



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

La integral estocástica con respecto al  
movimiento browniano fraccionario

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE ACTUARIA

PRESENTA:

**CLAUDIA CRISTINA REYES MONTES DE  
OCA**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. MIGUEL ÁNGEL GARCÍA ÁLVAREZ**



Ciudad Universitaria, Junio 2016

Cd. Mx



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno:

Reyes

Montes de Oca

Claudia Cristina

65 46 32 22

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias

Actuaría

305079974

2. Datos del tutor:

Dr.

Miguel Ángel

García

Álvarez

3. Datos del propietario 1:

M. en C.

Julio César

Cedillo

Sánchez

4. Datos del propietario 2:

Dr.

Juan

Ruiz de Chávez

Somoza

5. Datos del suplente 1:

M. en C.

Guillermo

Garro

Gómez

6. Datos del suplente 2:

Act.

Viviana

Díaz

Magallanes

7. Datos del trabajo escrito:

La integral estocástica con respecto al movimiento browniano fraccionario

77 p.

2016



---

# Índice

---

Índice	I
Introducción	III
<b>1 Introducción al Movimiento Browniano Fraccionario</b>	<b>1</b>
1.1. Vectores aleatorios gaussianos . . . . .	1
1.2. Polinomios de Hermite . . . . .	9
1.3. El teorema de extensión de Kolmogorov y el criterio de continuidad de Kolmogorov	15
1.3.1. El teorema de extensión de Kolmogorov . . . . .	18
1.3.2. El criterio de continuidad de Kolmogorov . . . . .	19
1.4. Procesos Gaussianos . . . . .	20
1.5. El ejemplo del movimiento browniano . . . . .	22
1.6. Existencia del movimiento browniano fraccionario . . . . .	26
<b>2 Propiedades del Movimiento Browniano Fraccionario</b>	<b>31</b>
2.1. Propiedades básicas . . . . .	32
2.2. Trayectorias del movimiento browniano fraccionario . . . . .	35
2.3. No diferenciabilidad de las trayectorias del movimiento browniano fraccionario . . .	37
2.4. Pérdida de la propiedad de semimartingala . . . . .	39
2.4.1. La p-variación del movimiento browniano fraccionario . . . . .	40
2.4.2. El movimiento browniano fraccionario no es semimartingala . . . . .	43
2.5. Pérdida de la propiedad de Markov . . . . .	44
2.6. Movimiento browniano fraccionario de acuerdo a Mandelbrot y Van Ness . . . . .	46

<b>3 Integración con respecto al movimiento browniano fraccionario</b>	<b>51</b>
3.1. Integral de Young . . . . .	52
3.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas guiadas por trayectorias hölderianas . . . . .	57
3.2.1. Caso multidimensional . . . . .	62
3.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas guiadas por movimientos brownianos fraccionarios . . . . .	63
3.3.1. Cálculo de Malliavin con respecto al movimiento browniano fraccionario . . . . .	64
3.3.2. Existencia de la densidad . . . . .	66
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>
<b>A Simulación del movimiento browniano fraccionario</b>	<b>73</b>
<b>B Filtraciones y martingalas</b>	<b>75</b>
B.1. Filtraciones . . . . .	75
B.2. Martingalas, tiempos de paro y semimartingalas . . . . .	76

---

# Introducción

---

En la naturaleza existe el movimiento browniano, su nombre se debe al biólogo Robert Brown, quien en el año de 1827, observó como las partículas de polen se movían de manera errática en el agua, en todas direcciones, sin razón aparente.

Inicialmente, el primer estudio matemático del movimiento browniano fue iniciado por Louis Bachelier en su tesis doctoral “*Théorie de la spéculation*” en el año 1900, y por Albert Einstein en el campo de la física en el año 1905. Pero fue el matemático Norbert Wiener, quien construyó el primer modelo matemático y lo estudió de manera rigurosa, ya que lo introdujo como un proceso estocástico en el año de 1923, a menudo también es llamado *proceso de Wiener* en la teoría de probabilidad.

Desde entonces, el movimiento browniano ha sido usado en diferentes áreas del conocimiento científico, por ejemplo, en física, biología y mecánica cuántica, ya que permite modelar y analizar sistemas con perturbaciones aleatorias.

A grandes rasgos, el movimiento browniano es un proceso estocástico gaussiano con incrementos independientes y estacionarios, además cumple con la importante propiedad de ser una martingala. Una de las razones por la cual es importante la propiedad de martingala es que, como lo hizo ver Doob [8], ésta es una de las propiedades que permite desarrollar una teoría de integración con respecto al movimiento browniano siguiendo el método del matemático japonés Kiyoshi Itô en el año de 1944 en [13].

El movimiento browniano fraccionario se introdujo por primera vez en el año de 1940, por el matemático soviético Andrei Nikolaevich Kolmogorov, quien estaba estudiando curvas espirales sobre espacios de Hilbert [15], de hecho el lo nombró *espiral de Wiener*. Pero fue Benoît Mandelbrot quien reconoció la importancia de este proceso aleatorio, y en un artículo publicado en 1968 junto con John Van Ness [22], se dieron numerosas e importantes propiedades para este proceso. Fue entonces, cuando se le dio el nombre de *movimiento browniano fraccionario*. Pero, podemos

hacernos la siguiente pregunta, ¿por qué el término *fraccionario*?, esto se debe a que el movimiento browniano fraccionario se puede representar como una integral con respecto al movimiento browniano estándar, pero dicha representación envuelve un índice fraccionario  $H$  que pertenece al intervalo  $(0, 1)$ . Fue dada por Mandelbrot y Van Ness tomando en cuenta algunos trabajos de Harold Edwin Hurst [12], para el índice fraccionario que se utiliza en estas integrales fraccionarias, este índice recibe el nombre de *índice de Hurst*.

El movimiento browniano fraccionario tiene un papel importante en muchos campos, como meteorología, economía, telecomunicaciones e hidrología, esta última, se debe a que Hurst observó que las aguas del río Nilo tenían un comportamiento cíclico consistente, el cual durante siete años consecutivos el nivel del agua aumentaba y era mayor que en los siguientes siete años, lo cual creaba a su vez un ciclo de siete años de abundancia y siete años de escasez. Hasta ese momento se pensaba que no había dependencia del comportamiento del aumento del agua entre un año y otro.

El movimiento browniano fraccionario es un proceso estocástico gaussiano, básicamente sólo depende del índice de Hurst, el cual es constante y  $H \in (0, 1)$ , además tiene incrementos estacionarios y es autosimilar, pero una de las principales diferencias con el movimiento browniano, es que sus incrementos son dependientes, esta dependencia quiere decir que existe un patrón de aumento en los tiempos anteriores. Además, el movimiento browniano fraccionario no cumple con la propiedad de ser una martingala, por lo cual no es posible construir una integral en el sentido de Itô. Pero, gracias a que existe cierta regularidad en las trayectorias de este proceso, es posible construir una integral con respecto al movimiento browniano fraccionario, mediante la integral de Young [32], la cual es una generalización de la integral de Riemann-Stieljes pero en el sentido de trayectorias hólдерianas. Cabe notar que, podemos utilizar esta integral, cuando el índice de Hurst es mayor a  $1/2$ , ya que en caso contrario, las trayectorias no son hólдерianas, pero existe una manera de hacerlo, mediante la teoría de trayectorias rugosas dada por Terry Lyons en [21].

En el capítulo 1, introduciremos los preliminares necesarios para demostrar la existencia, como modelo matemático, del movimiento browniano fraccionario. Primero se define y se dan propiedades de las variables aleatorias gaussianas y los vectores aleatorios gaussianos, para después continuar con la definición de proceso estocástico gaussiano. Ya que la manera usual de demostrar está existencia es utilizando el teorema de extensión de Kolmogorov, en particular se demuestra la existencia de procesos estocásticos gaussianos. Para esto es necesario y suficiente demostrar que la función de covarianza del movimiento browniano fraccionario es definida positiva y simétrica.

En el capítulo 2, se dan las propiedades más importantes del movimiento browniano fraccio-

nario, tales como la autosimilitud y los incrementos estacionarios. En lo que sigue se estudia el comportamiento de sus trayectorias y se demuestra que esas trayectorias no son diferenciables. Se probará que se pierde la propiedad de semimartingala y la propiedad de Markov, y al finalizar el capítulo, se define el movimiento browniano fraccionario de la manera como lo hicieron Mandelbrot y Van Ness.

En el capítulo 3, definiremos una integral con respecto al movimiento browniano fraccionario mediante la integral de Young cuando el índice de Hurst es mayor a  $1/2$ . Además, se dan algunas propiedades para esta integral, como la regla de la cadena. Al finalizar el capítulo, se aplicará la integral de Young para dar soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas guiadas por trayectorias hölderianas y guiadas por movimientos brownianos fraccionarios, esta última emplea el cálculo de Malliavin, el cual solo se introducirá de manera directa y sin demostración alguna.

El objetivo de este trabajo es introducir una teoría de integración con respecto a un proceso estocástico conocido como movimiento browniano fraccionario, para tal hecho, se debe introducir este proceso y estudiar las propiedades que tiene. Estuvo basada principalmente en los tres primeros capítulos del libro de Ivan Nourdin, *Selected aspects of fractional brownian motion* [26], en la parte de variables aleatorias y vectores aleatorios gaussianos en las notas de Zhan Shi, *Probabilités de base* [31] y finalmente en la parte de la integral de Young en las notas de Fabrice Baudoin, *Stochastic differential equations driven by fractional brownian motions* [5].

Cabe mencionar que el presente trabajo está dirigido a estudiantes de licenciatura que hayan llevado cursos de teoría de la medida y cálculo estocástico. Así como a estudiantes de maestría que quieran introducirse en el tema.



# Capítulo 1

---

## Introducción al Movimiento Browniano Fraccionario

---

El objetivo principal de este capítulo es demostrar la existencia del movimiento browniano fraccionario. Para tal hecho, se introducirá de manera breve, una teoría sobre procesos estocásticos, y en particular nos enfocaremos en procesos gaussianos.

En primer lugar, se darán las herramientas para definir una variable aleatoria que sigue una ley gaussiana, para así proseguir con vectores aleatorios gaussianos. Se introducirán los polinomios de Hermite, los cuales tienen relación con las variables aleatorias gaussianas, los cuales serán de utilidad en el capítulo subsecuente. Además se exhibirán algunos teoremas de existencia para procesos estocásticos gaussianos, en particular se da un ejemplo muy importante, el cual es la existencia del movimiento browniano. Al finalizar se demostrará que el movimiento browniano fraccionario existe.

### 1.1. Vectores aleatorios gaussianos

En esta sección comenzaremos con los aspectos más importantes sobre variables aleatorias, y en particular, vamos a definir una variable aleatoria gaussiana, para después definir vectores aleatorios gaussianos, ya que a lo largo de este capítulo se trabajará con estos conceptos. Para más detalles sobre vectores aleatorios gaussianos ver [19, Capítulo 1] o [31, Capítulo 12].

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad, y sea  $E$  un espacio dotado de una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{E}$ . Llamamos *variable aleatoria* con valores sobre  $E$  a toda función medible  $X : \Omega \rightarrow E$ .

A menudo tomamos  $E = \mathbb{R}$  dotada de la  $\sigma$ -álgebra de Borel, en este caso estaremos hablando de una variable aleatoria real.

**Definición 1.1.** *La ley de una variable aleatoria  $X$  (también llamada distribución) es la medida imagen  $\mathbb{P}$  para  $X$ . Esta es una medida de probabilidad sobre  $(E, \mathcal{E})$ , y se define por*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}), \quad A \in \mathcal{E}.$$

Supongamos que  $X$  es una variable aleatoria real. Se llama *función de distribución de la variable aleatoria  $X$*  a la función  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si la medida de probabilidad  $\mathbb{P}_X$  es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, si  $\mathbb{P}_X(dx) = f_X(x) dx$  (donde  $dx$  es la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}$ ), para alguna función  $f_X$  integrable sobre  $\mathbb{R}$ , decimos que la variable aleatoria  $X$  es absolutamente continua. En este caso, la función de distribución de  $X$  está dada por:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Definición 1.2 (Medida de Gauss).** *Una medida de Gauss sobre  $\mathbb{R}$ , está definida como*

$$\gamma(dx) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

donde  $m, \sigma \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ .

En el caso cuando  $m = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ , diremos que  $\gamma(dx)$  es una medida de Gauss estándar.

**Definición 1.3.** *Decimos que una variable aleatoria  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sigue una ley gaussiana con parámetros  $m \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 > 0$  (en este caso usaremos la notación  $N \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ) si su ley es una medida de Gauss sobre  $\mathbb{R}$ . En el caso en que  $m = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ , decimos que  $N$  sigue una ley gaussiana estándar, y se denota por  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .*

Recordemos que si una variable aleatoria  $X$  es integrable con respecto a la medida de probabilidad  $\mathbb{P}$ , es decir,  $\int_{\Omega} |X| d\mathbb{P} < \infty$ , entonces se define la *esperanza de  $X$*  como:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int X d\mathbb{P}.$$

Un resultado de teoría de la medida [4, Teorema 4.10.2], afirma que la medida imagen  $\mathbb{P}_X$ , es la única medida sobre  $\mathbb{R}$  tal que para toda función medible y acotada  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se tiene

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathbb{P}_X(dx).$$

Si  $X$  es una variable aleatoria con esperanza finita, entonces se define la *varianza de  $X$*  como:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Ahora, sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias con esperanza finita, y supongamos que la esperanza de  $XY$  es finita. Entonces, definimos la *covarianza de  $X$  y  $Y$*  como:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

**Definición 1.4.** *La función característica (o transformada de Fourier) de una variable aleatoria  $X$  está dada por la función  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}], \quad t \in \mathbb{R}.$$

En el caso en que tengamos una variable aleatoria  $N$  con ley gaussiana, su función característica es (ver [10, Capítulo 5, §7]):

$$\varphi_N(t) = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Recordemos que la ley de una variable aleatoria está determinada por su función característica [18, Teorema 8.2.4], es decir, si existe una variable aleatoria cuya función característica coincide con la de la variable aleatoria  $N$ , entonces ésta sigue una ley gaussiana.

A continuación se darán algunas propiedades sobre variables aleatorias gaussianas. El lector puede consultar las referencias [9], [19] y [31] para profundizar estos conceptos.

**Proposición 1.5.** *Se tienen las siguientes propiedades para variables aleatorias que siguen una ley gaussiana:*

1. Si  $N \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , entonces la función generadora de momentos de  $N$  es:

$$M_N(t) := \mathbb{E}[e^{tN}] = e^{tm} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde se cumple que  $\mathbb{E}[e^{tN}] < \infty$ .

2. Sean  $N_1, N_2$  variables aleatorias independientes, con  $N_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$  y  $N_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ , entonces

$$N_1 + N_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

3. Si  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $N \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , entonces

$$aN + b \sim \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2).$$

*Demostración.* 1. Si  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , entonces para  $t \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{y^2-2ty}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-t)^2}{2}} dy = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Ahora, si  $N \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , entonces  $Y = \frac{N-m}{\sigma^2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Entonces, para  $t \in \mathbb{R}$

$$M_N(t) = \mathbb{E}[e^{tN}] = \mathbb{E}[e^{t(m+\sigma^2Y)}] = e^{tm} \mathbb{E}[e^{t\sigma^2Y}] = e^{tm} M_Y(t\sigma^2) = e^{tm} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

2. Si  $N_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$  y  $N_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ , sean  $\varphi_{N_1}$  y  $\varphi_{N_2}$  las funciones características de  $N_1$  y  $N_2$ , es decir,

$$\varphi_{N_1}(t) = e^{itm_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \quad \text{y} \quad \varphi_{N_2}(t) = e^{itm_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}},$$

como  $N_1$  y  $N_2$  son variables aleatorias independientes, se tiene

$$\varphi_{N_1}(t)\varphi_{N_2}(t) = e^{it(m_1+m_2) - t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)/2} = \varphi_{N_1+N_2}(t),$$

y como la función característica caracteriza la ley de la variable aleatoria, entonces podemos concluir que

$$N_1 + N_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

3. Si  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , entonces  $Y = aN + b$  es una variable aleatoria gaussiana, y tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[aN + b] = a\mathbb{E}[N] + b = am + b, \\ \text{Var}(Y) &= \text{Var}(aN + b) = a^2 \text{Var}(N) = a^2\sigma^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $aN + b \sim \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$ . ■

El siguiente resultado caracteriza a los momentos de una variable aleatoria que sigue una ley gaussiana estándar.

**Proposición 1.6.** Si  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , entonces los momentos de la variable aleatoria  $N$  son:

$$\mathbb{E}[N^n] = \begin{cases} \frac{(2n)!}{2^n n!} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración.* Primero, notemos que se tiene lo siguiente debido al teorema de convergencia dominada,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{itN}] &= \mathbb{E}\left[1 + (itN) + \frac{(itN)^2}{2!} + \frac{(itN)^3}{3!} + \frac{(itN)^4}{4!} + \dots + \frac{(itN)^n}{n!} + \dots\right] \\ &= 1 + i\mathbb{E}[N]t + \frac{i^2\mathbb{E}[N^2]}{2!}t^2 + \frac{i^3\mathbb{E}[N^3]}{3!}t^3 + \frac{i^4\mathbb{E}[N^4]}{4!}t^4 + \dots + \frac{i^n\mathbb{E}[N^n]}{n!}t^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\mathbb{E}[N^n]}{n!}t^n. \end{aligned}$$

Como la función característica de una variable aleatoria normal estándar es  $\varphi_N(t) = e^{-t^2/2}$ . Entonces, veamos cuál es su serie de potencias:

$$\begin{aligned} e^{-t^2/2} &= 1 + \left(-\frac{t^2}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^3}{3!} + \dots + \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 - \frac{t^2}{1!2^1} + \frac{t^4}{2!2^2} - \frac{t^6}{3!2^3} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!2^n} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} t^{2n}. \end{aligned}$$

Ahora, identificamos los coeficientes de  $\mathbb{E}[e^{itN}]$  y de  $e^{-t^2/2}$ , y llegamos a que

$$\mathbb{E}[N^n] = \begin{cases} \frac{(2n)!}{2^n n!} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

■

Ahora consideraremos variables aleatorias con valores sobre  $\mathbb{R}^d$ , es decir, vectores aleatorios. A los elementos de  $\mathbb{R}^d$  los tomaremos como vectores columna.

**Definición 1.7.** Sea  $N = (N_1, \dots, N_d)$  un vector aleatorio de dimensión  $d$ . Se dice que  $N$  es un vector aleatorio gaussiano de dimensión  $d$ , si toda combinación lineal de sus coordenadas sigue una

ley gaussiana para  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ , es decir,

$$t \cdot N = \sum_{k=1}^d t_k N_k .$$

Si  $N = (N_1, \dots, N_d)$  es un vector aleatorio gaussiano, entonces cada coordenada es una variable aleatoria gaussiana; sin embargo, el recíproco es falso. En efecto, sean  $Y$  y  $Z$  dos variables aleatorias independientes tales que  $Y$  sigue una ley gaussiana estándar y tal que  $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = 1/2$ . Nótese que  $W = ZY$  es una variable aleatoria gaussiana. Sin embargo,  $(Y, W)$  no es un vector aleatorio gaussiano ya que  $Y + W$  no es una variable aleatoria gaussiana:  $\mathbb{P}(Y + W = 0) = 1/2$ .

**Definición 1.8.** La función característica de un vector aleatorio gaussiano  $N$  es la función  $\varphi_N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_N(t) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ i \sum_{k=1}^d t_k N_k \right\} \right] \\ &= \exp \left( i \sum_{k=1}^d t_k m_k - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d t_k t_l C_{k,l} \right), \end{aligned}$$

para  $t \in \mathbb{R}^d$  y donde  $C = (C_{k,l})_{d \times d}$  es la matriz de covarianzas del vector aleatorio  $N$ , para  $k, l = 1, \dots, d$ .

En consecuencia la ley de un vector aleatorio gaussiano está determinada por su media y su matriz de covarianzas. Se denotara como  $\mathcal{N}(m, C)$ , donde  $m = (m_1, \dots, m_d)$  es el vector de medias con  $m_k = \mathbb{E}[N_k]$  para  $k = 1, \dots, d$ .

**Proposición 1.9.** La matriz de covarianzas  $C$  de un vector aleatorio gaussiano  $N$  es tal que, para toda  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k,l=1}^d t_k t_l C_{k,l} \geq 0,$$

es decir,  $C$  es una matriz definida positiva.

*Demostración.* Por definición de la matriz  $C$  y utilizando la definición de covarianza, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^d t_k t_l C_{k,l} &= \sum_{k,l=1}^d t_k t_l \text{Cov}(N_k, N_l) \\ &= \sum_{k,l=1}^d t_k t_l \mathbb{E} [(N_k - \mathbb{E}[N_k]) (N_l - \mathbb{E}[N_l])], \end{aligned}$$

como la suma anterior es finita,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sum_{k,l=1}^d t_k t_l (N_k - \mathbb{E}[N_k]) (N_l - \mathbb{E}[N_l]) \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k,l=1}^d t_k (N_k - \mathbb{E}[N_k]) \right)^2 \right] \\ &= \text{Var} \left( \sum_{k=1}^d t_k N_k \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $C$  es definida positiva. ■

En el siguiente resultado, se muestra cómo construir un vector aleatorio gaussiano con vector de medias y matriz de covarianzas dados.

**Teorema 1.10.** *Sea  $m \in \mathbb{R}^d$ , y sea  $C$  una matriz simétrica y definida positiva de tamaño  $d \times d$ . Entonces existe un vector gaussiano de dimensión  $d$ , con media  $m$  y matriz de covarianza  $C$ .*

*Demostración.* Consideremos  $d$  variables aleatorias  $Y_1, \dots, Y_d$ , las cuales son gaussianas estándar e independientes, es decir, tenemos el siguiente vector aleatorio gaussiano  $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$  y sea  $m = (m_1, \dots, m_d)$  un vector de medias.

Por otra parte, como toda matriz definida positiva admite raíz cuadrada, entonces podemos encontrar una matriz simétrica  $D = (D_{k,l})_{d \times d}$  tal que  $D^2 = C$ . Por lo que se tiene la construcción  $N = DY + m$ :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \cdots & D_{1,d} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \cdots & D_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{d,1} & D_{d,2} & \cdots & D_{d,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix}.$$

Entonces  $N$  es un vector aleatorio gaussiano de media  $m$  (debido a que suma de variables aleatorias gaussianas independientes es gaussiana, y la combinación lineal de componentes de  $DY + m$ , es una combinación lineal de  $Y_1, \dots, Y_d$ ).

Para determinar a la matriz de covarianzas, hay que notar que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N_k, N_l) &= \mathbb{E} [(N_k - m_k) (N_l - m_l)] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^d D_{k,i} Y_i \right) \left( \sum_{j=1}^d D_{l,j} Y_j \right) \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^d D_{k,i} D_{l,j} \mathbb{E}[Y_i Y_j]. \end{aligned}$$

donde  $\mathbb{E}[Y_i Y_j] = 1$  si  $i = j$ , y  $\mathbb{E}[Y_i Y_j] = 0$  si  $i \neq j$ . Lo anterior nos lleva a que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N_k, N_l) &= \sum_{i=1}^d D_{k,i} D_{l,i} \\ &= (DD^t)_{k,l}, \end{aligned}$$

donde  $D^t$  es la transpuesta de  $D$ . Por lo que, la matriz de covarianzas de  $N$  es  $DD^t$  y como la matriz  $D$  es simétrica, se tiene  $DD^t = D^2 = C$ . De este modo, se ha probado que  $N$  es un vector aleatorio gaussiano de media  $m$  y matriz de covarianza  $C$ . ■

**Teorema 1.11 (Densidad gaussiana de dimensión  $d$ ).** *Sea  $m$  un vector de  $\mathbb{R}^d$  y sea  $C$  una matriz simétrica y definida positiva de tamaño  $d \times d$ . Si  $\det(C) \neq 0$  y  $C^{-1} = (C_{k,l}^{-1})_{d \times d}$  denota a la matriz inversa de  $C$ , entonces la ley gaussiana de dimensión  $d$ , denotada por  $\mathcal{N}(m, C)$ , es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}^d$ , la cual tiene por densidad:*

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det(C)}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d C_{k,l}^{-1} (x_k - m_k)(x_l - m_l) \right).$$

**Proposición 1.12.** *Sea  $N = (N_1, \dots, N_d)$  un vector aleatorio gaussiano. Para que las variables aleatorias  $N_1, \dots, N_d$  sean independientes es necesario y suficiente que la matriz de covarianzas de  $N$  sea diagonal.*

*Demostración.* Si las variables aleatorias  $N_1, \dots, N_d$  son independientes, se sigue que  $\text{Cov}(N_k, N_l) = 0$  para toda  $k \neq l$ , es decir, la matriz de covarianzas es diagonal.

Para el recíproco, utilizaremos la construcción utilizada en la demostración del Teorema 1.10, es decir,  $N = DY + m$ . Si la matriz  $C$  es diagonal, entonces la matriz  $D$  también es diagonal:  $D = \text{diag}(D_{11}, \dots, D_{dd})$ . Por lo tanto  $N_k = D_{kk}Y_k + m_k$  para  $k = 1, \dots, d$ . Como  $Y_1, \dots, Y_d$  son variables aleatorias gaussianas independientes, entonces podemos deducir la independencia de las variables  $N_1, \dots, N_d$ . ■

La prueba de la proposición anterior nos muestra que si  $(N_1, \dots, N_d, Y_1, \dots, Y_n)$  es un vector gaussiano, entonces  $(N_1, \dots, N_d)$  y  $(Y_1, \dots, Y_n)$  son independientes si y sólo si  $\text{Cov}(N_k, Y_l) = 0$ , para  $k = 1, \dots, d$  y  $l = 1, \dots, n$ .

## 1.2. Polinomios de Hermite

En esta sección vamos a introducir una familia de polinomios, llamados *polinomios de Hermite*. Son nombrados así en honor a Charles Hermite. Estos polinomios nos serán de gran utilidad en la sección 2.4.

En lo que sigue denotaremos por  $\{\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}), k \geq 0\}$  al espacio de las funciones continuas que son  $k$  veces diferenciables y donde la  $k$ -ésima derivada es continua, les llamaremos funciones de clase  $\mathcal{C}^k$ .

**Definición 1.13.** Sea  $\delta : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^0$  el operador lineal tal que

$$\delta g(x) = xg(x) - g'(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

para toda función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ .

**Nota 1.14.** La esperanza con respecto a la medida de Gauss  $\gamma(dx)$  forma un producto interior sobre el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx))$ , definido por

$$L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx)) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible tal que } \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \gamma(dx) < \infty \right\}.$$

En este sentido se tiene la siguiente dualidad.

**Proposición 1.15.** Sea  $N$  una variable aleatoria gaussiana estándar, es decir,  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , y sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $\mathcal{C}^1$ . Entonces se tiene la siguiente igualdad

$$\mathbb{E}[f'(N)g(N)] = \mathbb{E}[f(N)\delta g(N)].$$

*Demostración.* Por un lado tenemos,

$$\mathbb{E}[f'(N)g(N)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

integrando por partes y utilizando la definición del operador  $\delta$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx &= f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( -xg(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + g'(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (xg(x) - g'(x)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= \mathbb{E}[f(N)\delta g(N)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathbb{E}[f'(N)g(N)] = \mathbb{E}[f(N)\delta g(N)]$ . ■

**Definición 1.16.** Para cualquier entero  $k \geq 1$  definimos el polinomio de Hermite de orden  $k$  como sigue:

$$H_k(x) := \delta^k \mathbf{1}(x) \in \mathbb{R}[x],$$

en donde  $\mathbf{1}$  indica la función constante igual a uno,  $\mathbb{R}[x]$  denota al anillo de polinomios con coeficientes reales en la indeterminada  $x$ , y  $\delta^k$  es el operador lineal que se define componiendo a  $\delta$  consigo mismo  $k$  veces.

Por convención, definimos  $H_{-1}(x) = 0$  y  $H_0(x) = 1$ .

Los primeros tres polinomios de Hermite son:

- $H_1(x) = \delta \mathbf{1}(x) = x$ ;
- $H_2(x) = \delta^2 \mathbf{1}(x) = \delta(\delta \mathbf{1}(x)) = \delta x = x^2 - 1$ ;
- $H_3(x) = \delta^3 \mathbf{1}(x) = \delta(x^2 - 1) = x^3 - x - 2x = x^3 - 3x$ .

A continuación se dará un resultado sobre los polinomios de Hermite, el cual será de vital importancia en resultados posteriores.

**Proposición 1.17.** Si  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , para toda  $k \geq 1$  se tiene

$$\mathbb{E}[H_k(N)] = 0.$$

*Demostración.* Usaremos la siguiente expresión explícita para los polinomios de Hermite, dada en [2, Capítulo 22, §3]. Para cualquier  $k > 0$ ,

$$H_k(x) = k! \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{m!(k-2m)!2^m} x^{k-2m}, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde  $\lfloor \bullet \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq \bullet\}$  denota a la función piso.

Entonces,

$$\mathbb{E}[H_k(N)] = k! \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{m!(k-2m)!} \frac{\mathbb{E}[N^{k-2m}]}{2^m}.$$

Por la proposición 1.6, si  $k = 2j + 1$  para  $j \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\mathbb{E}[H_{2j+1}(N)] = 0$ . Ahora, para  $k = 2j$ , se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H_{2j}(N)] &= (2j)! \sum_{m=0}^j \frac{(-1)^m}{m!(2j-2m)!} \frac{\mathbb{E}[N^{2j-2m}]}{2^m} \\
&= (2j)! \sum_{m=0}^j \frac{(-1)^m}{m!(2j-2m)!} \frac{(2j-2m)!}{2^m(j-m)!2^{j-m}} \\
&= (2j)! \sum_{m=0}^j \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(j-m)!2^j} \\
&= \frac{(2j)!}{2^j j!} \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (-1)^m \\
&= \frac{(2j)!}{2^j j!} (1 + (-1))^j = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathbb{E}[H_k(N)] = 0$  para toda  $k \geq 1$ . ■

**Proposición 1.18.** *La familia  $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de polinomios de Hermite satisface las siguientes propiedades:*

1. Para toda  $k \in \mathbb{N}$ , se satisfacen:

- $H'_k(x) = kH_{k-1}(x)$ ,
- $H_{k+1}(x) = xH_k(x) - kH_{k-1}(x)$ .

2. Los polinomios de Hermite  $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$  son ortogonales sobre el espacio  $L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx))$ , es decir,

$$\mathbb{E}[H_k(N)H_l(N)] = \begin{cases} k! & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

donde  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

3. La familia  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{k!}} H_k, k \geq 0 \right\}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx))$ .

4. Sea  $(U, V)$  un vector aleatorio gaussiano con  $U, V \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Entonces para toda  $k, l \in \mathbb{N}$ , se tiene

$$\mathbb{E}[H_k(U)H_l(V)] = \begin{cases} k! \mathbb{E}[UV]^k & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

*Demostración.* 1. Sea  $D : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  el operador diferenciación, es decir, para un polinomio  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  se cumple que  $DP(x) = P'(x)$ .

Se va a demostrar que  $D\delta - \delta D$  es el operador identidad sobre  $\mathbb{R}[x]$ , es decir, para todo  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  se cumple  $(D\delta - \delta D)P(x) = P(x)$  (a esta propiedad se le conoce como *relación de conmutatividad de Heisenberg*). En efecto,

$$\begin{aligned} (D\delta)P(x) &= D(\delta P(x)) \\ &= D(xP(x) - P'(x)) \\ &= P(x) + xP'(x) - P''(x) \\ &= P(x) + \delta P'(x) \\ &= P(x) + \delta DP(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $(D\delta - \delta D)P(x) = P(x)$ .

Ahora, usando inducción sobre  $k$ , se probará que para todo polinomio  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  se tiene la siguiente igualdad:

$$(D\delta^k - \delta^k D)P(x) = k\delta^{k-1}P(x), \quad k \geq 1.$$

Cuando  $k = 1$  se cumple la igualdad

$$(D\delta - \delta D)P(x) = P(x).$$

Supongamos que se vale para  $k$ , y aplicando  $\delta$ , tenemos

$$\begin{aligned} \delta((D\delta^k - \delta^k D)P(x)) &= \delta(D\delta^k)P(x) - \delta(\delta^{k+1}DP(x)) \\ &= k\delta^k P(x). \end{aligned}$$

Veamos que se cumple para  $k + 1$ ,

$$\begin{aligned} (D\delta^{k+1} - \delta^{k+1}D)P(x) &= (D\delta^k)P(x) - (\delta^{k+1}D)P(x) \\ &= D\delta(\delta^k P(x)) + P(x)k\delta^k P(x) - (\delta D)(\delta^k P(x)) \\ &= (k + 1)\delta^k P(x). \end{aligned}$$

De la definición de polinomio de Hermite, tenemos que  $H'_k(x) = D\delta^k \mathbf{1}$ . Por lo tanto

$$H'_k(x) = k\delta^{k-1} \mathbf{1} + \delta^k D \mathbf{1} = kH_{k-1}(x),$$

y también se cumple

$$H_{k+1}(x) = D\delta^{k+1} \mathbf{1} = \delta\delta^k \mathbf{1} = \delta H_k = xH_k - H'_k = xH_k(x) - kH_{k-1}(x).$$

2. Sea  $N$  una variable aleatoria gaussiana estándar. Para  $k \geq l \geq 1$ , podemos escribir lo siguiente:

$$\langle H_k(N), H_l(N) \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx))} = \mathbb{E}[H_k(N)H_l(N)].$$

Note que, de la definición de polinomio de Hermite para  $H_l(N)$ , se tiene

$$\mathbb{E}[H_k(N)H_l(N)] = \mathbb{E}[H_k(N)\delta^l \mathbf{1}(N)].$$

Ahora, aplicando la proposición 1.15 y el punto 1 de esta proposición,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H_k(N)\delta^l \mathbf{1}(N)] &= \mathbb{E}[H'_k(N)\delta^{l-1} \mathbf{1}(N)] \\ &= \mathbb{E}[kH_{k-1}(N)\delta^{l-1} \mathbf{1}(N)] \\ &= k\mathbb{E}[H_{k-1}(N)H_{l-1}(N)]. \end{aligned}$$

Continuando de manera recursiva,

$$k\mathbb{E}[H_{k-1}(N)H_{l-1}(N)] = k!\mathbb{E}[H_{l-k}(N)].$$

en donde usamos la proposición 1.17, y finalmente tenemos

$$\mathbb{E}[H_k(N)H_l(N)] = \begin{cases} k!, & \text{si } k = l \\ 0, & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

Por lo tanto, se obtiene que los polinomios de Hermite  $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$  son ortogonales en  $L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx))$ .

3. Por el punto anterior, tenemos que la familia  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{k!}} H_k, k \geq 0 \right\}$  es una familia ortonormal, ya que

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{k!}} H_k(N), \frac{1}{\sqrt{l!}} H_l(N) \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx))} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l, \\ 0, & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

Veamos que  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{k!}} H_k, k \geq 0 \right\}$  es una base ortonormal. Como el polinomio  $H_k(X)$  tiene grado  $k$  para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ . La afirmación de este punto es equivalentemente a decir que los monomios  $\{X^k : k \in \mathbb{N}\}$ , generan un subespacio denso de  $L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx))$ . Para esto, es suficiente probar que si  $f \in L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx))$  satisface que  $\mathbb{E}[N^k f(N)] = 0$  para toda  $k \in \mathbb{N}$  y  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , entonces la función  $f$  es igual a cero. En efecto, para  $z \in \mathbb{C}$  definimos

$$\varphi(z) = \mathbb{E}[f(N)e^{izN}]$$

Para  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}$  una sucesión compleja, se tiene

$$\lim_{w_n \rightarrow 0} \frac{\varphi(z + w_n) - \varphi(z)}{w_n} < C,$$

es decir, la derivada de  $\varphi(z)$  existe, y por lo tanto  $\varphi$  es una función analítica que es  $k$ -veces diferenciable. Usando el teorema de convergencia dominada, se llega a

$$\varphi^{(k)}(z) = i^k \mathbb{E}[N^k f(N) e^{izN}],$$

con  $k \in \mathbb{N}$  y  $z \in \mathbb{C}$ .

Por lo tanto, si  $z = 0$ , tenemos que  $\varphi^{(k)}(0) = 0$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ , es decir,  $\varphi \equiv 0$ . Por la unicidad de la transformada de Fourier, tenemos que  $f \equiv 0$ .

4. Para toda  $c \in \mathbb{R}$ , tenemos que la función  $x \mapsto e^{cx}$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx))$ . Entonces, del punto 3 se tiene,

$$e^{cx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{E}[e^{cN} H_k(N)] H_k(x).$$

Ahora, aplicando Proposición 1.15 repetidamente y utilizando el punto 1 de la Proposición 1.5 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{cN} H_k(N)] &= \mathbb{E}[e^{cN} \delta^k \mathbf{1}(N)] \\ &= c^k \mathbb{E}[e^{cN}] \\ &= c^k e^{\frac{c^2}{2}}, \end{aligned}$$

por lo que se tiene

$$e^{cx - \frac{c^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} H_k(x),$$

sobre el espacio  $L^2(\mathbb{R}, \gamma(dx))$ .

Sean  $U, V$  variables aleatorias tal que  $U, V \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Para toda  $s, t \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$\sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{s^k t^l}{k! l!} \mathbb{E}[H_k(U) H_l(V)] = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} H_k(U) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} H_l(V) \right]$$

por el teorema de convergencia dominada.

Usando la identidad anteriormente vista, se llega a que lo anterior es

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ e^{sU - \frac{s^2}{2}} e^{tV - \frac{t^2}{2}} \right] &= e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} \mathbb{E}[e^{sU+tV}] \\
 &= e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} e^{\frac{1}{2}\mathbb{E}[(sU+tV)^2]} \\
 &= e^{st\mathbb{E}[UV]} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k t^k}{k!} \mathbb{E}[UV]^k.
 \end{aligned}$$

Identificando los coeficientes en estas dos series de expansiones, tenemos la fórmula deseada. ■

## 1.3. El teorema de extensión de Kolmogorov y el criterio de continuidad de Kolmogorov

En esta sección se discutirá un resultado central en la teoría de la probabilidad, el teorema de extensión de Kolmogorov, el cual permite construir medidas sobre espacios de dimensión infinita y, de esta manera, construir procesos estocásticos. Este teorema básicamente nos está dando la existencia de procesos estocásticos sobre un espacio de probabilidad, pero de los cuales, no conocemos como es el comportamiento de sus trayectorias, para lo cual es útil el teorema de continuidad de Kolmogorov.

Primero introduciremos las herramientas necesarias para la comprensión del teorema de extensión de Kolmogorov.

Denotaremos por  $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  al conjunto de todas las funciones de  $\mathbb{R}_+$  a  $\mathbb{R}$ , al cual llamaremos *espacio de trayectorias*. Y consideremos a la siguiente familia de conjuntos, que llamaremos cilindros:

$$\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : f(t_1) \in I_1, \dots, f(t_d) \in I_d\},$$

con  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}_+$  y donde  $I_1, \dots, I_d$  son intervalos de la forma  $(a_k, b_k]$ . Denotaremos por  $\mathcal{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  a la  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  generada por esta familia.

**Definición 1.19.** *Un proceso estocástico definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , es una familia de variables aleatorias  $(X_t)_{t \in \mathbf{T}}$ , indexadas por un conjunto  $\mathbf{T}$ , las cuales son medibles con respecto a  $\mathcal{F}$ .*

A menudo se considera  $\mathbf{T} = [0, T]$  con  $T < \infty$ ,  $\mathbf{T} = [0, \infty)$  o  $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ . En lo subsecuente tomaremos  $\mathbf{T} = [0, \infty)$ , es decir, trabajaremos con procesos estocásticos en tiempo continuo.

Un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  puede ser visto como una colección de funciones

$$X(\omega) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad \omega \in \Omega$$

$$t \mapsto X(\omega)(t) := X_t(\omega)$$

estas funciones se llaman las *trayectorias del proceso estocástico*  $(X_t)_{t \geq 0}$ . La función

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$$

es medible. Y la medida de probabilidad definida por

$$\mu(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

es llamada la *ley del proceso estocástico*  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

Para  $t \geq 0$ , denotamos por  $\omega_t$  a la función que a cada  $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  le asocia  $f(t)$ . El proceso estocástico  $(\omega_t)_{t \geq 0}$  definido sobre un espacio de probabilidad  $(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mu)$  es llamado el *proceso estocástico canónico asociado a X*. Este es un proceso de ley  $\mu$ .

En general, no se tiene una regularidad *a priori* de las trayectorias de un proceso estocástico, por lo que lo mínimo que se requiere es la medibilidad de las trayectorias.

**Definición 1.20.** *Decimos que un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  es medible, si la función*

$$\mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \Omega$$

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

*es medible con respecto a  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ , es decir, si para toda  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , se tiene*

$$\{(t, \omega) : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F},$$

*donde  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$  denota la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}_+$ .*

**Observación 1.21.** La definición anterior nos dice que un proceso estocástico medible tiene trayectorias medibles.

Nuestro interés principal es en procesos estocásticos que tengan trayectorias continuas. Denotaremos al espacio de funciones continuas por  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  dotado de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , la cual está generada por

$$\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : f(t_1) \in I_1, \dots, f(t_d) \in I_d\},$$

con  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}_+$ .

**Definición 1.22.** *Un proceso estocástico continuo es un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$ , que toma valores sobre  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .*

Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  es un proceso continuo, entonces la función

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$$

es medible y la ley de  $X$  es la medida de probabilidad sobre  $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$ . Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 1.23.** *Un proceso estocástico continuo es medible.*

*Demostración.* Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico continuo. Primero demostraremos que para toda  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$X_t^n = X_{\lfloor \frac{2^n t \rfloor}{2^n}} \quad \text{con } t \in [0, 1],$$

done  $\lfloor \bullet \rfloor$  denota la parte entera. Ya que las trayectorias de  $X_t^n$  son constantes por pedazos, tenemos

$$\{(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega : X_t^n(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

Por otra parte, para  $t \in [0, 1]$  y  $\omega \in \Omega$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_t^n = X_t,$$

lo cual implica que

$$\{(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

De la misma manera mostraremos que para toda  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\{(t, \omega) \in [k, k+1] \times \Omega : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

Como

$$\{(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega : X_t(\omega) \in A\} = \bigcup_k \{(t, \omega) \in [k, k+1] \times \Omega : X_t(\omega) \in A\}$$

se deduce lo que queríamos mostrar. ■

### 1.3.1. El teorema de extensión de Kolmogorov

Como hemos visto, un proceso estocástico define una medida de probabilidad sobre el espacio  $(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$ . En primer lugar, veremos que esta medida de probabilidad está completamente determinada por las leyes finito dimensionales del proceso estocástico:

**Definición 1.24.** Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico. Para  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}_+$ , denotamos por  $\mu_{t_1, \dots, t_d}$  a la ley del vector aleatorio  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})$ , la cual es una medida de probabilidad sobre  $\mathbb{R}^d$ . A las medidas de probabilidad de este tipo las llamaremos leyes finito dimensionales del proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

**Proposición 1.25.** Si dos procesos estocásticos definidos sobre espacios de probabilidad distintos tienen las mismas leyes finito dimensionales, entonces decimos que tienen la misma ley

La demostración de esta proposición puede consultarse en [14, Proposición 2.2].

El teorema de extensión de Kolmogorov afirma que, dada una familia de medidas de probabilidad definidas sobre los cilindros de  $\mathcal{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , es posible construir un proceso estocástico cuyas leyes finito dimensionales están dadas por estas probabilidades.

**Teorema 1.26 (Teorema de extensión de Kolmogorov, 1933).** Supongamos que para cada  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}_+$ , tenemos una medida de probabilidad  $\mu_{t_1, \dots, t_d}$  sobre  $\mathbb{R}^d$ . Supongamos que esta medida de probabilidad verifica las dos condiciones:

- $\mu_{t_1, \dots, t_d}(A_1 \times \dots \times A_d) = \mu_{t_{\tau(1)}, \dots, t_{\tau(d)}}(A_{\tau(1)} \times \dots \times A_{\tau(d)}), \quad A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$   
donde  $\tau$  una permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, d\}$ ;
- $\mu_{t_1, \dots, t_d}(A_1 \times \dots \times A_{d-1} \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1, \dots, t_{d-1}}(A_1 \times \dots \times A_{d-1}), \quad A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$

Entonces, existe una única medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$  tal que para toda  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}_+$  y  $A_1, \dots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  se tiene:

$$\mu(\omega_{t_1} \in A_1, \dots, \omega_{t_d} \in A_d) = \mu_{t_1, \dots, t_d}(A_1 \times \dots \times A_d).$$

Para la demostración del teorema de extensión de Kolmogorov, se recomienda revisar [16, Capítulo 3, §4] o [6, Capítulo 7, §36].

Lo esencialmente interesante del teorema de extensión de Kolmogorov es la construcción de un proceso estocástico usando sus leyes finito dimensionales. Este teorema se utiliza a menudo para la construcción de procesos estocásticos gracias al siguiente resultado:

**Corolario 1.27.** *Supongamos que para cada  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}_+$  tenemos una medida de probabilidad  $\mu_{t_1, \dots, t_d}$  sobre  $\mathbb{R}^d$ . Supongamos que esta medida de probabilidad verifica las condiciones del teorema de extensión de Kolmogorov.*

*Entonces, existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  definido sobre este espacio tal que sus leyes finito dimensionales de  $(X_t)_{t \geq 0}$  están dadas por  $\mu_{t_1, \dots, t_d}$ .*

*Demostración.* Como espacio de probabilidad elegimos

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mu),$$

donde  $\mu$  es la medida de probabilidad dada en el teorema de extensión de Kolmogorov 1.26. Y Consideremos el proceso estocástico canónico  $(\omega_t)_{t \geq 0}$  definido sobre  $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  como  $\omega_t(f) = f(t)$ , por la construcción de este proceso, se tiene que es de ley  $\mu$ . ■

### 1.3.2. El criterio de continuidad de Kolmogorov

Como se vio, el teorema de extensión de Kolmogorov 1.26 proporciona la existencia de procesos estocásticos. Sin embargo, no afirma nada sobre el comportamiento de las trayectorias de estos procesos.

El criterio de continuidad de Kolmogorov, precisa que, bajo ciertas condiciones, podemos trabajar con procesos estocásticos cuyas trayectorias sean bastante regulares en un sentido que a continuación se hará preciso.

**Definición 1.28.** *Una función  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que es hölderiana de exponente  $\alpha > 0$ , si existe una constante  $c > 0$  tal que para toda  $s, t \in \mathbb{R}_+$ , se tiene*

$$|f(t) - f(s)| \leq c|t - s|^\alpha.$$

**Definición 1.29.** *Un proceso estocástico  $(Y_t)_{t \geq 0}$  es una modificación del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$ , si para toda  $t \geq 0$ , se cumple*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

**Nota 1.30.** Si  $(Y_t)_{t \geq 0}$  es una modificación del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$ , entonces  $(Y_t)_{t \geq 0}$  tiene las mismas leyes finito dimensionales que  $(X_t)_{t \geq 0}$  (ver [28]).

Cabe mencionar que las leyes finito dimensionales no determinan las trayectorias del proceso estocástico. Por ejemplo, tomemos  $\Omega = [0, 1)$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$  y  $\mathbb{P}$  la medida de Lebesgue. Definamos

un proceso estocástico  $(X_t)_{t \in \mathbf{T}}$ , con  $\mathbf{T} = [0, 1]$ , como sigue:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq \omega \\ 1, & \text{si } t = \omega \end{cases}$$

Y para toda  $\omega \in \Omega$ , sea  $Y_t(\omega) \equiv 0$  otro proceso estocástico que es modificación  $X_t(\omega)$ , para cada  $t$ . Los procesos estocásticos definidos tienen las mismas leyes finito dimensionales, pero sus trayectorias no son las mismas, ya que para  $X_t$  las trayectorias son discontinuas, mientras que para  $Y_t$  son continuas.

El siguiente teorema, da una condición suficiente para que un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  admita una modificación continua con trayectorias hölderianas.

**Teorema 1.31 (Criterio de continuidad de Kolmogorov).** *Sean  $\eta, \varepsilon$  y  $c$  constantes positivas. Si un proceso estocástico  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ , con  $T > 0$ , está definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y si además para toda  $s, t \in [0, T]$  se satisface*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\eta] \leq c|t - s|^{1+\varepsilon},$$

*entonces existe un proceso estocástico continuo con trayectorias hölderianas de exponente  $\alpha$ , para toda  $\alpha \in (0, \varepsilon/\eta)$ , que es una modificación de  $X$ . Es decir  $X$  admite una modificación continua.*

La demostración de este teorema, se puede consultar en [19, Capítulo 2, Teorema 2.1].

## 1.4. Procesos Gaussianos

Como se ha visto en la sección anterior, el teorema de extensión de Kolmogorov es la herramienta básica para demostrar la existencia de un proceso estocástico cuyas leyes finito dimensionales están dadas. En esta sección, veremos la forma en que se puede utilizar este teorema para probar la existencia de los procesos gaussianos.

**Definición 1.32.** *Un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es llamado proceso estocástico gaussiano si para toda  $d \geq 1$  y para toda  $(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$ , el vector aleatorio  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})$  sigue una ley gaussiana. Dicho de otro modo, si todas sus leyes finito dimensionales siguen una ley gaussiana.*

La ley de un proceso gaussiano está caracterizadas por su función de medias

$$m(t) = \mathbb{E}[X_t],$$

y su función de covarianzas

$$R(s, t) = \mathbb{E}[(X_t - m(t))(X_s - m(s))].$$

La función de densidad de la ley finito dimensional  $\mu_{t_1, \dots, t_d}$  de la densidad gaussiana con respecto a la medida de Lebesgue es:

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d (x_k - m(t_k)) (\Sigma^{-1})_{k,l} (x_l - m(t_l)) \right),$$

donde,  $\Sigma_{k,l} = R(t_k, t_l)$ .

Hay que notar que la función de covarianza es simétrica  $R(s, t) = R(t, s)$  y positiva definida, es decir, para cualesquiera  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$  y  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^d a_k a_l R(t_k, t_l) &= \sum_{k,l=1}^d a_k a_l \mathbb{E}[(X_{t_k} - m(t_k))(X_{t_l} - m(t_l))] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^d (X_{t_k} - m(t_k)) \right)^2 \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Del teorema de extensión de Kolmogorov 1.26, se tiene el siguiente resultado para procesos gaussianos, el cual exhibe la existencia de los procesos gaussianos.

**Teorema 1.33 (Teorema de extensión de Kolmogorov para procesos gaussianos).** *Sea  $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $R : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es simétrica y positiva definida. Entonces, existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y un proceso gaussiano  $(X_t)_{t \geq 0}$  definido sobre este espacio, el cual tiene a  $m$  por función de media y a  $R$  por función de covarianza.*

*Demostración.* Definimos una medida de probabilidad sobre  $\mathbb{R}^d$  como

$$\mu_{t_1, \dots, t_d} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d (x_k - m(t_k)) (\Sigma^{-1})_{k,l} (x_l - m(t_l)) \right) dx_1 \cdots dx_d,$$

donde  $\Sigma_{k,l} = R(t_k, t_l)$  y  $dx_1 \cdots dx_d$  es la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}^d$ . Por hipótesis sobre la función de covarianza  $R$ , se tiene que  $\Sigma$  es una matriz simétrica y definida positiva, de modo que  $\mu_{t_1, \dots, t_d}$  sigue una ley gaussiana. Esta medida de probabilidad cumple con las condiciones del teorema de extensión de Kolmogorov 1.26, y aplicando el corolario 1.27, se sigue que existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  cuyas leyes finito dimensionales están dadas por  $\mu_{t_1, \dots, t_d}$ , la cual es la ley de un proceso gaussiano. ■

## 1.5. El ejemplo del movimiento browniano

Gracias al teorema de extensión de Kolmogorov para procesos gaussianos 1.33 y al teorema de continuidad de Kolmogorov 1.31, podemos demostrar la existencia del movimiento browniano, el cual es un proceso continuo. Además, se darán algunas de las propiedades más importantes de este proceso estocástico.

**Teorema 1.34.** *Existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y un proceso estocástico gaussiano  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , con función de media 0 y función de covarianza dada por*

$$R(t, s) = \mathbb{E}[X_s X_t] = \min(s, t).$$

*Demostración.* Tenemos que la función  $R(s, t) = \min(s, t)$  es simétrica y para  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}_+$  y  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ , es definida positiva,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^d a_k a_l R(t_k, t_l) &= \sum_{k,l=1}^d a_k a_l \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0, \min(t_k, t_l)]}(x) \, dx \\ &= \sum_{k,l=1}^d a_k a_l \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0, t_k]}(x) \mathbb{1}_{[0, t_l]}(x) \, dx \\ &= \int_0^\infty \left( \sum_{k=1}^d a_k \mathbb{1}_{[0, t_k]}(x) \right)^2 \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

Del teorema de extensión de Kolmogorov para procesos gaussianos 1.33, existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y un proceso estocástico gaussiano  $(X_t)_{t \geq 0}$  sobre este espacio de probabilidad, cuya función de media es 0 y cuya función de covarianza es  $R(s, t) = \min(s, t)$ . ■

Por otro lado, para toda  $d \geq 0$  y  $0 \leq s \leq t$ , por la proposición 1.6, se tiene

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^{2d}] = \frac{(2d)!}{2^d d!} (t - s)^d.$$

Por lo tanto, del teorema de continuidad de Kolmogorov 1.31, existe una modificación continua  $(W_t)_{t \geq 0}$  del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$ , cuyas trayectorias son hölderianas de exponente  $\alpha$ , con  $\alpha \in \left[0, \frac{d-1}{2d}\right)$ .

Una consecuencia de lo antes dicho es que, como modificación de  $(X_t)_{t \geq 0}$ , el proceso  $(W_t)_{t \geq 0}$  tiene las mismas leyes finito dimensionales que  $(X_t)_{t \geq 0}$ , es decir, tienen la misma ley. Esta ley se llama medida de Wiener, de la cual hablaremos más adelante.

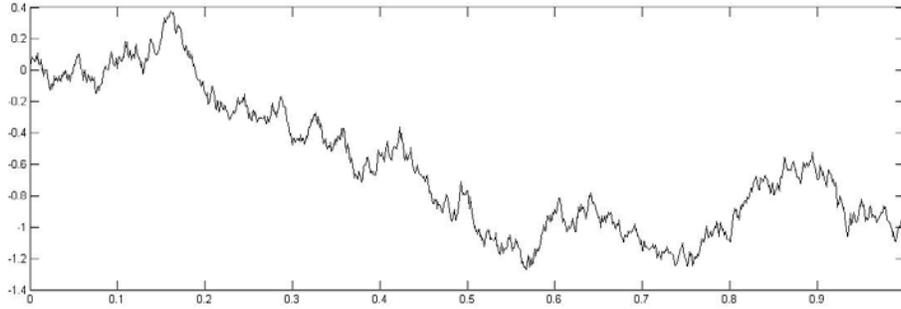


Figura 1.1: Trayectorias del movimiento browniano sobre el intervalo  $[0, 1]$ .

**Definición 1.35 (Movimiento browniano estándar).** *Un proceso estocástico continuo  $W = (W_t)_{t \geq 0}$ , se llama movimiento browniano estándar, si es un proceso gaussiano con función de media*

$$m(t) = \mathbb{E}[W_t] = 0,$$

*y función de covarianza*

$$R(t, s) = \mathbb{E}[W_s W_t] = \min(s, t).$$

El movimiento browniano definido en 1.35, cumple con las siguientes propiedades, cabe mencionar que no se demostrarán, pero el lector puede consultar [4, Capítulo 9] y [23, Capítulo 1] para su prueba.

- *Comienza en cero.*  $W_0 = 0$ .
- *Incrementos independientes.* Para los tiempos  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_d$ , los incrementos  $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_d} - W_{t_{d-1}}$  son variables aleatorias independientes.
- *Incrementos estacionarios.* Si  $0 \leq s < t$ , entonces  $W_t - W_s$  sigue una ley gaussiana con media cero y varianza  $t - s$ .
- *Autosimilitud.* Para toda  $a > 0$ , el proceso estocástico  $(a^{-1/2}W_{at})_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano.
- *Inversión en el tiempo.* El proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  definido por

$$X_t = \begin{cases} tW_{1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

es un movimiento browniano.

- *Propiedad de Markov.* Sea  $W$  un movimiento browniano y  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  su filtración natural. Entonces para toda  $t > 0$ , el proceso  $W$  dado por  $W_s = W_{t+s} - W_t$  es un movimiento browniano independiente de  $\mathcal{F}_t$ .

Esta propiedad nos dice que, para predecir el futuro de  $W$ , conocer sólo el presente nos brinda tanta información como conocer toda la historia del proceso hasta un tiempo  $t$ .

- *Martingala.* El movimiento browniano  $(W_t)_{t \geq 0}$  es una martingala con respecto a la filtración natural  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , es decir  $\mathbb{E}[|W_t|] < \infty$  y si  $s \leq t$  entonces:

$$\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s.$$

Esta propiedad nos dice que, conociendo la historia de  $W$  hasta un tiempo  $s$ , la mejor predicción del valor futuro de  $W$  en un tiempo posterior  $t$  es, simplemente, el valor actual  $W_s$ .

- *Ley de los grandes números.* Sea  $(W_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0 \text{ casi seguramente.}$$

El concepto de martingala fue introducido por Jean Ville en 1939. Más adelante, Paul Lévy inició el desarrollo de la teoría y Doob [8] demostró algunos de los resultados más importantes. Esta teoría proporciona herramientas para el estudio del movimiento browniano, una de ellas es empleando el *cálculo estocástico*, como lo desarrolló Kiyoshi Itô en [13], su motivación principal era entender y resolver ecuaciones diferenciales estocásticas de la siguiente forma

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) \widetilde{W}_t dt,$$

donde  $\widetilde{W}_t$  es un ruido blanco, el cual puede pensarse como una derivada del movimiento browniano  $W_t$ , pero como las trayectorias del movimiento browniano no son diferenciables, no era claro el sentido que tenía la ecuación antes descrita. Al reescribir la ecuación anterior, en forma integral, es decir,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s,$$

donde  $b$  y  $\sigma$  son funciones deterministas de  $t$  y  $\int_0^t \sigma(X_s) dW_s$  es una integral estocástica con respecto al movimiento browniano. Itô definió este tipo de integrales y estudio sus propiedades, una de ellas es que esta integral estocástica resulta ser una martingala.

En la actualidad, la herramienta principal para el estudio del cálculo estocástico es el concepto de *semimartingala*, que por definición, es la suma de una martingala local (algo un poco más general que una martingala) y un proceso estocástico con trayectorias de variación acotada y adaptado (una condición de medibilidad). Las semimartingalas  $(Z_t)_{t \geq 0}$  constituyen una clase general de procesos estocásticos con trayectorias continuas y con respecto a los cuales se pueden integrar procesos estocásticos, donde la integral estocástica  $\int_0^t \sigma(X_s) dZ_s$  está bien definida.

En lo que sigue, se definirá un movimiento browniano de dimensión  $d$ , ya que será de gran utilidad para poder definir la medida de Wiener, la cual se utilizará en el capítulo 3.

**Definición 1.36.** *Supongamos que  $W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^d$  son movimientos brownianos estándar independientes. Entonces, el proceso estocástico  $(W_t)_{t \geq 0}$  definido por*

$$(W_t)_{t \geq 0} = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \geq 0},$$

*es llamado movimiento browniano estándar de dimensión  $d$ .*

En lo que sigue, sea  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$  el espacio de las funciones continuas de  $\mathbb{R}_+$  a  $\mathbb{R}^d$  dotada de la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ , la cual es la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que hace medibles a las funciones  $f \rightarrow f(t)$ , para toda  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Definición 1.37 (Medida de Wiener).** *Sea  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar de dimensión  $d$ , definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . La medida de Wiener de dimensión  $d$  es la medida de probabilidad  $\mathbb{W}$  sobre  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$  definida como la medida imagen de  $\mathbb{P}$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  para la función  $\Phi$ :*

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega &\rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \\ \omega &\mapsto (W_t(\omega))_{t \geq 0}. \end{aligned}$$

La definición anterior parece no tener sentido, ya que no depende de la elección del movimiento browniano  $W$ , como se hará notar a continuación. Sea  $\mathcal{C}$  la familia de cilindros del espacio  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ , es decir, los conjuntos de la forma

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) : f(t_1) \in A_1, f(t_2) \in A_2, \dots, f(t_n) \in A_n\},$$

donde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son borelianos de  $\mathbb{R}^d$  y  $0 < t_1 < \dots < t_n$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(C) &:= \mathbb{P}(\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) : f(t_1) \in A_1, f(t_2) \in A_2, \dots, f(t_n) \in A_n\}) \\ &= \mathbb{P}(\Phi \in C) \\ &= \mathbb{P}((W_t)_{t \geq 0} \in C) \\ &= \mathbb{P}(W_{t_1} \in A_1, W_{t_2} \in A_2, \dots, W_{t_n} \in A_n) \\ &= \int_{A_n} \cdots \int_{A_2} \int_{A_1} p_{t_1}(0, x_1) p_{t_2-t_1}(x_1, x_2) \cdots p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

donde  $p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2t}\right\}$  con  $x, y \in \mathbb{R}^d$  y  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Esta es la expresión de la *medida de Wiener*, por el lema de las clases monótonas se tiene que esta medida está caracterizada por sus valores sobre los cilindros  $C$ . Esto muestra que está determinada de manera única, independiente de la elección del movimiento browniano  $W$ , es decir, todos los movimientos brownianos tienen la misma ley, la cual es una medida Wiener.

**Nota 1.38.** En cierto sentido, la medida de Wiener sobre el espacio  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$  juega un papel similar al de la medida de Lebesgue sobre el intervalo  $[0, 1]$ .

A continuación definiremos un tipo de movimiento browniano, el cual nos será de gran utilidad al finalizar el capítulo 2.

**Definición 1.39 (Movimiento browniano bilateral).** *Definimos el movimiento browniano bilateral  $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}}$  como*

$$W_t = \begin{cases} W_t^1, & \text{si } t \geq 0 \\ W_{-t}^2, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

donde  $W^1$  y  $W^2$  son movimientos brownianos independientes.

## 1.6. Existencia del movimiento browniano fraccionario

La manera usual de demostrar la existencia del movimiento browniano fraccionario, es utilizando el teorema de extensión de Kolmogorov 1.26, del cual hemos hablado en secciones anteriores.

Para esto es necesario y suficiente demostrar que la función de covarianza es simétrica y definida positiva como se vio en el teorema 1.33. Por lo que, el problema para demostrar la existencia de este proceso estocástico radica en demostrar que la función  $R_H$ , la cual se definirá más adelante, es definida positiva.

**Teorema 1.40 (Existencia del movimiento browniano fraccionario).** *Sea  $H > 0$  un número real. Entonces, existe un proceso estocástico gaussiano que es estándar, al cual denotaremos por  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  cuya función de covarianza esta dada por*

$$R_H(s, t) = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \geq 0$$

si y sólo si  $H \leq 1$ .

Antes de proceder con la demostración del teorema enunciado anteriormente, probaremos el siguiente resultado que nos será de utilidad para tal hecho.

**Lema 1.41.** *Para toda  $x > 0$ , se tiene lo siguiente*

$$x^H = \frac{H}{\Gamma(1-H)} \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) u^{-1-H} du,$$

donde  $\Gamma(t) = \int_0^\infty y^{t-1} e^{-y} dy$  es la función Gamma.

*Demostración.* Integrando por partes se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) u^{-1-H} du &= \frac{(1 - e^{-ux}) u^{-H}}{-H} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{u^{-H}}{-H} x e^{-ux} du \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(1 - e^{-ux})}{-H u^H} - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-ux})}{-H u^H} + \frac{x}{H} \int_0^\infty u^{-H} e^{-ux} du \\ &= \frac{x}{H} \int_0^\infty e^{-ux} u^{-H} du. \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variable  $y = ux$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{x}{H} \int_0^\infty e^{-ux} u^{-H} du &= \frac{x^H}{H} \int_0^\infty e^{-y} y^{-H} dy \\ &= \frac{\Gamma(1-H)}{H} x^H. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty (1 - e^{-ux}) u^{-1-H} du = \frac{\Gamma(1-H)}{H} x^H$$

y despejando, se llega a la igualdad deseada. ■

**Demostración de la existencia del movimiento browniano fraccionario.** Del teorema de extensión de Kolmogorov para procesos gaussianos 1.33, debemos mostrar que la función de covarianza  $R_H$  es definida positiva si y sólo si  $H \leq 1$ .

Primero veamos que en el caso  $H > 1$ , la función  $R_H$  no es definida positiva. En efecto, ya que cuando

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad a_1 = -2 \quad \text{y} \quad a_2 = 1$$

se tiene

$$a_1^2 R_H(t_1, t_1) + 2a_1 a_2 R_H(t_1, t_2) + a_2^2 R_H(t_2, t_2) = 4 - 2^{2H} < 0.$$

Ahora en el caso cuando  $H = 1$ , la función  $R_H$  es definida positiva, ya que  $R_1(s, t) = st$ , entonces para toda  $d \geq 1$ ,  $t_1, \dots, t_d \geq 0$  y  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$\sum_{k,l=1}^d R_1(t_k, t_l) a_k a_l = \left( \sum_{k=1}^d t_k a_k \right)^2 \geq 0.$$

Finalmente, consideremos el caso cuando  $H \in (0, 1)$ . Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ , y utilizando el cambio de variable  $v = u|x|$  en el lema 1.41, se tiene la siguiente representación para  $x \neq 0$ :

$$|x|^{2H} = \frac{1}{\varphi_H} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2 x^2}}{u^{1+2H}} du$$

donde

$$\varphi_H = \int_0^\infty (1 - e^{-u^2}) u^{-1-2H} du < \infty.$$

Por lo tanto, para  $s, t \geq 0$  se tiene

$$\begin{aligned} s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H} &= \frac{1}{\varphi_H} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t^2})(1 - e^{-u^2 s^2})}{u^{1+2H}} du \\ &\quad + \frac{1}{\varphi_H} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2 t^2} (e^{2u^2 ts} - 1) e^{-u^2 s^2}}{u^{1+2H}} du \\ &= \frac{1}{\varphi_H} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t^2})(1 - e^{-u^2 s^2})}{u^{1+2H}} du \\ &\quad + \frac{1}{\varphi_H} \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!} \int_0^\infty \frac{t^n e^{-u^2 t^2} s^n e^{-u^2 s^2}}{u^{1-2n+2H}} du \end{aligned}$$

entonces, para toda  $d \geq 1$ ,  $t_1, \dots, t_d \geq 0$  y  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^d \frac{1}{2} (t_k^{2H} + t_l^{2H} - |t_k - t_l|^{2H}) a_k a_l \\ = \frac{1}{2\varphi_H} \int_0^\infty \frac{\left( \sum_{k=1}^d (1 - e^{-u^2 t_k^2}) a_k \right)^2}{u^{1+2H}} du \\ + \frac{1}{2\varphi_H} \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!} \int_0^\infty \frac{\left( \sum_{k=1}^d t_k^n e^{-u^2 t_k^2} a_k \right)^2}{u^{1-2n+2H}} du \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo que la función  $R_H$  es definida positiva cuando  $H \in (0, 1)$ . ■

**Definición 1.42 (Movimiento browniano fraccionario).** *Sea  $H \in (0, 1]$ . Un proceso gaussiano estándar  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  es llamado movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H$  si su función de media es 0 y su función de covarianza esta dada por*

$$R_H(s, t) = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \geq 0.$$

El siguiente resultado enfatiza sobre dos valores particulares de  $H$ .

**Proposición 1.43.** *Sea  $B$  un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H \in (0, 1]$ , entonces se tiene:*

- *Si  $H = 1/2$ , entonces el movimiento browniano fraccionario es el movimiento browniano de la definición 1.35.*
- *Si  $H = 1$ , entonces  $B_t = tB_1$  casi seguramente para toda  $t \geq 0$ .*

*Demostración.* ■ La función de covarianza de  $B$  cuando  $H = 1/2$  se reduce a  $R_H(s, t) = \min(s, t)$ . Por lo tanto el movimiento browniano fraccionario y el movimiento browniano coinciden.

- Supongamos  $H = 1$ . Entonces para toda  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t - tB_1)^2] &= \mathbb{E}[B_t^2] - 2t\mathbb{E}[B_t B_1] + t^2\mathbb{E}[B_1^2] \\ &= t^2 - t(t^2 + 1 - (1 - t)^2) + t^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que  $B_t = tB_1$  casi seguramente. ■

Lo anterior muestra que el caso cuando  $H = 1$  es trivial. Por lo que de ahora en adelante vamos a suponer que  $0 < H < 1$ .



## Capítulo 2

---

# Propiedades del Movimiento Browniano Fraccionario

---

Como vimos en el capítulo anterior, existe un proceso estocástico  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  el cual es gaussiano estándar, cuya función de covarianza  $R_H$  esta dada por

$$R_H(s, t) = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \geq 0.$$

Este proceso estocástico es llamado *movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst*  $H \in (0, 1)$ .

En este capítulo se darán algunas propiedades del movimiento browniano fraccionario, tales como la propiedad de autosimilitud, la de incrementos estacionarios e inversión en el tiempo.

Una de las propiedades más importantes es la regularidad, dependiente del índice  $H$ , de sus trayectorias. También se demostrará que las trayectorias del movimiento browniano fraccionario no son diferenciables en ningún punto.

Sin embargo, el movimiento browniano fraccionario pierde la propiedad de ser semimartingala cuando el índice de Hurst  $H \neq 1/2$ , además de no ser un proceso de Markov.

Al final de este capítulo, se dará una definición alterna del movimiento browniano fraccionario dada por Mandelbrot y Van Ness.

## 2.1. Propiedades básicas

**Proposición 2.1.** *Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Autosimilitud. Para toda  $a > 0$ , el proceso  $(a^{-H} B_{at})_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H$ ;*
2. *Incrementos estacionarios. Para toda  $h > 0$ , el proceso  $(B_{t+h} - B_h)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H$ ;*
3. *Inversión en el tiempo. El proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  definido por*

$$X_t = \begin{cases} t^{2H} B_{1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

*es un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H$ .*

4. *Varianza: Para toda  $t \geq 0$ , se cumple  $\mathbb{E}[B_t^2] = t^{2H}$ .*

*Demostración.* Por definición de movimiento browniano fraccionario se tiene que  $\mathbb{E}[B_t] = 0$ , es decir es un proceso estándar. Entonces, para los estos casos, observemos que son procesos gaussianos estándar. Así que para demostrar que ambos procesos tienen la misma ley de probabilidad, es suficiente demostrar que ambos tienen la misma función de covarianza.

1. Sean  $a > 0$  y  $t, s \geq 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(a^{-H} B_{at})(a^{-H} B_{as})] &= a^{-2H} \mathbb{E}[B_{at} B_{as}] \\ &= a^{-2H} \frac{1}{2} ((at)^{2H} + (as)^{2H} - |at - as|^{2H}) \\ &= a^{-2H} a^{2H} \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \\ &= \mathbb{E}[B_t B_s]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el movimiento browniano fraccionario es autosimilar.

2. Sean  $h > 0$  y  $t, s \geq 0$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(B_{t+h} - B_h)(B_{s+h} - B_h)] &= \mathbb{E}[B_{t+h}B_{s+h}] - \mathbb{E}[B_{s+h}B_h] - \mathbb{E}[B_{t+h}B_h] + \mathbb{E}[B_hB_h] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ (t+h)^{2H} + (s+h)^{2H} - |t-s|^{2H} - [(s+h)^{2H} + h^{2H} \right. \\
&\quad \left. - s^{2H}] - [(t+h)^{2H} + h^{2H} - t^{2H}] - [h^{2H} + h^{2H}] \right\} \\
&= \frac{1}{2} ((t+h)^{2H} + (s+h)^{2H} - |t-s|^{2H}) \\
&= \mathbb{E}[B_{t+h}B_{s+h}].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el movimiento browniano fraccionario tiene incrementos estacionarios.

3. Sean  $t, s > 0$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t X_s] &= \mathbb{E}[t^{2H} B_{1/t} s^{2H} B_{1/s}] \\
&= t^{2H} s^{2H} \mathbb{E}[B_{1/t} B_{1/s}] \\
&= \frac{t^{2H} s^{2H}}{2} \left[ \left(\frac{1}{t}\right)^{2H} + \left(\frac{1}{s}\right)^{2H} - \left|\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right|^{2H} \right] \\
&= \frac{(ts)^{2H}}{2} \left[ \frac{t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}}{(ts)^{2H}} \right] \\
&= \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) \\
&= \mathbb{E}[B_t B_s].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el movimiento browniano fraccionario cumple con la propiedad de inversión en el tiempo.

4. Sea  $t \geq 0$ , tenemos

$$\mathbb{E}[B_t^2] = \mathbb{E}[B_t B_t] = \frac{1}{2} (t^{2H} + t^{2H} - |t-t|^{2H}) = t^{2H}.$$

■

**Proposición 2.2.** *El movimiento browniano fraccionario  $(B_t)_{t \geq 0}$  con índice de Hurst  $H \in (0, 1)$ , es el único proceso (en ley) definido sobre  $[0, \infty)$  que verifica las siguientes condiciones simultáneamente:*

1. *Autosimilitud de índice  $H$ :  $(a^{-H} B_{at})_{t \geq 0} = (B_t)_{t \geq 0}$  en ley, para toda  $a > 0$ ;*

2. *Incrementos estacionarios:*  $(B_{t+h} - B_h)_{t \geq 0} = (B_t)_{t \geq 0}$  en ley, para toda  $h > 0$ ;
3. *Gaussiano:*  $(B_t)_{t \geq 0}$  es un proceso gaussiano;
4. *Normalización:*  $B_0 = 0$  y  $\text{Var}(B_1) = 1$ .

*Demostración.* Sea  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico tal que satisface las cuatro condiciones. Por definición de movimiento browniano fraccionario, se cumple la condición 3, ya que es un proceso gaussiano. Por la proposición anterior, se cumplen las condiciones 1 y 2, por lo que sólo nos resta probar que se cumple la condición 4, es decir,  $B$  es un proceso estocástico estándar y que tiene por función de covarianza a la dada en la definición 1.42.

Primero, usaremos la propiedad de autosimilitud del movimiento browniano fraccionario,

$$\mathbb{E}[B_{2t}] = 2^H \mathbb{E}[B_t].$$

Como  $B$  tiene incrementos estacionarios, se tiene

$$\mathbb{E}[B_{2t}] = \mathbb{E}[B_{2t} - B_t] + \mathbb{E}[B_t].$$

Por lo tanto,

$$2^H \mathbb{E}[B_t] = 2\mathbb{E}[B_t].$$

Pero como  $H \in (0, 1)$ , entonces se tiene que  $\mathbb{E}[B_t]$  debe ser cero, es decir,  $B$  es estándar. Usando lo anterior y la propiedad de varianza de  $B$ , se obtiene que  $\text{Var}(B_1) = \mathbb{E}[B_1^2] - (\mathbb{E}[B_1])^2 = 1$ .

Ahora, sean  $t, s \geq 0$ . Entonces, utilizamos las condiciones 2,1 y 4 respectivamente, para llegar a la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t B_s] &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[B_t^2] + \mathbb{E}[B_s^2] - \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2]) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[B_t^2] + \mathbb{E}[B_s^2] - \mathbb{E}[B_{|t-s}|^2]) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[B_1^2] (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \end{aligned}$$

es decir,  $(B_t)_{t \geq 0}$  tiene por función de covarianza a la dada en 1.42. ■

Cabe mencionar que, la independencia de las trayectorias del movimiento browniano es una propiedad importante que lo distingue del movimiento browniano fraccionario, el cual no tiene incrementos independientes, como se mostrará a continuación.

Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario y supongamos que tiene incrementos independientes. Entonces, para  $0 < s < t$  se tiene

$$\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] = \mathbb{E}[B_s] \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0,$$

ya que  $(B_t)_{t \geq 0}$  tiene esperanza cero. Por la definición de función de covarianza 1.42, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] &= \mathbb{E}[B_s B_t] - \mathbb{E}[B_s B_s] \\ &= \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H} - 2s^{2H}) \\ &= \frac{1}{2}(t^{2H} - s^{2H} - (t-s)^{2H}). \end{aligned}$$

Pero esto significa que

$$\frac{1}{2}(t^{2H} - s^{2H} - (t-s)^{2H}) = 0.$$

Sin embargo, como  $s, t \neq 0$ , tenemos que la ecuación es cierta sólo cuando  $H = 1/2$ . Por lo tanto  $(B_t)_{t \geq 0}$  no tiene incrementos independientes.

## 2.2. Trayectorias del movimiento browniano fraccionario

El movimiento browniano tiene trayectorias continuas en el sentido de trayectorias hólдерianas, como se vio en la sección 1.5. Ahora, nos interesa conocer como es el comportamiento en las trayectorias del movimiento browniano fraccionario. Gracias al teorema de continuidad de Kolmogorov 1.31 se puede afirmar el siguiente resultado:

**Proposición 2.3.** *Sea  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Entonces, casi seguramente, las trayectorias de  $B$  son hólдерianas de exponente  $\alpha \in (0, H)$ .*

*Demostración.* Sea  $0 < \beta < H$  y  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Por las propiedades de incrementos estacionarios y autosimilitud de  $B$ , para  $s, t \geq 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|B_t - B_s|^{1/\beta}] &= \mathbb{E}[|B_{|t-s|}|^{1/\beta}] \\ &= |t-s|^{H/\beta} \mathbb{E}[|B_1|^{1/\beta}]. \end{aligned}$$

Por lo que se satisfacen las condiciones del teorema de continuidad de Kolmogorov 1.31, con  $\eta = 1/\beta$  y  $1+\varepsilon = H/\beta$ , entonces existe un proceso estocástico continuo con trayectorias hólдерianas

de exponente  $\alpha$ , para toda  $\alpha \in (0, H - \beta)$  que es una modificación de  $B$ . Es decir  $B$  admite una modificación continua. Si  $\alpha \in (0, H)$ , tomemos  $\beta \in (0, H - \alpha)$ ; entonces  $0 < \beta < H$  y  $\alpha \in (0, H - \beta)$ . Así que, por lo anterior,  $B$  tiene trayectorias hölderianas de exponente  $\alpha$ . ■

**Proposición 2.4.** *El movimiento browniano fraccionario  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  con índice de Hurst  $H \in (0, 1)$  no tiene trayectorias hölderianas de exponente  $\alpha \geq H$ .*

*Demostración.* Por un resultado de Arcones [3],  $B$  satisface la siguiente ley del logaritmo iterado:

$$\mathbb{P} \left( \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{t^H \sqrt{\log \log 1/t}} = 1 \right) = 1.$$

Utilizando la propiedad de incrementos estacionarios de  $B$ , se tiene que para toda  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \limsup_{s \leq t, s \rightarrow t} \frac{B_t - B_s}{|t - s|^H \sqrt{\log \log 1/|t - s|}} = 1 \right) = 1.$$

Ahora, supongamos que  $B$  tiene trayectorias hölderianas de exponente  $\alpha \geq H$ , es decir, existe una constante  $c > 0$  tal que para  $s, t \geq 0$ , se cumple

$$\frac{B_t - B_s}{|t - s|^{\alpha c}} \leq 1.$$

Denotemos  $c(t) = \sqrt{\log \log 1/|t - s|}$  y tomando  $\alpha = H + \varepsilon$  se tiene que

$$\begin{aligned} \limsup_{s \leq t, s \rightarrow t} \frac{B_t - B_s}{|t - s|^{H+\varepsilon} \sqrt{\log \log 1/|t - s|}} &= \limsup_{s \leq t, s \rightarrow t} \frac{B_t - B_s}{|t - s|^H \sqrt{\log \log 1/|t - s|}} \limsup_{s \leq t, s \rightarrow t} \frac{1}{|t - s|^\varepsilon} \\ &= \limsup_{s \leq t, s \rightarrow t} \frac{1}{|t - s|^\varepsilon} = \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el movimiento browniano fraccionario  $B$  no tiene trayectorias hölderianas de exponente  $\alpha \geq H$ . ■

Como se puede observar en las figuras subsecuentes, el comportamiento de las trayectorias de  $B$  son muy distintas para distintos valores del índice de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Para ver como se simulan estas trayectorias, ver el apéndice A.

Cuando  $H < 1/2$  el comportamiento de las trayectorias de  $B$  es muy irregular, cuando  $H$  es muy cercano a cero, la trayectoria tiene variaciones muy erráticas, mientras el valor de  $H$  es más cercano a  $1/2$  las trayectorias se van asemejando a las del movimiento browniano.

Cuando  $H > 1/2$ , las trayectorias de  $B$  son esencialmente hölderianas de exponente  $0 < \alpha < H$ , por lo que se tiene un mejor manejo sobre las trayectorias, ya que se tiene una continuidad en el sentido de Hölder, es decir, para pequeñas variaciones de la trayectoria implica que deben estar cercanos los puntos en el dominio.

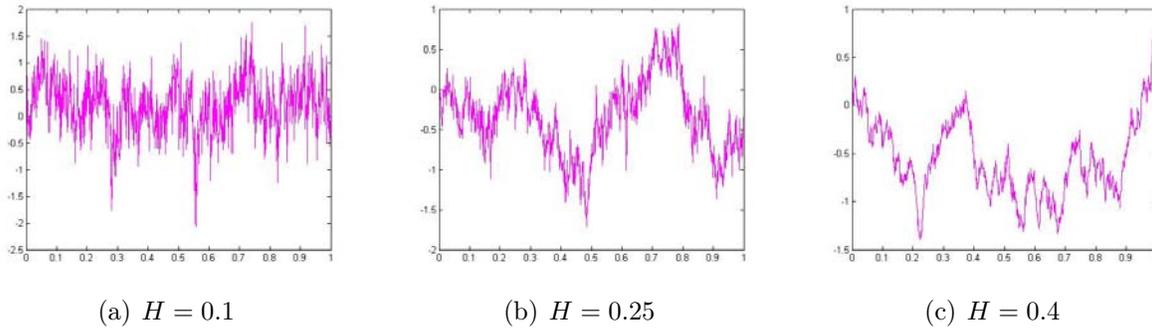


Figura 2.1: Simulación de las trayectorias del movimiento browniano fraccionario sobre el intervalo  $[0, 1]$  para distintos valores del parámetro de Hurst  $H < 1/2$ .

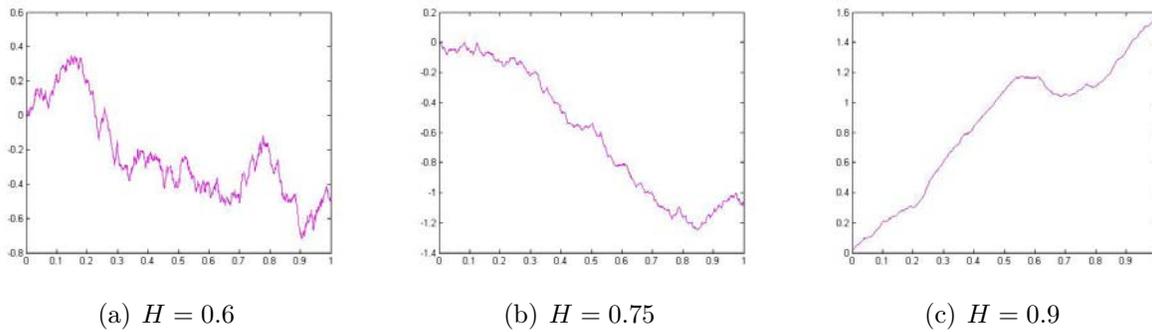


Figura 2.2: Simulación de las trayectorias del movimiento browniano fraccionario sobre el intervalo  $[0, 1]$  para distintos valores del parámetro de Hurst  $H > 1/2$ .

## 2.3. No diferenciabilidad de las trayectorias del movimiento browniano fraccionario

Por un resultado debido a Mandelbrot y Van Ness [22] se tiene que las trayectorias del movimiento browniano fraccionario  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  no son diferenciables en ningún punto, como se demostrará a continuación.

**Proposición 2.5.** *Sea  $H \in (0, 1)$ . Las trayectorias del movimiento browniano fraccionario  $B$  no son diferenciables. De hecho, para todo punto  $t_0 \in [0, \infty)$*

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_t - B_{t_0}}{t - t_0} \right| = \infty,$$

con probabilidad uno.

*Demostración.* Primero, recordemos que la definición de derivada de una función  $f(x)$  en  $x_0$  es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

y que  $f(x)$  es diferenciable en el punto  $x_0$  si el límite anterior existe.

Sea  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario y supongamos  $B_0 = 0$ . La prueba de este resultado es utilizando la propiedad de autosimilitud del movimiento browniano fraccionario  $B$ .

Consideremos la variable aleatoria dada por

$$Y_{t,t_0} := \frac{B_t - B_{t_0}}{t - t_0}, \quad \text{con } t, t_0 \geq 0.$$

Ya que el movimiento browniano fraccionario  $B$  cumple con la propiedad de autosimilitud y tiene incrementos estacionarios, tenemos la siguientes igualdades en ley

$$Y_{t,t_0} = \frac{B_t - B_{t_0}}{t - t_0} = \frac{B_{t-t_0}}{t - t_0} = \frac{(t - t_0)^H B_1}{t - t_0} = (t - t_0)^{H-1} B_1.$$

Trasladando, podemos suponer que  $t_0 = 0$ . Entonces, para  $d > 0$  definimos el siguiente evento:

$$A(t, \omega) = \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{B_s(\omega)}{s} \right| > d \right\}.$$

Notemos que si  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión que decrece a cero, se tiene

$$A(t_n, \omega) \supseteq A(t_{n+1}, \omega),$$

y además

$$\begin{aligned} A(t_n, \omega) &\supseteq \left\{ \omega \in \Omega : \left| \frac{B_{t_n}(\omega)}{t_n} \right| > d \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : |t_n^{H-1} B_1(\omega)| > d \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : |B_1(\omega)| > t_n^{1-H} d \right\} \end{aligned}$$

casi seguramente. Entonces,

$$\mathbb{P}(A(t_n, \omega)) \geq \mathbb{P}(|B_1| > t_n^{1-H} d)$$

y tomando límite en ambos lados, se llega a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A(t_n, \omega)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|B_1| > t_n^{1-H} d).$$

Como  $t_n$  es una sucesión que decrece a cero y  $1 - H \in (0, 1)$ , entonces  $t_n^{1-H}d$  es una sucesión que decrece a cero. Por lo tanto la sucesión de eventos  $\{|B_1| > t_n^{1-H}d\}$  es creciente, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|B_1| > t_n^{1-H}d) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{|B_1| > t_n^{1-H}d\}\right) \\ &= \mathbb{P}(|B_1| > 0) = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A(t_n, \omega)) = 1$ .

Por otro lado, como la sucesión de eventos  $A(t_n, \omega)$  es decreciente y además  $\mathbb{P}(A(t_1, \omega)) < \infty$ , tenemos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A(t_n, \omega)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A(t_n, \omega)),$$

para  $d > 0$ , se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega : \sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{B_s(\omega)}{s} \right| > d\right\}\right) = 1,$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_t - B_{t_0}}{t - t_0} \right| = \infty\right) = 1,$$

Esto ultimo significa que  $(B_t)_{t \geq 0}$  no es diferenciable en el punto  $t_0 = 0$ . Por lo que podemos concluir que las trayectorias del movimiento browniano fraccionario no son diferenciables en ningún punto. ■

## 2.4. Pérdida de la propiedad de semimartingala

En esta sección, se introducirá otra noción de regularidad de trayectorias, llamada  $p$ -variación. La definición de la integral de Itô es una consecuencia directa de la propiedad de martingala del movimiento browniano. Pero el movimiento browniano fraccionario  $(B_t)_{t \geq 0}$  no exhibe esta propiedad, de hecho, ni siquiera es un semimartingala.

Se comenzará con el estudio del comportamiento asintótico de las  $p$ -variaciones del movimiento browniano fraccionario, para así encontrar cual es su  $p$ -variación. Esto, nos ayudará a probar que  $(B_t)_{t \geq 0}$  nunca es semimartingala, excepto, cuando  $H = 1/2$ , lo cual resulta ser un impedimento para definir la integral estocástica en el sentido de Itô, por lo que se requieren de otras técnicas que se verán en el capítulo siguiente.

### 2.4.1. La p-variación del movimiento browniano fraccionario

Usando polinomios de Hermite, comenzaremos con un resultado general, el cual puede pensarse como una ley de los grandes números para el movimiento browniano fraccionario.

**Teorema 2.6.** *Sea  $N$  una variable aleatoria tal que  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$  y sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible tal que  $\mathbb{E}[f^2(N)] < \infty$ . Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Entonces, cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(B_k - B_{k-1}) \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}[f(N)]. \quad (2.1)$$

*Demostración.* Cuando  $H = 1/2$ , la convergencia se sigue de la ley de los grandes números para el movimiento browniano, debido a la independencia de los incrementos.

Ahora, supongamos que  $H \neq 1/2$ . Por hipótesis tenemos que  $\mathbb{E}[f^2(N)] < \infty$ , entonces podemos expandir a la función  $f$  en términos de polinomios de Hermite, usamos el punto 3 de la proposición 1.18 y escribimos:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\sqrt{k!}} H_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

De la expansión anterior, tomando  $x = N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , y utilizando la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Hermite, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f^2(N)] &= \frac{c_0^2}{0!} \mathbb{E}[H_0(N)H_0(N)] + \frac{c_1^2}{1!} \mathbb{E}[H_1(N)H_1(N)] + \cdots + \frac{c_k^2}{k!} \mathbb{E}[H_k(N)H_k(N)] + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \mathbb{E}[f^2(N)] < \infty.$$

Tomando esperanza en la expansión de  $f$  y utilizando el teorema de convergencia dominada y la proposición 1.17, se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(N)] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\sqrt{k!}} H_k(N) \right] \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{0!}} \mathbb{E}[H_0(N)] + \frac{c_1}{\sqrt{1!}} \mathbb{E}[H_1(N)] + \cdots + \frac{c_k}{\sqrt{k!}} \mathbb{E}[H_k(N)] + \cdots \\ &= c_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la ecuación 2.1, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(B_k - B_{k-1}) - \mathbb{E}[f(N)] &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f(B_k - B_{k-1}) - \mathbb{E}[f(N)]) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l}{\sqrt{l!}} \sum_{k=1}^n H_l(B_k - B_{k-1}). \end{aligned}$$

Ahora, elevando al cuadrado y tomando esperanza en la ecuación anterior, y usando el punto 4 de la proposición 1.18, se llega a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(B_k - B_{k-1}) - \mathbb{E}[f(N)] \right)^2 \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l^2}{l!} \sum_{k,k'=1}^n \mathbb{E} [H_l(B_k - B_{k-1}) H_l(B_{k'} - B_{k'-1})] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \sum_{k,k'=1}^n \mathbb{E} [(B_k - B_{k-1})(B_{k'} - B_{k'-1})]^l \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \sum_{k,k'=1}^n \rho_H(k - k')^l, \end{aligned}$$

con

$$\rho_H(x) = \rho_H(|x|) = \frac{1}{2} (|x+1|^{2H} + |x-1|^{2H} - 2|x|^{2H}), \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Ya que

$$\rho_H(x) = \mathbb{E} [B_1(B_{|x|+1} - B_{|x|})],$$

de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$|\rho_H(x)| = \sqrt{\mathbb{E} [B_1^2]} \sqrt{\mathbb{E} [(B_{|x|+1} - B_{|x|})^2]} = 1.$$

Todo esto nos lleva a que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(B_k - B_{k-1}) - \mathbb{E}[f(N)] \right)^2 \right] &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \sum_{k,k'=1}^n |\rho_H(k - k')| \\ &= \text{Var}(f(N)) \frac{1}{n^2} \sum_{k,k'=1}^n |\rho_H(k - k')| \\ &= \text{Var}(f(N)) \frac{1}{n^2} \sum_{k'=1}^n \sum_{k=1-k'}^{n-k'} |\rho_H(k)| \\ &\leq 2 \text{Var}(f(N)) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\rho_H(k)|. \end{aligned}$$

Para poder concluir, necesitamos estudiar el comportamiento asintótico de  $\sum_{k=1}^{n-1} |\rho_H(k)|$ . Primero, notemos que cuando  $k \rightarrow \infty$ , se tiene  $\rho(k) \sim H(2H-1)k^{2H-2}$ :

$$\begin{aligned} \rho_H(k) &= \frac{1}{2}k^{2H-2} \left( \frac{k^2}{k^{2H}}(k+1)^{2H} + \frac{1}{k^{2H}}(k-1)^{2H} - 2 \right) \\ &= \frac{1}{2}k^{2H-2} \left( k^2 \left( \frac{k+1}{k} \right)^{2H} + \left( \frac{k-1}{k} \right)^{2H} - 2 \right) \\ &\sim \frac{1}{2}k^{2H-2}2H(2H-1). \end{aligned}$$

para el último paso, se aplica dos veces el teorema del valor medio. Por lo tanto,

- Si  $H < 1/2$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\rho_H(k)| \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\rho_H(k)| < \infty.$$

- Si  $H > 1/2$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\rho_H(k)| \sim H(2H-1) \sum_{k=1}^{\infty} k^{2H-2} \sim Hn^{2H-1}.$$

Por lo tanto se cumple lo que se quería probar, ya que  $H < 1$ . ■

**Nota 2.7.** Bajo las hipótesis del teorema 2.6 y usando la propiedad de autosimilitud de  $B$ , se tiene

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(n^H(B_{k/n} - B_{(k-1)/n}^H)) \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}[f(N)]$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Una aplicación directa del teorema 2.6 es el siguiente resultado acerca de las  $p$ -variaciones del movimiento browniano fraccionario.

**Corolario 2.8.** Sea  $B$  un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H \in (0, 1)$ ,  $p \in [1, \infty)$  y  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Entonces, cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene el siguiente límite en  $L^2(\Omega)$

$$\sum_{k=1}^n |B_{k/n} - B_{(k-1)/n}|^p \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } p > 1/H, \\ \mathbb{E}[|N|^p] & \text{si } p = 1/H, \\ +\infty & \text{si } p < 1/H. \end{cases}$$

*Demostración.* Aplicando la nota anterior con  $f(x) = |x|^p$  se obtiene el resultado. ■

### 2.4.2. El movimiento browniano fraccionario no es semimartingala

Ahora se demostrará que el movimiento browniano fraccionario pierde la propiedad de semimartingala cuando el índice de Hurst  $H \neq 1/2$ , para más detalles sobre la definición de semimartingala y los conceptos relacionados con esta, ver el apéndice B.

**Teorema 2.9 (Rogers, [29]).** *Sea  $B$  un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ . Entonces  $B$  no es una semimartingala.*

*Demostración.* Por la propiedad de autosimilitud del movimiento browniano fraccionario, es decir, el resultado dado en la nota 2.7, es suficiente considerar el intervalo  $[0, 1]$ . Si  $S$  denota una semimartingala sobre el intervalo  $[0, 1]$ , entonces:

1.  $\sum_{k=1}^n (S_{k/n} - S_{(k-1)/n})^2 \longrightarrow \langle S \rangle_1 < \infty$  en probabilidad cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Para la notación  $\langle S \rangle_1$  ver el teorema B.8 del apéndice B.

2. Si tenemos que  $\langle S \rangle_1 = 0$ , entonces  $S$  es de variación acotada, y en particular con probabilidad uno se tiene

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n |S_{k/n} - S_{(k-1)/n}| < \infty.$$

La demostración de este teorema será dividida en dos partes, de acuerdo al valor del índice de Hurst con respecto a  $1/2$ .

- Si  $H < 1/2$ , el corolario 2.8 nos dice que cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene

$$\sum_{k=1}^n (B_{k/n} - B_{(k-1)/n})^2 \xrightarrow{L^2} \infty$$

por lo que el punto 1 falla, lo cual implica que  $B$  no puede ser una semimartingala.

- Si  $H > 1/2$ , del corolario 2.8 cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene

$$\sum_{k=1}^n (B_{k/n} - B_{(k-1)/n})^2 \xrightarrow{L^2} 0$$

Sea  $p$  tal que  $1 < p < 1/H$ . Entonces, por el corolario 2.8 cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos

$$\sum_{k=1}^n |B_{k/n} - B_{(k-1)/n}|^p \longrightarrow \infty.$$

Además, por la continuidad uniforme de las trayectorias  $t \mapsto B_t(\omega)$  sobre el intervalo  $[0, 1]$ , tenemos que cuando  $n \rightarrow \infty$ , casi seguramente se cumple

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |B_{k/n} - B_{(k-1)/n}|^{p-1} \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, usando la desigualdad

$$\sum_{k=1}^n |B_{k/n} - B_{(k-1)/n}|^p \leq \sup_{1 \leq k \leq n} |B_{k/n} - B_{(k-1)/n}|^{p-1} \sum_{k=1}^n |B_{k/n} - B_{(k-1)/n}|,$$

se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |B_{k/n} - B_{(k-1)/n}| = \infty.$$

Estos hechos contradicen el punto 2, por lo que  $B$  no puede ser una semimartingala.

Por lo tanto para  $H < 1/2$  y  $H > 1/2$  el movimiento browniano fraccionario no es semimartingala. ■

## 2.5. Pérdida de la propiedad de Markov

En esta sección se verá que el movimiento browniano fraccionario no es un proceso de Markov cuando el índice de Hurst  $H$  es distinto de  $1/2$ .

Sea  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico con valores sobre  $\mathbb{R}$ . Decimos que  $(X_t)_{t \geq 0}$  es un *proceso de Markov* si satisface que para todo conjunto boreliano  $A \subset \mathbb{R}$  y para  $t > s > 0$  números reales, se tiene

$$\mathbb{P}(X_t \in A \mid X_u, u \leq s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s).$$

Es decir, el proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  es un proceso sin memoria, que significa que la probabilidad condicional del tiempo futuro de un proceso estocástico depende únicamente de su tiempo presente, siendo independiente de la historia de dicho proceso.

Para el movimiento browniano fraccionario, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.10.** *Sea  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Entonces  $B$  no es un proceso de Markov para  $H \neq 1/2$ .*

Primero enunciaremos un resultado que nos será de gran utilidad para la demostración. Su prueba se puede consultar en [14, Proposición 11.7].

**Proposición 2.11 (Proceso de Markov gaussiano).** Sea  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso gaussiano y sea  $R(s, t) = \mathbb{E}[X_s X_t]$  la función de covarianza de este proceso estocástico. Entonces  $X$  es un proceso de Markov si y sólo si

$$R(s, u) = \frac{R(s, t)R(t, u)}{R(t, t)}, \quad 0 \leq s \leq t \leq u.$$

**Demostración del Teorema 2.10.** Se hará por contradicción.

Supongamos que  $B$  es un proceso de Markov para  $H \neq 1/2$ . Por definición de movimiento browniano fraccionario, tenemos que  $B$  es un proceso gaussiano con función de covarianza dada por  $R_H(s, t) = \mathbb{E}[B_s B_t]$ , entonces por la proposición anterior, se tiene que para toda  $0 \leq s \leq t \leq u$

$$\mathbb{E}[B_s B_u] \mathbb{E}[B_t^2] = \mathbb{E}[B_s B_t] \mathbb{E}[B_t B_u]. \quad (2.2)$$

Escogiendo  $u = 1$  en la ecuación anterior, y para  $0 < s \leq 1$  definimos

$$\phi_H(s) = \mathbb{E}[B_s B_1] = \frac{1}{2} (1 + s^{2H} - (1 - s)^{2H}) > 0. \quad (2.3)$$

Observemos que para  $0 < s \leq t \leq 1$  se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[B_s B_t]}{\mathbb{E}[B_t^2]} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \left(\frac{s}{t}\right)^{2H} - \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{2H} \right) \\ &= \phi_H(s/t). \end{aligned}$$

De la ecuación (2.2), se puede deducir que

$$\phi_H(s) = \phi_H(s/t) \phi_H(t), \quad 0 < s \leq t \leq 1.$$

a la cual llamaremos *identidad funcional*.

Para  $x \geq 0$ , definamos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \varphi_H(x) &= \log \phi_H(e^{-x}) \\ &= \log \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2xH} - (1 - e^{-x})^{2H} \right), \end{aligned}$$

y observemos que

$$\varphi_H(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_H(x) = -\infty. \quad (2.4)$$

La identidad funcional implica que

$$\varphi_H(x + y) = \varphi_H(x) + \varphi_H(y), \quad x, y \geq 0,$$

y derivando con respecto a  $x$ , se tiene que la función  $\varphi'_H$  es constante sobre  $\mathbb{R}_+$ .

Usando las propiedades de la ecuación (2.4) se deduce la existencia de una constante  $c > 0$  tal que para toda  $x \geq 0$  se tiene

$$\varphi_H(x) = -cx,$$

o equivalentemente

$$\phi_H(s) = s^c, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (2.5)$$

debido a que  $\phi_H(e^{-x}) = e^{\varphi_H(x)} = e^{-cx}$ , y tomando  $s = e^{-x}$  podemos observar que  $0 \leq s \leq 1$  y finalmente tenemos  $\phi_H(s) = s^c$  para  $0 \leq s \leq 1$ .

Derivando dos veces con respecto a  $s$  en la ecuación (2.3), obtenemos

$$\phi''_H(s) = H(2H - 1)(s^{2H-2} - (1 - s)^{2H-2}).$$

Como  $H(2H - 1) \neq 0$  debido a que  $H \neq 1/2$  y por otra parte  $2H - 2 < 0$  para  $0 < H < 1$ , se tiene que  $\lim_{s \rightarrow 1} |\phi''_H(s)| = \infty$ .

Ahora, derivando con respecto a  $s$  en la ecuación (2.5) se obtiene que

$$\phi''_H(s) = c(c - 1)s^{c-2},$$

y por lo tanto  $\lim_{s \rightarrow 1} |\phi''_H(s)| = c|c - 1| \neq \infty$ . Lo cual es una contradicción, ya que los límites son distintos.

Por lo tanto, concluimos que el movimiento browniano fraccionario  $B$  no es un proceso de Markov para  $H \neq 1/2$ . ■

## 2.6. Movimiento browniano fraccionario de acuerdo a Mandelbrot y Van Ness

Cabe mencionar que, antes de que se introdujera el movimiento browniano fraccionario, el matemático Paul Lévy en el año de 1953 utilizó la integral de Riemann-Liouville fraccionaria para definir un proceso estocástico de la siguiente manera:

$$B_t = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_0^t (t - s)^{H-1/2} dW_s,$$

donde el integrando es la medida de ruido blanco. Esta integral resultaba ser mal adaptada a las aplicaciones de movimiento browniano fraccionario, así que Mandelbrot y Van Ness dieron su

propia definición en [22], en el cual dieron una representación integral del movimiento browniano fraccionario, tal representación puede ser vista como una integral de Itô determinista, es conocida como *representación temporal*.

La definición de movimiento browniano fraccionario que dieron Mandelbrot y Van Ness es la siguiente:

**Proposición 2.12.** *Sea  $H \in (0, 1)$  con  $H \neq 1/2$  y consideremos  $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}}$  un movimiento browniano estándar bilateral. Entonces el proceso estocástico  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  definido por*

$$B_t = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_s + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s \right\},$$

es un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst  $H$ .

*Demostración.* Para probar que el proceso estocástico  $(B_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano fraccionario, primero debemos mostrar que  $(B_t)_{t \geq 0}$  es un proceso gaussiano, es decir, debemos probar que las siguientes integrales

$$\int_{-\infty}^0 \left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dW_s + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s, \quad t \geq 0,$$

están bien definidas en el sentido de Itô.

Para probar que la primera integral está bien definida como integral de Itô, debemos ver que es integrable cuando  $s \rightarrow 0$  y cuando  $s \rightarrow -\infty$ .

Primero, se tiene la siguiente igualdad

$$\left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 = (t-s)^{2H-1} - 2(t-s)^{H-1/2}(-s)^{H-1/2} + (-s)^{2H-1}$$

por lo que la función anterior es integrable cuando  $s \rightarrow 0$ , ya que la función  $(-s)^{2H-1}$  es integrable, ya que  $2H - 1 > -1$ .

Ahora, cuando  $s \rightarrow -\infty$ , para toda  $t > 0$  fija, se tiene en ley:

$$\left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 \sim \left( H - \frac{1}{2} \right)^2 t^2 (-s)^{2H-3},$$

es decir, se cumple

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}}{\left( H - \frac{1}{2} \right) t (-s)^{H-\frac{3}{2}}} = 1.$$

En efecto, ya que si reescribimos el numerador de la siguiente manera:  $(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2} = t^{H-1/2}(1-s/t)^{H-1/2} - t^{H-1/2}(-s/t)^{H-1/2}$  y acomodando términos se llega a que el límite anterior es:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{t^{H-\frac{3}{2}} \left( \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{s}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} \right)}{\left(H - \frac{1}{2}\right) (-s)^{H-\frac{3}{2}}} = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{s}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{s}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}}}{\left(H - \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{s}{t}\right)^{H-\frac{3}{2}}},$$

haciendo el cambio de variable  $r = -s/t$ , y factorizando términos se llega finalmente

$$\frac{1}{\left(H - \frac{1}{2}\right)} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(1+r)^{H-\frac{1}{2}} - r^{H-\frac{1}{2}}}{r^{H-\frac{3}{2}}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{H-\frac{3}{2}} = 1.$$

Por lo que la función  $((t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2})^2$  es integrable, debido a que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \left(H - \frac{1}{2}\right)^2 t^2 (-s)^{2H-3} = 0, \quad \text{ya que } 2H - 3 < -1.$$

Por lo que la integral

$$\int_{-\infty}^0 \left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dW_s$$

está bien definida como integral de Itô.

Ahora, para probar que la segunda integral está bien definida, tenemos que ver que es integrable cuando  $s \rightarrow t$  y cuando  $s \rightarrow 0$ .

Para  $t > 0$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} (t-s)^{2H-1} = t^{2H-1},$$

es decir,  $(t-s)^{2H-1}$  es integrable en 0. Pero también se tiene que  $(t-s)^{2H-1}$  es integrable en  $t$  ya que  $2H - 1 > -1$ . Por lo que la integral

$$\int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s$$

está bien definida como integral de Itô. Por lo tanto, el proceso  $(B_t)_{t \geq 0}$  es un proceso gaussiano.

Ahora, debemos probar que  $(B_t)_{t \geq 0}$  cumple con la propiedad de autosimilitud y la de incrementos estacionarios.

Sea  $a > 0$ . Tenemos las siguientes igualdades en ley,

$$\begin{aligned}
 B_{at} &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( (at - s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_s + \int_{-\infty}^{\infty} (at - s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s \right\} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( (at - as)^{H-\frac{1}{2}} - (-as)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_{as} + \int_{-\infty}^{\infty} (at - as)^{H-\frac{1}{2}} dW_{as} \right\} \\
 &= \frac{a^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( (t - s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_s + \int_{-\infty}^{\infty} (t - s)^{H-\frac{1}{2}} dW_{as} \right\} \\
 &= a^H B_t,
 \end{aligned}$$

el penúltimo paso es debido a la propiedad de autosimilitud para el movimiento browniano bilateral  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Por lo tanto,  $a^{-H} B_{at} = B_t$  en ley, es decir, cumple la propiedad de autosimilitud.

Ahora, sea  $h > 0$ . Tenemos las siguientes igualdades en ley,

$$\begin{aligned}
 B_{t+h} - B_h &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( (t+h-s)^{H-\frac{1}{2}} - (h-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_s \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} (t+h-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s \right\} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_{s+h} + \int_{-\infty}^{\infty} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_{s+h} \right\} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) d(W_{s+h} - W_h) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} d(W_{s+h} - W_h) \right\} \\
 &= B_t,
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $B_{t+h} - B_h = B_t$  en ley, es decir, se cumple la propiedad de incrementos estacionarios.

Por lo que podemos concluir que, el proceso  $(B_t)_{t \geq 0}$  es un proceso gaussiano, autosimilar y con incrementos estacionarios, es decir, es un movimiento browniano fraccionario de acuerdo a la Proposición 2.2. ■

**Nota 2.13.** Notemos que la proposición anterior nos da una prueba alternativa del hecho de que el movimiento browniano fraccionario existe.



## Capítulo 3

---

# Integración con respecto al movimiento browniano fraccionario

---

Como se vio en el capítulo anterior, el movimiento browniano fraccionario no es una semimartingala. Así que no es posible usar el cálculo de Itô para este proceso estocástico, por lo que se requieren de métodos alternos para poder definir y resolver ecuaciones diferenciales estocásticas, que pueden ser reescritas de manera integral de la siguiente manera

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s, \quad t \in [0, T]$$

donde  $(B_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano con índice de Hurst  $H \in (0, 1)$ .

El primer paso es entender el significado de la siguiente integral  $\int \sigma(X_s) dB_s$ , la cual es una integral estocástica. Para  $H < 1$ , el movimiento browniano fraccionario  $(B_t)_{t \geq 0}$  no tiene trayectorias de variación acotada, por lo cual no puede emplearse la integral de Riemann-Stieltjes para darle sentido a la integral  $\int f(s) dB_s$ , para  $f$  una función continua.

Sin embargo, gracias al trabajo de L. C. Young en [32], para el caso  $H > 1/2$ , se tiene que si la función  $f$  es lo suficientemente regular en el sentido de trayectorias hölderianas, entonces  $\int f(s) dB_s$  puede ser construida como un límite de sumas de Riemann-Stieltjes, para tal hecho, se utilizará la integral de Young, la cual se definirá mas adelante.

Como se ha visto en el capítulo 1 visto, el caso  $H = 1/2$  corresponde al movimiento browniano, por lo que esta integral puede ser entendida como una integral de Itô [13].

Para el caso  $H < 1/2$ , mediante el uso de trayectorias rugosas, teoría atribuida a Terry Lyons en [21], es posible definir y estudiar esta integral estocástica, así como dar solución a ecuaciones diferenciales estocásticas guiadas por un movimiento browniano fraccionario.

En lo que sigue, sólo estudiaremos integrales estocásticas con respecto al movimiento browniano fraccionario para el caso  $H > 1/2$ , que es el caso de la integral de Young, como se verá a continuación.

### 3.1. Integral de Young

Comencemos fijando un tiempo  $T > 0$ , entonces para cualquier entero  $k \geq 1$ , denotamos por  $\mathcal{C}^k$  al conjunto de las funciones  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  que son  $k$ -veces diferenciables y donde la  $k$ -ésima derivada es continua. Por convención se usará que  $\mathcal{C}^0$  denota al conjunto de las funciones continuas  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$ , denotamos por  $\mathcal{H}^\alpha(I)$  al conjunto de las funciones continuas que son hölderianas de exponente  $\alpha$  en el intervalo  $I$ . El resultado de Young es el siguiente:

**Teorema 3.1 (Young 1936, [32]).** *Sea  $f \in \mathcal{H}^\alpha([0, T])$  y  $g \in \mathcal{H}^\beta([0, T])$ . Si  $\alpha + \beta > 1$ , entonces para cualquier partición  $t_k^n$  del intervalo  $[0, T]$  cuando la norma de la partición tiende a cero, se tiene que las sumas de Riemann-Stieltjes*

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^n) (g(t_{k+1}^n) - g(t_k^n))$$

convergen a un límite  $I_Y$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Este límite es independiente de la partición  $t_k^n$  y es denotado por

$$I_Y = \int_0^T f \, dg$$

al cual llamaremos la integral de Young de  $f$  con respecto a  $g$ .

Este teorema es muy importante para la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas guiadas por un movimiento browniano fraccionario para  $H > 1/2$ . De hecho de manera intuitiva, la solución de la siguiente ecuación

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t) \, dB_t,$$

debe tener la misma regularidad en las trayectorias que las del movimiento browniano fraccionario  $(B_t)_{t \geq 0}$ , el cual tiene trayectorias hölderianas de exponente  $\alpha \in (0, 1)$ . Por lo tanto, siempre que  $\sigma$

sea una función Lipschitz continua, la integral  $\int \sigma(X_t) dB_t$  está bien definida como una integral de Young cuando  $H > 1/2$ .

Para su uso posterior, necesitamos estudiar cómo acotar integrales de Young. Para esto, sea  $T > 0$  fija y dotemos al espacio  $\mathcal{H}^\alpha([0, T])$  con la norma

$$\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + \sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha},$$

donde  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|$ .

Para integrales de Young, tenemos los siguientes estimadores:

**Proposición 3.2.** *Sea  $f \in \mathcal{H}^\alpha([0, T])$  y  $g \in \mathcal{H}^\beta([0, T])$  con  $\alpha + \beta > 1$ . Para toda  $0 \leq s \leq t \leq T$  tenemos:*

$$\left| \int_s^t f dg \right| \leq K \|f\|_\alpha (t - s)^\beta \left( 1 + \frac{(t - s)^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right),$$

donde  $K = \sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \frac{|g(t) - g(s)|}{|t - s|^\beta}$

La herramienta básica para probar esta estimación es la siguiente representación de la integral de Young, la cual se debe a A. A. Ruzmaikina [30].

**Lema 3.3.** *Sea  $f \in \mathcal{H}^\alpha([s, t])$  y  $g \in \mathcal{H}^\beta([s, t])$  con  $\alpha + \beta > 1$ . Sea*

$$s_k^n = s + (t - s) \frac{k}{2^n}, \quad 0 \leq k \leq 2^n$$

la partición diádica del intervalo  $[s, t]$ . Entonces, se tiene:

$$\int_s^t f dg = f(s)(g(t) - g(s)) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} (f(s_{2k+1}^l) - f(s_{2k}^l)) (g(s_{2k+2}^l) - g(s_{2k+1}^l)).$$

*Demostración.* Consideremos la siguiente suma de Riemann-Stieltjes

$$S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} f(s_k^n) (g(s_{k+1}^n) - g(s_k^n)).$$

Se tiene que,

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \sum_{k=0}^{2^n-1} f(s_k^n) (g(s_{k+1}^n) - g(s_k^n)) - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_k^{n-1}) (g(s_{k+1}^{n-1}) - g(s_k^{n-1})) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} f(s_k^n) g(s_{k+1}^n) - \sum_{k=0}^{2^n-1} f(s_k^n) g(s_k^n) - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_k^{n-1}) g(s_{k+1}^{n-1}) + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_k^{n-1}) g(s_k^{n-1}). \end{aligned}$$

Notemos que la partición  $s_k^n$ , es un refinamiento de la partición  $s_k^{n-1}$ , con  $0 \leq k \leq 2^n$  y  $n \geq 1$ . En particular,

$$s_{2k}^n = s_k^{n-1} \quad \text{para } k \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\},$$

y

$$s_{2k+2}^n = s_{k+1}^{n-1} \quad \text{para } k \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\}.$$

Por otro lado, se tiene la siguiente descomposición

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} f(s_k^n)g(s_k^n) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k}^n)g(s_{2k}^n) + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k+1}^n)g(s_{2k+1}^n).$$

Y debido a lo que hicimos notar anteriormente, se tiene

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k}^n)g(s_{2k}^n) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_k^{n-1})g(s_k^{n-1}).$$

De esta última ecuación, se sigue que

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{2^n-1} f(s_k^n)g(s_{k+1}^n) - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k+1}^n)g(s_{2k+1}^n) - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k}^n)g(s_{k+1}^{n-1}).$$

Ahora, hacemos la descomposición de la primer suma que aparece en la ecuación anterior, como sigue:

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} f(s_k^n)g(s_{k+1}^n) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k}^n)g(s_{2k+1}^n) + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k+1}^n)g(s_{2k+2}^n).$$

Así, por la descomposición antes hecha, se tiene

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k}^n)g(s_{2k+1}^n) + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k+1}^n) (g(s_{2k+2}^n) - g(s_{2k+1}^n)) - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k}^n)g(s_{k+1}^{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k}^n) (g(s_{2k+1}^n) - g(s_{k+1}^{n-1})) + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k+1}^n) (g(s_{2k+2}^n) - g(s_{2k+1}^n)) \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k}^n) (g(s_{2k+1}^n) - g(s_{2k+2}^n)) + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f(s_{2k+1}^n) (g(s_{2k+2}^n) - g(s_{2k+1}^n)) \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} (f(s_{2k+1}^n) - f(s_{2k}^n)) (g(s_{2k+2}^n) - g(s_{2k+1}^n)). \end{aligned}$$

De esta manera, hemos probado que, para toda  $n \geq 1$ , se tiene

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} (f(s_{2k+1}^n) - f(s_{2k}^n)) (g(s_{2k+2}^n) - g(s_{2k+1}^n)).$$

Ya que  $s_0^0 = s$  y  $s_1^0 = t$ , se tiene, por recurrencia,

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{2^{n-j}-1} (f(s_{2k+1}^{n-j+1}) - f(s_{2k}^{n-j+1})) (g(s_{2k+2}^{n-j+1}) - g(s_{2k+1}^{n-j+1})) \\ &= f(s)(g(t) - g(s)) + \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} (f(s_{2k+1}^l) - f(s_{2k}^l)) (g(s_{2k+2}^l) - g(s_{2k+1}^l)). \end{aligned}$$

Finalmente, ya que se cumplen las hipótesis del teorema 3.1, haciendo  $n \rightarrow \infty$ , se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_s^t f \, dg = f(s)(g(t) - g(s)) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} (f(s_{2k+1}^l) - f(s_{2k}^l)) (g(s_{2k+2}^l) - g(s_{2k+1}^l)).$$

Esto último termina la prueba. ■

Ahora continuemos con la demostración pendiente.

*Demostración de la proposición 3.2.* Del lema 3.3 probado anteriormente, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f \, dg \right| &\leq |f(s)(g(t) - g(s))| + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} |f(s_{2k+1}^l) - f(s_{2k}^l)| |g(s_{2k+2}^l) - g(s_{2k+1}^l)| \\ &\leq K \|f\|_{\infty} (t-s)^{\beta} + K \|f\|_{\alpha} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} \frac{(t-s)^{\alpha}}{2^{l\alpha}} \frac{(t-s)^{\beta}}{2^{l\beta}} \\ &\leq K \|f\|_{\infty} (t-s)^{\beta} \left( 1 + \frac{(t-s)^{\alpha}}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right). \end{aligned}$$

De igual manera que antes, se tienen los siguientes estimadores. ■

**Proposición 3.4.** Sea  $f \in \mathcal{H}^{\alpha}([0, T])$  y  $g \in \mathcal{H}^{\beta}([0, T])$  con  $\alpha + \beta > 1$ . Para toda  $0 \leq s \leq t \leq T$  tenemos:

$$\square \sup_{u \in [s, t]} \left| \int_s^u f(v) \, dv \right| + \sup_{s \leq u_1 < u_2 \leq t} \frac{\left| \int_{u_1}^{u_2} f(v) \, dv \right|}{|u_1 - u_2|^{\alpha}} \leq \|f\|_{\infty} (t-s)^{1-\alpha} (1 + (t-s)^{\alpha}),$$

- Si  $\beta \geq \alpha$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{u \in [s, t]} \left| \int_s^u f \, dg \right| + \sup_{s \leq u_1 < u_2 \leq t} \frac{\left| \int_{u_1}^{u_2} f \, dg \right|}{|u_1 - u_2|^\alpha} \\ \leq K \|f\|_\alpha (t - s)^{\beta - \alpha} (1 + (t - s)^\alpha) \left( 1 + \frac{(t - s)^\alpha}{2^{\alpha + \beta} - 2} \right). \end{aligned}$$

La integral de Young tiene buenas propiedades, una de las más importantes es que cumple la siguiente regla de la cadena.

**Corolario 3.5.** Sea  $f \in \mathcal{H}^\alpha$  con  $\alpha > 1/2$  y sea  $\phi$  una función continuamente diferenciable sobre  $\mathbb{R}^d$  cuyas derivadas parciales tienen trayectorias hölderianas de exponente  $\alpha$ . Entonces,

$$\phi(f(1)) = \phi(f(0)) + \sum_{k=1}^d \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial f^k}(f(s)) \, df^k(s),$$

donde la integral es una integral de Young sobre el intervalo  $[0, 1]$ .

*Demostración.* Como  $\phi$  es una función diferenciable sobre  $\mathbb{R}^d$ , aplicamos la regla de la cadena y obtenemos,

$$d(\phi(f(s))) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \phi(f(s))}{\partial f^k} \, df^k(s),$$

integrando de ambos lados en la igualdad anterior, se llega a

$$\int_0^1 d(\phi(f(s))) = \int_0^1 \sum_{k=1}^d \frac{\partial \phi(f(s))}{\partial f^k} \, df^k(s),$$

como la suma es finita, la podemos intercambiar con la integral, y aplicando el teorema fundamental del cálculo en la igualdad del lado izquierdo, se tiene

$$\phi(f(1)) - \phi(f(0)) = \sum_{k=1}^d \int_0^1 \frac{\partial \phi(f(s))}{\partial f^k} \, df^k(s),$$

y despejando se llega a lo que queríamos demostrar. ■

En el resultado que sigue, sea  $f \in \mathcal{H}^\alpha$  con  $\alpha > 1/2$  y  $(\phi^k)_{k=0}^d$  un vector diferenciable sobre  $\mathbb{R}^d$  que es hölderiano de exponente  $\alpha$  y  $a \in \mathbb{R}^d$ . Si  $z_0$  es una trayectoria hölderiana de exponente  $\alpha$ , definimos las sucesiones iteradas de Picard  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$  como

$$z_{m+1}(t) = a + \int_0^t \phi^0(z_m(s)) \, ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t \phi^k(z_m(s)) \, df^k(s), \quad t \in [0, 1], \quad m \geq 0.$$

**Teorema 3.6** (Lyons 1994, [20]). *Supongamos que  $\phi$  es una función diferenciable con derivadas parciales hölderianas de exponente  $\alpha > 1/2$ . Las sucesiones iteradas de Picard convergen en norma  $\alpha$ . El límite no depende de la elección del punto inicial  $z_0$ .*

**Definición 3.7.** *El límite del teorema anterior, denotado por  $z$ , es llamado la solución de la ecuación diferencial*

$$z(t) = a + \int_0^t \phi^0(z(s)) \, ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t \phi^k(z(s)) \, df^k(s), \quad t \in [0, 1].$$

## 3.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas guiadas por trayectorias hölderianas

En esta sección, se busca dar soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias guiadas por trayectorias hölderianas. Primero, se darán algunos recordatorios que serán de utilidad para demostrar la existencia de una solución única a una ecuación diferencial ordinaria.

Una función  $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , decimos que verifica la *condición de Lipschitz*, o que es *Lipschitz continua* si existe una constante  $L > 0$  tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

para toda  $x, y \in D$ .

Claramente, existe una constante mínima  $L_0 > 0$  que verifica la desigualdad anterior,

$$L_0 = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x, y \in D, x \neq y \right\},$$

la constante  $L_0$  se llama *constante de Lipschitz*.

Si  $f$  es una función Lipschitz continua sobre el espacio  $D = \mathbb{R}^d$ , entonces  $f$  se llama *globalmente Lipschitz continua*.

Además, toda función Lipschitz continua es uniformemente continua y por lo tanto es continua, es decir, la condición de Lipschitz es una condición más fuerte que la continuidad.

Decimos que una función  $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  es una *contracción* si existe una constante  $0 \leq K < 1$  tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para toda  $x, y \in D$ . Es decir, una contracción reduce distancias entre puntos. Notemos que en el caso  $K = 0$ ,  $f$  es una función constante. Por lo tanto, una contracción es una función Lipschitz con constante menor que 1. Más aún, toda contracción es continua.

La condición de Lipschitz es una hipótesis importante para demostrar la existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones diferenciales ordinarias. La condición de continuidad asegura la existencia de soluciones mediante el *Teorema de Peano*, pero este es insuficiente en varios aspectos. En primer lugar no da un método para calcular soluciones, solamente indica su existencia. En segundo lugar, es deseable que la ecuación tenga una única solución.

Esto nos lleva a buscar un teorema que garantice la unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial y que además nos indique una solución única, mediante el *Teorema de Picard-Lindelöf*.

**Teorema 3.8.** *Sea  $g \in \mathcal{H}^\beta([0, T])$ , donde  $1/2 < \beta \leq 1$  y sean  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tal que*

- $b$  y  $\sigma$  son funciones globalmente Lipschitz continuas;
- $\sigma$  es continuamente diferenciable, con derivada globalmente Lipschitz.

Para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$  la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(x(s)) \, ds + \int_0^t \sigma(x(s)) \, dg(s),$$

tiene solución única sobre el espacio  $\mathcal{H}^\beta([0, T])$ .

Para este hecho es suficiente probar que para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $\beta > \alpha > 1 - \beta$  la ecuación diferencial ordinaria

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(x(s)) \, ds + \int_0^t \sigma(x(s)) \, dg(s),$$

tiene solución única sobre  $\mathcal{H}^\alpha([0, T])$ , y que,  $x \in \mathcal{H}^\beta([0, T])$ , lo cual es claro por el teorema 3.2. En lo subsecuente, trabajaremos bajo las hipótesis del teorema anterior y escogiendo  $\beta > \alpha > 1 - \beta$ . Denotaremos por

$$L = \sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \left\{ \frac{|g(t) - g(s)|}{|t - s|^\beta} \right\}.$$

Para  $x \in \mathcal{H}^\alpha([0, T])$ , sea

$$\Psi(x)(t) = x_0 + \int_0^t b(x(s)) \, ds + \int_0^t \sigma(x(s)) \, dg(s).$$

Para  $K > 0$ , definimos por  $\mathcal{H}_K^\alpha([0, T])$  al subespacio cerrado de  $\mathcal{H}^\alpha([0, T])$  como sigue:

$$\mathcal{H}_K^\alpha([0, T], x_0) = \{f \in \mathcal{H}^\alpha([0, T]) \mid f(0) = x_0, |f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\alpha\}.$$

Un primer resultado es el siguiente.

**Lema 3.9.** *Sea  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeña, entonces  $\Psi$  manda a  $\mathcal{H}_K^\alpha([0, \varepsilon], x_0)$  en si mismo, es decir,  $\Psi \in \mathcal{H}_K^\alpha([0, \varepsilon], x_0)$ .*

*Demostración.* Si  $\varepsilon > 0$ ,  $0 \leq s \leq t \leq \varepsilon$  y  $x \in \mathcal{H}_K^\alpha([0, \varepsilon], x_0)$ . Tenemos,

$$\begin{aligned} |\Psi(x)(t) - \Psi(x)(s)| &= \left| x_0 + \int_0^t b(x(u)) \, du + \int_0^t \sigma(x(u)) \, dg(u) \right. \\ &\quad \left. - x_0 - \int_0^s b(x(u)) \, du - \int_0^s \sigma(x(u)) \, dg(u) \right| \\ &= \left| \int_s^t b(x(u)) \, du + \int_s^t \sigma(x(u)) \, dg(u) \right| \\ &\leq \left| \int_s^t b(x(u)) \, du \right| + \left| \int_s^t \sigma(x(u)) \, dg(u) \right|. \end{aligned}$$

En primer lugar, se tiene

$$\left| \int_s^t b(x(u)) \, du \right| \leq (t - s) \sup_{t \in [0, \varepsilon]} |b(x(t))|,$$

y ya que  $b$  es una función Lipschitz continua, se tiene que para alguna  $C \geq 0$

$$\sup_{t \in [0, \varepsilon]} |b(x(t))| \leq |b(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_s^t b(x(u)) \, du \right| \leq (t - s)|b(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha.$$

Por otro lado, de la Proposición 3.2, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t \sigma(x(u)) \, dg(u) \right| &\leq L \left( \sup_{u \in [0, \varepsilon]} |\sigma(x(u))| + \sup_{0 \leq u_1 < u_2 \leq \varepsilon} \frac{|\sigma(x(u_2)) - \sigma(x(u_1))|}{|u_2 - u_1|^\alpha} \right) \\ &\quad (t - s)^\beta \left( 1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right), \end{aligned}$$

ahora, usado el hecho de que  $\sigma$  es una función Lipschitz continua, se tiene que para alguna  $C \geq 0$

$$\sup_{u \in [0, \varepsilon]} |\sigma(x(u))| + \sup_{0 \leq u_1 < u_2 \leq \varepsilon} \frac{|\sigma(x(u_2)) - \sigma(x(u_1))|}{|u_2 - u_1|^\alpha} \leq |\sigma(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha + CK.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_s^t \sigma(x(u)) \, dg(u) \right| \leq (|\sigma(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha + CK) (t-s)^\beta \left( 1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right).$$

Y finalmente podemos concluir que

$$\begin{aligned} |\Psi(x)(t) - \Psi(x)(s)| &\leq (t-s)|b(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha \\ &\quad + (|\sigma(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha + CK) (t-s)^\beta \left( 1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right). \end{aligned}$$

Esto último, implica lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{|\Psi(x)(t) - \Psi(x)(s)|}{(t-s)^\alpha} &\leq (t-s)^{1-\alpha} (|b(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha) \\ &\quad + (t-s)^{\beta-\alpha} (|\sigma(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha + CK) \left( 1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right) \\ &\leq \varepsilon^{1-\alpha} (|b(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha) \\ &\quad + \varepsilon^{\beta-\alpha} (|\sigma(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha + CK) \left( 1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right). \end{aligned}$$

Y para  $\varepsilon$  suficientemente pequeña, se tiene

$$\varepsilon^{1-\alpha} (|b(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha) + \varepsilon^{\beta-\alpha} (|\sigma(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha + CK) \left( 1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right) \leq K.$$

■

Lo subsecuente para la demostración del Teorema 3.8 es probar la propiedad de contracción.

**Lema 3.10.** *Si  $\varepsilon > 0$ , entonces  $\Psi$  es una contracción sobre el espacio  $\mathcal{H}_K^\alpha([0, \varepsilon], x_0)$  con la norma*

$$\|f\|_{\alpha, \varepsilon} = \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} |f(s)| + \sup_{0 \leq s < t \leq \varepsilon} \left\{ \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} \right\}.$$

*Demostración.* En lo que sigue, denotaremos por  $C$  a la cota superior de las constantes Lipschitz  $b, \sigma$  y  $\sigma'$ . Sean  $x, y \in \mathcal{H}_K^\alpha([0, \varepsilon], x_0)$ . De la desigualdad del triángulo, tenemos

$$\|\Psi(x) - \Psi(y)\|_{\alpha, \varepsilon} \leq \left\| \int_0^\cdot (b(x(s)) - b(y(s))) \, ds \right\|_{\alpha, \varepsilon} + \left\| \int_0^\cdot (\sigma(x(s)) - \sigma(y(s))) \, dg(s) \right\|_{\alpha, \varepsilon}.$$

De la Proposición 3.4, se tienen las siguientes desigualdades:

$$\left\| \int_0^\cdot (b(x(s)) - b(y(s))) \, ds \right\|_{\alpha, \varepsilon} \leq C\varepsilon^{1-\alpha}(1 + \varepsilon^\alpha)\|x - y\|_{\alpha, \varepsilon}$$

y

$$\left\| \int_0^\cdot (\sigma(x(s)) - \sigma(y(s))) dg(s) \right\|_{\alpha, \varepsilon} \leq L\varepsilon^{\beta-\alpha}(1 + \varepsilon^\alpha) \left( 1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right) \|\sigma(x) - \sigma(y)\|_{\alpha, \varepsilon}.$$

El siguiente paso es encontrar una cota superior para  $\|\sigma(x) - \sigma(y)\|_{\alpha, \varepsilon}$ . Primero, se tiene

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} |\sigma(x(s)) - \sigma(y(s))| &\leq C \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} |x(s) - y(s)| \\ &\leq C \|x - y\|_{\alpha, \varepsilon}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que controlar la regularidad de las trayectorias h lderianas de  $\sigma(x) - \sigma(y)$ . Para esto, escribimos,

$$\sigma(x(t)) - \sigma(y(t)) = (x(t) - y(t)) \int_0^1 \sigma'(ux(t) + (1-u)y(t)) du$$

y

$$\sigma(x(s)) - \sigma(y(s)) = (x(s) - y(s)) \int_0^1 \sigma'(ux(s) + (1-u)y(s)) du$$

Entonces, restando las igualdades anteriores se llega a que

$$|\sigma(x(t)) - \sigma(y(t)) - (\sigma(x(s)) - \sigma(y(s)))|$$

está acotado por

$$\left| (x(t) - y(t)) \int_0^1 \sigma'(ux(t) + (1-u)y(t)) du - (x(s) - y(s)) \int_0^1 \sigma'(ux(s) + (1-u)y(s)) du \right|$$

y ésta a la vez, tiene la siguiente cota

$$\begin{aligned} C(t-s)^\alpha \|x - y\|_{\alpha, \varepsilon} + C|x(s) - y(s)| \int_0^1 (u|x(t) + x(s)| + (1-u)|y(t) + y(s)|) du \\ \leq C(t-s)^\alpha \|x - y\|_{\alpha, \varepsilon} + KC \|x - y\|_{\alpha, \varepsilon} \\ \leq (C + KC)(t-s)^\alpha \|x - y\|_{\alpha, \varepsilon}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \|\Psi(x) - \Psi(y)\|_{\alpha, \varepsilon} \\ \leq C\varepsilon^{1-\alpha}(1 + \varepsilon^\alpha) \|x - y\|_{\alpha, \varepsilon} + L\varepsilon^{\beta-\alpha}(1 + \varepsilon^\alpha) \left( 1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right) (C + KC) \|x - y\|_{\alpha, \varepsilon} \\ = \left( C\varepsilon^{1-\alpha}(1 + \varepsilon^\alpha) + L\varepsilon^{\beta-\alpha}(1 + \varepsilon^\alpha) \left( 1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2} \right) (C + KC) \right) \|x - y\|_{\alpha, \varepsilon}, \end{aligned}$$

y para  $\varepsilon$  suficientemente pequeña, tenemos que se cumple la propiedad de contracción. ■

El lema anterior prueba que hay una solución única a la ecuación diferencial en un intervalo pequeño  $[0, \varepsilon]$ . Más precisamente, las estimaciones han probado que  $\varepsilon$  debe satisfacer

$$C\varepsilon^{1-\alpha}(1 + \varepsilon^\alpha) + L\varepsilon^{\beta-\alpha}(1 + \varepsilon^\alpha) \left(1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2}\right) (C + KC) < 1,$$

y además,

$$\varepsilon^{1-\alpha} (|b(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha) + \varepsilon^{\beta-\alpha} \left(1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2^{\alpha+\beta} - 2}\right) (|\sigma(x_0)| + CK\varepsilon^\alpha + CK) \leq K.$$

Para concluir con la demostración del teorema 3.8, como  $\Psi$  es una contracción definida en el subespacio cerrado  $\mathcal{H}_K^\alpha([0, T], x_0)$  de un espacio métrico completo  $\mathcal{H}^\alpha([0, T])$ , el teorema del punto fijo de Banach implica que existe una única solución  $x \in \mathcal{H}^\alpha([0, T])$  tal que  $x(t) = \Psi(x)(t)$ , esto es:

$$x(t) = \Psi(x)(t) = x_0 + \int_0^t b(x(s)) \, ds + \int_0^t \sigma(x(s)) \, dg(s).$$

### 3.2.1. Caso multidimensional

Los resultados que se dieron anteriormente los podemos ampliar a dimensiones más grandes. El teorema siguiente se prueba de la misma manera que el teorema 3.8, en el libro de Nourdin [26, §3.2.1] se puede revisar una prueba completa de lo siguiente.

**Teorema 3.11.** *Sea  $g \in \mathcal{H}^\beta([0, T], \mathbb{R}^d)$ , donde  $1/2 < \beta \leq 1$  y sean  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  funciones tal que*

- $b$  y  $\sigma$  son funciones globalmente Lipschitz continuas;
- $\sigma$  es continuamente diferenciable, con derivada globalmente Lipschitz.

Para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(x(s)) \, ds + \int_0^t \sigma(x(s)) \, dg(s),$$

tiene solución única sobre el espacio  $\mathcal{H}^\beta([0, T])$ , el cual esta evaluado en  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas guiadas por movimientos brownianos fraccionarios

En lo que sigue, se estudiara sobre como resolver el problema de existencia de una densidad para las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas guiadas por movimientos brownianos fraccionarios.

Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano fraccionario de dimensión  $d$  con índice de Hurst  $H \in (0, 1)$ , definido sobre un espacio de probabilidad completo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  como:

$$(B_t)_{t \geq 0} = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t \geq 0},$$

donde  $B_t^k$  son las componentes de  $(B_t)_{t \geq 0}$  para  $k = 1, 2, \dots, d$ .

Es decir,  $(B_t)_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico gaussiano estándar, con función de covarianza dada por

$$R_H(s, t) = \mathbb{E} [B_s^k B_t^l] = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}) \delta_{kl}, \quad s, t \geq 0, \quad k, l = 1, 2, \dots, d.$$

En la proposición 2.3 se probo que el movimiento browniano fraccionario admite una modificación continua con trayectorias hölderianas de exponente  $\beta < H$ . Por lo que, si  $H > 1/2$  y  $V_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  son funciones Lipchitz suaves donde sus derivadas son Lipchitz, entonces la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_t^x = V_0(X_t^x) dt + \sum_{k=1}^d V_k(X_t^x) dB_t^k \\ X_0^x = x \end{cases} \quad (3.1)$$

tiene una única solución para  $x \in \mathbb{R}^d$ .

En lo que sigue, se tiene como propósito señalar algunas propiedades de la solución a esta ecuación diferencial estocástica, además de dar la existencia de una densidad con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, se quiere mostrar el siguiente resultado:

**Teorema 3.12 (Teorema de densidad).** *Supongamos que  $V_1(x), \dots, V_d(x)$  forma una base para  $\mathbb{R}^d$ , entonces la variable aleatoria  $X_t^x$  admite una densidad con respecto a la medida de Lebesgue, para todo  $t > 0$ .*

La herramienta correcta para probar este teorema de densidad, es utilizando el cálculo de Malliavin. En lo que sigue, sólo nos centraremos en dar las herramientas necesarias para entender estos conceptos, sin hacer demostraciones sobre esto. Para ver más a detalle los conceptos que se manejarán a continuación, ver [24].

### 3.3.1. Cálculo de Malliavin con respecto al movimiento browniano fraccionario

Primero, se van a afirmar algunos hechos sobre el cálculo de Malliavin con respecto al movimiento browniano fraccionario.

Consideramos el espacio de Wiener de trayectorias continuas:

$$\mathcal{W}^{\otimes d} = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^d), (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}, \mathbb{W})$$

donde

- $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^d)$  es el espacio de las funciones continuas de  $[0, 1]$  a  $\mathbb{R}^d$ ;
- $\mathbb{W}$  es la medida de Wiener;
- $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$  es la filtración completada con respecto a la medida  $\mathbb{W}$  del proceso canónico  $(\omega_t)_{0 \leq t \leq 1}$ , definido por  $\omega_t(f) = f(t)$  con  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ .

Denotemos por  $\mathcal{E}$  al espacio de las funciones escalonadas con valores en  $\mathbb{R}^d$  sobre el intervalo  $[0, 1]$ , y denotemos por  $\mathcal{H}$  al espacio de Hilbert definido como la cerradura de  $\mathcal{E}$  para el producto escalar,

$$\langle (\mathbb{1}_{[0, t_1]}, \dots, \mathbb{1}_{[0, t_d]}), (\mathbb{1}_{[0, s_1]}, \dots, \mathbb{1}_{[0, s_d]}) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^d R_H(t_k, s_k),$$

donde  $R_H$  es la función de covarianza del movimiento browniano fraccionario.

Para  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ , se tiene (ver [1]):

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = H(2H - 1) \int_0^1 \int_0^1 |s - t|^{2H-2} \phi(s) \psi(t) ds dt.$$

Como el movimiento browniano fraccionario  $B = (B_t)_{t \in [0, 1]}$  es un proceso gaussiano, se puede desarrollar un cálculo estocástico de variaciones (actualmente llamado como cálculo de Malliavin) con respecto a si mismo. Las nociones básicas del cálculo de Malliavin son las siguientes.

Una variable aleatoria real  $F$  que es  $\mathcal{F}_1$ -medible, decimos que es una *variable aleatoria suave y cilíndrica* si puede ser escrita como

$$F = f(B(h_1), \dots, B(h_n)),$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada de clase  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}$  y  $n \geq 1$ . Denotaremos por  $\mathcal{S}$  al conjunto de las variables aleatorias que son suaves y cilíndricas.

La derivada de la variable aleatoria  $F = f(B(h_1), \dots, B(h_n)) \in \mathcal{S}$  es el proceso estocástico  $\mathbf{D}_t F : \Omega \rightarrow \mathcal{H}$  con  $t \in [0, 1]$  y con valores sobre  $\mathbb{R}^d$  dada por

$$\mathbf{D}_t F = \sum_{k=1}^n \partial_k f(B(h_1), \dots, B(h_n)) h_k(t),$$

donde  $\partial_k f$  denota a la derivada parcial de  $f$  con respecto a la  $k$ -ésima variable. La derivada antes dada recibe el nombre de *derivada de Malliavin de  $F$* .

Más generalmente, podemos introducir derivadas iteradas, es decir, si  $F \in \mathcal{S}$ , se tiene

$$\mathbf{D}_{t_1, \dots, t_j}^j F = \mathbf{D}_{t_1} \cdots \mathbf{D}_{t_j} F.$$

Entonces, podemos considerar a  $\mathbf{D}^j F$  como un proceso estocástico cuadrado integrable sobre el intervalo  $[0, 1]$  y con valores sobre  $\mathbb{R}^d$ . Mediante el uso de la formula de integración por partes, es posible demostrar, que para cualquier  $p \geq 1$ , el operador  $\mathbf{D}^j : \mathcal{S} \rightarrow L^p(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^d), \mathcal{H}^{\otimes j})$  es cerrado, es decir, es cerrado sobre  $\mathcal{S}$ .

Denotemos por  $\mathcal{D}^{j,p}(\mathcal{H})$  al dominio de  $\mathbf{D}^j$  sobre el espacio  $L^p(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^d), \mathcal{H}^{\otimes j})$  como la cerradura de la clase de variables aleatorias cilíndricas con respecto a la norma

$$\|F\|_{j,p} = \left( \mathbb{E}[F^p] + \sum_{i=1}^j \mathbb{E} \left[ \|\mathbf{D}^i F\|_{L^p(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^d), \mathcal{H}^{\otimes i})}^p \right] \right)^{1/p},$$

y definamos al espacio  $\mathcal{D}^\infty(\mathcal{H})$  por

$$\mathcal{D}^\infty(\mathcal{H}) = \bigcap_{p \geq 1} \bigcap_{j \geq 1} \mathcal{D}^{j,p}(\mathcal{H}),$$

esto es,  $\mathcal{D}^\infty(\mathcal{H})$  consiste de los elementos aleatorios que tienen derivadas de Malliavin de todos los ordenes y donde éstas derivadas se encuentran en los espacios  $L^p$ .

Se tiene el siguiente resultado, el cual hace que el cálculo de Malliavin sea tan útil cuando se quiere estudiar la existencia de densidades de variables aleatorias.

**Teorema 3.13.** *Sea  $F = (F_1, \dots, F_n)$  un vector aleatorio que es  $\mathcal{F}_1$ -medible tal que se cumple:*

- Para toda  $k = 1, \dots, n$ ,  $F_i \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathcal{H})$ ;
- La matriz  $\mathcal{M} = (\langle \mathbf{D} F^k, \mathbf{D} F^i \rangle_{\mathcal{H}})_{1 \leq k, i \leq n}$  es invertible casi seguramente.

Entonces  $F$  tiene una densidad con respecto a la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}^n$ . Si por otra parte  $F \in \mathcal{D}^\infty(\mathcal{H})$  y para toda  $p > 1$ , se tiene

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{|\det(\mathcal{M})|^p} \right] < +\infty,$$

entonces esta densidad es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , es decir, es suave.

**Nota 3.14.** La matriz  $\mathcal{M}$  es llamada la matriz de Malliavin del vector aleatorio  $F$ .

### 3.3.2. Existencia de la densidad

En lo que prosigue, se dará un bosquejo de la demostración del teorema de densidad 3.12. Para esto, primero se darán algunas definiciones y resultados que serán de utilidad para su entendimiento.

**Definición 3.15.** El proceso estocástico continuo de funciones continuas  $\Phi_t : x \rightarrow X_t^x$  es llamado el flujo estocástico asociado a la ecuación diferencial estocástica (3.1), el cual está definido como  $\Phi_t(x) = X_t^x$ .

Ahora, como  $V_k$  son funciones Lipschitz, se tiene que para toda  $t \geq 0$ , el flujo  $\Phi_t$  asociado a la ecuación (3.1), es un flujo de funciones diferenciables. Por otra parte, si definimos  $\mathbf{J}_t$  como la matriz jacobiana dada por  $\mathbf{J}_t = \frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial x}$ , entonces ésta es una solución única, como se ve en el siguiente resultado:

**Lema 3.16.** Sea  $\Phi_t$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces se satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} + \int_0^t DV_0(X_s^x) \mathbf{J}_s \, ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t DV_k(X_s^x) \mathbf{J}_s \, dB_s^k.$$

El siguiente resultado es una representación para la derivada de Malliavin de una solución a una ecuación diferencial estocástica:

**Lema 3.17.** Para toda  $k = 1, \dots, d$ ,  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^d$ , se tiene que  $X_t^{x,k} \in \mathcal{D}^\infty(\mathcal{H})$  y además

$$D_s^i X_t^x = \mathbf{J}_t \mathbf{J}_s^{-1} V_i(X_s), \quad i = 1, \dots, d, \quad 0 \leq s \leq t,$$

donde  $D_s^i X_t^{x,k}$  es la  $i$ -ésima componente de  $D_s X_t^{x,k}$ .

Si ahora fijamos a  $x \in \mathbb{R}^d$  como la condición inicial para la ecuación (3.1), y denotamos por

$$\mathcal{M}_1 = \left( \sum_{i=1}^d \int_0^1 \mathbf{D}_s^i X_t^{x,i} \mathbf{D}_s^i X_t^{x,i'} ds \right)_{1 \leq i, i' \leq d}$$

a la matriz de Malliavin de  $X_t^x$ . Por lo tanto, del lema anterior se tiene

$$\mathcal{M}_1 = \mathbf{J}_1 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{J}_u^{-1} V(X_u^{x_0}) V(X_v^{x_0})^* (\mathbf{J}_v^{-1})^* |u - v|^{2H-2} du dv \mathbf{J}_1^*,$$

donde  $V$  denota a la matriz  $(V_1, \dots, V_d)$  de tamaño  $d \times d$ .

Como  $\mathbf{J}_1$  es invertible casi seguramente, es suficiente que, con probabilidad uno, la matriz

$$C_1 = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{J}_u^{-1} V(X_u^{x_0}) V(X_v^{x_0})^t (\mathbf{J}_v^{-1})^t |u - v|^{2H-2} du dv$$

sea invertible.

Observemos que para  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\langle x, C_1 x \rangle = \sum_{i=1}^d \int_0^1 \int_0^1 |u - v|^{2H-2} \langle x, (\mathbf{J}_u^{-1} V_i)(x_0) \rangle \langle x, (\mathbf{J}_v^{-1} V_i)(x_0) \rangle du dv.$$

Por lo tanto, si  $x$  pertenece al kernel de  $C_1$ , tenemos

$$\langle x, (\mathbf{J}_u^{-1} V_i)(x_0) \rangle = 0, \quad u \in [0, 1].$$

En particular, si tomamos  $u = 0$  obtenemos que

$$\langle x, V_i(x_0) \rangle = 0$$

y por lo tanto  $x = 0$  ya que  $V_1, \dots, V_d$  son linealmente independientes por hipótesis. Entonces, como  $x \in \ker(C_1)$ , se tiene que  $x = 0$ , es decir,  $\ker(C_1) = 0$  y por lo tanto  $C_1$  es invertible. Y podemos concluir que la matriz  $\mathcal{M}_1$  es invertible casi seguramente.

Por lo tanto,  $X_t^x$  admite una densidad con respecto a la medida de Lebesgue, para todo  $t > 0$ .



---

# Bibliografía

---

- [1] Alòs E. and Nualart D. *Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion*.
- [2] Abramowitz M. and Stegun I. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, 1965.
- [3] Arcones Miguel A. *On the law of the iterated logarithm for Gaussian processes*, J. Theor. Probab. 8. No. 4, 877-904, 1995.
- [4] Ash Robert and Doléans C. *Probability and measure theory*, Academic Press, second edition, 1999.
- [5] Baudoin Fabrice. *Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motions*, 34th Finnish summer school on Probability theory and Statistics.
- [6] Billingley Patrick. *Probability and measure*, Wiley-Interscience, 1995.
- [7] Coutin Laure. *Séminaire de Probabilités XL. Lecture Notes in Mathematics. Chapter: An introduction to (Stochastic) calculus with respect to fractional Brownian motion*, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [8] Doob J. L. *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, 1953.
- [9] García Álvarez Miguel Ángel. *Introducción a la teoría de la probabilidad*, Fondo de Cultura Económica, 2006.
- [10] Grimmett G. R. and Stirzaker D. R. *Probability and Random Processes* Oxford, 3ed, 2001.
- [11] Hurst H. E. *Long-term storage capacity in reservoirs*, Trans. American Society Civil Engineers 116, 400-410, 1951.

- [12] Hurst H. E., Black R.P. and Sanaika Y. M. *Long-term storage in reservoirs. An experimental study*, Constable, London, 1965.
- [13] Itô Kiyoshi. *Stochastic Integral*, Proc. Imperial Acad. Tokyo 20, 519-524, 1944.
- [14] Kallenberg Olav. *Foundations of modern probability*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, New York, 2002.
- [15] Kolmogorov A. N. *Wienshe Spirales and einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Ranm*, Compus Rendus (Doklady) de l'Académie des sciences de l'URSS (N.S), 26, 115-118, 1940.
- [16] Kolmogorov A. N. *Foundations of Probability Theory*, Chelsea, New York, 1950.
- [17] Kroese, D.P. and Botev, Z.I. *Spatial Process Generation. In: V. Schmidt (Ed.). Lectures on Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields, Volume II: Analysis, Modeling and Simulation of Complex Structures*, Springer-Verlag, Berlin. arXiv: 1308.0399, 2014.
- [18] Le Gall J. F. *Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires*, FIMFA, 2006.
- [19] Le Gall J. F. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, Springer, 2013.
- [20] Lyons T.J. *Differential equations driven by rough signals. I. An extension of an inequality of L. C. Young*, Math. Res. Lett; 1(4), 451-464, 1994.
- [21] Lyons T.J. *Differential equations driven by rough signals*, Rev. Mat. Iberoamericana 14(2), 215-310, 1998.
- [22] Mandelbrot B. B. and Van Ness J. W. *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Rev. 10, 422-437, 1968.
- [23] Mörters Peter and Peres Yuval. *Brownian Motion*, Cambridge University Press, 2010.
- [24] Nualart David. *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [25] Nourdin Ivan. *Selected aspects of fractional Brownian motion*, Bocconi and Springer Series, 2012.
- [26] Nourdin, Ivan. *An invitation to fractional Brownian motion*, 2011.

- [27] Øksendal B., F. Biagini, Y. Hu and T. Zhang. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications*, Springer, 2008.
- [28] Revuz, D. and Yor M. *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1999.
- [29] Rogers G. *Arbitrage with fractional Brownian motion*, Math. Finance 7, 95-105, 1997.
- [30] Ruzmaikina A. A. *Stieltjes integrals of Hölder continuous functions with application to fractional Brownian motion*, J. Statist. Phys. 100, 1049-1069, 2000.
- [31] Shi Zhan. *Probabilités de base, année 2009-2010*, Notas de curso en la Universidad de París 6, 2009.
- [32] Young L. C. *An inequality of Holder type, connected with Stieltjes integration*, Acta Math., 67:251-282, 1936.



## Apéndice A

---

# Simulación del movimiento browniano fraccionario

---

A continuación, se da un script (utilizando el programa Matlab) sobre como generar un movimiento browniano fraccionario de dimensión 1 sobre el intervalo  $[0, 1]$ , usando  $n$  puntos de la cuadrícula que están uniformemente espaciados.

El método utilizado, aplica *FFT* (algoritmo de la transformada de Fourier rápida) a una matriz de covarianza que es circular. Para más detalles sobre este método de simulación, ver [17, §4.2].

```
n = 2^10; % puntos en la cuadrícula
H = 0.9; % indice de Hurst
r = nan(n+1,1); r(1) = 1;
for k=1:n
r(k+1) = 0.5*((k+1)^(2*H) - 2*k^(2*H) + (k-1)^(2*H));
end
r = [r; r(end-1:-1:2)]; % primer renglon de una matriz circular
lambda = real(fft(r))/(2*n); % eigenvalores
B = fft(sqrt(lambda).*complex(randn(2*n,1),randn(2*n,1)));
B = n^(-H)*cumsum(real(B(1:n+1))); % rescalamiento
plot((0:n)/n,B);
```



## Apéndice B

---

# Filtraciones y martingalas

---

### B.1. Filtraciones

Un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  puede ser visto como un sistema aleatorio que evoluciona en el tiempo, este sistema lleva con él cierta información. Más precisamente, si se observan las trayectorias de un proceso estocástico hasta un tiempo  $t \geq 0$ , uno es capaz de decidir si un evento  $A \in \sigma(X_s, s \leq t)$  ocurre (denotaremos por  $\sigma(X_s, s \leq t)$  a la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que hace que todas las variables aleatorias  $\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t\}$  sean medibles). Esta noción de información que lleva un proceso estocástico se modela por medio de las filtraciones.

**Definición B.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es una familia no decreciente de sub  $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ , es decir, para  $s, t \geq 0$  con  $s \leq t$  se tiene que

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}.$$

Y al espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  se le conoce como espacio de probabilidad filtrado.

Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico definido sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , entonces  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$  es una filtración, y es llamada la *filtración natural*.

**Definición B.2.** Decimos que un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  es adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , si para toda  $t \geq 0$ , la variable aleatorias  $X_t$  es medible con respecto a  $\mathcal{F}_t$ .

Un proceso estocástico siempre es adaptado con respecto a su filtración natural. Podemos observar que si un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  es adaptado con respecto a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  y

si  $\mathcal{F}_0$  contiene a todos los subconjuntos de  $\mathcal{F}$  que tienen probabilidad cero, entonces todo proceso estocástico  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$  que satisface  $\mathbb{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1$ ,  $t \geq 0$ , también es adaptado con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

**Definición B.3.** *Un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  es progresivamente medible con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si es adaptado a  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , y si para toda  $t \geq 0$ ,*

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t,$$

para toda  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Proposición B.4.** *Un proceso estocástico continuo  $(X_t)_{t \geq 0}$  que es adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , también es progresivamente medible con respecto a  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .*

## B.2. Martingalas, tiempos de paro y semimartingalas

Cuando estudiamos un proceso estocástico, una pregunta natural es, por ejemplo: ¿cuánto dura el proceso estocástico hasta un cierto instante?.

**Definición B.5.** *Sea  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  una filtración sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Sea  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$  una variable aleatoria medible con respecto a  $\mathcal{F}$ . Decimos que  $T$  es un tiempo de paro si para  $t \geq 0$ , se cumple*

$$\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

A menudo, un tiempo de paro será el tiempo durante el cual un proceso estocástico que es adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  satisface una determinada propiedad. La definición anterior significa que, para cualquier  $t \geq 0$ , en el momento  $t$ , uno es capaz de decidir si esta propiedad se cumple o no.

Ahora, vamos a introducir el concepto de martingala en tiempo continuo, las cuales fueron estudiadas por Joseph Doob en [8].

**Definición B.6.** *Sea  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  una filtración definida sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Una martingala es un proceso  $(M_t)_{t \geq 0}$  que es adaptado a  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si:*

- $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$ , para toda  $t \geq 0$ ;
- $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ , para toda  $0 \leq s \leq t$ .

**Definición B.7.** Un proceso estocástico  $(M_t)_{t \geq 0}$  es una martingala local (con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ) si existe una sucesión de tiempos de paro  $(T_n)_{n \geq 0}$  tal que:

- la sucesión  $(T_n)_{n \geq 0}$  es creciente y casi seguramente ser satisface  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$ ,
- para  $n \geq 1$ , el proceso  $(M_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$  es una martingala uniformemente integrable con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

**Teorema B.8.** Sea  $(M_t)_{t \geq 0}$  una martingala local continua sobre  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  tal que  $M_0 = 0$ . Entonces, existe un único proceso creciente continuo  $(\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$  tal que:

- $\langle M \rangle_0 = 0$ ;
- El proceso  $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$  es una martingala local.

Además, para toda  $t \geq 0$  y para toda sucesión de particiones  $\Delta_n = \{0 = t_1^n < t_2^n < \dots < t_k^n = t\}_{n \geq 1}$  sobre el intervalo  $[0, t]$  tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Delta_n[0, t]| = 0$ , se cumple el siguiente limite en probabilidad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n} \right)^2 = \langle M \rangle_t.$$

**Definición B.9 (Semimartingala).** Sea  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado. Decimos que un proceso estocástico  $(S_t)_{t \geq 0}$  adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , es una semimartingala continua si puede escribirse como:

$$S_t = S_0 + A_t + M_t$$

donde  $(A_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de variación acotada y  $(M_t)_{t \geq 0}$  es una martingala local continua tal que  $M_0 = 0$ .