



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA – PROCESOS

DINÁMICA Y REOLOGÍA DE DESLAVES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
I.Q. ALBERTO CASTELLANOS CAMPILLO

TUTORES PRINCIPALES
Dr. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS
FACULTAD DE QUÍMICA, UNAM

Dr. JUAN PABLO AGUAYO VALLEJO
CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO, UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Rafael Herrera Nájera (FQ)

Secretario: Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar (IPN)

Vocal: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz (FI)

1^{er}. Suplente: Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo (CCADET)

2^{do}. Suplente: Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos (FQ)

Lugar donde se realizó la tesis:

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Química,
Departamento de Ingeniería Química, Conjunto E.

TUTORES DE TESIS:

Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

FIRMA

Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo

FIRMA

A Lidia, Isidro y Rafael.

*Toda luna, todo año, todo día, todo viento camina y pasa también.
También toda sangre llega al lugar de su quietud.*

Chilam Balam

πάντα ῥεῖ

RESUMEN

Se evaluó la eficacia del uso de ecuaciones constitutivas de interés reológico en la descripción de la dinámica de un flujo de derrubios.

Un primer análisis de datos recopilados resaltó las variables implicadas en el proceso; lo que condujo al establecimiento de aproximaciones con las que, al simplificar las ecuaciones gobernantes, se obtuvieron los perfiles de velocidad para distintos fluidos: newtonianos, adelgazantes, dilatantes, viscoplásticos y fluidos de Herschel-Bulkley; estos perfiles sirvieron de discriminante para evaluar las fortalezas y debilidades de las ecuaciones constitutivas, que caracterizan a cada fluido, en la descripción del fenómeno.

Ningún fluido logró describir completamente las características del proceso; sin embargo, una modificación transitoria mejoró en gran medida la caracterización del material como un fluido viscoplástico.

Probar otras ecuaciones constitutivas y modificar las aproximaciones establecidas, dará como resultado mejores descripciones de estos desastres naturales que tantas vidas cobran cada año alrededor del mundo.

ABSTRACT

The effectiveness of using rheological constitutive equations in describing the dynamics of debris flows was evaluated.

A first analysis of collected data, highlighted the variables involved in the process; which led to the establishment of approaches with which, by simplifying the governing equations, the velocity profiles were obtained for several fluids: Newtonian, pseudoplastic, dilatant, viscoplastic and Herschel-Bulkley fluids; these profiles were the discriminant to evaluate the strengths and weaknesses of the constitutive equations, that characterize each fluid, in the description of the phenomenon.

No fluid was able to fully describe the characteristics of the process; however, a non-steady modification, greatly improved the characterization of the material as a viscoplastic fluid.

Trying another constitutive equations will result in better descriptions of these natural disasters that cause a great loss of life each year around the world.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres, Lidia e Isidro; y a mi hermano, Rafael; por brindarme desde siempre el más honesto e incondicional apoyo. Todo éxito es enteramente nuestro.

A mi universidad, a mi facultad, a mis profesores y a todos los amigos que he hecho en el camino agradezco también por el aprendizaje; la más grande de las riquezas.

Agradezco especialmente al Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos en quien veo, más allá de un excelente profesor, un gran amigo.

Al Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo y al Dr. Rafael Herrera Nájera por instruirme y aconsejarme; muchas gracias.

Al CONACyT por la beca No. 392596 que me fue otorgada para la culminación de mis estudios de posgrado.

CONTENIDO

1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 REOLOGÍA	2
1.2 MECÁNICA DE FLUIDOS.....	4
1.3 FENÓMENOS DE TRANSPORTE	4
2 ANTECEDENTES	5
2.1 GEOFÍSICA Y PROCESOS GRAVITACIONALES.....	5
2.1.1 <i>Desencadenantes</i>	6
2.1.2 <i>Clasificación de los P.G.</i>	7
2.2 FLUJOS DE DERRUBIOS.....	9
2.3 OBJETIVOS	13
2.4 HIPÓTESIS.....	13
2.5 METODOLOGÍA.....	13
2.6 ALCANCE.....	14
3 IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES	15
3.1 ANÁLISIS ENERGÉTICO	15
3.1.1 <i>Eficiencia Neta</i>	16
3.2 ANÁLISIS DE DATOS RECOPIADOS DEL L/H	18
4 MODELOS DE FASE ÚNICA	21
4.1 ECUACIONES GOBERNANTES	21
4.1.1 <i>Ecuación de Continuidad</i>	24
4.1.2 <i>Ecuaciones de Movimiento</i>	25
4.2 ECUACIONES CONSTITUTIVAS	28
4.2.1 <i>Fluido Newtoniano</i>	28
4.2.2 <i>Fluidos Ley de Potencia</i>	32
4.2.3 <i>Fluidos Viscoplasticos</i>	40
4.2.4 <i>Fluidos de Herschel-Bulkley</i>	47
5 ANÁLISIS DE RESULTADOS	53
6 CONCLUSIONES	57
6.1 TRABAJO FUTURO	59
7 REFERENCIAS	61
8 APÉNDICES	63
9 ANEXOS	85

LISTA DE TABLAS

TABLA 3.1 DATOS DE L/H PARA DIFERENTES FLUJOS DE DERRUBIOS.....	18
TABLA 5.1 ECUACIONES CONSTITUTIVAS EMPLEADAS.....	54
TABLA 5.2 PERFILES DE VELOCIDAD OBTENIDOS.	55
TABLA 5.3 PERFILES ADIMENSIONALES DE VELOCIDAD OBTENIDOS.	55
TABLA 6.1 MODIFICACIONES TRANSITORIAS AL MODELO VISCOPLÁSTICO.....	58

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1: ESTADO ISOTRÓPICO Y ESTADOS ANISOTRÓPICOS DEL ESFUERZO (IRGENS, 2014).	3
FIGURA 2.1: PROCESOS GRAVITACIONALES (USUARIOS GEOFÍSICA, UNAM, 2014).....	8
FIGURA 2.2: EFECTO DEL AGUA EN LOS P.G. (USUARIOS GEOFÍSICA, UNAM, 2014).	9
FIGURA 2.3: DESLAVE EN AUTOPISTA MÉXICO-ACAPULCO, SEPTIEMBRE 2013 (CAPUFE, 2013).	11
FIGURA 3.1: CONVERSIONES DE ENERGÍA EN UN FLUJO DE DERRUBIOS.	16
FIGURA 4.1: ESQUEMA DEL SISTEMA ESTUDIADO.....	22
FIGURA 4.2: POSICIÓN ADIMENSIONAL VS. ESFUERZO ADIMENSIONAL.....	27
FIGURA 4.3: POSICIÓN ADIMENSIONAL VS. VELOCIDAD ADIMENSIONAL (NEWTONIANO). ..	30
FIGURA 4.4: VELOCIDAD ADIMENSIONAL VS. ESFUERZO CORTANTE ADIMENSIONAL (NEWTONIANO).....	31
FIGURA 4.5: POSICIÓN ADIMENSIONAL VS. VELOCIDAD ADIMENSIONAL (ADELGAZANTES)..	35
FIGURA 4.6: VEL. ADIMENSIONAL VS. ESFUERZO CORTANTE ADIMENSIONAL (ADELGAZANTES).	36
FIGURA 4.7: POSICIÓN ADIMENSIONAL VS. VELOCIDAD ADIMENSIONAL (DILATANTES).	37
FIGURA 4.8: VEL. ADIMENSIONAL VS. ESFUERZO CORTANTE ADIMENSIONAL (DILATANTES)..	38
FIGURA 4.9: POSICIÓN ADIMENSIONAL VS. VELOCIDAD ADIMENSIONAL (VISCOPLÁSTICOS).43	
FIGURA 4.10: VEL. ADIMENSIONAL VS. ESFUERZO CORTANTE ADIMENSIONAL (VISCOPLÁSTICOS).....	45
FIGURA 4.11: POSICIÓN ADIMENSIONAL VS. VELOCIDAD ADIMENSIONAL (H-B, $n < 1$).....	50
FIGURA 4.12: VEL. ADIMENSIONAL VS. ESFUERZO CORTANTE ADIMENSIONAL (H-B, $n < 1$). 50	
FIGURA 4.13: POSICIÓN ADIMENSIONAL VS. VELOCIDAD ADIMENSIONAL (H-B, $n > 1$).....	51
FIGURA 4.14: VEL. ADIMENSIONAL VS. ESFUERZO CORTANTE ADIMENSIONAL (H-B, $n > 1$). 51	
FIGURA 5.1: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONAL PARA TODOS LOS FLUIDOS.	56

NOMENCLATURA

$C_{0,1,2,3,4}$	Constantes de integración
De	Número de Deborah
e	Energía
g	Magnitud de la aceleración gravitacional
\underline{g}	Gravedad
h	Profundidad del material descendente
H	Altura inicial del material descendente
\underline{I}	Tensor identidad
K_1	Índice de consistencia (Ley de la Potencia)
K_2	Índice de consistencia (Herschel-Bulkley)
L	Distancia recorrida del material descendente
M	Masa del material descendente
n	Índice de flujo
P	Presión del fluido
$P.G.$	Procesos Gravitacionales
\underline{q}	Flux difusivo de energía
Q	Flujo volumétrico
R	Coefficiente adimensional de resistencia neta
\underline{T}	Tensor de esfuerzos totales
t	Tiempo

t_{obs}	Tiempo de observación
V	Volumen total del fluido
$V_{m\acute{a}x}$	Velocidad máxima del fluido
V_x	Velocidad del fluido en direcci3n x
$\langle V_x \rangle$	Velocidad promedio
\underline{V}	Vector de velocidad para el fluido
w	Ancho (aproximado) del fluido
$\dot{\gamma}$	Rapidez de deformaci3n
$\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$	Tensor rapidez de deformaci3n
ζ	Posici3n a la que $\tau_{xy} = \tau_y$
η	Viscosidad (parámetro de la ec. de Bingham)
η_0	Viscosidad newtoniana
$\eta(\dot{\gamma})$	Funci3n viscosidad
θ	Ángulo de elevaci3n de la pendiente
λ	Tiempo de relajamiento
ξ	Variable de posici3n adimensional
ρ	Densidad del fluido
$\tau_{m\acute{a}x}$	Esfuerzo cortante máximo
τ_y	Esfuerzo de cedencia
τ_{xy}	Esfuerzo cortante
$\underline{\underline{\tau}}$	Tensor de esfuerzos
Υ	Tiempo adimensional

φ	Velocidad adimensional
χ	Esfuerzo de cedencia adimensional
Ψ	Esfuerzo cortante adimensional
Ψ'	Esfuerzo cortante adimensional (Bingham)

APÉNDICES

8.1 DATOS DE FIGURA 4.2.....	63
8.2 DATOS DE FIGURA 4.3.....	65
8.3 DATOS DE FIGURA 4.4.....	66
8.4 DATOS DE FIGURA 4.5.....	67
8.5 DATOS DE FIGURA 4.6.....	70
8.6 DATOS DE FIGURA 4.7.....	73
8.7 DATOS DE FIGURA 4.8.....	76
8.8 DATOS DE FIGURA 4.9.....	79
8.9 DATOS DE FIGURA 4.10.....	82
9.1 ECUACIONES (COORDENADAS CARTESIANAS).....	85

1 INTRODUCCIÓN

En el devenir del tiempo, el ser humano se ha valido de las leyes que rigen su entorno para mejorar sus condiciones de vida; ha transformado y obtenido energía desde la estructura atómica hasta la energía solar, aprovechando las más ínfimas manifestaciones microorgánicas de la naturaleza. Podrían mencionarse muchos y muy variados ejemplos como testimonio de su condición de creador, constructor, productor y transformador de su entorno.

Fue así que, en ocasiones como efecto casual de sus propios instintos, en otras como resultado de su condición ya referida, el hombre creó la técnica; dominó el fuego, obtuvo metales, desarrolló la agricultura, la arquitectura, la pesca y mucho más.

Se puede ubicar, en un periodo entre finales del siglo XVIII y principios del XIX, la época en que confluyeron todas las características necesarias para dar lugar a un movimiento que consistía en la aplicación sistemática del conocimiento científico para la satisfacción de las necesidades humanas: la Ingeniería. Hoy la Ingeniería es además fuente de conocimiento, lo que la hace una disciplina dual; ciencia y técnica en su ser, una disciplina tecnocientífica; como tal, ha creado diferentes ramas de especialización, permitiendo que el desarrollo humano se lleve a cabo con mayor aceleración.

Entre las especialidades que originó, aquella que se encarga del estudio de las propiedades, el comportamiento, las transformaciones y las relaciones entre la materia y la energía, es la Ingeniería Química; gracias a ésta se han podido entender, diseñar, controlar y optimizar,

los procesos de la industria química; sin embargo, sobre la idea de que la búsqueda y la construcción del conocimiento son una misma, es decir que todas las especialidades creadas por el hombre son partícipes de esta tarea, yace en la actualidad una visión mucho más amplia de la Ingeniería Química; una visión proyectada hacia el apoyo a otras ciencias a fin de una mejor comprensión del entorno y de encontrar soluciones a los problemas que enfrenta la humanidad.

Así pues, para el cumplimiento de dicho fin, las principales aportaciones de la Ingeniería Química están contenidas en los Fenómenos de Transporte y la Reología. Por mencionar un ejemplo, la biomédica se ha beneficiado del trabajo en conjunto con la Ingeniería Química, en el estudio de fluidos como la sangre y el tratamiento de diversas patologías.

Siguiendo esa idea; el presente trabajo busca ser una más de las contribuciones de la Ingeniería Química en la búsqueda del saber y la solución de problemas; un trabajo que, como su nombre lo indica, trata del análisis mecánico y reológico de los flujos de derrubios; un tema comúnmente de interés geofísico y al que, año tras año, se enfrenta nuestro país; fenómenos conocidos también como deslaves.

1.1 REOLOGÍA

La Reología ha sido propiamente definida como el estudio del flujo y deformación de los materiales (Barnes, 2000); y con esa idea surge, de manera intuitiva, la necesidad de definir qué es un fluido; usualmente se asocia el concepto con líquidos y gases; pero los sólidos presentan también comportamiento de fluidos; por lo que una definición más apropiada es la de un material que se deforma continuamente cuando se somete a esfuerzos anisotrópicos (Irgens, 2014). Macosko, por su parte, define un fluido como un material que no soporta un esfuerzo cortante sin fluir (Macosko, 1994).

En el estado isotrópico, todas las superficies de un punto material están sometidas al mismo esfuerzo normal; mientras que los esfuerzos cortantes son cero. En el estado anisotrópico, como se muestra en la Figura 1.1, la mayoría de las superficies del punto material experimentarán esfuerzos cortantes. De forma aún más general, el flujo de los materiales depende de tres aspectos:

- Tiempo característico del material (propiedad física).

- Tipo y magnitud de la deformación a la que es sometido el material (característica del proceso).

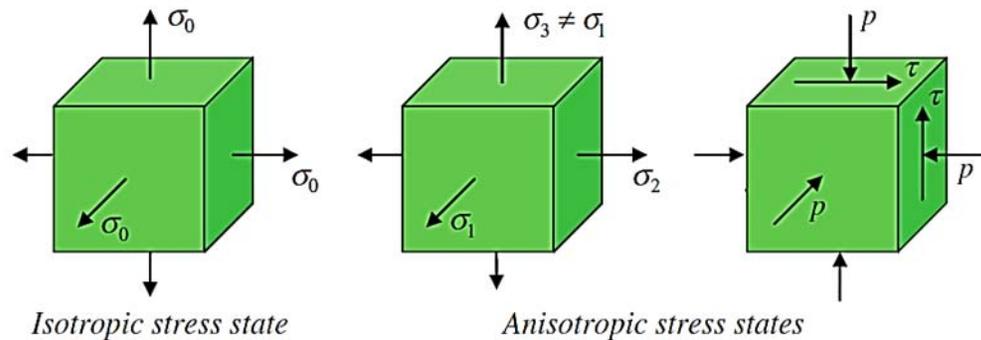


Figura 1.1: Estado isotrópico y estados anisotrópicos del esfuerzo (Irgens, 2014).

Y existe así, un número adimensional que permite diferenciar si un material debe ser considerado como un sólido rígido o un fluido; se trata del número de Deborah:

$$De = \frac{\lambda}{t_{obs}} \quad (1.1)$$

En donde λ es el tiempo de relajación y t_{obs} el tiempo de observación; por lo que si el número es muy grande, el material es sólido; si es muy pequeño, se considera líquido; y si es aproximadamente uno, se le puede considerar como semisólido o semilíquido. Basado en lo anterior, la Reología puede también ser definida como la ciencia que estudia el tiempo característico de los materiales.

Las propiedades macroscópicas especiales del material se describen a través de ecuaciones constitutivas, es decir, las ecuaciones constitutivas representan modelos macromecánicos para los materiales reales.

Es necesario notar que el tensor de esfuerzos totales para un fluido en movimiento se escribe como la suma de dos partes:

$$\underline{\underline{T}} = -P\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (1.2)$$

P es la presión isotrópica a la que está sometido el fluido; $\underline{\underline{I}}$ el tensor identidad; y $\underline{\underline{\tau}}$ se conoce como el tensor de esfuerzos cortantes, o simplemente como el tensor de esfuerzos.

Generalmente, cuando las condiciones del sistema son tales que el material puede considerarse incompresible, la presión total no influye en el comportamiento de éste; y la presión isotrópica queda determinada únicamente por las condiciones de frontera y las ecuaciones de movimiento; es por eso que en Reología las ecuaciones constitutivas se escriben usualmente en términos del tensor de esfuerzos cortantes como función de la deformación y/o de la rapidez de deformación (en su forma más simple), aunque pueden variar también con el tiempo o la historia de deformaciones.

1.2 MECÁNICA DE FLUIDOS

La Mecánica de Fluidos es el estudio de fluidos, ya sea en movimiento o en estado estático, y de los efectos subsecuentes del fluido en las condiciones de frontera; que pueden ser superficies sólidas o interfases con otros fluidos (White, 1998).

Esta disciplina estudia las propiedades del flujo conociendo las propiedades físicas del fluido; a diferencia de la Reología que determina las propiedades físicas del fluido al estudiar su comportamiento en un flujo controlado.

1.3 FENÓMENOS DE TRANSPORTE

El objeto de estudio de los Fenómenos de Transporte incluye tres aspectos íntimamente relacionados: dinámica de fluidos, transferencia de energía y transferencia de masa; usualmente estudiados por separado, los fenómenos de transporte resultan en su estudio unificado (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2002). Al ser un estudio unificado, podría decirse que los Fenómenos de Transporte incluyen a la Mecánica de Fluidos.

Las disciplinas consideran la hipótesis del continuo; que asume que la materia está continuamente distribuida a través del espacio que ocupa. Sin importar cuán pequeños sean los elementos de volumen de materia en que ésta se divida, cada elemento contendrá materia (Irgens, 2014); lo que implica que cualquier propiedad estará definida para cualquier tiempo y cualquier posición.

Son disciplinas fundamentales en la Ingeniería Química; importantes en el desarrollo de este proyecto.

2 ANTECEDENTES

Los flujos de derrubios, o deslaves, son comúnmente objeto de estudio de la Geofísica, por lo que es necesario revisar algunos conceptos que fueron importantes en el desarrollo de este trabajo.

2.1 GEOFÍSICA Y PROCESOS GRAVITACIONALES

La Geofísica es una ciencia derivada de la Geología que trata del estudio de las propiedades físicas de la tierra (Servicio Geológico Mexicano, 2013).

Comprende la investigación de la composición y flujo de energía proveniente del interior del planeta, la fuerza de gravedad que forma el campo gravitacional y la propagación de ondas sísmicas a través de las rocas de la corteza terrestre. Contribuye con la determinación de las ubicaciones adecuadas para obras civiles y en la optimización de procesos de explotación y extracción de minerales, agua y energía; también en la prevención de desastres naturales; y es precisamente en la prevención de desastres naturales en donde el estudio de los procesos gravitacionales es de gran importancia.

Por *procesos gravitacionales (P.G.)* se conoce a los movimientos pendiente abajo de roca, regolito (capa de roca suelta y fragmentos minerales que no forman aún un suelo) y suelo, bajo la influencia directa de la gravedad (Usuarios Geofísica, UNAM, 2014).

Aunque la gravedad es la fuerza que controla los procesos gravitacionales, existen varios factores que desempeñan un papel importante en la superación de la inercia y la creación de movimientos descendentes.

Antes de que se produzca un deslizamiento, diversos procesos actúan para debilitar el material de la pendiente; convirtiéndolo de manera gradual en un material susceptible a la fuerza de gravedad, tal como la meteorización; que es la fragmentación física (desintegración) y alteración química (descomposición) de las rocas de la superficie terrestre, o cerca de ella (Usuarios Geofísica, UNAM, 2014). Por ello se considera a los procesos gravitacionales como una etapa consecutiva a la meteorización.

2.1.1 DESENCADENANTES

A los acontecimientos que inician los movimientos descendientes se les llama *desencadenantes*. Entre los factores comunes que desencadenan los procesos gravitacionales se cuentan:

Saturación del material con agua: En donde los procesos se desencadenan por fuertes lluvias o fusión de la nieve. Cuando los poros del sedimento se llenan de agua, disminuye la cohesión entre las partículas; permitiendo que se deslicen unas sobre otras con relativa facilidad.

Pendientes pronunciadas: Las pendientes son generadas por distintos fenómenos naturales o por acción humana. Las partículas granulares no consolidadas (granos del tamaño de la arena o más gruesos) adoptan una pendiente estable a la que se denomina ángulo de reposo; es el ángulo límite en que el material se mantiene estable; dependiendo del tamaño de las partículas oscila entre 25 y 40 grados. Las pendientes pronunciadas no sólo desencadenan el movimiento de material granular no consolidado, también el de suelos cohesivos (arcillas en que los granos no son independientes entre sí, están unidos por enlaces químicos), regolito y roca viva (roca que se encuentra en el lugar de origen, aún no alterada por la meteorización ni movimiento de masas).

Eliminación de la vegetación: Las plantas protegen contra la erosión y contribuyen a la estabilidad de las pendientes; la eliminación de este anclaje es consecuencia de incendios forestales, tala inmoderada, agricultura o urbanización.

Terremotos: El intenso temblor de la tierra durante los terremotos puede provocar que los materiales superficiales saturados en agua pierdan su resistencia y se conviertan en fluidos; este proceso se denomina *licuefacción*.

Los procesos gravitacionales ocurren, en ocasiones, sin ningún desencadenante apreciable, por ejemplo, cuando los materiales de una pendiente se debilitan gradualmente.

El U.S. Geological Survey calcula que entre veinticinco y cincuenta personas mueren cada año en los Estados Unidos a causa de estos fenómenos (Usuarios Geofísica, UNAM, 2014); el peaje de muertes en todo el mundo es, por supuesto, mucho más elevado.

2.1.2 CLASIFICACIÓN DE LOS P.G.

Existe una larga lista de procesos diferentes que los geólogos denominan procesos gravitacionales o movimientos de masa. En general, los diferentes tipos se clasifican en función del tipo de material implicado, de la clase de movimiento exhibido y de la velocidad del mismo:

Tipo de material: Depende de si la masa descendente empezó como un material no consolidado, es decir, suelo no compactado, o como sustrato de roca. Si el suelo y el regolito son dominantes, se utilizan términos como *derrubios*, barro o tierra. Por el contrario, cuando se desprende y se desplaza pendiente abajo una masa rocosa, el término empleado es únicamente roca.

Tipo de movimiento: En cuanto al tipo de movimiento se distinguen cuatro:

Es *desprendimiento* cuando el movimiento implica la caída libre de fragmentos sueltos de cualquier tamaño; es común en pendientes tan pronunciadas que el material suelto no puede mantenerse sobre la superficie.

Es *deslizamiento*, y la mayoría de los procesos gravitacionales lo son, cuando el material se mantiene bastante coherente, es decir que el agua absorbida y la atracción entre las partículas actúan conjuntamente para producir una masa que se mantiene unida y se deforma plásticamente con cantidades de agua variables (también se les conoce como arcillas o suelos cohesivos) (CENAPRED, 2013); y se mueven a lo largo de una superficie bien definida. A veces la superficie es una diaclasa (fractura de rocas), una falla o un plano de estratificación que es aproximadamente paralelo a la pendiente.

Cuando se emplea la palabra *desplome*, el material descendente se mueve en masa a lo largo de una superficie de ruptura curva.

Finalmente, se trata de un *flujo* cuando el material se desplaza pendiente abajo en forma de un fluido cuyo comportamiento es predominantemente viscoso. La mayor parte del material está saturado con agua y se mueve normalmente siguiendo una forma de lengua o lóbulo.

Velocidad del movimiento: Cuando la velocidad supera los 200 km/h se denominan *avalanchas*. Muchos investigadores creen que las avalanchas de roca deben “flotar” en el aire conforme desciende, es decir, se producen velocidades elevadas cuando el aire queda atrapado y comprimido debajo de la masa de derrubios que se precipita; permitiendo que se mueva como una lámina flexible y elástica a través de la superficie (Usuarios Geofísica, UNAM, 2014).

La mayoría de los movimientos de masa son imperceptiblemente lentos; se denomina *reptación* cuando los movimientos de las partículas se miden en milímetros o centímetros al año.

Los intervalos de velocidad que se pueden presentar son muy amplios, por lo que hay quienes sólo distinguen entre rápidos y lentos; una clasificación muy subjetiva. En la Figura 2.1 se muestran algunos tipos de procesos gravitacionales.

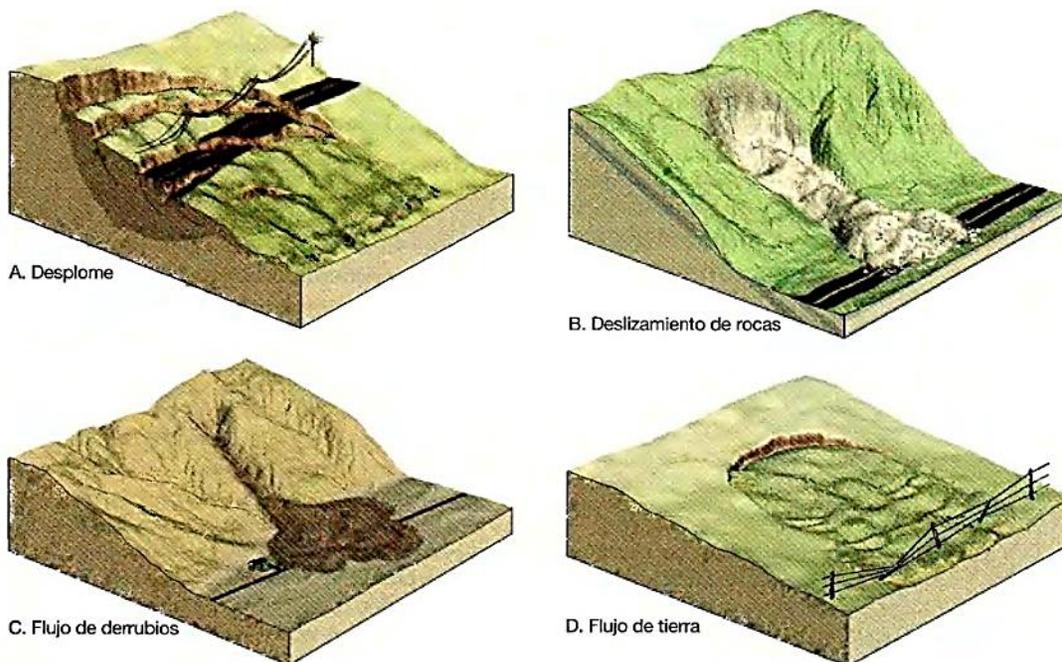


Figura 2.1: Procesos gravitacionales (Usuarios Geofísica, UNAM, 2014).

2.2 FLUJOS DE DERRUBIOS

Los flujos de derrubios son un tipo, relativamente rápido, de procesos gravitacionales que consisten en la fluencia de suelos y regolitos con una abundante cantidad de agua (Usuarios Geofísica, UNAM, 2014); estos flujos se encuentran entre los movimientos de masa más rápidos y más destructivos.

Los flujos de derrubios ocurren cuando las masas de sedimento *poorly sorted* (un término empleado en inglés que describe un material de gran variedad de tamaños de sólidos), agitadas y saturadas con agua, se deslizan por las laderas en respuesta a la atracción gravitatoria. Se trata de fenómenos muy complejos que involucran grandes volúmenes de roca, residuos y suelo (Iverson R. M., 1997).

Como ya se mencionó, la saturación con agua reduce la resistencia interna de los materiales, por lo que pueden ser fácilmente puestos en movimiento por acción de la gravedad, como cuando la arcilla está húmeda y se convierte en una masa muy suave; además de que añade masa al material, lo cual implica mayor peso, que puede ser suficiente en sí mismo para hacer que el material fluya pendiente abajo.

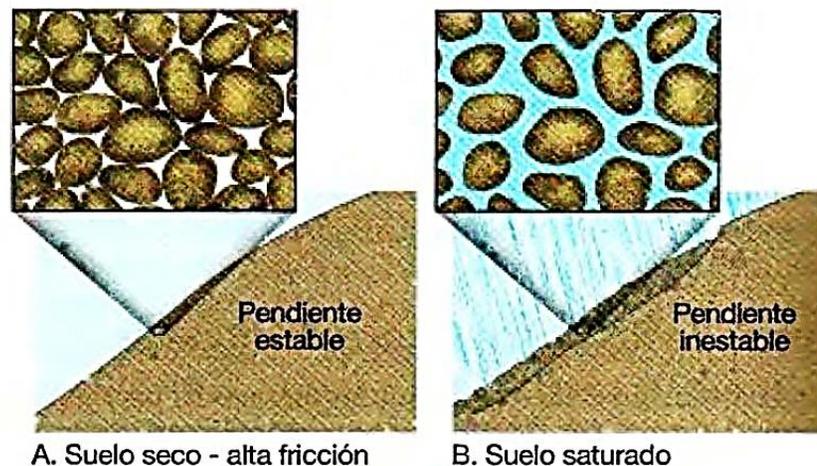


Figura 2.2: Efecto del agua en los P.G. (Usuarios Geofísica, UNAM, 2014).

El flujo es capaz de pasar sobre diversos obstáculos, ya sea removiéndolos o destruyéndolos, aunque también puede ser canalizado o concentrado por los detalles del relieve. El comportamiento de los flujos es muy variado y recorre grandes distancias para, finalmente, sedimentarse cubriendo áreas grandes. Por lo general, al disminuirse la

pendiente o al ampliarse el ancho del canal, los sedimentos del flujo se depositan formando abanicos.

Los flujos se dicen de tierra cuando los materiales implicados son ricos en arcilla y limo, y contienen sólo pequeñas proporciones de arena y granos más gruesos. Dado que los flujos de tierra son bastante viscosos, se mueven en general más lento que los flujos de derrubios.

Estos flujos plantean un peligro serio para las personas que habitan zonas propensas a estos fenómenos. De acuerdo con Irasema Alcántara, investigadora del Instituto de Geografía, en México el 65% de las pérdidas humanas por desastres naturales están relacionadas con procesos gravitacionales, que en su mayoría son flujos de derrubios o tierra (Alcántara Ayala, 2006).

Es importante diferenciar los flujos de las inundaciones. Los flujos pueden tener entre 70 y 90% de concentración de sedimentos en peso; mientras que los flujos hiperconcentrados poseen concentraciones entre 5 y 70%, y las inundaciones menos del 5% de sedimentos. Además, el depósito de los flujos es en abanico y diques, mientras las inundaciones se depositan en forma horizontal (Suárez).

Los flujos pueden alcanzar velocidades de 70km/h (17.4m/s). El análisis de estos flujos es muy complejo y existe muy poca información instrumentada de su comportamiento real, especialmente porque rara vez son observados directamente por los especialistas y la instrumentación generalmente es destruida por el flujo (Suárez).

De acuerdo con distintos autores, el perfil de un flujo en movimiento se divide básicamente en tres partes, el frente donde se concentran los materiales más gruesos, el cuerpo y la cola donde se acumula parte del agua con sedimentos finos (Bateman, Medina, Steiner, & Velasco, 2006).

Uno de los factores más importantes a tomar en cuenta al describir el comportamiento de los flujos es el porcentaje de concentración de sedimentos. También es importante la proporción de sedimentos finos (arcillas y limos), puesto que influye directamente en el tipo de flujo.

Los flujos de derrubios, en forma similar a los materiales granulares secos, pueden resistir esfuerzos cortantes y mantenerse estáticos, y ambos pueden deformarse por los esfuerzos cortantes, sin embargo, en los flujos de derrubios, el fluido de los poros es altamente viscoso y casi

incompresible; el material entonces está compuesto por agua con partículas de limos y arcillas en suspensión; pueden ocurrir colisiones entre los granos. La combinación de la fricción entre los granos, colisiones entre las partículas y el flujo del fluido viscoso, puede transferir una cantidad de momentum significativo en forma simultánea.

La masa viscosa se mueve en pulsos u ondas en las que el frente de la onda transporta los materiales más gruesos y el cuerpo del flujo los materiales más finos, prácticamente licuados por la alta presión de poros. En el frente de los pulsos predominan las fuerzas de los sólidos, y en el cuerpo, las fuerzas del fluido (Iverson R. M., 1997). Este tipo de flujo es muy difícil de modelar matemáticamente.

Es claro también que la interacción sólido-fluido brinda a los flujos un gran poder destructivo; estos ejercen un gran impacto con los obstáculos que encuentran a su paso (como las avalanchas de sólidos) y viajan grandes distancias en canales con pendientes no tan pronunciadas e inundan grandes áreas (como las inundaciones). Los flujos de derrubios grandes pueden exceder los 10^9m^3 y liberar más de 10^{16} J de energía potencial, pero aún los flujos más comunes de aproximadamente 10^3m^3 , pueden acabar con vegetación, dañar estructuras y vidas humanas. En la Figura 2.3 se ejemplifica el daño de los flujos de derrubios.



Figura 2.3: Deslave en Autopista México-Acapulco, septiembre 2013 (CAPUFE, 2013).

La magnitud de estos flujos y su acontecer impredecible dificulta la recolección de datos; lo que se conoce de estos fenómenos se ha obtenido de observaciones cualitativas y de modelos y experimentos idealizados.

Todos los flujos de derrubios involucran movimiento, debido a la gravedad, de una masa finita (aunque sujeta a cambios) de sedimento de distintos tamaños y saturados con agua que se deforman irreversiblemente y mantienen una superficie libre (área expuesta de un líquido hacia la presión atmosférica o hacia un gas). El flujo es no estacionario y no homogéneo, y rara vez se mantiene por más de 10^4 s. Las velocidades máximas pueden pasar de $10 \frac{m}{s}$, y son tan grandes que las fuerzas inerciales del *bulk* son de gran importancia. Las concentraciones de sedimento difieren un poco de aquellas para masas de sedimento sin consolidar y estáticas, típicamente exceden el 50% en volumen.

Finalmente, es importante recalcar que la mayoría de los flujos de derrubios son en principio masas casi rígidas de sedimento cargadas con agua (no saturadas). Cuando el movimiento de las masas ocurre, las mezclas de sedimento-agua pasan a un estado tipo líquido, pero eventualmente se transforman nuevamente en depósitos casi rígidos.

Así pues, una descripción completa de la mecánica de estos fenómenos, debe incluir tanto la movilización, como el flujo y deposición subsecuentes. Adicionalmente, el análisis de la mecánica del flujo requiere de la estimación de los esfuerzos que actúan en él; lo cual motiva este proyecto.

2.3 OBJETIVOS

Puesto que, como ya se mencionó, las principales aportaciones de la Ingeniería Química en la búsqueda del conocimiento, están contenidas en los Fenómenos de Transporte y la Reología, se plantea su uso en el análisis y descripción de los Flujos de Derrubios, así pues, como objetivos se establecen los siguientes:

- Describir, mediante el manejo de ecuaciones constitutivas, las características reológicas de un flujo de derrubios:
 - Considerando un material de fase única.
- Evaluar las fortalezas y debilidades de los modelos en la descripción mecánica del proceso.

2.4 HIPÓTESIS

Bajo el supuesto de que al especificar la forma en que varían los esfuerzos a los que se somete el fluido, se podrían describir las propiedades macroscópicas que exhibe durante su movimiento, la hipótesis queda establecida de la siguiente forma:

- Un fluido semisólido puede ser caracterizado mediante la aplicación de ecuaciones constitutivas de interés reológico.

2.5 METODOLOGÍA

Para lograr los objetivos, se plantea el estudio de diversas ecuaciones constitutivas con el fin de elegir la más adecuada para describir las características mecánicas de un flujo de derrubios.

2.6 ALCANCE

El desarrollo de este proyecto, se plantea con vista a contribuir al establecimiento del marco teórico para la investigación, descripción y predicción de los flujos de derrubios; un problema al que año tras año se enfrenta nuestro país.

La originalidad del presente trabajo radica en el análisis propuesto. Dada la complejidad de las ecuaciones gobernantes, los análisis que se han llevado a cabo de la mecánica de estos flujos han resultado en fórmulas empíricas y modelos basados en información experimental; por lo que el uso de ecuaciones reológicas plantea una aproximación distinta a su descripción.

No existe en la actualidad un modelo que describa por completo las características físicas y mecánicas de los flujos de derrubios. Analizar las variaciones de los esfuerzos a los que se somete el material, aun habiendo establecido aproximaciones que simplifican las ecuaciones gobernantes, resultó en modelos capaces de describir la movilidad del material descendente.

3 IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES

En el desarrollo de este proyecto, es indispensable identificar las variables y la forma en que éstas repercuten en la mecánica del proceso, de tal forma que se tenga un panorama general de las características que se deben describir al establecer el modelo teórico. Para lograr lo anterior, es necesario considerar la energía de los flujos de derrubios.

3.1 ANÁLISIS ENERGÉTICO

La energía en los flujos de derrubios difiere mucho de aquella en el flujo de un sólido o fluido homogéneos. Tal como se señaló en el capítulo previo, las interacciones, y no sólo los efectos aditivos, entre los constituyentes sólido y fluido son importantes.

Los flujos de derrubios involucran una transformación en cascada de la energía que inicia con el movimiento incipiente en la pendiente y culmina cuando el material se deposita. La Figura 3.1 describe las conversiones por las que atraviesa el material al descender; la energía se degrada a estados de mayor entropía.

Las flechas que van en un sólo sentido (\rightarrow) denotan conversiones irreversibles, mientras que la flecha doble (\leftrightarrow) denota una conversión que involucra una retroalimentación positiva significativa.

La energía potencial gravitacional del *bulk* se transforma en energía cinética traslacional, que promueve la energía cinética vibracional de

los sólidos, que a su vez, junto con la energía debida a la presión del fluido en los poros, promueve también la energía traslacional. Finalmente, toda la energía se degrada a calor.



Figura 3.1: Conversiones de energía en un flujo de derrubios.

Los detalles de esta transformación engloban prácticamente todos los aspectos importantes de la física de estos flujos. Para apreciarlos de forma general, que es lo que se busca, se emplea la eficiencia neta.

3.1.1 EFICIENCIA NETA

Para un flujo de derrubios, la eficiencia neta describe la conversión de energía potencial gravitacional a trabajo durante el movimiento de traslación; entre más eficiente sea esta conversión, la energía se degrada menos vigorosamente a formas irrecobrables, como calor; y el flujo recorre una mayor distancia antes de detenerse.

Esta eficiencia puede evaluarse integrando una ecuación que describa el movimiento del centro de masa del material, como una función del tiempo; aunque otra alternativa es hacer un estimado igualando la energía potencial total perdida, relativa a la altura H en relación con el plano en donde se detiene el flujo (como se muestra en la Figura 3.2) y que está dada por MgH , con la energía total degradada a formas irrecobrables debida a las fuerzas de resistencia, dadas por MgR , que actúan a lo largo de la distancia L para hacer que el flujo se detenga (Heim, 1932). La ecuación que representa lo anterior es:

$$MgH = MgRL \quad (3.1)$$

M es la masa total de la mezcla, g es la magnitud de la aceleración gravitacional y R un coeficiente adimensional de resistencia neta que incorpora el efecto de las fuerzas internas, e incluye también a las fuerzas externas que actúan en el lecho para convertir el potencial gravitacional en una traslación horizontal.

Si se cuantificaran los fenómenos mecánicos que gobiernan el coeficiente R se podría entender y predecir el movimiento de los flujos, pero eso no es nada sencillo. Podría pensarse que los datos termodinámicos son suficientes para evaluar R porque, como se mencionó, toda la energía finalmente se degrada a calor, pero no es así. La ecuación 3.1 muestra que la energía total disipada por unidad de masa está dada por gH ; del análisis dimensional:

$$gH [=] \frac{\text{longitud}}{(\text{tiempo})^2} * \text{longitud} * \frac{\text{masa}}{\text{masa}} = \frac{\text{masa} * (\text{longitud})^2}{(\text{tiempo})^2} * \frac{1}{\text{masa}} = \frac{\text{energía}}{\text{masa}}$$

Lo anterior implica una producción de aproximadamente 10 Joules/kg de calor por cada metro que desciende el flujo. Si se considerara únicamente un kilogramo de agua, cuyo calor específico es $4186.8 \frac{J}{kg \text{ } ^\circ C}$, a la que se suministran 10 Joules de energía, la temperatura se elevaría en apenas $0.00239^\circ C$; es decir que el aumento de temperatura para una mezcla de sólidos y agua es prácticamente imperceptible; además, las mediciones de temperatura en espacios abiertos, con intercambios de energía sin restricciones no permiten apreciar con claridad la disipación de energía debida a la resistencia al flujo. Por lo anterior, la primera simplificación de este proyecto es el estudio de un sistema isotérmico.

Volviendo a la eficiencia neta, su evaluación es más simple. De acuerdo con lo establecido en la ecuación 3.1:

$$\frac{1}{MgHR} * MgH = MgRL * \frac{1}{MgHR}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{L}{H} \quad (3.2)$$

En la ecuación 3.2 se aprecia que la eficiencia neta, definida como el recíproco del coeficiente adimensional de resistencia neta, incrementa si la distancia de recorrido L aumenta para una altura H fija. Esto permite concluir que para identificar las variables y evaluar la manera en que influyen en la mecánica del proceso, es necesario recopilar y analizar datos del L/H para diferentes flujos. En la siguiente sección, en la Tabla 3.1 se muestran datos recopilados de diferentes flujos.

3.2 ANÁLISIS DE DATOS RECOPIADOS DEL L/H

ORIGEN	REFERENCIA	V (m ³)	L (m)	H (m)	L/H
Erosión	(Vallance & Scott, 1997)	~10 ⁹	120000	4800	25.0
Deslizamiento de tierra	(Plafker & Ericksen, 1978)	~10 ⁸	120000	6000	20.0
Fusión de nieve	(Pierson, Janda, Thouret, & Borrero, 1990)	~10 ⁷	103000	5190	19.8
Oleada piroclástica	(Fairchild & Wigmosta, 1983)	~10 ⁷	44000	2350	18.7
Oleada piroclástica	(Pierson, Initiation and flow behavior of the 1980 Pine Creek and Muddy river lahars, 1985)	~10 ⁷	31000	2150	14.4
Deslizamiento de tierra	(Sharp & Nobles, 1953)	~10 ⁶	24140	1524	15.8
Inundación	(O'Connor, Hardison, & Costa, 2001)	~10 ⁶	6000	700	8.6
Deslizamiento de tierra	(Pierson, Erosion and deposition by debris flows at Mt. Thomas, North Canterbury, New Zealand, 1980)	~10 ⁵	3500	600	5.8
Deslizamiento de tierra	(Morton & Campbell, 1974)	~10 ⁵	2700	680	4.0
Deslizamiento de tierra	(Wieczorek, Harp, Mark, & Bhattacharyya, 1988)	~10 ⁵	600	200	3.0
Deslizamiento de tierra	(Howard, Baldwin II, & Donley, 1988)	~10 ³	190	88	2.2
Artificial	(Iverson & LaHusen, 1993)	~10 ¹	78	41	1.9

Tabla 3.1 Datos de L/H para diferentes flujos de derrubios.

Los flujos de derrubios son de origen y geometrías (del camino) diferentes, por lo que los valores de L/H pueden compararse únicamente en el más amplio sentido. Sin embargo, de acuerdo a las características reportadas en las diferentes fuentes se pueden establecer algunas generalizaciones al comparar diferentes flujos de origen natural, y por otro lado flujos artificiales, es decir, flujos que resultan de experimentos controlados. Algunas de las conclusiones resultan obvias.

Del análisis de datos recopilados de diferentes flujos naturales resaltan tres puntos:

- El L/H es mayor en flujos de derrubios que en el movimiento de sedimentos secos con masas equiparables. confuso
- Los flujos más grandes tienen mayor eficiencia que los pequeños.
- El L/H depende de la geometría y de las condiciones de frontera que determina el grado de erosión, la sedimentación y canalización del flujo

Del análisis de datos de experimentos controlados resaltan otros tres puntos:

- La eficiencia es mayor para flujos canalizados que para flujos sin confinamiento.
- La eficiencia es mayor cuando se trata con sedimento *well sorted* ¿no hay manera de decirlo en Español? que con sedimento *poorly sorted*; y dependiendo del *sorting* de los sólidos, el agua presenta dos efectos.
- Para sedimento *poorly sorted*, el agua mejora la eficiencia; para sedimento *well sorted*, el agua disminuye la eficiencia.

Los dos últimos puntos resaltan que el efecto de las interacciones agua-sedimento plantea un gran reto en el modelado del proceso. Por otro lado, los efectos de la masa son muy importantes también porque los flujos de derrubios pueden cambiar su masa y composición durante el movimiento; también se pueden expandir longitudinalmente cambiando la distribución de masa. Se suele emplear el término *bulking* para el aumento indistinto de masa o concentración de sólidos, y *debulking* para

la disminución, pero un cambio en la masa, independiente de la composición podría influir la eficiencia.

La ecuación 3.1 hace pensar que la pérdida de masa durante el movimiento incrementa la eficiencia porque la energía potencial inicialmente disponible se mantiene fija, mientras que el trabajo hecho por las fuerzas de oposición disminuye con la disminución de masa. La cuestión es que esto sucedería si el coeficiente R se mantuviera constante o si disminuyera; lo que sería correcto si sólo dependiera de las fuerzas internas, pero depende también de las fuerzas externas que causan la pérdida de masa; ésta requiere de que el lecho haga trabajo sobre el flujo para desacelerar y depositar la masa perdida; este trabajo se añade al trabajo que debiera hacerse a lo largo del camino si no se depositara. Y entonces lo que se necesita saber es si ese trabajo adicional es menor a la energía que se ahorra al perder masa; si lo es entonces sí se podría afirmar que una disminución de masa aumenta la eficiencia. También habría que preguntarse si un aumento en la masa mejoraría la movilidad del flujo y si incrementaría la distancia antes de detenerse. En cada caso el cambio en la masa depende del trabajo hecho durante el intercambio de momentum con el lecho, que cambia de una posición a otra.

Este análisis resalta que los aspectos a considerar, que están íntimamente ligados, se influyen entre sí y repercuten directamente en el comportamiento mecánico de estos flujos, son los siguientes:

- Flujo no estacionario.
- Flujo no homogéneo.
- Geometría y condiciones de frontera.
- Cambios en la masa.
- Cambios en la concentración.
- *Sorting* de los sedimentos, y por tanto, las interacciones entre los sólidos y el fluido.

Son entonces los aspectos que se deben considerar en el modelado de los flujos de derrubios.

4 MODELOS DE FASE ÚNICA

El análisis del capítulo anterior resalta los retos que plantea el modelado de flujos de derrubios y deja claro que se trata de fenómenos muy complejos; es así que un primer acercamiento a su descripción mecánica resulta de establecer aproximaciones que permiten sortear algunas de las dificultades que se plantean en las ecuaciones gobernantes.

4.1 ECUACIONES GOBERNANTES

Este proyecto se centra en la dinámica del fenómeno, por tanto se considera sólo el movimiento del material descendente; no la etapa previa a la superación de la inercia, ni la etapa subsecuente (deposición del fluido).

Teniendo en cuenta lo descrito en el segundo capítulo acerca de la metodología; una vez especificada la reología del material, a través de las ecuaciones constitutivas, se debió evaluar la dinámica del proceso; para esta evaluación, la variable que sirvió de discriminante, para determinar una buena o mala descripción reológica, fue la velocidad del fluido; así pues, las ecuaciones gobernantes resultan, suponiendo un medio continuo, del análisis de la ecuación de continuidad y las ecuaciones de movimiento; ecuaciones 4.1 y 4.2 respectivamente (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2002; Currie, 1993).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{V} = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho \frac{D\underline{V}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{T} + \rho \underline{g} = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\tau} + \rho \underline{g} \quad (4.2)$$

En donde:

$$\underline{V} = (V_x, V_y, V_z) \quad (4.3)$$

$$\underline{g} = (g_x, g_y, g_z) \quad (4.4)$$

Las ecuaciones desarrolladas se encuentran en el Anexo 9.1.

En la Figura 4.1 se presenta el sistema estudiado.

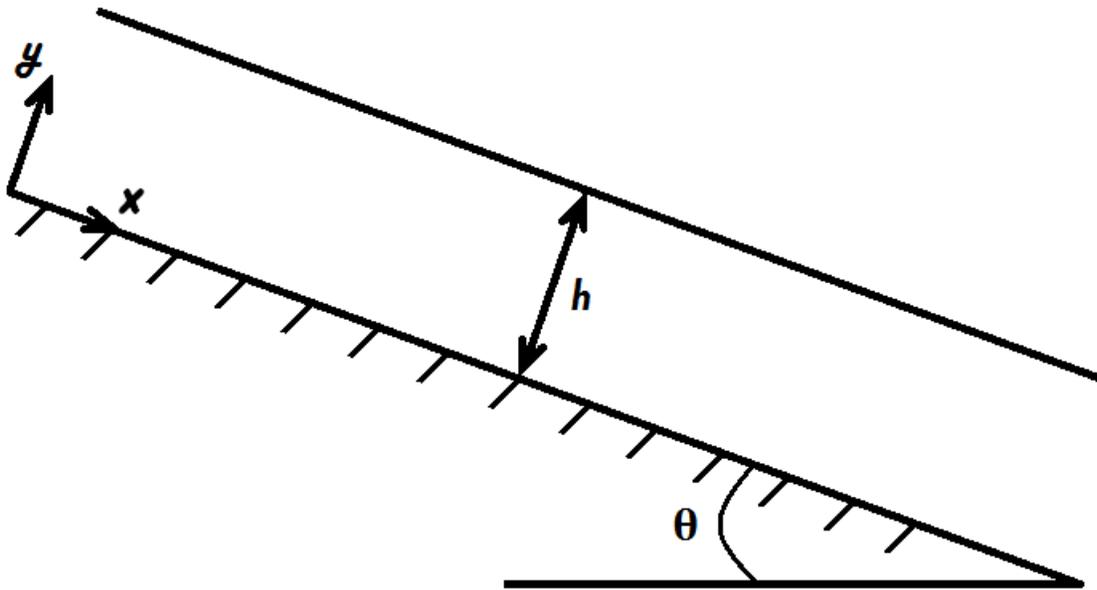


Figura 4.1: Esquema del sistema estudiado.

Las aproximaciones establecidas para el desarrollo de este proyecto son las siguientes:

Flujo estacionario. Eliminar la dependencia con el tiempo es una consideración muy grande que resulta en desviaciones del comportamiento real considerables; no obstante, se trata de un primer acercamiento a la descripción del proceso, la variable temporal deberá tomarse en cuenta en trabajos posteriores.

Sistema Isotérmico. El análisis expuesto en el tercer capítulo concluye que los cambios en la temperatura de la mezcla debidos a la disipación de energía son prácticamente imperceptibles; por tanto, considerar un sistema isotérmico, no influirá la dinámica del proceso.

Fase única de composición y masa constantes. Aunque las interacciones entre los sólidos y el fluido son de gran importancia en estos procesos; considerar las dos fases resultaría en un mayor número de ecuaciones que estarían acopladas (ecuaciones de movimiento y ecuaciones constitutivas; además de la ecuación de masa si se consideran los cambios en ésta); sin embargo este proyecto se estableció como un acercamiento simple desde el punto de vista de la Reología; estudiar una sola fase podría servir de referencia para trabajos posteriores con sistemas bifásicos.

Sistema sin confinamiento. En el capítulo previo se aclaró también que el confinamiento mejora la eficiencia; considerarlo implicaría tomar en cuenta la geometría del canal y los efectos que se producirían en la frontera, lo cual se sugiere como trabajo futuro.

Sistema cartesiano bidimensional. Sin confinamiento, como ya se explicó, no es necesario tomar en cuenta lo que ocurre en las fronteras laterales (por llamarles de algún modo); sin embargo, sí debe considerarse que el material puede expandirse en su descenso; también se debe considerar la superficie expuesta del material (superficie libre), ello implica trabajar con un sistema tridimensional; lo que dificultaría más el análisis. Por otro lado, se consideró que el sistema coordenado está ubicado en la posición inicial del fluido (posición previa al movimiento) y coincide con la pendiente; esto con el fin de tener una referencia fija y poder definir una variable local adimensional (se explica más adelante).

Profundidad constante. Así como el material puede expandirse, puede en consecuencia cambiar su profundidad; por otro lado, como ya se explicó previamente, la concentración de sólidos varía dentro del fluido, y al frente se ubican las rocas de mayor tamaño, por lo que el material desciende en forma de lóbulo; estas dificultades se pueden sortear si se considera una profundidad constante e igual a h .

Las últimas tres consideraciones están íntimamente ligadas; podría pensarse también que el sistema sí está confinado en un canal rectangular; un canal de gran amplitud y altura constante, lo que

justificaría considerar un sistema bidimensional y la profundidad del material constante.

Velocidad en una dirección. Una consecuencia directa de considerar un sistema bidimensional, y de saber que la fuerza de gravedad es la fuerza que conduce el flujo (fuerza motriz), es que para la velocidad, constituida de tres componentes, sobrevive sólo la contribución en dirección x .

Pendiente lisa y ángulo de elevación constante. Las pendientes en la naturaleza son rugosas por los detalles del relieve y los ángulos de elevación no se mantienen constantes; esos efectos en la frontera deben tomarse en cuenta a lo largo del recorrido; como una aproximación general, se pensó en una pendiente lisa y ángulo de elevación θ .

Con las consideraciones antes descritas, se determinaron las ecuaciones gobernantes para el sistema de estudio.

4.1.1 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Las aproximaciones que permiten simplificar la ecuación de continuidad (ecuación 4.1) son:

- Sistema incompresible.
- Velocidad en una sola dirección.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = 0$$

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \tag{4.5}$$

Por la ecuación 4.5 se deduce que la velocidad en dirección x , no depende de x ; depende de la posición en y .

4.1.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Por lo anterior, de las tres ecuaciones (una para cada dirección) descritas por la expresión de la ecuación 4.2, debe analizarse únicamente la ecuación para la dirección del movimiento, y las consideraciones que permiten simplificar dicha ecuación son:

- Flujo estacionario.
- Flujo conducido sólo por la fuerza de gravedad.
- Velocidad en una sola dirección.
- Pendiente con ángulo de elevación constante.

$$\underline{g} = (g \sin \theta, g \cos \theta, g_z) \quad (4.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g \sin \theta$$

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = -\rho g \sin \theta \quad (4.7)$$

La ecuación 4.7 resalta que el esfuerzo cortante varía de forma constante respecto a la posición en y .

$$d\tau_{xy} = \int -\rho g \sin \theta dy$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho g \sin \theta + C_0 \quad (4.8)$$

La constante de integración se evaluó con la condición de frontera; la cual toma en cuenta:

- Sistema sin confinamiento.
- Superficie libre.

$$y = h \Rightarrow \tau_{xy} = 0 \quad (4.9)$$

$$\therefore C_0 = \rho g \operatorname{sen} \theta h$$

$$\boxed{\tau_{xy} = \rho g \operatorname{sen} \theta (h - y)} \quad (4.10)$$

La ecuación 4.10 muestra la variación lineal del esfuerzo cortante con la posición; esta relación se mantiene sin importar las características reológicas del fluido.

Del análisis dimensional:

$$\rho g \operatorname{sen} \theta h [=] \frac{\text{masa}}{(\text{longitud})^3} * \frac{\text{longitud}}{(\text{tiempo})^2} * \text{longitud} = \frac{\text{masa} * \text{longitud}}{(\text{tiempo})^2 * (\text{longitud})^2} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}}$$

El término tiene dimensiones de esfuerzo, por lo que se definió con éste un esfuerzo adimensional:

$$\Psi = \frac{\tau_{xy}}{\rho g \operatorname{sen} \theta h} \quad (4.11)$$

Empleando la profundidad del material descendente como una longitud característica, se definió también una posición adimensional:

$$\xi = \frac{y}{h} \quad (4.12)$$

Así, con las ecuaciones 4.11 y 4.12 se reescribió la ecuación 4.10:

$$\boxed{\Psi = 1 - \xi} \quad (4.13)$$

Una de las ventajas de expresar las ecuaciones en forma adimensional es que las variables quedan acotadas, o al menos se le pueden asignar valores sin necesidad de tener datos específicos sobre las propiedades físicas del fluido en cuestión; las ecuaciones en forma adimensional son más generales y resultan más simples de graficar.

En la Figura 4.2 se muestra la relación descrita por la ecuación 4.13; se optó por graficar en el eje de las ordenadas a la posición adimensional simplemente porque es el lugar que le corresponde en el sistema coordenado. Los valores graficados se encuentran en el Apéndice 8.1.

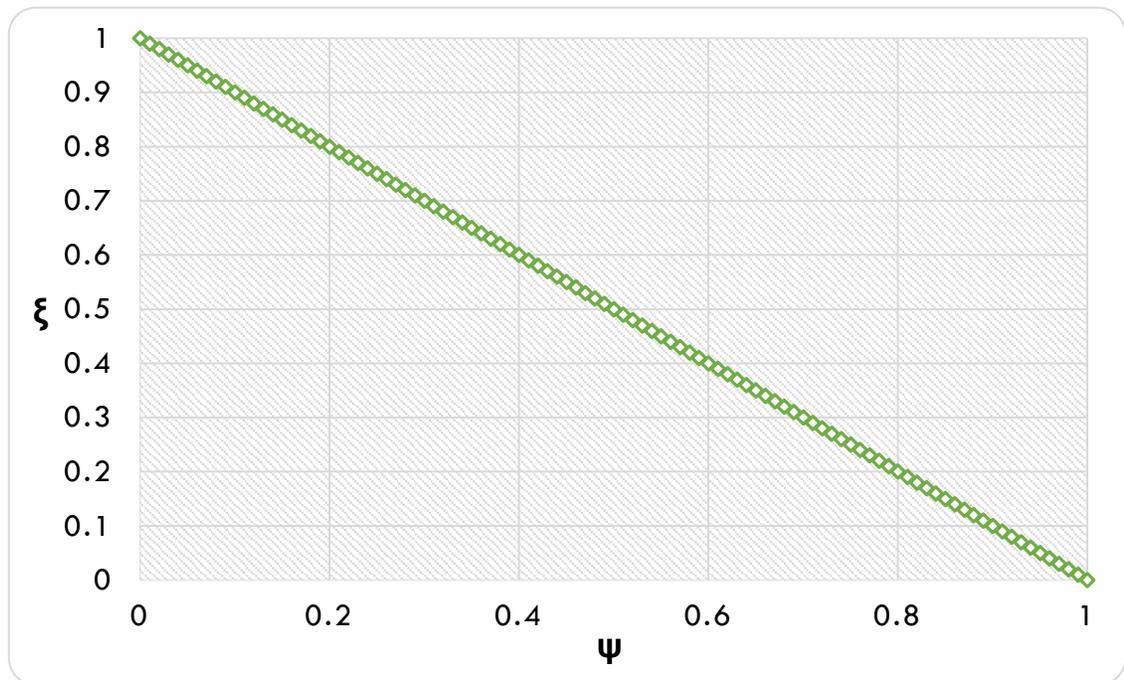


Figura 4.2: Posición adimensional vs. Esfuerzo adimensional.

Se determinó que, por la forma en que se definieron las variables adimensionales, tanto el esfuerzo cortante adimensional como la posición adimensional están acotadas; toman valores entre cero y uno; esto es importante sobre todo para el primero, porque implica que el término $\rho g \sin \theta h$ representa un esfuerzo cortante máximo.

$$\tau_{\text{máx}} = \rho g \sin \theta h \quad (4.14)$$

El esfuerzo cortante es mayor cerca de la pendiente, y disminuye hasta hacerse cero en la superficie libre; lo anterior puede explicarse si se

considera que sobre la pendiente el fluido presenta mayor resistencia al flujo puesto que está en contacto con una superficie rígida (resistencia que se añade a la propia del material), por lo que, para mover el fluido, se requiere de la acción de un esfuerzo mayor.

Teniendo la ecuación 4.10, el trabajo siguiente consistió en obtener el perfil de velocidades para el fluido; para lo cual se debía especificar la reología con ecuaciones constitutivas que, como se mencionó en el capítulo introductorio, especifican cómo varía la rapidez de deformación con el esfuerzo aplicado.

4.2 ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Una ecuación que especifica $\underline{\underline{\tau}}$ para un fluido es a lo que se conoce como ecuación constitutiva. La naturaleza particular de los esfuerzos descritos por la ecuación depende del tipo de fluido que se estudia. Gran parte de la investigación reológica se centra en desarrollar las ecuaciones constitutivas apropiadas para fluidos no newtonianos. Las ecuaciones constitutivas expresan los esfuerzos moleculares generados en el flujo en términos de variables cinéticas como velocidades, deformaciones y derivadas de velocidades y deformaciones (Morrison, 2000).

Se presentan a continuación las ecuaciones constitutivas empleadas en este proyecto, así como los modelos que se derivan a partir de ellas.

4.2.1 FLUIDO NEWTONIANO

La ecuación constitutiva más simple es aquella que describe un fluido Newtoniano (viscoso):

$$\underline{\underline{\tau}} = \eta_0 \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad (4.15)$$

En donde η_0 es la viscosidad del fluido (cuantifica la resistencia del material a fluir) y $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ es el tensor rapidez de deformación:

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \nabla \underline{\underline{V}} + (\nabla \underline{\underline{V}})^T \quad (4.16)$$

Al simplificar y combinar las ecuaciones 4.10 y 4.15 se llegó a:

$$\eta_0 \frac{dV_x}{dy} = \rho g \operatorname{sen} \theta (h - y) \quad (4.17)$$

$$\int dV_x = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\eta_0} \left(\int h dy - \int y dy \right)$$

$$V_x = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\eta_0} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) + C_1 \quad (4.18)$$

La ecuación 4.18 debe satisfacer la condición a la frontera:

$$y = h \rightarrow V_x = 0 \quad (4.19)$$

$$\therefore C_1 = 0$$

$$\boxed{V_x = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta h^2}{\eta_0} \left[\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]} \quad (4.20)$$

Del análisis dimensional

$$\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta h^2}{\eta_0} [=] \frac{\text{masa}}{(\text{longitud})^3} * \frac{\text{longitud}}{(\text{tiempo})^2} * (\text{longitud})^2 * \frac{\text{tiempo} * \text{longitud}}{\text{masa}} = \frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}}$$

Lo anterior permitió definir una velocidad adimensional:

$$\varphi = \frac{2\eta_0}{\rho g \operatorname{sen} \theta h^2} \quad (4.21)$$

Con las ecuaciones 4.12 y 4.21 se reescribió la ecuación 4.20:

$$\varphi = 2\xi - \xi^2 \quad (4.22)$$

En la Figura 4.3 se muestra la relación descrita por la ecuación 4.22; se mantuvo la convención de graficar la posición adimensional en el eje de las ordenadas; lo mismo se hizo en gráficas posteriores. Los valores graficados se encuentran en el Apéndice 8.2.

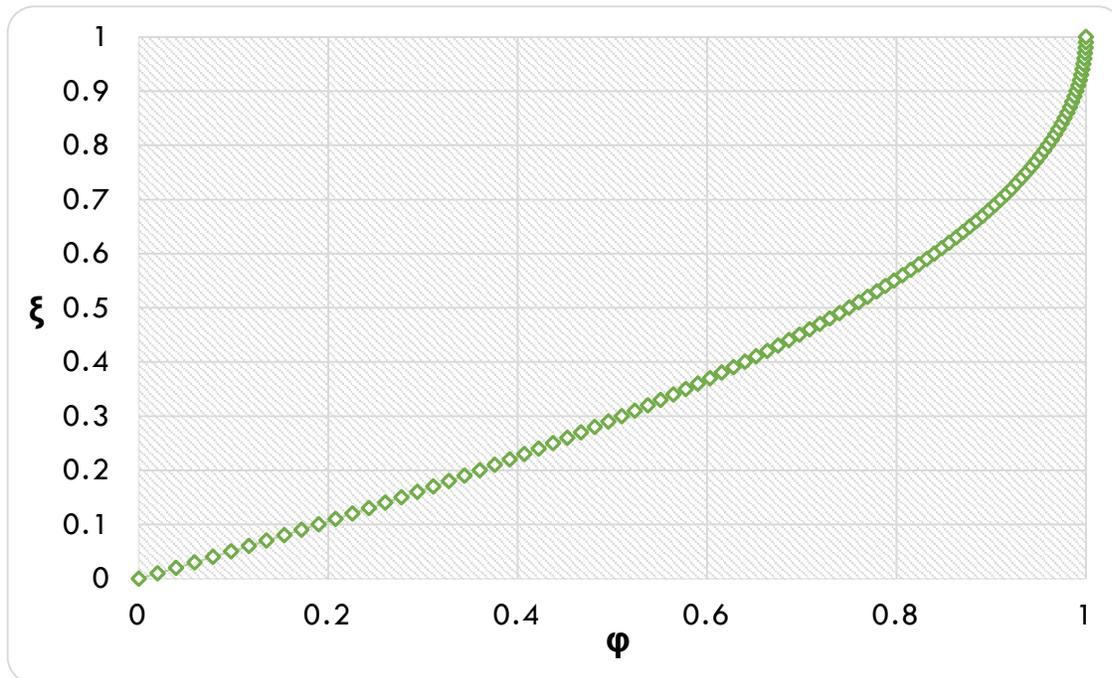


Figura 4.3: Posición adimensional vs. Velocidad adimensional (newtoniano).

El perfil cuadrático describe el flujo de un fluido de viscosidad constante, como si se tratase únicamente de agua.

Por la forma en que se definió la velocidad adimensional, se aprecia que toma valores entre cero y uno; su valor es mayor cerca de la superficie libre, y disminuye hasta ser cero sobre la pendiente (por la condición de adherencia). Lo anterior permitió concluir que el término $\frac{\rho g \sin \theta h^2}{2\eta_0}$ representa una velocidad máxima.

$$V_{\text{máx}} = \frac{\rho g \sin \theta h^2}{2\eta_0} \quad (4.23)$$

Para el fluido newtoniano, el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la rapidez de deformación, y la constante de proporcionalidad es la viscosidad (constante) del fluido. Se determinó previamente que el esfuerzo es mayor cerca de la pendiente, por lo que se puede deducir que la rapidez de deformación debe ser mayor también, lo que se comprueba en la Figura 4.3, en donde las variaciones de la velocidad adimensional son mayores cuando más cerca se está de la pendiente.

En la Figura 4.4 se muestra la relación que mantienen el esfuerzo cortante y la velocidad adimensionales. Se aprecia que cuando el esfuerzo cortante es mayor, la velocidad del fluido es menor, lo cual, como ya se discutió, puede estar relacionado con la cercanía a la superficie rígida, es decir que a mayor profundidad el fluido presenta una mayor resistencia al flujo, por tanto, para que el movimiento tenga lugar, debe actuar un esfuerzo cortante mayor, sin embargo, el movimiento logrado es mucho más bajo que en posiciones cercanas a la superficie libre, en donde, a pesar de que actúa un esfuerzo más bajo, el fluido presenta menor resistencia al flujo.

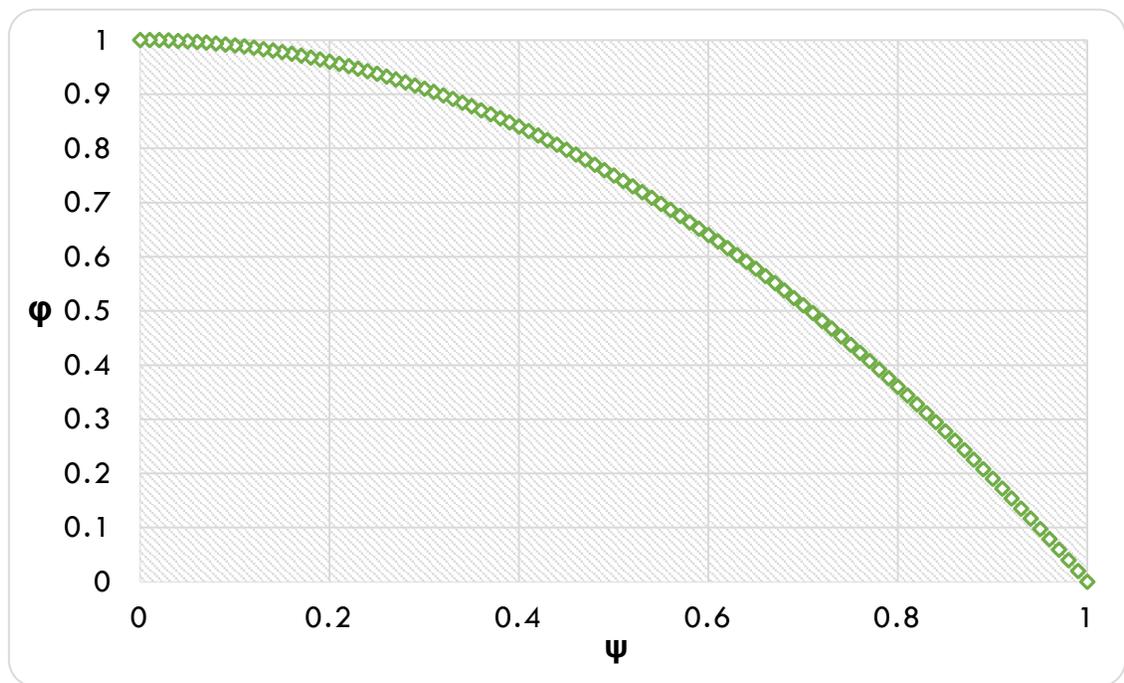


Figura 4.4: Velocidad adimensional vs. Esfuerzo cortante adimensional (newtoniano).

Es claro que la dinámica de los flujos de derrubios se desvía mucho de la dinámica newtoniana; sin embargo, como caso límite, este modelo podría describir el movimiento de un fluido con una concentración de sólidos muy baja.

A partir de la ecuación 4.20 se pueden evaluar otros parámetros del flujo; la velocidad promedio, por ejemplo, se define como:

$$\langle V_x \rangle = \frac{\int_0^w \int_0^h V_x dy dz}{\int_0^w \int_0^h dy dz} = \frac{Q}{\text{área transversal}} \quad (4.24)$$

En donde w representa un ancho (aproximado) del material descendente, y Q el flujo volumétrico. Para el movimiento de este fluido:

$$Q = \frac{2 w \rho g \text{sen} \theta h^3}{3 \cdot 2 \eta_0} = \frac{2}{3} w h V_{m\acute{a}x} \quad (4.25)$$

$$\langle V_x \rangle = \frac{2 \rho g \text{sen} \theta h^2}{3 \cdot 2 \eta_0} = \frac{2}{3} V_{m\acute{a}x} \quad (4.26)$$

La ecuación constitutiva de Newton predice una viscosidad constante cuando se aplica un esfuerzo cortante estacionario, por lo que, para plantear un modelo más general, se consideró una viscosidad variable. Las siguientes ecuaciones constitutivas empleadas plantean modificaciones al modelo newtoniano.

4.2.2 FLUIDOS LEY DE POTENCIA

La ecuación de ley de potencia plantea una modificación en que el término η_0 de la ecuación 4.15 es reemplazado por una función escalar de viscosidad que depende de la rapidez de deformación ($\dot{\gamma}$), que es el segundo invariante del tensor rapidez deformación:

$$\eta(\dot{\gamma}) = K_1 (\dot{\gamma})^{n-1} \quad (4.27)$$

En donde K_1 es el índice de consistencia, que usualmente se maneja en unidades de $Pa \cdot s^n$; y n es un parámetro adimensional.

La ecuación constitutiva queda entonces expresa de la siguiente forma:

$$\underline{\tau} = K_1(\dot{\gamma})^{n-1}\underline{\dot{\gamma}} \quad (4.28)$$

Para el sistema de estudio la ecuación tensorial 4.28 se simplificó únicamente para el esfuerzo cortante:

$$\tau_{xy} = K_1(\dot{\gamma})^n = K_1\left(\frac{dV_x}{dy}\right)^n \quad (4.29)$$

La ecuación diferencial que se debió resolver, resultó de la combinación de las ecuaciones 4.10 y 4.29:

$$K_1\left(\frac{dV_x}{dy}\right)^n = \rho g \operatorname{sen}\theta (h - y) \quad (4.30)$$

$$\frac{dV_x}{dy} = \left(\frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} (h - y)^{\frac{1}{n}}$$

$$\int dV_x = \left(\frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} \int (h - y)^{\frac{1}{n}} dy$$

$$V_x = -\left(\frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{(h - y)^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} + C_2 \quad (4.31)$$

La constante se evaluó con la condición establecida en la ecuación 4.19:

$$y = 0 \quad V_x = 0$$

$$\therefore C_3 = \left(\frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{(h)^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

$$\boxed{V_x = \left(\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{(h)^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]} \quad (4.32)$$

Del análisis dimensional:

$$\left(\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}} [=] \frac{\text{masa}^{\frac{1}{n}}}{\text{longitud}^{\frac{3}{n}}} * \frac{\text{longitud}^{\frac{1}{n}}}{\text{tiempo}^{\frac{2}{n}}} * \text{longitud}^{1+\frac{1}{n}} * \frac{\text{tiempo}^{\frac{2}{n}} * \text{longitud}^{\frac{1}{n}}}{\text{masa}^{\frac{1}{n}} * \text{tiempo}}$$

$$\left(\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}} [=] \frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}}$$

Lo que permitió definir una velocidad adimensional:

$$\varphi = \frac{V_x}{\left(\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right)} \quad (4.33)$$

Con las ecuaciones 4.12 y 4.33 se reescribió la ecuación 4.32:

$$\boxed{\varphi = 1 - \left(1 - \xi\right)^{\frac{n+1}{n}}} \quad (4.34)$$

El comportamiento del fluido será diferente según los valores que tome n ; cuando $n = 1$ se recupera el caso newtoniano.

De acuerdo a los valores del índice, se obtuvieron dos modelos.

4.2.2.1 FLUIDO ADELGAZANTE

De la ecuación 4.27 se puede deducir que si el índice toma valores menores que la unidad, la función viscosidad es inversamente proporcional a la rapidez de deformación; sin embargo, la relación entre el esfuerzo cortante y la rapidez, que se establece en la ecuación 4.29, se mantiene análoga a aquella para un fluido newtoniano, es decir, al aumentar el esfuerzo cortante, incrementa la rapidez de deformación; y la función viscosidad, que ahora no es constante, es el parámetro que indica en qué proporción se da dicha relación. Establecido lo anterior, y dado el comportamiento observado en la Figura 4.2, en donde se aprecia que el esfuerzo cortante es mayor en posiciones cercanas a la pendiente, y menor en posiciones cercanas a la superficie libre; resulta fácil deducir que la rapidez de deformación sigue la misma tendencia, por tanto, al descender en el fluido, la función viscosidad disminuye, lo cual implica una disminución en la resistencia al flujo por parte del material descendente, y una consecuente mejora en la movilidad, esta mejora se aprecia en la Figura 4.5, en donde, al disminuir el valor del índice, la velocidad en una misma posición es mayor; lo que define un fluido adelgazante.

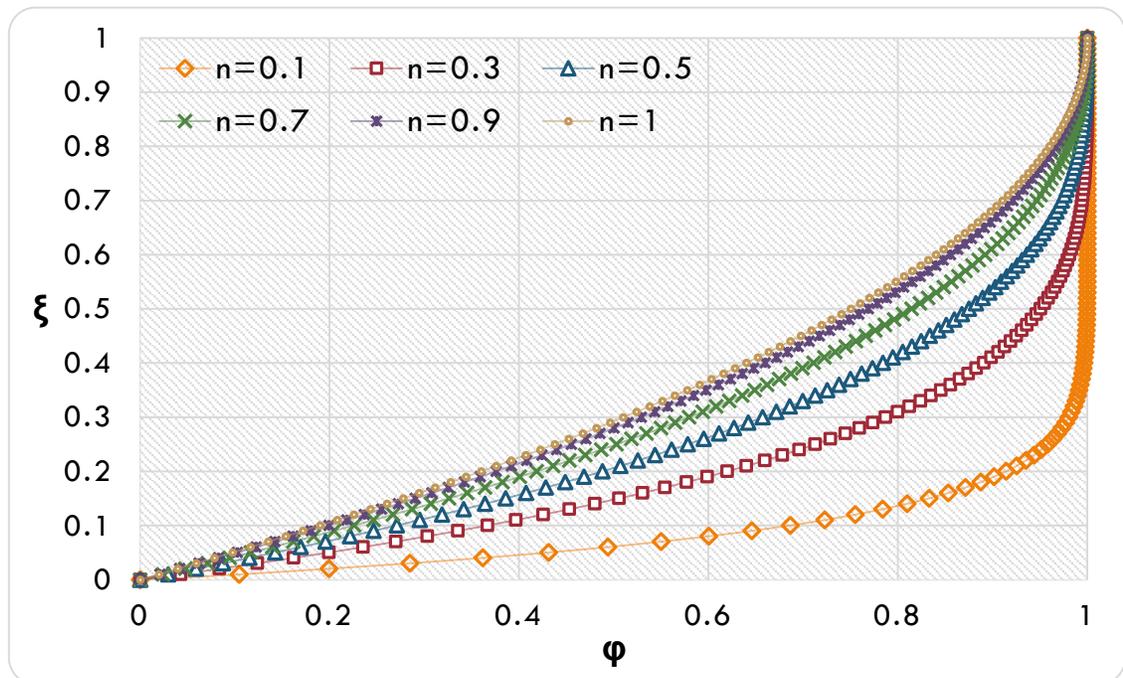


Figura 4.5: Posición adimensional vs. Velocidad adimensional (adelgazantes).

Por su parte, la Figura 4.6 se muestra la relación que guardan, para diferentes valores del índice, la velocidad y el esfuerzo cortante. Se aprecia que para el mismo esfuerzo cortante, la velocidad que se logra

es mayor, lo cual concuerda con lo que establece el modelo; dado que la función viscosidad disminuye, la resistencia al flujo es menor y para un mismo esfuerzo, se alcanzan velocidades mayores al disminuir el valor del índice.

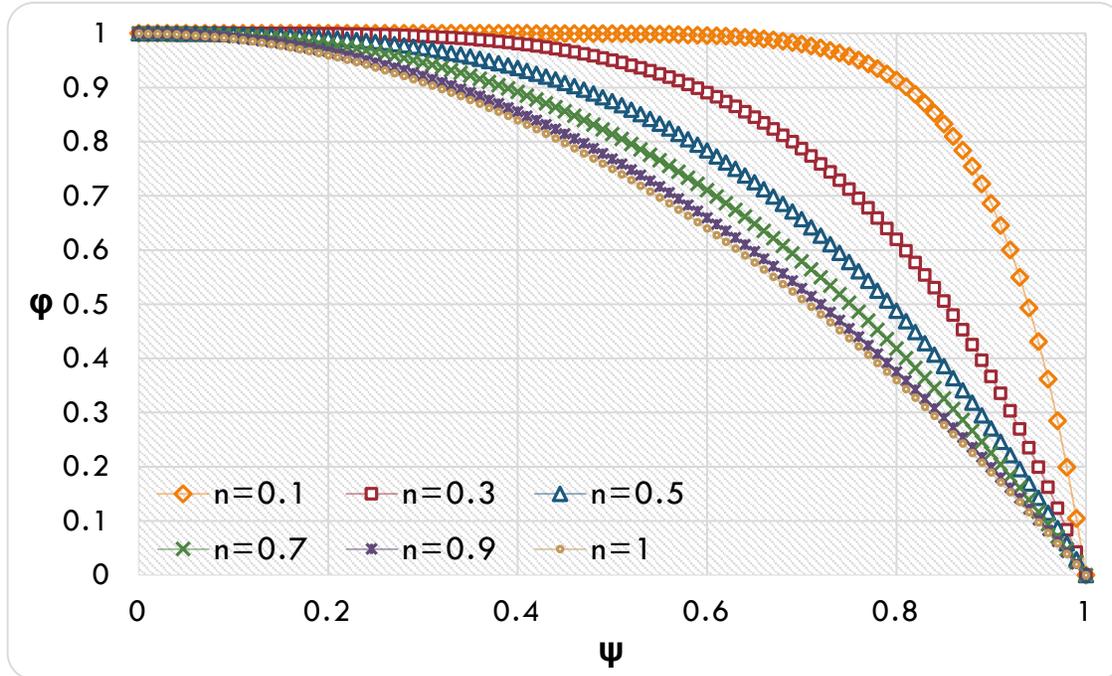


Figura 4.6: Vel. adimensional vs. Esfuerzo cortante adimensional (adelgazantes).

De forma análoga al análisis con fluido newtoniano, se puede concluir que el término $\left(\frac{\rho g \sin \theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right)$ representa una velocidad máxima.

El fluido adelgazante describe un material con mayor movilidad que el fluido newtoniano, lo cual, aun con el análisis del tercer capítulo, en el que se concluyó que la cantidad de agua mejora la eficiencia, no es posible para un flujo de derrubios, por lo que este modelo dista mucho de ser adecuado para describir al material y la dinámica del proceso.

Otros parámetros del flujo:

$$Q = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) wh \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) wh V_{m\acute{a}x} \quad (4.35)$$

$$\langle V_x \rangle = \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K_1} \right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) V_{\text{máx}} \quad (4.36)$$

Las ecuaciones 4.35 y 4.36 son válidas para cualquier valor del índice.

4.2.2.2 FLUIDO DILATANTE

Análogo al análisis para un fluido adelgazante, se deduce de la ecuación 4.27 que si el índice toma valores mayores que la unidad, la función viscosidad es directamente proporcional a la rapidez de deformación, lo que implica que cerca de la pendiente, es decir, cuando el esfuerzo aumenta, se incrementa la rapidez de deformación, y así también la función viscosidad (a diferencia de lo que ocurría para un fluido adelgazante), lo cual implica un incremento en la resistencia al flujo por parte del material descendente, y una consecuente disminución en la movilidad. Lo anterior se aprecia en la Figura 4.7, en donde, al aumentar el valor del índice, la velocidad en una misma posición es menor; lo que define un fluido dilatante.

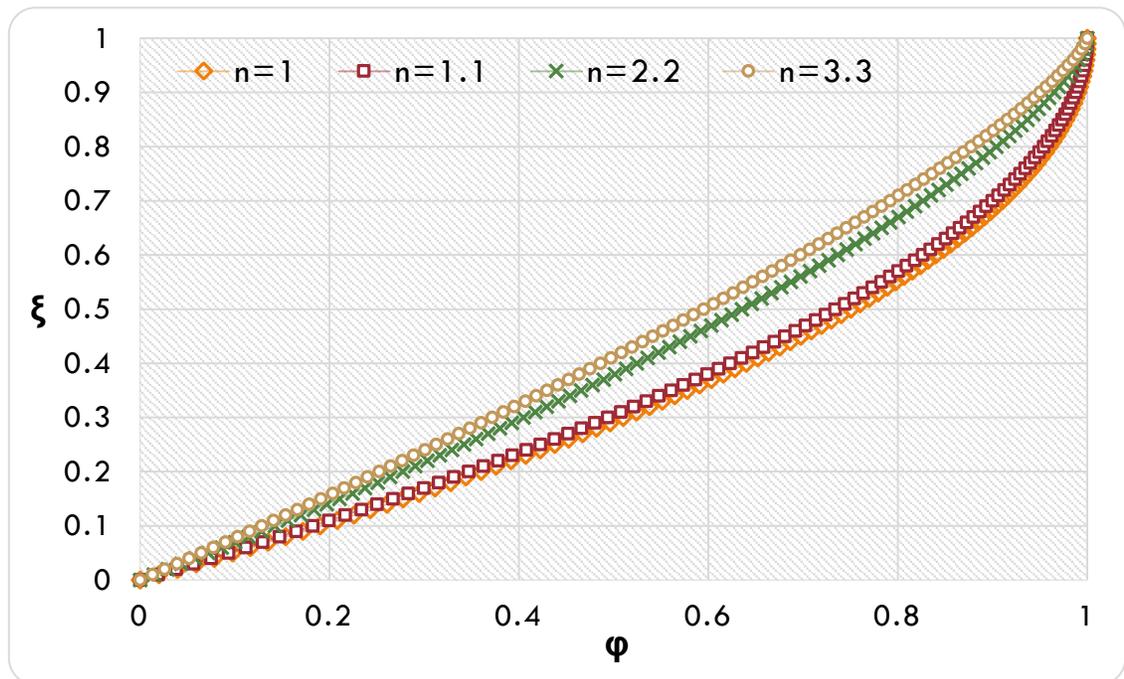


Figura 4.7: Posición adimensional vs. Velocidad adimensional (dilatantes).

Por su parte, la Figura 4.8 muestra la relación que guardan, para diferentes valores del índice, la velocidad y el esfuerzo cortante. Se aprecia que para el mismo esfuerzo cortante, la velocidad que se logra es menor, lo cual concuerda con lo que establece el modelo; dado que la función viscosidad se incrementa, la resistencia al flujo es mayor, y para un mismo esfuerzo, se alcanzan velocidades menores al crecer el valor del índice.

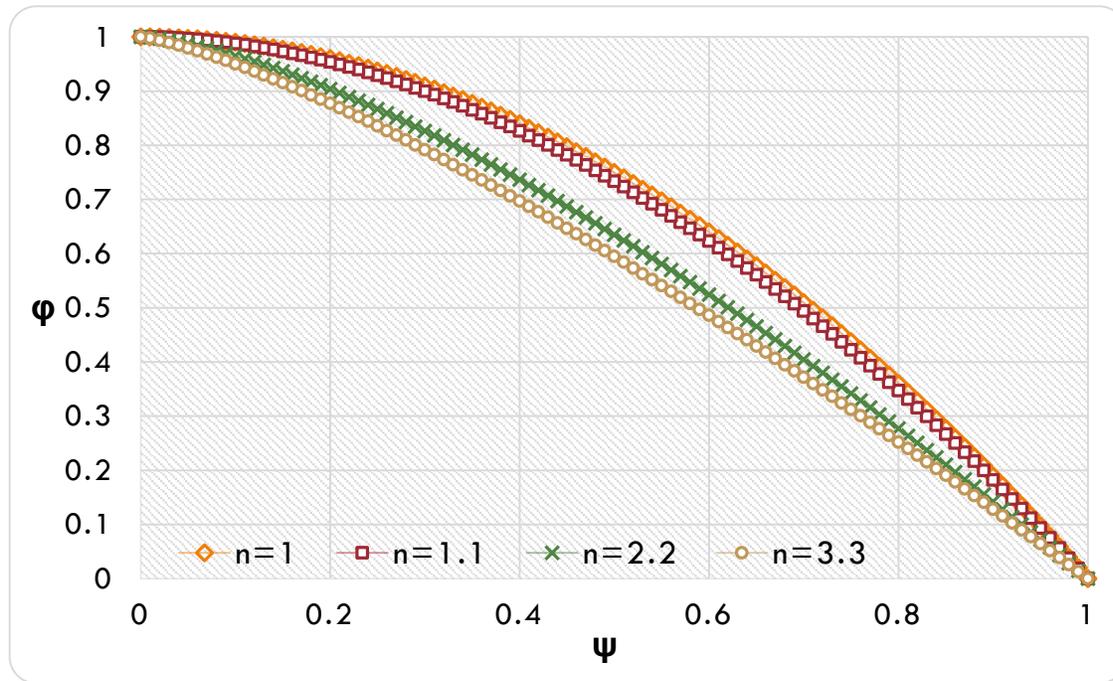


Figura 4.8: Vel. adimensional vs. Esfuerzo cortante adimensional (dilatantes).

Una cuestión que es importante analizar, es la factibilidad de comparar el perfil de velocidades para los fluidos ley de potencia con el fluido newtoniano (tal como se hace en las Figuras 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8), esto porque, si bien es cierto que en su forma adimensional ambos perfiles están acotados en valores de entre cero y uno, la forma en que se definieron las adimensionalizaciones no es la misma, para notarlo sólo hay que mirar las ecuaciones 4.21 y 4.33, por lo que las preguntas obligadas son, ¿cómo se justifica la comparación de los perfiles?, y ¿cómo se asegura que las conclusiones ya discutidas son acertadas?

La respuesta está en el análisis físico. La diferencia entre las ecuaciones 4.21 y 4.33 es simplemente la forma en que se define la velocidad máxima, que depende de las propiedades físicas del material y, para el caso de la ecuación 4.33, del valor del índice. Es claro que dichas velocidades máximas no son las mismas (excepto cuando el valor del índice es uno), pero la variables adimensionales de velocidad sí

representan lo mismo; al estar acotadas entre cero y uno es fácil comprender que un valor determinado para las variables indica qué proporción de la velocidad máxima se alcanza, por ejemplo, si en una posición fija el valor de la velocidad adimensional fuese de 0.5, se infiere que la velocidad del fluido en ese punto equivale al 50% de su velocidad máxima; por otro lado, y de acuerdo con el análisis del efecto de los valores del índice en la función viscosidad, se puede inferir que cuando el valor es menor a la unidad, la velocidad máxima que alcanza el fluido es mayor a la velocidad máxima newtoniana; lo contrario ocurre para el caso en que el índice toma valores mayores a uno. A pesar de lo anterior, el análisis previo de las Figuras 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 no cambia en lo absoluto; si se toma la primera de ellas se puede notar que para una posición fija, la velocidad adimensional aumenta al disminuir el valor del índice, lo que implica que la velocidad de los fluidos se aproxima más a la velocidad máxima propia para cada valor del índice, pero como la primera aumenta al disminuir el segundo, se sigue conservando la idea de que la movilidad mejora. Por lo anterior, las conclusiones importantes respecto a esta discusión están contenidas en las siguientes ecuaciones:

$$\left(\frac{\rho g \sin \theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) > \frac{\rho g \sin \theta h^2}{2\eta_0} \quad (4.37)$$

Si y sólo si el valor del índice es menor que uno; y:

$$\frac{\rho g \sin \theta h^2}{2\eta_0} > \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) \quad (4.38)$$

Si y sólo si el valor del índice es mayor que uno.

El fluido dilatante presenta una disminución de la movilidad del material descendente; una disminución necesaria en tanto que, como mezclas heterogéneas, los flujos de derrubios no pueden asemejarse al movimiento de un fluido newtoniano. Este modelo, sigue dejando de lado características importantes que se aprecian en los deslaves, no sólo por las aproximaciones establecidas, también porque no es capaz de explicar el ciclo que siguen estos procesos, como su inicio como material casi rígido y sus consecuentes flujo y deposición.

4.2.3 FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS

La ecuación constitutiva de Bingham plantea un fluido que presenta un esfuerzo de cedencia:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \infty & \text{si el esfuerzo} \leq \tau_y \\ \eta + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} & \text{si el esfuerzo} > \tau_y \end{cases} \quad (4.39)$$

En donde τ_y es el esfuerzo de cedencia.

La ecuación constitutiva queda entonces expresa, para el sistema de estudio, únicamente para el esfuerzo cortante:

$$\tau_{xy} = \tau_y + \eta\dot{\gamma} = \tau_y + \eta \frac{dV_x}{dy} \quad (4.40)$$

La ecuación diferencial que se debió resolver, resultó de la combinación de las ecuaciones 4.10 y 4.40:

$$\tau_y + \eta \frac{dV_x}{dy} = \rho g \text{sen}\theta (h - y) \quad (4.41)$$

$$\frac{dV_x}{dy} = \frac{\rho g \text{sen}\theta}{\eta} (h - y) - \frac{\tau_y}{\eta}$$

$$\int dV_x = \frac{\rho g \text{sen}\theta}{\eta} \int (h - y) dy - \frac{\tau_y}{\eta} \int dy$$

$$V_x = \frac{\rho g \text{sen}\theta h^2}{2\eta} \left[2 \frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] - \frac{\tau_y}{\eta} y + C_3 \quad (4.42)$$

Se evaluó la constante de integración con la condición establecida en 4.19:

$$y = 0 \quad V_x = 0$$

$$\therefore C_3 = 0$$

$$\boxed{V_x = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta h^2}{2\eta} \left[2 \left(1 - \frac{\tau_y}{\rho g \operatorname{sen} \theta h} \right) \left(\frac{y}{h} \right) - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]} \quad (4.43)$$

Del análisis dimensional:

$$\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta h^2}{2\eta} [=] \frac{\text{masa}}{(\text{longitud})^3} * \frac{\text{longitud}}{(\text{tiempo})^2} * (\text{longitud})^2 * \frac{\text{tiempo} * \text{longitud}}{\text{masa}} = \frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}}$$

Lo que permitió definir una velocidad adimensional:

$$\varphi = \frac{2\eta V_x}{\rho g \operatorname{sen} \theta h^2} \quad (4.44)$$

Con el mismo esfuerzo que se empleó para adimensionalizar la ecuación 4.11, se definió el siguiente parámetro adimensional:

$$\chi = \frac{\tau_y}{\rho g \operatorname{sen} \theta h} \quad (4.45)$$

Con las ecuaciones 4.12, 4.44 y 4.45 se reescribió la ecuación 4.43:

$$\boxed{\varphi = 2(1 - \chi)\xi - \xi^2} \quad (4.46)$$

La ecuación 4.45 define un nuevo esfuerzo adimensional; sin embargo, a diferencia del esfuerzo descrito por la ecuación 4.11, el primero no

es variable, es decir, dependiendo del fluido, el esfuerzo de cedencia tendrá un valor y χ quedará determinada. El parámetro χ cuantifica qué proporción representa el esfuerzo de cedencia del esfuerzo cortante máximo, por lo que, a primera vista, no está acotado, pues puede darse el caso en que el esfuerzo de cedencia sea mayor al esfuerzo máximo, que sea menor o igual incluso. Para dar otra interpretación física al parámetro, se emplea la ecuación 4.11, 4.13 y 4.45:

$$\Psi = 1 - \xi$$

$$\frac{\rho g \text{sen} \theta h}{\tau_y} \frac{\tau_{xy}}{\rho g \text{sen} \theta h} = (1 - \xi) \frac{\rho g \text{sen} \theta h}{\tau_y}$$

$$\Psi' = \frac{\tau_{xy}}{\tau_y} = \frac{1}{\chi} (1 - \xi) \quad (4.47)$$

En la ecuación 4.47 se establece una nueva forma de adimensionalizar el esfuerzo cortante; con el esfuerzo de cedencia. Si $\Psi' = 1$, el esfuerzo cortante es igual al esfuerzo de cedencia, y se puede conocer la posición a la que esto ocurre:

$$\xi_{\tau_{xy}=\tau_y} = \zeta = 1 - \chi \quad (4.48)$$

Dado lo anterior, la ecuación 4.41 se puede reescribir como:

$$\boxed{\varphi = 2\zeta\xi - \xi^2} \quad (4.49)$$

Se aprecia así que, al ser una posición adimensional, el término ζ debe tomar valores entre cero y uno, lo cual implica que χ debe tomar también valores de entre cero y uno.

En la Figura 4.9 se muestran diferentes perfiles para fluidos viscoplásticos, es decir, para diferentes valores de ζ ; para todos los

perfiles se observa que a partir de esa posición la velocidad del fluido se mantiene constante, lo cual se explica porque para posiciones mayores a ζ , el esfuerzo cortante es menor al esfuerzo de cedencia, por lo que material se mantiene rígido y adopta la velocidad máxima que se alcanza a partir de que el esfuerzo cortante supera el valor del esfuerzo de cedencia. Para el caso en que $\zeta = 1$, el perfil que se obtiene es el perfil newtoniano, es decir que $\chi = 0$, lo que ocurre únicamente si no existe esfuerzo de cedencia.

Como se discutió en el primer capítulo, cualquier flujo de derrubios comienza con el movimiento gradual o abrupto de un material estático y culmina cuando éste se deposita. Si se considera entonces que el material presenta un esfuerzo límite (un esfuerzo de cedencia), se puede explicar que el movimiento no inicia, o no continúa, si no se aplica sobre él un esfuerzo mayor al esfuerzo límite; se puede explicar también que el material se detenga si se considera el declive del esfuerzo cortante hasta un valor menor al esfuerzo de cedencia.

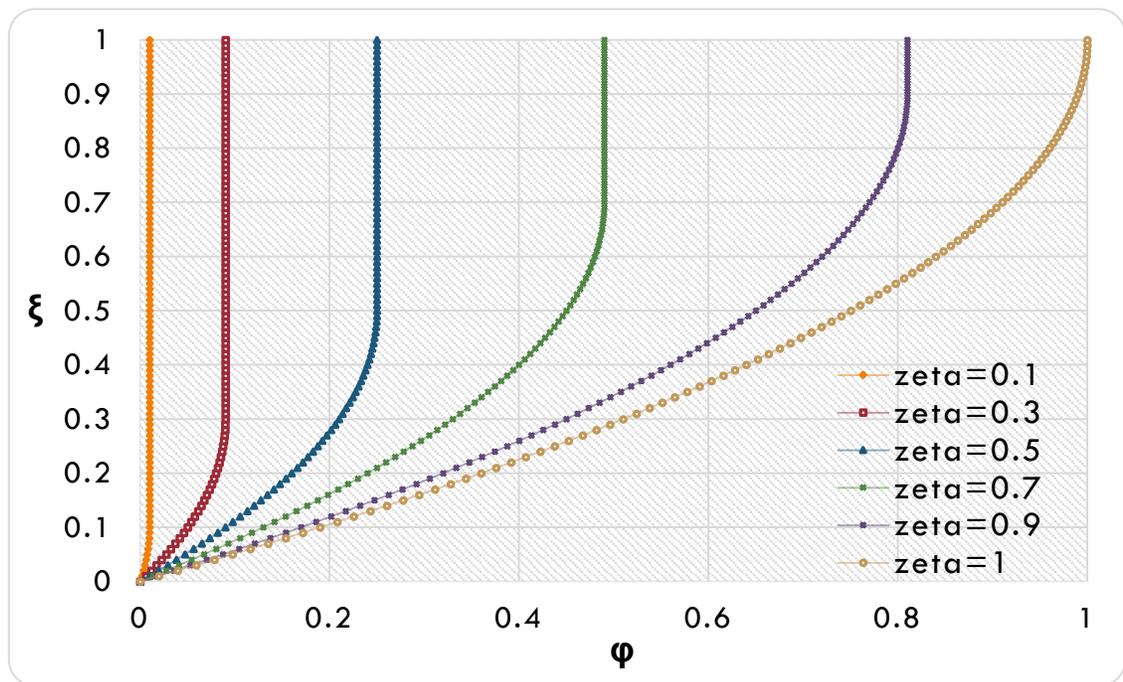


Figura 4.9: Posición adimensional vs. Velocidad adimensional (viscoplásticos).

En las aproximaciones al inicio de este capítulo, se estableció un proceso estacionario, sin embargo se podría incluir un término transitorio que permitiera cambiar el valor de ζ en el tiempo con el fin de obtener un modelo que explicara efectivamente el ciclo que atraviesan los flujos de derrubios, y de esa forma, las gráficas de la Figura 4.9 no representarían más los perfiles de diferentes fluidos viscoplásticos, sino

el perfil en desarrollo de un mismo fluido. Lo anterior implicaría que el esfuerzo cortante no fuera más constante para una posición fija, sino que variaría también en el tiempo, tal y como se puede deducir de la ecuación 4.47.

El parámetro ζ debería partir de un valor de cero durante el inicio del movimiento, alcanzar un valor máximo de uno y decrecer nuevamente hasta cero durante la deposición del material, todo esto a lo largo de la distancia de recorrido. La ecuación 4.50 es una propuesta de la forma en que puede establecerse la variación de la posición ζ con un tiempo adimensional Υ :

$$\zeta(\Upsilon) = 1 - (\Upsilon - 1)^2 \quad (4.50)$$

Del análisis geométrico de la ecuación 4.50 se sabe que:

$$0 \leq \Upsilon \leq 2 \quad (4.51)$$

La cuestión era cómo definir Υ para que quedara acotada de la forma que establece 4.51. Se propuso entonces lo siguiente:

$$\Upsilon = \frac{V_{m\acute{a}x\ newtoniana}}{L} t \quad (4.52)$$

En donde $\frac{L}{V_{m\acute{a}x}}$ representa el tiempo en que un material newtoniano culmina su recorrido por la pendiente hasta depositarse. Es claro que la variable toma el cero como valor inicial, y podría ser dos en el momento en que el tiempo sea el doble del tiempo característico, y entonces $\zeta = 0$ y el movimiento cesa. Con las consideraciones anteriores, la ecuación 4.49 pudo reescribirse como:

$$\varphi = 2[1 - (\Upsilon - 1)^2]\xi - \xi^2 \quad (4.53)$$

Todas las anteriores son consideraciones importantes que deben de tratarse con precaución; sin embargo constituyen un primer acercamiento a un modelo transitorio. Un modelo transitorio riguroso debe de obtenerse de la solución de la ecuación de movimiento y la constitutiva para el esfuerzo; para poder así, tras compararlo con el modelo descrito por la ecuación 4.53, definir la validez de las consideraciones.

Es importante puntualizar también que, por lo establecido en la ecuación 4.47, el esfuerzo cortante varía, además de con la posición, también en el tiempo:

$$\Psi' = \frac{\tau_{xy}}{\tau_y} = \frac{1}{\chi}(1 - \xi) = \frac{1}{1 - \zeta(Y)}(1 - \xi) = \frac{1}{(Y - 1)^2}(1 - \xi) \quad (4.54)$$

Lo anterior debe considerarse, en un análisis riguroso, en la ecuación constitutiva. En la ecuación 4.54 se observa que para una posición fija, el esfuerzo adimensional es inversamente proporcional a $(Y - 1)^2$, que es un término que inicia en uno, disminuye y crece nuevamente. Cuando el término disminuye el esfuerzo aumenta, por lo que la velocidad debe aumentar, al crecer el término, el esfuerzo disminuye y la velocidad deberá reducirse.

En la Figura 4.10 se muestra la relación entre el esfuerzo cortante y la velocidad para diferentes fluidos viscoplásticos.

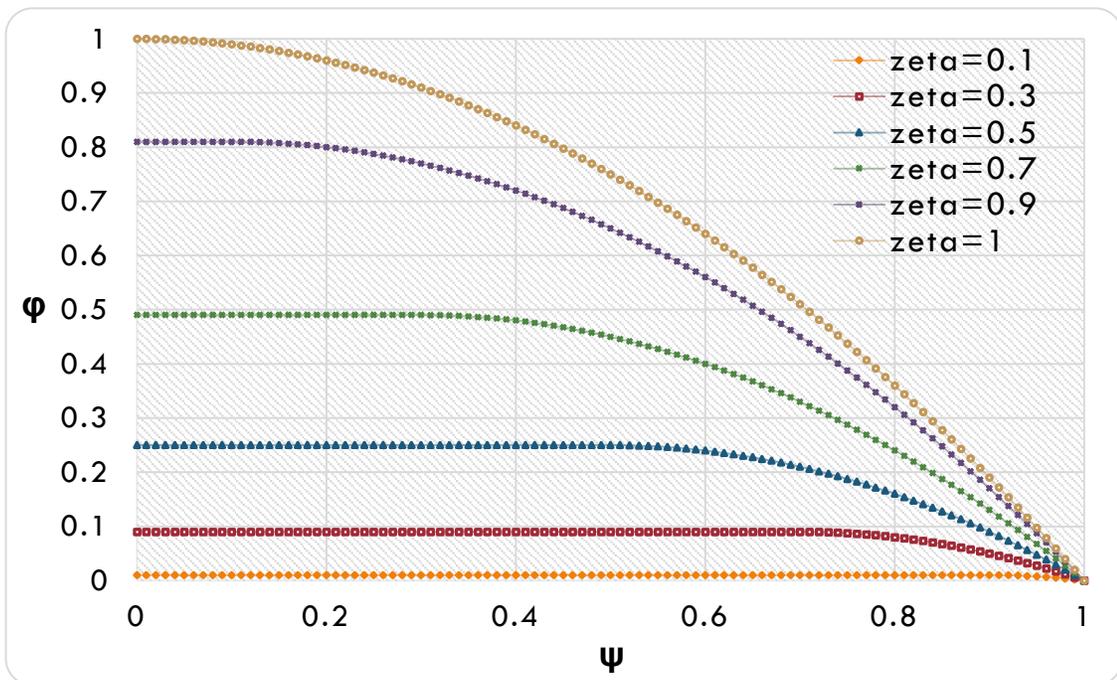


Figura 4.10: Vel. adimensional vs. Esfuerzo cortante adimensional (viscoplásticos).

Otros parámetros del flujo:

$$Q = \left(\frac{\rho g \text{sen} \theta h^2}{2\eta} \right) wh \left(\frac{2}{3} - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right) wh V_{m\acute{a}x} \quad (4.55)$$

$$\langle V_x \rangle = \left(\frac{\rho g \text{sen} \theta h^2}{2\eta} \right) \left(\frac{2}{3} - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right) V_{m\acute{a}x} \quad (4.56)$$

El modelo viscoplástico logra mejoras significativas en la descripción de las características de los flujos de derrubios; en el caso transitorio logra explicar el ciclo desde el inicio del movimiento hasta la deposición mediante la variación del esfuerzo cortante en el tiempo.

Finalmente, una modificación a la ecuación constitutiva de Bingham resulta en un modelo que describe fluidos de Herschel-Bulkley.

4.2.4 FLUIDOS DE HERSCHEL-BULKLEY

La ecuación constitutiva de Herschel-Bulkley plantea un fluido modificado de Bingham:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \infty & \text{si el esfuerzo} \leq \tau_y \\ K_2(\dot{\gamma})^{n-1} + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} & \text{si el esfuerzo} > \tau_y \end{cases} \quad (4.57)$$

En donde τ_y es el esfuerzo de cedencia, K_2 el índice de consistencia y n el índice de flujo (adimensional). La ecuación constitutiva queda entonces expresa únicamente para el esfuerzo cortante:

$$\tau_{xy} = \tau_y + K_2(\dot{\gamma})^n = \tau_y + K_2 \left(\frac{dV_x}{dy} \right)^n \quad (4.58)$$

Por lo que la ecuación diferencial que se debió resolver fue:

$$\tau_y + K_2 \left(\frac{dV_x}{dy} \right)^n = \rho g \operatorname{sen} \theta (h - y) \quad (4.59)$$

$$\frac{dV_x}{dy} = \left(\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_2} (h - y) - \frac{\tau_y}{K_2} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\int dV_x = \int \left(\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{K_2} (h - y) - \frac{\tau_y}{K_2} \right)^{\frac{1}{n}} dy$$

$$V_x = -\left(\frac{n}{n+1}\right) [\rho g \text{sen}\theta (h-y) - \tau_y]^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{(K_2)^{-\frac{1}{n}}}{\rho g \text{sen}\theta} \right] + C_4 \quad (4.60)$$

$$y = 0 \quad V_x = 0$$

$$\therefore C_4 = \left(\frac{n}{n+1}\right) [\rho g \text{sen}\theta h - \tau_y]^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{(K_2)^{-\frac{1}{n}}}{\rho g \text{sen}\theta} \right]$$

$$\boxed{V_x = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{\rho g \text{sen}\theta}{K_2}\right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{n+1}{n}} \left[\left(1 - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen}\theta h}\right)^{\frac{n+1}{n}} - \left(1 - \frac{y}{h} - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen}\theta h}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]} \quad (4.61)$$

Del análisis dimensional:

$$\left(\frac{\rho g \text{sen}\theta}{K_2}\right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{n+1}{n}} [=] \frac{\text{masa}^{\frac{1}{n}}}{\text{longitud}^{\frac{3}{n}}} * \frac{\text{longitud}^{\frac{1}{n}}}{\text{tiempo}^{\frac{2}{n}}} * \text{longitud}^{1+\frac{1}{n}} * \frac{\text{tiempo}^{\frac{2}{n}} * \text{longitud}^{\frac{1}{n}}}{\text{masa}^{\frac{1}{n}} * \text{tiempo}}$$

$$\left(\frac{\rho g \text{sen}\theta}{K_2}\right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{n+1}{n}} [=] \frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}}$$

Lo que permitió definir una velocidad adimensional:

$$\varphi = \frac{V_x}{\left(\frac{\rho g \text{sen}\theta}{K_2}\right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right)} \quad (4.62)$$

Por lo que la ecuación 4.61 se reescribió:

$$\varphi = (1 - \chi)^{\frac{n+1}{n}} - (1 - \xi - \chi)^{\frac{n+1}{n}} \quad (4.63)$$

Las ecuaciones 4.59 y 4.61, cuando $n = 1$, se reducen al caso de Bingham; y $K_2 = \eta$.

Con la ecuación 4.48, la ecuación 4.63 se pudo reescribir:

$$\varphi = \zeta^{\frac{n+1}{n}} - (\zeta - \xi)^{\frac{n+1}{n}} \quad (4.64)$$

El comportamiento para este fluido depende entonces de los valores que toma n , por lo que se derivaron dos modelos.

4.2.4.1 ÍNDICES MENORES A UNO

En la Figura 4.11 se muestran los perfiles de velocidad adimensional para diferentes valores de ζ y de n (cuando éste es menor que uno); mientras que la Figura 4.12 muestra cómo varía la velocidad con el esfuerzo para diferentes índices y valores de ζ .

Se puede apreciar que la movilidad disminuye, para un mismo valor de ζ , al disminuir el valor del índice. El decremento de la movilidad puede describir un fluido con sedimento *poorly sorted*, y de ser así, para explicar un nuevo decremento en la movilidad, sería un material con una menor cantidad de agua.

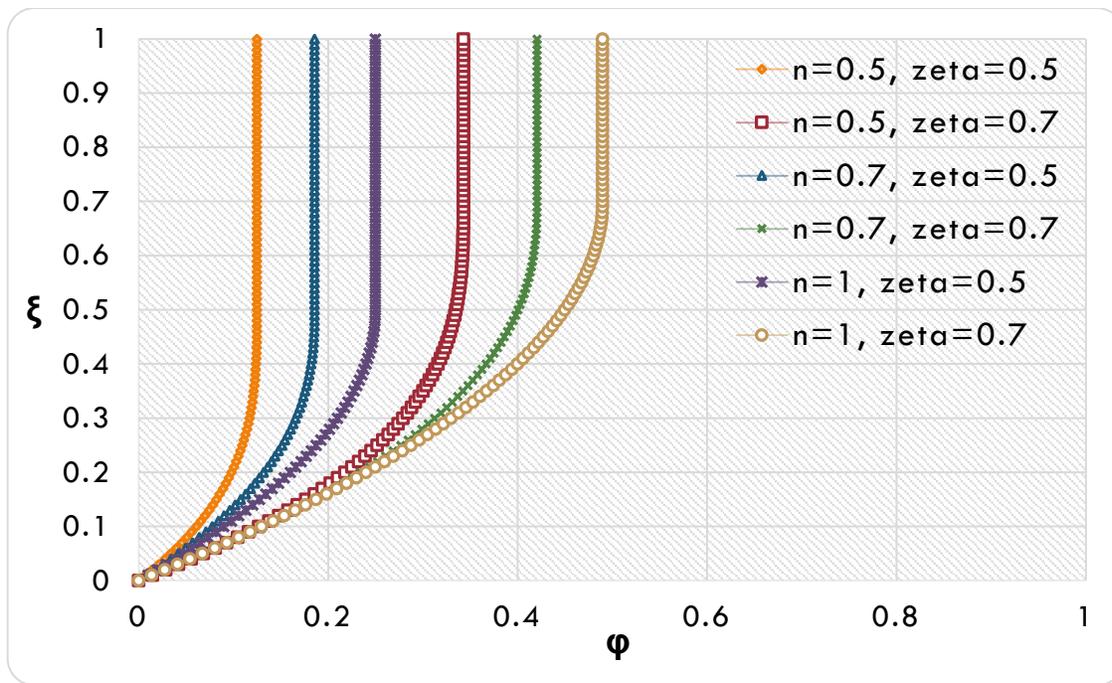


Figura 4.11: Posición adimensional vs. Velocidad adimensional (H-B, $n < 1$).

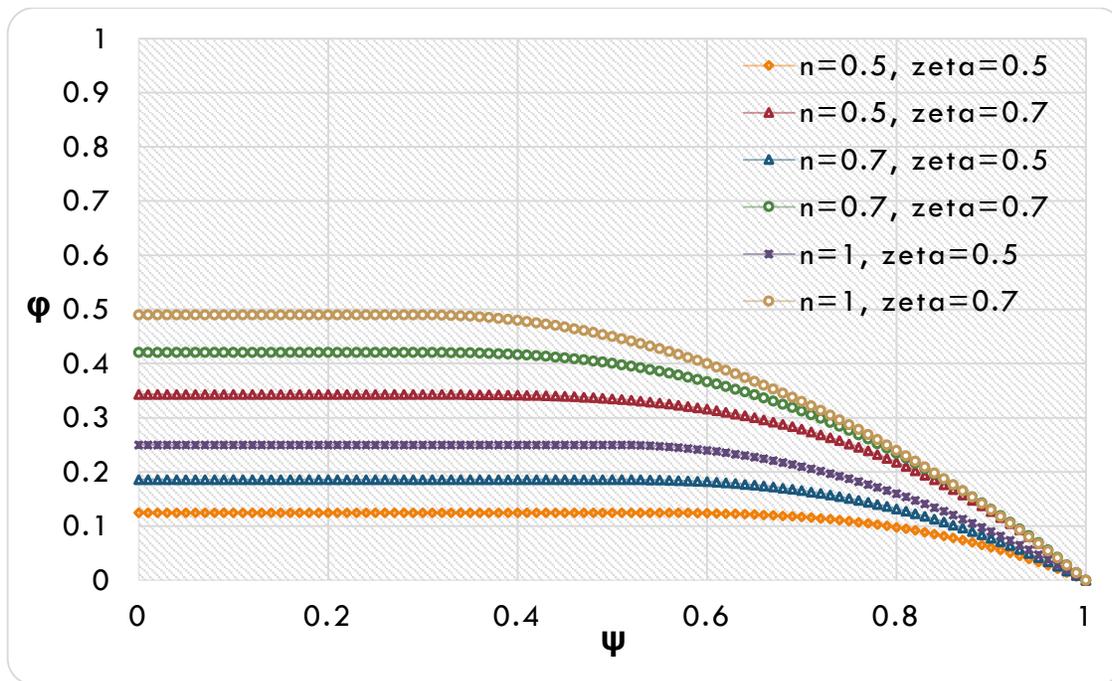


Figura 4.12: Vel. adimensional vs. Esfuerzo cortante adimensional (H-B, $n < 1$).

4.2.4.2 ÍNDICES MAYORES A UNO

En las Figuras 4.13 y 4.14 muestran que para valores del índice mayores que la unidad, el comportamiento es opuesto a aquel para índices menores que uno; la movilidad mejora.

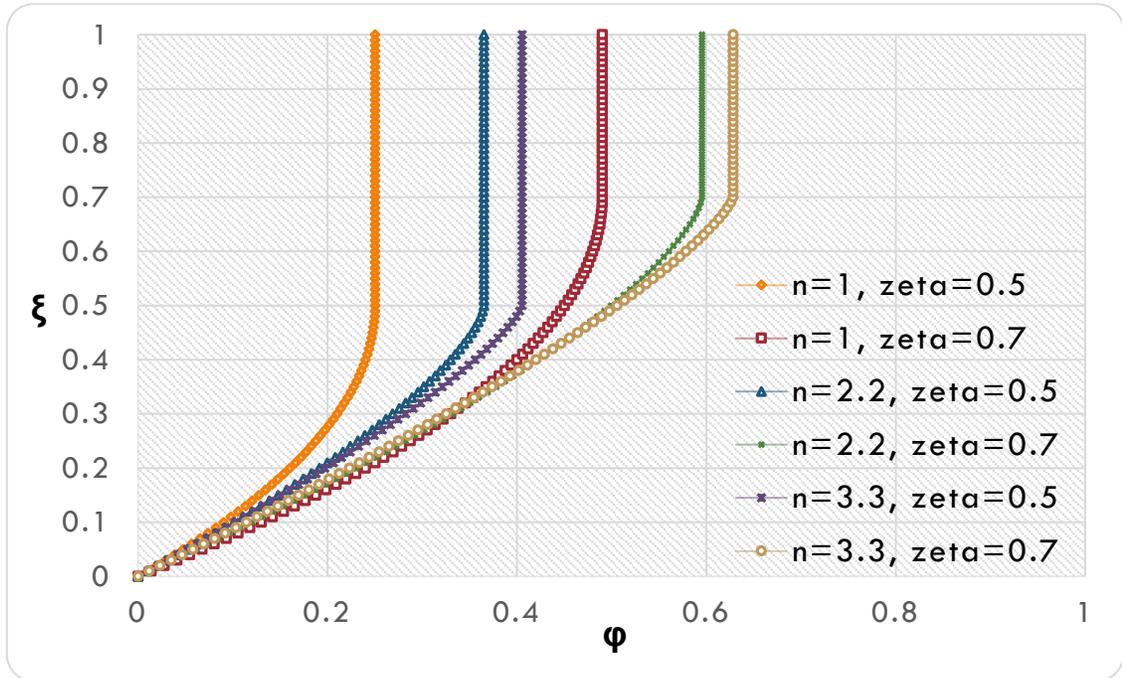


Figura 4.13: Posición adimensional vs. Velocidad adimensional (H-B, $n > 1$).

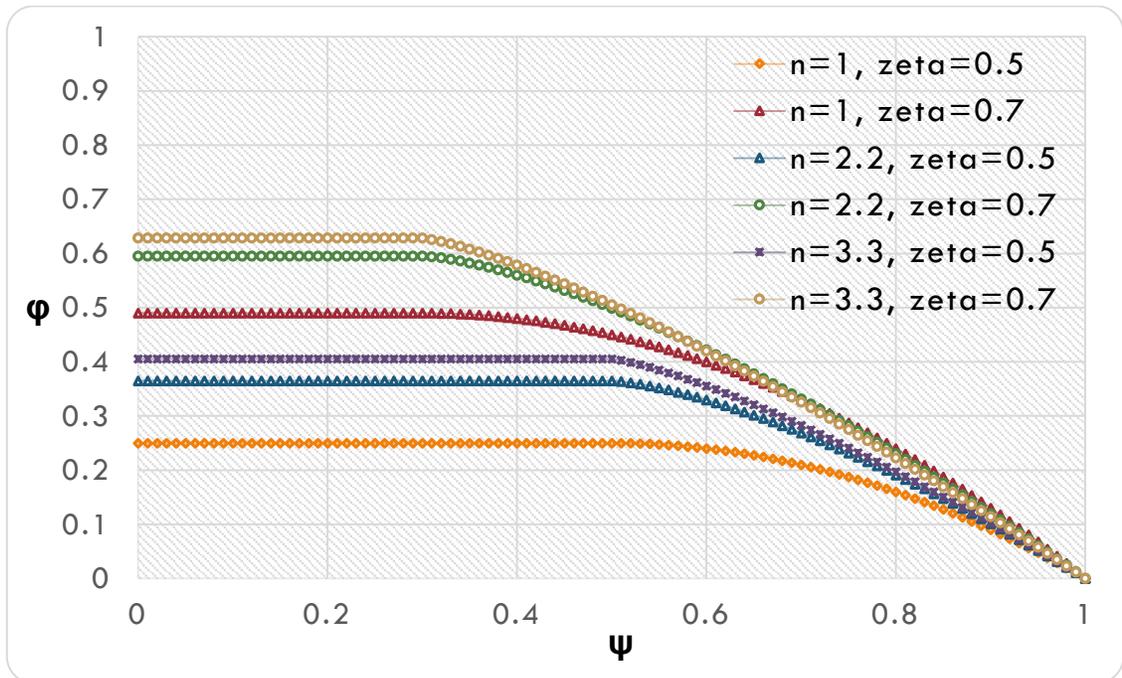


Figura 4.14: Vel. adimensional vs. Esfuerzo cortante adimensional (H-B, $n > 1$).

La mejora se puede explicar porque las mezclas de sólidos saturados con agua forman estructuras con muchos vacíos; cuando esas estructuras se rompen, al aplicar un esfuerzo mayor al esfuerzo de cedencia, las partículas se dispersan disminuyendo la resistencia al flujo.

Otros parámetros del flujo:

$$Q = wh \left(\frac{n}{2n+1} \right) V_{m\acute{a}x} \left[\left(1 - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right)^{\frac{n+1}{n}} + \left(-\frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right)^{\frac{2n+1}{n}} - \left(1 - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right)^{\frac{2n+1}{n}} \right] \quad (4.65)$$

$$\langle V_x \rangle = \left(\frac{n}{2n+1} \right) V_{m\acute{a}x} \left[\left(1 - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right)^{\frac{n+1}{n}} + \left(-\frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right)^{\frac{2n+1}{n}} - \left(1 - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right)^{\frac{2n+1}{n}} \right] \quad (4.66)$$

Las ecuaciones 4.65 y 4.66 aplican para cualquier valor del índice.

5 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Como se estableció desde el primer capítulo, los flujos de derrubios son fenómenos complejos que cobran muchas vidas cada año, por lo que su entendimiento, descripción y predicción son de gran importancia; sin embargo, hasta ahora no ha sido posible obtener un modelo que logre lidiar de manera efectiva con todas las variables involucradas, que de acuerdo al análisis del capítulo dos son el flujo no estacionario, no homogéneo de un material sujeto a cambios de masa (independientes de cambios en la concentración de sólidos), a lo que se añade el *sorting* de estos últimos y la geometría y condiciones de frontera. Adicionalmente, el análisis de la mecánica del flujo requiere de la estimación de los esfuerzos que actúan en él; lo cual motivó este trabajo.

Conocer la forma en que varían los esfuerzos puede estudiarse sólo desde el punto de vista de la Reología, por lo que el objetivo consistió en determinar si podrían describirse las características macroscópicas que exhiben los deslaves al cambiar las ecuaciones constitutivas que definen el tipo de fluido. El discriminante fue el perfil de velocidades.

Tras el análisis que resaltó las variables involucradas y la forma en que repercuten el proceso, se establecieron aproximaciones que permitieron sortear algunas de las dificultades que, por su naturaleza, los fenómenos planteaban en las ecuaciones gobernantes.

En primer lugar es importante recalcar la importancia del análisis que se llevó a cabo, puesto que, previo a elegir un modelo adecuado para un determinado lugar en el mundo, se deben tener presentes las características geográficas y geológicas, como el promedio anual de

lluvias, el grado de erosión, el *sorting* de los sedimentos y la geometría del lugar, esto con el fin de hacerse de una idea sobre las propiedades que pudiese tener el material descendente; si las concentraciones de sólidos serían muy grandes o si hay manera de que el flujo se canalice por ejemplo; y así tener una idea de qué modelo sería más adecuado para su descripción, aunque es claro que lo mejor sería que, al ocurrir un deslave, se hicieran mediciones que permitan ajustar los parámetros de los modelos que aquí se presentan; mediciones que representan una gran dificultad.

Volviendo a las aproximaciones establecidas, se debe admitir que resulta ideal pensar que un sistema incompresible de fase única y propiedades constantes aproxima sin errores el comportamiento real de los deslaves, sin embargo permitieron el arribo a soluciones analíticas.

Las ecuaciones constitutivas que describen la variación del esfuerzo cortante con la rapidez de deformación se enlistan en la Tabla 5.1.

1	Fluido newtoniano	$\tau_{xy} = \eta_0 \frac{dV_x}{dy}$
2	Ley de la Potencia	$\tau_{xy} = K_1 \left(\frac{dV_x}{dy}\right)^n$
3	Bingham	$\tau_{xy} = \tau_y + \eta \frac{dV_x}{dy}$
4	Herschel-Bulkley	$\tau_{xy} = \tau_y + K_2 \left(\frac{dV_x}{dy}\right)^n$

Tabla 5.1 Ecuaciones constitutivas empleadas.

En la Tabla 5.2 se enlistan los perfiles de velocidad.

1	$V_x = \frac{\rho g \text{sen} \theta h^2}{\eta_0} \left[\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$	(4.20)
2	$V_x = \left(\frac{\rho g \text{sen} \theta}{K_1} \right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]$	(4.32)
3	$V_x = \frac{\rho g \text{sen} \theta h^2}{2\eta} \left[2 \left(1 - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right) \left(\frac{y}{h} \right) - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$	(4.43)
4	$V_x = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\rho g \text{sen} \theta}{K_2} \right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{n+1}{n}} \left[\left(1 - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right)^{\frac{n+1}{n}} - \left(1 - \frac{y}{h} - \frac{\tau_y}{\rho g \text{sen} \theta h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]$	(4.61)

Tabla 5.2 Perfiles de velocidad obtenidos.

Entre otras razones, los perfiles de la Tabla 5.2 se adimensionalizaron de tal forma que las variables quedasen acotadas y fuera fácil graficarlas. En la Tabla 5.3 se muestran los perfiles en forma adimensional.

1	$\varphi = 2\xi - \xi^2$	(4.22)
2	$\varphi = 1 - (1 - \xi)^{\frac{n+1}{n}}$	(4.34)
3	$\varphi = 2(1 - \chi)\xi - \xi^2$	(4.46)
4	$\varphi = (1 - \chi)^{\frac{n+1}{n}} - (1 - \xi - \chi)^{\frac{n+1}{n}}$	(4.63)

Tabla 5.3 Perfiles adimensionales de velocidad obtenidos.

Dado que el comportamiento para los fluidos ley de la potencia y de Herschel-Bulkley depende de los valores del índice, las ecuaciones de las Tablas 5.2 y 5.3 denotan seis fluidos, el newtoniano, adelgazante

($n < 1$), dilatante ($n > 1$), viscoplástico, Herschel-Bulkley ($n < 1$) y Herschel-Bulkley ($n > 1$).

En la Figura 5.1 se muestran en conjunto los diferentes perfiles adimensionales.

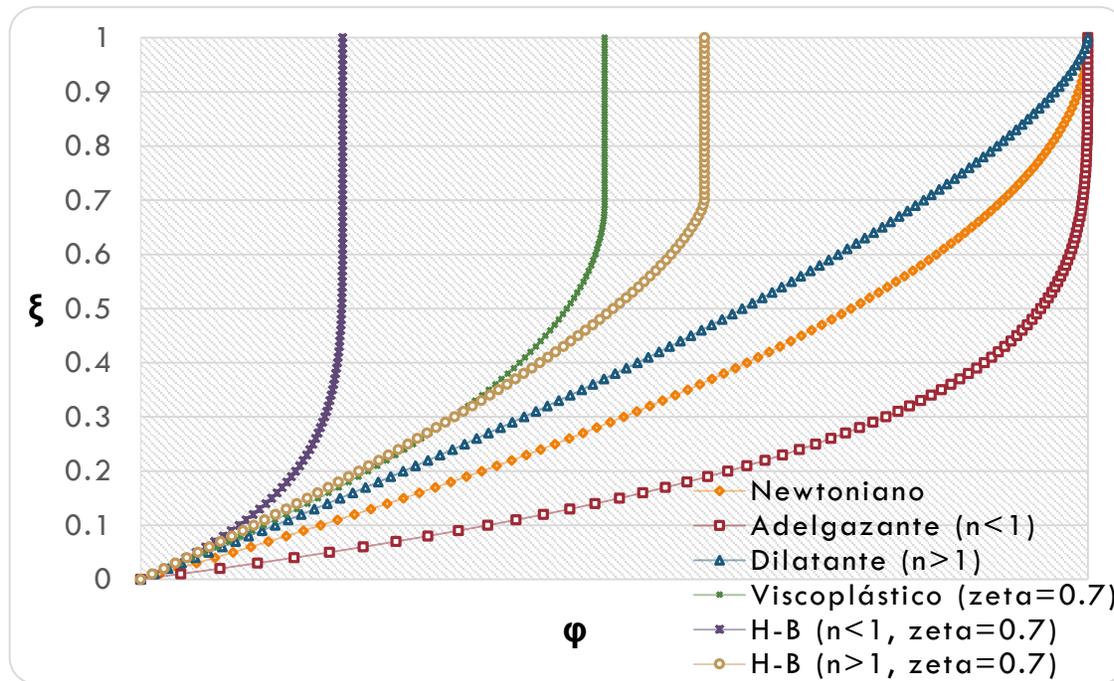


Figura 5.1: Perfiles de velocidad adimensional para todos los fluidos.

6 CONCLUSIONES

De acuerdo con las características exhibidas por los diferentes fluidos, se establecen los siguientes puntos:

- Es claro que el comportamiento de los flujos de derrubios se desvía del comportamiento newtoniano, sin embargo, como caso límite, el fluido newtoniano podría describir el movimiento de un material con una muy baja concentración de sólidos.
- Los fluidos adelgazantes deben descartarse puesto que presentan una movilidad mayor que el fluido newtoniano. Aun si la concentración de sólidos fuera muy baja, el flujo de derrubios no presentaría la movilidad de un fluido newtoniano, mucho menos superarla.
- El modelo viscoplástico, dado que presenta un esfuerzo de cedencia, acierta al explicar el inicio del movimiento debido a la aplicación de un esfuerzo cortante mayor, asimismo logra explicar la deposición por el declive del esfuerzo cortante hasta un valor menor al esfuerzo de cedencia.
- Para el modelo viscoplástico se encontró un parámetro adimensional que representa la posición a la cual el esfuerzo cortante es igual al esfuerzo de cedencia, por encima de esa posición, en donde el esfuerzo es menor, el fluido se mantiene rígido, mientras que por debajo, en donde el esfuerzo es mayor, sigue un comportamiento puramente viscoso.

- Con el parámetro antes mencionado se modificó el modelo viscoplástico para lograr el desarrollo en el tiempo del perfil de velocidades desde un material estático, pasando por el flujo, y hasta llegar la deposición del fluido. Esta modificación transitoria debe manejarse con precaución; al considerar el tiempo como variable, debe tomarse en cuenta su participación en las ecuaciones gobernantes. No obstante, el modelo viscoplástico transitorio acierta al describir el ciclo completo del flujo de derrubios. Las modificaciones transitorias se resumen en la Tabla 6.1, mientras que la Figura 4.9 representa el perfil transitorio en desarrollo.
- Los fluidos de Herschel-Bulkley plantean una mejora al modelo viscoplástico al aumentar o disminuir la movilidad según el valor del índice; elegir un índice adecuado dependerá de las características del fluido y de las condiciones a las que se lleve a cabo el proceso, por ejemplo, el decremento de la movilidad respecto al modelo viscoplástico podría describir un fluido con sedimento *poorly sorted*, el cual, de acuerdo al análisis del capítulo dos, disminuye su eficiencia si la cantidad de agua no es suficiente. Por otro lado, la mejora en la movilidad del fluido puede justificarse porque las mezclas de sólidos saturados con agua forman estructuras con muchos vacíos; cuando esas estructuras se rompen, al aplicar un esfuerzo mayor al esfuerzo de cedencia, las partículas se dispersan disminuyendo la resistencia al flujo.

$\zeta(Y) = 1 - (Y - 1)^2$	(4.50)
$\varphi = 2[1 - (Y - 1)^2]\xi - \xi^2$	(4.53)

Tabla 6.1 Modificaciones transitorias al modelo viscoplástico.

Finalmente, se comprobó la hipótesis; con ciertas limitaciones, los flujos de derrubios pueden ser caracterizados empleando ecuaciones constitutivas de interés reológico; los modelos pueden, y deben, mejorarse tomando en cuenta algunas de las aproximaciones que hicieron que se pasara por alto variables importantes; todo esto se plantea como trabajo futuro.

6.1 TRABAJO FUTURO

Los flujos de derrubios plantean grandes retos para modelar su comportamiento, por lo que, en este campo, queda mucho por hacer. Se sugieren entonces algunos puntos para su desarrollo futuro:

- Se deben desarrollar modelos que tomen en cuenta la variable temporal.
- Se deben considerar otros tipos de pendientes, pues en realidad, éstas presentan curvaturas y fallas que influyen en el flujo, como en la canalización por ejemplo.
- La profundidad del material no es constante, se podría evaluar la forma de lóbulo que se aprecia en los flujos reales.
- Lo heterogéneo de las pendientes puede considerarse en primera instancia como condiciones de frontera.
- Al ser una mezcla de sólidos y fluido que cambia su masa y composición durante su descenso, se debe considerar la compresibilidad del material, la distribución del tamaño de granos y las interacciones entre estos y el fluido.

7 REFERENCIAS

- Alcántara Ayala, I. (2006). Recuperado el Septiembre de 2014, de [https://www.ipgh.org/Reuniones-Tecnicas-Conjuntas/Segunda-Reunion/Files/ALCANTARA-Irasema_\(Plenaria\)_\(Web\).pdf](https://www.ipgh.org/Reuniones-Tecnicas-Conjuntas/Segunda-Reunion/Files/ALCANTARA-Irasema_(Plenaria)_(Web).pdf)
- Barnes, H. A. (2000). *A Handbook of Elementary Rheology*. Cambrian Printers.
- Bateman, A., Medina, M., Steiner, F., & Velasco, D. (2006). *Estudio Experimental Sobre Flujos Granulares Hiperconcentrados*. Ciudad Guayana, Venezuela.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. (2002). *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, Inc.
- CAPUFE. (Septiembre de 2013). *Caminos y Puentes Federales*. Obtenido de http://www.capufe.gob.mx/portal/wwwCapufe/multimedia/Fotos_insidencia_sep-2013/slides/DESLAVE%20AUTOPISTA-11.html
- CENAPRED. (2013). *CENAPRED México*. Obtenido de http://www.cenapred.unam.mx/es/Glosario/Glosario_M.php
- Currie, I. G. (1993). *Fundamental Mechanics of Fluids*. Ontario, Toronto: Marcel Dekker, Inc.
- Fairchild, L. H., & Wigmosta, M. (1983). Dynamic and volumetric characteristics of the 18 May 1980 lahars on the Toutle River. *Proceedings of the Symposium on Erosion Control in Volcanic Areas Tech. Mem. 1908*, 131-153.
- Heim, A. (1932). *Bergsturz und Menschenleben*. Zürich: Fretz und Wasmuth.
- Howard, T. R., Baldwin II, J. E., & Donley, H. F. (1988). Landslides in Pacifica, California, caused by the storm. *Landslides Floods and Marine Effects of the Storm of January 3–5, 1982, in the San Francisco Bay Region, California*, 163-184.
- Irgens, F. (2014). *Rheology and Non-Newtonian Fluids*. Trondheim: Springer.

Iverson, R. M. (03 de Agosto de 1997). The Physics of Debris Flows. *Reviews of Geophysics*, 245-296.

Iverson, R. M., & LaHusen, R. G. (1993). Friction in debris flows: Interferences from large-scale flume experiments. *Am. Soc. of Civ. Eng.*, 1604-1609.

Macosko, C. W. (1994). *Rheology: Principles, Measurements and Applications*. New York: Wiley-VCH.

Morrison, F. A. (2000). *Understanding Rheology*. New York: Oxford University Press.

Morton, D. M., & Campbell, R. H. (1974). Spring mudflows at Wrightwood, southern California. *Q. J. Eng. Geol.*, 7, 377-384.

O'Connor, J. E., Hardison, J. H., & Costa, J. E. (2001). Debris Flows from Failures of Neoglacial-Age Moraine Dams in the Three Sisters and Mount Jefferson Wilderness Areas. *US Geological Survey Paper*.

Pierson, T. C. (1980). Erosion and deposition by debris flows at Mt. Thomas, North Canterbury, New Zealand. *Earth Surf. Processes*, 5, 227-247.

Pierson, T. C. (1985). Initiation and flow behavior of the 1980 Pine Creek and Muddy river lahars. *Geol. Soc. Am. Bull.*, 96, 1056-1069.

Pierson, T. C., Janda, R. J., Thouret, J. C., & Borrero, C. A. (1990). Perturbation and melting of snow and ice by the 13 November 1985 eruption of Nevado del Ruiz, Colombia, and consequent mobilization, flow, and deposition of lahars. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 41, 17-66.

Plafker, G., & Ericksen, G. E. (1978). Nevado Huarascán avalanches, Peru. *Rockslides and Avalanches, vol. 1, Natural Phenomena*, 277-314.

Servicio Geológico Mexicano. (12 de 05 de 2013). Obtenido de <http://www.sgm.gob.mx/>

Sharp, R. P., & Nobles, L. H. (1953). Mudflow of 1941 at Wrightwood. *Geol. Soc. Am. Bull.*, 64, 547-560.

Suárez, J. (s.f.). *Deslizamientos: Análisis Geotécnico*. Recuperado el 11 de Octubre de 2014, de www.erosion.com.co

Usuarios Geofísica, UNAM. (01 de Octubre de 2014). Obtenido de http://usuarios.geofisica.unam.mx/cecilia/cursos/Ccias_tierra_tarbuck-Ch15-ProGrav.pdf

Vallance, J. W., & Scott, K. M. (1997). The Osceola mudflow from Mount Rainier: Sedimentology and hazard implications of a huge clay-rich debris flow. *Geological Society American Bulletin*, 143-163.

White, F. M. (1998). *Fluid Mechanics*. Kingston, Rhode Island: McGraw-Hill.

Wieczorek, G. F., Harp, E. L., Mark, R. K., & Bhattacharyya, A. K. (1988). Debris flows and other landslides in San Mateo, Santa Cruz, Contra Costa, Alameda, Napa, Solano, Sonoma, Lake, and Yolo counties, and factors influencing debris-flow distribution. *Landslides, Floods and Marine Effects of the Storm of January 3-5, 1982, in the San Francisco Bay Region, California*, 133-162.

8 APÉNDICES

Se incluyen en estos apéndices las tabulaciones que permitieron realizar los gráficos que se encuentran a lo largo del trabajo.

8.1 DATOS DE FIGURA 4.2

ξ	ψ
0	1
0.01	0.99
0.02	0.98
0.03	0.97
0.04	0.96
0.05	0.95
0.06	0.94
0.07	0.93
0.08	0.92
0.09	0.91
0.1	0.9
0.11	0.89
0.12	0.88
0.13	0.87
0.14	0.86
0.15	0.85

0.16	0.84
0.17	0.83
0.18	0.82
0.19	0.81
0.2	0.8
0.21	0.79
0.22	0.78
0.23	0.77
0.24	0.76
0.25	0.75
0.26	0.74
0.27	0.73
0.28	0.72
0.29	0.71
0.3	0.7
0.31	0.69
0.32	0.68

0.33	0.67
0.34	0.66
0.35	0.65
0.36	0.64
0.37	0.63
0.38	0.62
0.39	0.61
0.4	0.6
0.41	0.59
0.42	0.58
0.43	0.57
0.44	0.56
0.45	0.55
0.46	0.54
0.47	0.53
0.48	0.52
0.49	0.51

0.5	0.5
0.51	0.49
0.52	0.48
0.53	0.47
0.54	0.46
0.55	0.45
0.56	0.44
0.57	0.43
0.58	0.42
0.59	0.41
0.6	0.4
0.61	0.39
0.62	0.38
0.63	0.37
0.64	0.36
0.65	0.35
0.66	0.34

0.67	0.33
0.68	0.32
0.69	0.31
0.7	0.3
0.71	0.29
0.72	0.28
0.73	0.27
0.74	0.26
0.75	0.25
0.76	0.24
0.77	0.23
0.78	0.22
0.79	0.21
0.8	0.2
0.81	0.19
0.82	0.18
0.83	0.17

0.84	0.16
0.85	0.15
0.86	0.14
0.87	0.13
0.88	0.12
0.89	0.11
0.9	0.1
0.91	0.09
0.92	0.08
0.93	0.07
0.94	0.06
0.95	0.05
0.96	0.04
0.97	0.03
0.98	0.02
0.99	0.01
1	0

8.2 DATOS DE FIGURA 4.3

ξ	φ
0	0
0.01	0.0199
0.02	0.0396
0.03	0.0591
0.04	0.0784
0.05	0.0975
0.06	0.1164
0.07	0.1351
0.08	0.1536
0.09	0.1719
0.1	0.19
0.11	0.2079
0.12	0.2256
0.13	0.2431
0.14	0.2604
0.15	0.2775
0.16	0.2944
0.17	0.3111
0.18	0.3276
0.19	0.3439
0.2	0.36
0.21	0.3759
0.22	0.3916
0.23	0.4071
0.24	0.4224
0.25	0.4375
0.26	0.4524
0.27	0.4671
0.28	0.4816
0.29	0.4959
0.3	0.51
0.31	0.5239
0.32	0.5376

0.33	0.5511
0.34	0.5644
0.35	0.5775
0.36	0.5904
0.37	0.6031
0.38	0.6156
0.39	0.6279
0.4	0.64
0.41	0.6519
0.42	0.6636
0.43	0.6751
0.44	0.6864
0.45	0.6975
0.46	0.7084
0.47	0.7191
0.48	0.7296
0.49	0.7399
0.5	0.75
0.51	0.7599
0.52	0.7696
0.53	0.7791
0.54	0.7884
0.55	0.7975
0.56	0.8064
0.57	0.8151
0.58	0.8236
0.59	0.8319
0.6	0.84
0.61	0.8479
0.62	0.8556
0.63	0.8631
0.64	0.8704
0.65	0.8775
0.66	0.8844

0.67	0.8911
0.68	0.8976
0.69	0.9039
0.7	0.91
0.71	0.9159
0.72	0.9216
0.73	0.9271
0.74	0.9324
0.75	0.9375
0.76	0.9424
0.77	0.9471
0.78	0.9516
0.79	0.9559
0.8	0.96
0.81	0.9639
0.82	0.9676
0.83	0.9711
0.84	0.9744
0.85	0.9775
0.86	0.9804
0.87	0.9831
0.88	0.9856
0.89	0.9879
0.9	0.99
0.91	0.9919
0.92	0.9936
0.93	0.9951
0.94	0.9964
0.95	0.9975
0.96	0.9984
0.97	0.9991
0.98	0.9996
0.99	0.9999
1	1

8.3 DATOS DE FIGURA 4.4

ψ	ϕ
1	0
0.99	0.0199
0.98	0.0396
0.97	0.0591
0.96	0.0784
0.95	0.0975
0.94	0.1164
0.93	0.1351
0.92	0.1536
0.91	0.1719
0.9	0.19
0.89	0.2079
0.88	0.2256
0.87	0.2431
0.86	0.2604
0.85	0.2775
0.84	0.2944
0.83	0.3111
0.82	0.3276
0.81	0.3439
0.8	0.36
0.79	0.3759
0.78	0.3916
0.77	0.4071
0.76	0.4224
0.75	0.4375
0.74	0.4524
0.73	0.4671
0.72	0.4816
0.71	0.4959
0.7	0.51

0.69	0.5239
0.68	0.5376
0.67	0.5511
0.66	0.5644
0.59	0.6519
0.58	0.6636
0.57	0.6751
0.56	0.6864
0.55	0.6975
0.54	0.7084
0.53	0.7191
0.52	0.7296
0.51	0.7399
0.5	0.75
0.49	0.7599
0.48	0.7696
0.47	0.7791
0.46	0.7884
0.45	0.7975
0.44	0.8064
0.43	0.8151
0.42	0.8236
0.41	0.8319
0.4	0.84
0.39	0.8479
0.38	0.8556
0.37	0.8631
0.36	0.8704
0.35	0.8775
0.34	0.8844
0.33	0.8911
0.32	0.8976

0.31	0.9039
0.3	0.91
0.29	0.9159
0.28	0.9216
0.27	0.9271
0.26	0.9324
0.25	0.9375
0.24	0.9424
0.23	0.9471
0.22	0.9516
0.21	0.9559
0.2	0.96
0.19	0.9639
0.18	0.9676
0.17	0.9711
0.16	0.9744
0.15	0.9775
0.14	0.9804
0.13	0.9831
0.12	0.9856
0.11	0.9879
0.1	0.99
0.09	0.9919
0.08	0.9936
0.07	0.9951
0.06	0.9964
0.05	0.9975
0.04	0.9984
0.03	0.9991
0.02	0.9996
0.01	0.9999
0	1

8.4 DATOS DE FIGURA 4.5

ξ	n	φ	n	φ								
0	0.1	0	0.3	0	0.5	0	0.7	0	0.9	0	1	0
0.01	0.1	0.1046617	0.3	0.0426167	0.5	0.029701	0.7	0.0241125	0.9	0.0209939	1	0.0199
0.02	0.1	0.1992686	0.3	0.0838224	0.5	0.058808	0.7	0.0478795	0.9	0.0417534	1	0.0396
0.03	0.1	0.2846986	0.3	0.1236502	0.5	0.087327	0.7	0.0713026	0.9	0.0622279	1	0.0591
0.04	0.1	0.3617607	0.3	0.1621325	0.5	0.115264	0.7	0.0943833	0.9	0.0825707	1	0.0784
0.05	0.1	0.4311999	0.3	0.1993016	0.5	0.142625	0.7	0.117123	0.9	0.1026289	1	0.0975
0.06	0.1	0.4937018	0.3	0.2351892	0.5	0.169416	0.7	0.1395234	0.9	0.122454	1	0.1164
0.07	0.1	0.5498965	0.3	0.2698264	0.5	0.195643	0.7	0.1615859	0.9	0.142046	1	0.1351
0.08	0.1	0.6003626	0.3	0.3032442	0.5	0.221312	0.7	0.183312	0.9	0.1614054	1	0.1536
0.09	0.1	0.6456313	0.3	0.3354729	0.5	0.246429	0.7	0.2047035	0.9	0.1805323	1	0.1719
0.1	0.1	0.6861894	0.3	0.3665424	0.5	0.271	0.7	0.2257617	0.9	0.1994272	1	0.19
0.11	0.1	0.7224827	0.3	0.3964823	0.5	0.295031	0.7	0.2464883	0.9	0.2180902	1	0.2079
0.12	0.1	0.7549191	0.3	0.4253215	0.5	0.318528	0.7	0.2668848	0.9	0.2365216	1	0.2256
0.13	0.1	0.7838716	0.3	0.4530889	0.5	0.341497	0.7	0.286953	0.9	0.2547218	1	0.2431
0.14	0.1	0.8096806	0.3	0.4798124	0.5	0.363944	0.7	0.3066942	0.9	0.272691	1	0.2604
0.15	0.1	0.8326568	0.3	0.5055201	0.5	0.385875	0.7	0.3261103	0.9	0.2904296	1	0.2775
0.16	0.1	0.853083	0.3	0.5302391	0.5	0.407296	0.7	0.3452028	0.9	0.3079378	1	0.2944
0.17	0.1	0.8712169	0.3	0.5539964	0.5	0.428213	0.7	0.3639733	0.9	0.3252159	1	0.3111
0.18	0.1	0.8872926	0.3	0.5768185	0.5	0.448632	0.7	0.3824235	0.9	0.3422642	1	0.3276
0.19	0.1	0.9015229	0.3	0.5987315	0.5	0.468559	0.7	0.400555	0.9	0.3590831	1	0.3439
0.2	0.1	0.9141007	0.3	0.619761	0.5	0.488	0.7	0.4183696	0.9	0.3756729	1	0.36
0.21	0.1	0.9252006	0.3	0.6399324	0.5	0.506961	0.7	0.4358689	0.9	0.3920338	1	0.3759
0.22	0.1	0.9349809	0.3	0.6592703	0.5	0.525448	0.7	0.4530545	0.9	0.4081663	1	0.3916
0.23	0.1	0.9435846	0.3	0.6777993	0.5	0.543467	0.7	0.4699283	0.9	0.4240705	1	0.4071
0.24	0.1	0.9511404	0.3	0.6955433	0.5	0.561024	0.7	0.4864919	0.9	0.4397469	1	0.4224
0.25	0.1	0.9577649	0.3	0.7125258	0.5	0.578125	0.7	0.5027471	0.9	0.4551958	1	0.4375
0.26	0.1	0.9635625	0.3	0.7287702	0.5	0.594776	0.7	0.5186955	0.9	0.4704175	1	0.4524
0.27	0.1	0.9686273	0.3	0.744299	0.5	0.610983	0.7	0.5343391	0.9	0.4854123	1	0.4671
0.28	0.1	0.9730439	0.3	0.7591347	0.5	0.626752	0.7	0.5496794	0.9	0.5001807	1	0.4816
0.29	0.1	0.9768878	0.3	0.7732993	0.5	0.642089	0.7	0.5647184	0.9	0.5147228	1	0.4959
0.3	0.1	0.9802267	0.3	0.7868142	0.5	0.657	0.7	0.5794579	0.9	0.5290392	1	0.51
0.31	0.1	0.9831213	0.3	0.7997007	0.5	0.671491	0.7	0.5938995	0.9	0.5431301	1	0.5239
0.32	0.1	0.9856253	0.3	0.8119795	0.5	0.685568	0.7	0.6080453	0.9	0.5569959	1	0.5376
0.33	0.1	0.987787	0.3	0.8236708	0.5	0.699237	0.7	0.6218969	0.9	0.570637	1	0.5511
0.34	0.1	0.989649	0.3	0.8347948	0.5	0.712504	0.7	0.6354563	0.9	0.5840538	1	0.5644
0.35	0.1	0.9912492	0.3	0.8453709	0.5	0.725375	0.7	0.6487254	0.9	0.5972465	1	0.5775
0.36	0.1	0.9926213	0.3	0.8554183	0.5	0.737856	0.7	0.6617061	0.9	0.6102157	1	0.5904
0.37	0.1	0.9937949	0.3	0.8649559	0.5	0.749953	0.7	0.6744002	0.9	0.6229616	1	0.6031
0.38	0.1	0.9947963	0.3	0.8740019	0.5	0.761672	0.7	0.6868096	0.9	0.6354847	1	0.6156

0.39	0.1	0.9956486	0.3	0.8825744	0.5	0.773019	0.7	0.6989365	0.9	0.6477853	1	0.6279
0.4	0.1	0.996372	0.3	0.8906911	0.5	0.784	0.7	0.7107826	0.9	0.659864	1	0.64
0.41	0.1	0.9969844	0.3	0.8983692	0.5	0.794621	0.7	0.72235	0.9	0.671721	1	0.6519
0.42	0.1	0.9975013	0.3	0.9056255	0.5	0.804888	0.7	0.7336406	0.9	0.6833568	1	0.6636
0.43	0.1	0.9979364	0.3	0.9124766	0.5	0.814807	0.7	0.7446566	0.9	0.6947718	1	0.6751
0.44	0.1	0.9983015	0.3	0.9189385	0.5	0.824384	0.7	0.7553999	0.9	0.7059664	1	0.6864
0.45	0.1	0.9986069	0.3	0.925027	0.5	0.833625	0.7	0.7658726	0.9	0.7169411	1	0.6975
0.46	0.1	0.9988615	0.3	0.9307575	0.5	0.842536	0.7	0.7760768	0.9	0.7276963	1	0.7084
0.47	0.1	0.9990731	0.3	0.9361449	0.5	0.851123	0.7	0.7860145	0.9	0.7382325	1	0.7191
0.48	0.1	0.9992483	0.3	0.941204	0.5	0.859392	0.7	0.795688	0.9	0.7485501	1	0.7296
0.49	0.1	0.9993929	0.3	0.945949	0.5	0.867349	0.7	0.8050994	0.9	0.7586495	1	0.7399
0.5	0.1	0.9995117	0.3	0.9503937	0.5	0.875	0.7	0.8142507	0.9	0.7685313	1	0.75
0.51	0.1	0.999609	0.3	0.9545518	0.5	0.882351	0.7	0.8231443	0.9	0.7781959	1	0.7599
0.52	0.1	0.9996884	0.3	0.9584365	0.5	0.889408	0.7	0.8317823	0.9	0.7876439	1	0.7696
0.53	0.1	0.9997528	0.3	0.9620606	0.5	0.896177	0.7	0.8401671	0.9	0.7968756	1	0.7791
0.54	0.1	0.9998049	0.3	0.9654365	0.5	0.902664	0.7	0.8483008	0.9	0.8058916	1	0.7884
0.55	0.1	0.9998468	0.3	0.9685765	0.5	0.908875	0.7	0.8561858	0.9	0.8146925	1	0.7975
0.56	0.1	0.9998803	0.3	0.9714923	0.5	0.914816	0.7	0.8638244	0.9	0.8232787	1	0.8064
0.57	0.1	0.9999071	0.3	0.9741954	0.5	0.920493	0.7	0.8712189	0.9	0.8316508	1	0.8151
0.58	0.1	0.9999283	0.3	0.9766969	0.5	0.925912	0.7	0.8783719	0.9	0.8398093	1	0.8236
0.59	0.1	0.999945	0.3	0.9790075	0.5	0.931079	0.7	0.8852856	0.9	0.8477548	1	0.8319
0.6	0.1	0.9999581	0.3	0.9811378	0.5	0.936	0.7	0.8919626	0.9	0.8554878	1	0.84
0.61	0.1	0.9999683	0.3	0.9830977	0.5	0.940681	0.7	0.8984053	0.9	0.863009	1	0.8479
0.62	0.1	0.9999761	0.3	0.984897	0.5	0.945128	0.7	0.9046162	0.9	0.870319	1	0.8556
0.63	0.1	0.9999822	0.3	0.9865453	0.5	0.949347	0.7	0.910598	0.9	0.8774182	1	0.8631
0.64	0.1	0.9999868	0.3	0.9880516	0.5	0.953344	0.7	0.9163533	0.9	0.8843075	1	0.8704
0.65	0.1	0.9999903	0.3	0.9894246	0.5	0.957125	0.7	0.9218846	0.9	0.8909873	1	0.8775
0.66	0.1	0.999993	0.3	0.990673	0.5	0.960696	0.7	0.9271947	0.9	0.8974584	1	0.8844
0.67	0.1	0.9999949	0.3	0.9918048	0.5	0.964063	0.7	0.9322863	0.9	0.9037215	1	0.8911
0.68	0.1	0.9999964	0.3	0.9928278	0.5	0.967232	0.7	0.9371621	0.9	0.9097771	1	0.8976
0.69	0.1	0.9999975	0.3	0.9937497	0.5	0.970209	0.7	0.9418251	0.9	0.9156261	1	0.9039
0.7	0.1	0.9999982	0.3	0.9945776	0.5	0.973	0.7	0.9462781	0.9	0.9212692	1	0.91
0.71	0.1	0.9999988	0.3	0.9953184	0.5	0.975611	0.7	0.9505239	0.9	0.926707	1	0.9159
0.72	0.1	0.9999992	0.3	0.9959788	0.5	0.978048	0.7	0.9545657	0.9	0.9319404	1	0.9216
0.73	0.1	0.9999994	0.3	0.9965651	0.5	0.980317	0.7	0.9584064	0.9	0.9369702	1	0.9271
0.74	0.1	0.9999996	0.3	0.9970833	0.5	0.982424	0.7	0.9620492	0.9	0.9417972	1	0.9324
0.75	0.1	0.9999998	0.3	0.9975392	0.5	0.984375	0.7	0.9654972	0.9	0.9464223	1	0.9375
0.76	0.1	0.9999998	0.3	0.9979382	0.5	0.986176	0.7	0.9687537	0.9	0.9508462	1	0.9424
0.77	0.1	0.9999999	0.3	0.9982854	0.5	0.987833	0.7	0.971822	0.9	0.95507	1	0.9471
0.78	0.1	0.9999999	0.3	0.9985858	0.5	0.989352	0.7	0.9747055	0.9	0.9590945	1	0.9516
0.79	0.1	1	0.3	0.998844	0.5	0.990739	0.7	0.9774077	0.9	0.9629209	1	0.9559
0.8	0.1	1	0.3	0.9990643	0.5	0.992	0.7	0.9799321	0.9	0.96655	1	0.96
0.81	0.1	1	0.3	0.9992508	0.5	0.993141	0.7	0.9822825	0.9	0.9699829	1	0.9639
0.82	0.1	1	0.3	0.9994073	0.5	0.994168	0.7	0.9844627	0.9	0.9732208	1	0.9676
0.83	0.1	1	0.3	0.9995373	0.5	0.995087	0.7	0.9864765	0.9	0.9762648	1	0.9711

0.84	0.1	1	0.3	0.9996442	0.5	0.995904	0.7	0.9883279	0.9	0.9791162	1	0.9744
0.85	0.1	1	0.3	0.999731	0.5	0.996625	0.7	0.9900212	0.9	0.9817763	1	0.9775
0.86	0.1	1	0.3	0.9998005	0.5	0.997256	0.7	0.9915606	0.9	0.9842463	1	0.9804
0.87	0.1	1	0.3	0.9998553	0.5	0.997803	0.7	0.9929507	0.9	0.9865279	1	0.9831
0.88	0.1	1	0.3	0.9998977	0.5	0.998272	0.7	0.994196	0.9	0.9886224	1	0.9856
0.89	0.1	1	0.3	0.9999298	0.5	0.998669	0.7	0.9953016	0.9	0.9905317	1	0.9879
0.9	0.1	1	0.3	0.9999536	0.5	0.999	0.7	0.9962724	0.9	0.9922574	1	0.99
0.91	0.1	1	0.3	0.9999706	0.5	0.999271	0.7	0.997114	0.9	0.9938015	1	0.9919
0.92	0.1	1	0.3	0.9999824	0.5	0.999488	0.7	0.9978319	0.9	0.9951661	1	0.9936
0.93	0.1	1	0.3	0.9999901	0.5	0.999657	0.7	0.9984324	0.9	0.9963535	1	0.9951
0.94	0.1	1	0.3	0.9999949	0.5	0.999784	0.7	0.9989219	0.9	0.9973665	1	0.9964
0.95	0.1	1	0.3	0.9999977	0.5	0.999875	0.7	0.9993076	0.9	0.9982078	1	0.9975
0.96	0.1	1	0.3	0.9999991	0.5	0.999936	0.7	0.9995973	0.9	0.9988811	1	0.9984
0.97	0.1	1	0.3	0.9999997	0.5	0.999973	0.7	0.9997997	0.9	0.9993904	1	0.9991
0.98	0.1	1	0.3	1	0.5	0.999992	0.7	0.9999252	0.9	0.999741	1	0.9996
0.99	0.1	1	0.3	1	0.5	0.999999	0.7	0.9999861	0.9	0.9999401	1	0.9999
1	0.1	1	0.3	1	0.5	1	0.7	1	0.9	1	1	1

8.5 DATOS DE FIGURA 4.6

ψ	n	ϕ	n	ϕ	n	ϕ	n	ϕ	n	ϕ	n	ϕ
1	0.1	0	0.3	0	0.5	0	0.7	0	0.9	0	1	0
0.99	0.1	0.1046617	0.3	0.0426167	0.5	0.029701	0.7	0.0241125	0.9	0.0209939	1	0.0199
0.98	0.1	0.1992686	0.3	0.0838224	0.5	0.058808	0.7	0.0478795	0.9	0.0417534	1	0.0396
0.97	0.1	0.2846986	0.3	0.1236502	0.5	0.087327	0.7	0.0713026	0.9	0.062279	1	0.0591
0.96	0.1	0.3617607	0.3	0.1621325	0.5	0.115264	0.7	0.0943833	0.9	0.0825707	1	0.0784
0.95	0.1	0.4311999	0.3	0.1993016	0.5	0.142625	0.7	0.117123	0.9	0.1026289	1	0.0975
0.94	0.1	0.4937018	0.3	0.2351892	0.5	0.169416	0.7	0.1395234	0.9	0.122454	1	0.1164
0.93	0.1	0.5498965	0.3	0.2698264	0.5	0.195643	0.7	0.1615859	0.9	0.142046	1	0.1351
0.92	0.1	0.6003626	0.3	0.3032442	0.5	0.221312	0.7	0.183312	0.9	0.1614054	1	0.1536
0.91	0.1	0.6456313	0.3	0.3354729	0.5	0.246429	0.7	0.2047035	0.9	0.1805323	1	0.1719
0.9	0.1	0.6861894	0.3	0.3665424	0.5	0.271	0.7	0.2257617	0.9	0.1994272	1	0.19
0.89	0.1	0.7224827	0.3	0.3964823	0.5	0.295031	0.7	0.2464883	0.9	0.2180902	1	0.2079
0.88	0.1	0.7549191	0.3	0.4253215	0.5	0.318528	0.7	0.2668848	0.9	0.2365216	1	0.2256
0.87	0.1	0.7838716	0.3	0.4530889	0.5	0.341497	0.7	0.286953	0.9	0.2547218	1	0.2431
0.86	0.1	0.8096806	0.3	0.4798124	0.5	0.363944	0.7	0.3066942	0.9	0.272691	1	0.2604
0.85	0.1	0.8326568	0.3	0.5055201	0.5	0.385875	0.7	0.3261103	0.9	0.2904296	1	0.2775
0.84	0.1	0.853083	0.3	0.5302391	0.5	0.407296	0.7	0.3452028	0.9	0.3079378	1	0.2944
0.83	0.1	0.8712169	0.3	0.5539964	0.5	0.428213	0.7	0.3639733	0.9	0.3252159	1	0.3111
0.82	0.1	0.8872926	0.3	0.5768185	0.5	0.448632	0.7	0.3824235	0.9	0.3422642	1	0.3276
0.81	0.1	0.9015229	0.3	0.5987315	0.5	0.468559	0.7	0.400555	0.9	0.3590831	1	0.3439
0.8	0.1	0.9141007	0.3	0.619761	0.5	0.488	0.7	0.4183696	0.9	0.3756729	1	0.36
0.79	0.1	0.9252006	0.3	0.6399324	0.5	0.506961	0.7	0.4358689	0.9	0.3920338	1	0.3759
0.78	0.1	0.9349809	0.3	0.6592703	0.5	0.525448	0.7	0.4530545	0.9	0.4081663	1	0.3916
0.77	0.1	0.9435846	0.3	0.6777993	0.5	0.543467	0.7	0.4699283	0.9	0.4240705	1	0.4071
0.76	0.1	0.9511404	0.3	0.6955433	0.5	0.561024	0.7	0.4864919	0.9	0.4397469	1	0.4224
0.75	0.1	0.9577649	0.3	0.7125258	0.5	0.578125	0.7	0.5027471	0.9	0.4551958	1	0.4375
0.74	0.1	0.9635625	0.3	0.7287702	0.5	0.594776	0.7	0.5186955	0.9	0.4704175	1	0.4524
0.73	0.1	0.9686273	0.3	0.744299	0.5	0.610983	0.7	0.5343391	0.9	0.4854123	1	0.4671
0.72	0.1	0.9730439	0.3	0.7591347	0.5	0.626752	0.7	0.5496794	0.9	0.5001807	1	0.4816
0.71	0.1	0.9768878	0.3	0.7732993	0.5	0.642089	0.7	0.5647184	0.9	0.5147228	1	0.4959
0.7	0.1	0.9802267	0.3	0.7868142	0.5	0.657	0.7	0.5794579	0.9	0.5290392	1	0.51
0.69	0.1	0.9831213	0.3	0.7997007	0.5	0.671491	0.7	0.5938995	0.9	0.5431301	1	0.5239
0.68	0.1	0.9856253	0.3	0.8119795	0.5	0.685568	0.7	0.6080453	0.9	0.5569959	1	0.5376
0.67	0.1	0.987787	0.3	0.8236708	0.5	0.699237	0.7	0.6218969	0.9	0.570637	1	0.5511
0.66	0.1	0.989649	0.3	0.8347948	0.5	0.712504	0.7	0.6354563	0.9	0.5840538	1	0.5644
0.65	0.1	0.9912492	0.3	0.8453709	0.5	0.725375	0.7	0.6487254	0.9	0.5972465	1	0.5775
0.64	0.1	0.9926213	0.3	0.8554183	0.5	0.737856	0.7	0.6617061	0.9	0.6102157	1	0.5904
0.63	0.1	0.9937949	0.3	0.8649559	0.5	0.749953	0.7	0.6744002	0.9	0.6229616	1	0.6031
0.62	0.1	0.9947963	0.3	0.8740019	0.5	0.761672	0.7	0.6868096	0.9	0.6354847	1	0.6156
0.61	0.1	0.9956486	0.3	0.8825744	0.5	0.773019	0.7	0.6989365	0.9	0.6477853	1	0.6279
0.6	0.1	0.996372	0.3	0.8906911	0.5	0.784	0.7	0.7107826	0.9	0.659864	1	0.64

0.59	0.1	0.9969844	0.3	0.8983692	0.5	0.794621	0.7	0.72235	0.9	0.671721	1	0.6519
0.58	0.1	0.9975013	0.3	0.9056255	0.5	0.804888	0.7	0.7336406	0.9	0.6833568	1	0.6636
0.57	0.1	0.9979364	0.3	0.9124766	0.5	0.814807	0.7	0.7446566	0.9	0.6947718	1	0.6751
0.56	0.1	0.9983015	0.3	0.9189385	0.5	0.824384	0.7	0.7553999	0.9	0.7059664	1	0.6864
0.55	0.1	0.9986069	0.3	0.925027	0.5	0.833625	0.7	0.7658726	0.9	0.7169411	1	0.6975
0.54	0.1	0.9988615	0.3	0.9307575	0.5	0.842536	0.7	0.7760768	0.9	0.7276963	1	0.7084
0.53	0.1	0.9990731	0.3	0.9361449	0.5	0.851123	0.7	0.7860145	0.9	0.7382325	1	0.7191
0.52	0.1	0.9992483	0.3	0.941204	0.5	0.859392	0.7	0.795688	0.9	0.7485501	1	0.7296
0.51	0.1	0.9993929	0.3	0.945949	0.5	0.867349	0.7	0.8050994	0.9	0.7586495	1	0.7399
0.5	0.1	0.9995117	0.3	0.9503937	0.5	0.875	0.7	0.8142507	0.9	0.7685313	1	0.75
0.49	0.1	0.999609	0.3	0.9545518	0.5	0.882351	0.7	0.8231443	0.9	0.7781959	1	0.7599
0.48	0.1	0.9996884	0.3	0.9584365	0.5	0.889408	0.7	0.8317823	0.9	0.7876439	1	0.7696
0.47	0.1	0.9997528	0.3	0.9620606	0.5	0.896177	0.7	0.8401671	0.9	0.7968756	1	0.7791
0.46	0.1	0.9998049	0.3	0.9654365	0.5	0.902664	0.7	0.8483008	0.9	0.8058916	1	0.7884
0.45	0.1	0.9998468	0.3	0.9685765	0.5	0.908875	0.7	0.8561858	0.9	0.8146925	1	0.7975
0.44	0.1	0.9998803	0.3	0.9714923	0.5	0.914816	0.7	0.8638244	0.9	0.8232787	1	0.8064
0.43	0.1	0.9999071	0.3	0.9741954	0.5	0.920493	0.7	0.8712189	0.9	0.8316508	1	0.8151
0.42	0.1	0.9999283	0.3	0.9766969	0.5	0.925912	0.7	0.8783719	0.9	0.8398093	1	0.8236
0.41	0.1	0.999945	0.3	0.9790075	0.5	0.931079	0.7	0.8852856	0.9	0.8477548	1	0.8319
0.4	0.1	0.9999581	0.3	0.9811378	0.5	0.936	0.7	0.8919626	0.9	0.8554878	1	0.84
0.39	0.1	0.9999683	0.3	0.9830977	0.5	0.940681	0.7	0.8984053	0.9	0.863009	1	0.8479
0.38	0.1	0.9999761	0.3	0.984897	0.5	0.945128	0.7	0.9046162	0.9	0.870319	1	0.8556
0.37	0.1	0.9999822	0.3	0.9865453	0.5	0.949347	0.7	0.910598	0.9	0.8774182	1	0.8631
0.36	0.1	0.9999868	0.3	0.9880516	0.5	0.953344	0.7	0.9163533	0.9	0.8843075	1	0.8704
0.35	0.1	0.9999903	0.3	0.9894246	0.5	0.957125	0.7	0.9218846	0.9	0.8909873	1	0.8775
0.34	0.1	0.999993	0.3	0.990673	0.5	0.960696	0.7	0.9271947	0.9	0.8974584	1	0.8844
0.33	0.1	0.9999949	0.3	0.9918048	0.5	0.964063	0.7	0.9322863	0.9	0.9037215	1	0.8911
0.32	0.1	0.9999964	0.3	0.9928278	0.5	0.967232	0.7	0.9371621	0.9	0.9097771	1	0.8976
0.31	0.1	0.9999975	0.3	0.9937497	0.5	0.970209	0.7	0.9418251	0.9	0.9156261	1	0.9039
0.3	0.1	0.9999982	0.3	0.9945776	0.5	0.973	0.7	0.9462781	0.9	0.9212692	1	0.91
0.29	0.1	0.9999988	0.3	0.9953184	0.5	0.975611	0.7	0.9505239	0.9	0.926707	1	0.9159
0.28	0.1	0.9999992	0.3	0.9959788	0.5	0.978048	0.7	0.9545657	0.9	0.9319404	1	0.9216
0.27	0.1	0.9999994	0.3	0.9965651	0.5	0.980317	0.7	0.9584064	0.9	0.9369702	1	0.9271
0.26	0.1	0.9999996	0.3	0.9970833	0.5	0.982424	0.7	0.9620492	0.9	0.9417972	1	0.9324
0.25	0.1	0.9999998	0.3	0.9975392	0.5	0.984375	0.7	0.9654972	0.9	0.9464223	1	0.9375
0.24	0.1	0.9999998	0.3	0.9979382	0.5	0.986176	0.7	0.9687537	0.9	0.9508462	1	0.9424
0.23	0.1	0.9999999	0.3	0.9982854	0.5	0.987833	0.7	0.971822	0.9	0.95507	1	0.9471
0.22	0.1	0.9999999	0.3	0.9985858	0.5	0.989352	0.7	0.9747055	0.9	0.9590945	1	0.9516
0.21	0.1	1	0.3	0.998844	0.5	0.990739	0.7	0.9774077	0.9	0.9629209	1	0.9559
0.2	0.1	1	0.3	0.9990643	0.5	0.992	0.7	0.9799321	0.9	0.96655	1	0.96
0.19	0.1	1	0.3	0.9992508	0.5	0.993141	0.7	0.9822825	0.9	0.9699829	1	0.9639
0.18	0.1	1	0.3	0.9994073	0.5	0.994168	0.7	0.9844627	0.9	0.9732208	1	0.9676
0.17	0.1	1	0.3	0.9995373	0.5	0.995087	0.7	0.9864765	0.9	0.9762648	1	0.9711
0.16	0.1	1	0.3	0.9996442	0.5	0.995904	0.7	0.9883279	0.9	0.9791162	1	0.9744
0.15	0.1	1	0.3	0.999731	0.5	0.996625	0.7	0.9900212	0.9	0.9817763	1	0.9775

0.14	0.1	1	0.3	0.9998005	0.5	0.997256	0.7	0.9915606	0.9	0.9842463	1	0.9804
0.13	0.1	1	0.3	0.9998553	0.5	0.997803	0.7	0.9929507	0.9	0.9865279	1	0.9831
0.12	0.1	1	0.3	0.9998977	0.5	0.998272	0.7	0.994196	0.9	0.9886224	1	0.9856
0.11	0.1	1	0.3	0.9999298	0.5	0.998669	0.7	0.9953016	0.9	0.9905317	1	0.9879
0.1	0.1	1	0.3	0.9999536	0.5	0.999	0.7	0.9962724	0.9	0.9922574	1	0.99
0.09	0.1	1	0.3	0.9999706	0.5	0.999271	0.7	0.997114	0.9	0.9938015	1	0.9919
0.08	0.1	1	0.3	0.9999824	0.5	0.999488	0.7	0.9978319	0.9	0.9951661	1	0.9936
0.07	0.1	1	0.3	0.9999901	0.5	0.999657	0.7	0.9984324	0.9	0.9963535	1	0.9951
0.06	0.1	1	0.3	0.9999949	0.5	0.999784	0.7	0.9989219	0.9	0.9973665	1	0.9964
0.05	0.1	1	0.3	0.9999977	0.5	0.999875	0.7	0.9993076	0.9	0.9982078	1	0.9975
0.04	0.1	1	0.3	0.9999991	0.5	0.999936	0.7	0.9995973	0.9	0.9988811	1	0.9984
0.03	0.1	1	0.3	0.9999997	0.5	0.999973	0.7	0.9997997	0.9	0.9993904	1	0.9991
0.02	0.1	1	0.3	1	0.5	0.999992	0.7	0.9999252	0.9	0.999741	1	0.9996
0.01	0.1	1	0.3	1	0.5	0.999999	0.7	0.9999861	0.9	0.9999401	1	0.9999
0	0.1	1	0.3	1	0.5	1	0.7	1	0.9	1	1	1

8.6 DATOS DE FIGURA 4.7

ξ	n	φ	n	φ	n	φ	n	φ	n	φ	n	φ
0	1	0	1.1	0	1.5	0	2.2	0	2.5	0	3.3	0
0.01	1	0.0199	1.1	0.0190041	1.5	0.016611	2.2	0.0145123	2.5	0.0139719	3.3	0.0130105
0.02	1	0.0396	1.1	0.0378345	1.5	0.0331106	2.2	0.0289582	2.5	0.0278875	3.3	0.0259813
0.03	1	0.0591	1.1	0.056491	1.5	0.0494983	2.2	0.0433372	2.5	0.0417465	3.3	0.038912
0.04	1	0.0784	1.1	0.0749735	1.5	0.0657738	2.2	0.057649	2.5	0.0555484	3.3	0.0518023
0.05	1	0.0975	1.1	0.0932818	1.5	0.0819366	2.2	0.0718932	2.5	0.0692929	3.3	0.0646521
0.06	1	0.1164	1.1	0.1114157	1.5	0.0979864	2.2	0.0860694	2.5	0.0829796	3.3	0.0774609
0.07	1	0.1351	1.1	0.1293751	1.5	0.1139228	2.2	0.1001772	2.5	0.0966082	3.3	0.0902285
0.08	1	0.1536	1.1	0.1471598	1.5	0.1297453	2.2	0.1142162	2.5	0.1101784	3.3	0.1029546
0.09	1	0.1719	1.1	0.1647696	1.5	0.1454536	2.2	0.128186	2.5	0.1236896	3.3	0.1156388
0.1	1	0.19	1.1	0.1822044	1.5	0.1610472	2.2	0.1420862	2.5	0.1371416	3.3	0.1282808
0.11	1	0.2079	1.1	0.1994639	1.5	0.1765258	2.2	0.1559164	2.5	0.150534	3.3	0.1408804
0.12	1	0.2256	1.1	0.216548	1.5	0.1918888	2.2	0.1696761	2.5	0.1638663	3.3	0.1534371
0.13	1	0.2431	1.1	0.2334566	1.5	0.2071359	2.2	0.183365	2.5	0.1771381	3.3	0.1659506
0.14	1	0.2604	1.1	0.2501894	1.5	0.2222666	2.2	0.1969825	2.5	0.190349	3.3	0.1784207
0.15	1	0.2775	1.1	0.2667462	1.5	0.2372805	2.2	0.2105282	2.5	0.2034987	3.3	0.1908469
0.16	1	0.2944	1.1	0.2831269	1.5	0.252177	2.2	0.2240017	2.5	0.2165866	3.3	0.2032288
0.17	1	0.3111	1.1	0.2993313	1.5	0.2669558	2.2	0.2374024	2.5	0.2296123	3.3	0.2155662
0.18	1	0.3276	1.1	0.3153591	1.5	0.2816164	2.2	0.25073	2.5	0.2425754	3.3	0.2278586
0.19	1	0.3439	1.1	0.3312103	1.5	0.2961582	2.2	0.2639839	2.5	0.2554754	3.3	0.2401057
0.2	1	0.36	1.1	0.3468845	1.5	0.3105809	2.2	0.2771637	2.5	0.2683119	3.3	0.252307
0.21	1	0.3759	1.1	0.3623816	1.5	0.3248839	2.2	0.2902687	2.5	0.2810844	3.3	0.2644622
0.22	1	0.3916	1.1	0.3777015	1.5	0.3390666	2.2	0.3032986	2.5	0.2937923	3.3	0.2765709
0.23	1	0.4071	1.1	0.3928437	1.5	0.3531287	2.2	0.3162527	2.5	0.3064352	3.3	0.2886326
0.24	1	0.4224	1.1	0.4078083	1.5	0.3670696	2.2	0.3291306	2.5	0.3190127	3.3	0.3006469
0.25	1	0.4375	1.1	0.4225949	1.5	0.3808886	2.2	0.3419318	2.5	0.3315241	3.3	0.3126134
0.26	1	0.4524	1.1	0.4372034	1.5	0.3945854	2.2	0.3546555	2.5	0.3439689	3.3	0.3245317
0.27	1	0.4671	1.1	0.4516335	1.5	0.4081594	2.2	0.3673014	2.5	0.3563467	3.3	0.3364013
0.28	1	0.4816	1.1	0.465885	1.5	0.4216099	2.2	0.3798687	2.5	0.3686568	3.3	0.3482217
0.29	1	0.4959	1.1	0.4799577	1.5	0.4349365	2.2	0.392357	2.5	0.3808987	3.3	0.3599924
0.3	1	0.51	1.1	0.4938514	1.5	0.4481385	2.2	0.4047656	2.5	0.3930719	3.3	0.371713
0.31	1	0.5239	1.1	0.5075657	1.5	0.4612154	2.2	0.4170938	2.5	0.4051757	3.3	0.383383
0.32	1	0.5376	1.1	0.5211006	1.5	0.4741666	2.2	0.4293411	2.5	0.4172095	3.3	0.3950019
0.33	1	0.5511	1.1	0.5344557	1.5	0.4869914	2.2	0.4415068	2.5	0.4291727	3.3	0.406569
0.34	1	0.5644	1.1	0.5476309	1.5	0.4996892	2.2	0.4535902	2.5	0.4410647	3.3	0.418084
0.35	1	0.5775	1.1	0.5606258	1.5	0.5122594	2.2	0.4655907	2.5	0.4528849	3.3	0.4295463
0.36	1	0.5904	1.1	0.5734402	1.5	0.5247013	2.2	0.4775076	2.5	0.4646325	3.3	0.4409552
0.37	1	0.6031	1.1	0.5860738	1.5	0.5370143	2.2	0.4893402	2.5	0.476307	3.3	0.4523102
0.38	1	0.6156	1.1	0.5985265	1.5	0.5491977	2.2	0.5010876	2.5	0.4879076	3.3	0.4636107
0.39	1	0.6279	1.1	0.6107979	1.5	0.5612507	2.2	0.5127493	2.5	0.4994335	3.3	0.4748562
0.4	1	0.64	1.1	0.6228878	1.5	0.5731728	2.2	0.5243244	2.5	0.5108841	3.3	0.4860459

0.41	1	0.6519	1.1	0.6347959	1.5	0.5849631	2.2	0.5358121	2.5	0.5222587	3.3	0.4971792
0.42	1	0.6636	1.1	0.6465219	1.5	0.596621	2.2	0.5472116	2.5	0.5335563	3.3	0.5082555
0.43	1	0.6751	1.1	0.6580655	1.5	0.6081456	2.2	0.5585222	2.5	0.5447764	3.3	0.5192741
0.44	1	0.6864	1.1	0.6694265	1.5	0.6195362	2.2	0.5697429	2.5	0.5559179	3.3	0.5302342
0.45	1	0.6975	1.1	0.6806045	1.5	0.630792	2.2	0.5808729	2.5	0.5669802	3.3	0.5411352
0.46	1	0.7084	1.1	0.6915993	1.5	0.6419121	2.2	0.5919113	2.5	0.5779623	3.3	0.5519763
0.47	1	0.7191	1.1	0.7024105	1.5	0.6528959	2.2	0.6028572	2.5	0.5888633	3.3	0.5627568
0.48	1	0.7296	1.1	0.7130379	1.5	0.6637423	2.2	0.6137096	2.5	0.5996824	3.3	0.5734757
0.49	1	0.7399	1.1	0.7234811	1.5	0.6744506	2.2	0.6244675	2.5	0.6104186	3.3	0.5841324
0.5	1	0.75	1.1	0.7337397	1.5	0.6850197	2.2	0.63513	2.5	0.6210709	3.3	0.594726
0.51	1	0.7599	1.1	0.7438136	1.5	0.6954489	2.2	0.645696	2.5	0.6316383	3.3	0.6052555
0.52	1	0.7696	1.1	0.7537022	1.5	0.7057372	2.2	0.6561644	2.5	0.6421197	3.3	0.6157201
0.53	1	0.7791	1.1	0.7634053	1.5	0.7158835	2.2	0.6665341	2.5	0.6525142	3.3	0.6261188
0.54	1	0.7884	1.1	0.7729225	1.5	0.7258869	2.2	0.676804	2.5	0.6628207	3.3	0.6364508
0.55	1	0.7975	1.1	0.7822535	1.5	0.7357464	2.2	0.686973	2.5	0.6730378	3.3	0.6467148
0.56	1	0.8064	1.1	0.7913979	1.5	0.7454609	2.2	0.6970397	2.5	0.6831646	3.3	0.65691
0.57	1	0.8151	1.1	0.8003552	1.5	0.7550293	2.2	0.707003	2.5	0.6931997	3.3	0.6670352
0.58	1	0.8236	1.1	0.8091252	1.5	0.7644505	2.2	0.7168615	2.5	0.7031418	3.3	0.6770893
0.59	1	0.8319	1.1	0.8177073	1.5	0.7737233	2.2	0.7266138	2.5	0.7129898	3.3	0.6870711
0.6	1	0.84	1.1	0.8261013	1.5	0.7828466	2.2	0.7362587	2.5	0.7227421	3.3	0.6969794
0.61	1	0.8479	1.1	0.8343066	1.5	0.791819	2.2	0.7457945	2.5	0.7323973	3.3	0.7068129
0.62	1	0.8556	1.1	0.8423229	1.5	0.8006394	2.2	0.7552199	2.5	0.7419541	3.3	0.7165703
0.63	1	0.8631	1.1	0.8501496	1.5	0.8093064	2.2	0.7645331	2.5	0.7514107	3.3	0.7262502
0.64	1	0.8704	1.1	0.8577864	1.5	0.8178185	2.2	0.7737327	2.5	0.7607657	3.3	0.7358512
0.65	1	0.8775	1.1	0.8652327	1.5	0.8261745	2.2	0.7828168	2.5	0.7700173	3.3	0.7453716
0.66	1	0.8844	1.1	0.8724881	1.5	0.8343729	2.2	0.7917837	2.5	0.7791637	3.3	0.75481
0.67	1	0.8911	1.1	0.8795521	1.5	0.842412	2.2	0.8006315	2.5	0.7882031	3.3	0.7641646
0.68	1	0.8976	1.1	0.8864241	1.5	0.8502903	2.2	0.8093582	2.5	0.7971337	3.3	0.7734336
0.69	1	0.9039	1.1	0.8931036	1.5	0.8580062	2.2	0.8179618	2.5	0.8059533	3.3	0.7826154
0.7	1	0.91	1.1	0.89959	1.5	0.8655579	2.2	0.8264402	2.5	0.8146597	3.3	0.7917077
0.71	1	0.9159	1.1	0.9058828	1.5	0.8729436	2.2	0.8347911	2.5	0.8232509	3.3	0.8007087
0.72	1	0.9216	1.1	0.9119814	1.5	0.8801614	2.2	0.8430121	2.5	0.8317244	3.3	0.8096161
0.73	1	0.9271	1.1	0.9178851	1.5	0.8872094	2.2	0.8511007	2.5	0.8400776	3.3	0.8184276
0.74	1	0.9324	1.1	0.9235934	1.5	0.8940855	2.2	0.8590542	2.5	0.848308	3.3	0.8271408
0.75	1	0.9375	1.1	0.9291055	1.5	0.9007874	2.2	0.8668699	2.5	0.8564127	3.3	0.8357529
0.76	1	0.9424	1.1	0.9344207	1.5	0.907313	2.2	0.8745447	2.5	0.8643887	3.3	0.8442613
0.77	1	0.9471	1.1	0.9395383	1.5	0.9136598	2.2	0.8820755	2.5	0.8722329	3.3	0.8526629
0.78	1	0.9516	1.1	0.9444575	1.5	0.9198252	2.2	0.8894589	2.5	0.8799418	3.3	0.8609545
0.79	1	0.9559	1.1	0.9491776	1.5	0.9258066	2.2	0.8966912	2.5	0.8875118	3.3	0.8691327
0.8	1	0.96	1.1	0.9536977	1.5	0.931601	2.2	0.9037687	2.5	0.8949389	3.3	0.8771936
0.81	1	0.9639	1.1	0.9580168	1.5	0.9372053	2.2	0.9106871	2.5	0.9022189	3.3	0.8851333
0.82	1	0.9676	1.1	0.9621342	1.5	0.9426164	2.2	0.9174418	2.5	0.9093471	3.3	0.8929473
0.83	1	0.9711	1.1	0.9660487	1.5	0.9478307	2.2	0.9240281	2.5	0.9163187	3.3	0.9006308
0.84	1	0.9744	1.1	0.9697592	1.5	0.9528444	2.2	0.9304405	2.5	0.923128	3.3	0.9081785
0.85	1	0.9775	1.1	0.9732648	1.5	0.9576534	2.2	0.9366732	2.5	0.9297692	3.3	0.9155845

0.86	1	0.9804	1.1	0.9765641	1.5	0.9622532	2.2	0.9427198	2.5	0.9362355	3.3	0.9228424
0.87	1	0.9831	1.1	0.979656	1.5	0.966639	2.2	0.9485731	2.5	0.9425195	3.3	0.9299446
0.88	1	0.9856	1.1	0.9825388	1.5	0.9708054	2.2	0.9542251	2.5	0.9486129	3.3	0.9368832
0.89	1	0.9879	1.1	0.9852112	1.5	0.9747465	2.2	0.9596669	2.5	0.9545065	3.3	0.9436485
0.9	1	0.99	1.1	0.9876715	1.5	0.9784557	2.2	0.9648881	2.5	0.9601893	3.3	0.9502298
0.91	1	0.9919	1.1	0.9899178	1.5	0.9819253	2.2	0.969877	2.5	0.965649	3.3	0.9566143
0.92	1	0.9936	1.1	0.9919481	1.5	0.9851469	2.2	0.9746198	2.5	0.970871	3.3	0.9627871
0.93	1	0.9951	1.1	0.99376	1.5	0.9881105	2.2	0.9791002	2.5	0.9758378	3.3	0.96873
0.94	1	0.9964	1.1	0.9953508	1.5	0.9908043	2.2	0.9832981	2.5	0.9805279	3.3	0.9744204
0.95	1	0.9975	1.1	0.9967174	1.5	0.993214	2.2	0.9871887	2.5	0.9849146	3.3	0.9798294
0.96	1	0.9984	1.1	0.9978561	1.5	0.9953216	2.2	0.9907395	2.5	0.9889622	3.3	0.9849186
0.97	1	0.9991	1.1	0.9987621	1.5	0.9971035	2.2	0.993906	2.5	0.9926215	3.3	0.9896332
0.98	1	0.9996	1.1	0.9994292	1.5	0.9985264	2.2	0.9966211	2.5	0.9958174	3.3	0.9938879
0.99	1	0.9999	1.1	0.999848	1.5	0.9995358	2.2	0.9987672	2.5	0.9984151	3.3	0.9975229
1	1	1	1.1	1	1.5	1	2.2	1	2.5	1	3.3	1

8.7 DATOS DE FIGURA 4.8

Ψ	n	Φ	n	Φ	n	Φ	n	Φ	n	Φ	n	Φ
1	1	0	1.1	0	1.5	0	2.2	0	2.5	0	3.3	0
0.99	1	0.0199	1.1	0.0190041	1.5	0.016611	2.2	0.0145123	2.5	0.0139719	3.3	0.0130105
0.98	1	0.0396	1.1	0.0378345	1.5	0.0331106	2.2	0.0289582	2.5	0.0278875	3.3	0.0259813
0.97	1	0.0591	1.1	0.056491	1.5	0.0494983	2.2	0.0433372	2.5	0.0417465	3.3	0.038912
0.96	1	0.0784	1.1	0.0749735	1.5	0.0657738	2.2	0.057649	2.5	0.0555484	3.3	0.0518023
0.95	1	0.0975	1.1	0.0932818	1.5	0.0819366	2.2	0.0718932	2.5	0.0692929	3.3	0.0646521
0.94	1	0.1164	1.1	0.1114157	1.5	0.0979864	2.2	0.0860694	2.5	0.0829796	3.3	0.0774609
0.93	1	0.1351	1.1	0.1293751	1.5	0.1139228	2.2	0.1001772	2.5	0.0966082	3.3	0.0902285
0.92	1	0.1536	1.1	0.1471598	1.5	0.1297453	2.2	0.1142162	2.5	0.1101784	3.3	0.1029546
0.91	1	0.1719	1.1	0.1647696	1.5	0.1454536	2.2	0.128186	2.5	0.1236896	3.3	0.1156388
0.9	1	0.19	1.1	0.1822044	1.5	0.1610472	2.2	0.1420862	2.5	0.1371416	3.3	0.1282808
0.89	1	0.2079	1.1	0.1994639	1.5	0.1765258	2.2	0.1559164	2.5	0.150534	3.3	0.1408804
0.88	1	0.2256	1.1	0.216548	1.5	0.1918888	2.2	0.1696761	2.5	0.1638663	3.3	0.1534371
0.87	1	0.2431	1.1	0.2334566	1.5	0.2071359	2.2	0.183365	2.5	0.1771381	3.3	0.1659506
0.86	1	0.2604	1.1	0.2501894	1.5	0.2222666	2.2	0.1969825	2.5	0.190349	3.3	0.1784207
0.85	1	0.2775	1.1	0.2667462	1.5	0.2372805	2.2	0.2105282	2.5	0.2034987	3.3	0.1908469
0.84	1	0.2944	1.1	0.2831269	1.5	0.252177	2.2	0.2240017	2.5	0.2165866	3.3	0.2032288
0.83	1	0.3111	1.1	0.2993313	1.5	0.2669558	2.2	0.2374024	2.5	0.2296123	3.3	0.2155662
0.82	1	0.3276	1.1	0.3153591	1.5	0.2816164	2.2	0.25073	2.5	0.2425754	3.3	0.2278586
0.81	1	0.3439	1.1	0.3312103	1.5	0.2961582	2.2	0.2639839	2.5	0.2554754	3.3	0.2401057
0.8	1	0.36	1.1	0.3468845	1.5	0.3105809	2.2	0.2771637	2.5	0.2683119	3.3	0.252307
0.79	1	0.3759	1.1	0.3623816	1.5	0.3248839	2.2	0.2902687	2.5	0.2810844	3.3	0.2644622
0.78	1	0.3916	1.1	0.3777015	1.5	0.3390666	2.2	0.3032986	2.5	0.2937923	3.3	0.2765709
0.77	1	0.4071	1.1	0.3928437	1.5	0.3531287	2.2	0.3162527	2.5	0.3064352	3.3	0.2886326
0.76	1	0.4224	1.1	0.4078083	1.5	0.3670696	2.2	0.3291306	2.5	0.3190127	3.3	0.3006469
0.75	1	0.4375	1.1	0.4225949	1.5	0.3808886	2.2	0.3419318	2.5	0.3315241	3.3	0.3126134
0.74	1	0.4524	1.1	0.4372034	1.5	0.3945854	2.2	0.3546555	2.5	0.3439689	3.3	0.3245317
0.73	1	0.4671	1.1	0.4516335	1.5	0.4081594	2.2	0.3673014	2.5	0.3563467	3.3	0.3364013
0.72	1	0.4816	1.1	0.465885	1.5	0.4216099	2.2	0.3798687	2.5	0.3686568	3.3	0.3482217
0.71	1	0.4959	1.1	0.4799577	1.5	0.4349365	2.2	0.392357	2.5	0.3808987	3.3	0.3599924
0.7	1	0.51	1.1	0.4938514	1.5	0.4481385	2.2	0.4047656	2.5	0.3930719	3.3	0.371713
0.69	1	0.5239	1.1	0.5075657	1.5	0.4612154	2.2	0.4170938	2.5	0.4051757	3.3	0.383383
0.68	1	0.5376	1.1	0.5211006	1.5	0.4741666	2.2	0.4293411	2.5	0.4172095	3.3	0.3950019
0.67	1	0.5511	1.1	0.5344557	1.5	0.4869914	2.2	0.4415068	2.5	0.4291727	3.3	0.406569
0.66	1	0.5644	1.1	0.5476309	1.5	0.4996892	2.2	0.4535902	2.5	0.4410647	3.3	0.418084
0.65	1	0.5775	1.1	0.5606258	1.5	0.5122594	2.2	0.4655907	2.5	0.4528849	3.3	0.4295463
0.64	1	0.5904	1.1	0.5734402	1.5	0.5247013	2.2	0.4775076	2.5	0.4646325	3.3	0.4409552
0.63	1	0.6031	1.1	0.5860738	1.5	0.5370143	2.2	0.4893402	2.5	0.476307	3.3	0.4523102
0.62	1	0.6156	1.1	0.5985265	1.5	0.5491977	2.2	0.5010876	2.5	0.4879076	3.3	0.4636107
0.61	1	0.6279	1.1	0.6107979	1.5	0.5612507	2.2	0.5127493	2.5	0.4994335	3.3	0.4748562
0.6	1	0.64	1.1	0.6228878	1.5	0.5731728	2.2	0.5243244	2.5	0.5108841	3.3	0.4860459

0.59	1	0.6519	1.1	0.6347959	1.5	0.5849631	2.2	0.5358121	2.5	0.5222587	3.3	0.4971792
0.58	1	0.6636	1.1	0.6465219	1.5	0.596621	2.2	0.5472116	2.5	0.5335563	3.3	0.5082555
0.57	1	0.6751	1.1	0.6580655	1.5	0.6081456	2.2	0.5585222	2.5	0.5447764	3.3	0.5192741
0.56	1	0.6864	1.1	0.6694265	1.5	0.6195362	2.2	0.5697429	2.5	0.5559179	3.3	0.5302342
0.55	1	0.6975	1.1	0.6806045	1.5	0.630792	2.2	0.5808729	2.5	0.5669802	3.3	0.5411352
0.54	1	0.7084	1.1	0.6915993	1.5	0.6419121	2.2	0.5919113	2.5	0.5779623	3.3	0.5519763
0.53	1	0.7191	1.1	0.7024105	1.5	0.6528959	2.2	0.6028572	2.5	0.5888633	3.3	0.5627568
0.52	1	0.7296	1.1	0.7130379	1.5	0.6637423	2.2	0.6137096	2.5	0.5996824	3.3	0.5734757
0.51	1	0.7399	1.1	0.7234811	1.5	0.6744506	2.2	0.6244675	2.5	0.6104186	3.3	0.5841324
0.5	1	0.75	1.1	0.7337397	1.5	0.6850197	2.2	0.63513	2.5	0.6210709	3.3	0.594726
0.49	1	0.7599	1.1	0.7438136	1.5	0.6954489	2.2	0.645696	2.5	0.6316383	3.3	0.6052555
0.48	1	0.7696	1.1	0.7537022	1.5	0.7057372	2.2	0.6561644	2.5	0.6421197	3.3	0.6157201
0.47	1	0.7791	1.1	0.7634053	1.5	0.7158835	2.2	0.6665341	2.5	0.6525142	3.3	0.6261188
0.46	1	0.7884	1.1	0.7729225	1.5	0.7258869	2.2	0.676804	2.5	0.6628207	3.3	0.6364508
0.45	1	0.7975	1.1	0.7822535	1.5	0.7357464	2.2	0.686973	2.5	0.6730378	3.3	0.6467148
0.44	1	0.8064	1.1	0.7913979	1.5	0.7454609	2.2	0.6970397	2.5	0.6831646	3.3	0.65691
0.43	1	0.8151	1.1	0.8003552	1.5	0.7550293	2.2	0.707003	2.5	0.6931997	3.3	0.6670352
0.42	1	0.8236	1.1	0.8091252	1.5	0.7644505	2.2	0.7168615	2.5	0.7031418	3.3	0.6770893
0.41	1	0.8319	1.1	0.8177073	1.5	0.7737233	2.2	0.7266138	2.5	0.7129898	3.3	0.6870711
0.4	1	0.84	1.1	0.8261013	1.5	0.7828466	2.2	0.7362587	2.5	0.7227421	3.3	0.6969794
0.39	1	0.8479	1.1	0.8343066	1.5	0.791819	2.2	0.7457945	2.5	0.7323973	3.3	0.7068129
0.38	1	0.8556	1.1	0.8423229	1.5	0.8006394	2.2	0.7552199	2.5	0.7419541	3.3	0.7165703
0.37	1	0.8631	1.1	0.8501496	1.5	0.8093064	2.2	0.7645331	2.5	0.7514107	3.3	0.7262502
0.36	1	0.8704	1.1	0.8577864	1.5	0.8178185	2.2	0.7737327	2.5	0.7607657	3.3	0.7358512
0.35	1	0.8775	1.1	0.8652327	1.5	0.8261745	2.2	0.7828168	2.5	0.7700173	3.3	0.7453716
0.34	1	0.8844	1.1	0.8724881	1.5	0.8343729	2.2	0.7917837	2.5	0.7791637	3.3	0.75481
0.33	1	0.8911	1.1	0.8795521	1.5	0.842412	2.2	0.8006315	2.5	0.7882031	3.3	0.7641646
0.32	1	0.8976	1.1	0.8864241	1.5	0.8502903	2.2	0.8093582	2.5	0.7971337	3.3	0.7734336
0.31	1	0.9039	1.1	0.8931036	1.5	0.8580062	2.2	0.8179618	2.5	0.8059533	3.3	0.7826154
0.3	1	0.91	1.1	0.89959	1.5	0.8655579	2.2	0.8264402	2.5	0.8146597	3.3	0.7917077
0.29	1	0.9159	1.1	0.9058828	1.5	0.8729436	2.2	0.8347911	2.5	0.8232509	3.3	0.8007087
0.28	1	0.9216	1.1	0.9119814	1.5	0.8801614	2.2	0.8430121	2.5	0.8317244	3.3	0.8096161
0.27	1	0.9271	1.1	0.9178851	1.5	0.8872094	2.2	0.8511007	2.5	0.8400776	3.3	0.8184276
0.26	1	0.9324	1.1	0.9235934	1.5	0.8940855	2.2	0.8590542	2.5	0.848308	3.3	0.8271408
0.25	1	0.9375	1.1	0.9291055	1.5	0.9007874	2.2	0.8668699	2.5	0.8564127	3.3	0.8357529
0.24	1	0.9424	1.1	0.9344207	1.5	0.907313	2.2	0.8745447	2.5	0.8643887	3.3	0.8442613
0.23	1	0.9471	1.1	0.9395383	1.5	0.9136598	2.2	0.8820755	2.5	0.8722329	3.3	0.8526629
0.22	1	0.9516	1.1	0.9444575	1.5	0.9198252	2.2	0.8894589	2.5	0.8799418	3.3	0.8609545
0.21	1	0.9559	1.1	0.9491776	1.5	0.9258066	2.2	0.8966912	2.5	0.8875118	3.3	0.8691327
0.2	1	0.96	1.1	0.9536977	1.5	0.931601	2.2	0.9037687	2.5	0.8949389	3.3	0.8771936
0.19	1	0.9639	1.1	0.9580168	1.5	0.9372053	2.2	0.9106871	2.5	0.9022189	3.3	0.8851333
0.18	1	0.9676	1.1	0.9621342	1.5	0.9426164	2.2	0.9174418	2.5	0.9093471	3.3	0.8929473
0.17	1	0.9711	1.1	0.9660487	1.5	0.9478307	2.2	0.9240281	2.5	0.9163187	3.3	0.9006308
0.16	1	0.9744	1.1	0.9697592	1.5	0.9528444	2.2	0.9304405	2.5	0.923128	3.3	0.9081785
0.15	1	0.9775	1.1	0.9732648	1.5	0.9576534	2.2	0.9366732	2.5	0.9297692	3.3	0.9155845

0.14	1	0.9804	1.1	0.9765641	1.5	0.9622532	2.2	0.9427198	2.5	0.9362355	3.3	0.9228424
0.13	1	0.9831	1.1	0.979656	1.5	0.966639	2.2	0.9485731	2.5	0.9425195	3.3	0.9299446
0.12	1	0.9856	1.1	0.9825388	1.5	0.9708054	2.2	0.9542251	2.5	0.9486129	3.3	0.9368832
0.11	1	0.9879	1.1	0.9852112	1.5	0.9747465	2.2	0.9596669	2.5	0.9545065	3.3	0.9436485
0.1	1	0.99	1.1	0.9876715	1.5	0.9784557	2.2	0.9648881	2.5	0.9601893	3.3	0.9502298
0.09	1	0.9919	1.1	0.9899178	1.5	0.9819253	2.2	0.969877	2.5	0.965649	3.3	0.9566143
0.08	1	0.9936	1.1	0.9919481	1.5	0.9851469	2.2	0.9746198	2.5	0.970871	3.3	0.9627871
0.07	1	0.9951	1.1	0.99376	1.5	0.9881105	2.2	0.9791002	2.5	0.9758378	3.3	0.96873
0.06	1	0.9964	1.1	0.9953508	1.5	0.9908043	2.2	0.9832981	2.5	0.9805279	3.3	0.9744204
0.05	1	0.9975	1.1	0.9967174	1.5	0.993214	2.2	0.9871887	2.5	0.9849146	3.3	0.9798294
0.04	1	0.9984	1.1	0.9978561	1.5	0.9953216	2.2	0.9907395	2.5	0.9889622	3.3	0.9849186
0.03	1	0.9991	1.1	0.9987621	1.5	0.9971035	2.2	0.993906	2.5	0.9926215	3.3	0.9896332
0.02	1	0.9996	1.1	0.9994292	1.5	0.9985264	2.2	0.9966211	2.5	0.9958174	3.3	0.9938879
0.01	1	0.9999	1.1	0.999848	1.5	0.9995358	2.2	0.9987672	2.5	0.9984151	3.3	0.9975229
0	1	1	1.1	1	1.5	1	2.2	1	2.5	1	3.3	1

8.8 DATOS DE FIGURA 4.9

ξ	χ	φ	χ	φ	χ	φ	χ	φ	χ	φ	χ	φ
0	0.1	0	0.3	0	0.5	0	0.7	0	0.9	0	1	0
0.01	0.1	0.0019	0.3	0.0059	0.5	0.0099	0.7	0.0139	0.9	0.0179	1	0.0199
0.02	0.1	0.0036	0.3	0.0116	0.5	0.0196	0.7	0.0276	0.9	0.0356	1	0.0396
0.03	0.1	0.0051	0.3	0.0171	0.5	0.0291	0.7	0.0411	0.9	0.0531	1	0.0591
0.04	0.1	0.0064	0.3	0.0224	0.5	0.0384	0.7	0.0544	0.9	0.0704	1	0.0784
0.05	0.1	0.0075	0.3	0.0275	0.5	0.0475	0.7	0.0675	0.9	0.0875	1	0.0975
0.06	0.1	0.0084	0.3	0.0324	0.5	0.0564	0.7	0.0804	0.9	0.1044	1	0.1164
0.07	0.1	0.0091	0.3	0.0371	0.5	0.0651	0.7	0.0931	0.9	0.1211	1	0.1351
0.08	0.1	0.0096	0.3	0.0416	0.5	0.0736	0.7	0.1056	0.9	0.1376	1	0.1536
0.09	0.1	0.0099	0.3	0.0459	0.5	0.0819	0.7	0.1179	0.9	0.1539	1	0.1719
0.1	0.1	0.01	0.3	0.05	0.5	0.09	0.7	0.13	0.9	0.17	1	0.19
0.11	0.1	0.01	0.3	0.0539	0.5	0.0979	0.7	0.1419	0.9	0.1859	1	0.2079
0.12	0.1	0.01	0.3	0.0576	0.5	0.1056	0.7	0.1536	0.9	0.2016	1	0.2256
0.13	0.1	0.01	0.3	0.0611	0.5	0.1131	0.7	0.1651	0.9	0.2171	1	0.2431
0.14	0.1	0.01	0.3	0.0644	0.5	0.1204	0.7	0.1764	0.9	0.2324	1	0.2604
0.15	0.1	0.01	0.3	0.0675	0.5	0.1275	0.7	0.1875	0.9	0.2475	1	0.2775
0.16	0.1	0.01	0.3	0.0704	0.5	0.1344	0.7	0.1984	0.9	0.2624	1	0.2944
0.17	0.1	0.01	0.3	0.0731	0.5	0.1411	0.7	0.2091	0.9	0.2771	1	0.3111
0.18	0.1	0.01	0.3	0.0756	0.5	0.1476	0.7	0.2196	0.9	0.2916	1	0.3276
0.19	0.1	0.01	0.3	0.0779	0.5	0.1539	0.7	0.2299	0.9	0.3059	1	0.3439
0.2	0.1	0.01	0.3	0.08	0.5	0.16	0.7	0.24	0.9	0.32	1	0.36
0.21	0.1	0.01	0.3	0.0819	0.5	0.1659	0.7	0.2499	0.9	0.3339	1	0.3759
0.22	0.1	0.01	0.3	0.0836	0.5	0.1716	0.7	0.2596	0.9	0.3476	1	0.3916
0.23	0.1	0.01	0.3	0.0851	0.5	0.1771	0.7	0.2691	0.9	0.3611	1	0.4071
0.24	0.1	0.01	0.3	0.0864	0.5	0.1824	0.7	0.2784	0.9	0.3744	1	0.4224
0.25	0.1	0.01	0.3	0.0875	0.5	0.1875	0.7	0.2875	0.9	0.3875	1	0.4375
0.26	0.1	0.01	0.3	0.0884	0.5	0.1924	0.7	0.2964	0.9	0.4004	1	0.4524
0.27	0.1	0.01	0.3	0.0891	0.5	0.1971	0.7	0.3051	0.9	0.4131	1	0.4671
0.28	0.1	0.01	0.3	0.0896	0.5	0.2016	0.7	0.3136	0.9	0.4256	1	0.4816
0.29	0.1	0.01	0.3	0.0899	0.5	0.2059	0.7	0.3219	0.9	0.4379	1	0.4959
0.3	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.21	0.7	0.33	0.9	0.45	1	0.51
0.31	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2139	0.7	0.3379	0.9	0.4619	1	0.5239
0.32	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2176	0.7	0.3456	0.9	0.4736	1	0.5376
0.33	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2211	0.7	0.3531	0.9	0.4851	1	0.5511
0.34	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2244	0.7	0.3604	0.9	0.4964	1	0.5644
0.35	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2275	0.7	0.3675	0.9	0.5075	1	0.5775
0.36	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2304	0.7	0.3744	0.9	0.5184	1	0.5904
0.37	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2331	0.7	0.3811	0.9	0.5291	1	0.6031
0.38	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2356	0.7	0.3876	0.9	0.5396	1	0.6156
0.39	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2379	0.7	0.3939	0.9	0.5499	1	0.6279

0.4	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.24	0.7	0.4	0.9	0.56	1	0.64
0.41	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2419	0.7	0.4059	0.9	0.5699	1	0.6519
0.42	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2436	0.7	0.4116	0.9	0.5796	1	0.6636
0.43	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2451	0.7	0.4171	0.9	0.5891	1	0.6751
0.44	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2464	0.7	0.4224	0.9	0.5984	1	0.6864
0.45	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2475	0.7	0.4275	0.9	0.6075	1	0.6975
0.46	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2484	0.7	0.4324	0.9	0.6164	1	0.7084
0.47	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2491	0.7	0.4371	0.9	0.6251	1	0.7191
0.48	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2496	0.7	0.4416	0.9	0.6336	1	0.7296
0.49	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2499	0.7	0.4459	0.9	0.6419	1	0.7399
0.5	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.45	0.9	0.65	1	0.75
0.51	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4539	0.9	0.6579	1	0.7599
0.52	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4576	0.9	0.6656	1	0.7696
0.53	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4611	0.9	0.6731	1	0.7791
0.54	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4644	0.9	0.6804	1	0.7884
0.55	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4675	0.9	0.6875	1	0.7975
0.56	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4704	0.9	0.6944	1	0.8064
0.57	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4731	0.9	0.7011	1	0.8151
0.58	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4756	0.9	0.7076	1	0.8236
0.59	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4779	0.9	0.7139	1	0.8319
0.6	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.48	0.9	0.72	1	0.84
0.61	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4819	0.9	0.7259	1	0.8479
0.62	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4836	0.9	0.7316	1	0.8556
0.63	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4851	0.9	0.7371	1	0.8631
0.64	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4864	0.9	0.7424	1	0.8704
0.65	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4875	0.9	0.7475	1	0.8775
0.66	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4884	0.9	0.7524	1	0.8844
0.67	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4891	0.9	0.7571	1	0.8911
0.68	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4896	0.9	0.7616	1	0.8976
0.69	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4899	0.9	0.7659	1	0.9039
0.7	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.77	1	0.91
0.71	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7739	1	0.9159
0.72	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7776	1	0.9216
0.73	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7811	1	0.9271
0.74	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7844	1	0.9324
0.75	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7875	1	0.9375
0.76	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7904	1	0.9424
0.77	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7931	1	0.9471
0.78	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7956	1	0.9516
0.79	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7979	1	0.9559
0.8	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8	1	0.96
0.81	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8019	1	0.9639
0.82	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8036	1	0.9676
0.83	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8051	1	0.9711

0.84	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8064	1	0.9744
0.85	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8075	1	0.9775
0.86	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8084	1	0.9804
0.87	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8091	1	0.9831
0.88	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8096	1	0.9856
0.89	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8099	1	0.9879
0.9	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.99
0.91	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9919
0.92	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9936
0.93	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9951
0.94	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9964
0.95	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9975
0.96	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9984
0.97	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9991
0.98	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9996
0.99	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9999
1	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	1

8.9 DATOS DE FIGURA 4.10

Ψ	χ	Φ	χ	Φ	χ	Φ	χ	Φ	χ	Φ	χ	Φ
1	0.1	0	0.3	0	0.5	0	0.7	0	0.9	0	1	0
0.99	0.1	0.0019	0.3	0.0059	0.5	0.0099	0.7	0.0139	0.9	0.0179	1	0.0199
0.98	0.1	0.0036	0.3	0.0116	0.5	0.0196	0.7	0.0276	0.9	0.0356	1	0.0396
0.97	0.1	0.0051	0.3	0.0171	0.5	0.0291	0.7	0.0411	0.9	0.0531	1	0.0591
0.96	0.1	0.0064	0.3	0.0224	0.5	0.0384	0.7	0.0544	0.9	0.0704	1	0.0784
0.95	0.1	0.0075	0.3	0.0275	0.5	0.0475	0.7	0.0675	0.9	0.0875	1	0.0975
0.94	0.1	0.0084	0.3	0.0324	0.5	0.0564	0.7	0.0804	0.9	0.1044	1	0.1164
0.93	0.1	0.0091	0.3	0.0371	0.5	0.0651	0.7	0.0931	0.9	0.1211	1	0.1351
0.92	0.1	0.0096	0.3	0.0416	0.5	0.0736	0.7	0.1056	0.9	0.1376	1	0.1536
0.91	0.1	0.0099	0.3	0.0459	0.5	0.0819	0.7	0.1179	0.9	0.1539	1	0.1719
0.9	0.1	0.01	0.3	0.05	0.5	0.09	0.7	0.13	0.9	0.17	1	0.19
0.89	0.1	0.01	0.3	0.0539	0.5	0.0979	0.7	0.1419	0.9	0.1859	1	0.2079
0.88	0.1	0.01	0.3	0.0576	0.5	0.1056	0.7	0.1536	0.9	0.2016	1	0.2256
0.87	0.1	0.01	0.3	0.0611	0.5	0.1131	0.7	0.1651	0.9	0.2171	1	0.2431
0.86	0.1	0.01	0.3	0.0644	0.5	0.1204	0.7	0.1764	0.9	0.2324	1	0.2604
0.85	0.1	0.01	0.3	0.0675	0.5	0.1275	0.7	0.1875	0.9	0.2475	1	0.2775
0.84	0.1	0.01	0.3	0.0704	0.5	0.1344	0.7	0.1984	0.9	0.2624	1	0.2944
0.83	0.1	0.01	0.3	0.0731	0.5	0.1411	0.7	0.2091	0.9	0.2771	1	0.3111
0.82	0.1	0.01	0.3	0.0756	0.5	0.1476	0.7	0.2196	0.9	0.2916	1	0.3276
0.81	0.1	0.01	0.3	0.0779	0.5	0.1539	0.7	0.2299	0.9	0.3059	1	0.3439
0.8	0.1	0.01	0.3	0.08	0.5	0.16	0.7	0.24	0.9	0.32	1	0.36
0.79	0.1	0.01	0.3	0.0819	0.5	0.1659	0.7	0.2499	0.9	0.3339	1	0.3759
0.78	0.1	0.01	0.3	0.0836	0.5	0.1716	0.7	0.2596	0.9	0.3476	1	0.3916
0.77	0.1	0.01	0.3	0.0851	0.5	0.1771	0.7	0.2691	0.9	0.3611	1	0.4071
0.76	0.1	0.01	0.3	0.0864	0.5	0.1824	0.7	0.2784	0.9	0.3744	1	0.4224
0.75	0.1	0.01	0.3	0.0875	0.5	0.1875	0.7	0.2875	0.9	0.3875	1	0.4375
0.74	0.1	0.01	0.3	0.0884	0.5	0.1924	0.7	0.2964	0.9	0.4004	1	0.4524
0.73	0.1	0.01	0.3	0.0891	0.5	0.1971	0.7	0.3051	0.9	0.4131	1	0.4671
0.72	0.1	0.01	0.3	0.0896	0.5	0.2016	0.7	0.3136	0.9	0.4256	1	0.4816
0.71	0.1	0.01	0.3	0.0899	0.5	0.2059	0.7	0.3219	0.9	0.4379	1	0.4959
0.7	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.21	0.7	0.33	0.9	0.45	1	0.51
0.69	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2139	0.7	0.3379	0.9	0.4619	1	0.5239
0.68	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2176	0.7	0.3456	0.9	0.4736	1	0.5376
0.67	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2211	0.7	0.3531	0.9	0.4851	1	0.5511
0.66	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2244	0.7	0.3604	0.9	0.4964	1	0.5644
0.65	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2275	0.7	0.3675	0.9	0.5075	1	0.5775
0.64	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2304	0.7	0.3744	0.9	0.5184	1	0.5904

0.63	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2331	0.7	0.3811	0.9	0.5291	1	0.6031
0.62	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2356	0.7	0.3876	0.9	0.5396	1	0.6156
0.61	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2379	0.7	0.3939	0.9	0.5499	1	0.6279
0.6	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.24	0.7	0.4	0.9	0.56	1	0.64
0.59	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2419	0.7	0.4059	0.9	0.5699	1	0.6519
0.58	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2436	0.7	0.4116	0.9	0.5796	1	0.6636
0.57	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2451	0.7	0.4171	0.9	0.5891	1	0.6751
0.56	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2464	0.7	0.4224	0.9	0.5984	1	0.6864
0.55	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2475	0.7	0.4275	0.9	0.6075	1	0.6975
0.54	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2484	0.7	0.4324	0.9	0.6164	1	0.7084
0.53	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2491	0.7	0.4371	0.9	0.6251	1	0.7191
0.52	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2496	0.7	0.4416	0.9	0.6336	1	0.7296
0.51	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.2499	0.7	0.4459	0.9	0.6419	1	0.7399
0.5	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.45	0.9	0.65	1	0.75
0.49	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4539	0.9	0.6579	1	0.7599
0.48	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4576	0.9	0.6656	1	0.7696
0.47	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4611	0.9	0.6731	1	0.7791
0.46	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4644	0.9	0.6804	1	0.7884
0.45	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4675	0.9	0.6875	1	0.7975
0.44	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4704	0.9	0.6944	1	0.8064
0.43	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4731	0.9	0.7011	1	0.8151
0.42	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4756	0.9	0.7076	1	0.8236
0.41	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4779	0.9	0.7139	1	0.8319
0.4	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.48	0.9	0.72	1	0.84
0.39	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4819	0.9	0.7259	1	0.8479
0.38	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4836	0.9	0.7316	1	0.8556
0.37	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4851	0.9	0.7371	1	0.8631
0.36	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4864	0.9	0.7424	1	0.8704
0.35	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4875	0.9	0.7475	1	0.8775
0.34	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4884	0.9	0.7524	1	0.8844
0.33	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4891	0.9	0.7571	1	0.8911
0.32	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4896	0.9	0.7616	1	0.8976
0.31	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.4899	0.9	0.7659	1	0.9039
0.3	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.77	1	0.91
0.29	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7739	1	0.9159
0.28	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7776	1	0.9216
0.27	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7811	1	0.9271
0.26	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7844	1	0.9324
0.25	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7875	1	0.9375
0.24	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7904	1	0.9424
0.23	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7931	1	0.9471

0.22	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7956	1	0.9516
0.21	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.7979	1	0.9559
0.2	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8	1	0.96
0.19	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8019	1	0.9639
0.18	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8036	1	0.9676
0.17	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8051	1	0.9711
0.16	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8064	1	0.9744
0.15	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8075	1	0.9775
0.14	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8084	1	0.9804
0.13	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8091	1	0.9831
0.12	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8096	1	0.9856
0.11	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.8099	1	0.9879
0.1	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.99
0.09	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9919
0.08	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9936
0.07	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9951
0.06	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9964
0.05	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9975
0.04	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9984
0.03	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9991
0.02	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9996
0.01	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	0.9999
0	0.1	0.01	0.3	0.09	0.5	0.25	0.7	0.49	0.9	0.81	1	1

9 ANEXOS

9.1 ECUACIONES (COORDENADAS CARTESIANAS)

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = 0$$

Ecuaciones de movimiento

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z$$