



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una introducción a la programación lineal
paramétrica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuaria

PRESENTA:

Lydia Mirabel Mendoza Cadena

TUTORA

Dra. Claudia Orquídea López Soto





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Mendoza

Cadena

Lydia Mirabel

56 65 00 76

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

309212818

2. Datos del Asesor.

Dra.

Claudia Orquídea

López

Soto

3. Datos del sinodal 1

M. en I.O.

María del Carmen

Hernández

Ayuso

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Bibiana

Obregón

Quintana

5. Datos del sinodal 3

M. en I.

Adrián

Girard

Islas

6. Datos del sinodal 4

Act.

Germán

Valle

Trujillo

7. Datos del trabajo escrito

Una introducción a la programación lineal paramétrica

104 p.

2016



Agradecimientos y Dedicatoria

*« Depende del cristal con el que miras,
todo es horrible o terriblemente bello. »*
Enrique Bunbury

A Lidia, por su confianza incondicional.
A Pille y Queta, por ser una base.
Y agradezco todo el apoyo y la ayuda que me brindaron la Dra. Claudia Orquídea López Soto,
y el Act. David Chaffrey Moreno Fernández.



Índice general

Lista de figuras	VII
Lista de tablas	IX
Introducción	1
Capítulo 1. Análisis de Sensibilidad	3
1.1. Cambio en el vector de costos c	4
1.2. Cambio en el vector de recursos b	8
1.3. Cambio en la matriz de restricciones A	8
Capítulo 2. Valor Marginal	15
2.1. El valor marginal para la forma (P_*) y (D_*)	16
2.2. Las condiciones de regularidad de Kuhn-Tucker	25
2.3. El valor marginal para un problema mixto	25
2.4. Comentarios finales	27
Capítulo 3. Cambios del lado derecho	29
3.1. Método Según Bazaraa	29
3.2. Método Según Holder	35
3.3. Comentarios finales	41
Capítulo 4. Cambios en el vector de costos	43
Conclusiones	55

A. Manual de Usuario de los códigos	59
A.1. Manual de Usuario para <i>simplex2F</i>	59
A.2. Manual de Usuario para <i>valMarg</i>	61
A.3. Manual de Usuario para <i>intervRHS</i>	62
A.4. Manual de Usuario para <i>intervCostos</i>	64
B. Códigos	67
B.1. Código de la función <i>simplex2F</i> (Simplex 2 fases)	67
B.2. Código de la función <i>valMarg</i> (Valor marginal)	71
B.3. Código de la función <i>intervRHS</i> (Cambios en b, según Bazaraa)	72
B.4. Código de la función <i>intervCostos</i> (Cambios en c)	75
C. Soluciones	79
C.1. Solución al Problema de Programación Lineal 1.1	79
C.2. Solución al Problema de Programación Lineal 1.2	80
C.3. Solución al ejemplo 1	80
C.4. Solución al ejemplo 2	81
C.5. Solución al ejemplo 1	81
C.6. Comprobación del ejemplo 2 aplicando el algoritmo de Bazaraa	82
C.7. Solución al Problema de Programación Lineal 1	82
C.8. Solución al Problema de Programación Lineal 2	82
D. El Simplex, Dualidad y el Dual Simplex	83
D.1. El Método Simplex	83
D.1.1. Métodos de Inicialización	86
D.2. Dualidad	89
D.3. El Método Dual simplex	90



Índice de figuras

3.1.	Diagrama del algoritmo para encontrar intervalos de α para la parametrización $b + \alpha\delta b$, según Bazaraa	32
3.2.	Diagrama del algoritmo para encontrar intervalos de α para la parametrización $b + \alpha\delta b$, según Holder	39
4.1.	Diagrama del algoritmo para encontrar intervalos de α dada la parametrización $c + \alpha\delta c$	47
D.1.	Diagrama con los tipos de problemas de programación lineal	84
D.2.	Diagrama de flujo del Método Simplex	87
D.3.	Diagrama de flujo del Método Dual Simplex	92

Índice de cuadros

1.1.	Tabla simplex óptima del PPL 1.1	6
1.2.	Tabla simplex óptima del PPL 1.2	7
1.3.	Tabla simplex óptima del PPL1.2 con $\delta c_3 = -2$	7
1.4.	Método Dual Simplex, dado $\delta b_4 = 30$ del PPL 1.1	9
1.5.	Tabla simplex generada a partir de $\delta a_1 = (2, 4, -2)^t$	11
1.6.	Simplex generado dado $\delta a_1 = (2, 3, 1)^t$ de PPL 1.1	12
1.7.	Tabla óptima del PPL 1.2 con $B = (a_4 \ a_5 \ a_7)$	12
1.8.	Simplex generado dado $\delta a^1 = (1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 3/2 \ 0)$ del PPL 1.2 con $B =$ $(a_4 \ a_5 \ a_7)$	13
1.9.	Simplex generado dado $\delta a^3 = (-4 \ 0 \ 1 \ 0 \ 6 \ -3)$ del PPL 1.2	14
3.1.	Tabla óptima de PPL 1.2 con $B=(a_2 \ a_4 \ a_5)$	31
3.2.	Tabla auxiliar para obtener $\bar{\alpha}$ para $k=1$	31
3.3.	Tabla óptima de PPL 1.2 sustituyendo \bar{b} por $\bar{b} + \alpha \delta \bar{b}$	33
3.4.	Tabla óptima de PPL 1.2 con $(\bar{b} + \alpha_1 \delta \bar{b})$, generada a partir del algoritmo dual simplex	33
3.5.	Tabla auxiliar para obtener $\bar{\alpha}$ para $k=2$	33
3.6.	Tabla óptima simplex para $(\bar{b} + \alpha_1 \delta \bar{b}) + \alpha \delta \bar{b}$	34
3.7.	Tabla óptima con $(\bar{b} + \alpha_2 \delta \bar{b}) + \alpha_2 \delta \bar{b}$, generada a partir del algoritmo dual simplex	34
3.8.	Intervalos de α para los cuales $b + \alpha \delta b$ es óptimo	35
3.9.	Tabla simplex del problema lineal de (3.14)	37
3.10.	Tabla simplex para encontrar D^+ en la iteración 1 dado δb	40
3.11.	Tabla simplex para encontrar α^+ en la iteración 1 dado δb	41
4.1.	Tabla para encontrar el valor de D^+ en la iteración 1	48
4.2.	Tabla para encontrar el valor de α^+ en la iteración 1	49

4.3.	Tablas simplex del problema lineal $\min \{(c^t + \alpha \delta c^t)x : Ax = b, x \geq 0\}$ con $\alpha = 0$, $\alpha = 5$ y $\alpha = 100$	49
4.4.	Tabla para encontrar el valor de D^+ en la primera iteración	50
4.5.	Tabla para encontrar el valor de α^+ en la primera iteración	51
4.6.	Tabla para encontrar el valor de D^+ en la iteración 2	51
4.7.	Tabla para encontrar el valor de α^+ en la segunda iteración	51
4.8.	Tabla para encontrar el valor de D^+ en la iteración 3	52
4.9.	Tabla para encontrar el valor de D^+ en la iteración 3 dada una relajación	52
4.10.	Tabla para encontrar el valor de α^+ en la tercera iteración	53
4.11.	Intervalos de α en los que una base es óptima	53
D.1.	Tabla Simplex	86
D.2.	Relación entre el problema Primal y Dual <small>Fuente: [3]</small>	89



Introducción

«En 1953, pocos años después de que el método simplex fuera desarrollado por G.B. Dantzing, ... [ya se habían publicado artículos sobre la programación paramétrica]. Parecía que esos trabajos que concernían a la teoría y/o métodos de la programación paramétrica fueron motivados por la curiosidad, i.e., por la pregunta “ ¿Qué pasa cuando los datos iniciales de un problema lineal son perturbados? ” » (Tomas Gal, A “Historiogram” of Parametric Programming [5] , p.449). Así, la programación paramétrica, o programación lineal paramétrica, surge por una de las preguntas pioneras en la programación lineal. Junto con la programación lineal, también *nace* el análisis de sensibilidad. Sin embargo, Tomas Gal también indica que «en comparación con la programación entera, por ejemplo, la programación paramétrica/el análisis de sensibilidad no es un “gran” campo de especialización de la Investigación de Operaciones” »(p.449). Esto puede deberse a que no es un tema fácil de tratar. Además, la programación paramétrica tampoco es un tema que suela revisarse en los cursos de licenciatura. Así, se decidió tratar este tema para acercar a los alumnos y personas interesadas en la programación lineal.

Ya estamos hablando de la programación lineal paramétrica y del análisis de sensibilidad, pero ¿qué es eso realmente? Pues bien, la *programación lineal paramétrica*, como se menciona en el párrafo anterior, aparece a partir de la pregunta ¿qué sucede si se alteran los parámetros del problema lineal original?. En otras palabras, supongamos que tenemos un problema lineal y su solución óptima, y además supongamos que se desean cambiar los coeficientes del problema. Lo que se pretende es, obtener la solución óptima dado que ya hemos obtenido una, es decir, no queremos volver a resolver el problema si ya tenemos el original resuelto. Así, a partir de la solución óptima, buscamos los parámetros que nos garantizarán conservar la solución óptima. Y aún más: buscamos los intervalos que aseguran que una base sea óptima. La programación paramétrica se encarga de decirnos cómo hacer esto. En cuanto al *análisis de sensibilidad*, éste se realiza después de hallar la solución óptima del problema original y se hace sólo un cambio en uno de los parámetros del problema; entonces el objetivo es encontrar la solución óptima

dado el cambio realizado.

En el presente trabajo, sólo se plantea revisar algunos cambios del análisis de sensibilidad y del análisis paramétrico de un problema de programación lineal. Para el caso de un problema entero, ambos métodos son diferentes, pues si se supone que se modifica α veces un coeficiente del problema, entonces se tiene que para el caso entero, dicha α no crece de manera continua, debido a que necesitamos que ésta arroje una solución entera. En otras palabras, para el caso lineal, dicha α puede crecer de manera continua, mientras que para un problema entero, el comportamiento de α puede ser incluso errático e impredecible. Para quienes estén interesados en el análisis de sensibilidad y en el análisis paramétrico para problemas enteros, se sugiere consultar [15] [6] [9]. En el primero se tratan problemas binarios; en el segundo y en el tercero problemas enteros no binarios.

El objetivo de esta tesis es dar un acercamiento al análisis paramétrico, debido a que no es un tema que suele estudiarse en los cursos del área de investigación de operaciones a nivel licenciatura, aunque sí sea revisado el análisis de sensibilidad. Así, el Anexo D busca ser un repaso o una guía de inicio al tema para los estudiantes y personas que estén interesadas en la programación lineal (y el método simplex); de hecho, podrán hacer uso del programa `simplex2F` para obtener la solución a un problema lineal en \mathbb{R} . Por otro lado, el capítulo de Análisis de Sensibilidad tiene como objetivo ser un apoyo para los alumnos y personas que deseen aprender este tema, además de ser una introducción al análisis paramétrico. Por último, el propósito de los capítulos restantes es mostrar parte de las aplicaciones del análisis paramétrico; esto es importante porque ayuda a dar una idea más amplia de la solución de un problema de programación lineal.

El primer capítulo de esta tesis está dedicado al análisis de sensibilidad, pero sólo cuando se aplica el cambio en el vector de costos, en la matriz de restricciones o en el vector de restricciones. En los siguientes capítulos se habla sobre el análisis paramétrico. En el capítulo dos, se revisa el *valor marginal*, que es una tasa de cambio que surge al aplicar modificaciones a los parámetros. El capítulo tres, busca los intervalos para los cuales se garantiza que una solución se mantiene óptima si se perturba el vector de restricciones. En este capítulo, se hace el análisis de dos algoritmos. Finalmente, el capítulo cuatro trata sobre el análisis paramétrico cuando se hacen cambios en el vector de costos.

Además de revisar la teoría y algunos ejemplos de los capítulos antes mencionados, se programaron en \mathbb{R} los algoritmos de los algoritmos del capítulo 2, 4 y el primero del capítulo 3; sus respectivos códigos se muestran en el Apéndice B, y los manuales de usuario en el Apéndice A. Cabe mencionar que, como parte esencial de los algoritmos programados, fue indispensable programar el algoritmo simplex, en el cual se usó y programó, como método de inicialización, el método de las dos fases. También se hizo un programa que es prácticamente el algoritmo dual simplex, debido a que éste también es utilizado en uno de los algoritmos de la programación paramétrica. Se incluyeron ejemplos de cómo utilizar los códigos, los cuales corresponden a los ejemplos teóricos de cada capítulo, se colocaron en el Anexo C.

Por último, cabe mencionar que se hizo un apéndice que contiene la notación utilizada y teoría básica para quienes no estén familiarizados con el tema.

Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad estudia el comportamiento de una solución óptima de un problema de programación lineal, dado que se tiene una variación en alguno de los coeficientes de dicho problema. Es decir, supóngase que se tiene un problema de programación lineal y su solución óptima. Como el planteamiento del problema representa un problema de la vida real, en diversas ocasiones algún valor del problema original podría cambiar, por ejemplo el costo de la materia prima, la demanda de cierto producto o simplemente el precio de un producto para obtener más ganancias. En estos casos, no siempre se tiene que la solución actual siga siendo la óptima, y es claro que se desearía saber la nueva solución. Una forma de hacerlo, es simplemente volver a resolver el problema, pero sería un gasto innecesario de tiempo (y de recursos) si la solución que se tenía seguía siendo óptima; es ahí cuando se hace uso del análisis de sensibilidad.

El análisis de sensibilidad ayuda a resolver este tipo de problemas, es decir, indica de manera sencilla si la solución óptima actual, puesto que se tiene *un* cambio en el problema de programación lineal, sigue siendo óptima o no. Si la solución actual no es óptima, se procede a resolver el problema con ayuda del algoritmo simplex o de los algoritmos variantes de este. Cabe señalar que el análisis de sensibilidad sólo revisa cuando hay un único cambio en el problema original. Si se aplicaran más cambios, entonces se trata de análisis paramétrico, y en esos casos se realizan otros procedimientos, los cuales están descritos en los siguientes capítulos de este trabajo.

En este capítulo, si A es una matriz de $m \times n$, b un vector en \mathbb{R}^m y c un vector renglón en \mathbb{R}^n , tal que se tenga un problema en su forma estándar como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{P}$$

se aplicará el análisis de sensibilidad cuando

- hay un cambio en el vector de costos c ,
- hay un cambio en el vector de recursos b , o
- hay un cambio en la matriz de restricciones A .

En los cursos de programación lineal, se suelen revisar otros cambios, como la adición de una nueva variable al problema. Aquí sólo se revisarán los casos mencionados con anterioridad debido a que son los mismos casos que se pretenden revisar más adelante en el análisis paramétrico; sin embargo, hay que destacar que la adición de una restricción y de una variable se presentan de manera implícita en la sección de Cambios en la matriz de restricciones A . En otras palabras, este capítulo intenta ser más un recordatorio o una introducción para quienes no estén familiarizados con este tema.

Para quienes no estén familiarizados con la tabla simplex y/o la notación a utilizar, así como los algoritmos que se mencionen, pueden revisar el Apéndice D.

1.1. Cambio en el vector de costos c

Primero se analizará cuando se realiza un cambio en el vector de costos c . Supóngase que se tiene un problema de programación lineal de la forma (P) con su solución óptima dada por $x_B = B^{-1}b$ y se desea cambiar el costo c_k de la variable x_k del vector de costos c por el valor δc_k . Observemos que al modificar el vector de costos, sólo se podría cambiar el valor de los coeficientes de costo reducido $z_j - c_j$, el cual es el criterio de optimalidad, por lo que se observan dos casos:

- Caso 1: x_k es no básica. Se tiene que $z_j = c_B B^{-1}a_j$ no cambia para ninguna $j \neq k$. El único valor que cambia es $z_k - c_k$, que cambiará a $z_k - \delta c_k$; si $z_k - \delta c_k = (z_k - c_k) + (c_k - \delta c_k) > 0$, entonces x_k debe entrar a la base (dado que el primal es minimizar), y se continúa el método simplex usual; en otro caso, la solución continúa siendo óptima.
- Caso 2: $x_k \equiv x_{B_t}$ es básica. En este caso, el vector de coeficientes de costo reducido de la base cambia, es decir, c_{B_t} es sustituido por δc_{B_t} . Sea δz_{tj} el nuevo valor de z_j . Entonces, $\delta z_j - c_j$ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \delta z_j - c_j &= \delta c_B B^{-1}a_j - c_j = (c_B B^{-1}a_j - c_j) + (0, 0, \dots, \delta c_{B_t} - c_{B_t}, 0, \dots, 0)y_j \\ &= (z_j - c_j) + (\delta c_{B_t} - c_{B_t})y_{tj} \quad \forall j. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Para $j = k$ se tiene que $z_k - c_k = 0$ y $y_{tk} = 1$, lo cual implica que $\delta z_k - c_k = \delta c_k - c_k$, y de esta forma se observa que $\delta z_k - \delta c_k = 0$, con lo que se concluye que la base actual sigue generando una solución óptima. No se debe olvidar actualizar $\delta z_k - c_k$ por $\delta z_k - \delta c_k$ que, como se acaba de revisar, es igual a cero. Por último, como el costo de una variable básica cambia, entonces el valor en la función objetivo también lo hace, y sólo cambia $(\delta c_{B_t} - c_{B_t})x_k$ veces, es decir, $\delta c_B B^{-1}b = c_B B^{-1}b + (\delta c_{B_t} - c_{B_t})(B^{-1}b)_t$.

Veamos un ejemplo para cada uno de estos casos, no sin antes enunciar los dos problemas de programación lineal con los que se trabajará a lo largo de esta tesis.

Problema de Programación Lineal 1.1. *Una compañía de jugos ha creado dos nuevos sabores: “Frutos Rojos” y “Arandanizado”. En la siguiente tabla se muestra el concentrado de jugo que se debe incluir para la elaboración de cada producto, así como la cantidad de jugo que proporciona el proveedor.*

	<i>Frutos Rojos</i>	<i>Arandanizado</i>	<i>Disponibilidad</i>
<i>Fresa</i>	<i>400 ml.</i>	<i>100 ml.</i>	<i>10, 000 ml.</i>
<i>Arándano</i>	<i>200 ml.</i>	<i>600 ml.</i>	<i>20, 000 ml.</i>
<i>Mora</i>	<i>300 ml.</i>	<i>200 ml.</i>	<i>15, 000 ml.</i>
<i>Manzana</i>	<i>100 ml.</i>	<i>100 ml.</i>	<i>3,500 ml.</i>

Los nuevos jugos se venderán en una presentación de un litro, y el precio al público será de \$10 por el jugo de Frutos Rojos y \$12 por el jugo Arandanizado.

Entonces, el modelo de programación lineal queda de la forma:

*$x_i =$ Cantidad de envases de jugo i a producir, con $i=1$ (Frutos Rojos),
2(Arandanizado)*

$$\max 10x_1 + 12x_2$$

s.a.

$$4x_1 + x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 \leq 200$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 150$$

$$x_1 + x_2 \leq 35$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima del ejemplo se obtuvo a través del método simplex y la tabla simplex óptima se muestra en la Tabla 1.1, en la cual se observa que la solución óptima del primal es $(5/2, 65/2)$ y la del dual es $(0, 1/2, 0, 9)$, con valor en función objetivo de 415.

La función `simplex2F` obtiene la solución a los problemas de programación lineal en su forma estándar a minimizar; el manual de usuario se encuentra en el Apéndice A, mientras que el código de la función está en el Apéndice B. El código para este problema se puede ver en el Apéndice C.

El otro problema con el cual se va a trabajar es el Problema 1.2, que se muestra a continuación.

Tabla 1.1: Tabla simplex óptima del PPL 1.1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z		0	0	0	1/2	0	9	415
x_1	10	1	0	0	-1/4	0	1/2	5/2
x_2	12	0	1	0	1/4	0	-1/2	65/2
x_3	0	0	0	1	3/4	0	-11/2	115/2
x_5	0	0	0	0	1/4	1	-7/2	155/2

Problema de Programación Lineal 1.2. Una fábrica que produce telas, comenzará a vender seis nuevos productos, por lo que desea optimizar la cantidad de telas a producir diariamente. Se sabe que el costo de producción de cada tela es el siguiente: \$2 por metro de las telas 1 y 5, \$3/2 por metro para la tela 2, y \$1 por metro de las telas 3, 4 y 6. Además, la fábrica ha calculado que la demanda en conjunto de las telas 1 y 3 más dos veces las telas 2 y 4 es al menos de 6 metros por día. Por último, por políticas de la empresa, por cada 2 unidades de tela 3, se necesita producir al menos 10 unidades menos de la suma de 4 unidades de telas 1 y 5 con tres unidades de tela 2 y dos unidades de tela 4 ($4x_1 + 3x_2 + 2x_4 + 4x_5 \geq 10 + 2x_3$). Asimismo, las condiciones de la fábrica indican que la suma de las telas 3 y 4 más seis unidades de tela 5, deben de ser 8 unidades mayores que la suma de cinco unidades de la tela 1 con 3 unidades de la tela 6 ($x_3 + x_4 + 6x_5 \geq 8 + 5x_1 + 3x_6$).

Entonces, el modelo de programación lineal queda de la forma:

$x_i =$ Metros de tela i a producir diariamente, con $i=1,2, \dots, 6$

$$\min 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6$$

s.a.

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & & & \geq & 6 \\ 4x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & +4x_5 & & \geq & 10 \\ -5x_1 & & +x_3 & +x_4 & +6x_5 & -3x_6 & \geq & 8 \end{array}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 6$$

La solución óptima del primal es $\lambda_1(1/10, 0, 0, 59/20, 37/40, 0) + \lambda_2(0, 2/5, 0, 13/5, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 0, 7/2, 3/4, 0) + \lambda_4(0, 0, 0, 3, 1, 0)$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \lambda_i \geq 0 \forall i$, mientras que la del dual es $(0, 1/2, 0)$ con valor en la función objetivo de 5. Estas soluciones se siguen a partir de la Tabla 1.2.

El código para solucionar este problema se encuentra en el Apéndice C.

Tabla 1.2: Tabla simplex óptima del PPL 1.2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z		0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	5
x_1	2	1	1/4	-1/2	0	0	3/10	0	-3/20	0	1/10
x_4	1	0	7/8	3/4	1	0	-3/20	-11/20	3/40	-1/20	59/20
x_5	2	0	1/16	-3/8	0	1	-9/40	7/40	-11/80	-3/40	37/40

Dados estos dos problemas lineales, veamos los siguientes ejemplos sobre análisis de sensibilidad en el vector de costos.

Ejemplo 1.1. Tomando el Problema de Programación Lineal 1.2, se revisarán tres cambios.

- ◇ Se cambia el costo c_3 por $\delta c_3 = 1/2$. Dado que tenemos que la variable x_3 no es parte de la base, y además $z_3 - \delta c_3 = (z_3 - c_3) + (c_3 - \delta c_3) = (-2) + (1 - 1/2) < 0$, entonces se concluye que la solución actual sigue siendo óptima.
- ◇ Se cambia c_3 por $\delta c_3 = -2$, entonces $z_3 - \delta c_3 = (-2) + (1 - (-2)) = 1 > 0$, y se obtienen las Tablas Simplex 1.3 generadas a partir de la Tabla 1.2, en donde se observa que ahora el problema es no acotado.

Tabla 1.3: Tabla simplex óptima del PPL1.2 con $\delta c_3 = -2$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z		0	0	1	0	0	-1	0	-1/2	0	5
x_1	2	1	1/4	-1/2	0	0	3/10	0	-3/20	0	0
x_4	1	0	7/8	(3/4)	1	0	-3/20	-11/20	3/40	-1/20	59/20
x_5	2	0	1/16	-3/8	0	1	-9/40	7/40	-11/80	-3/40	37/40
z		0	-7/6	0	-4/3	0	-4/5	11/15	-3/5	1/15	16/15
x_1	2	1	5/6	0	2/3	0	1/5	-4/15	0	(1/15)	31/15
x_3	-2	0	7/6	1	4/3	0	-1/5	-11/15	0	-1/15	59/15
x_5	2	0	1/2	0	1/2	1	-3/10	0	0	0	12/5
z		-1	-2	0	-2	0	-1	1	-1/2	0	-1
x_9	0	15	25/2	0	10	0	3	-4	-3/2	1	31
x_3	-2	1	2	1	2	0	0	-1	0	0	6
x_5	2	3/2	7/4	0	3/2	1	0	-1/2	-1/4	0	11/2

- ◇ Se cambia el costo c_5 a $\delta c_5 = 3/2$. Entonces, como es parte de la base dada en la Tabla 1.2, se tiene que $\delta c_{B_i} = (2, 1, 3/2)$. Así,

$$\begin{aligned}
 z_j - c_j &= (z_j - c_j) + (\delta c_{B_i} - c_{B_i})y_{ij} \quad \forall j \\
 &= (0, 0, -2, 0, 0, -1, 0, -1/2, 0) \\
 &\quad + (3/2 - 2)(0, 1/16, -3/8, 0, 1, -9/40, 7/40, -11/80, -3/40) \\
 &= (0, -1/32, -29/16, 0, 0, -71/80, -7/80, -22/51, 3/80)
 \end{aligned}$$

Como el noveno valor es positivo, si se calcula la novena columna de la tabla simplex, se obtiene $(0, -1/20, -3/40)$ y se concluye que la solución es no acotada.

□

1.2. Cambio en el vector de recursos b

Otro cambio que podría presentarse en un problema dado, es el cambio en un coeficiente del vector b . Para analizar qué ocurre en la solución de la tabla simplex, considérese la solución óptima de un problema de la forma (P), y supóngase que se cambia el k -ésimo valor b_k del vector b por δb_k . Claramente, $B^{-1}b$ deberá ser reemplazado por $B^{-1}\delta b$, el cual puede ser obtenido como $B^{-1}\delta b = B^{-1}b + B^{-1}(\delta b - b)$. De este modo, se obtienen dos casos:

- Si $B^{-1}\delta b \geq 0$, entonces la solución actual sigue siendo óptima; lo que cambia es el valor de las variables básicas, y por tanto, el valor en la función objetivo. Éste se obtiene de la manera usual: $c_B B^{-1}\delta b$.
- Si $B^{-1}\delta b < 0$, entonces se puede utilizar el método dual simplex para obtener una nueva solución óptima.

Para mostrar mejor lo anterior, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Tomando $\delta b_4 = 30$ del Problema 1.1 y la Tabla 1.1, se tiene que

$$\begin{aligned} B^{-1}\delta b &= B^{-1}b + B^{-1}(\delta b - b) \\ &= \begin{pmatrix} 5/2 \\ 65/2 \\ 115/2 \\ 155/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \\ 35 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 35 \\ 85 \\ 95 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con lo que se concluye que la solución actual es no factible. De este modo, se procede a utilizar el método dual simplex, el cual genera la Tabla 1.4 cuya solución óptima es $(0,30)$ con valor 360. □

1.3. Cambio en la matriz de restricciones A

El último cambio a considerar es en la matriz de restricciones. Dicho cambio puede ser en la columna a_k o en renglón a^k . Cuando hay cambios en una columna, se revisará de forma implícita el caso de análisis de sensibilids al agregar una nueva variable; si hay cambios en un renglón, se revisa la adición de una nueva restricción.

Teniendo una solución óptima de un problema de programación lineal de la forma (P), se desea cambiar la columna a_k por δa_k . Existen dos posibles casos.

Tabla 1.4: Método Dual Simplex, dado $\delta b_4 = 30$ del PPL 1.1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z		0	0	0	1/2	0	9	370
x_1	10	1	0	0	(-1/4)	0	1 1/2	-5
x_2	12	0	1	0	1/4	0	-1/2	35
x_3	0	0	0	1	3/4	0	-11/2	85
x_5	0	0	0	0	1/4	1	-7/2	95
z		2	0	0	0	0	12	360
x_4	0	-4	0	0	1	0	-6	20
x_2	12	1	1	0	0	0	1	30
x_3	0	3	0	1	0	0	-1	70
x_5	0	1	0	0	0	1	-2	90

- Caso 1: x_k es no básica. Se modifica la k -ésima columna del simplex por $B^{-1}\delta a_k$; además, la fila de $z_j - c_j$ también es modificada en la k -ésima entrada por la fila $\delta z_k - c_k = c_B B^{-1} \delta a_k - c_k$. Así, se tienen los siguientes subcasos:
 - Si $\delta z_k - c_k \leq 0$, entonces la solución continúa siendo óptima.
 - Si $\delta z_k - c_k > 0$, se prosigue con el método simplex usual.

- Caso 2: x_k es básica. Primero hay que notar que incluso si se cambiara un solo valor de la columna a_k , la inversa de la base cambiaría y por tanto, la tabla simplex tendría diversas modificaciones. Existe una forma de hacer dichos cambios sin tener que calcular de nuevo todos los valores de la tabla simplex. Supóngase que una nueva actividad δx_k es agregada al problema con columna δa_k y costo c_k , para lo cual se hacen los cálculos $B^{-1}\delta a_k$ y $\delta z_k - c_k = c_B B^{-1} \delta a_k - c_k$ y se agregan a la tabla simplex. Se establece el costo $c_k = M$ para la variable x_k , con M un valor muy grande, como penalización para forzar a x_k a salir de la base, y se continúa con el método simplex usual. Al salir x_k de la base, se elimina la columna de la variable x_k de la tabla. Si no pudiera salir x_k de la base, entonces se concluye que el nuevo problema es no factible.

Ahora supongamos que lo que se desea cambiar es el k -ésimo renglón a^k por δa^k . Observemos que este cambio es equivalente a modificar una columna en el problema dual. Entonces se tienen dos casos:

- δa^k está relacionada con una variable x_{B_i} de holgura / exceso básica. Se reemplaza la k -ésima restricción de la tabla simplex por δa^k en forma estándar “tal cual”; a continuación se pivotea sobre la variable x_{B_i} para obtener la forma canónica en la tabla ¹. Si se obtiene que $B^{-1}b < 0$, se aplica el dual simplex para obtener la solución óptima.

¹ La forma canónica en la tabla hace referencia a los ceros y unos que están asociados a las variables básicas en la tabla simplex. Para esto, se pivotea con cada una de las variables básicas para obtener un cero en su respectiva columna sobre la nueva restricción.

- δa^k no está relacionada con ninguna variable de holgura / exceso básica. Sea x_i la variable de holgura / exceso asociada a la restricción k . Primero, se añade la restricción correspondiente a δa^k con su respectiva variable de holgura / exceso δx a la tabla, esto es, se añade la restricción en forma estándar “tal cual” y se pivotea para obtener la forma canónica en la tabla ², con δx variable básica; si se obtiene que $B^{-1}b < 0$, se aplica el dual simplex para obtener la solución óptima. Ahora,
 - si la variable x_i puede entrar a la base en lugar de δx , hacer este cambio. En otras palabras, si en la columna de x_i del renglón asociado a la variable básica δx es diferente de cero, entonces cambiamos δx por x_i en la base. De esta forma, la variable de holgura x_i no estará asociada a ninguna otra variable (y por ende a ninguna otra restricción). Se elimina el renglón ³ y la columna de la tabla simplex.
 - si en la columna de x_i del renglón asociado a la variable básica δx es igual a cero, entonces no es posible cambiar δx por x_i en la base. A continuación, se intentará hacer redundante la restricción k , por lo que se cambia b_k por M , con M un valor muy grande. Entonces, se actualiza la tabla ($B^{-1}b'$, con b' igual a b y M en la posición k) y se continúa la optimización utilizando dual simplex. Si a pesar de intentar hacer redundante a la restricción k , la tabla continúa siendo óptima, entonces el problema es no acotado.

En seguida se ejemplificará lo anterior con cinco ejercicios: tres con cambios en columna y dos con cambios en fila.

Ejemplo 1.3. Del Problema de Programación Lineal 1.2 con su respectiva tabla simplex óptima, se harán tres cambios en las columnas de A y uno en un renglón.

- ◇ Se cambia la columna a_3 a $\delta a_3 = (0, -2, 2)^t$. Como x_3 no pertenece a la base, entonces simplemente calculamos $B^{-1}\delta a_3$ y $\delta z_3 - c_3$:

$$B^{-1}\delta a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \\ -1/8 \end{pmatrix},$$

$$\delta z_3 - c_3 = (2, 1, 2) \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \\ -1/8 \end{pmatrix} - 1 = -2.$$

Dado que $\delta z_3 - c_3 < 0$, entonces se concluye que la solución actual sigue siendo óptima.

- ◇ Se cambia la columna a_1 por $\delta a_1 = (2, 4, -4)^t$. Puesto que x_1 es básica, se agrega la

²Ver nota 1

³Es decir, se elimina la representación de x_i en términos de las variables no básicas del problema.

variable δx_1 para lo cual necesitamos los valores siguientes:

$$B^{-1} \delta a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3/20 & 0 \\ 11/20 & -3/40 & 1/20 \\ -7/40 & 11/80 & 3/40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/10 \\ 1/20 \end{pmatrix},$$

$$\delta z_1 - c_1 = (2, 1, 2) \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/10 \\ 1/20 \end{pmatrix} - 2 = 0.$$

De lo anterior se observa que δx_1 puede entrar a la base y x_1 es eliminada de la tabla sin haber penalizado el costo de x_1 , con lo que se obtiene la tabla simplex 1.5, con solución óptima $\lambda_1(1/6, 0, 0, 17/6, 11/12, 0) + \lambda_2(0, 2/5, 0, 13/5, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 0, 7/2, 3/4, 0) + \lambda_4(0, 0, 0, 3, 1, 0)$ y 5 como valor en la función objetivo.

Tabla 1.5: Tabla simplex generada a partir de $\delta a_1 = (2, 4, -2)^t$

		x_1	δx_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z		0	0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	5
x_1	2	1	(3/5)	1/4	-1/2	0	0	3/10	0	-3/20	0	1/10
x_4	1	0	7/10	7/8	3/4	1	0	-3/20	-11/20	3/40	-1/20	59/20
x_5	2	0	1/20	1/16	-3/8	0	1	-9/40	7/40	-11/80	-3/40	37/40
z		-	0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	5
δx_1	2	-	1	5/12	-5/6	0	0	1/2	1/6	-1/4	1/6	1/6
x_4	1	-	0	7/12	4/3	1	0	-1/2	-2/3	1/4	-1/6	17/6
x_5	2	-	0	1/24	-1/3	0	1	-1/4	1/6	-1/8	-1/12	11/12

◇ Se cambia la columna a_1 por $\delta a_1 = (2, 3, 1)^t$. De los valores

$$B^{-1} \delta a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3/20 & 0 \\ 11/20 & -3/40 & 1/20 \\ -7/40 & 11/80 & 3/40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/20 \\ 37/40 \\ 11/80 \end{pmatrix}, y$$

$$\delta z_1 - c_1 = (2, 1, 2) \begin{pmatrix} 3/20 \\ 37/40 \\ 11/80 \end{pmatrix} = -1/2,$$

se tiene que la variable δx_1 no puede entrar a la base. Se asigna $c_1 = M$ para penalizar x_1 y se obtiene la Tabla 1.6, cuya solución óptima es $\lambda_1(0, 2/5, 0, 13/5, 1, 0) + \lambda_2(0, 0, 0, 7/2, 3/4, 0) + \lambda_3(0, 0, 0, 3, 1, 0)$ con valor en la función objetivo de 5.

◇ Se cambia el renglón a^1 por $\delta a^1 = (1, 2, 1, 2, 3/2, 0)$. Tomando la base óptima $B = (a_4 \ a_5 \ a_7)$, se obtiene la tabla 1.7. Como la variable de exceso asociada al renglón uno es x_7 y ésta es una variable básica, entonces sustituimos la tercera fila de la tabla (que

Tabla 1.6: Simplex generado dado $\delta a_1 = (2, 3, 1)^t$ de PPL 1.1

		x_1	δx_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z	M-2		$\frac{3M+61}{20}$	$\frac{M+2}{4}$	$\frac{-M-2}{2}$	0	0	$\frac{3M-16}{10}$	1/5	$\frac{-3M-4}{20}$	-1/5	5
x_1	M	1	3/20	(1/4)	-1/2	0	0	3/10	0	-3/20	0	0
x_4	1	0	37/40	7/8	3/4	1	0	-3/20	-11/20	3/40	-1/20	59/20
x_5	2	0	11/80	1/16	-3/8	0	1	-9/40	7/40	-11/80	-3/40	37/40
z		-	-1/2	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	5
x_2	3/2	-	3/5	1	-2	0	0	6/5	2/5	-3/5	2/5	2/5
x_4	1	-	2/5	0	5/2	1	0	-6/5	-1	3/5	-2/5	13/5
x_5	2	-	0	0	-1/4	0	1	-3/10	3/20	0	0	1

está asociada la variable básica x_7) por la restricción $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + \frac{3}{2}x_5 - \delta x_7 = 6$ y se obtiene la Tabla 1.8, en la cual la variable δx_7 es variable básica. Para obtener la forma canónica de la tabla simplex, pivoteamos sobre y_{14} para obtener un cero en y_{34} ; después, pivoteamos con y_{25} para hacer cero la posición y_{35} ; y por último multiplicamos la tercer fila por menos uno para tener un uno sobre y_{37} . Así, se conserva la solución original.

Tabla 1.7: Tabla óptima del PPL 1.2 con $B = (a_4 \ a_5 \ a_7)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z		0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	5
x_4	1	11/2	9/4	-2	1	0	1/2	0	-3/4	1/2	7/2
x_5	2	-7/4	-3/8	1/2	0	1	-3/4	0	1/8	-1/4	3/4
x_7	0	10	5/2	-5	0	0	3	1	-3/2	1	1

- ◇ Se cambia el renglón a^3 por $\delta a^3 = (-4, 0, 1, 0, 6, -3)$. Observemos que la variable de holgura asociada a la tercera restricción es x_9 . Tomando la base óptima $B = (a_1 \ a_4 \ a_5)$, añadimos la restricción anterior en la tabla simplex óptima del PPL 1.2 (ver Tabla 1.9), debido a que x_9 no forma parte de la base, y se agrega la variable de exceso x_{10} ; primero pivoteamos con la posición y_{11} para obtener un cero en y_{41} , después pivoteamos sobre y_{35} para obtener un cero en y_{45} y finalmente multiplicamos por menos uno para que x_{10} sea variable básica. Ahora aplicamos dual simplex sobre x_{10} (entra x_9), y después sobre x_1 (entra x_8). Como la variable asociada a la restricción que fue modificada, x_9 , es básica, entonces eliminamos la fila cuatro y la columna 9. Así, la solución es un único punto $(0,0,0,3,4/3,0)$ con valor en la función objetivo $17/3$.

□

De este modo, concluimos el capítulo de análisis de sensibilidad, el cual nos brindó una idea de cómo cambia la solución de un problema al modificar un parámetro del vector de costos c , el vector de recursos b o la matriz A . En los siguientes capítulos, se harán diversos cambios en los parámetros y veremos hasta qué punto una solución continúa siendo óptima. Los que deseen revisar más ejemplos de los cambios revisados en este capítulo, pueden consultar [3] y [11].

Tabla 1.8: Simplex generado dado $\delta a^1 = (1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 3/2 \ 0)$ del PPL 1.2 con $B = (a_4 \ a_5 \ a_7)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	δx_7	x_8	x_9	
z		0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	5
x_4	1	11/2	9/4	-2	(1)	0	1/2	0	-3/4	1/2	7/2
x_5	2	-7/4	-3/8	1/2	0	1	-3/4	0	1/8	-1/4	3/4
δx_7	0	1	2	1	2	3/2	0	-1	0	0	6
z		0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	5
x_4	1	11/2	9/4	-2	1	0	1/2	0	-3/4	1/2	7/2
x_5	2	-7/4	-3/8	1/2	0	(1)	-3/4	0	1/8	-1/4	3/4
δx_7	0	-10	-5/2	5	0	3/2	-3	-1	3/2	-1	-1
z		0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	5
x_4	1	11/2	9/4	-2	1	0	1/2	0	-3/4	1/2	7/2
x_5	2	-7/4	-3/8	1/2	0	1	-3/4	0	1/8	-1/4	3/4
δx_7	0	-59/8	-31/16	9/4	0	0	-15/8	(-1)	21/16	-5/8	-17/8
z		0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	5
x_4	1	11/2	9/4	-2	1	0	1/2	0	-3/4	1/2	7/2
x_5	2	-7/4	-3/8	1/2	0	1	-3/4	0	1/8	-1/4	3/4
δx_7	0	59/8	31/16	-9/4	0	0	15/8	1	-21/16	5/8	17/8

Valor Marginal

El valor marginal puede entenderse en al menos dos formas dependiendo del autor que se esté leyendo, por ejemplo Katta G. Murty [13] utiliza este término para hacer referencia a la “tasa de cambio” en la función objetivo por unidad de cambio en el vector b ; mientras que, A.C.Williams [17] (conservando la idea de Harlan D. Mills [12]), lo usa para hacer referencia al cambio en la función objetivo cuando se hacen diversos cambios en los vectores b , c y en la matriz A . Esta última forma de entender el valor marginal es el que se utilizará en esta tesis. Así, si se tiene un problema con su solución óptima, el valor marginal indica la tasa de cambio en el valor en la función objetivo de un problema, cuando en éste ocurren diversos cambios en los coeficientes del vector de costos c , en el vector de recursos b y/o en la matriz de restricciones A , si se conservara la misma solución óptima. Cabe señalar que el valor marginal sólo estará definido para problemas cuya solución óptima esté acotada.

Sea A una matriz de $m \times n$, b un vector columna m -dimensional y c un vector renglón n -dimensional, todos los anteriores con elementos en los reales. El problema primal y dual a tratar son de la forma:

$$\max \quad cx \quad s.a. \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad (P_*)$$

$$\min \quad wb \quad s.a. \quad wA \geq c, \quad w \geq 0. \quad (D_*)$$

Ahora, supongamos que tenemos H matriz de $m \times n$, δb un vector columna m -dimensional y δc un vector renglón n -dimensional, los tres con elementos en los reales. Definimos, respectivamente:

$$\max \quad (c + \alpha \delta c)x \quad s.a. \quad (A + \alpha H)x \leq (b + \alpha \delta b), \quad x \geq 0, \quad (P'_\alpha)$$

$$\min \quad w(b + \alpha \delta b) \quad s.a. \quad w(A + \alpha H) \geq (c + \alpha \delta c), \quad w \geq 0, \quad (D'_\alpha)$$

con $\alpha \geq 0$.

Lo que se busca es saber qué tanto podemos decir sobre el valor de la función objetivo de (P'_α) y (D'_α) , dados los sistemas (P_*) y (D_*) , para α cercana a cero.

2.1. El valor marginal para la forma (P_*) y (D_*)

Si se tuviera un PPL con al menos una restricción en igualdad, entonces los siguientes resultados no son del todo válidos. Más adelante se explicará el por qué de la afirmación anterior, y una solución para problemas de ese tipo.

Para empezar, se introducirá la terminología a utilizar. Para hacer referencia a los sistemas lineales (P_*) y (D_*) , se utilizará la matriz \tilde{A} , y de manera análoga para los sistemas (P'_*) y (D'_*) con la matriz \tilde{H} , dadas por:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} H & \delta b \\ \delta c & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

La matriz \tilde{H} suele conocerse como *matriz de perturbación*, y la matriz \tilde{A} denota el *problema de programación lineal*.

El conjunto de soluciones factibles primales para un PPL \tilde{A} estarán denotadas por $S(\tilde{A})$, mientras que $S^\circ(\tilde{A})$ hará referencia al conjunto de soluciones óptimas. De manera análoga se denotarán los conjuntos $T(\tilde{A})$ y $T^\circ(\tilde{A})$ para el problema dual. Es decir,

$$S(\tilde{A}) = \{x | x \geq 0, Ax \leq b\} \quad (2.2)$$

$$T(\tilde{A}) = \{w | w \geq 0, wA \geq c\} \quad (2.3)$$

$$S^\circ(\tilde{A}) = \{x^\circ | x^\circ \in S(\tilde{A}); cx^\circ \geq cx \quad \forall x \in S(\tilde{A})\} \quad (2.4)$$

$$T^\circ(\tilde{A}) = \{w^\circ | w^\circ \in T(\tilde{A}); wb^\circ \leq wb \quad \forall w \in T(\tilde{A})\} \quad (2.5)$$

Además, $\varphi(\tilde{A})$ denotará el valor óptimo de \tilde{A} . Así, se define la función

$$f(\alpha) = \varphi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}), \quad (2.6)$$

cuyo dominio es el conjunto de valores de α para los cuales $S^\circ(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ y $T^\circ(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ son no vacíos. Interesa el comportamiento de $f(\alpha)$ y de éste con α cercana a cero. En particular, es de interés el comportamiento de la derivada, ya que ésta mostrará qué tanto cambia el valor de $\tilde{A} + \alpha\tilde{H}$ cuando α tiende a cero. Es decir, qué tanto cambia el valor óptimo del problema lineal dado que tenemos la matriz de perturbación.

Para que la derivada exista, se necesitan las siguientes tres condiciones:

- (I) Hay un intervalo (cerrado no degenerado) $[0, \alpha_0]$ en el dominio de $f(\alpha)$.
- (II) $f(\alpha)$ es continuo por la derecha en $\alpha = 0$.
- (III) Existe el límite.

$$f'(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}) - \varphi(\tilde{A})}{\alpha}. \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) es llamada *el valor marginal* del problema de programación lineal con respecto a la perturbación \tilde{H} . Las condiciones anteriores se mostrarán en los Lemas 2.1 a 2.8.

Otra función con la cual se va a estar trabajando en este capítulo es *la función lagrangiana*, la cual se define como sigue:

$$\psi(\tilde{A}, x, w) = cx + wb - wAx \quad (2.8)$$

Finalmente, hay unas condiciones que serán de vital importancia para determinar cuándo se puede obtener el valor marginal de un problema dado \tilde{A} , las cuales son llamadas *las condiciones de regularidad*, y son las siguientes:

$$y \geq 0, Ay \leq 0 \Rightarrow cy < 0 \quad \text{para todo vector } y \quad (R1)$$

$$\rho \geq 0, \rho A \geq 0 \Rightarrow \rho b > 0 \quad \text{para todo vector } \rho \quad (R2)$$

Ahora se mencionarán cuatro teoremas importantes que suelen revisarse en los cursos de programación lineal, los cuales serán útiles para los resultados que siguen. Los que deseen revisar las demostraciones, pueden ver el artículo “Marginal values in linear programming” de A.C. Williams [17].

Teorema 2.1. *La matriz de desigualdad $Ax \leq b$ tiene solución no negativa, i.e. $S(\tilde{A})$ es no vacío, si y sólo si, para cada vector renglón semipositivo ¹ ρ , la relación $\rho A \geq 0$ implica $\rho b \geq 0$. De manera similar, $T(\tilde{A})$ es no vacío si y sólo si para cada vector columna semipositivo y , la relación $Ay \leq 0$ implica $cy \leq 0$*

Teorema 2.2. *Los conjuntos de soluciones óptimas del primal y del dual $S^\circ(\tilde{A})$ y $T^\circ(\tilde{A})$ son (ambos) no vacíos si y sólo si los conjuntos de soluciones factibles $S(\tilde{A})$ y $T(\tilde{A})$ son no vacíos.*

Teorema 2.3. *El conjunto de soluciones primales óptimas $S^\circ(\tilde{A})$ es acotado si y sólo si para cada vector columna semipositiva y , la relación $Ay \leq 0$ implica $cy < 0$. El conjunto de soluciones duales óptimas $T^\circ(\tilde{A})$ es acotado si y sólo si para cada vector renglón semipositivo ρ , la relación $\rho A \geq 0$ implica $\rho b > 0$.*

Teorema 2.4. *La condición suficiente y necesaria para que los vectores x° y w° sean soluciones óptimas de los problemas de programación lineal generados por \tilde{A} es que*

$$\psi(\tilde{A}, x, w^\circ) \leq \psi(\tilde{A}, x^\circ, w^\circ) \leq \psi(\tilde{A}, x^\circ, w) \quad (2.9)$$

para todos los vectores no negativos x y w . Aún más:

$$\varphi(\tilde{A}) = \psi(\tilde{A}, x^\circ, w^\circ) \quad (2.10)$$

$$\forall x^\circ \in S^\circ(\tilde{A}), w^\circ \in T^\circ(\tilde{A})$$

El Teorema 2.4 es llamado el “teorema del punto silla”, y la ecuación (2.10) “la condición del punto silla”.

Así, con estos teoremas es posible demostrar los siguientes resultados, que son las condiciones (I), (II) y (III) que establecimos en párrafos anteriores.

Lema 2.1. *Sea \tilde{A} un problema de programación lineal dado, supóngase que para toda \tilde{H} el valor marginal $f'(0)$ existe. Entonces \tilde{A} satisface las condiciones de regularidad.*

¹Un vector semipositivo es aquel que tiene todas sus entradas mayores o iguales a cero.

Dem. Por hipótesis, el valor marginal $f'(0)$ existe para toda \tilde{H} , en particular para \tilde{H}^0 definida por $H = 0$, $\delta b = 0$, $\delta c = u$, en donde u es un vector cuyos elementos son todos 1. Como $f'(0)$ existe, entonces existe α positivo tal que $S^\circ(\tilde{A})$ y $T^\circ(\tilde{A})$ son no vacíos. Sean x_α y w_α elementos de $S^\circ(\tilde{A})$ y $T^\circ(\tilde{A})$ respectivamente. Entonces, por el Teorema 2.4

$$(c + \alpha\delta c)x + w_\alpha b - w_\alpha Ax \leq (c + \alpha\delta c)x_\alpha + w_\alpha b - w_\alpha Ax_\alpha \quad (2.11)$$

para todo vector x no negativo. Si no hay vector semipositivo y tal que $Ay \leq 0$, la condición (R1) se satisface por vacuidad. Si dicho vector existe, se define $x = x_\alpha + y$, y se sustituye en (2.11):

$$\begin{aligned} (c + \alpha\delta c)x_\alpha + (c + \alpha\delta c)y + w_\alpha b - w_\alpha Ax_\alpha - w_\alpha Ay &\leq (c + \alpha\delta c)x_\alpha + w_\alpha b - w_\alpha Ax_\alpha \\ \Rightarrow (c + \alpha\delta c)y - w_\alpha Ay &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dado que $Ay \leq 0$ y $w_\alpha \geq 0$, entonces $w_\alpha Ay \leq 0 \Rightarrow -w_\alpha Ay \geq 0$, y así, de la desigualdad (2.12), $(c + \alpha\delta c)y \leq 0 \Rightarrow cy \leq -\alpha\delta cy < 0$. Es decir, $y \geq 0$, $Ay \leq 0$ implican $cy < 0$, que es la condición (R1). De manera análoga, tomando $H = 0$, $\delta b = -u$, $\delta c = 0$ y usando la segunda desigualdad de la condición de punto silla, se establece la condición (R2). ■

Lema 2.2. *Sea \tilde{A} tal que satisfaga las condiciones de regularidad. Entonces para toda matriz de perturbación \tilde{H} existe α_0 positivo tal que para toda α en el intervalo $[0, \alpha_0]$, los conjuntos de soluciones factibles $S(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ y $T(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ son no vacíos.*

Dem. Supongamos que existe una matriz de perturbación \tilde{H} tal que para todo número positivo α_0 siempre existe un número positivo α para el cual $S(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}) = \emptyset$. Entonces existe una sucesión null ² $\{\alpha_t\}$ tal que para toda t , $S(\tilde{A} + \alpha_t\tilde{H}) = \emptyset$. Entonces, por el Teorema 2.1, hay una sucesión $\{\rho_t\}$ de vectores semipositivos tales que para cada t

$$|\rho_t| = 1, \quad \rho_t(A + \alpha_t H) \geq 0, \quad \rho_t(b + \alpha_t \delta b) < 0.$$

Los vectores de la sucesión $\{\rho_t\}$ provienen de un conjunto compacto, entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass ³ hay un punto límite o punto de acumulación, digamos ρ . Pero cualquier punto límite debe satisfacer $\rho \geq 0$, $\rho A \geq 0$, $\rho b \leq 0$, contradiciendo la hipótesis de que \tilde{A} satisface la condición de regularidad (R2). Por tanto, para toda matriz de perturbación \tilde{H} existe α_0 positivo tal que para toda α en el intervalo $[0, \alpha_0]$, $S(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ es no vacío.

Análogamente para $T(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$. ■

El siguiente resultado es más profundo, pero se deriva del lema anterior.

Corolario 2.1. *Sea \tilde{A} que satisface las condiciones de regularidad. Entonces para toda \tilde{H} existe α_0 positivo tal que para toda α en el intervalo $[0, \alpha_0]$, los conjuntos de soluciones óptimas $S^\circ(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ y $T^\circ(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ son no vacíos. Es decir, $\tilde{A} + \alpha\tilde{H}$ tiene solución.*

Dem. El Lema 2.2 y el Teorema 2.2 establecen el corolario. ■

Hasta aquí, con estos resultados ya hemos obtenido las condiciones para que la condición (I) sea válida. Asimismo, hay que señalar que el corolario anterior nos es útil debido a que asegura que existen problemas lineales que pueden cumplir las hipótesis del siguiente lema.

²Una sucesión null es una sucesión de números positivos con límite cero.

³Teorema de Bolzano-Weierstrass. Si la sucesión es acotada, entonces tiene una subsucesión convergente.

Lema 2.3. Sea \tilde{A} que satisface las condiciones de regularidad, \tilde{H} una matriz de perturbación e $I = [0, \alpha_0]$ un intervalo en el cual el problema lineal $\tilde{A} + \alpha\tilde{H}$ tiene solución. Entonces existe un intervalo $I' = [0, \alpha'_0] \subset I$ en donde $f(\alpha)$ es acotado.

Dem. Basta con mostrar que para cualquier sucesión null $\{\alpha_t\}$, en donde $\alpha_t \in I \ \forall t$, los valores de $f(\alpha_t)$ son acotados. Supongamos que hay una sucesión null $\{\alpha_t\}$ con $\alpha_t \in I \ \forall t$, tal que $\{f(\alpha_t)\}$ es no acotado. Sea $\{x_t\}$ una sucesión de vectores tales que para toda $t, x_t \in S^\circ(\tilde{A} + \alpha_t\tilde{H})$, es decir,

$$(\tilde{A} + \alpha_t\tilde{H})x_t \leq b + \alpha_t\delta b, \quad (2.13)$$

$$f(\alpha_t) = (c + \alpha_t\delta c)x_t. \quad (2.14)$$

Observemos que $f(\alpha_t)$ es no acotado sólo si $\{x_t\}$ es no acotado. Ahora, dada una sucesión no acotada σ , siempre es posible seleccionar una subsucesión σ' tal que sea no acotada. Sea $\{x_{t'}\}$ la subsucesión de $\{x_t\}$. Definiendo $y_{t'} = x_{t'}/|x_{t'}|$ y sustituyendo en (2.13), se tiene que

$$Ay_{t'} + \alpha_{t'}Hy_{t'} \leq \frac{b + \alpha_{t'}\delta b}{|x_{t'}|} \quad (2.15)$$

Dado que las $y_{t'}$ vienen de un conjunto compacto, entonces el punto límite de $\{y_{t'}\}$ existe, y (como es solución factible) dicho punto límite es semipositivo. Sea y un punto límite y $\{y_{t''}\}$ una subsucesión de $\{y_{t'}\}$. Entonces $Ay \leq 0$, pues el lado derecho de la ecuación (2.15) tiene límite cero en esta subsucesión. Por la condición de regularidad (R1), entonces se puede concluir que $cy < 0$. Además, de (2.14),

$$\lim_{t'' \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha_{t''})}{|x_{t''}|} = cy < 0, \quad (2.16)$$

es decir, para valores más grandes de t'' , $f(\alpha_{t''})$ permanece menor que un número negativo. Si ahora consideramos

$$\begin{aligned} w_{t''}(A + \alpha_{t''}H) &= c + \alpha_{t''}\delta c, \\ f(\alpha_{t''}) &= w_{t''}(b + \alpha_{t''}\delta b), \end{aligned}$$

y tomamos $\rho_{t''} = w_{t''}/|w_{t''}|$, y se utiliza el argumento anterior usando (R2), se obtiene

$$\lim_{t''' \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha_{t'''})}{|w_{t'''}|} = \rho b < 0,$$

en donde cada t''' es alguna t'' . Entonces $f(\alpha_{t'''})$ es más grande que algún número positivo !! (pues $f(\alpha_{t''})$ era menor que un número negativo). ■

De este modo, como ya sabemos que $f(\alpha)$ es acotado, si \tilde{A} y α cumplen ciertas condiciones, entonces es posible encontrar sucesiones acotadas, para algunas alphas en el dominio de $f(\alpha)$. Es decir, se tiene el Lema 2.4.

Lema 2.4. Sea \tilde{A} que satisface las condiciones de regularidad y \tilde{H} una matriz de perturbación. Para cualquier sucesión null $\{\alpha_t\}$, en donde α_t está en el dominio de $f(\alpha) \ \forall t$, todas las sucesiones $\{x_t\}$ y $\{w_t\}$ definidas por $x_t \in S^\circ(\tilde{A} + \alpha_t\tilde{H})$ y $w_t \in T^\circ(\tilde{A} + \alpha_t\tilde{H})$ son acotadas.

Dem. Supongamos que existe una sucesión no acotada de $\{x_t\}$. Sea $\{x_{t'}\}$ una sucesión no acotada tal que todas las siguientes subsucesiones de ésta, son no acotadas. Entonces la sucesión $\{y_{t'}\}$ definida por $y_{t'} = x_{t'}/|x_{t'}|$ tiene punto límite y tal que $y \geq 0, Ay \leq 0$, como en la prueba del lema anterior. Entonces (2.16) se mantiene. Por el Lema 2.3, $f(\alpha_{t'})$ es acotado; además, $|x_{t'}| \rightarrow \infty$ implica que este límite sea cero, es decir, $cy = 0$!! (contradice la condición de regularidad (R1)). ■

Ahora, para demostrar el Lema 2.6, es necesario establecer el Lema 2.5.

Lema 2.5. *Sea \tilde{A} un problema de programación lineal y \tilde{H} una matriz de perturbación tal que para cada α en algún intervalo $I = [0, \alpha_0]$ el problema lineal $\tilde{A} + \alpha\tilde{H}$ tiene solución. Entonces para todos los vectores $x^0, w^0, x_\alpha, w_\alpha$ tales que $x^0 \in S^\circ(\tilde{A}), w^0 \in T^\circ(\tilde{A}), x_\alpha \in S^\circ(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ y $w_\alpha \in T^\circ(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$,*

$$\alpha\psi(\tilde{H}, x^0, w_\alpha) \leq f(\alpha) - f(0) \leq \alpha\psi(\tilde{H}, x_\alpha, w^0) \quad (2.17)$$

$\forall \alpha \in I$.

Dem. Por el Teorema 2.4, se tiene que

$$\psi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}, x, w_\alpha) \leq \psi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}, x_\alpha, w_\alpha) \leq \psi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}, x_\alpha, w), \quad (2.18)$$

$$-\psi(\tilde{A}, x^0, w) \leq -\psi(\tilde{A}, x^0, w^0) \leq -\psi(\tilde{A}, x, w^0), \quad (2.19)$$

para todo x y w no negativo, y $\forall \alpha \in I$. Ahora, sustituyendo en (2.18) x y w por x^0 y w^0 , y en (2.19) x y w por x_α y w_α , se obtiene

$$\psi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}, x^0, w_\alpha) \leq \psi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}, x_\alpha, w_\alpha) \leq \psi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}, x_\alpha, w^0), \quad (2.20)$$

$$-\psi(\tilde{A}, x^0, w_\alpha) \leq -\psi(\tilde{A}, x^0, w^0) \leq -\psi(\tilde{A}, x_\alpha, w^0). \quad (2.21)$$

Por otro lado, observemos que la función lagrangiana es lineal en cada uno de sus argumentos, es decir,

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}, x, w) &= (cx + \alpha\delta cx) + (wb + w\alpha\delta b) - (wAx + w\alpha Hx) \\ &= (cx + wb - wAx) + (\alpha\delta cx + w\alpha\delta b - w\alpha Hx) \\ &= \psi(\tilde{A}, x, w) + \alpha\psi(\tilde{H}, x, w). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Así, teniendo en cuenta este último argumento, y sumando las desigualdades (2.20) y (2.21), se llega a la siguiente desigualdad

$$\alpha\psi(\tilde{H}, x^0, w_\alpha) \leq \psi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}, x_\alpha, w_\alpha) - \psi(\tilde{A}, x^0, w^0) \leq \alpha\psi(\tilde{H}, x_\alpha, w^0). \quad (2.23)$$

Aplicando (2.10) y (2.6), se obtiene

$$\alpha\psi(\tilde{H}, x^0, w_\alpha) \leq f(\alpha) - f(0) \leq \alpha\psi(\tilde{H}, x_\alpha, w^0). \quad \blacksquare$$

El siguiente lema es la condición (II) y establece cuándo $f(\alpha)$ es continuo por la derecha en $\alpha = 0$.

Lema 2.6. *Sea \tilde{A} que satisface las condiciones de regularidad y \tilde{H} una matriz de perturbación. Entonces $f(\alpha)$ es continuo por la derecha en $\alpha = 0$.*

Dem. Por el Corolario 2.1, cuando \tilde{A} satisface las condiciones de regularidad, las hipótesis del Lema 2.5 se satisfacen. Además, (2.17) se mantiene para algún intervalo $I = [0, \alpha_0]$. Si se toma cualquier sucesión nula $\{\alpha_t\}$, $\alpha_t \in I$, las sucesiones $\{x_t\}$ y $\{w_t\}$ son acotadas, por el Lema 2.4. Además, para alguna γ_1 y γ_2

$$\alpha_t \gamma_1 \leq f(\alpha_t) - f(0) \leq \alpha_t \gamma_2$$

$\forall t$. La diferencia $|f(\alpha_t) - f(0)|$ puede hacerse más pequeña que cualquier número positivo escogiendo t lo suficientemente grande. Así, $f(\alpha)$ es continuo por la derecha en $\alpha = 0$. ■

De este modo, por el Corolario 2.1, si \tilde{A} satisface las condiciones de regularidad, siempre es posible construir una sucesión nula $\{\alpha_t\}$ tal que cada α_t esté en el dominio de $f(\alpha)$. Por el Lema 2.4, las sucesiones $\{\alpha_t\}$ y $\{w_t\}$ son acotadas. Sea X el conjunto de vectores x que son puntos límite para alguna sucesión $\{x_t\}$, y sea W el conjunto de vectores w tales que son puntos límite de la sucesión w_t . Por lo anterior y el teorema de Bolzano-Weierstrass, los conjuntos X y W son no vacíos. Claramente X y W son cerrados y acotados. Así, cada vez que \tilde{A} satisface las condiciones de regularidad, para toda matriz de perturbación \tilde{H} , se puede asociar a los problemas \tilde{A} y \tilde{H} dos conjuntos no vacíos, cerrados y acotados (compactos) de puntos límite X y W . Los conjuntos X y W se conocen como *conjuntos de puntos límite asociados*.

Lema 2.7. *Sea \tilde{A} que satisface las condiciones de regularidad, \tilde{H} una matriz de perturbación y X y W los conjuntos de puntos límite asociados. Entonces $X \subset S^\circ(\tilde{A})$ y $W \subset T^\circ(\tilde{A})$. Más aún,*

$$\begin{aligned} \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^* \in W} \psi(\tilde{H}, x^0, w^*) &\leq \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^0, w^0) \\ &\leq \max_{x^* \in X} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^*, w^0). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dem. Como $(A + \alpha_t H)x_t \leq b + \alpha_t \delta b$, se tiene que para cada $x^* \in X$, $Ax^* \leq b$, es decir, $X \subset S(\tilde{A})$. Además,

$$\begin{aligned} f(\alpha_t) &= (c + \alpha_t \delta c)x_t, \\ f(0) &= cx^0, \\ f(\alpha_t) - f(0) &= cx_t - cx^0 + \alpha_t \delta cx_t. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $x_t \rightarrow x^*$, y usando el Lema 2.6, se tiene que $cx^* = cx^0$. Así, $X \subset S^\circ(\tilde{A})$. De manera análoga se prueba que $W \subset T^\circ(\tilde{A})$.

Ahora, dado que W es un conjunto cerrado y acotado, es posible encontrar un valor $w^* \in W$ tal que una función lineal sea mínima. Como $T^\circ(\tilde{A})$ también es cerrado y acotado, $W \subset T^\circ(\tilde{A})$ implica que

$$\min_{w^* \in W} \psi(\tilde{H}, x^0, w^*) \geq \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^0, w^0)$$

para cada $x^0 \in S^\circ(\tilde{A})$. Dado que $S^\circ(\tilde{A})$ también es cerrado y acotado, se puede tomar en ambos lados el máximo, teniéndose así la primera desigualdad de la expresión (2.24). La segunda parte de dicha desigualdad se obtiene de manera similar. ■

Cabe señalar que los lemas anteriores indican que si un problema cumple con las condiciones de regularidad, entonces su solución óptima es acotada, por ejemplo su caracterización no está dada por un hiperplano no acotado o un rayo. De este modo, el siguiente lema está bien definido. Además, es equivalente a la condición (III).

Lema 2.8. *Sea \tilde{A} que satisface las condiciones de regularidad y \tilde{H} una matriz de perturbación. Entonces la derivada por la derecha $f'(0)$ existe y dicho valor está dado por*

$$f'(0) = \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^0, w^0).$$

Dem. Por el Corolario 2.1, las condiciones del Lema 2.5 se satisfacen, y así para cada t suficientemente grande, se tiene, por la segunda desigualdad de (2.17) y por (2.24)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{f(\alpha_t) - f(0)}{\alpha_t} - \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^0, w^0) \right] \\ & \leq \psi(\tilde{H}, x_t, w^0) - \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^0, w^0) \\ & \leq \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x_t, w^0) - \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^0, w^0) \\ & \leq \varepsilon + \max_{x^* \in X} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^*, w^0) - \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^0, w^0) \\ & \leq \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$. Entonces, el segundo término de los corchetes toma límite y el lema queda demostrado. ■

Finalmente, al mostrarse cuándo y cómo se cumplen las condiciones (I), (II) y (III), se ha llegado a los dos teoremas más importantes, cuya demostración queda dada por los Lemas 2.1 a 2.8, los cuales nos dan las condiciones suficientes y necesarias para que el valor marginal exista, así como una forma de calcularlo.

Teorema 2.5. *Sea \tilde{A} un problema de programación lineal. Entonces la condición necesaria y suficiente para que el valor marginal $f'(0)$ del problema de programación lineal \tilde{A} con respecto a la perturbación \tilde{H} exista para cada \tilde{H} , es que los conjuntos $S^\circ(\tilde{A})$ y $T^\circ(\tilde{A})$ sean acotados, o, equivalentemente, que \tilde{A} satisfaga las condiciones de regularidad.*

Teorema 2.6. *Sea \tilde{A} tal que satisfaga las condiciones de regularidad, y sea \tilde{H} cualquier matriz de perturbación. Entonces el valor marginal $f'(0)$ de \tilde{A} con respecto a \tilde{H} está dado por*

$$f'(0) = \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^0, w^0) \quad (2.25)$$

Para ejemplificar mejor el cálculo del valor marginal, se realizarán dos ejemplos, los cuales también serán resueltos mediante la función `valMarg` en R. El manual de usuario y el código para correr dicha función se encuentran en el Apéndice A y B respectivamente.

Cabe señalar que una interpretación de la perturbación δb respecto a b , es que si δb tuviese 1 en todas sus entradas, entonces se puede entender que b incrementa α veces en una unidad en

cada entrada, es decir, todos los coeficientes incrementan de manera homogénea. Por otro lado, si la segunda entrada de δb fuese 2, entonces el lado derecho de la segunda entrada aumenta dos veces más rápido que el resto; se podría decir que, si se habla de demanda, ésta es mayor en la segunda restricción en comparación con las otras restricciones. El mismo análisis se puede extender para los coeficientes en H y δc .

Ejemplo 2.1. Tomando el Problema 1.1 de la sección anterior, no se mostrará que se cumplen las condiciones de regularidad puesto que ya se ha demostrado que tiene solución óptima única; recordando que las soluciones óptimas y el valor de la función objetivo del primal y del dual están dadas por

$$\begin{aligned} S^\circ &= \{(5/2, 65/2)\}, \\ T^\circ &= \{(0, 1/2, 0, 9)\}, \\ \varphi(\tilde{A}) &= 415, \end{aligned}$$

y tomando

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \delta c = (2, \quad 3/2)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^0, w^0) \\ &= \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} (\delta c x^0 + w^0 \delta b - w^0 H x^0) \\ &= \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} (\delta c x^0 + 4w_1^0 + 10w_2^0 + 15w_3^0 + 8w_4^0 - \\ &\quad \left(\begin{array}{c} -w_3^0 + w_4^0 \\ w_1^0 - w_2^0 - w_3^0 + w_4^0 \end{array} \right)^t \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Como $T^\circ(\tilde{A})$ es un singulete, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \left(2x_1^0 + \frac{3}{2}x_2^0 + 10\frac{1}{2} + 8(9) - \begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{1}{2} + 9 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} (-7x_1^0 - 7x_2^0 + 77) \\ &= -7\frac{5}{2} - 7\frac{65}{2} + 77 \\ &= -168 \end{aligned}$$

Así, dadas las condiciones anteriores, como el valor marginal es la tasa de cambio que se tiene respecto a la matriz de perturbación, se puede decir que la empresa tendrá una pérdida de \$168, es decir, tendrá una ganancia de \$415 - \$168 = \$ 247. De este modo, la empresa tendría que cambiar el precio de los jugos, la combinación de los concentrados o todo en conjunto.

Con ayuda de la función valMarg, se obtiene el mismo valor. El código puede ser encontrado en el Apéndice C. \square

Ejemplo 2.2. Si se toma el problema 1.2, entonces se tiene que dicho problema es el dual, pues es de la forma (D_*) . Así, tomando el dual se obtiene que

$$\begin{aligned} S^\circ &= \{(0, 1/2, 0)\}, \\ T^\circ &= \{\lambda_1(1/10, 0, 0, 59/20, 37/40, 0) + \lambda_2(0, 2/5, 0, 13/5, 1, 0) + \\ &\quad \lambda_3(0, 0, 0, 7/2, 3/4, 0) + \lambda_4(0, 0, 0, 3, 1, 0) \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \lambda_i \geq 0 \ \forall i\}, \end{aligned}$$

$$\varphi(\tilde{A}) = 5.$$

Sean

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta c = (7, -1, 2),$$

entonces se obtiene el siguiente valor marginal:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} \psi(\tilde{H}, x^0, w^0) \\ &= \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} (\delta c x^0 + w^0 \delta b - w^0 H x^0) \\ &= \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \min_{w^0 \in T^\circ(\tilde{A})} (\delta c x^0 - w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0 + w_6^0 \\ &\quad - \begin{pmatrix} w_2^0 + w_3^0 + w_6^0 \\ -w_1^0 + w_3^0 + w_4^0 + w_5^0 + w_6^0 \\ 3w_2^0 + w_3^0 + 2w_4^0 + 3w_5^0 + w_6^0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Tomando la solución con $\lambda_1 = 1, \lambda_i = 0, i = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \left(7x_1^0 - x_2^0 + 2x_3^0 + \frac{57}{20} - \left(0, \frac{151}{40}, \frac{347}{40} \right) \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \max_{x^0 \in S^\circ(\tilde{A})} \left(7x_1^0 - \frac{191}{40}x_2^0 - \frac{267}{40}x_3^0 + \frac{57}{20} \right) \\ &= 37/80 \end{aligned}$$

Una interpretación económica, desde el punto de vista del dual original de este problema, es que se tendría una ganancia de \$37/80 dadas las nuevas condiciones, es decir ahora se tendrá una ganancia de \$5 + \$37/80 = \$ 437/80. Entonces se podría deducir que las nuevas condiciones beneficiarían a la fábrica. Sin embargo, como el problema original era a minimizar, entonces se observa que hay un aumento en el costo, por lo que la perturbación afecta a la función objetivo, es decir, las nuevas condiciones perjudican a la fábrica y ahora el valor en la función objetivo es \$5 - \$37/80 = 363/80. Así, la fábrica de telas debería revisar las perturbaciones y buscar una tal que le perjudique lo menos posible.

El código para hacer lo anterior con la función valMarg se encuentra en el Apéndice C. \square

2.2. Las condiciones de regularidad de Kuhn-Tucker

Las condiciones de regularidad (R1) y (R2) están relacionadas con las llamadas “condiciones de regularidad de Kuhn-Tucker” (condición K-T), que están establecidas para un problema de maximización de la función $z(x)$ ⁴ del vector x sujeto a las condiciones $x \in Q$, $g_i(x) \leq 0$, con $i = 1, 2, \dots, n$ y $g(x)$ el vector con componentes $g_i(x)$, como sigue: *Para todo vector ρ semipositivo hay un vector $x \in Q$ tal que $\rho g(x) < 0$.* La importancia de estas condiciones es que cuando z y g_i , $i = 1, 2, \dots, n$, son funciones convexas, y Q es un conjunto convexo, entonces la condición K-T es suficiente para la existencia del punto silla (x^0, w^0) para la función lagrangiana $z(x) - wg(x)$. Por todo lo anterior, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.7. *Sea \tilde{A} un problema de programación lineal. Entonces las condiciones de regularidad (R1) y (R2) se satisfacen si y sólo si cada uno de los problemas generados por \tilde{A} satisfacen la condición de Kuhn-Tucker.*

Dem. \Rightarrow) Para el problema primal (P_*) , se tiene que $Q = \{x | x \geq 0\}$, $g(x) = Ax - b$. Sea ρ un vector semipositivo, y supóngase que la condición (R2) se satisface. Si algún componente de ρA es negativo, a decir el i -ésimo, entonces el vector \bar{x} con elementos

$$\xi_k = 0, \quad k \neq i; \quad \xi_i > \max\{0, \rho b / (\rho A)_i\}$$

claramente satisface $\bar{x} \in Q$, $\rho(A\bar{x} - b) = \rho g(\bar{x}) < 0$. Sin embargo, si $\rho A \geq 0$, se toma $\bar{x} = 0$, en cuyo caso $\bar{x} \in Q$ y, usando (R2), $\rho g(\bar{x}) = \rho(A\bar{x} - b) = -\rho b < 0$. El problema dual puede ser tratado de manera similar.

\Leftarrow) Supóngase que el problema primal satisface la condición K-T. Entonces, para todo vector semipositivo ρ , existe un vector $\bar{x} \geq 0$ tal que $\rho(A\bar{x} - b) < 0$. Si el vector semipositivo satisface que $\rho A \geq 0$, entonces $\rho A \bar{x} \geq 0$ y se sigue que $\rho b > 0$; así, se obtiene la condición (R1). Análogamente para (R2). ■

Geoméricamente, la condición K-T se ha descrito como

1. la condición para que el hiperplano tangente al espacio factible nunca de una vuelta de 180° en cualquier dirección, o
2. que el espacio factible tenga un punto interior.

En otras palabras, es la condición para que el poliedro factible sea no degenerado, es decir, que la dimensión del conjunto factible sea el mismo que la dimensión de Q , lo cual se mantiene para el primal como para el dual.

2.3. El valor marginal para un problema mixto

Imaginemos que se tiene un problema en el cual una de las restricciones fuera una igualdad. Entonces, no es posible obtener el valor marginal de la forma ya antes revisada, debido a que si se tiene una restricción en igualdad en la i -ésima posición (s.p.g. en (P_*)), siempre se puede sustituir dicha igualdad por las desigualdades $a_i x \leq b_i$ y $-a_i x \leq -b_i$. Con estas desigualdades,

⁴ $z(x)$ es el valor óptimo de la función objetivo.

las condiciones de regularidad no se satisfacen, debido a que el vector ρ cuyos elementos i e $i + 1$ son 1 mientras que los otros son cero, es claramente un vector semipositivo que satisface $\rho A = 0$ y $\rho b = 0$.

Para solucionar lo anterior, se definen los problemas de programación lineal como sigue

$$\max c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (P_{**})$$

s.a.

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1,$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2,$$

$$x_1 \geq 0;$$

$$\min w_1 b_1 + w_2 b_2 \quad (D_{**})$$

s.a.

$$w_1 A_{11} + w_2 A_{21} \geq c_1,$$

$$w_1 A_{12} + w_2 A_{22} = c_2,$$

$$w_1 \geq 0.$$

La matriz generadora del problema de programación lineal y la matriz de perturbación quedan de la forma

$$\tilde{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & b_2 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}^* = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \delta b_1 \\ H_{21} & H_{22} & \delta b_2 \\ \delta c_1 & \delta c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, las funciones $f(\alpha)$ y la función lagrangiana estarán definidas de manera similar:

$$f(\alpha) = \varphi(\tilde{A}^* + \alpha \tilde{H}^*), \varphi \text{ el valor óptimo del problema } \tilde{A}^* + \alpha \tilde{H}^*,$$

$$\psi^* = \delta c x_1^0 + \delta c_2 x_2^0 + w_1^0 \delta b_1 + w_2 \delta b_2 - (w_1^0, w_2^0) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, las condiciones de regularidad serán

$$\begin{aligned} (y_1 y_2) \neq 0, y_1 \geq 0, A_{11} y_1 + A_{12} y_2 \leq 0, \\ A_{21} y_1 + A_{22} y_2 = 0 \Rightarrow c_1 y_1 + c_2 y_2 < 0, \end{aligned} \quad (R1^*)$$

$$\begin{aligned} (\rho_1 \rho_2) \neq 0, \rho_1 \geq 0, \rho_1 A_{11} + \rho_2 A_{21} \geq 0, \\ \rho_1 A_{12} + \rho_2 A_{22} = 0 \Rightarrow \rho_1 b_1 + \rho_2 b_2 > 0. \end{aligned} \quad (R2^*)$$

Ahora, los teoremas que dan las condiciones suficientes y necesarias para que exista el valor marginal, así como la forma de calcularlo, quedarán como sigue:

Teorema 2.8. *Sea \tilde{A}^* un problema de programación lineal. Entonces la condición necesaria y suficiente para que el valor marginal $f'(0)$ del problema de programación lineal \tilde{A}^* con respecto a la perturbación \tilde{H}^* exista para cada \tilde{H}^* , es que los conjuntos de soluciones óptimas primales y duales de \tilde{A}^* sean acotados, o, equivalentemente, que \tilde{A}^* satisfaga las condiciones de regularidad $R1^*$ y $R2^*$.*

Teorema 2.9. *Sea \tilde{A}^* tal que satisfaga las condiciones de regularidad, y sea \tilde{H}^* cualquier matriz de perturbación. Entonces el valor marginal $f'(0)$ de \tilde{A}^* con respecto a \tilde{H}^* está dado por*

$$f'(0) = \max_{x^\circ \in S^\circ(\tilde{A}^*)} \min_{w^\circ \in T^\circ(\tilde{A}^*)} \psi^*(\tilde{H}^*, x^\circ, w^\circ) \quad (2.26)$$

Para demostrar estos dos teoremas, se extienden de manera análoga todos los lemas vistos a lo largo de este capítulo. Para quienes deseen una explicación más amplia, se recomienda revisar el artículo de A.C. Williams [17].

2.4. Comentarios finales

Por último, como se mencionó al inicio de este capítulo, A.C. Williams fue de los pioneros en hablar del valor marginal. De hecho, Harlan D. Mills [12] lo hizo años antes, pero Williams en su artículo “Marginal values in linear programming” [17] menciona que Mills tiene algunos errores. Por otro lado, hay otros artículos que tratan el valor marginal de manera diferente a lo visto en este capítulo; uno de ellos es Stephen M. Robinson con su artículo “A Characterization of Stability in Linear Programming” [14], en el que muestra que α_0 depende de las magnitudes de la perturbación, así que en lugar de alterar el problema inicial con α veces la matriz de perturbación, simplemente se plantea cambiar A , b y c por A' , b' y c' . Además, muestra la distancia de las soluciones óptimas entre (P_*) , (D_*) y (P'_*) , (D'_*) (definiendo estos últimos con A' , b' y c').

Cambios del lado derecho

En este capítulo, se buscará el intervalo de α para el cual un problema perturbado en el vector de recursos b por $b + \alpha\delta b$ conserva su base óptima. Para esto, se analizarán dos formas diferentes de hacerlo. La primera forma está basada en el libro de Mokhtar S. Bazaraa et. al. [3], mientras que la segunda manera de encontrar el intervalo buscado está basada en un artículo de Allen Holder [8]. Es importante mencionar que para entender mejor la sección basada en el artículo de Allen Holder, se recomienda revisar la teoría de la primera sección de este capítulo.

3.1. Método Según Bazaraa

Primero estableceremos una manera de encontrar el intervalo para el cual un problema de programación lineal conserva su base óptima dado que se tienen diversos cambios en el vector de recursos b .

Tomando un problema de programación lineal en su forma estándar:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{P}$$

en donde A es una matriz de $m \times n$, b un vector en \mathbb{R}^m y c un vector renglón en \mathbb{R}^n , se desea saber qué pasaría si el vector b se cambiara por $b + \alpha\delta b$ con $\alpha \geq 0$ y δb un vector en \mathbb{R}^m , es decir, se quiere establecer para qué valores de α la solución óptima actual sigue siendo óptima. El nuevo problema de programación lineal sería el siguiente:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b + \alpha\delta b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{P}$$

Observemos que este cambio es equivalente a cambiar la función objetivo de su problema dual. Sea B la base óptima actual y x_B el valor óptimo de las variables básicas. De esta forma, para $\alpha = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} z + (c_B B^{-1} N - c_N) x_N &= c_B B^{-1} b \\ c_B B^{-1} b + c_B B^{-1} N x_N - c_N x_N &= c_B B^{-1} b \\ B^{-1} b + B^{-1} N x_N &= B^{-1} b \\ x_B + B^{-1} N x_N &= B^{-1} b \end{aligned} \quad (3.1)$$

Así, al cambiar b por $b + \alpha \delta b$ sólo se verá afectado el lado derecho de (3.1). Además, se observa que la factibilidad del problema dual no se ve afectada debido a que dicha factibilidad¹ se observa en el renglón de $z_j - c_j$ y éste no involucra operaciones con el vector b , es decir, $z_j - c_j \leq 0$, y los cambios que se han realizado sólo son en b . Dicho esto, de la ecuación (3.1), la optimalidad en el primal se mantendrá siempre y cuando $B^{-1}(b + \alpha \delta b)$ sea no negativa, es decir, si

$$\begin{aligned} B^{-1}(b + \alpha \delta b) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow B^{-1}b + \alpha B^{-1} \delta b &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \bar{b} + \alpha \bar{\delta b} &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{si } \bar{\delta b} < 0 \\ \Rightarrow \bar{b} \geq -\alpha \bar{\delta b} &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por lo tanto, el caso que interesa es cuando $\bar{\delta b} < 0$. Sea $S = \{i | \bar{\delta b}_i < 0\}$. Si $S = \emptyset$, entonces, por (3.2), $\forall \alpha \geq 0$ la base actual es óptima. En otro caso, se define:

$$\bar{\alpha} = \text{Mín}_{i \in S} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{-\bar{\delta b}_i} \right\}. \quad (3.4)$$

De esta forma, si denotamos por $\alpha_1 = \bar{\alpha}$, entonces $\forall \alpha \in [0, \alpha_1]$ se tiene que la base actual es óptima, $x_B = B^{-1}(b + \alpha \delta b)$ y el valor de la función objetivo es $c_B B^{-1}(b + \alpha \delta b)$. Si se toma el extremo del intervalo, es decir α_1 , el lado derecho de las restricciones es $b + \alpha_1 \delta b$. Si α_1 aumenta un poco, entonces la base actual deja de ser óptima, y se sabe que la variable asociada a la no factibilidad es la que pertenece al subíndice i que se obtuvo en $\bar{\alpha}$ de (3.4). Así, teniendo en mente lo anterior y usando apropiadamente el método dual simplex, se puede obtener una nueva base. Es decir, se pivotea la posición y_{ik} tal que

$$\frac{z_k - c_k}{y_{ik}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{ij}} : y_{ij} < 0 \right\},$$

en donde $y_{ik} = (B^{-1}A)_{ik}$. Para más detalles de este tipo de pivote del algoritmo dual simplex, se puede revisar el Apéndice D.

¹Para los que deseen revisar más detalles de la factibilidad en el dual en la tabla simplex del primal, pueden revisar el Apéndice D.

Aplicando todo lo anterior, se desea buscar el valor de α tal que el nuevo problema con la base óptima actual siga siendo óptima, es decir, buscamos el intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ que nos conserve la factibilidad en el lado derecho dado por $b + \alpha_1 \delta b$. Para esto, se hace el procedimiento antes descrito nuevamente.

El proceso anterior se termina cuando

- $S = \emptyset$, en donde la base actual es óptima para todo valor de α mayor o igual al último valor de α obtenido; o
- todas las entradas de la fila cuyo lado derecho tienda a cero sean no negativas (es decir, cuando no se pueda obtener un pivote en el método dual simplex), en donde se generan sólo bases no factibles para todos los valores de α mayores al último valor de α obtenido.

El diagrama del algoritmo para encontrar los intervalos (α_i, α_{i+1}) para los cuales una base es óptima con el cambio $b + \alpha \delta b, \forall \alpha \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$, se encuentra en el Diagrama 3.1.

A continuación se muestra un ejemplo del procedimiento ilustrado en el Diagrama 3.1.

Ejemplo 3.1. Tomando el Problema de Programación Lineal 1.2 y $B = (a_2 \ a_4 \ a_5)$, se obtiene la Tabla 3.1. Sea $\delta b = (7, \ -1, \ 2)^t$. Se establecen $k = 0$ y $\alpha_0 = 0$.

Tabla 3.1: Tabla óptima de PPL 1.2 con $B=(a_2 \ a_4 \ a_5)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z		0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	5
x_2	3/2	4	1	-2	0	0	6/5	2/5	-3/5	2/5	2/5
x_4	1	-7/2	0	5/2	1	0	-6/5	-1	3/5	-2/5	13/5
x_5	2	-1/4	0	-1/4	0	1	-3/10	3/20	0	0	1

De esta forma, por la Tabla 3.2 se observa que $S = \{i | \overline{\delta b}_i < 0\} = \{1, 3\} \neq \emptyset$, así que se toma $k = 1$ y $\overline{\alpha} = 2/21 = \alpha_1$. Nótese que este valor es obtenido a partir del índice $i = 1$.

Tabla 3.2: Tabla auxiliar para obtener $\overline{\alpha}$ para $k=1$

δb	$\overline{\delta b}$	\overline{b}	$-\overline{b}/\overline{\delta b}$	$\overline{\alpha}$
7	-21/5	2/5	2/21	2/21
-1	77/10	13/5	-	
2	-19/20	1	18/19	

Cambiando \overline{b} por $\overline{b} + \alpha \overline{\delta b}$ en la Tabla Simplex 3.1 se obtiene la Tabla 3.3; la función objetivo en función de alpha es de la forma $5 - \alpha(1/2)$. Esta tabla permanecerá siendo óptima $\forall \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Cuando α salga de este rango, entonces la variable x_2 provocará que la tabla

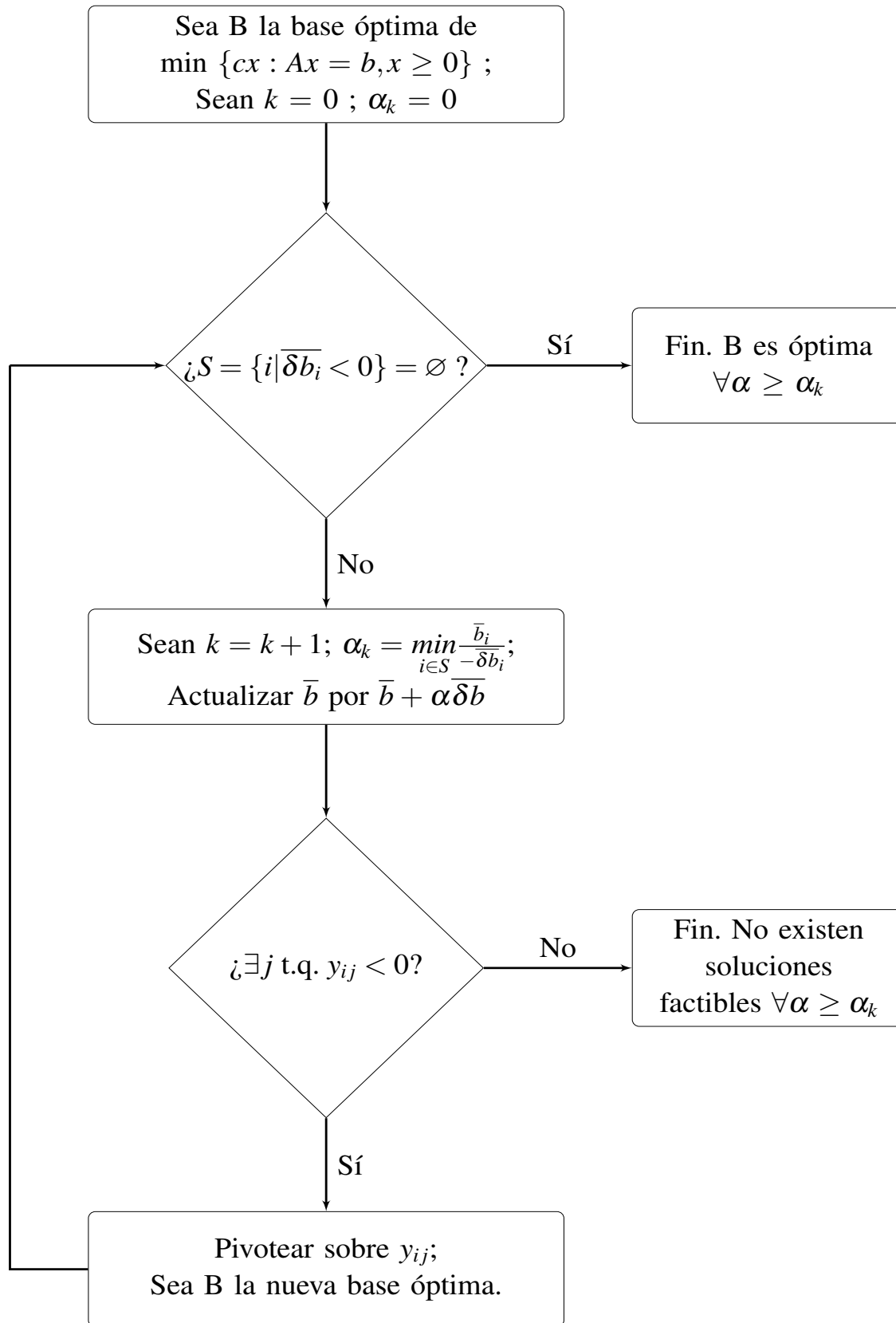


Figura 3.1: Diagrama del algoritmo para encontrar intervalos de α para la parametrización $b + \alpha \delta b$, según Bazaraa

ya no sea factible, pues nótese que si $\alpha = 2/21$, entonces $(\bar{b} + \alpha\bar{\delta}b)_1 = 2/5 - (2/21)(21/5) = 0$.

Tabla 3.3: Tabla óptima de PPL 1.2 sustituyendo \bar{b} por $\bar{b} + \alpha\bar{\delta}b$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z		0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	$5 - \alpha(1/2)$
x_2	3/2	4	1	-2	0	0	6/5	2/5	-3/5	2/5	$2/5 - \alpha(21/5)$
x_4	1	-7/2	0	5/2	1	0	-6/5	-1	3/5	-2/5	$13/5 + \alpha(77/10)$
x_5	2	-1/4	0	-1/4	0	1	-3/10	3/20	0	0	$1 - \alpha(19/20)$

Tabla 3.4: Tabla óptima de PPL 1.2 con $(\bar{b} + \alpha_1\bar{\delta}b)$, generada a partir del algoritmo dual simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z		0	0	-2	0	0	-1	0	-1/2	0	104/21
x_2	3/2	4	1	-2	0	0	6/5	2/5	(-3/5)	2/5	0*
x_4	1	-7/2	0	5/2	1	0	-6/5	-1	3/5	-2/5	7/3
x_5	2	-1/4	0	-1/4	0	1	-3/10	3/20	0	0	17/21
z		-7/3	-5/6	-1/3	0	0	-2	-1/3	0	-1/3	104/21
x_8	0	-20/3	-5/3	10/3	0	0	-2	-2/3	1	-2/3	0
x_4	1	1/2	1	1/2	1	0	0	-1/2	0	0	10/3
x_5	2	-11/12	-1/6	1/12	0	1	-1/2	1/12	0	-1/6	17/21

Como es posible aplicar el pivote del método dual simplex sobre el renglón $i = 1$, entonces se genera la Tabla 3.4 con base $B = (a_4 \ a_5 \ a_8)$. A partir de esta base, se obtiene que $S = \{3\} \neq \emptyset$ y por tanto se toma $k = 2$, y $\bar{\alpha} = 10/3 = \alpha_2$ (Ver Tabla 3.5).

Tabla 3.5: Tabla auxiliar para obtener $\bar{\alpha}$ para $k=2$

δb	$\bar{\delta}b$	\bar{b}	$-\bar{b}/\bar{\delta}b$	$\bar{\alpha}$
7	7	-2/3	-	10/3
-1	7/2	3	-	
2	-1/4	5/6	10/3	

Así, la tabla simplex óptima para los valores de $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ es la Tabla 3.6, cuyo valor en la función objetivo en función de alpha es $104/21 + \alpha 3$. De nuevo, si $\alpha = 68/21$, entonces en la tercer fila de la tabla se obtiene $17/21 - (68/21)(1/4) = 0$, concluyéndose que para valores más grandes, la variable x_5 será negativa y entonces la tabla dejaría de ser óptima.

Tabla 3.6: Tabla óptima simplex para $(\bar{b} + \alpha_1 \bar{\delta b}) + \alpha \bar{\delta b}$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z		-10/3	-5/6	-1/3	0	0	-2	-1/3	0	-1/3	104/21 + α 3
x_8	0	-20/3	-5/3	10/3	0	0	-2	-2/3	1	-2/3	0 + α (7)
x_4	1	1/2	1	1/2	1	0	0	-1/2	0	0	10/3 + α (7/2)
x_5	2	-11/12	-1/6	1/12	0	1	-1/2	1/12	0	-1/6	17/21 - α (1/4)

Por lo anterior, y dado que es posible aplicar el dual simplex sobre el renglón $i = 3$, se obtiene la tabla 3.7. Ahora la base es $B = (a_4 \ a_8 \ a_9)$. Con esta base se obtiene que $\bar{\delta b} = (8, \ 7/2, \ 3/2)^t$; por tanto, se concluye que $S = \emptyset$ y entonces $\forall \alpha \geq \alpha_2$ la base actual continuará siendo óptima; el valor en la función objetivo es de la forma $44/3 + \alpha 13$.

Tabla 3.7: Tabla óptima con $(\bar{b} + \alpha_2 \bar{\delta b}) + \alpha_2 \bar{\delta b}$, generada a partir del algoritmo dual simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z		-10/3	-5/6	-1/3	0	0	-2	-1/3	0	-1/3	44/3
x_8	0	-20/3	-5/3	3 1/3	0	0	-2	-2/3	1	-2/3	68/3
x_4	1	1/2	1	1/2	1	0	0	-1/2	0	0	44/3
x_5	2	-11/12	-1/6	1/12	0	1	-1/2	1/12	0	(-1/6)	0*
z		-3/2	-1/2	-1/2	0	-2	-1	-1/2	0	0	44/3
x_8	0	-3	-1	3	0	-4	0	-1	1	0	68/3
x_4	1	1/2	1	1/2	1	0	0	-1/2	0	0	44/3
x_9	0	11/2	1	-1/2	0	-6	3	-1/2	0	1	0

Finalmente, en la Tabla 3.8 se muestran los intervalos de α para los cuales se mantiene una base óptima dado el cambio $b + \alpha \delta b$ del lado derecho del Problema de Programación Lineal 1.2. Una interpretación a estos intervalos, es que la fábrica puede aumentar hasta $(2/21)\delta b$ veces el lado derecho del problema lineal, es decir, puede satisfacer la demanda si ésta aumentara $(2/21)\delta b$ unidades. Sólo cambiarían las cantidades de metros de las telas x_2 , x_4 y x_5 . El costo mínimo por hacer este cambio será de \$104/21. Si la fábrica tuviera más demanda del tipo $\alpha \delta b$, con $\alpha \in [2/21, 68/21]$, entonces la cantidad de metros de la tela 2 sería cero, y la cantidad de las telas 4 y 5 cambiarían; el costo por hacer estos cambios está entre \$104/21 y \$44/3. Finalmente, para $\alpha > 68/21$, el costo aumentará dependiendo del valor de α , la cantidad de metros de la tela 4 cambiará y se dejará de producir la tela 5.

Con la función `intervRHS` se pueden obtener dichos intervalos; el código para este ejemplo se encuentra en el Apéndice C, mientras que el manual de usuario y el código de dicha función en los apéndices A y B respectivamente.

□

Tabla 3.8: Intervalos de α para los cuales $b + \alpha\delta b$ es óptimo

Intervalo	Base	Valor de z en función de α	Valor mínimo en z	Valor máximo en z
$[0, 2/21]$	$(a_2 \ a_4 \ a_5)$	$5 + (1/2)\alpha$	5	104/21
$[2/21, 68/21]$	$(a_4 \ a_5 \ a_8)$	$104/21 + 3\alpha$	104/21	44/3
$[68/21, \infty]$	$(a_4 \ a_8 \ a_9)$	$44/3 + 13\alpha$	44/3	∞

3.2. Método Según Holder

En esta sección del capítulo, daremos otro método para encontrar los valores de α para los cuales una base continúa generando una solución óptima, dado que se sustituye b por $b + \alpha\delta b$. Así, se revisarán otras propiedades que tienen los problemas de programación lineal. Para esto, se tomará de nuevo la forma estándar de un problema de programación lineal, por lo que el primal y el dual serán de la forma:

$$\text{mín } \{c^t x : Ax = b, \ x \geq 0\}, \quad (\text{P})$$

$$\text{máx } \{b^t w : A^t w + s = c, \ s \geq 0\}, \quad (\text{D})$$

en donde A es una matriz de $m \times n$ con números reales, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Se define $\mathcal{B} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ como el conjunto de índices que indican las columnas de A que forman la base B . Asimismo, se define $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$. Es decir, $B = A_{\mathcal{B}}$ y $N = A_{\mathcal{N}}$. De este modo, se dice que la partición $(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ es óptima si se cumplen los siguientes dos enunciados:

$$Bx_B = b, \ x_B \geq 0. \quad (3.5)$$

$$B^t w = c_B, \ N^t w + s_N = c_N, \ s_N \geq 0. \quad (3.6)$$

Cabe mencionar que si B es invertible, entonces es cuando se dice que la partición \mathcal{B} es básica o que B es una base. Si la base es óptima, entonces (3.5) y (3.6) pueden reescribirse como:

$$B^{-1}b \geq 0, \quad (3.7)$$

$$c_N - N^t(B^t)^{-1}c_B \geq 0 \quad (3.8)$$

Lo anterior ya se ha venido usando a lo largo de esta tesis y también se encuentra en el Apéndice D, pero se está volviendo a citar para poder establecer un nuevo término: se dice que $\widehat{\mathcal{B}}$ es *maximal* si no está contenido en otro conjunto \mathcal{B} ; es importante mencionar que la matriz generada por $\widehat{\mathcal{B}}$, $A_{\widehat{\mathcal{B}}}$, no es necesariamente invertible y que existe un único $\widehat{\mathcal{B}}$ maximal para toda A , b y c ; la partición maximal se denota por $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{N}})$. La partición maximal suele llamarse también partición óptima, pero dado que se pueden tener diversas particiones óptimas, ésta se distingue con el término de “maximal”. Por ejemplo, supongamos que la solución óptima de un problema lineal es un segmento de recta, y que sus particiones básicas son $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{B}' = \{2, 3\}$. Entonces la partición maximal será $\widehat{\mathcal{B}} = \{1, 2, 3\}$.

Ahora, sea $\delta b \in \mathbb{R}^m$ y considérese, como en la sección anterior, el siguiente problema de programación lineal parametrizado:

$$z^*(\alpha) = \text{mín } \{c^t x : Ax = b + \alpha\delta b, \ x \geq 0\}. \quad (3.9)$$

Como se analizó en la Sección 3.1, la base óptima de (3.7) será la base óptima de (3.9) siempre que

$$x_B(\alpha) = B^{-1}(b + \alpha \delta b) \geq 0.$$

Además, también se tiene que la base continuará siendo óptima si α es al menos

$$\max \left\{ -\frac{[B^{-1}b]_i}{\delta b_i} : \delta b_i > 0 \right\} = \min \{ \alpha : Bx_B = b + \alpha \delta b, \ x \geq 0, x_N = 0 \} \quad (3.10)$$

y a lo más

$$\min \left\{ -\frac{[B^{-1}b]_i}{\delta b_i} : \delta b_i < 0 \right\} = \max \{ \alpha : Bx_B = b + \alpha \delta b, \ x \geq 0, x_N = 0 \}. \quad (3.11)$$

Por otro lado, observemos que la función $z^*(\alpha)$ es lineal siempre que la base continúe siendo óptima:

$$z^*(\alpha) = c_B^t x_B(\alpha) = c_B^t B^{-1} b + \alpha c_B^t B^{-1} \delta b. \quad (3.12)$$

De este modo, hay ciertos intervalos en los que $z^*(\alpha)$ es lineal con respecto a una base dada. Si dos intervalos tienen un punto de intersección en común, éste punto será llamado *punto de corte*. Como $z^*(\alpha)$ es lineal por pedazos, entonces se puede hablar de derivada (en esos trozos). Es claro que en los puntos de corte esta función no es diferenciable, sin embargo, las derivadas por izquierda y por derecha existen siempre y cuando en ambos lados del punto de corte haya factibilidad.

Retomando el lado derecho de las ecuaciones (3.10) y (3.11), se tiene que éstas son equivalentes a

$$\begin{aligned} & \min \{ \alpha : Ax = b + \alpha \delta b, \ x \geq 0, x_{\mathcal{N}} = 0 \} \\ & \text{y } \max \{ \alpha : Ax = b + \alpha \delta b, \ x \geq 0, x_{\mathcal{N}} = 0 \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por lo anterior, si α está entre estos valores, entonces $z^*(\alpha)$ será lineal y la derivada dentro de este rango será

$$D_z = \max \{ \delta b^t w : A^t w + s = c, \ s \geq 0, s_{\mathcal{B}} = 0 \}. \quad (3.14)$$

La ecuación anterior es la derivada de $z^*(\alpha)$ debido a que en la Tabla Simplex 3.9, el valor de D_z es $\delta b_B^t (B^t)^{-1} c$. Por otro lado, si se deriva $z^*(\alpha)$ de la Ecuación (3.12), se obtiene $c_B^t B^{-1} \delta b$. Para hallar la solución a los problemas (3.13) y (3.14), éstos pueden ser reemplazados por

$$\begin{aligned} & \min \{ \alpha : Ax = b + \alpha \delta b, \ x \geq 0, \ c^t x = z^*(0) + \alpha D_z \}, \\ & \max \{ \alpha : Ax = b + \alpha \delta b, \ x \geq 0, \ c^t x = z^*(0) + \alpha D_z \}, \text{ y} \\ & D_z = \max \{ \delta b^t w : A^t w + s = c, \ s \geq 0, b^t w = z^*(0) \} \end{aligned}$$

Para relajar aún más los cálculos, las últimas igualdades se pueden sustituir por las desigualdades $c^t x \leq z^*(0) + \alpha D_z + \varepsilon$, y $b^t w \geq z^*(0) - \varepsilon$, con ε el parámetro de tolerancia con tendencia a cero.

Para poder establecer el algoritmo para encontrar los intervalos de α para los cuales $z^*(\alpha)$ es lineal, se requiere el siguiente teorema, cuyas demostraciones pueden ser encontradas en [8].

Tabla 3.9: Tabla simplex del problema lineal de (3.14)

$\delta b_B^t (B^t)^{-1} (A^t w + s) - \delta b$	$\delta b_B^t (B^t)^{-1} c$
$(B^t)^{-1} (A^t w + s)$	$(B^t)^{-1} c$

Teorema 3.1. *Sea δb la dirección de perturbación de b , y sea $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{N}})$ la partición maximal para el Problema Lineal (P) sin perturbar. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{N}})$ seguirá siendo la partición maximal bajo la parametrización $b + \alpha \delta b$ mientras que

$$\alpha^- = \min \{ \alpha' : Ax = b + \alpha' \delta b, x \geq 0, x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0 \}$$

$$< \alpha < \max \{ \alpha' : Ax = b + \alpha' \delta b, x \geq 0, x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0 \} = \alpha^+,$$

cuando α^- o α^+ sea diferente de cero.

2. *Ocorre uno de los siguientes eventos: $\alpha^- = \alpha^+ = 0$ ó $\alpha^- < 0 < \alpha^+$*
3. *El intervalo más grande que contiene al cero sobre el cual $z^*(\alpha)$ es lineal es $[\alpha^-, \alpha^+]$.*
4. *El conjunto dual óptimo, $\{(w, s) : A^t w + s = c, s \geq 0, s_{\widehat{\mathcal{B}}} = 0\}$, es invariante para $\alpha \in (\alpha^-, \alpha^+)$, siempre que α^- y α^+ sean diferentes de cero.*
5. *Supóngase que α^- y α^+ son diferentes de cero. Sean $(\widehat{\mathcal{B}}', \widehat{\mathcal{N}}')$ y $(\widehat{\mathcal{B}}'', \widehat{\mathcal{N}}'')$ particiones maximales para $\alpha = \alpha^-$ y $\alpha = \alpha^+$ respectivamente. Entonces, $\widehat{\mathcal{B}}' \subset \widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{N}}' \supset \widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\mathcal{B}}'' \subset \widehat{\mathcal{B}}$ y $\widehat{\mathcal{N}}'' \supset \widehat{\mathcal{N}}$.*
6. *Si α^- y α^+ son diferentes de cero, y $\alpha \in (\alpha^-, \alpha^+)$, entonces*

$$\frac{dz^*(\alpha)}{d\alpha} = \max \{ \delta b^t w : A^t w + s = c, s \geq 0, s_{\widehat{\mathcal{B}}} = 0 \}$$

En el primer punto del teorema, se especifica el intervalo $[\alpha^-, \alpha^+]$ de α para el cual una base dada seguirá siendo óptima. También se indica que puede tratarse incluso de un único punto (cero), según el inciso 2; esto último nos muestra que no existen valores en los que la parametrización $b + \alpha \delta b$ pueda tener solución óptima. Asimismo, dicho intervalo asegura que para toda α , $z^*(\alpha)$ será lineal, y con la afirmación 6, se tiene una forma de encontrar la derivada en ese intervalo. En cuanto a las parametrizaciones maximales, se tiene que $\widehat{\mathcal{B}}$ contendrá a las parametrizaciones maximales básicas de α^- y α^+ . Finalmente, es importante mencionar que este teorema asegura que el óptimo del dual no se verá afectado ante la parametrización con $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$.

Por otro lado, hay que notar que si $\alpha^- = \alpha^+ = 0$, entonces los puntos 4, 5 y 6 del Teorema 3.1 ya no son válidos. Además, si

$$\begin{aligned} 0 &= \text{mín} \{ \alpha : Ax = b + \alpha \delta b, \quad x \geq 0, x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0 \} \\ &= \text{máx} \{ \alpha : Ax = b + \alpha \delta b, \quad x \geq 0, x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0 \}, \end{aligned}$$

se dice que la partición $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{N}})$ es *incompatible* con la parametrización. Pero como mencionamos párrafos atrás, estas últimas ecuaciones pueden ser relajadas sustituyendo $x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0$ por $c^t x = z^*(0) + \alpha D$; entonces, si el problema lineal asociado a D_z , es no acotado, se tiene que no será posible encontrar las soluciones para

$$\begin{aligned} &\text{mín} \{ \alpha : Ax = b + \alpha \delta b, \quad x \geq 0, x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0 \} \\ &\text{y máx} \{ \alpha : Ax = b + \alpha \delta b, \quad x \geq 0, x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0 \} \end{aligned}$$

con lo que se concluiría que la partición actual es incompatible, o en otras palabras, que no es posible encontrar una base para la perturbación $b + \alpha \delta b$. Si lo anterior no ocurre, entonces se dice que la partición es *compatible* para $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$. Si la partición es compatible, se tienen dos casos: que el valor de

$$\text{máx} \{ \alpha : Ax = b + \alpha \delta b, \quad x \geq 0, x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0 \}$$

sea acotado o sea infinito. Si es acotado, entonces se está dando pie a encontrar un nuevo intervalo de α ; si el valor es infinito, entonces se tiene que $\forall \alpha \in [\alpha^-, \infty)$ la partición actual genera soluciones óptimas.

Finalmente, el algoritmo queda como sigue

1. Calcular $z^*(0) = \{ \text{mín} \, c^t x : Ax = b, \quad x \geq 0 \}$ e inicializar $\alpha^- = 0$.
2. Calcular $D^+ = \text{máx} \{ \delta b^t w : A^t w + s = c, \quad s \geq 0, \quad b^t w = z^*(\alpha^-) \}$. Si el problema es no acotado, entonces parar.
3. Calcular $\alpha^+ = \text{máx} \{ \alpha : Ax = b + \alpha \delta b, \quad x \geq 0, \quad c^t x = z^*(\alpha^-) + \alpha D^+ \}$, que podría ser infinito. Hay que notar que siempre $\alpha^- < \alpha^+$, pues los intervalos son lineales.
4. Sea $z^*(\alpha) = z^*(\alpha^-) + \alpha D^+$, tanto para $\alpha \in (\alpha^-, \alpha^+]$ con $\alpha^+ < \infty$, como para $\alpha \in (\alpha^-, \alpha^+)$ con $\alpha^+ = \infty$.
5. Si $\alpha^+ < \infty$, entonces sea $\alpha^- = \alpha^+$ y regresar al paso 2. En otro caso, parar.

Observemos que la base en cada iteración es la asociada a las variables x del punto 3.

A continuación se presentará un ejemplo utilizando el algoritmo anterior. El diagrama de flujo se encuentra en la Figura 3.2.

Ejemplo 3.2. Antes de empezar, hay que recordar que se necesita un problema de programación lineal en su forma estándar (como (P)). Si se obtiene el dual del Problema Lineal

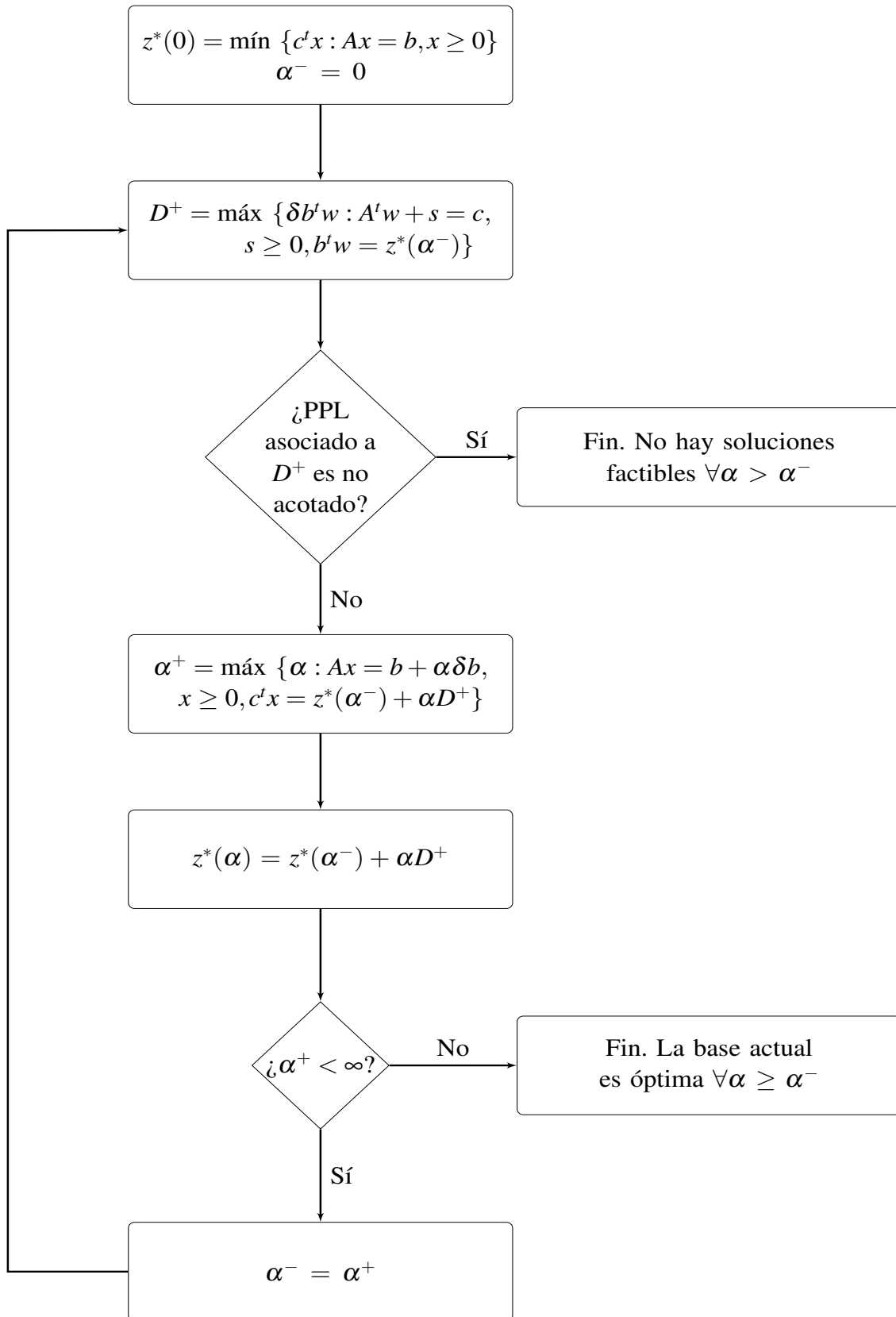


Figura 3.2: Diagrama del algoritmo para encontrar intervalos de α para la parametrización $b + \alpha\delta b$, según Holder

(1.1) y se agregan variables de holgura, se obtiene la forma deseada:

$$\begin{aligned} \min & 100x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 35x_4 \\ \text{s.a.} & \\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 10 \\ & x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 = 12 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

La solución óptima es $(0, 1/2, 0, 9, 0, 0)$ con valor en la función objetivo de 415 y $B = (a_2 \ a_4)$.

Sea $\delta b = (5, 6)^t$. Así, $z^*(0) = \{\min c^t x : Ax = b, x \geq 0\} = 415$; sea $\alpha^- = 0$. Para calcular D^+ , establecemos el problema:

$$\begin{aligned} \min & 5w_1 + 6w_2 \\ \text{s.a.} & \\ & 4w_1 + w_2 + s_1 = 100 \\ & 2w_1 + 6w_2 + s_2 = 200 \\ & 3w_1 + 2w_2 + s_3 = 150 \\ & w_1 + w_2 + s_4 = 35 \\ & -w_1 + s_5 = 0 \\ & -w_2 + s_6 = 0 \\ & 10w_1 + 12w_2 = z^*(\alpha^-) \\ & s_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

En esta iteración se tiene que la última restricción es $10w_1 + 12w_2 = 415$. Para resolver este problema mediante el método simplex, se define $w_1 = w'_1 - w''_1$ y $w_2 = w'_2 - w''_2$. Con estas nuevas variables, la tabla simplex óptima es la Tabla 3.10, cuyo valor en la función objetivo es $415/2$, por lo que $D^+ = 415/2$. Siguiendo el algoritmo, como el problema lineal asociado a D^+ tiene solución, entonces se procede a calcular α^+ .

Tabla 3.10: Tabla simplex para encontrar D^+ en la iteración 1 dado δb

	w'_1	w''_1	w'_2	w''_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	415/2
w'_1	5	1	-1	0	0	0	0	6	0	0	5/2
w'_2	6	0	0	1	-1	0	0	-5	0	0	65/2
s_1	0	0	0	0	0	1	0	-19	0	0	115/2
s_2	0	0	0	0	0	0	1	18	0	0	0
s_3	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	155/2
s_5	0	0	0	0	0	0	0	6	1	0	5/2
s_6	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	1	65/2

Ahora, para el cálculo de α^+ se define el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 \max & \alpha & & & & & & & \\
 \text{s.a.} & & & & & & & & \\
 4x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 10 + 5\alpha & & \\
 x_1 & +6x_2 & +2x_3 & +x_4 & & -x_6 & = & 12 + 6\alpha & \\
 100x_1 & +200x_2 & +150x_3 & +35x_4 & & & = & z^*(\alpha^-) + \alpha D^+ & \\
 & & & & & & & & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6
 \end{array}$$

Para esta iteración, la última restricción es $100x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 35x_4 = 415 + \alpha(415/2)$. La tabla simplex para este problema es la Tabla 3.11, en donde se observa que el problema es no acotado. Entonces se define $\alpha^+ = \infty$ y sea $z^*(\alpha) = 415 + \alpha(415/2)$. Como $\alpha^+ \not\leq \infty$, se termina el algoritmo y se concluye que la base actual, $B = (a_2 \ a_4)$, será óptima $\forall \alpha \in [0, \infty)$ dada la perturbación $b + \alpha \delta b$.

Si se supone que el lado derecho de las restricciones modela demanda, entonces una interpretación del resultado anterior es que, si ésta se aumenta de la forma $\alpha \delta b$ con $\alpha \geq 0$, entonces se podría hacer frente a dicha demanda; sólo habría que actualizar los valores de las variables 2 y 4 para cada α . Además, habrá una penalización en el valor de la función objetivo, debido a que ésta es a minimizar y la función objetivo aumenta $415/2$ por cada α .

Tabla 3.11: Tabla simplex para encontrar α^+ en la iteración 1 dado δb .

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	α	
z		0	0	0	0	0	0	-1	0
x_1	0	1	0	31/23	0	1/23	13/23	0	0
x_2	0	0	1	35/46	0	13/46	4/23	-1/4	1/2
x_4	0	0	0	-90/23	1	-40/23	-60/23	-9/2	9

Si se aplica el código en R del algoritmo de Bazaraa, se llega al mismo resultado, el cual se puede consultar en el Apéndice C. \square

Si se desean ver más iteraciones, o un ejemplo en donde se tenga que relajar alguna de las restricciones para encontrar D^+ o α^+ , se puede revisar el Ejemplo 2 del siguiente capítulo, debido a que la idea en general es la misma, pero desde el punto de vista del dual.

3.3. Comentarios finales

En este capítulo, se presentaron dos algoritmos que buscan los intervalos de α para los cuales una base continúa siendo óptima, puesto que se hicieron diversos cambios en el lado derecho del problema lineal, es decir, en b . La mayor diferencia entre estos dos, es que en el primero sólo se trabaja con la tabla simplex del problema de programación lineal inicial, y sobre éste se van actualizando los valores de α encontrados, mientras que en el segundo algoritmo, basado

en el artículo de Allen Holder, se trabaja sobre dos problemas lineales construidos a partir del problema original. Este último algoritmo, muestra más estrechamente la relación entre un problema lineal primal con su respectivo dual. Además, la teoría que respalda el algoritmo según Holder, ayuda a ver cómo se pueden modificar los problemas lineales para encontrar de manera más sencilla la solución óptima (o una aproximación a dicha solución), pues no siempre es posible encontrar las soluciones de manera sencilla. Sobre cómo elegir uno de los dos algoritmos, hay que notar que el algoritmo de Holder tiene más teoría de fondo y por tanto, podría decirse que está mejor sustentado; por otro lado, el primer algoritmo es más sencillo de aplicar al no tener que resolver un problema de programación lineal, pues sólo se tiene que hacer una operación entre matrices y aplicar el dual simplex, mientras que con el otro algoritmo, podría llegar a tenerse muchas variables y restricciones, por lo que para encontrar la solución se gastarían muchos recursos. Sin embargo, el algoritmo de Holder es más moderno, y su implementación en código resulta más simple. En resumen, habría que hacer un análisis para ver qué tipo de problemas se adecuan mejor a cada algoritmo.

Cambios en el vector de costos

En este capítulo, se busca encontrar el intervalo de α para el cual la base de un problema de programación lineal sigue generando una solución óptima, dado que se tiene una perturbación en el vector de costos de la forma $c + \alpha\delta c$. La teoría a desarrollar es análoga al capítulo anterior, pero desde el punto de vista del problema dual. Es importante mencionar que la teoría está basada en el artículo “Parametric Linear Programming Analysis” de Allen Holder [8].

Consideremos un problema de programación lineal en su forma estándar con su respectivo dual:

$$\text{mín } \{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}, \quad (\text{P})$$

$$\text{máx } \{b^t w : A^t w + s = c, s \geq 0\}, \quad (\text{D})$$

en donde A es una matriz de $m \times n$ con números reales, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Sea B una base de (P), y $(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ una partición ¹ óptima, es decir, cumple que

$$Bx_B = b, \quad x_B \geq 0.$$

$$B^t w = c_B, \quad N^t w + s_N = c_N, \quad s_N \geq 0.$$

Por último, sea $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{N}})$ la partición maximal ² de (P).

Dado B , interesa saber para qué valores de α se conserva la base actual como óptima si se tiene el siguiente problema lineal:

$$\text{mín } \{(c^t + \alpha\delta c)x : Ax = b, x \geq 0\}, \quad (4.1)$$

¹ $\mathcal{B} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de índices que indican las columnas de A que forman B , es decir, $A_{\mathcal{B}} = B$ y $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$. \mathcal{B} es una partición básica si B es invertible.

²Una partición maximal $\widehat{\mathcal{B}}$ es una partición que no está contenida en ningún otro conjunto \mathcal{B} . La matriz inducida por $\widehat{\mathcal{B}}$, $A_{\widehat{\mathcal{B}}}$, no es necesariamente invertible: sean $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{B}' = \{2, 3\}$ las particiones óptimas de un problema lineal, entonces $\widehat{\mathcal{B}} = \{1, 2, 3\}$.

en donde $\delta c \in \mathbb{R}^m$.

El cambio anterior se refleja en el dual en el vector de restricciones, de modo que se puede definir en función del Problema Dual (D) la parametrización δc , y seguir la idea del capítulo anterior. Esta función se denotará por $z^*(\alpha)$, y es la siguiente:

$$z^*(\alpha) = \text{máx} \{b^t w : A^t w + s = c + \alpha \delta c, \quad s \geq 0\}. \quad (4.2)$$

El siguiente teorema ayudará a establecer teoría necesaria para generar el algoritmo para encontrar el intervalo buscado. La demostración puede hallarse en [8].

Teorema 4.1. *Sea δc la dirección de perturbación de b , y sea $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{N}})$ la partición máxima para el Problema Lineal (D) sin perturbar. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{N}})$ seguirá siendo la partición maximal bajo la parametrización $c + \alpha \delta c$ mientras que

$$\alpha^- = \text{mín} \{ \alpha' : A^t w + s = c + \alpha' \delta c, \quad s \geq 0, \quad s_{\widehat{\mathcal{B}}} = 0 \} \\ < \alpha < \text{máx} \{ \alpha' : A^t w + s = c + \alpha' \delta c, \quad s \geq 0, \quad s_{\widehat{\mathcal{B}}} = 0 \} = \alpha^+,$$

cuando α^- o α^+ sea diferente de cero.

2. Ocurre uno de las siguientes eventos: $\alpha^- = \alpha^+ = 0$ o $\alpha^- < 0 < \alpha^+$
3. El intervalo más grande que contiene al cero sobre el cual $z^*(\alpha)$ es lineal es $[\alpha^-, \alpha^+]$.
4. El conjunto primal óptimo, $\{x : Ax = b, \quad x \geq 0, \quad x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0\}$, es invariante para $\alpha \in (\alpha^-, \alpha^+)$, siempre que α^- y α^+ sean diferentes de cero.
5. Supóngase que α^- y α^+ son diferentes de cero. Sean $(\widehat{\mathcal{B}}', \widehat{\mathcal{N}}')$ y $(\widehat{\mathcal{B}}'', \widehat{\mathcal{N}}'')$ particiones maximales para $\alpha = \alpha^-$ y $\alpha = \alpha^+$ respectivamente. Entonces, $\widehat{\mathcal{B}}' \supset \widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{N}}' \subset \widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\mathcal{B}}'' \supset \widehat{\mathcal{B}}$ y $\widehat{\mathcal{N}}'' \subset \widehat{\mathcal{N}}$.
6. Si α^- y α^+ son diferentes de cero, y $\alpha \in (\alpha^-, \alpha^+)$, entonces

$$\frac{dz^*(\alpha)}{d\alpha} = \text{mín} \{ \delta c^t x : Ax = b, \quad x \geq 0, \quad x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0 \}$$

De este teorema, se sabe que alpha se encuentra entre

$$\text{mín} \{ \alpha : A^t w + s = c + \alpha \delta c, \quad s \geq 0, \quad s_{\widehat{\mathcal{B}}} = 0 \} \\ \text{y máx} \{ \alpha : A^t w + s = c + \alpha \delta c, \quad s \geq 0, \quad s_{\widehat{\mathcal{B}}} = 0 \}.$$

Sin embargo, calcular la solución óptima a estos dos problemas no siempre resulta sencillo. Para relajar los cálculos, se puede sustituir $s_{\widehat{\mathcal{B}}} = 0$ por $b^t x = z^*(0) + \alpha D_z$, en donde D_z es la derivada dada en el punto 6 del Teorema 4.1. Dicha derivada puede obtenerse debido a que $z^*(\alpha)$ es lineal en el intervalo $[\alpha^-, \alpha^+]$, según el punto 3 de dicho teorema. Asimismo, se observa que

una aproximación a la solución del problema lineal asociado a D_z implica cambiar $x_{\widehat{\mathcal{N}}} = 0$ por $c^t x = z^*(0)$. Entonces tenemos los problemas lineales

$$\text{mín } \{ \alpha : A^t w + s = c + \alpha \delta c, \quad s \geq 0, \quad b^t x = z^*(0) + \alpha D_z \}, \quad (4.3)$$

$$\text{máx } \{ \alpha : A^t w + s = c + \alpha \delta c, \quad s \geq 0, \quad b^t w = z^*(0) + \alpha D_z \}, \quad \text{y} \quad (4.4)$$

$$D_z = \text{mín } \{ \delta c^t x : Ax = b, \quad x \geq 0, \quad c^t x = z^*(0) \}. \quad (4.5)$$

En algunos casos, no es posible hallar una solución a (4.3), (4.4) o a (4.5), por lo que se procede a relajar nuevamente dichas restricciones simplemente sustituyendo las igualdades por desigualdades al incluir un parámetro ε cercano a cero. Es decir, si $\varepsilon \rightarrow 0$, las aproximaciones de estos problemas son

$$\text{mín } \{ \alpha : A^t w + s = c + \alpha \delta c, \quad s \geq 0, \quad b^t x \leq z^*(0) + \alpha D_z + \varepsilon \},$$

$$\text{máx } \{ \alpha : A^t w + s = c + \alpha \delta c, \quad s \geq 0, \quad b^t w \leq z^*(0) + \alpha D_z + \varepsilon \}, \quad \text{y}$$

$$D_z = \text{mín } \{ \delta c^t x : Ax = b, \quad x \geq 0, \quad c^t x \leq z^*(0) + \varepsilon \}.$$

El Teorema 4.1 también indica en el segundo punto que siempre hay dos resultados posibles al calcular los valores de α : no existe ningún otro intervalo para aplicar la parametrización $c + \alpha \delta c$, o existe al menos uno. Si ocurre que no existe ningún otro intervalo con la partición actual, implica que los puntos 4 a 6 no son válidos, y como

$$\begin{aligned} 0 &= \text{mín } \{ \alpha : A^t w + s = c + \alpha \delta c, \quad s \geq 0, \quad s_{\widehat{\mathcal{B}}} = 0 \} \\ &= \text{máx } \{ \alpha : A^t w + s = c + \alpha \delta c, \quad s \geq 0, \quad s_{\widehat{\mathcal{B}}} = 0 \}. \end{aligned}$$

entonces se dice que la partición $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{N}})$ es *incompatible* con la parametrización, es decir, no es posible encontrar una base para la perturbación $c + \alpha \delta c$. Recordando las ecuaciones (4.3) y (4.4), entonces se concluye que si el problema lineal asociado a D_z no tiene solución, la partición es incompatible. Por otro lado, si existe al menos un intervalo de α , se dice que la partición es *compatible* con la parametrización para $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$. Entonces (4.3) puede ser acotado o infinito. Si es acotado, se puede buscar un nuevo intervalo de α ; si es infinito, entonces se tiene que la partición actual genera soluciones óptimas $\forall \alpha \in [\alpha^-, \infty)$. Por último, cabe mencionar que los cambios aplicados en el vector de costos dejan invariante al conjunto de soluciones óptimas en el primal, según el cuarto punto del Teorema 4.1.

Finalmente, el algoritmo para encontrar los intervalos de α para los cuales una determinada base continúa siendo óptima, es el siguiente:

1. Calcular $z^*(0) = \text{máx } \{ b^t w : A^t w + s = c, \quad s \geq 0 \}$ e inicializar $\alpha^- = 0$.
2. Calcular $D^+ = \text{mín } \{ \delta c^t x : Ax = b, \quad x \geq 0, \quad c^t x = z^*(\alpha^-) \}$. Si el problema es no acotado, entonces parar.
3. Calcular $\alpha^+ = \text{máx } \{ \alpha : A^t w + s = c + \alpha \delta c, \quad s \geq 0, \quad b^t w = z^*(\alpha^-) + \alpha D^+ \}$, y, que podría ser infinito. Hay que notar que siempre $\alpha^- < \alpha^+$, pues los intervalos son lineales.
4. Sea $z^*(\alpha) = z^*(\alpha^-) + \alpha D^+$, tanto para $\alpha \in (\alpha^-, \alpha^+]$ con $\alpha^+ < \infty$, como para $\alpha \in (\alpha^-, \alpha^+)$ con $\alpha^+ = \infty$.

5. Si $\alpha^+ < \infty$, entonces sea $\alpha^- = \alpha^+$ y regresar al paso 2. En otro caso, parar.

Notemos que para encontrar la siguiente base que asegura optimalidad en el primal, se tiene que $\widehat{\mathcal{B}} = \{i : s_i = 0\}$. Esto se puede observar a partir del punto 1 del Teorema 4.1.

El diagrama de flujo se encuentra en la Figura 4.1. A continuación se mostrará un ejemplo para ilustrar cómo funciona el algoritmo.

Ejemplo 4.1. Para aplicar el algoritmo, se desea modificar el vector de costos de un problema de la forma (P). Entonces definiremos el siguiente problema de programación lineal:

Problema de Programación Lineal 4.1.

$$\begin{aligned} \min & 100x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 35x_4 \\ \text{s.a.} & \\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ & x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

De hecho, el PPL 4.1 es muy parecido al problema dual del PPL 1.1. La base óptima para este problema es $B = (a_2 \ a_4)$. Sea $\delta c = (50, 60, 30, 10)$. Para aplicar el algoritmo, se necesita un problema de programación lineal de la forma (D), es decir, el dual del PPL 4.1:

$$\begin{aligned} \max & 10w_1 + 12w_2 \\ \text{s.a.} & \\ & 4w_1 + w_2 + s_1 = 100 \\ & 2w_1 + 6w_2 + s_2 = 200 \\ & 3w_1 + 2w_2 + s_3 = 150 \\ & w_1 + w_2 + s_4 = 35 \\ & s_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Para obtener la solución a este problema mediante el método simplex, se define

$$w_1 = w'_1 + w''_1, \quad w_2 = w'_2 + w''_2, \quad \text{con } w'_1, w''_1, w'_2, w''_2 \geq 0 \quad (4.6)$$

Así, el problema anterior queda como

$$\begin{aligned} \max & 10w'_1 - 10w''_1 + 12w'_2 - 12w''_2 \\ \text{s.a.} & \\ & 4w'_1 - 4w''_1 + w'_2 - w''_2 + s_1 = 100 \\ & 2w'_1 - 2w''_1 + 6w'_2 - 6w''_2 + s_2 = 200 \\ & 3w'_1 - 3w''_1 + 2w'_2 - 2w''_2 + s_3 = 150 \\ & w'_1 - w''_1 + w'_2 - w''_2 + s_4 = 35 \\ & s_i \geq 0, i = 1, \dots, 4, \quad w'_1, w''_1, w'_2, w''_2 \geq 0 \end{aligned}$$

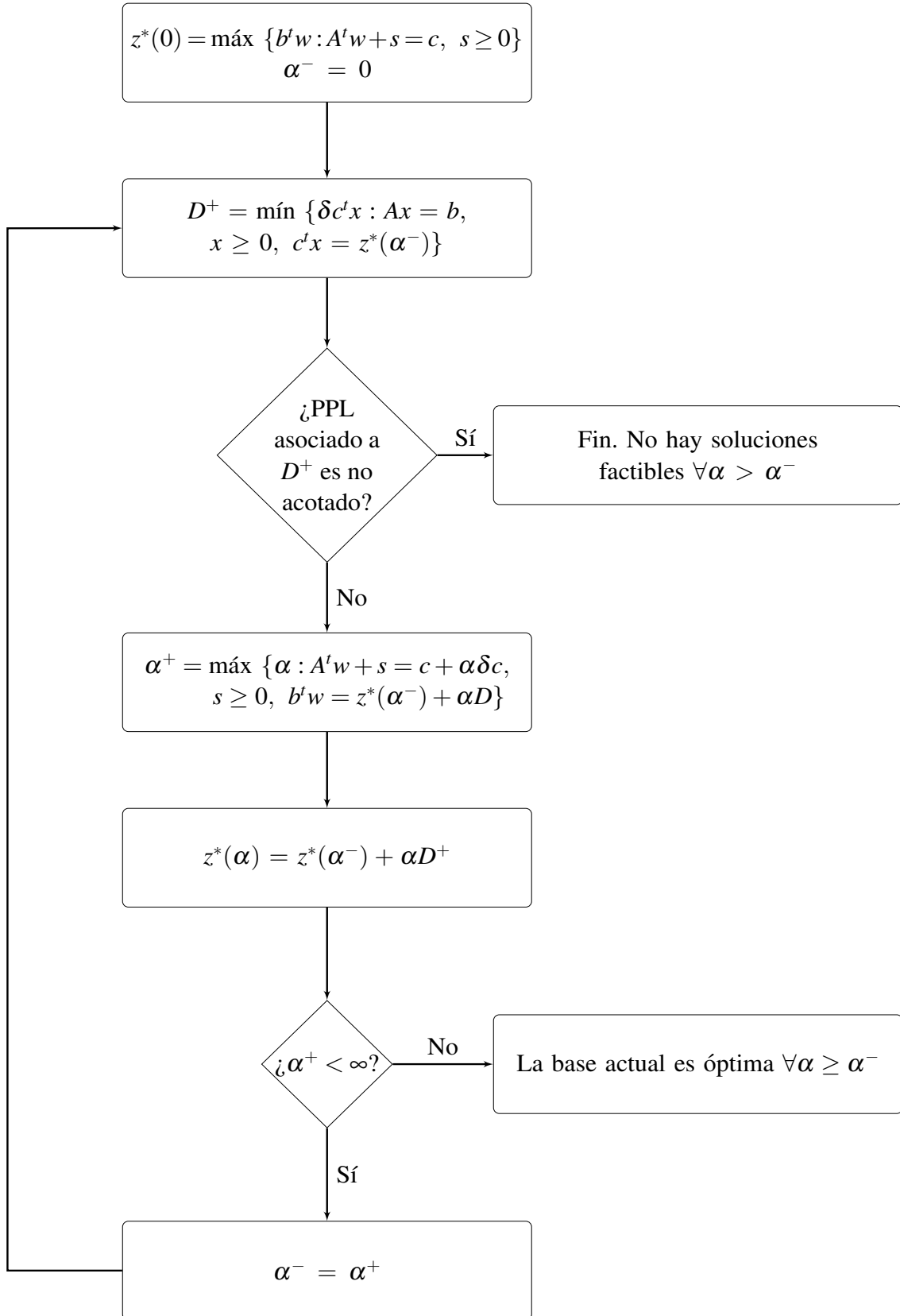


Figura 4.1: Diagrama del algoritmo para encontrar intervalos de α dada la parametrización $c + \alpha\delta c$

La solución óptima resulta ser un rayo con base $B = (a_1 \ a_3 \ a_5 \ a_7)$ y con valor en la función objetivo igual a 415, lo cual implica que $z^*(0) = 415$. Sea $\alpha^- = 0$. Para calcular el valor de D^+ , se requiere obtener la solución del siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & 50x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 10x_4 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ & x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ & 100x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 35x_4 = z^*(\alpha^-) \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

En esta iteración, la última restricción es $100x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 35x_4 = 415$. Entonces, el valor en la función objetivo de la solución óptima es 120, lo cual se puede observar en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Tabla para encontrar el valor de D^+ en la iteración 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	
z		-1010/31	0	0	0	120
x_2	60	-35/62	1	0	0	1/2
x_3	30	23/31	0	1	0	0
x_4	10	3	0	0	1	9

Así, se tiene que $D^+ = 120$. Como la solución es acotada, se procede a calcular α^+ , por lo que se plantea el problema

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ \text{s.a.} \quad & 4w_1 + w_2 + s_1 = 100 + 50\alpha \\ & 2w_1 + 6w_2 + s_2 = 200 + 60\alpha \\ & 3w_1 + 2w_2 + s_3 = 150 + 30\alpha \\ & w_1 + w_2 + s_4 = 35 + 10\alpha \\ & 10w_1 + 12w_2 = z^*(\alpha^-) + \alpha D^+ \\ & s_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

En esta iteración, la última restricción es $10w_1 + 12w_2 = 415 + 120\alpha$. Usando las igualdades de (4.6), se obtiene la Tabla 4.2 que indica que la solución es no acotada, es decir, $\alpha^+ = \infty$, lo que implica que la base actual es óptima $\forall \alpha \geq 0$, con $z^*(\alpha) = 415 + 120\alpha$.

Por último, hay que recordar que este intervalo fue construido a partir del rol entre el primal y el dual. Sin embargo, el problema inicial era modificar al vector de costos del Problema Lineal 4.1. Recordemos que la base óptima es $B = (a_2 \ a_4)$. A continuación se mostrará cómo este intervalo $[0, \infty)$ efectivamente conserva a B como base óptima. Se aplicará, sin pérdida de

Tabla 4.2: Tabla para encontrar el valor de α^+ en la iteración 1

		w'_1	w''_1	w'_2	w''_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α	
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
w'_1	0	1	-1	0	0	0	0	0	6	0	$5/2$
w'_2	0	0	0	1	-1	0	0	0	-5	-10	$65/2$
s_1	0	0	0	0	0	1	0	0	-19	-40	$115/2$
s_2	0	0	0	0	0	0	1	0	18	0	0
s_3	0	0	0	0	0	0	0	1	-8	-10	$155/2$

generalidad, para $\alpha = 0$, $\alpha = 5$ y $\alpha = 100$. Las tablas simplex óptimas están en la Tabla 4.3, en donde se observa que efectivamente la misma base continúa siendo óptima para diversos valores de α , y que la función objetivo obedece la función $z^*(\alpha) = 415 + 120\alpha$.

Una interpretación de este resultado es que la solución del problema lineal 4.1 se mantendrá óptima para cualquier aumento en el vector de costos del tipo $\alpha\delta c$ con $\alpha \geq 0$; sólo aumentará el valor en la función objetivo 120 veces por cada unidad de α . Como la función objetivo es a minimizar, entonces se empeorará el valor que se desea minimizar, por lo que se debe buscar otro tipo de perturbación que no afecte tanto a la función objetivo, o si no hay alternativa, intentar que los cambios en α sean valores pequeños.

Tabla 4.3: Tablas simplex del problema lineal $\min \{(c^t + \alpha\delta c^t)x : Ax = b, x \geq 0\}$ con $\alpha = 0$, $\alpha = 5$ y $\alpha = 100$

$\alpha = 0$						
z		-115/2	0	-155/2	0	415
x_2	200	-3/4	1	-1/4	0	1/2
x_4	35	11/2	0	7/2	1	9
$\alpha = 5$						
z		-515/2	0	-255/2	0	1015
x_2	500	-3/4	1	-1/4	0	1/2
x_4	85	11/2	0	7/2	1	9
$\alpha = 100$						
z		-8115/2	0	-2155/2	0	12415
x_2	6200	-3/4	1	-1/4	0	1/2
x_4	1035	11/2	0	7/2	1	9

La función `intervCostos` obtiene los intervalos de α buscados, así como las bases y el valor en la función objetivo asociados a dicho intervalo. El código de este ejemplo se puede ver en el Apéndice C, mientras que el manual de usuario y el código de la función se pueden encontrar en los apéndices A y B respectivamente. \square

Ahora cambiaremos la perturbación δc para revisar cómo es que se puede relajar una restricción, de acuerdo a la teoría establecida previamente, para poder continuar con el algoritmo.

Ejemplo 4.2. Sea $\delta c = (45, 45, 20, 30)$. Del problema anterior, se tiene que $z^*(0)$ permanece como 415. Sea $\alpha^- = 0$. Para encontrar D^+ , se tiene que resolver el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \min & 45x_1 + 45x_2 + 20x_3 + 30x_4 & (4.7) \\ \text{s.a.} & & \\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 & \\ & x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 & \\ & 100x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 35x_4 = z^*(\alpha^-) & \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 & \end{aligned}$$

Para esta primera iteración, la última restricción es $100x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 35x_4 = 415$. La solución a este problema resulta ser acotada, según la Tabla 4.4, así que $D^+ = 585/2$.

Tabla 4.4: Tabla para encontrar el valor de D^+ en la primera iteración

		x_1	x_2	x_3	x_4	
	z	0	0	$-85/2$	0	$585/2$
x_1	45	1	0	$18/23$	0	0
x_2	45	0	1	$35/46$	0	$1/2$
x_4	30	0	0	$-321/23$	1	9

Para obtener α^+ se necesita la solución óptima de

$$\begin{aligned} \max & \alpha & (4.8) \\ \text{s.a.} & & \\ & 4w_1 + w_2 + s_1 & = 100 + 45\alpha \\ & 2w_1 + 6w_2 + s_2 & = 200 + 45\alpha \\ & 3w_1 + 2w_2 + s_3 & = 150 + 20\alpha \\ & w_1 + w_2 + s_4 & = 35 + 30\alpha \\ & 10w_1 + 12w_2 & = z^*(\alpha^-) + \alpha D^+ \\ & s_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 & \end{aligned}$$

La última restricción queda como $10w_1 + 12w_2 = 415 + (585/2)\alpha$. Para resolver el problema mediante la tabla simplex, se toma

$$w_1 = w'_1 + w''_1, \quad w_2 = w'_2 + w''_2, \quad \text{con } w'_1, w''_1, w'_2, w''_2 \geq 0, \quad (4.9)$$

por lo que se obtiene la Tabla 4.5; de esta forma, $\alpha^+ = 2/3$ y se define $z^*(\alpha) = 415 + (585/2)\alpha$. La base asociada al siguiente intervalo es $B = (a_1 \ a_2)$, ya que s_1 y s_2 son no básicas.

Tabla 4.5: Tabla para encontrar el valor de α^+ en la primera iteración

		w'_1	w''_1	w'_2	w''_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α	
z		0	0	0	0	1/86	1/82	0	0	0	2/3
w'_1	0	1	-1	0	0	9/23	7/88	0	0	0	25
w'_2	0	0	0	1	-1	-1/23	16/69	0	0	0	30
s_3	0	0	0	0	0	-59/69	-11/24	1	0	0	28 1/3
s_4	0	0	0	0	0	0	1/18	0	1	0	0
α	1	0	0	0	0	1/86	1/82	0	0	1	2/3

Como $\alpha^+ < \infty$, entonces establecemos $\alpha^- = 2/3$ y pasamos a la segunda iteración. Entonces se tiene que $z^*(\alpha^-) = 415 + (2/3) * (585/2) = 610$. Para encontrar D^+ , notemos que el problema lineal de (4.7) sólo cambia en la tercer restricción, es decir, la última restricción es $100x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 35x_4 = 610$. Así que la solución óptima da como valor en la función objetivo $629/6$, lo que implica que $D^+ = 629/6$ [ver Tabla 4.6].

Tabla 4.6: Tabla para encontrar el valor de D^+ en la iteración 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	
z		0	0	0	-391/36	629/6
x_1	45	1	0	0	31/90	1/9
x_2	45	0	1	0	7/36	1 1/6
x_3	20	0	0	1	-23/90	2 4/9

Para calcular α^+ , se tiene que resolver el problema lineal de (4.8), en donde la última restricción es $10w_1 + 12w_2 = 610 + (629/6)\alpha$. La Tabla 4.7 muestra que la función objetivo resulta ser $180/83$. Así, $\alpha^+ = 180/83$ y se tiene que $z^*(\alpha) = 610 + \alpha(629/6)$. Como s_2 y s_3 son variables no básicas, entonces la siguiente base será $B = (a_2 \ a_3)$.

Tabla 4.7: Tabla para encontrar el valor de α^+ en la segunda iteración

		w'_1	w''_1	w'_2	w''_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α	
z		0	0	0	0	0	48/83	108/83	0	0	180/83
w'_1	0	1	-1	0	0	0	1	267/83	0	0	323/8
w'_2	0	0	0	1	-1	0	269/65	721/83	0	0	253/7
s_1	0	0	0	0	0	1	35/2	37	0	0	0
s_4	0	0	0	0	0	0	1163/96	2252/83	1	0	212/9
α	1	0	0	0	0	0	48/83	108/83	0	1	13/6

Entonces se toma $\alpha^- = 180/83$ y pasamos a la iteración 3. Ahora, para encontrar el valor

de D^+ , establecemos la última restricción del problema de programación lineal (4.7) igual a $100x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 35x_4 = 610 + \frac{180}{83} * \frac{629}{6} = 69500/83$. La Tabla 4.8 es la tabla simplex asociada a este problema; dicha tabla indica que no es posible encontrar D^+ , pues se mantiene la factibilidad dual, pero no es posible pivotar para obtener la optimalidad primal (las filas de x_1 y x_2 son no negativas). Entonces es necesario relajar el problema, por lo que se cambia la última restricción por una desigualdad, es decir, se cambia por:

$$100x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 35x_4 \leq 69500/83 + \varepsilon,$$

con $\varepsilon \rightarrow 0$. Así, agregando una variable de holgura h , se obtiene la Tabla 4.9 y se concluye que $D^+ = 720/7$.

Tabla 4.8: Tabla para encontrar el valor de D^+ en la iteración 3

		x_1	x_2	x_3	x_4	
z		0	0	0	-391/36	0
x_1	45	1	0	0	31/90	-31/9
x_2	45	0	1	0	7/36	-1/9
x_3	20	0	0	1	-23/90	8

Tabla 4.9: Tabla para encontrar el valor de D^+ en la iteración 3 dada una relajación

		x_1	x_2	x_3	x_4	h	
z		-415/14	0	0	-295/14	0	720/7
h	0	-450/7	0	0	-155/7	1	2008/9
x_2	45	-5/14	1	0	1/14	0	8/7
x_3	20	11/7	0	1	2/7	0	18/7

Para encontrar α^+ , se sustituye $10w_1 + 12w_2 = 69500/83 + (720/7)\alpha$ en la última restricción del problema de programación lineal de (4.8). Como tampoco es posible encontrar una solución a este problema, se relaja la última restricción, esto es,

$$10w_1 + 12w_2 \leq 69500/83 + (720/7)\alpha + \varepsilon,$$

$\varepsilon \rightarrow 0$. Agregamos una variable de excedente e y se obtiene la Tabla 4.10, en donde se muestra que el problema es no acotado, por lo que se establece $\alpha^+ = \infty$.

Finalmente, como $\alpha^+ = \infty$, se tiene que la última base encontrada, $B = (a_2 \ a_3)$, es básica $\forall \alpha \geq \alpha^- = 180/83$, con función objetivo $z^* = \frac{69500}{83} + \alpha \frac{720}{7}$. En la Tabla 4.11 se pueden observar los intervalos que encontramos en este ejemplo para alpha, así como la base óptima y la función de $z^*(\alpha)$ asociados a cada intervalo.

Tabla 4.10: Tabla para encontrar el valor de α^+ en la tercera iteración

		w'_1	w''_1	w'_2	w''_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α	e	
z		0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
s_1	0	4	-4	1	-1	1	0	0	0	-45	0	100
s_2	0	2	-2	6	-6	0	1	0	0	-45	0	200
s_3	0	3	-3	2	-2	0	0	1	0	-20	0	150
s_4	0	1	-1	1	-1	0	0	0	1	-30	0	35
e	0	10	-10	12	-12	0	0	0	0	-720/7	1	610

Una interpretación de esta nueva perturbación es que, en principio, para $\alpha \in [0, 2/3]$, el efecto negativo en el costo total es peor que en el cambio anterior (Ejemplo 1), pues como $120 < 585/2$ y la función objetivo es a minimizar, entonces los nuevos cambios afectan más al problema, aunque se conserve el valor de las variables. Si $\alpha \in [2/3, 180/83]$, entonces el valor de las variables cambia y, por tanto, también el valor en la función objetivo cambia. Finalmente, para $\alpha > 180/83$, el valor en la función objetivo ya es muy grande (poco más del doble que el del problema original), y la solución estará dada por una nueva base. Es decir, con este nuevo vector δc se perjudica más el costo total a comparación de la perturbación anterior.

El código de este ejemplo utilizando la función `intervCostos` se puede encontrar en el Apéndice C.

Tabla 4.11: Intervalos de α en los que una base es óptima

α	B	$z^*(\alpha)$
$[0, \frac{2}{3}]$	$(a_2 \ a_4)$	$415 + \frac{585}{2} \alpha$
$(\frac{2}{3}, \frac{180}{83}]$	$(a_1 \ a_2)$	$610 + \frac{629}{6} \alpha$
$(\frac{180}{83}, \infty)$	$(a_2 \ a_3)$	$\frac{69500}{83} + \frac{720}{7} \alpha$

□



Conclusiones

La investigación de operaciones es un área de las matemáticas aplicadas que, a través de métodos cuantitativos, busca resolver problemas de optimización para poder tomar una buena decisión. En particular, en este trabajo nos enfocamos en los problemas que se pueden modelar como un problema lineal. Como su nombre lo indica, la programación lineal trata con problemas lineales, es decir, con problemas cuya función objetivo y restricciones son lineales. Aunque resolver problemas teóricos es interesante debido a que nos puede generar información relevante para el desarrollo de la teoría, es de interés vital resolver problemas de la vida real. En ocasiones, plantear un problema de la vida real se convierte en algo que no siempre es tan fácil de lograr. De ahí que « La investigación de operaciones es tanto un arte como una ciencia; el arte de describir y modelar el problema, y la ciencia de resolver el modelo utilizando algoritmos matemáticos precisos. » (Taha, Hamdy A. Investigación de operaciones [16], p. 11). Debido a esto, es común pensar que ciertos valores del modelo son fijos o cumplen ciertos patrones o bien, se hacen suposiciones específicos.

Para ejemplificar las posibles consideraciones a tomar en cuenta al plantear un problema de la vida real, pensemos se desea calcular la pensión privada de un grupo de personas: se suele suponer que todos los individuos estarán cierto tiempo dentro de la empresa o que vivirán hasta cierta edad, lo que se ajusta relativamente bien. En general, en programación lineal, se trabaja bajo el supuesto que los costos, los beneficios, la oferta, la demanda, entre otros parámetros, los tomamos como fijos, es decir, son deterministas. Claramente esto no sucede en la vida real, mucho menos en un mundo globalizado. Es ahí en donde surge el análisis de sensibilidad.

El análisis de sensibilidad busca obtener una solución óptima a partir de la solución óptima de un problema inicial, dado que este último ha sufrido una única modificación en alguna entrada del vector b o c , o dado que cambió una columna de la matriz A . De este modo, como el análisis de sensibilidad trabaja a partir de un solo cambio, entonces surge la pregunta: ¿y qué sucede si se desea hacer más de un cambio a los parámetros? Es entonces cuando surge el análisis

paramétrico, y el tema de esta tesis.

En el primer capítulo, se trató el análisis paramétrico cuando hay algún cambio en el vector b , el vector c y la matriz A . Se describió qué hacer para encontrar de manera sencilla la solución óptima de un problema dado un cambio en un parámetro, a partir de la solución óptima del problema inicial. Esto porque en algunas ocasiones la solución actual continúa siendo óptima.

Para el segundo capítulo se habló del *valor marginal*. Este valor es simplemente la tasa de cambio al aplicar diversas modificaciones al problema original, y conservando la base óptima de éste último. Este valor sólo puede obtenerse para problemas acotados, y tiene la desventaja de que no indica cuál es la solución óptima al problema modificado. Así, obtener el valor marginal con respecto a una perturbación, sólo genera una idea general del comportamiento de la nueva solución, es decir, indica si se verá beneficiada o no el valor en la función objetivo al modificar el problema.

En consecuencia a este hecho, surge la duda: ¿para qué valores de α , el problema con las perturbaciones $b + \alpha\delta b$, $c + \alpha\delta c$ y $A + \alpha\delta A$, continúa conservando su solución óptima? En el capítulo 3 se hacen dos análisis para encontrar la respuesta de la pregunta anterior, pero sólo si se hacen los cambios en el vector b . En los dos análisis se encuentran los intervalos de α que aseguran una base óptima. El primer análisis está basado en el libro de Mokhtar S. Bazaraa, et. al. [3], y sirve como soporte para el segundo análisis, basado en un artículo de Allen Holder [8]. Ambos utilizan algunas relaciones que existen entre el primal y el dual, pero es Allen Holder el que da un algoritmo más completo en cuando a teoría y fundamentos entre el problema primal y el dual, lo cual resulta ser una visión más moderna y completa.

Después, en el capítulo 4 se consideró el caso en el que se hicieran diversos cambios en el vector de costos c . La teoría está basada de nuevo en el artículo de Holder, pero ahora desde el punto de vista del problema dual. Al programar el algoritmo para encontrar los intervalos de α que aseguran optimalidad al problema perturbado, se notó que el programa es más sencillo de implementar en comparación al programa basado en Bazaraa. El único “inconveniente” es que hay que resolver los dos problemas lineales que se necesitan en cada iteración. Entonces, ¿qué programa generaría un menor gasto de recursos (tiempo) para obtener los intervalos buscados? o ¿qué tipo de problemas convienen más para cada uno de los algoritmos?. Este sería un punto interesante a tratar.

Lo siguiente que se buscaba era obtener los intervalos para diversas modificaciones en la matriz A . Sin embargo, al revisar la teoría, se observó que el algoritmo que resolvía este problema era bastante extenso, y que al final se generaban más recursos al intentar implementarlo que lo que se gastaría en volver a resolver el problema con otra matriz. Es por eso que el capítulo que correspondería a este tema se omitió. La bibliografía consultada está en las referencias [4] y [18].

Por último, se revisaron los artículos [2] y [1], de Miroslav Barić et. al. Estos artículos plantean un algoritmo que encuentra los intervalos de α que mantienen una base óptima dado que se aplican las perturbaciones $b + \alpha\delta b$ y $c + \alpha\delta c$ al mismo tiempo. Sin embargo, este tema ya no fue incluido en la presente tesis debido a que este requiere más tiempo para ser tratado. Otro

artículo relacionado, y que de hecho es utilizado en los artículos anteriores, es [7] debido a que Harvey J. Greenberg establece teoría fundamental sobre este tema. Dichos trabajos representan posibles líneas de trabajo para el futuro.

Es así que esta tesis resultó en una base para los alumnos y personas interesadas en la programación lineal, específicamente en el análisis de sensibilidad y en el análisis paramétrico. El análisis de sensibilidad es un tema que se revisa en los cursos de Investigación de operaciones y Programación lineal a nivel licenciatura, por lo que la presente puede servir como bibliografía auxiliar para el estudio del análisis mencionado. Además, para los que deseen profundizar aún más, pueden revisar los capítulos 2, 3 y 4, pues son una introducción al análisis paramétrico. Igualmente, los códigos y ejemplos en R incluidos en los anexos son una guía para encontrar soluciones óptimas para un problema lineal, y para el análisis paramétrico de dicho problema; de ahí que se incluyeran los manuales de usuario de los códigos para una buena ejecución de éstos.

Manual de Usuario de los códigos

A.1. Manual de Usuario para `simplex2F`

La función `simplex2F` calcula el valor óptimo de las variables de un problema de programación lineal en su forma estándar a minimizar, así como las bases asociadas y el valor en la función objetivo, y en el caso de un rayo o un problema no acotado, el vector dirección. Para encontrar una solución óptima, utiliza como método de inicialización el *Método de las dos fases* [3]. Esta función necesita de diversas funciones auxiliares, a saber

- * `newbase`. Función que calcula una nueva posible base; si no es posible hallarla, entonces lo menciona.
- * `solucion`. Esta función devuelve el valor de las variables dada una base.
- * `solHiper`. Encuentra todas las posibles soluciones óptimas de un problema, dado que se sabe que existe al menos una segunda base óptima. Es decir, caracteriza los puntos extremos óptimos de una solución óptima que no es un rayo.
- * `funo`. En esta función, se realiza la fase uno del método de las dos fases, es decir, se obtiene una base factible en caso de que ésta exista. Si una de las variables básicas es una variable artificial, entonces se pivotea como en el algoritmo dual simplex y se cambia por una variable del problema original. Si no es posible hallar una base factible en el problema original, se termina el proceso de la función `simplex2F` sin llamar a la función `fdos`. Si el número de iteraciones excede el número de ciclos que se establecieron como límite para no caer en un bucle infinito, entonces también se termina el proceso de la función `simplex2F`.
- * `fdos`. Esta función toma la base factible obtenida en la función `funo` y se realiza la fase dos del método de las dos fases, es decir, se realiza el algoritmo simplex de manera usual, por lo que devuelve el resultado del problema lineal en su forma estándar a minimizar.

Si el número de iteraciones sobrepasa el número de ciclos dado, entonces se detiene la función `simplex2F`.

El código de esta función y de sus funciones auxiliares se puede obtener en el Apéndice B. Los ejemplos de cómo utilizarla están en el Apéndice C.

Librerías

La librería que es utilizada en varias de las funciones auxiliares es:

* `foreach`

Variables de entrada

Las variables que se necesitan son las siguientes:

- ▷ *A* . Matriz que representa a la matriz de restricciones *A* del problema de programación lineal.
- ▷ *b* . Matriz con una sola columna que representa a *b* del problema de programación lineal.
- ▷ *c* . Matriz con un solo renglón que representa a *c* del problema de programación lineal.

Variables de salida

La función regresa una lista con los siguientes valores:

- ◁ *Tipo*. Variable que indica qué tipo de solución se encontró. Puede tomar los valores:
 - “No factible”. Se obtiene este resultado si al terminar la función `funo` hay al menos una variable artificial con valor positivo.
 - “No acotado”. Dada una base factible, si en la función `fdos` no es posible encontrar una base óptima, entonces se devuelve este valor.
 - “Única”. Si se ha llegado a una solución óptima en `fdos` y ésta es única, entonces se regresa este valor.
 - “Segmento de recta”. Si se ha encontrado una base óptima en la función `fdos`, y además se puede obtener otra base óptima, entonces se buscan todas las posibles bases óptimas y se devuelve este valor. Es claro que no siempre se obtendrá un segmento de recta, dado que si se encuentran más de dos bases, entonces se trata de otro tipo de espacio; por conveniencia, se ha llamado de este modo a todas las soluciones que tengan más de una base óptima. Si se desea saber qué tipo de espacio generan los respectivos puntos extremos, es necesario hacer otro tipo de análisis [3].
 - “Rayo”. Cuando en la función `fdos` se llega a la solución óptima del problema y ésta no es única, pero ya no es posible encontrar otro punto extremo, entonces se trata de un rayo y se obtiene este valor.
 - “Se hicieron demasiados ciclos”. Si el número de iteraciones en `fdos` es mayor al límite que se ha establecido como máximo número de ciclos en dicha función, entonces se detiene el proceso y se regresa la solución actual. Esto se hace para evitar caer en un bucle infinito.

- “Se hicieron demasiados ciclos en funo”. Si el número de iteraciones en funo sobrepasa el número máximo establecido en dicha función sin llegar a una solución óptima, entonces se detiene el proceso y no se continúa con la función funo.
- ◁ x . Variable que guarda el valor óptimo de las variables. Si se trata de una única solución, un rayo o un problema no acotado, entonces se comporta como un vector. Si es un *segmento de recta*, entonces se comporta como una lista. Si el problema es no factible, entonces es NULL.
- ◁ *Basex*. Esta variable indica los índices asociados a las columnas de A que forman la base que genera a x . Si la solución óptima es única, un rayo o un problema no acotado, entonces se trata de un vector. Por otro lado, si es un *segmento de recta*, entonces es una lista de bases. Si el problema es no factible o se hicieron demasiados ciclos en la función funo o fdos, se devuelve un vector con la última base encontrada, la cual contiene variables artificiales si terminó el proceso en funo.
- ◁ d . En caso de tener un rayo o un problema no acotado, entonces esta variable será un vector que guarde la dirección de crecimiento. En cualquier otro caso, este valor será un vector de ceros.
- ◁ *valor*. Variable que guarda el valor en la función objetivo, ya sea porque es una solución óptima o la solución actual de un problema no acotado. Si se detuvo el proceso por exceso de iteraciones en la función funo, tomará el valor de NULL; si se detuvo en fdos, se regresa el valor actual.

A.2. Manual de Usuario para valMarg

La función valMarg obtiene el valor marginal de un problema de programación lineal respecto a una matriz de perturbación, dado que se tienen las soluciones óptimas tanto del primal como del dual. Los problemas con los que trabaja están descritos en el capítulo de Valor Marginal de esta tesis. El código se encuentra en el Apéndice B, y para quienes deseen un ejemplo, lo podrán hallar en el Apéndice C.

Variables de entrada

Las variables que se necesitan para obtener el valor marginal son las siguientes:

- ▷ A . Matriz que representa a la matriz de restricciones A del problema lineal $\max cx$ s.a. $Ax \leq b, x \geq 0$
- ▷ b . Matriz con una sola columna que representa a b del problema de programación lineal $\max cx$ s.a. $Ax \leq b, x \geq 0$.
- ▷ c . Matriz con una sola fila que representa a c del problema de programación lineal $\max cx$ s.a. $Ax \leq b, x \geq 0$.
- ▷ H . Matriz de mismo tamaño que A que representa a H .
- ▷ db . Matriz con una sola columna que representa a δb de la matriz de perturbación. Debe tener las mismas dimensiones que b .

- ▷ dc . Matriz con un solo renglón que representa a δc de la matriz de perturbación. Debe tener las mismas dimensiones que c .

Variables de salida

Esta función regresa lo siguiente:

- ◁ *ValorMarginal*. Valor correspondiente al valor marginal obtenido. Si no fue posible encontrar dicho valor, entonces regresa NULL. Lo anterior puede deberse a que la solución del primal y/o del dual era un rayo, no acotado o no factible.
- ◁ *Tipo*. Variable que puede tomar tres valores:
 - “Se obtuvo el valor marginal”. Este valor es arrojado cuando se obtuvo satisfactoriamente el valor marginal.
 - “No se puede aplicar a un rayo”. De la teoría se sabe que no es posible obtener el valor marginal cuando una de las soluciones óptimas está caracterizada como un rayo, así que si esto ocurre, la función se detiene y devuelve este resultado.
 - “Los problemas son No acotado o No factible”. Si el primal es no factible o no acotado, entonces el dual tampoco tiene solución. Como el valor marginal está definido para problemas con solución óptima distinta del rayo, entonces se detiene la función y regresa este valor.

A.3. Manual de Usuario para `intervRHS`

La función `intervRHS`, calcula los intervalos de θ para los cuales un problema de programación lineal en su forma estándar a minimizar mantiene su base óptima dado que se cambia el vector de recursos b por $b + \theta \delta b$. La función necesita de tres funciones auxiliares para poder trabajar, las cuales serán explicadas de manera general a continuación, aunque cabe mencionar que `intervRHS` sólo utiliza directamente la última función.

- * `newbasedual` . Función que busca una nueva base con el método dual simplex. También indica si fue posible encontrar una nueva base.
- * `duals` . Función que aplica el dual simplex a partir de una base dada, sobre el renglón que se requiere. Llama a la función `newbasedual` para encontrar una nueva base, y aplica los cambios requeridos en caso de tener dicha base. En otro caso, indica que no fue posible aplicar el cociente mínimo sobre el dual simplex.
- * `thetaRHS` . Función que busca una nueva θ . Regresa la θ obtenida, con la base con la cual fue encontrada, y el valor en la función objetivo. Llama a la función `duals` indicando en qué renglón se produciría la no factibilidad en caso de que la θ saliera del intervalo. Indica cuando ya no es posible encontrar una nueva θ con las condiciones iniciales dadas.

El código está en el Apéndice B, y en el Apéndice C se podrá encontrar un ejemplo de cómo utilizar esta función.

Librerías

Las librerías que se requieren para utilizar `intervRHS` son:

* foreach

* Matrix

Variables de entrada

Las variables que se necesitan para que corra la función `intervRHS` son las siguientes:

- ▷ *A* . Matriz que representa a la matriz de restricciones *A* del problema de programación lineal.
- ▷ *b* . Matriz con una sola columna que representa a *b* del problema de programación lineal.
- ▷ *c* . Matriz con un solo renglón que representa a *c* del problema de programación lineal.
- ▷ *Bi* . Vector que contiene los índices de las columnas de *A* que forman una base óptima *B*.
- ▷ *btilde* . Matriz con una sola columna que representa al vector columna δb .

Variables de salida

La función devuelve una lista con los siguientes valores:

- ◁ *Thetas* . Vector que contiene los valores de θ que definen los intervalos superiores e inferiores. Así, si se tienen *n* valores en este vector, los intervalos serían de la forma $(\theta_1, \theta_2), (\theta_2, \theta_3), \dots, (\theta_{n-1}, \theta_n)$.
- ◁ *Bases* . Lista que contiene vectores. Dichos vectores guardan los índices de las columnas de *A* que forman una base óptima para cada uno de los intervalos de θ .
- ◁ *Valores* . Vector cuyos números representan a los valores máximos y mínimos que puede llegar a tomar la función objetivo dado que se tiene una base y un intervalo de θ asociados. Si se tienen *n* datos en el vector, entonces `v[1]` es el mínimo valor de la función objetivo con la base 1 y el intervalo 1, mientras que `v[2]` es el valor máximo de la función objetivo con la base 1 y el intervalo 1. Asimismo, `v[2]` es el valor mínimo de la función objetivo en el intervalo 2 y con la base 2, mientras que `v[3]` es el valor máximo de la función objetivo con la base 2 y el intervalo 2, ..., y `v[n]` es el valor máximo de la función objetivo con la base *n* y el intervalo *n*.
- ◁ *Resultado* . Indica por qué se detuvo la función. Los valores que puede tomar están dados por
 - “S es vacío” . Cuando no se encuentran valores negativos en el vector de $\overline{\delta b}$, es decir, cuando *S* es vacío, se manda esta leyenda para saber que no fue posible seguir con el algoritmo por esta causa.
 - “No se pudo hacer el dual simplex” . Cuando no es posible aplicar el dual simplex en la fila de la variable que podría causar infactibilidad, entonces el algoritmo se detiene y se arroja esta leyenda.
 - “Se hicieron demasiados ciclos en `intervRHS`” . Con el fin de no caer en un bucle infinito, la función `intervRHS` tiene un número limitado de iteraciones a hacer. Al pasar este número, la función se detiene y arroja esta leyenda.
 - “Se hicieron demasiados ciclos en `duals`” . Al igual que el valor anterior, para no caer en un bucle infinito, la función auxiliar `duals` tiene un número limitado de iteraciones. Al pasar este número, la función se detiene y arroja esta leyenda.

A.4. Manual de Usuario para `intervCostos`

La función `intervCostos` calcula el intervalo de α para el cual una base continúa siendo óptima, dado que se perturbó el vector de costos c a $c + \alpha\delta c$. Además, esta función indica la base óptima para cada intervalo así como el valor en la función objetivo. Hay dos ejemplos en donde se muestra cómo utilizar esta función; los ejemplos pueden encontrarse en el Apéndice C. El código de esta función se localiza en el Apéndice B. Es importante mencionar que para ejecutar la función `intervCostos` se requiere de la función

* `intervCostos`

Librerías

La única librería que se requiere para correr la función `intervCostos` es

* `foreach`

Variables de entrada

Las variables que se necesitan para esta función son:

- ▷ A . Matriz que representa a la matriz de restricciones A del problema de programación lineal.
- ▷ b . Matriz con una sola columna que representa a b del problema de programación lineal.
- ▷ c . Matriz con una sola *columna* que representa a c del problema de programación lineal.
- ▷ dc . Matriz con una sola columna que representa al vector columna δc .

Variables de salida

La función `intervCostos` regresa una lista con las siguientes variables :

- ◁ *Alpha*. Vector con cada uno de los valores de α encontrados. No incluye al cero, a menos que no se haya podido encontrar algún valor desde la primer iteración . Así, si se tienen n valores en este vector, los intervalos serían de la forma $(0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \dots, (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$.
- ◁ *Base*. Lista con vectores que guarda una base óptima asociada a cada intervalo de α .
- ◁ *zAlpha*. Valores de la función $z^*(\alpha)$ en los puntos de corte. Es auxiliar para construir de manera analítica dicha función, debido a que se tiene que $z^*(\alpha) = z^*(\alpha^-) + \alpha D^+$.
- ◁ *Dmas*. Valores encontrados de D^+ . Cada valor está asociado a un intervalo, y ayuda a obtener el valor de $z^*(\alpha) = z^*(\alpha^-) + \alpha D^+$ para una α dentro de dicho intervalo.
- ◁ *Tipo*. Indica por qué se detuvo el proceso, y puede tomar los valores:
 - “Problema dual inicial es No acotado o No factible ”. Se debe a que el problema inicial en su forma dual es no acotado o no factible.
 - “El numero de ciclos es muy grande”. Si el número de iteraciones es mayor al número máximo de iteraciones permitidas, entonces se detiene el proceso para evitar caer en un bucle infinito.

- “Ya no hay alpha con soluciones factibles”. Como lo indica el algoritmo, si la variable D^+ es no acotada (con o sin relajación), entonces se tiene que ya no es posible encontrar otro intervalo que pueda tener soluciones factibles.
- “D con holgura no tiene solución factible”. Se mencionó que si el problema definido para encontrar D^+ no tiene solución factible, entonces se relaja la última restricción. Para evitar errores, se agregó el caso en que no es posible encontrar una solución factible aunque se haga esta relajación. En este caso, se debe de hacer otro tipo de análisis para encontrar D^+ .
- “Factible para toda alpha”. Si la variable α^+ es no acotada (con o sin relajación), entonces la base actual será óptima para toda alpha mayor a la última alpha encontrada.
- “alphaMas con holgura no tiene solución factible”. Si el problema lineal asociado a α^+ no tiene solución factible, entonces se relaja la última restricción. Para evitar errores, se agregó el caso en que no es posible encontrar una solución aunque se haga esta relajación. En este caso, se debe de hacer otro tipo de análisis para encontrar α^+ .

Códigos

B.1. Código de la función *simplex2F* (Simplex 2 fases)

```
#####
***By Mirabel Mendoza***#
##### Nueva base
newbase<-function(zj,B,A,b,Bi){
  aux<-0
  for(i in 1:length(zj)){
    if(round(zj[i],3)>0){
      noneg<-round((solve(B)%*%A[,i]),4)
      for(h in 1:length(noneg)){if(noneg[h]<0){noneg[h]=0}}
      x<-rep(0,length(noneg))
      for(h in 1:length(noneg)){x[h]<-round(((solve(B)%*%b)[h]),4)/noneg[h]}
      pivote<-which.min(x)
      if(is.finite(x[pivote])){
        Bi[pivote]<-i
        aux<-1
        break
      }
    }
  }
  base<-list(e=Bi,f=aux)
  return (base)
}
##### Solución
solucion<-function(zj,Bi,B,b){
  X<-rep(0,length(zj))
  for(j in 1:length(Bi)){X[Bi[j]]<-round(solve(B)[j,]%*%b,3)}
```

```

    return (X)
}
##### Solución "segmento"
solHiper<-function(zj,Bi,A,b){
  y<-list()
  yi<-0
  By<-list()
  pb<-setdiff(1:ncol(A),which(round(zj,5)!=0))
  combin<-combn(pb,length(Bi))
  for(i in 1:ncol(combin)){
    Bii<-combin[,i]
    B<-A[,Bii]
    if(round(det(B),3)!=0){
      bbarra<-solve(B)%*%b
      posit<-0
      k<-1
      while(posit==0 & k<=length(Bii)){
        if(round(bbarra[k],5)<0){posit<-1}
        k<-k+1
      }
      if(posit==0){
        yi<-yi+1
        y[[yi]]<-solucion(zj,Bii,B,b)
        By[[yi]]<-Bii
      }
    }
  }
  tipo<-"Segmento de recta"
  return(list(y=y,By=By,tipo=tipo))
}
##### Fase I
funo<-function(A,b){
  tipof1<-""
  id <- diag(1,nrow = nrow(A))
  A2<-cbind(A,id)
  c2<-c(rep(0,ncol(A)),c(rep(1,ncol(A2)-ncol(A))))
  art<-c((ncol(A)+1):ncol(A2))
  Bi<-art
  ciclo<-0
  aux2<-1
  iteraciones<-1000
  while(ciclo<iteraciones){
    B<-matrix(A2[,Bi],nrow=nrow(A))
    zj<-c2[Bi]%*(solve(B)%*%A2)-c2
    aux1<-0
    foreach(k1=Bi,k2=art)%do%{if(k1==k2){aux1=aux1+1} }
  }
}

```

```

    if(round(zj[which.max(zj)],5)<=0){break}
    if(aux2==0){break}
    aux2<-0
    NB<-newbase(zj,B,A2,b,Bi)
    Bi<-NB$e
    aux2<-NB$f
    ciclo<-ciclo+1
  }
  if(aux1>=1){X<-solucion(zj,Bi,B,b)
    if(sum(X[art])==0){
      print("Hubo una variable artificial, pero su valor es cero")
      for(r in 1:length(Bi)){
        for(s in 1:length(art)){
          if(Bi[r]==art[s]){
            BAr<-(solve(B)%*%A)[r,]
            auxDual<- zj[,1:ncol(A)]/round(BAr,5)
            Bi[r]<- which.min(auxDual)
          }
        }
      }
      result<-1}
    else{print("No factible"); result<-0; tipof1<-"No factible" }}
  if(aux1==0){
    print("Terminamos 1er Fase, y continuamos con el Simplex sin artificiales")
    result<-1}
  if(ciclo==iteraciones){print("Hicimos demasiadas iteraciones en funo");
    result<-0
    tipof1<-"Se hicieron demasiados ciclos en funo"}
  if(aux2==0){print("No factible");result<-0; tipof1<-"No factible"}
  return (list(e=result, BI=Bi, TipoF1=tipof1))
}
##### Fase II
fdos<-function(A,b,c,Bi){
  ciclo<-0
  aux<-1
  iteraciones<-100
  while(ciclo<iteraciones){
    B<-matrix(A[,Bi],nrow=nrow(A))
    zj<-c[Bi]%*(solve(B)%*%A)-c
    maxi<-zj[which.max(zj)]
    if(round(maxi,3)<=0){break}
    if(aux==0){break}
    aux<-0
    NB<-newbase(zj,B,A,b,Bi)
    Bi<-NB$e
    aux<-NB$f

```



```

    ciclo<-ciclo+1
  }
  tipo<-"Unica solucion"
  X<-solucion(zj,Bi,B,b)
  basex<-Bi
  D<-c(rep(0,length(X)))
  auxV<-(solve(B)%*%b)
  Valor<-0
  for(i in 1:length(Bi)){ Valor<-Valor+c[Bi[i]]*auxV[i] }
  if(round(maxi,3)>0 & ciclo<iteraciones){
    tipo<-"No acotado"
    D[which.max(zj)]<-1
    AUX<-solve(B)%*%A[,which.max(zj)]
    for(i in 1:length(Bi)){ D[Bi[i]]<--AUX[i]}
  }
  if(round(maxi,3)==0){
    y<-1
    foreach(k=setdiff(1:length(zj),Bi))%:%when(y==1)%do%{
      if(round(zj[k],6)==0){
        ZJ<-c(rep(0,length(zj))); ZJ[k]<-1;
        aux<-0
        NB<-newbase(ZJ,B,A,b,Bi)
        Bi<-NB$e
        B<-matrix(A[,Bi],nrow=nrow(A))
        if(NB$f==1){
          AUX<-solHiper(zj,Bi,A,b)
          X<-AUX$y
          basex<-AUX$B
          tipo<-AUX$tipo
          y<-0
        }else{
          tipo<-"Rayo"
          D[which.max(zj)]<-1
          AUX<-solve(B)%*%A[,which.max(zj)]
          for(i in 1:length(Bi)){ D[Bi[i]]<--AUX[i] }
          y<-0
        }
      }
    }
  }
  if(ciclo==iteraciones){tipo<-"Se hicieron demasiados ciclos"}
  return(list(Tipo=tipo,x=X,Basex=basex,d=D,valor=Valor))
}
##### Simplex
simplex2F<-function(A,b,c){
  faseuno<-funo(A,b)

```

```

fasedos<-list(Tipo=faseuno$TipoF1 ,x=NULL,
  Basex= faseuno$BI ,d=NULL,valor=NULL)
if(faseuno$e==1){fasedos<-fdos(A,b,c,faseuno$BI)}
return (fasedos)
}
#####

```

B.2. Código de la función *valMarg* (Valor marginal)

```

#####
***By Mirabel Mendoza***#
#####
valMarg<-function(A,b,c,H,db,dc){
  tipoFin<-"Se obtuvo el valor marginal"
  maximo<-NULL
  A1<-cbind(A,diag(1,ncol=nrow(A),nrow=nrow(A)))
  c1<- -cbind(c,matrix(rep(0,nrow(A)),nrow=1)) #minimizar
  primal<- simplex2F(A1,b,c1) #max cx s.a. Ax<=b, x>=0
  A2<-cbind(t(A),diag(-1,ncol=ncol(A),nrow=ncol(A)))
  c2<-cbind(t(b), matrix(rep(0,ncol(A)),nrow=1) )
  dual<-simplex2F(A2,t(c),c2) #min wb s.a. wA>=c^t, w>=0
  if(xor(primal$Tipo=="Unica solucion",
    primal$Tipo=="Segmento de recta")){
    if(primal$Tipo=="Unica solucion"){
      S<-matrix(primal$x[1:length(dc)],ncol=1)
    }
    if(primal$Tipo=="Segmento de recta"){
      S<-matrix(0,nrow=length(dc),ncol=length(primal$x))
      for(i in 1:length(primal$x)){
        S[,i]<-matrix(primal$x[[i]][1:length(dc)],ncol=1)
      }
    }
  }
  if(xor(dual$Tipo=="Unica solucion",
    dual$Tipo=="Segmento de recta")){
    if(dual$Tipo=="Unica solucion"){
      T<-matrix(dual$x[1:length(db)],ncol=1) #Soluci?n ?nica
    }
    if(dual$Tipo=="Segmento de recta"){
      T<-matrix(0,nrow=length(db),ncol=length(dual$x))
      for(i in 1:length(dual$x)){
        T[,i]<-matrix(dual$x[[i]][1:length(db)],ncol=1)
      }
    }
  }
}
}

```

```

if(xor(primal$Tipo=="Rayo",dual$Tipo=="Rayo")){
  tipoFin<-"No se puede aplicar a un rayo"
  return(list(ValorMarginal=maximo,Tipo=tipoFin))
  stop
}
if(xor(primal$Tipo=="No acotado",
  primal$Tipo=="No factible")){
  tipoFin<-"Los problemas son No acotado o No factible"
  return(list(ValorMarginal=maximo,Tipo=tipoFin))
  stop
}
minimo<-T[,1]*%db
ref1<-1
k<-1
while(k<ncol(T)){
  k<-k+1
  aux<-T[,k]*%db
  if(minimo>aux){
    minimo<-aux
    ref1<-k
  }
}
maximo<-minimo+dc*%S[,1]-T[,ref1]*%H*%S[,1]
k<-1
while(k<ncol(S)){
  k<-k+1
  aux<-minimo+dc*%S[,k]-T[,ref1]*%H*%S[,k]
  if(maximo<aux){
    maximo<-aux
  }
}
return(list(ValorMarginal=maximo,Tipo=tipoFin))
}
#####

```

B.3. Código de la función *intervRHS* (Cambios en **b**, según Bazarra)

```

#####
## By Mirabel Mendoza ##
##### Librería a utilizar
library(foreach)
library(Matrix)
##### Nueva base
newbasedual<-function(k,zj,B,A,Bi){

```

```

aux<-0
  BA<-round(solve(B)[k,]%*%A , 4)
  div<- zj/BA
  for(h in 1:ncol(A)){if(round(BA[h],4)>0){div[h]<-1/0}}
  pivote<-which.min(div)
  if(is.finite(div[pivote])){
    Bi[k]<-pivote
    aux<-1
  }
base<-list(e=Bi,f=aux)
return (base)
}
##### Dual Simplex
duals<-function(A,b,c,Bi){
  ciclo<-0
  aux<-1
  iteraciones<-100
  while(ciclo<iteraciones){
    B<-matrix(A[,Bi],nrow=nrow(A))
    bbarra<-solve(B)%*%b
    k<-which.min(bbarra)
    if(round(bbarra[k],5)>=0){break}
    if(aux==0){break}
    aux<-0
    zj<-c[Bi]%*%(solve(B)%*%A)-c
    NB<-newbasedual(k,zj,B,A,Bi)
    Bi<-NB$e
    aux<-NB$f
    ciclo<-ciclo+1
  }
  IT<-"Se completo el algoritmo"
  if(ciclo==iteraciones){IT<-"Se hicieron demasiados ciclos en duals"}
  if(aux==0){IT<-"No se pudo hacer el dual simplex"}
  Valor<-0
  for(i in 1:length(Bi)){ Valor<-Valor+c[Bi[i]]*bbarra[i] }
  return(list(base=Bi,valor=Valor,itera=IT))
}
##### Nueva theta
thetaRHS<-function(A,b,c,Bi,btilde){
  B<-matrix(A[,Bi],nrow=nrow(A))
  inv<-solve(B)
  btildeInv<-inv%*%btilde
  bInv<-inv%*%b
  divi<- -bInv/btildeInv
  for(i in 1:length(b)){if(round(btildeInv[i],5)>=0){divi[i]<- 1/0}}
  theta<-which.min(divi)
}

```

```

if(is.finite(divi[theta])){
  zj<-c[Bi]%*(inv%**A)-c
  Aux<-duals(A,b+divi[theta]*btilde,c,newbasedual(theta,zj,B,A,Bi)$e)
  Bi<-Aux$base
  value<-Aux$valor
  iterac<-Aux$itera
}
else{
  value<-1/0
  iterac<-"S es vacio"
}
return (list(Theta=divi[theta],base=Bi,Valor=value,Iterac=iterac))
}
##### Intervalos de theta
intervRHS<-function(A,b,c,Bi,btilde){
  thetas<-c(0)
  bases<-list(Bi,c(0,0,0))
  value<-0
  bInv<-solve(matrix(A[,Bi],nrow=nrow(A))%**b
  for(i in 1:length(Bi)){ value<-value+c[Bi[i]]*bInv[i] }
  valores<-c(value)
  i<-1
  ciclos<-100
  iter<-0
  while(is.finite(thetas[i]) & iter<ciclos){
    i<-i+1
    iter<-iter+1
    aux<-thetaRHS(A,b,c,Bi,btilde)
    thetas[i]<-aux$Theta
    Bi<-aux$base
    bases[[i]]<-Bi
    valores[i]<-aux$Valor
    if(aux$Iterac != "Se completo el algoritmo"){
      iter<-ciclos+1
      result<-aux$Iterac
    }
  }
  if(iter==ciclos){
    result<-"Se hicieron demasiados ciclos en intervRHS"}
  return (list(Thetas=thetas,Bases=bases,
    Valores=valores,Resultado=result))
}
#####

```

B.4. Código de la función *intervCostos* (Cambios en c)

```
#####
#* By Mirabel Mendoza *#
#####Librería a utilizar
library(foreach)
#####Función
intervCostos<- function(A,b,c,dc){
  n<-ncol(A)
  m<-nrow(A)
  s<-matrix(rep(0,n*n), nrow=n)
  for(i in 1:n) {s[i,i]<-1}
  At<- cbind(t(A),-t(A))
  At<-cbind(At,s)
  bt<- matrix(c(t(b),-t(b),rep(0,n)) , nrow=1)
  bt<- -bt
  solInicial<- simplex2F(At, c ,bt)
  z0 <- - ( solInicial$valor )
  if(xor(solInicial$Tipo=="Unica solucion", solInicial$Tipo=="Rayo")){
    Saux<-setdiff( ((2*m+1):(2*m+n)) , solInicial$Basex)
    B<- list(Saux-2*m)
  }
  if(solInicial$Tipo=="Segmento de recta"){
    auxBase<-solInicial$Basex
    Saux<-setdiff( ((2*m+1):(2*m+n)) , auxBase[[1]] )
    B<- list(Saux-2*m)
  }
  if(xor(solInicial$Tipo=="No acotado", solInicial$Tipo=="No factible")){
    tipoFin<-"Problema dual inicial es No acotado o No factible"
    return(list(Alpha=NULL, Base=NULL, zAlpha=NULL,
               Dmas=NULL, Tipo=tipoFin))
  }
  #####
  z<-c(z0)
  alpha<-c(0)
  D<-c(0)
  k<-1
  ciclos<-1000
  AD<-rbind(A,t(c))
  bD<-rbind(b,z[k])
  Aa<-rbind(At, c(t(b), -t(b), rep(0,n)) )
  Aa<-cbind(Aa, - matrix(c(dc,D[k]), ncol=1) )
  ba<-rbind(c,z[k])
  ca<-matrix(rep(0,ncol(Aa)),nrow=1)
  ca[1,ncol(Aa)]<- -1
  tipoFin<-"El numero de ciclos es muy grande"
```

```

while(ciclos > k){
  # D+
  bD[nrow(bD),1]<-z[k]
  Dmas<- simplex2F(AD,bD, t(dc) )
  if(Dmas$Tipo=="No acotado"){
    tipoFin<-"Ya no hay alpha con soluciones factibles"
    break
  }
  if(Dmas$Tipo == "No factible"){
    ADh<-cbind(AD, matrix(c(rep(0,nrow(AD)-1),1),ncol=1) )
    Dmas<- simplex2F(ADh,bD, cbind(t(dc),c(0)) )
    if(Dmas$Tipo=="No acotado"){
      tipoFin<-"Ya no hay alpha con soluciones factibles"
      break
    }
    if(Dmas$Tipo == "No factible"){
      tipoFin<-"D con holgura no tiene solucion factible "
      break
    }
  }
}
D[k]<-Dmas$valor
#alphaMas
Aa[nrow(Aa),ncol(Aa)]<- - D[k]
ba[nrow(ba),1]<-z[k]
alphaMas<- (simplex2F( Aa, ba, ca ))
if(alphaMas$Tipo=="No acotado"){
  tipoFin<-"Factible para toda alpha"
  break
}

if(alphaMas$Tipo == "No factible"){
  Aah<-cbind(Aa,matrix(c(rep(0,nrow(Aa)-1),1),ncol=1))
  alphaMas<- (simplex2F( Aah, ba, cbind(ca,c(0)) ))
  if(alphaMas$Tipo=="No acotado"){
    tipoFin<-"Factible para toda alpha"
    break
  }
  if(alphaMas$Tipo == "No factible"){
    tipoFin<-"alphaMas con holgura no tiene solucion factible"
    break
  }
}

alpha[k]<- - alphaMas$valor
if(xor(solInicial$Tipo=="Unica solucion", solInicial$Tipo=="Rayo")){
  Saux<-setdiff( ((2*m+1):(2*m+n)) , alphaMas$Basex)
  B[[k+1]]<- Saux-2*m
}

```

```
}
if(solInicial$Tipo=="Segmento de recta"){
  auxBase<-alphaMas$Basex
  Saux<-setdiff( ((2*m+1):(2*m+n)) , auxBase[[1]] )
  B[[k+1]]<- Saux-2*m
}
z[k+1]<-z[k]+alpha[k]*D[k]
k<-k+1
}
return(list(Alpha=alpha, Base=B, zAlpha=z, Dmas=D, Tipo=tipoFin))
}
#####
```

Soluciones

C.1. Solución al Problema de Programación Lineal 1.1

```
#####
#Solución para el primal
b<-matrix(c(100,200,150,35))
c<-matrix(c(-10,-12,0,0,0,0),nrow=1) #Forma estándar a minimizar
A<-matrix(c(4,1,1,0,0,0,
            2,6,0,1,0,0,
            3,2,0,0,1,0,
            1,1,0,0,0,1 ), nrow=length(b), byrow=TRUE)
simplex2F(A,b,c)
#Solución para el dual
b_dual<-matrix(c(10,12)) #Forma estándar a minimizar
c_dual<-matrix(c(100,200,150,35,0,0),nrow=1)
A_dual<-matrix(c(4,1,
                 2,6,
                 3,2,
                 1,1,
                 -1,0,
                 0,-1), nrow=length(b_dual), byrow=F)
simplex2F(A_dual,b_dual,c_dual)
#####
```

C.2. Solución al Problema de Programación Lineal 1.2

```
#####
#Solución para el primal
b2<-matrix(c(6,10,8))
c2<-matrix(c(2,1.5,1,1,2,1,0,0,0),nrow=1) #Forma estándar a minimizar
A2<-matrix(c(1,2,1,2,0,0,-1,0,0,
            4,3,-2,2,4,0,0,-1,0,
            -5,0,1,1,6,-3,0,0,-1), nrow=length(b2), byrow=TRUE)
simplex2F(A2,b2,c2)
#Solución del dual
c2_dual<-matrix(c(-6,-10,-8,0,0,0,0,0,0),nrow=1)
b2_dual<-matrix(c(2,1.5,1,1,2,1)) #Forma estándar a minimizar
A2_dual<-matrix(c(1,2,1,2,0,0,
                4,3,-2,2,4,0,
                -5,0,1,1,6,-3,
                1,0,0,0,0,0,
                0,1,0,0,0,0,
                0,0,1,0,0,0,
                0,0,0,1,0,0,
                0,0,0,0,1,0,
                0,0,0,0,0,1), nrow=length(b2_dual), byrow=F)
simplex2F(A2_dual,b2_dual,c2_dual)
#####
```

C.3. Solución al ejemplo 1

```
#####
#Los datos de (P) : Max cx s.a. Ax=<b , x>=0
b<-matrix(c(100,200,150,35))
c<-matrix(c(10,12),nrow=1) #Forma estándar a minimizar
A<-matrix(c(4,1, #Con A en su forma canónica
            2,6,
            3,2,
            1,1), nrow=length(b), byrow=TRUE)
#Los valores de la matriz de perturbación
db<-matrix(c(4,10,15,8))
dc<-matrix(c(2,1.5),nrow=1)
H<-matrix(c(0,1,
            0,-1,
            -1,-1,
            1,1), nrow=length(db), byrow=TRUE)
#El valor marginal es
valMarg(A,b,c,H,db,dc)
#####
```

C.4. Solución al ejemplo 2

```
#####
#Los datos de (P) : Max cx s.a. Ax=<b , x>=0
b<-matrix(c(2,1.5,1,1,2,1))
c<-matrix(c(6,10,8),nrow=1) #Forma estándar a minimizar
A<-matrix(c(1,4,-5,#Con A en su forma canónica
           2,3,0,
           1,-2,1,
           2,2,1,
           0,4,6,
           0,0,-3 ), nrow=length(b), byrow=TRUE)
#Los valores de la matriz de perturbación
dc<-matrix(c(7,-1,2),nrow=1)
db<-matrix(c(-1,1,1,1,0,1))
H<-matrix(c(0,-1,0,
           1,0,3,
           1,1,1,
           0,1,2,
           0,1,3,
           1,1,1), nrow=length(db), byrow=TRUE)
#El valor marginal es
valMarg(A,b,c,H,db,dc)
#####
```

C.5. Solución al ejemplo 1

```
#####
#Los valores del problema son:
b<-matrix(c(6,10,8))
c<-matrix(c(2,1.5,1,1,2,1,0,0,0),nrow=1) #Forma estándar a minimizar
A<-matrix(c(1,2,1,2,0,0,-1,0,0,
           4,3,-2,2,4,0,0,-1,0,
           -5,0,1,1,6,-3,0,0,-1), nrow=length(b), byrow=TRUE)
btilde<-matrix(c(7,-1,2))
Bi=c(2,4,5)
#Calculamos los intervalos:
intervRHS(A,b,c,Bi,btilde)
#####
```

C.6. Comprobación del ejemplo 2 aplicando el algoritmo de Bazaraa

```
#####
#Los valores del problema son:
c<-matrix(c(100,200,150,35,0,0),nrow=1)
b<-matrix(c(10,12)) #Forma estándar a minimizar
A<-matrix(c(4,1,
            2,6,
            3,2,
            1,1,
            -1,0,
            0,-1), nrow=length(b), byrow=F)
btilde<-matrix(c(5,6))
Bi=c(2,4)
#Calculamos los intervalos:
intervRHS(A,b,c,Bi,btilde)
#####
```

C.7. Solución al Problema de Programación Lineal 1

```
#####
# Datos
c<-matrix(c(100,200,150,35)) #Forma estándar a minimizar
b<-matrix(c(10,12))
A<-matrix(c(4,1,
            2,6,
            3,2,
            1,1), nrow=length(b), byrow=F)
dc<-matrix(c(50,60,30,10))
intervCostos(A,b,c,dc)
#####
```

C.8. Solución al Problema de Programación Lineal 2

```
#####
# Datos
c<-matrix(c(100,200,150,35)) #Forma estándar a minimizar
b<-matrix(c(10,12))
A<-matrix(c(4,1, 2,6, 3,2, 1,1), nrow=length(b), byrow=F)
dc<-matrix(c(45,45,20,30))
intervCostos(A,b,c,dc)
#####
```

El Simplex, Dualidad y el Dual Simplex

En este apéndice, se revisará de forma breve la notación a utilizar, así como algunos conceptos básicos de la programación lineal. Para profundizar más en este tema, se puede consultar [3] y [10].

D.1. El Método Simplex

Un problema de programación lineal (PPL), o simplemente un problema lineal (PL), es un problema de optimización en el cual la función objetivo es lineal (a minimizar o maximizar) y tiene restricciones en forma de igualdades o desigualdades lineales. Matemáticamente, un problema lineal puede verse de la forma:

$$\begin{aligned} \min z &= cx && \text{(PL)} \\ \text{s.a. } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

en donde A es una matriz de $m \times n$, b es un vector columna de tamaño m y c un vector renglón de tamaño n . Se dice que x es el *vector de variables*, A es la *matriz de coeficientes de las restricciones*, b el *vector de restricciones* y c el *vector de costos*. La *función objetivo* en este caso es minimizar z .

Una solución al sistema anterior se dice que una es *solución factible* si cumple las restricciones del problema, mientras que una *solución óptima* es aquella que es factible y tiene el “mejor” valor en la función objetivo, es decir, una solución óptima es aquella que obtiene el valor más pequeño en PL.

Para verlo de manera matricial, supóngase que la matriz A puede dividirse en dos submatrices B y N , en donde B es una matriz cuadrada de $m \times m$ con columnas linealmente independientes y $N = A \setminus B$; si una matriz no puede ser dividida en estas dos submatrices, entonces se dice que

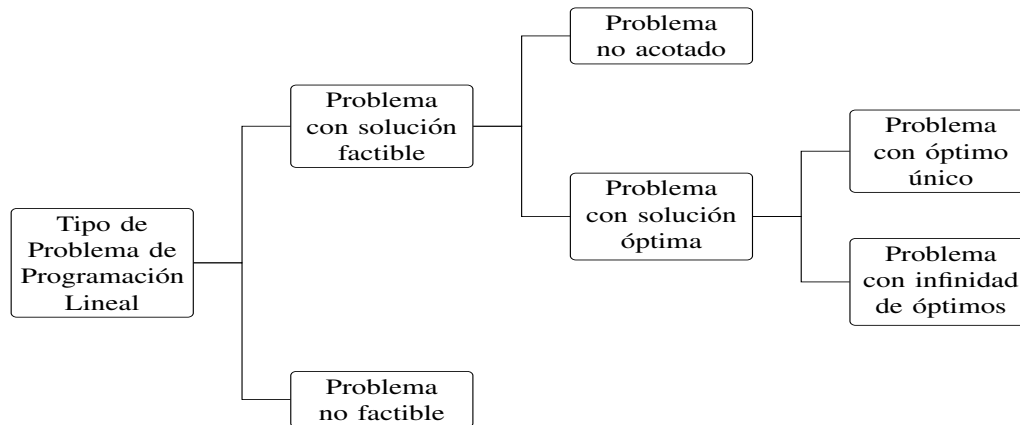


Figura D.1: Diagrama con los tipos de problemas de programación lineal

el problema es *no factible*. A B se le llamará la *matriz básica* o *base*, mientras que a N se le conocerá como *matriz no básica*. Entonces, las variables asociadas a las columnas que forman B serán llamadas *variables básicas* y las asociadas a la matriz N serán las *variables no básicas*; la notación a utilizar es x_B y x_N respectivamente. Como el vector c también está asociado a cada una de las variables, de igual forma se denotará por c_B a las entradas correspondientes a los costos de las variables básicas. Análogamente para c_N . Si se toma como $x_N = \bar{0}$ ¹, entonces se tiene:

$$Bx_B = b, \quad (\text{D.1})$$

en donde cada punto generado de esta forma es un *punto extremo* [3], es decir, un punto generado a partir de la intersección de al menos dos restricciones del Problema PL.

De aquí en adelante, se supondrá que la matriz A es de rango completo², es decir, que siempre será posible encontrar al menos una solución factible a partir de (D.1). En general, el tipo de solución que puede tener un problema de programación lineal se encuentra en la figura D.1, en donde también se muestra los tipos de problemas que se pueden encontrar.

¹Un vector $\bar{0}$ de tamaño n tiene en cada una de sus entradas el valor 0.

²Una matriz es de $m \times n$ es de rango completo si cumple que $m < n$ y que las filas de A son linealmente independientes.

Regresando al problema (PL), dado que $x_N = \bar{0}$, entonces el valor en la función objetivo estará dada por:

$$z = c_B B^{-1} b. \quad (D.2)$$

La siguiente cuestión a tratar es: ¿en qué momento se sabe que se ha llegado a una solución óptima? Para responder esta pregunta, observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Rightarrow Bx_B + Nx_N &= b \\ \Rightarrow x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ &= B^{-1}b - \sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j \end{aligned} \quad (D.3)$$

con J el conjunto de índices de las variables no básicas, y a_j la j -ésima columna de la matriz A . En algunas ocasiones, se denotará por $\bar{b} = B^{-1}b$ y $y_j = B^{-1}a_j$. Así, de la ecuación (D.3), se obtiene que

$$\begin{aligned} z &= cx \\ &= c_B x_B + c_N x_N \\ &= c_B \left(B^{-1}b - \sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j \right) + \sum_{j \in J} c_j x_j \\ &= c_B B^{-1}b - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j \end{aligned} \quad (D.4)$$

en donde $z_j = c_B B^{-1}a_j$. El último término de (D.4) indica que la función objetivo se verá mejorada cuando exista una variable k cuyo valor en $(z_k - c_k) > 0$. Si dicho término es negativo, entonces la función objetivo z aumentará de valor, empeorando el valor de cx . Así, si todos los términos en J resultan ser negativos o iguales a cero, entonces ya se ha encontrado una solución óptima. En otro caso, dado que $x_j = 0 \forall j \in J$, si $\exists k \in J$ t.q. $(z_k - c_k) > 0$, entonces se tiene que dicha variable beneficiará a z si su valor es positivo, y se mete a la base. Para ver qué variable deja la base sin alterar la factibilidad, se utiliza el criterio del cociente mínimo, es decir,

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}, \quad (D.5)$$

con y_{ik} la posición i de la columna y_k , es decir, $[B^{-1}A]_{ik}$ y \bar{b}_i la i -ésima entrada del vector \bar{b} . Si no existiera dicho valor, entonces el problema es *no acotado*.

Por otro lado, supóngase que se tiene una solución óptima, entonces si de la ecuación (D.4) $\exists k \in J$ t.q. $(z_k - c_k) = 0$, se tiene que la k -ésima variable no aporta ni perjudica en nada al valor en la función objetivo, por lo que se concluye que existe una infinidad de soluciones. Si se puede aplicar el cociente mínimo sobre la columna de la variable x_k , entonces se trata de un *segmento de recta*³. Cabe señalar que pueden existir más variables no básicas tales que

³Un segmento de recta está caracterizado como $\lambda x^* + (1 - \lambda)x^{**}$, $\lambda \in [0, 1]$, con x^* y x^{**} puntos extremos óptimos.

$(z_j - c_j) = 0$, en estos casos se trata de otro tipo de espacios de la forma $\lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^* + \dots + \lambda_s x_s^*$ t.q. $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = 1$; sin embargo, en esta tesis no interesa saber más que la caracterización, las bases asociadas y el valor en la función objetivo. Ahora, si no es posible aplicar el cociente mínimo, se trata de un *rayo óptimo*⁴, cuya dirección se puede obtener de la tabla tomando el sistema de ecuaciones generado por

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b,$$

tomando como 1 la posición k , 0 las entradas asociadas a las demás variables no básicas, y para las entradas de las variables básicas se toma $-y_{sk}$ para la variable en la posición s de la base, $s = 1, 2, \dots, m$. Esto último surge de poner las variables básicas en función de la variable x_k a partir de la última tabla simplex generada.

Finalmente, de todo lo anterior es posible construir la famosa “Tabla Simplex”, la cual se encuentra en la Tabla D.1. El algoritmo del método Simplex se puede observar en la Figura D.2.

Tabla D.1: Tabla Simplex

$z_j - c_j$	$c_B B^{-1} b$
$B^{-1} A$	$B^{-1} b$

Pero, ¿qué pasa si se tiene una función objetivo a maximizar? Pues hay dos opciones: o se multiplica por menos dicha función objetivo para poder obtener una función objetivo a minimizar, o se cambian las condiciones de optimalidad. Para la primera opción, sólo hay que recordar que el valor óptimo obtenido en z debe ser multiplicado al final. En la segunda opción, sólo se cambian las condiciones de optimalidad por $z_j - c_j \geq 0$, y todo se hace de la misma forma.

D.1.1. Métodos de Inicialización

Encontrar una base factible no siempre es algo sencillo de lograr. Es peor descubrir que el problema original ni siquiera era factible. Por lo anterior es que existen métodos de inicialización que generan de manera simple una base factible para el problema, e incluso logran detectar si un problema no es factible. A continuación se darán los algoritmos de dos métodos de inicialización. Quienes deseen revisar la teoría que hay detrás, así como algunos ejemplos, se recomienda [3].

⁴Un rayo está caracterizado como $x^* + \lambda d, \lambda \geq 0$, con x^* el punto extremo óptimo y d la dirección de crecimiento

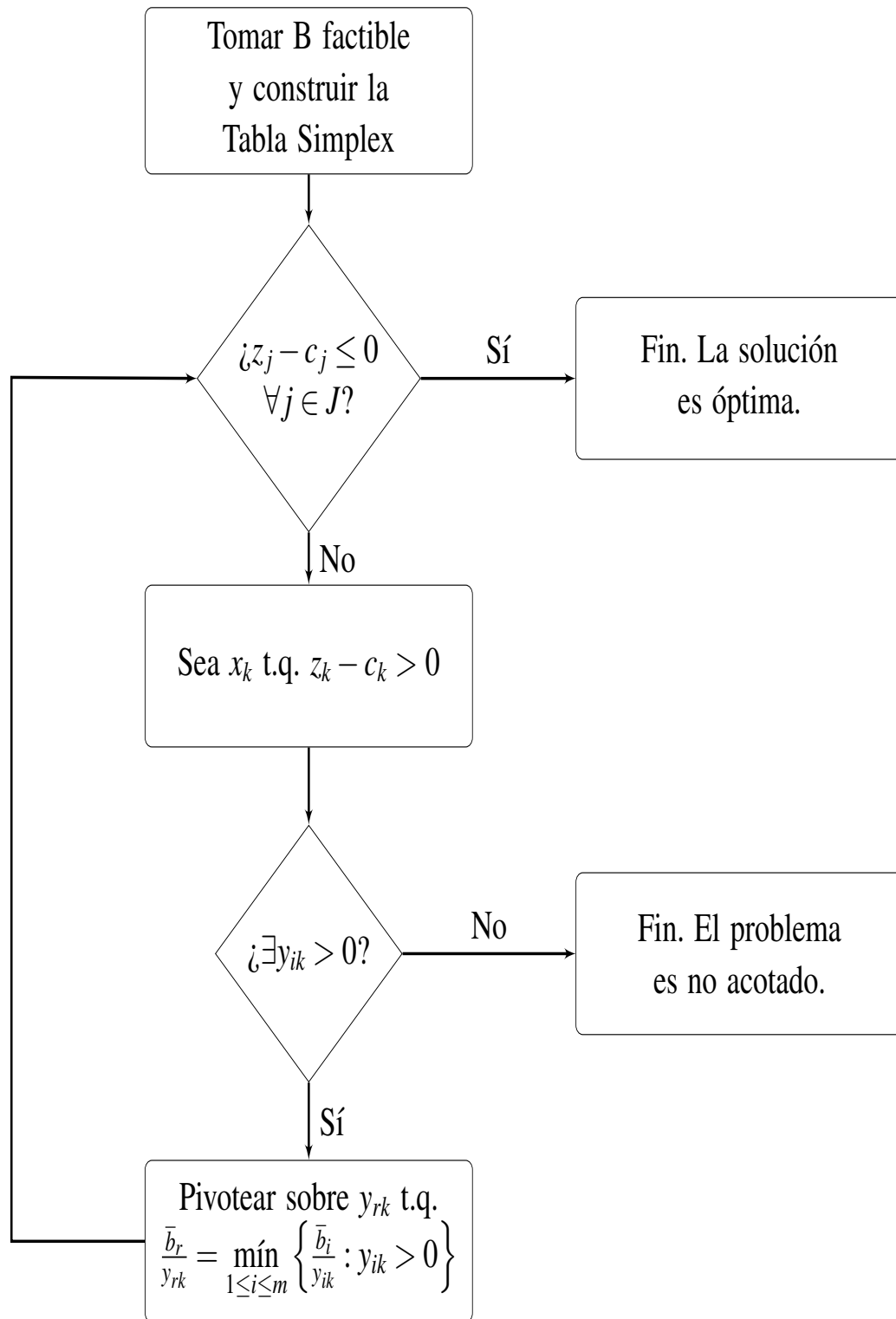


Figura D.2: Diagrama de flujo del Método Simplex

Método de las dos fases

- **Fase 1.** Resolver el siguiente problema lineal tomando $B = I_d$, es decir, las variables básicas son las variables artificiales x_a

$$\begin{aligned} \min \quad & \Sigma x_a \\ \text{s.a.} \quad & Ax + x_a = b \\ & x, x_a \geq 0. \end{aligned}$$

Si al llegar al óptimo existe una variable artificial con valor positivo, entonces finalizar: el problema original es no factible. Por otro lado, si existen variables artificiales en la base, pero su valor es cero, entonces pivotar como en el dual simplex para sacar todas las variables artificiales de la base. Esto es, si la variable artificial $x'_a = x_r = 0$ está dentro de la base, elegimos la variable no artificial x_k t.q.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\}.$$

Es así como sacamos a dicha variable artificial de la base ⁵ y se pasa a la Fase 2. Ahora, si no existen variables artificiales en la base óptima, pasar a la Fase 2.

- **Fase 2.** Resolver el problema original con el método simplex usual, tomando como base inicial la base obtenida en la fase anterior.

Método de la Gran M

Se resuelve el siguiente problema lineal, utilizando como variables básicas las variables artificiales x_a

$$\begin{aligned} \min \quad & cx + M\Sigma x_a \\ \text{s.a.} \quad & Ax + x_a = b \\ & x, x_a \geq 0, \end{aligned}$$

en donde M es un número positivo muy grande, hasta que se llegue a alguno de los siguientes casos:

1. Todas las variables artificiales son cero. En este caso, si alguna variable es básica, pivotamos como en el dual simplex y la sacamos de la base. Es decir, para sacar a la variable artificial $x'_a = x_r = 0$ de la base, elegimos la variable no artificial x_k t.q.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\}.$$

Entonces, sin variables artificiales en la base ⁶, podemos continuar el método simplex usual sin las columnas relacionadas a dichas variables artificiales.

⁵ Si se diera el caso en el que no es posible sacar a x_r de la base, pasar a la Fase 2. Y esto porque como $x_k = 0$, entonces no aporta ni perjudica en nada a la función objetivo original.

⁶Ver nota 5

Tabla D.2: Relación entre el problema Primal y Dual
Fuente: [3]

	Problema a Minimizar		Problema a Maximizar	
Variables	≥ 0	\leftrightarrow	\leq	Restricciones
	≤ 0	\leftrightarrow	\geq	
	srs	\leftrightarrow	$=$	
Restricciones	\geq	\leftrightarrow	≥ 0	Variables
	\leq	\leftrightarrow	≤ 0	
	$=$	\leftrightarrow	srs	

2. La solución actual es óptima y hay al menos alguna variable artificial con valor positivo en la base. Entonces se concluye que el problema original es no factible.
3. Se obtiene que el problema es no acotado. En tal caso, haya o no variables artificiales en la base, se concluye que el problema original es no acotado.

D.2. Dualidad

Definirle a un problema dado otro problema asociado con los mismos coeficientes A , b y c , ayuda a encontrar nuevos métodos y teoría para resolver y/o entender el problema inicial.

Hay diferentes formas de establecer un problema primal y dual. Sin pérdida de generalidad, se definen el primal y el dual de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Primal} & \text{Dual} \\
 \min cx & \max wb \\
 \text{s.a. } Ax \geq 0 & \text{s.a. } wA \leq c \\
 x \geq 0 & w \geq 0
 \end{array}$$

en donde A es una matriz de $m \times n$, b es un vector columna de tamaño m , c un vector reglón de tamaño n , x un vector columna de tamaño n y w un vector reglón de tamaño m ; x y w las variables del primal y del dual respectivamente.

En general, para encontrar el problema dual de cualquier problema lineal, primero se transforma el problema original a la forma de arriba y después se aplica la definición. Entonces, en general se puede obtener fácilmente la Tabla D.2, la cual está basada en una tabla de [3] e indica cómo generar el problema dual dado cualquier problema lineal.

A continuación se mencionarán algunos resultados importantes sobre el primal y el dual. Las demostraciones se encuentran en [3] y [10].

Lema D.1 (Dualidad débil). *Si x y w son soluciones factibles para el primal y el dual respectivamente, entonces $cx \geq wb$*

Lema D.2. *Si x_0 y w_0 son soluciones factibles del primal y del dual, tal que $cx_0 = w_0b$, entonces x_0 y w_0 son soluciones óptimas de sus respectivos problemas.*

Teorema D.1 (Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)). *Las condiciones necesarias y suficientes para que x^* sea solución óptima del problema primal es que exista un vector w^* tal que*

1. $Ax^* \geq b, x^* \geq 0$
2. $w^*A \leq c, w^* \geq 0$
3. $w^*(Ax^* - b) = 0$
 $(c - w^*A)x^* = 0$

Teorema D.2 (Teorema Fundamental de Dualidad). *Dados el problema primal y su respectivo dual, se cumple sólo uno de los siguientes enunciados:*

1. *Ambos tienen solución óptima y $c^* = w^*b$.*
2. *Uno de los problemas es no acotado, entonces el otro problema es no factible.*
3. *Uno de los problemas es no factible, entonces el otro problema es no factible o no acotado.*

Todos estos resultados dan pie a la siguiente sección.

D.3. El Método Dual simplex

Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} & \min cx \\ & \text{s.a. } Ax \geq b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Sea B una base óptima para el problema anterior. Sean $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ las variables de exceso. Entonces, al tener una tabla óptima se cumple lo siguiente

1. $\bar{b} \geq 0$
2. $z_j - c_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, (n+m)$. Si $w = c_B B^{-1}$, entonces $z_j - c_j = wa_j - c_j \leq 0$. Matricialmente, $wA \geq c$. Por otro lado, para las variables de exceso se tiene que $a_i = -e_i$ ⁷ y $c_i = 0$, en donde $i = n+1, n+2, \dots, n+m$; de lo anterior, para $i = n+1, n+2, \dots, n+m$, se obtiene que $z_i - c_i = wa_i - c_i = w(-e_i) - 0 = -w_i \leq 0 \Rightarrow w_i \geq 0$. Finalmente se concluye que la factibilidad en el dual es el criterio de optimalidad en el primal.

⁷ e_i es el vector que tiene 1 en la entrada i y cero en las demás.

3. Sea w^* una solución del dual. Usando $w^* = (c_B B^{-1})b$, notemos que el valor en la función objetivo del dual es $w^*b = (c_B B^{-1})b = c_B \bar{b} = z$, que es el valor en la función objetivo del primal, es decir, $w^* = c_B B^{-1}$ es una solución óptima del dual.

Haciendo un análisis similar a partir de la tabla óptima del dual, se obtienen resultados análogos para el primal.

Ahora, supongamos que se cumple la factibilidad en el dual en la tabla simplex del primal, y que $\exists r$ t.q. $\bar{b}_r < 0$. Se desea mantener la factibilidad en el dual y pivotar de tal forma que se obtenga la factibilidad en el primal, con lo cual la tabla ya sería óptima. Así, una regla similar al *cociente mínimo* es la siguiente:

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\}$$

Así, al pivotar sobre la entrada y_{rk} , no se altera la factibilidad en el dual, pues los nuevos coeficientes $(z_j - c_j)'$ quedan como $(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$; si $y_{rj} \geq 0$, y dado que $z_k - c_k < 0$, entonces $(z_j - c_j)' \leq z_j - c_j \leq 0$. Si $y_{rj} < 0$, se sabe que $\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \leq \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \Rightarrow z_j - c_j = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k) \Rightarrow z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k) \leq 0$.

Cabe mencionar que si no es posible encontrar un $y_{rj} < 0$, entonces se concluye que el problema primal es no factible.

Sólo falta mostrar que en cada iteración, el valor en la función objetivo va mejorando. El valor en z después de pivotar es $c_B B^{-1}b - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \bar{b}_r$; como $z_k - c_k \leq 0$, $\bar{b}_r < 0$ y $y_{rk} < 0$, entonces $-\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \bar{b}_r \geq 0$, con lo que se prueba que el valor en la función objetivo del dual va aumentando.

Finalmente, la teoría anterior respalda el algoritmo dual simplex, el cual se puede observar en el digrama de flujo de la Figura D.3.

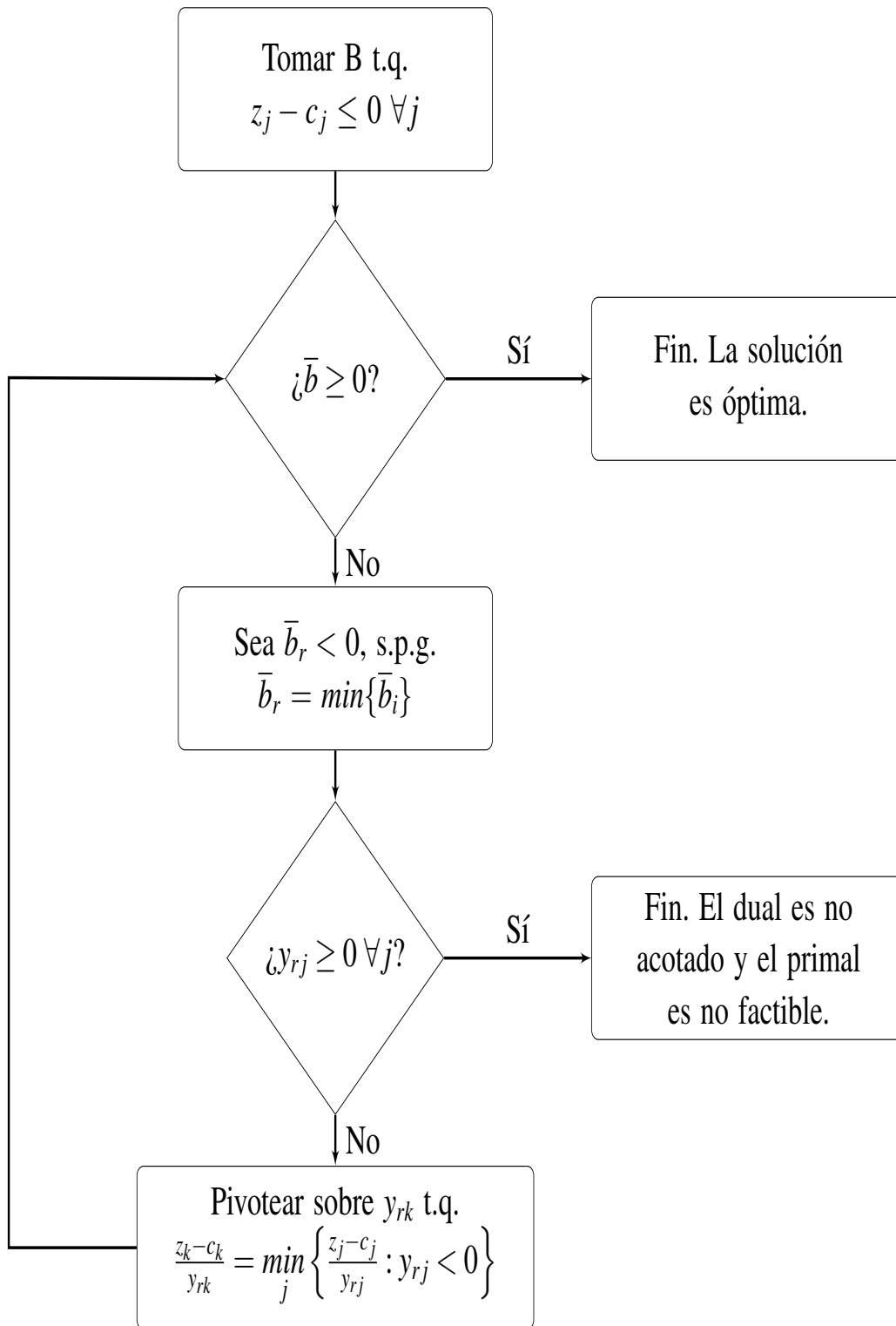


Figura D.3: Diagrama de flujo del Método Dual Simplex



Bibliografía

- [1] Miroslav Barić, Mato Baotić, and Manfred Morari. On-line tuning of controllers for systems with constraints. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pages 8288–8293. IEEE, 2005.
- [2] Miroslav Barić, Colin Jones, and Manfred Morari. Parametric analysis of controllers for constrained linear systems. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pages 4514–4519. IEEE, 2006.
- [3] Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, and Hanif D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*. Wiley, 4 edition, 2010.
- [4] Robert M Freund. Postoptimal analysis of a linear program under simultaneous changes in matrix coefficients. In *Mathematical Programming Essays in Honor of George B. Dantzig Part I*, pages 1–13. Springer, 1985.
- [5] Tomas Gal. A”historiogramme.ºf parametric programming. *The Journal of the Operational Research Society*, 31(5):449–451, 1980.
- [6] Arthur M Geoffrion and R Naus. Exceptional paper-parametric and postoptimality analysis in integer linear programming. *Management Science*, 23(5):453–466, 1977.
- [7] Harvey J Greenberg. Simultaneous primal-dual right-hand-side sensitivity analysis from a strictly complementary solution of a linear program. *SIAM Journal on Optimization*, 10(2):427–442, 2000.
- [8] Allen Holder. Parametric linear programming analysis. In J. Cochran, editor, *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. Springer, 2010.
- [9] Larry Jenkins. Parametric methods in integer linear programming. *Annals of Operations Research*, 27(1):77–96, 1990.

- [10] David G Luenberger and Yinyu Ye. *Linear and nonlinear programming*. Springer, 3 edition, 2008.
- [11] David Mateo, P. M. y Lahoz. Programación lineal iii. análisis post-optimal. <http://ocw.unizar.es/ocw/enseñanzas-tecnicas/modelos-de-investigacion-operativa/ficheros/OCWSensiPara.pdf>, Mayo 2009. [Online; accesado 4-mayo-2016].
- [12] Harlan D. Mills. Marginal values of matrix games and linear programs. *Linear Inequalities and Related Systems*, 1956.
- [13] Katta G Murty. *Linear programming*. 1983.
- [14] Stephen M Robinson. A characterization of stability in linear programming. *Operations Research*, 25(3):435–447, 1977.
- [15] Linus Schrage and Laurence Wolsey. Sensitivity analysis for branch and bound integer programming. *Operations Research*, 33(5):1008–1023, 1985.
- [16] Hamdy A Taha. *Investigación de operaciones*. Pearson Educación, 9 edition, 2012.
- [17] AC Williams. Marginal values in linear programming. *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics*, 11(1):82–94, 1963.
- [18] Leopold B Willner. On parametric linear programming. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 15(5):1253–1257, 1967.