{Y}_{l-m}^\dagger$
- (iii)  $(\hat{Y}_{lm})_{ij} = (-1)^{l+m} (\hat{Y}_{l-m})_{N-j, N-i}$

El siguiente teorema proporciona un criterio de anticonherencia a partir de la expansión de la matriz de densidad  $\rho$  en la base de armónicos esféricos matriciales [34]. Expandiendo  $\rho$ , la matriz

de densidad correspondiente a un estado de espín  $j$  se obtiene que:

$$\rho = \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l \xi_{lm} \hat{Y}_{lm}^{(j)}.$$

**Teorema 2.4.1.** *Un estado de espín  $j$  cuya matriz de densidad es  $\rho$  es anticoherente de orden  $t$  si y sólo si  $\xi_{lm} = 0, \forall l \leq t, \forall m -l \leq m \leq l$ .*

**Ejemplo.** Matriz de densidad del estado octaédrico.

Como un ejemplo del teorema 2.4.1, podemos ver que el estado de espín correspondiente a la constelación que configura el octaedro con conjunto de vértices

$$\{(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$$

es anticoherente de orden tres porque en la expansión de su matriz de densidad en armónicos esféricos matriciales no aparecen términos con  $l = 1, 2, 3$ , a saber:

$$\rho_{|\psi_{oct}\rangle} = \frac{1}{\sqrt{7}} \hat{Y}_{0,0} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{11}} (\hat{Y}_{4,4} + \hat{Y}_{4,-4}) - \sqrt{\frac{7}{22}} \hat{Y}_{4,0} + \sqrt{\frac{3}{22}} (\hat{Y}_{6,4} + \hat{Y}_{6,-4}) - \sqrt{\frac{3}{77}} \hat{Y}_{6,0}$$

## 2.4.2. Simetrías de la matriz de densidad en términos de armónicos esféricos matriciales

Como sabemos, las simetrías de la constelación en el espacio tridimensional inducen relaciones entre los coeficientes de expansión de un estado cuántico y a su vez, en la correspondiente matriz de densidad. En esta sección veremos brevemente las consecuencias particulares de esas simetrías en los coeficientes de expansión en armónicos esféricos matriciales. Esas relaciones quedan resumidas en la tabla siguiente.

Para demostrar que esto se cumple usaremos las relaciones de los armónicos esféricos matriciales y los resultados de la tabla 2.5.

- (i) Escribamos a la matriz de densidad como  $\rho = \sum_{l,m} \xi_{lm} \hat{Y}_{lm}$ , si queremos que el resultado sea

Simetría	Constricciones sobre los coeficientes de expansión $\xi_{lm}$
$r_n$	$\rho_{ij} = 0 \forall i, j \neq n_S \pmod{n}$
$\sigma_h$	$\xi_{lm} = (-1)^{l+m} \xi_{lm}^*$
$\sigma_v$	$\xi_{lm} \in \mathbb{R}$ y $\xi_{lm} = (-1)^m \xi_{l-m}$
$\sigma_{d,n}$	$\xi_{l,l+kn} = \xi_{l+kn,l}$
$\sigma_h \sigma_v$	$\xi_{lm} = (-1)^m \xi_{l-m}$
$s_n$	$\xi_{lm} = 0 \forall m \neq n_S \pmod{n}$ y $\xi_{l \ kn_S} = (-1)^{l+kn_S} \xi_{l \ kn_S}^*$

Tabla 2.6: Relación entre simetrías de la constelación y la expansión en armónicos esféricos matriciales

invariante ante una rotación  $r_n$ , entonces

$$\rho' = \sum_{l,m} \xi_{lm} \hat{Y}'_{lm}.$$

En [32] se demuestra que los armónicos esféricos matriciales transforman bajo rotaciones de manera análoga a los armónicos esféricos:

$$\hat{Y}'_{lm} = e^{im\frac{2\pi}{n}} \hat{Y}_{lm}.$$

De este modo, la simetría con respecto a rotaciones  $r_n$  se traduce a pedir que  $e^{im\frac{2\pi}{n}} = 1$ . Para que esto suceda se requiere que  $m = kn$  y por tanto, se obtiene el resultado presentado en la tabla 2.6.

(ii) En el caso en el que la simetría que tiene la constelación es  $\sigma_h$  entonces:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{l,m} \xi_{lm} \hat{Y}_{lm} \\ &= \sum_{l,m} \text{Tr}(\hat{Y}_{lm}^\dagger \rho) \hat{Y}_{lm} \\ &= \sum_{l,m} \sum_{i,j} (\hat{Y}_{lm}^\dagger)_{ij} \rho_{ji} \hat{Y}_{lm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l,m} \sum_{i,j} (-1)^{l+m} (\hat{Y}_{lm}^\dagger)_{N-jN-i} \rho_{N-iN-j}^* \hat{Y}_{lm} \\
&= \sum_{l,m} (-1)^{l+m} \text{Tr}(\hat{Y}_{lm}^\dagger \rho^*) \hat{Y}_{lm} .
\end{aligned}$$

de donde resulta que para que el estado sea invariante ante esa simetría debe cumplirse que

$$\xi_{lm} = (-1)^{l+m} \xi_{lm}^* .$$

(iii) En este caso la matriz de densidad al ser real es una matriz simétrica, es decir,  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ .

Entonces:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{l,m} \xi_{lm} \hat{Y}_{lm} \\
&= \sum_{l,m} \text{Tr}(\hat{Y}_{lm}^\dagger \rho) \hat{Y}_{lm} \\
&= \sum_{l,m} \sum_{i,j} (\hat{Y}_{lm}^\dagger)_{ij} \rho_{ji} \hat{Y}_{lm} \\
&= \sum_{l,m} \sum_{i,j} (-1)^m (\hat{Y}_{l-m}^\dagger)_{ji} \rho_{ij} \hat{Y}_{lm} \\
&= \sum_{l,m} (-1)^m \text{Tr}(\hat{Y}_{l-m}^\dagger \rho) \hat{Y}_{lm} \\
&= \sum_{l,m} (-1)^m \xi_{l-m} \hat{Y}_{lm} .
\end{aligned}$$

Esto demuestra que la simetría  $\sigma_v$  implica que  $\xi_{lm} = (-1)^m \xi_{l-m}$ .

Los casos restantes pueden probarse de manera similar. El ejemplo siguiente permitirá apreciar la aplicación de los resultados que se acaban de demostrar. Las expansiones en armónicos esféricos matriciales que a continuación se muestran fueron calculadas con el paquete *Atomic Density Matrix* de *Mathematica*.

**Ejemplo.** Expansiones de  $\rho_{|\psi_{tet}\rangle}$  y  $\rho_{|\psi_{oct}\rangle}$  en armónicos esféricos matriciales.

Las expansiones para las matrices de densidad correspondientes a los estados tetraédrico y oc-

taédrico son las siguientes:

$$\begin{aligned}\rho_{|\psi_{tet}\rangle} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{Y}_{0,0} + \frac{1}{3}\left(-\hat{Y}_{3,3} + \hat{Y}_{3,-3} - \hat{Y}_{4,3} + \hat{Y}_{4,-3}\right) + \sqrt{\frac{5}{18}}\hat{Y}_{3,0} + \sqrt{\frac{7}{90}}\hat{Y}_{4,0} \\ \rho_{|\psi_{oct}\rangle} &= \frac{1}{\sqrt{7}}\hat{Y}_{0,0} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{11}}\left(\hat{Y}_{4,4} + \hat{Y}_{4,-4}\right) - \sqrt{\frac{7}{22}}\hat{Y}_{4,0} + \sqrt{\frac{3}{22}}\left(\hat{Y}_{6,4} + \hat{Y}_{6,-4}\right) - \sqrt{\frac{3}{77}}\hat{Y}_{6,0}\end{aligned}$$

En el caso del tetraedro, por el teorema 2.4.1 se puede ver que el orden de anticoherencia de este estado es 2 mientras que es 3 para el estado asociado al octaedro, como se ha visto anteriormente. La simetría respecto a rotaciones  $r_3$ , es decir, rotaciones por un ángulo  $2\pi/3$ , en el tetraedro se ve reflejada en el hecho de que sólo hay términos distintos de cero en su expansión para valores de  $m$  que son múltiplos enteros de 3. En el caso de  $|\psi_{oct}\rangle$  se aprecian estos “saltos” de 4 en 4, esto es porque el octaedro es invariante ante la acción de  $r_4$ . En el ejemplo del tetraedro puede notarse que el coeficiente que acompaña a  $\hat{Y}_{3,3}$  es el negativo del que acompaña a  $\hat{Y}_{3,-3}$ , y lo mismo sucede para  $l = 4$ , esto es por la invariancia ante rotaciones alrededor del eje  $x$  por un ángulo  $\pi$ . En el caso del octaedro se aprecia que los términos que acompañan a los armónicos esféricos matriciales  $\hat{Y}_{6,4}$  y  $\hat{Y}_{6,-4}$  son los mismos, al igual que los de  $\hat{Y}_{4,4}$  y  $\hat{Y}_{4,-4}$ , esto se debe a que el octaedro tiene al plano  $xz$  como plano de simetría. De esta forma, es claro que si se conocen simetrías de la constelación, no es necesario calcular explícitamente todos los términos de la expansión.

Un hecho interesante que resulta del ejemplo anterior es que el estado tetraédrico corresponde a espín 2 mientras que el octaédrico a espín 3 y los términos que van con  $\hat{Y}_{0,0}$  son  $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2(2)+1}}$  y  $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{2(3)+1}}$ , respectivamente. La siguiente proposición afirma que para un estado de espín  $j$ , el término 00 en la expansión siempre es  $\frac{1}{\sqrt{2j+1}}$ .

**Proposición 1.** *Toda matriz de densidad correspondiente a un estado de espín  $j$  tiene la forma  $\frac{1}{\sqrt{2j+1}}\hat{Y}_{00} + \dots$ , es decir,  $\xi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}}$ .*

Esto es cierto porque  $\hat{Y}_{00}^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}}\mathbb{I}$ , entonces:

$$\xi_{00} = \text{Tr}(\hat{Y}_{00}^\dagger \rho) = \frac{1}{\sqrt{2j+1}}\text{Tr}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2j+1}}.$$

Otro aspecto interesante que se puede observar en este ejemplo resulta de preguntarse ¿qué pasa

si reemplazo los armónicos esféricos matriciales por armónicos esféricos funcionales?

Lo que se observa, al menos para el caso de los sólidos platónicos, es que la función resultante tiene algunas simetrías heredadas del sólido. De esta manera es posible esbozar, a partir de la expansión en armónicos esféricos matriciales, algunas características generales de la constelación asociada al estado cuya matriz de densidad corresponde a esa expansión. La siguiente gráfica, correspondiente al octaedro, es un ejemplo de esta observación. Nótese la presencia de lóbulos en las direcciones de los vértices del sólido.

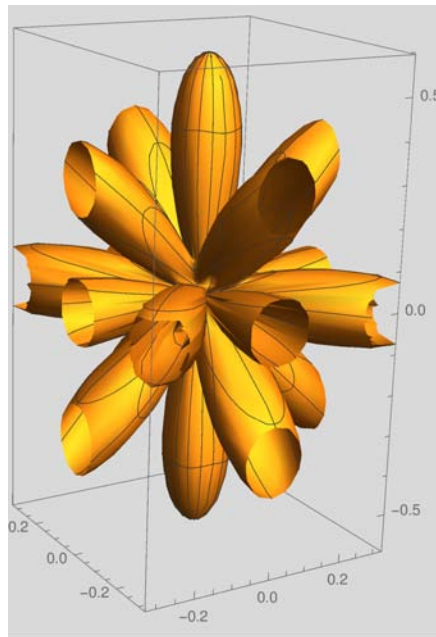


Figura 2.1: Mapeo a armónicos esféricos del estado octaédrico

## 2.5. Aplicaciones de estados anticoherentes

### 2.5.1. Estados sensibles a rotaciones del marco de referencia

Los estados anticoherentes son candidatos a interesantes aplicaciones en el campo de la información cuántica, puesto que son los estados que más distan de un comportamiento clásico. En particular, se ha mostrado que los estados anticoherentes son los mejores para detectar rotaciones de un marco

de referencia [24].

Si tenemos una rotación en el espacio euclidiano tridimensional, ésta puede ser vista como un vector dentro de una esfera (con el interior) de radio  $\pi$  con puntos antipodales identificados, aunque existen en la literatura diferentes maneras de hacer esta visualización [35]. La longitud del vector nos dará información del ángulo de la rotación mientras que la dirección del vector proporciona el eje de la rotación. Otra manera de representar rotaciones es por medio de matrices [36].

El problema que queremos resolver es ¿cuáles son los estados de espín más sensibles a pequeñas variaciones de un marco de referencia? Para ello, consideremos un estado  $|\psi\rangle$  y una rotación por un ángulo pequeño. Entonces nos interesa minimizar la siguiente cantidad:

$$|\langle\psi|R|\psi\rangle|^2,$$

que para el caso de rotaciones por un ángulo pequeño toma simplemente la forma

$$|\langle\psi|1 - \hat{n}^T M \hat{n}|\psi\rangle|^2$$

donde la matriz  $M$  está definida como

$$M_{ij} = \left\langle \psi \left| \frac{S_i S_j + S_j S_i}{2} \right| \psi \right\rangle - \langle \psi | S_i | \psi \rangle \langle \psi | S_j | \psi \rangle$$

Los estados que minimizan  $|\langle\psi|1 - \hat{n}^T M \hat{n}|\psi\rangle|^2$  resultan ser aquellos que además de tener vector de polarización cero, cumplan que  $\Delta S_n^2 = \frac{1}{3}s(s+1)$  (independientemente de la elección de  $\hat{n}$ ) [24, 32]. Por lo tanto, los estados anticoherentes de orden 2 son los más sensibles a rotaciones del marco de referencia.

En [24] se aborda el problema desde una perspectiva de manejo estadístico de la información, llegando al mismo resultado minimizando el inverso de la traza de la matriz de información de Fisher (que es proporcional a la matriz  $M$  por un factor de 4).



### 2.5.2. Anticoherencia y entropía de enredamiento cuántico

Los estados enredados son de gran importancia para la transmisión de información cuántica y han sido un tema de amplio interés desde perspectivas teóricas así como experimentales e incluso filosóficas.

En particular, el concepto de entropía juega un papel fundamental. Existen muchas formas diferentes de dar una entropía de enredamiento asociada a cierto tipo de estados cuánticos, en particular la entropía de von Neumann es una de las más ampliamente usadas en la literatura. Esto se debe a que de alguna manera generaliza [4] el concepto de entropía de Shanon en la teoría clásica de la información [37].

La entropía de enredamiento se define [38] como sigue: Si  $\rho$  es la matriz de densidad asociada a un sistema mixto (que puede descomponerse en A y B) y  $\rho_A = tr_B \rho$  la matriz de densidad reducida de A, obtenida trazando la parte del sistema correspondiente al complemento B, entonces la entropía de enredamiento de A se define como la entropía de von Neumann, es decir:

$$S_A = -tr(\rho_A \log \rho_A) .$$

Esta misma idea se puede generalizar para un número arbitrario de qubits.

Una definición equivalente de la anticoherencia dice que la matriz de densidad reducida  $\rho_t$  debe ser proporcional a la identidad [5], es decir, debe ser una matriz de tamaño  $(t + 1) \times (t + 1)$ . Visto de otra manera, un estado es  $t$ -anticoherente si y sólo si su matriz de densidad reducida es

$$\rho_t = \frac{\mathbb{I}_{t+1}}{t + 1} .$$

Por esto, la búsqueda de estados anticoherentes es importante, puesto que son estados cuánticos que maximizan la entropía de enredamiento entre los estados simétricos para cualquier bipartición  $(t, N - t)$  de  $N$  qubits.

Esa entropía es máxima porque por definición es cero para estados puros y en el caso de un sistema

de  $N$  qubits, el máximo  $\log N$  se alcanza para el estado más enredado que corresponde al que tiene la matriz de densidad  $\text{flhbbI}/N$ .

## 2.6. Estados platónicos y arquimídeos y funciones de Belyi

Como se discutió en el capítulo 1, la función de Belyi de un poliedro nos ayuda al igualarla a un parámetro (que corre de cero a infinito) ver el paso de un poliedro a su dual. Los duales de los sólidos platónicos son nuevamente los sólidos platónicos: el dual del cubo es el octaedro, el dual del icosaedro es el dodecaedro y el tetraedro tiene la propiedad de ser autodual. Por otro lado, los duales de los sólidos arquimídeos forman una nueva categoría de sólidos, conocidos como *sólidos de Catalan*, en honor al matemático francés E. Catalan, que los describió por primera vez. Con el mismo programa que se muestra en el apéndice B se puede observar que todos los sólidos de Catalan son estados de espín anticoherentes.

Las funciones de Belyi en este contexto son importantes ya que a partir de ellas se pueden construir ejemplos de funciones que toman un estado anticoherente (para un valor inicial del parámetro) y dan como resultado otro estado anticoherente (cuando el parámetro llega a infinito). Una posible pregunta es ¿las funciones de Belyi mapean estados anticoherentes en otros estados anticoherentes siendo anticoherentes en todo el camino? La respuesta a esta propuesta es negativa, para ello consideremos el caso del cubo.

La función de Belyi para el cubo es [39]:

$$f(z) = -108 \frac{(z^4 + 1)^4 z^4}{(z^8 - 14z^4 + 1)^3} .$$

Cuando  $f(z) = 0$  se obtiene  $(z^4 + 1)^4 z^4 = 0$ , que es un polinomio cuyas raíces son los vértices del cubo. En infinito, las raíces obtenidas corresponden a los vértices del octaedro (el dual del cubo) pero en  $f(z) = 1$  se obtiene un polinomio cuyas raíces no corresponden a un estado anticoherente.

Otro aspecto interesante a considerar es si la construcción que puede hacerse con las funciones de Belyi preserva el orden de anticoherencia entre el estado de partida y el estado final. En el caso de los sólidos platónicos esto es cierto ya que el tetraedro (2-anticoherente) es mapeado a él mismo, un estado 2-anticoherente, el cubo (con orden de anticoherencia 3) va al octaedro, que tiene el mismo orden de anticoherencia y finalmente el icosaedro y el dodecaedro también comparten orden de anticoherencia (5). Para los sólidos de Arquímedes se puede observar que la función de Belyi preserva anticoherencia salvo en un caso excepcional: el *triaquistetraedro* (sólido dual del tetraedro truncado). En este caso es fácil calcular que el tetraedro truncado es 2-anticoherente mientras que el triaquistetraedro es 3-anticoherente. Un hecho conocido de los sólidos arquimídeos es que comparten el grupo de simetría con sus duales, entonces el tetraedro truncado y el triaquistetraedro tienen simetría tetraédrica. Por lo tanto, en este caso se da la desigualdad prevista en el teorema 2.2.1 y es el único caso apreciable en los estados platónicos y arquimídeos.

Un hecho interesante que eventualmente podría estar relacionado con este caso excepcional es que se muestra que el tetraedro truncado es el único sólido arquimídeo *trivalente*<sup>19</sup>. Esta excepción también se traduce en términos de grupos de Hecke y es discutido en el mismo artículo. En la figura siguiente se puede apreciar de manera clara cuáles vértices fueron sustituidos por un triángulo para conformar la gráfica plana correspondiente al tetraedro truncado exhibiendo su propiedad de trivalencia<sup>20</sup>.

<sup>19</sup>Por trivalente se quiere decir que el *dessin d'enfant* asociado al sólido puede verse como un *dessin* de dos colores de vértices y reemplazando todos los vértices de un color por un polígono.

<sup>20</sup>La imagen fue tomada de [40].

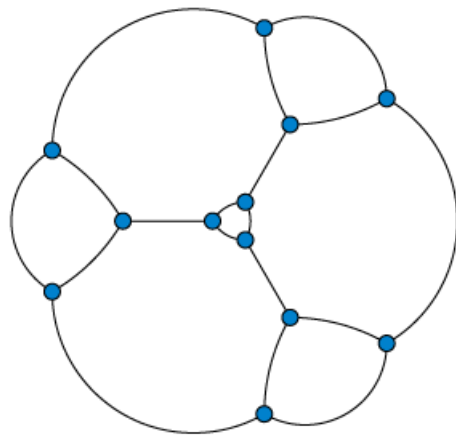


Figura 2.2: Trivalencia del tetraedro truncado



# Capítulo 3

## Discusión

---

El uso de constelaciones de Majorana es un elemento clave para el estudio geométrico de propiedades de estados cuánticos de espín, dado que permite aprovechar la geometría propia de las configuraciones estelares. En nuestro caso, esta representación permitió incorporar las conocidas simetrías de los sólidos arquimídeos al estudio de propiedades de estados cuánticos anticoherentes.

En analogía con lo observado en la literatura para sólidos platónicos, hemos demostrado que los estados arquimídeos son estados de espín anticoherentes. Es decir, cuando la constelación de Majorana corresponde al conjunto de vértices de un sólido arquimídeo, el estado cuántico es un estado anticoherente. Esto se demostró colocando una estrella por vértice del sólido, sin embargo, se observa que para estrellas con multiplicidad arbitraria esto ocurre, mientras se coloque el mismo número de estrellas en un mismo punto para cada vértice; si las multiplicidades de estrellas entre los vértices difieren, en general no se tendrá un estado anticoherente, lo cual se puede demostrar calculando el valor esperado de  $\vec{S}$ .

La observación anterior es consistente con la posible dualidad entre estados anticoherentes y los

diseños esféricos, ya que la propiedad de ser diseño esférico es invariante ante la colocación de  $k$  estrellas en cada vértice, lo cual es claro a partir de la definición:

$$\frac{1}{\text{vol}(\mathcal{S}^2)} \int_{\mathcal{S}^2} p(x) dx = \frac{1}{km} \sum_{r=1}^{km} p(x_r) = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m p(x_r) .$$

Al estudiar a los estados arquimídeos se ha notado que sus constelaciones funcionan como ejemplos de  $t$ -diseños esféricos y se exhibe que, como en el caso de los estados platónicos,  $t$  coincide con el orden de anticoherencia del estado cuántico así como con el grupo de simetría correspondiente (2 para poliedros con simetría tetraédrica, 3 para octaédrica y 5 para icosaédrica). A pesar de saber que en el caso general esta relación no es válida [31], es interesante ver que la correlación es perfecta para todos los sólidos arquimídeos.

Como puede verse en el apéndice A, los estados cuánticos que provienen de los diferentes sólidos estudiados poseen simetrías en cuanto a los coeficientes de expansión en la base usual para el espacio de Hilbert de dimensión  $2j + 1$ . Esto se explica porque una simetría en la constelación se refleja en una simetría en el estado cuántico, entonces al tener estados cuánticos que son representados por constelaciones con muchas simetrías se espera que dichos estados cuánticos tengan riqueza en simetría, esto es así porque para determinar los coeficientes de expansión del estado, se debe construir un polinomio de Majorana con las raíces que provienen de la proyección estereográfica de la constelación, pero tal proyección no pierde la simetría tridimensional de ésta.

Como se prueba en [24], los estados anticoherentes son los óptimos para detectar rotaciones del marco de referencia, en particular, los estados arquimídeos podrían tener esa aplicación al ser estados anticoherentes.

A lo largo de este trabajo también se exploraron algunas otras ideas que se presentan en la literatura relacionadas con relaciones y propiedades de estados platónicos. En particular, en [11] se menciona que de los veinte vértices del dodecaedro se pueden agrupar 5 subconjuntos de 4 vértices que forman 5 diferentes tetraedros, los cuales forman una base ortogonal para el espacio de Hilbert de espín 2. Esto es un hecho interesante y hemos demostrado que para el caso del octaedro ocurre un hecho similar: De los 6 vértices es posible extraer 3 subconjuntos de dos vértices que forman

una base para el espacio de espín 1. Desafortunadamente, también se ha podido apreciar que en el caso general no siempre es posible extraer  $n$  subconjuntos de  $n - 1$  estrellas en un estado de espín  $\frac{n(n-1)}{2}$  que formen una base ortogonal del espacio de espín  $(n - 1)/2$ . El icosaedro y el cuboctaedro son ejemplos de que esto no se puede generalizar a los arquimídeos ni a los platónicos.

De lo anterior, podemos puntualizar que un problema interesante es el de la clasificación de todas las constelaciones de Majorana que, en analogía con los sólidos arquimídeos, cumplan la correlación entre orden de anticonherencia, su grado como diseño esférico y su grupo de simetría discreto.

Otro problema abierto de interés en este contexto es el de encontrar la relación exacta entre los conceptos mencionados en el párrafo anterior. En este contexto, el trabajo de [31] es el más cercano, al dar una condición equivalente a la de ser  $t$ -anticonherente en términos de permutaciones.

Otro aspecto a considerar es lo que sucede para los poliedros duales. Podemos notar que, en este caso, los sólidos platónicos y sus duales comparten el orden de anticonherencia, el grado como esquema esférico, así como el grupo de simetría.

Se estudió la posible existencia de una relación de este tipo entre los sólidos arquimídeos y sus duales (conocidos en la literatura como *sólidos de Catalan*) y se encontró que esta relación no prevalece. Se piensa que este problema puede tener relación con la teoría de Dessins d'enfants puesto que también el triaquistetraedro tiene un papel excepcional en esa teoría, al ser el único sólido arquimídeo trivalente.

Autores como [14] han encontrado otras relaciones menos generales para el orden de anticonherencia y el grado como diseño esférico de ciertas constelaciones. Un hecho conocido [41] es la inexistencia de estados de espín anticonherentes de orden 2 para espín  $1/2, 1, 3/2$  y  $5/2$ , lo cual coincide con la inexistencia de 2-diseños esféricos para 1, 2, 3 y vértices. También demostraron que las estrellas de Majorana de un 1-diseño esférico no pueden estar todas en un mismo hemisferio. Lo mismo fue probado para las estrellas de estados 1-anticonherentes.

Otra pregunta interesante que podría ser de interés para entender la naturaleza del concepto de anticonherencia es ¿qué mapeos entre constelaciones preservan el orden de anticonherencia? Sabemos que si rotamos una constelación correspondiente a un estado de espín  $t$ -anticonherente, la nueva



configuración de las estrellas nos dará un estado anticoherente del mismo orden. Nos preguntamos si una transformación genérica de Möbius podría generalizar este resultado para rotaciones y el resultado es negativo, como contraejemplo tómesese la constelación correspondiente al tetraedro y la transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{z + 2}{3z + 7}.$$

A pesar de este resultado, se ha visto que puede existir alguna relación entre transformaciones de Möbius y estados anticoherentes [42].

A diez años de la introducción del concepto de anticoherencia es un hecho que el campo de la clasificación de los estados de espín anticoherentes es un tema activo en la investigación actual, por su interés intrínseco así como en posibles aplicaciones que puedan desarrollarse utilizando las propiedades especiales que tienen estos estados, donde los estados arquimídeos son un ejemplo concreto.

### 3.1. Trabajo a futuro

A lo largo de esta tesis se han presentado varias ideas que no han sido exploradas, pero no por ello son menos interesantes. A continuación quiero puntualizar algunos temas abiertos en el campo que me parecen interesantes para la continuación de este trabajo:

- (i) Clasificar completamente los poliedros que tengan la propiedad de que su orden de anticoherencia coincida con su grado como diseño esférico.
- (ii) Para estudiar la anticoherencia de manera sistemática usando armónicos esféricos matriciales es necesario encontrar una fórmula general para la expansión de  $(\hat{n} \cdot \vec{S})^k$  en esta base. Para espín 1/2 hemos encontrado tal fórmula. Para  $k$  par:

$$(\hat{n} \cdot \vec{S})^k = \frac{1}{2^k} \mathbb{I},$$

mientras que para  $k$  impar:

$$\left(\hat{n} \cdot \vec{S}\right)^k = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2^{k-1}} \left(Y_{1,1}^* \hat{Y}_{1,1} + Y_{1,0}^* \hat{Y}_{1,0} + Y_{1,-1}^* \hat{Y}_{1,-1}\right) .$$

- (iii) Estudiar las relaciones entre estados de espín arquimídeos y sus correspondientes funciones de Belyi y dessins d'enfants. Explicar qué es lo que hace al tetraedro truncado (o bien, a su dual, el triaquistetraedro) un sólido excepcional en los diferentes sentidos que exploramos.
- (iv) Estudiar aplicaciones de los diseños esféricos en otros campos de la física. Como antecedente se tiene el problema de electromagnetismo del que se habló anteriormente, pero también se han visto aplicaciones en ciencia de materiales [43]. En esta dirección existen teoremas que puede tener potenciales aplicaciones en física [15] y que sería interesante explorar.
- (v) Explorar nuevas definiciones del concepto de anticoherencia. La definición original sólo incluye la pérdida de información direccional a segundo orden pero podría buscarse extender esta definición, esto es un hecho que puede estar relacionado con la expansión en armónicos esféricos matriciales de  $\left(\hat{n} \cdot \vec{S}\right)^k$ .



# Apéndices



# Apéndice A

## La proyección estereográfica

---

En este apéndice demostraremos la fórmula de la proyección estereográfica desde el polo sur así como la transformación inversa.

El polo sur tiene coordenadas cartesianas  $(0, 0, -1)$ . Buscamos las coordenadas cartesianas de un punto en la esfera sabiendo que en el plano complejo tiene coordenadas  $(X, Y)$ .

El rayo que une al polo sur con el punto  $(X, Y)$  en el plano tiene la siguiente ecuación paramétrica:

$$\mathcal{L} : (0, 0, -1) + t(X, Y, 1) = (tX, tY, -1 + t) .$$

En particular, sabemos que existe un valor de  $t$  para el cual se cumple que la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto es exactamente 1, para este valor de  $t$  la recta intersecará a la esfera de Riemann. Esto implica que el punto que buscamos es aquel en el que

$$t^2 X^2 + t^2 Y^2 + (t - 1)^2 = 1 ,$$

lo que implica que  $t = \frac{2}{1+X^2+Y^2}$ .

Por lo tanto, las coordenadas del punto en la esfera que corresponde al punto  $(X, Y)$  en el plano son:

$$(x, y, z) = \left( \frac{2X}{1 + X^2 + Y^2}, \frac{2Y}{1 + X^2 + Y^2}, \frac{1 - X^2 - Y^2}{1 + X^2 + Y^2} \right).$$

Por otro lado, si conocemos las coordenadas de un punto en la esfera, digamos  $(x, y, z)$  podemos obtener las coordenadas del punto que le corresponde en el plano vía la proyección estereográfica inversa, para ello hay que escribir la ecuación de la recta que conecta al polo sur con el punto  $(x, y, z)$  y determinar el valor del parámetro correspondiente a la intersección con el plano (esto es cuando la tercera componente es cero). De este modo:

$$\mathcal{L} : (0, 0, -1) + t(x, y, 1 + z),$$

lo que implica que  $t = \frac{1}{1+z}$ . Por lo tanto, las coordenadas de la proyección inversa del punto  $(x, y, z)$  son:

$$(X, Y) = \left( \frac{x}{1 + z}, \frac{y}{1 + z} \right).$$

# Apéndice B

## Estados platónicos y arquimídeos

---

En este apéndice se muestran los estados platónicos y arquimídeos normalizados con los que se trabajó a lo largo de esta investigación. Se indican los coeficientes de expansión del estado desde  $+j$  hasta  $-j$ .

### B.1. Estados platónicos

#### Tetraedro

$$\{0, 0.816497, 0, 0, 0.57735\}$$

#### Octaedro

$$\{0, -0.707107, 0, 0, 0, 0.707107, 0\}$$



**Cubo**

$$\{0.456435, 0, 0, 0, 0.763763, 0, 0, 0, 0.456435\}$$

**Dodecaedro**

$$\{0.315806, 0, 0, 0, 0, -0.578273, 0, 0, 0, 0, 0.362951, 0, 0, 0, 0, 0.578273, 0, 0, 0, 0, 0.315806\}$$

**Icosaedro**

$$\{0, 0.52915, 0, 0, 0, 0, 0.663325, 0, 0, 0, 0, -0.52915, 0\}$$

**B.2. Estados arquimídeos****Cuboctaedro**

$$\{-0.395285, 0, 0, 0, -0.586302, 0, 0, 0, 0.586302, 0, 0, 0, 0.395285\}$$

**Rombicosidodecaedro mayor**

$$\begin{aligned} &\{0.00584379, 0, 0.00150583, 0, 0.027496, 0, 0.027743, 0, 0.0469886, 0, 0.0397604, 0, 0.0282624, \\ &0, 0.0207443, 0, 0.0181188, 0, -0.00931826, 0, 0.0157699, 0, -0.0123251, 0, 0.0285746, 0, -0.0420835, \\ &0, 0.0305668, 0, -0.0223069, 0, 0.0355917, 0, -0.0225519, 0, 0.0232901, 0, -0.00410156, 0.00149866i, \\ &0.00917209 - 0.00245692i, 0.00373614i, -0.00281187 - 0.00528005i, -0.00388347 + 0.0069183i, \\ &0.00905465 - 0.00833173i, -0.0103117 + 0.00903396i, 0.0154313 - 0.00838455i, -0.0237488 + 0.0056507i \\ &0.0554374, -0.0509085 - 0.00867717i, 0.0971897 + 0.0208517i, \\ &0.116495 + 0.0526282i - 0.164644 - 0.0693199i, 0.159285 + 0.0839148i, -0.233431 - 0.0944627i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0.232042 + 0.0995643i, -0.278256 - 0.0987263i, 0.305424 + 0.0925069i, -0.279751 - 0.0823893i, \\
&0.337762 + 0.0704142i, -0.242177 - 0.058676i, 0.237101 + 0.048836i, -0.191316 - 0.0417925i, \\
&0.141301 + 0.0375946i, -0.153363 - 0.0355973i, 0.101342 + 0.0347813i, -0.135522 - 0.0341173i, \\
&0.117635 + 0.0328545i, -0.126611 - 0.0306616i, 0.146154 + 0.0276063i, -0.112821 - 0.0240203i, \\
&0.122658 + 0.0203202i, -0.0899202 - 0.0168569i, 0.0760443 + 0.0138336i, -0.0627635 - 0.0113002i, \\
&0.0523628 + 0.00919966i, -0.0382373 - 0.00743311i, 0.0234903, 0.00591283i, -0.0203041 - 0.00458781i \\
&0.0231598 + 0.00344295i, -0.00934501 - 0.00248283i, 0.00240731 + 0.00171302i, \\
&-0.00368064 - 0.00112799i, 0.0258577, -0.00120406, -0.0217555, 0, 0.0357486, 0, \\
&-0.0223115, 0, 0.0305482, 0, -0.0420921, 0, 0.0285721, 0, -0.0123257, 0, 0.0157698, 0, -0.00931829, \\
&0, 0.0181188, 0, 0.0207443, 0, 0.0282624, 0, 0.0397604, 0, 0.0469886, 0, 0.027743, 0, 0.027496, 0, \\
&0.00150583, 0, 0.00584379\}
\end{aligned}$$

### Rombicuboctaedro mayor

$$\begin{aligned}
&\{0.371517, 0, 0, 0, -0.005955, 0, 0, 0, 0.233011, 0, 0, 0, -0.120139, 0, 0, 0, 0.217405, 0, 0, 0, 0.304227, \\
&0, 0, 0, 0.553883, 0, 0, 0, 0.304227, 0, 0, 0, 0.217405, 0, 0, 0, -0.120139, 0, 0, 0, 0.233011, 0, 0, 0, \\
&-0.005955, 0, 0, 0, 0.371517\}
\end{aligned}$$

### Icosidodecaedro

$$\begin{aligned}
&\{-0.282984, 0, 0, 0, 0, 0.391306, 0, 0, 0, 0, 0.516527, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.516527, 0, 0, 0, 0, -0.391306, \\
&0, 0, 0, 0, -0.282984\}
\end{aligned}$$

### Rombicosidodecaedro menor

$$\begin{aligned}
&\{0.153577, 0, 0.01552, 0, 0.312104, 0, 0.139072, 0, -0.0628828, 0, 0.250619, 0, -0.0107923, 0, \\
&0.00640418, 0, -0.35929, 0, 0.0565787, 0, -0.141233, 0, -0.0865286, 0, 0.134974, 0, 0.130363,
\end{aligned}$$

$$\{0, -0.293505, 0, -0.151124, 0, -0.293505, 0, 0.130363, 0, 0.134974, 0, -0.0865286, 0, -0.141233, \\ 0, 0.0565787, 0, -0.35929, 0, 0.00640418, 0, -0.0107923, 0, 0.250619, 0, -0.0628828, 0, 0.139072 \\ 0, 0.312104, 0, 0.01552, 0, 0.153577\}$$

### Rombicuboctaedro menor

$$\{0.272923, 0, 0, 0, 0.488511, 0, 0, 0, 0.00667077, 0, 0, 0, 0.61127, 0, 0, 0, 0.00667077, 0, 0, 0, 0.488511 \\ 0, 0, 0, 0.272923\}$$

### Cubo romo

$$\{0.300326, 0, 0, 0, 0.176852 + 0.393588i, 0, 0, 0, 0.180768 - 0.189236i, 0, 0, 0, 0.536977 + 0.148034 \\ i, 0, 0, 0, 0.180768 - 0.189236i, 0, 0, 0, 0.176852 + 0.393588i, 0, 0, 0, 0.300326\}$$

### Dodecaedro romo

$$\{0.124965, 0, 0, -0.119613 + 0.210085i, 0, 0, 0.0582865 + 0.262521i, 0, 0, -0.173708 + 0.216067i, 0, \\ 0, 0.120028 + 0.0569614i, 0, 0, 0.0131595 - 0.0318696i, 0, 0, -0.22083 + 0.157329i, 0, 0, -0.155524 - \\ 0.140818i, 0, 0, -0.0417858 + 0.246222i, 0, 0, 0.141904 - 0.158883i, 0, 0, -0.0224768 + 0.254506i, 0, \\ 0, -0.141904 + 0.158883i, 0, 0, -0.0417858 + 0.246222i, 0, 0, 0.155524 + 0.140818i, 0, 0, -0.22083 + \\ 0.157329i, 0, 0, -0.0131595 + 0.0318696i, 0, 0, 0.120028 + 0.0569614i, 0, 0, 0.173708 - 0.216067i, \\ 0, 0, 0.0582865 + 0.262521i, 0, 0, 0.119613 - 0.210085i, 0, 0, 0.124965\}$$

### Cubo truncado

$$\{0.408053, 0, 0, 0, 0.0138165, 0, 0, 0, 0.354497, 0, 0, 0, 0.644412, 0, 0, 0, 0.354497, 0, 0, 0, 0.0138165, \\ 0, 0, 0, 0.408053\}$$

**Dodecaedro truncado**

```
{0.288632, 0, 0, 0, 0, 0.00760663, 0, 0, 0, 0, 0.201476, 0, 0, 0, 0, 0.466084, 0, 0,
0, 0, 0.381642, 0, 0, 0, 0, 0.110688, 0, 0, 0, 0, 0.042523, 0, 0, 0, 0, -0.110688, 0, 0,
0, 0, 0.381642, 0, 0, 0, 0, -0.466084, 0, 0, 0, 0, 0.201476, 0, 0, 0, 0, -0.00760663, 0, 0, 0, 0, 0.288632}
```

**Icosaedro truncado**

```
{0.14883, 0, 0, 0, 0, 0.372123, 0, 0, 0, 0, 0.27992, 0, 0, 0, 0, -0.0951369, 0, 0, 0, 0, 0.374468,
0, 0, 0, 0, 0.211313, 0, 0, 0, 0, 0.366303, 0, 0, 0, 0, -0.211313, 0, 0, 0, 0, 0.374468, 0, 0, 0, 0,
0.0951369, 0, 0, 0, 0, 0.27992, 0, 0, 0, 0, -0.372123, 0, 0, 0, 0, 0.14883}
```

**Octaedro Truncado**

```
{0.171191, 0, 0, 0, 0.545446, 0, 0, 0, 0.413759, 0, 0, 0, -0.06302, 0, 0, 0, 0.413759, 0, 0, 0,
0.545446, 0, 0, 0, 0.171191}
```

**Tetraedro Truncado**

```
{0.173731, 0, 0, 0.661945, 0, 0, 0.531195, 0, 0, 0.0204657, 0, 0, 0.499058}
```

**B.3. Código en Mathematica**

Los estados anteriores fueron calculados en *Mathematica 10*, para ello se usó el comando *PolyhedronData*, el cual permite extraer un ejemplo canónico de los vértices para cada uno de los sólidos anteriores. Por ejemplo, para obtener los vértices de un cubo debe ingresarse lo siguiente:

```
PolyhedronData["Platonic", "VertexCoordinates"][[1]]
```

```

ccS = Complex[a_, b_] :-> Complex[a, -b];

majorana2[constL]:=
Module[{j = (Length[constL])/2, z, r, nr = {}, w, fnl, lc = {}, nc = {}, l, q, i, ir},
For[l = 1, l < (Length[constL] + 1), l++, nc = Append[nc, constL[[l]]/Sqrt[(constL[[l]].constL[[l]])]];
For[q = 1, q < (Length[constL] + 1), q++, If[nc[[q]] == {0, 0, -1}, nr = nr, nr = Append[nr, nc[[q]]]];
ir = Count[nc, {0, 0, -1}];
w = CoefficientList[Times@@(z - ((#[[1]] + i#[[2]])/(1 + #[[3]])&)/@nr), z]//Simplify;
For[i = 1, i < Length[w] + 1, i++,
lc = Append[lc, w[[i]]/((( -1)^(i - j - 1))Sqrt[((2j)!)/((2j - i + 1)!(i - 1)!))]];
fnl = Chop[lc/Sqrt[lc.(lc/.ccS)]]//Simplify, 10^-3];
For[i = 1, i < ir + 1, i++, fnl = Append[fnl, 0]];
fnl
]

```

El siguiente módulo (subrutina) de *Mathematica* resume de manera sistemática el procedimiento para hallar el estado cuántico a partir de las coordenadas de las estrellas de la constelación de Majorana. Primero proyecta a la esfera unitaria el conjunto de puntos ingresado y después sigue el procedimiento descrito en la sección 1.1 para llegar al estado cuántico.

# Apéndice C

## Cálculo del orden de anticoherencia de estados platónicos y arquimídeos

---

Con el siguiente programa se calculó el orden de anticoherencia en todos los casos, como son 18 casos distintos se ejemplificará con el caso del tetraedro (para los otros sólidos hay que cambiar el espín y las coordenadas del sólido).

Como se menciona en el artículo de Zimba (2006), los estados cuánticos correspondientes a constelaciones que configuran sólidos platónicos con multiplicidad 1 tienen la propiedad de ser anticoherentes, esta es la primera meta a verificar. También fueron calculados los valores de expectación de varias potencias de  $\hat{n} \cdot \vec{S}$  para cada estado, con la finalidad de determinar hasta qué grado son anticoherentes. Después se realizó un cálculo similar para todos los sólidos de Arquímedes .

Primero definiré algunas funciones que serán de utilidad en los cálculos posteriores.

```
SolidosPlat = PolyhedronData["Platonic"];  
SolidosArquim = PolyhedronData["Archimedean"];
```

En cada uno de los sólidos a estudiar primero daremos el espín que corresponde al estado (como la

```
PolyhedronData[SolidosPlat[[1]], "VertexCoordinates"];
```

```
PolyhedronData[SolidosArquim[[1]], "VertexCoordinates"];
```

```
 $\delta[i_-, j_-] := \text{KroneckerDelta}[i, j]$   
ccS = Complex[a_., b_.] :→ Complex[a, -b];
```

```
majorana[constL_] := Module[{j = (Length[constL])/2, z, r, w, lc = {}, nc = {}, l, i},  
For[l = 1, l < (Length[constL] + 1), l++, nc = Append[nc, constL[[l]]/Sqrt[(constL[[l]].constL[[l]])]];  
w = CoefficientList[Times@@(z - ((#[[1]] + I#[[2]])/(1 + #[[3]])&)/@nc), z]//N//Chop;  
For[i = 1, i < 2j + 2, i++,  
lc = Append[lc, w[[i]]/(((−1)^(i − j − 1))Sqrt[((2j)!)/((2j − i + 1)!(i − 1)!))]];  
Chop[lc/Sqrt[(lc.(lc/.ccS))]]//Simplify, 10^−3]
```

multiplicidad de las estrellas es 1,  $s = \# \text{vértices} / 2$ ). Después se construyen las tres componentes del operador de espín  $S_x, S_y$  y  $S_z$ . Se define una lista con los vértices del sólido a estudiar y se obtiene el estado correspondiente a la constelación de Majorana dada por el sólido en cuestión.

Más adelante se demuestra que el vector de polarización es cero, para ello se calcula  $p_x, p_y, p_z$  en cada caso (para los estados que no son anticoherentes esta propiedad no se cumple). Finalmente, se calcula  $\langle (n.S)^k \rangle$  hasta la potencia en la que el resultado empiece a depender de  $n$  (es decir, en la potencia en la cual podemos observar que el estado posee cierta información orientacional), con ello se obtiene el orden de anticoherencia del sólido en cuestión.

Por ejemplo, para el caso del tetraedro:

```
s = 2;  
Sx = Table[(1/2)( $\delta[i, j + 1] + \delta[i + 1, j]$ )Sqrt[s(s + 1) − ij], {i, s, −s, −1}, {j, s, −s, −1}];  
Sy = Table[(−i/2)( $\delta[i, j + 1] − \delta[i + 1, j]$ )Sqrt[s(s + 1) − ij], {i, s, −s, −1}, {j, s, −s, −1}];  
Sz = Table[ $\delta[i, j]j$ , {i, s, −s, −1}, {j, s, −s, −1}];  
  
tetL = PolyhedronData[SolidosPlat[[5]], "VertexCoordinates"];
```

```
tetCL = majorana[tetL]
```

```
{0, 0.816497, 0, 0, 0.57735}
```

Veamos primero que es en efecto anticoherente, puesto que su vector de polarización es cero

$$\text{tetpx} = \text{tetCL.Sx.tetCL//Chop}$$

$$0$$

$$\text{tetpy} = \text{tetCL.Sy.tetCL//Chop}$$

$$0$$

$$\text{tetpz} = \text{tetCL.Sz.tetCL//Chop}$$

$$0$$

Ahora vamos a buscar el grado de anticoherencia

$$\text{expnS1} = \text{tetCL.}(\text{Sin}[t]\text{Cos}[f]\text{Sx} + \text{Sin}[t]\text{Sin}[f]\text{Sy} + \text{Cos}[t]\text{Sz}).\text{tetCL//Chop//Simplify}$$

$$-2.220446049250313^{*^{\wedge}}-16\text{Cos}[t]$$

$$\text{expnS2} = \text{tetCL.}(\text{Sin}[t]\text{Cos}[f]\text{Sx} + \text{Sin}[t]\text{Sin}[f]\text{Sy} + \text{Cos}[t]\text{Sz}).(\text{Sin}[t]\text{Cos}[f]\text{Sx} + \text{Sin}[t]\text{Sin}[f]\text{Sy} + \text{Cos}[t]\text{Sz}).\text{tetCL//Chop//Simplify}$$

$$2. + 2.220446049250313^{*^{\wedge}}-16\text{Cos}[t]^2 - 2.220446049250313^{*^{\wedge}}-16\text{Sin}[t]^2$$

$$\text{expnS3} = \text{tetCL.}(\text{Sin}[t]\text{Cos}[f]\text{Sx} + \text{Sin}[t]\text{Sin}[f]\text{Sy} + \text{Cos}[t]\text{Sz}).(\text{Sin}[t]\text{Cos}[f]\text{Sx} + \text{Sin}[t]\text{Sin}[f]\text{Sy} + \text{Cos}[t]\text{Sz}).(\text{Sin}[t]\text{Cos}[f]\text{Sx} + \text{Sin}[t]\text{Sin}[f]\text{Sy} + \text{Cos}[t]\text{Sz}).\text{tetCL//Chop//Simplify}$$

$$-2.\text{Cos}[t]^3 + \text{Cos}[t](1.5 - 1.5\text{Cos}[2t]) + (1.41421\text{Cos}[f]^3 - 4.24264\text{Cos}[f]\text{Sin}[f]^2) \text{Sin}[t]^3$$

Por ello, podemos notar que el tetraedro es un estado de espín 2-anticoherente y no más, porque en la siguiente potencia de  $\hat{n} \cdot \vec{S}$  ya hay dependencia angular y, por tanto, en  $\hat{n}$ .





# Apéndice D

## Prueba de que los sólidos platónicos y arquimídeos son t-diseños esféricos

---

En este programa se demostrará que los sólidos platónicos y los arquimídeos son diseños esféricos. El programa recibe el conjunto de vértices del sólido de interés en la esfera unitaria (en general, si no se normaliza el resultado no es un diseño esférico). Después se calcula la matriz de distancia (matriz que recopila los productos interiores de todos los vectores de posición del conjunto de vértices entre sí). Finalmente se usa el teorema de equivalencia para hallar  $t$  en cada caso. (Por el momento se muestra el ejemplo del octaedro)

```
pointsL = Round[{{1, 0, 0}, {-1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, 1}, {0, 0, -1}}//N, 0.0000001];
```

Primero definiremos los polinomios de Gegenbauer porque serán de amplio uso, según la definición de Delsarte et al.

```
gPol[k_, x_] := (2k + 1)GegenbauerC[k, 1/2, x];
```

A continuación se construye la matriz de distancia, la cual será llamada ipDMat y se calculará por

medio de la función ipMat

```
l = Length[pointsL];
```

```
p=0;
```

```
ipMat[pointsL_]:=Table[pointsL[[i]].pointsL[[j]], {i, 1, l}, {j, 1, l}];
```

```
ipDMat = Round[ipMat[pointsL], 0.0000001];
```

ipL ayuda a quitar la información redundante, ya que en un conjunto no es necesario enunciar más de una vez a cada elemento

```
ipL = Union@@ipDMat;
```

dd es una función que calcula el número de veces que aparece el número a en la matriz de distancia

```
dd[a_]:=Count[ipDMat, a, 2]
```

```
ipLL = Length[ipL];
```

Con el siguiente For se calcula la suma que hay que verificar que es cero hasta cierto grado del polinomio de Gegenbauer involucrado en el teorema de equivalencia, “p” sólo es una variable que va acumulando lo que llevamos en la suma de cada uno de los términos de la forma  $dd[\alpha]gPol[k,\alpha]$ .

```
For[i = 1, i < ipLL + 1, i++, p = p + dd[ipL[[i]]]gPol[1, ipL[[i]]]  
Print[p]
```

```
0.
```

Para encontrar t de un cierto arreglo de vértices hay que ver hasta que valor del primer argumento de gPol el resultado de Print[p] deja de ser aproximadamente cero (en cada caso hay que hacer p=0 para no arrastrar lo que llevamos sumado).

# Referencias

- [1] Ettore Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, 9(2):43–50, 1932.
- [2] Jun John Sakurai and Jim Napolitano. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley, 2011.
- [3] Tristan Needham. *Visual complex analysis*. Oxford University Press, 1998.
- [4] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2007.
- [5] Dorian Baguette, François Damanet, Olivier Giraud, and John Martin. Anticoherence of spin states with point-group symmetries. *Physical Review A*, 92(5):052333, 2015.
- [6] Harold Scott Macdonald Coxeter. *Regular polytopes*. Courier Corporation, 1973.
- [7] Peter R. Cromwell. *Polyhedra*. Cambridge University Press, 1999.
- [8] *Quadrivium*. Wooden Books, 2011.
- [9] Johannes Kepler. *Harmonices mundi*. Godofredi Tampachii, 1619. (En latín).
- [10] Morton Hamermesh. *Group theory and its application to physical problems*. Courier Corporation, 1962.
- [11] Jason Zimba. Anticoherent spin states via the majorana representation. *EJTP*, 3(10):143–156, 2006.
- [12] Askold Perelomov. *Generalized coherent states and their applications*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [13] Philippe Delsarte, Jean-Marie Goethals, and Johan Jacob Seidel. Spherical codes and designs. *Geometriae Dedicata*, 6(3):363–388, 1977.
- [14] Jason Crann, Rajesh Pereira, and David W Kribs. Spherical designs and anticommuting spin states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(25):255307, 2010.
- [15] Eiichi Bannai and Etsuko Bannai. A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres. *European Journal of Combinatorics*, 30(6):1392–1425, 2009.
- [16] N Ja Vilenkin. Special functions and the theory of group representations. translated from the russian by vn singh. translations of mathematical monographs, vol. 22. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1968.
- [17] AF Horadam. Gegenbauer polynomials revisited. *Fibonacci Quart*, 23:294–299, 1985.
- [18] Nicolas Magot and Alexander Zvonkin. Belyi functions for archimedean solids. *Discrete Mathematics*, 217(1):249–271, 2000.
- [19] Konstantin Poelke and Konrad Polthier. Lifted domain coloring. In *Computer Graphics Forum*, volume 28, pages 735–742. Wiley Online Library, 2009.
- [20] Jean-Marc Couveignes. Calcul et rationalité de fonctions de belyi en genre 0. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 44, pages 1–38, 1994.
- [21] Yang-Hui He and James Read. Hecke groups, dessins d’enfants and the archimedean solids. *Frontiers in Physics*, 3(91), 2015.
- [22] Olivier Giraud, Petr Braun, and Daniel Braun. Quantifying quantumness and the quest for queens of quantum. *New Journal of Physics*, 12(6):063005, 2010.
- [23] G Björk, AB Klimov, P de la Hoz, M Grassl, G Leuchs, and Luis Lorenzo Sánchez-Soto. Extremal quantum states and their majorana constellations. *Physical review A*, 92(3):031801, 2015.
- [24] Piotr Kolenderski and Rafal Demkowicz-Dobrzanski. Optimal state for keeping reference frames aligned and the platonic solids. *Physical Review A*, 78(5):052333, 2008.
- [25] Gunnar Björk, Markus Grassl, Pablo de la Hoz, Gerd Leuchs, and Luis L Sánchez-Soto. Stars of the quantum universe: extremal constellations on the poincaré sphere. *Physica Scripta*, 90(10):108008, 2015.

- [26] Joseph John Thomson. On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 7(39):237–265, 1904.
- [27] Michael Atiyah and Paul Sutcliffe. Polyhedra in physics, chemistry and geometry. *Milan Journal of Mathematics*, 71(1):33–58, 2003.
- [28] Salvatore Torquato and Yang Jiao. Dense packings of the platonic and archimedean solids. *Nature*, 460(7257):876–879, 2009.
- [29] Anthony DJ Haymet. C 120 and c 60: Archimedean solids constructed from sp<sup>2</sup> hybridized carbon atoms. *Chemical physics letters*, 122(5):421–424, 1985.
- [30] Piotr Kolenderski. Geometry of pure states of n spin-j system. *Open Systems & Information Dynamics*, 17(02):107–119, 2010.
- [31] Eiichi Bannai and Makoto Tagami. A note on anticommuting spin states. *J. Phys. A: Math. Theor*, 44(342002):8, 2011.
- [32] Chryssomalis Chryssomalakos. Notes on optimal quantum rotosensors. Sin publicarse.
- [33] Girish S Agarwal. Relation between atomic coherent-state representation, state multipoles, and generalized phase-space distributions. *Physical Review A*, 24(6):2889, 1981.
- [34] Olivier Giraud, Daniel Braun, Dorian Baguette, Thierry Bastin, and John Martin. Tensor representation of spin states. *Physical review letters*, 114(8):080401, 2015.
- [35] John Stuehnagel. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM review*, 6(4):422–430, 1964.
- [36] Ana Irene Ramírez-Galarza. *Geometría analítica: una introducción a la geometría*. Las prensas de ciencias.
- [37] Giuliano Benenti, Giulio Casati, and Giuliano Strini. *Principles of quantum computation and information: Volume I: Basic Concepts*. World scientific, 2004.

- 
- [38] Jiannis K Pachos. *Introduction to topological quantum computation*. Cambridge University Press, 2012.
- [39] Alexander Zvonkin. Belyi functions: examples, properties, and applications. In *Proceedings AAECC*, volume 11, pages 161–180, 2008.
- [40] David Eppstein. D3-reducible graphs. *arXiv preprint arXiv:1502.05334*, 2015.
- [41] Yoshio Mimura. A construction of spherical 2-design. *Graphs and Combinatorics*, 6(4):369–372, 1990.
- [42] Martin Aulbach. Classification of entanglement in symmetric states. *International Journal of Quantum Information*, 10(07):1230004, 2012.
- [43] Richard J Morris. An evaluation of spherical designs for molecular-like surfaces. *Journal of Molecular Graphics and Modelling*, 24(5):356–361, 2006.