UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ENTROPÍA TOPOLÓGICA VÍA LOS CONJUNTOS OMEGA LÍMITE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
JOSÉ LUIS SÁNCHEZ PONCE

TUTOR
DR. OSVALDO OSUNA CASTRO
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMATICAS DE LA UMSNH

CIUDAD DE MEXICO JUNIO 2016

ENTROPÍA TOPOLÓGICA VÍA LOS CONJUNTOS OMEGA LÍMITE

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas dinámicos representan hoy en día un área de gran actividad en la investigación de matemáticas, además poseen un amplio potencial para aplicaciones. La noción más general considera simplemente un conjunto X junto con un mapa $f : X \to X$. X es llamado *espacio fase*. El interes es entender la evolución de X respecto a f. Para esto, debemos considerar al semigrupo $\{f^n : X \to X,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ formado por las iteradas de f con la operación $f^{n+m} = f^n \circ f^m$ ($f^0 := id$, $f^n = f \circ \cdots \circ f$, n-veces). En caso de que f sea invertible, las iteradas de f forman un grupo. Esta noción representa una evolución discreta del espacio X. Otra es cuando la evolución de X varía de manera continua, un sistema de estos se conoce como un *sistema dinámico continuo* y consta de un conjunto X junto con una familia de mapas $\{f^t : X \to X : t \geq 0\}$, en donde además se cumple la propiedad (ley de grupo) $f^{t+s}(x) = f^s(f^t(x))$. Más específicamente, los sistemas de mayor interes son aquellos en donde el espacio fase X es un conjunto con cierta estructura; por ejemplo, espacios medibles, espacios topológicos, espacios métricos, variedades diferenciables, etc., y f es un mapa en X que preserva tal estructura.

En este trabajo estamos interesados en los sistemas dinámicos (discretos) donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es un mapa continuo. Dado $x \in X$, la órbita positiva será el conjunto $orb_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Uno de los problemas centrales del área es el entendimiento de tales conjuntos, en particular cuestiones de recurrencia o comportamiento asintótico.

Una de las nociones introducidas para estudiar la recurrencia y el comportamiento asintótico es la de los conjuntos $\omega-$*límite*; dado $x \in X$, asociamos un subconjunto de X que denotamos por $\omega_f(x)$, este conjunto consta de los límites de subsucesiones convergentes de la órbita. Ya que $\omega_f(x)$ resulta cerrado y $f-$invariante (es decir, $f(\omega_f(x)) = \omega_f(x)$), entonces podemos considerar a $f_{|\omega_f(x)} : \omega_f(x) \to \omega_f(x)$ como un sistema dinámico por derecho propio.

Por otro lado, para un espacio métrico compacto X y $f : X \to X$ continua, existe (aunque hay generalizaciones en espacios no compactos) un importante invariante asociado al sistema, llamado *entropía topológica*, denotamos este número por $h_{top}(f)$, éste resulta ser ≥ 0. La entropía intenta medir la complejidad de las órbitas, de hecho, es ampliamente aceptado como una noción de si el sistema es caótico ó no, dependiendo si la entropía es positiva ó cero. Entonces, dado $x \in X$ tenemos asociado el sistema $f_{|\omega_f(x)} : \omega_f(x) \to \omega_f(x)$ y podemos considerar su entropía topológica $h_{top}(f_{|\omega_f(x)})$.

El objetivo principal de esta tesis es presentar un resultado que establece un nuevo tipo de principio variacional para la entropía topológica en términos de los sistemas $\omega-$límite. Este resultado se enuncia de la siguiente forma:

Teorema Principal:

Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua. Entonces

$$h_{top}(f) = sup\{h_{top}(f_{|\omega_f(x)}) : x \in X\}.$$

Usando el Teorema anterior mostraremos que algunos resultados ya conocidos de entropía topológica admiten una prueba alternativa, y en ocasiones más sencilla a las existentes.

Otro hecho que logramos establecer usando el Teorema principal es el siguiente:

Teorema. Sea (X, d) *un espacio métrico compacto y* $f : X \to X$ *un homeomorfismo. Si* $h_{top}(f) > 0$*, entonces existe* $x \in X$ *tal que* $\omega_f(x)$ *es no numerable.*

Finalmente, pretendemos que este trabajo sea lo más autocontenido posible, por lo cual, en el capítulo dos presentamos las definiciones y los resultados más básicos sobre sistemas dinámicos (topológicos) que sean necesarios para el desarrollo de los temas a lo largo de este trabajo. También en el capítulo dos introducimos algunos ejemplos con el fin de ilustrar los conceptos de la teoría. En el capítulo tres se presenta lo relativo a la entropía topológica para un mapa continuo en un espacio métrico compacto. Además, con la finalidad de enunciar el Principio Variacional, se presentan conceptos y resultados sobre teoría ergódica y entropía de la medida. El Principio Variacional establece una igualdad entre la entropía topológica y el supremo de las entropías de medida (sobre las medidas invariantes o ergódicas que admite el sistema), y es usado en la prueba del teorema principal de esta tesis. En el capítulo cuatro se presentan algunas propiedades de los conjuntos $\omega-$límite que bajo ciertas condiciones caracterizan a tales sistemas. Finalmente, en el capítulo cinco se presentan los principales resultados de este trabajo.

Capítulo 2

Preliminares

Nosotros estamos interesados en aquellos sistemas dinámicos donde X es un espacio métrico compacto y $f: X \longrightarrow X$ es un mapa continuo. Sin embargo iniciamos este capítulo considerando a X como un espacio topológico, pues los conceptos y resultados básicos pueden enunciarse a este nivel de generalidad. El material de este capítulo es clásico y puede encontrarse con más detalle en diversos textos referentes al tema, como [1], [2] y [3].

2.1. Sistemas Dinámicos Topológicos

Denotaremos por $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Definición 2.1 *Un* **sistema dinámico topológico** *es un espacio topológico Hausdorff X junto con un mapa continuo $f: X \longrightarrow X$. También denotaremos al sistema dinámico como (X, f).*

Las siguientes definiciones son para un sistema dinámico $f: X \to X$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la $n-$ésima iterada de f es la composición de f n veces consigo misma, $f^n = f \circ ... \circ f$ (n veces); definimos $f^0 := id$, el mapa identidad.

Si f es invertible, escribimos $f^{-n} := (f^{-1})^n$. Ya que $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, las iteradas forman un semigrupo, y si f es invertible, éstas forman un grupo. Dados $A \subset X$ y $n \in \mathbb{N}$, denotamos $f^n(A)$ a la imagen de A bajo f^n y $f^{-n}(A)$ a la preimagen de A bajo f^{-n}.

Para cada $x \in X$, definimos la ***órbita*** de x por

$$orb_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

En caso de que sea claro, omitiremos el subíndice f y escribimos $\mathrm{orb}(x)$ en vez de $\mathrm{orb}_f(x)$. Un punto $x \in X$ es un ***punto periódico*** de periodo n si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Denotamos por $Per_n(f)$ el conjunto de puntos de periodo n, $Per(f) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Per_n(f)$. Si x es un punto periódico, entonces el entero positivo n más pequeño tal que $f^n(x) = x$ es llamado el ***periodo minimal*** de x. Un punto x es llamado ***punto fijo*** si $f(x) = x$.

Decimos que $A \subset X$ es $f-$***invariante*** si $f(A) = A$, si $f(A) \subset A$, A se dice $f-$***positivamente invariante***. Si $A \subset X$ es un conjunto cerrado y $f-$positivamente invariante, entonces podemos considerar al sistema dinámico $(A, f_{|A})$, tales conjuntos los llamaremos *subsistemas de* (X, f)

.

Con el fin de clasificar o distinguir los sistemas dinámicos, necesitamos una noción de equivalencia; sean $f : X \longrightarrow X$ y $g : Y \longrightarrow Y$ sistemas dinámicos. *Una* ***semiconjugación*** *de* g *a* f es un mapa sobreyectivo y continuo $h : X \longrightarrow Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Si h es un homeomorfismo, h se llama una ***conjugación***, y f y g son llamados ***topológicamente conjugados***. Si existe una semiconjugación de g a f, decimos que g es ***factor*** de f. Note que la relación de ser topológicamente conjugados es una relación de equivalencia.

Así, dos sistemas dinámicos que sean topológicamente conjugados deberán poseer las mismas propiedades dinámicas.

Por ejemplo, sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas topológicamente conjugados vía un homeomorfismo $h : X \to Y$, así $h \circ f = g \circ h$. Supóngase que $x \in X$ es un punto de periodo n, es decir, $f^n(x) = x$, así $h(f^n(x)) = h(x)$. Entonces $g^n(h(x)) = h(x)$. Por tanto $h(x)$ es un punto de periodo n para g. Ahora tomamos $A \subset X$, tal que A es $f-$invariante, entonces $g(h(A)) = h(f(A)) = h(A)$, es decir, $h(A) \subset Y$ es $g-$ invariante. Con un argumento análogo para h^{-1} en vez de h se puede concluir la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos topológicamente conjugados vía un homeomorfismo $h : X \to Y$. Entonces*

i) $x \in X$ es un punto periódico de periodo n para f, si y sólo si, $h(x) \in Y$ es un punto periódico de periodo n para g.

ii) $A \subset X$ es $f-$invariante, si y sólo si, $h(A) \subset Y$ es $g-$invariante. □

El siguiente ejemplo muestra una clase de sistemas cuyo comportamiento asintótico se encuentra alrededor de un sólo punto.

Definición 2.2 *Sea (X, d) un espacio métrico. Un mapa $f : X \to X$ se llama una* ***contracción*** *si existe $\lambda < 1$ tal que para todo $x, y \in X$,*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Esta desigualdad implica que el mapa f es continua.

Proposición 2.2 (**Teorema del punto fijo de Banach**).

Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea $f : X \to X$ una contracción. Entonces existe un único punto fijo p de f. Además, para todo $x \in X$, $f^n(x) \to p$.

Prueba. Sea $x \in X$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \geq n$. Entonces

$$\begin{aligned} d(f^m(x), f^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} d(f^{n+k+1}(x), f^{n+k}(x)) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^{n+k} d(f(x), x) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x), x). \end{aligned}$$

Ya que $\lambda < 1$, ésta última parte converge a cero cuando $n \to \infty$. Hemos visto que la sucesión $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como X es completo, entonces $f^n(x) \to p$, para algún $p \in X$. Además p no depende del punto x pues para otro $y \in X$,

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y),$$

así $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Veamos que p es un punto fijo de f. Dado que para $x \in X$ y que si $n \to \infty$, se cumple que $f(p) = f(lim f^n(x)) = lim f^{n+1}(x) = p$, entonces p es un punto fijo para f

Como $\lambda < 1$ y $d(p, f^n(x)) \to 0$ ($n \to \infty$), entonces todo lo anterior converge a cero. Por tanto $f(p) = p$. $\square$

2.1.1. Rotaciones del Círculo

Con notación aditiva el círculo unitario se representa como

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

S^1 representa el cociente de $\mathbb{R}$ por el subgrupo de los enteros $\mathbb{Z}$, $(mod\, 1)$ representa la relación de equivalencia $\sim$ que induce $\mathbb{Z}$ como subgrupo de $\mathbb{R}$ $(x \sim y \; si \; x - y \in \mathbb{Z})$. Sea $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ la aplicación canónica dada por $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$. Con la topología cociente para S^1, π es continua y S^1 es un espacio métrico compacto.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $R_\alpha : S^1 \to S^1$ denota la rotación por un ángulo $2\pi\alpha$, es decir

$$R_\alpha x = x + \alpha \; (mod\, 1).$$

Usando notación multiplicativa

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : | z |= 1\} = \{e^{2\pi i \gamma} : \gamma \in \mathbb{R}\},$$

y

$$R_\alpha z = z_0 z, \quad con \; z_0 = e^{2\pi i \alpha}.$$

La enésima iterada (en notación aditiva) de R_α se ve como

$$R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \; (mod\, 1).$$

Si $\alpha = \frac{p}{q}$ es racional, entonces $R_\alpha^q = id$. Así cada $x \in S^1$ es un punto periódico. Por otro lado, si α es irracional, entonces cada órbita es densa en S^1. En efecto, para cada $\epsilon > 0$, existen $m, n < \frac{1}{\epsilon}$ tal que $d(R_\alpha^m(x), R_\alpha^n(y)) < \epsilon$ para todo x, $y \in S^1$. Como ϵ es arbitrario, entonces cada órbita es densa en S^1.

2.2. Conjuntos Minimales y Recurrencia

Una noción importante es la de aquellos sistemas que no tienen subsistemas propios, estos son los llamados conjuntos minimales.

Definición 2.3 *Sea X compacto y $f : X \longrightarrow X$ continua. Un subconjunto cerrado no vacío $Y \subset X$ que sea $f-$positivamente invariante es un* ***conjunto minimal*** *para f si no contiene subconjuntos propios, no vacíos, cerrados y $f-$positivamente invariantes. Si X es minimal, decimos que f es* ***minimal****.*

Definición 2.4 *Sea $f : X \longrightarrow X$ continua. Un punto x es* ***no errante*** *si para cada vecindad U de x existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de puntos no errantes se denota por $\Omega(f)$.*

Si x no está en $\Omega(f)$, decimos que x es un punto ***errante***.

La siguiente proposición nos permite considerar a $f_{|\Omega(f)} : \Omega(f) \to \Omega(f)$ como un sistema dinámico.

Proposición 2.3 *Sea $f : X \longrightarrow X$ continua y $\Omega(f)$ el conjunto de puntos no errantes, entonces $\Omega(f)$ es cerrado y $f-$positivamente invariante.*

Prueba. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega(f)$, suponga que existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$ (cuando $n \to \infty$). Sea U un abierto que contiene a x, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in U$ y $x_m \in \Omega(f)$, por lo tanto existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{N_0}(U) \cap U \neq \emptyset$, entonces $x \in \Omega(f)$. Por lo tanto $\Omega(f)$ es cerrado. Para ver que $\Omega(f)$ es $f-$positivamente invariante, sea $x \in \Omega(f)$, W abierto con $f(x) \in W$, sea $V = f^{-1}(W)$. Entonces V es abierto y $x \in V$. Por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Se sigue entonces que $W \cap f^n(W) = f(f^n(V) \cap V)) \neq \emptyset$. Entonces $f(x) \in \Omega(f)$, y por lo tanto $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. Es decir, $\Omega(f)$ es $f-$positivamente invariante. $\square$

Un punto $x \in X$ se dice ***transitivo*** si su órbita es un conjunto denso en X.

$f : X \longrightarrow X$ se dice que es ***topológicamente transitiva*** si para cualesquiera dos abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Si para cualesquiera dos abiertos no vacíos U, V, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, decimos que f es ***topológicamente mixing***.

Es fácil ver que si todo $x \in X$ es transitivo, entonces X es minimal: en efecto, procedemos por cotradicción; suponga que existe un subconjunto propio no vacío $Y \subset X$ que sea cerrado y $f-$positivamente invariante. Sea $y \in Y$, entonces $\overline{\mathrm{orb}(y)} \subset Y \neq X$. Por tanto la órbita de x no es densa en X. Entonces x no es transitivo

Suponga que algún $x \in X$ es transitivo. Sean $U, V \subset X$ dos abiertos no vacíos. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$, $f^m(x) \in V$ y $m = k + n$. Por lo tanto $f^m(x) = f^k(f^n(x)) \in f^k(U) \cap V$. Por lo tanto$f$ es topológicamente transitiva.

Si $f : X \longrightarrow X$ es topológicamente transitiva, tomamos algún $x \in X$ y $U \subset X$ un abierto que contiene a x. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto x es no errante. Así, $X = \Omega(f)$.

Por último, si f es topológicamente mixing, entonces es evidente que f es topológicamente transitivo.

Proposición 2.4 *Si α es irracional entonces R_α es minimal.*

Prueba. Supóngase que R_α no es minimal. Entonces existe $x \in S^1$ tal que $\mathrm{orb}(x)$ no es densa en S^1. Sea $A = \overline{\mathrm{orb}(x)}$. Entonces $S^1 \setminus A \neq \emptyset$ y abierto. Además note que $S^1 \setminus A$ es también invariante. Podemos ver a $S^1 \setminus A$ como una unión disjunta de intervalos. Sea I un itervalo en $S^1 \setminus A$ de longitud máxima. Como R_α preserva la longitud y α es irracional, entonces los intervalos $\{R_\alpha^n(I)\}_{n \in \mathbb{N}}$ son todos de igual longitud y disjuntos; si no, existiría un $x \in S^1$ tal que $x = x + n\alpha\,(mod\,1)$. Así $n\alpha \in \mathbb{Z}$, y por tanto $\alpha \in \mathbb{Q}$. Entonces $S^1 \setminus A$

contiene una cantidad infinita de intervalos disjuntos de una longitud fija. Esto es imposible pues la longitud de S^1 es finita. Por tanto $S^1 \setminus A = \emptyset$. Y así $\overline{\mathrm{orb}(x)} = S^1$. Por tanto R_α es minimal. $\square$

Las translaciones del toro son la generalización de las rotaciones en el círculo para dimensión mayor a uno. Es decir, considerando a $\mathbb{Z}^n$ como subgrupo aditivo de $\mathbb{R}^n$, la relación de equivalencia inducida en $\mathbb{R}^n$, $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}^n$ nos define a

$$\mathbb{T}^n \quad = \quad \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \quad = \quad \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n - veces}.$$

Sea $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. La translación $T_\gamma : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ se define como

$$T_\gamma(x_1, ..., x_n) = (x_1 + \gamma_1, ..., x_n + \gamma_n) \ (mod\, 1).$$

Definición 2.5 *Un punto $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ se dice* ***racionalmente independiente*** *si $\sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i \notin \mathbb{Z}$ para cualquier colección de enteros $k_1, k_2, ..., k_n$ con algún $k_i \neq 0$.*

Es claro que $\alpha \in \mathbb{R}$ es racionalmente independiente si y sólo si es irracional. La proposición siguiente es la generalización de la anterior, una prueba puede encontrarse en [1, pag. 29].

Proposición 2.5 *La translación T_γ es minimal, si y sólo si $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ es racionalmente independiente.* $\square$

Otro ejemplo importante en el círculo S^1 (en notación multiplicativa) son los mapas definidos como

$$E_m : S^1 \quad \to \quad S^1, \ \ E_m(z) = z^m, \ \ m \in \mathbb{Z}, \mid m \mid \geq 2.$$

Proposición 2.6 *Sea $E_2 : S^1 \to S^1$, $E_2(z) = z^2$. Entonces E_2 es topológicamente transitiva.*

Prueba. Para probar que E_2 es topológicamente transitivo consideraremos la representación binaria de cada $x \in [0, 1]$.

Sea $\triangle_n^k = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ para $n = 1, 2, ...,$ y $k = 0, 1, ..., 2^n - 1$.

Sea $x = 0.x_1x_2...$ la representación binaria del número $x \in [0, 1]$. Entonces $2x = x_1.x_2x_3... = 0.x_2x_3...\ (mod\ 1)$. Entonces $E_2^n(x) = 0.x_{n+1}x_{n+2}...\ (mod\ 1)$.

Sea $k = k_1k_2...k_n$ la representación binaria del entero k, donde posiblemente aparecen ceros al principio. Entonces $x \in \triangle_n^k$, si y sólo si, $x_i = k_i$, para $i = 1, ..., n$. Por tanto $E_2^n(\triangle_n^k) = S^1$. Como cada intervalo $I \subset S^1$ contiene un $\triangle_n^k$, entonces $E_2^n(I) = S^1$ para algún n. Por tanto para cualesquiera U, V abiertos en S^1 existe un natural n tal que $E_2^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Por tanto E_2 es topológicamente transitiva. $\square$

Observación: *Se puede adaptar un argumento similar al de la prueba anterior para demostrar de manera general que el mapa E_m es topológicamente transitivo.*

2.2.1. Automorfismos Hiperbólicos del Toro

Cualquier matriz A de tamaño $n \times n$ con coeficientes enteros induce un mapa en $\mathbb{R}^n$ que deja invariante a la retícula $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, y por tanto A induce un mapa T_A en el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. T_A es invertible si y sólo si A^{-1} tiene coeficientes enteros, y esto pasa si y sólo si $det\,A = \pm 1$.

Definición 2.6 *Sea A una matriz con coeficientes enteros y $det\,A = \pm 1$. Si los eigenvalores de A no pertenecen al círculo unitario, entonces el mapa $T_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ inducido por A se llama un **automorfismo hiperbólico del toro.***

Un ejemplo de un automorfismo hiperbólico es el definido por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; det\, A = 1.$$

Sea $T_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ el mapa inducido por A. Así $T(x, y) = (2x + y, x + y)\ (mod\, 1)$.

Entonces los eigenvalores de A son:

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \quad y \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1.$$

Como A es simétrica, entonces cada vector propio asociado a λ_1 es ortogonal a cada vector propio asociado a λ_2. Los eigenvectores correspondientes a λ_1 es el subespacio de la recta $L_1 : y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x$. Similarmente la recta $L_2 : y = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}x$ es el espacio de eigenvectores asociados a λ_2.

Proposición 2.7 *El conjunto de puntos periódicos de T_A es denso en $\mathbb{T}^2$ y T_A es topológicamente transitiva.*

Prueba. Para ver que los puntos periódicos de T_A forman un conjunto denso en $\mathbb{T}^2$, nos tomamos (x, y) en $\mathbb{T}^2$, con $x = \frac{s}{q}$; $y = \frac{t}{q}$, donde s, t, q son enteros. Entonces $T_A(\frac{s}{q}, \frac{t}{q}) = (\frac{2s+t}{q}, \frac{s+t}{q})$. Es decir, T_A manda puntos racionales con denominador q en puntos racionales con denominador otra vez q. Ya que hay q^2 puntos en $\mathbb{T}^2$ cuyas coordenadas son racionales con denominador q, entonces debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_A(\frac{s}{q}, \frac{t}{q}) = (\frac{s}{q}, \frac{t}{q})$. Y como cada racional puede suponerse con denominador q, entonces todos los puntos (x, y) con x, y racionales son periódicos, y por tanto los puntos periódicos son densos en $\mathbb{T}^2$. Veamos ahora que T_A es topológicamente transitiva. Sean U, V abiertos no vacíos en $\mathbb{T}^2$. Sean $p, q \in U$ y V respectivamente puntos periódicos. Sea L_1^p la recta que pasa por p y es paralela a L_1, y sea L_2^q la recta que pasa por q

y es paralela a L_2. Sea $r \in L_1^p \cap L_2^q$ (pues son ortogonales). Sea n un periodo común de p y q . Entonces L_1^p y L_2^q son T_A^n-invariantes. Ya que $\lambda_1 > 1$ y $\lambda_2 < 1$, entonces $T_A^{kn}(r) \to q$ cuando $k \to \infty$, y $T_A^{kn}(r) \to p$ cuando $k \to -\infty$. Por tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T_A^{-kn}(r) \in U$ y $T_A^{kn}(r) \in V$. Luego $T_A^{kn}(r) \in T^{2kn}(U) \cap V$. Es decir, $T^{2kn}(U) \cap V \neq \emptyset$. Así T_A es topológicamente transitivo. $\square$

2.2.2. Sistemas Dinámicos Simbólicos

Sea $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Consideramos el espacio de sucesiones $\Omega_N = \{\omega = (...\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, ...) \mid \omega_i \in \{0, 1, ..., N-1\},\ i \in \mathbb{Z}\}$.

Ω_N se llama el ***espacio de sucesiones bilaterales de*** N ***símbolos***.

De manera similar se define el espacio de *sucesiones unilaterales (derechas)* $\Omega_N^R = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, ...) \mid \omega_i \in \{0, 1, ..., N-1\},\ i \in \mathbb{N}_0\}$.

Note que Ω_N es el producto de $\mathbb{Z}$ copias del conjunto $\{0, 1, ..., N-1\}$. Damos a Ω_N la topología producto ($\{0, 1, ..., N-1\}$ con la topología discreta), entonces Ω_N es compacto.

Sean $n_1 < n_2 < ... < n_k$ enteros y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \{0, 1, ..., N-1\}$, entonces

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k}^{n_1, n_2, ..., n_k} = \{\omega \in \Omega_N \mid \omega_{n_i} = \alpha_i,\ i = 1, ..., k\}$$

es llamado un ***cilindro de rango*** k (cilindros en Ω_N^R son definidos similarmente).

Observación*: La familia de todos los cilindros forman una base de la topología de Ω_N. Además cada cilindro es también cerrado pues su complemento es unión finita de cilindros.*

Otra manera de generar la topología dada en Ω_N es mediante la métrica definida por cada $\lambda > 1$ dada por

$$d_\lambda(\omega, \omega') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{| \omega_n - \omega'_n |}{\lambda^{|n|}}.$$

En efecto, para cada $\lambda > 1$, d_λ genera la topología de Ω_N pues cada cilindro de la forma $C^{-n,-n+1,...,n-1,n}_{\alpha_{-n},\alpha_{-n+1},...,\alpha_{n-1},\alpha_n}$ (uno de estos es llamado *cilindro simétrico de rango* $2n+1$, que también lo denotamos por C^n_α, donde $\alpha = (\alpha_{-n}, \alpha_{-n+1}, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n)$) es una bola con respecto a d_λ.

La transformación shift.

La transformación shift (izquierda) en Ω_N se define como

$$\sigma_N : \Omega_N \to \Omega_N, \ \sigma_N(\omega) = \omega' = (..., \omega_0^{'}, \omega_1^{'}, ...),$$

donde $\omega_n^{'} = \omega_{n+1}$.

σ_N es una biyección y manda cilindros en cilindros. Por tanto σ_N es un homeomorfismo de Ω_N. (La transformación shift en Ω_N^R se define de manera similar).

Proposición 2.8 *Los puntos periódicos de σ_N son densos en Ω_N y σ_N es topológicamente mixing.*

Prueba. Ya que la familia de cilindros es una base de la topología, es suficiente probar que cada cilindro contiene un punto periódico. Más aún, cada cilindro contiene un cilindro simétrico de rango $2m+1$ para algún m. Tomamos entonces uno así. Sea C^m_α, donde $\alpha = (\alpha_{-m}, ..., \alpha_m)$.

Sea $\omega = \{\omega_n\}$, donde $\omega_n = \alpha_n$, para $| \ n \ | \leq m$ y para $0 < m < n$ está dada por la relación de recurrencia $\omega_{n+1} = \alpha_{-n}$ y $\omega_{-(n+1)} = \alpha_n$. Entonces es claro que ω está en C^m_α ; y que ω tiene periodo $2m+1$. Por tanto los puntos periódicos de σ_N son densos en Ω_N.

Para probar que σ_N es topológicamente mixing, sean $\alpha = \alpha_{-m}, ..., \alpha_m$ y $\beta = \beta_{-m}, ..., \beta_m$. Sea $n = 2m + k + 1$, $k > 0$. Entonces la sucesión ω dada por $\omega_i = \alpha_i$, para $| \ i \ | \leq m$, $\omega_i = \beta_{i-n}$ para $i = m + k + 1, ..., 3m + k + 1$ está en C^m_α, y $\sigma^n_N(\omega) \in C^m_\beta$, es decir, $\sigma^n_N(\omega) \cap C^m_\beta \neq \emptyset$. Por lo tanto σ_N es topológicamente mixing. $\square$

2.3. Conjuntos $\omega-$límite

En esta sección introducimos una clase muy especial de subsistemas, los conjuntos $\omega-$límite. Tales conjuntos describen el comportamiento asintótico de las órbitas, y por tanto juegan un papel central en el estudio de sistemas dinámicos. El resultado principal de esta tesis establece una relacion importante entre la dinámica del sistema global y la familia de los subsistemas $\omega-$límite.

Definición 2.7 *Sea $f : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico, $x \in X$. Un punto $y \in X$ es llamado un **punto** $\omega-$**límite** de x si existe una sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$, $n_k \to +\infty$, tal que $f^{n_k}(x) \to y$. El **conjunto** $\omega-$**límite** de x es el conjunto $\omega(x) = \omega_f(x)$ de todos los puntos $\omega-$límite de x.*

En caso de no ambiguedad, se escribe $\omega(x)$ en vez de $\omega_f(x)$.

Si X es un espacio métrico compacto, cada sucesión infinita posee una subsucesión convergente, en particular cada $\omega_f(x)$ es no vacío.

Si f es un homeomorfismo, entonces decimos que $y \in X$ es un punto $\alpha-$***límite de*** x si existe sucesión $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$, $n_i \to -\infty$, tal que $f^{n_i}(x) \to y$. El conjunto de puntos $\alpha-$límite de x se denota por $\alpha(x) = \alpha_f(x)$.

Es fácil ver que

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)}\,,\\ \alpha(x) &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^{-i}(x)}.\end{aligned}$$

La siguiente proposición nos dice que $f_{|\omega(x)} : \omega(x) \to \omega(x)$ es un sistema dinámico.

Proposición 2.9 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua. Entonces para cada $x \in X$ el conjunto $\omega(x)$ es cerrado y $f-$invariante.*

Prueba. Como

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)},$$

entonces $\omega(x)$ es intersección de cerrados, luego $\omega(x)$ es cerrado. Para ver que $\omega(x)$ es $f-$invariante, sea $y \in \omega(x)$, entonces existe $n_k \to +\infty$ ($n_k \geq 1$) tal que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y$. Por tanto $\lim_{k\to\infty} f^{n_k+1}(x) = f(y)$. Así $f(y) \in \omega(x)$, entonces $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$. Ahora considere la sucesión $\{f^{n_k-1}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Como X es compacto, entonces debe existir subsucesión convergente, es decir, $\lim_{l\to\infty} f^{n_{k_l}-1}(x) = z$, para algún $z \in \omega(x)$. Por lo tanto $\lim_{l\to\infty} f^{n_{k_l}}(x) = f(z)$. Entonces $f(z) = y$, así, $y \in f(\omega(x))$, luego $\omega(x) \subset f(\omega(x))$. Por tanto $\omega(x)$ es $f-$invariante. $\square$

Proposición 2.10 *Sea $E_3 : S^1 \to S^1$. Entonces existe un punto $x \in S^1$ tal que su conjunto $\omega-$límite con respecto al mapa E_3 es el conjunto de Cantor K. En particular K es E_3-invariante y contiene una órbita densa.*

Prueba. Sea K el conjunto de Cantor cuyos elementos son los puntos en S^1 tal que su representación en base 3 contiene sólo al cero y al dos. Ya que en representación de base 3 el mapa E_3 se ve como la transformación shift σ_3 (en Ω_3^R), entonces el conjunto K es E_3-invariante. Sólo falta ver que E_3 tiene una órbita densa en K. Sea $x \in K$ y $0.x_1x_2x_3...$ su representación. Sea $h(x)$ el número cuya representación en base 2 es $0.\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}, ...$, es decir, reemplazamos $2'^s$ por $1'^s$. Esto define una función $h: K \longrightarrow [0,1]$, la cual es continua, monótona creciente, y uno a uno, excepto para racionales binarios. Además $h \circ E_3 = E_2 \circ h$. Sea $D \subset [0,1]$ un conjunto denso de puntos que no tienen racionales binarios. Entonces $h^{-1}(D)$ es denso en K. Ahora tomamos cualquier $x \in [0,1]$ cuya órbita bajo E_2 sea densa. Por tanto la órbita de $h^{-1}(x)$ bajo E_3 es densa en K. $\square$

Capítulo 3

Entropía Topológica

3.1. Definición y Propiedades de Entropía Topológica

Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ un mapa continuo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función

$$d_n(x, y) := max_{0 \leq k \leq n-1} d(f^k(x), f^k(y)), \text{ con } x, y \in X$$

Cada d_n es una métrica en X (que depende de f) que mide la máxima distancia entre las primeras n iteraciones de x y y. Se tiene que $d_{n-1} \leq d_n$ y $d_1 = d$.

Recordemos que para un conjunto $A \subset X$ el ***diámetro*** de A se define como $diam(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Denotamos por $D_f(n, \epsilon)$ la mínima cardinalidad de una cubierta de X por conjuntos con d_n-diámetro menor que ϵ (d_n-diámetro es el diámetro respecto a la métrica d_n). La compacidad de X implica que $D_f(n, \epsilon)$ es finito.

Las cantidad $D_f(n,\epsilon)$ cuenta el número de segmentos de órbita de longitud n que son distinguibles a escala ϵ.

Sea

$$h_\epsilon(f) := \overline{\text{lím}}_{n\to\infty} 1/n \log(D_f(n,\epsilon)).$$

La cantidad $D_f(n,\epsilon)$ es creciente conforme ϵ decrece, por tanto sucede lo mismo con $h_\epsilon(f)$.

Definición 3.1 *Sea (X,d) un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ un mapa continuo. La* ***entropía topológica*** *del sistema (X,f) denotada por $h_{top}(f)$ es*

$$h_{top}(f) := \text{lím}_{\epsilon\to 0^+} h_\epsilon(f).$$

Note que el límite siempre existe (aunque puede ser infinito). Además, por definición la entropía topológica es no negativa.

Existen otras cantidades para poder definir la entropía topológica:

Sea $\epsilon > 0$. Un subconjunto $A \subset X$ es un $(n,\epsilon)-$***generador*** si para cada $x \in X$ existe $y \in A$ tal que $d_n(x,y) < \epsilon$. Por la compacidad de X, existen conjuntos $(n,\epsilon)-$generadores de cardinalidad finita.

Si $|A|$ denota la cardinalidad de A, definimos

$$N_f(n,\epsilon) := \text{mín}\{|A| : A \text{ es un } (n,\epsilon)-\text{generador})\}.$$

Un subconjunto $A \subset X$ es $(n,\epsilon)-$***separado*** si cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in A$ cumplen que $d_n(x,y) > \epsilon$. Un conjunto $A \subset X$ $(n,\epsilon)-$separado es discreto y, por la compacidad de X, es finito. Sea

$$S_f(n,\epsilon) := \text{máx}\{|A| : A \text{ es } (n,\epsilon)\text{−separado}\}.$$

$N_f(n,\epsilon)$ y $S_f(n,\epsilon)$ también cuentan el número de segmentos de órbita de longitud n que son distinguibles a escala ϵ.

La siguiente proposición nos dice que también se puede definir la entropía topológica en términos de las cantidades $N_f(n,\epsilon)$ y $S_f(n,\epsilon)$, y que también podemos usar el límite inferior. Una prueba de la proposición se puede encontrar en [2, pag 38].

Proposición 3.1

$$\begin{aligned} h_{top}(f) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \overline{\lim}_{n\to\infty} 1/n \log(N_f(n,\epsilon)) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \overline{\lim}_{n\to\infty} 1/n \log(S_f(n,\epsilon)) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \underline{\lim}_{n\to\infty} 1/n \log(D_f(n,\epsilon)) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \underline{\lim}_{n\to\infty} 1/n \log(N_f(n,\epsilon)) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \underline{\lim}_{n\to\infty} 1/n \log(S_f(n,\epsilon)). \ \square \end{aligned}$$

Note que la definición de entropía topológica puede extenderse para subconjuntos compactos. Es decir, para cada compacto $K \subset X$, pueden definirse las cantidades $D_f(n,\epsilon)$, $N_f(n,\epsilon)$ y $S_f(n,\epsilon)$, aunque K no es necesariamente invariante. Si $K \subset X$ es cerrado y positivamente invariante, entonces K es compacto y podemos considerar a $h_{top}(f_{|K})$. Es de esperar que $h_{top}(f_{|K}) \leq h_{top}(f)$.

A continuación se presentan algunas propiedades sobre la entropía topológica.

Una prueba de la siguiente proposición se puede ver en [2, pag 38]

Proposición 3.2 *Sea (X,d) un espacio métrico compacto. La entropía topológica de un mapa continuo $f : X \longrightarrow X$ no depende de la elección de la métrica sobre métricas que generan la misma topología en X , es decir, si d' es una métrica en X que genera la misma topología que d, entonces $h_{top}(f)$ respecto a d y d'es igual.* $\square$

Corolario 3.1 *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas topológicamente conjugados. Entonces $h_{top}(f) = h_{top}(g)$.*

Prueba. Supóngase que $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son topológicamente conjugados vía un homeomorfismo $h : Y \to X$. Sea d una métrica en X. Entonces $d'(y_1, y_2) = d(h(y_1), h(y_2))$ es una métrica en Y que genera la topología de Y. Además h es una isometría de Y a X (y h^{-1} es una isometría de X a Y), y como la entropía es independiente de la métrica por la proposición anterior, entonces $h_{top}(f) = h_{top}(g)$. $\square$

Proposición 3.3 *Sea X un espacio métrico compacto, y $f : X \longrightarrow X$ continuo . Entonces*

(i) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $h_{top}(f^m) = mh_{top}(f)$.

(ii) Si f es homeomorfismo, entonces $h_{top}(f^{-1}) = h_{top}(f)$.

(iii) Para cada $A \subset X$ cerrado y $f-$invariante (o positivamente invariante) se tiene que $h_{top}(f_{|A}) \leq h_{top}(f)$.

Prueba.

i) Como

$$\max_{0 \leq i \leq n} d(f^{mi}(x), f^{mi}(y)) \leq \max_{0 \leq j \leq mn} d(f^j(x), f^j(y)),$$

entonces $N_f(n, \epsilon) \leq N_f(mn, \epsilon)$, por tanto $h_{top}(f^m) \leq mh_{top}(f)$. Ahora para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$ para $i = 0, ..., m$. Entonces $N_{f^m}(n, \delta) \geq N_f(mn, \epsilon)$, por tanto $h_{top}(f^m) \geq mh_{top}(f)$. Por lo tanto $h_{top}(f^m) = mh_{top}(f)$.

ii) Para cada conjunto $A \subset X$ que sea $(n, \epsilon)-$separado para f, secumple que $f^n(A)$ es $(n, \epsilon)-$separado para f^{-1}, entonces $N_{f^{-1}}(n, \epsilon) \leq N_f(n, \epsilon)$. Análogamente se concluye que $N_f(n, \epsilon) \leq N_{f^{-1}}(n, \epsilon)$. Por tanto $h_{top}(f) = h_{top}(f^{-1})$.

iii) Cualquier conjunto $(n, \epsilon)-$separado en A es $(n, \epsilon)-$separado en X. Por tanto $h_{top}(f_{|A}) \leq h_{top}(f)$. $\square$

Proposición 3.4 *Sean $(X, d_1), (Y, d_2)$ dos espacios métricos compactos y $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$ mapas continuos. Entonces*

(i) $h_{top}(f \times g) = h_{top}(f) + h_{top}(g)$.

(ii) Si g es factor de f, entonces

$$h_{top}(g) \leq h_{top}(f). \square$$

Una prueba de la proposición anterior se puede encontrar en [2, pag 40].

3.1.1. Entropía Topológica de Algunos Sistemas.

Usando la definición podemos ver que la entropía topológica de una isometría es cero; sea $f : X \longrightarrow X$ una isometría, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $d_n = d$ y por tanto para cada $\epsilon > 0$, $D_f(n, \epsilon)$ no depende de n, entonces $h_\epsilon(f) = \overline{\lim}_{n\to\infty} 1/n \log(D_f(n, \epsilon)) = 0$, luego $h_{top}(f) = 0$.

En particular rotaciones en el círculo y translaciones en el toro tienen entropía cero.

También conviene mencionar dos hechos que se siguen de manera directa de lo que ya tenemos; Sea $\Omega(f)$ el conjunto de puntos no errantes, entonces $h_{top}(f_{|\Omega(f)}) \leq h_{top}(f)$, y para cada $x \in X$, se tiene que $h_{top}((f_{|\omega(x)})) \leq h_{top}(f)$.

Proposición 3.5 *Sea A una matriz 2×2 con coeficientes enteros y determinate 1. Sean λ y λ^{-1} eigenvalores de A, con $|\lambda| > 1$, y $T_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ el automorfismo hiperbólico asociado. Entonces $h_{top}(T_A) = \log|\lambda|$.*

Demostración. Sean v_1, v_2, eigenvectores de A asociados a λ y λ^{-1} respectivamente. Supóngase que v_1, v_2 son de norma (euclidiana) igual a uno. Para x, $y \in \mathbb{R}^2$, escribimos $x - y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ y definimos $\tilde{d}(x, y) = max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$. Entonces $\tilde{d}$ es una métrica en $\mathbb{R}^2$ invariante bajo traslación (i.e. $\tilde{d}(x+\omega, y+\omega) = \tilde{d}(x,y)$ para todo $\omega \in \mathbb{R}^2$). En particular $\tilde{d}$ es invariante bajo translación entera y por tanto $\tilde{d}$ induce una métrica d en $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, donde $d(a,b)$ es la $\tilde{d}$ distancia entre los conjuntos $\pi^{-1}(a)$ y $\pi^{-1}(b)$ (π es la proyección canónica de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{T}^2$). Además π es una isometría local para estas métricas. Una $\tilde{d}-$bola de radio ϵ es un paralelogramo cuyos lados son de longitud (euclidiana) 2ϵ y paralelos a v_1 y v_2. Una $\tilde{d}_n-$bola de radio ϵ es un paralelogramo con lados de longitud $2\epsilon|\lambda|^{-n}$ en la dirección v_1 y de longitud 2ϵ en la dirección v_2. Por tanto el área (euclidiana) de una $\tilde{d}_n-$bola de radio ϵ es menor o igual a $4\epsilon^2|\lambda|^{-n}$. Ya que la métrica d en $\mathbb{T}^2$ es localmente isométrica a $\tilde{d}$, entonces para cada ϵ suficientemente pequeño, el área de una d_n-bola de radio ϵ es menor o igual que $4\epsilon^2|\lambda|^{-n}$. Por tanto el mínimo número de d_n-bolas de radio ϵ que cubren a $\mathbb{T}^2$ es al menos

$$\acute{a}rea\,(\mathbb{T}^2)/4\epsilon^2|\lambda|^{-n} = |\lambda|^n/4\epsilon^2.$$

Como un conjunto de diámetro ϵ está contenido en una bola de radio ϵ, entonces $D_{T_A}(n,\epsilon) \geq |\lambda|^n/4\epsilon^2$. Por tanto $h_{top}(T_A) \geq log|\lambda|$. Por otro lado, como cada $\tilde{d}_n-$bola cerrada es un paralelogramo, entonces podemos cubrir a $\mathbb{R}^2$ por $\tilde{d}_n-$bolas cerradas con interiores disjuntos. El área euclidiana de una $\tilde{d}_n-$bola de radio ϵ es $C\epsilon^2|\lambda|^{-n}$, donde C depende del ángulo entre v_1 y v_2. Para ϵ suficientemente pequeño, cada $\tilde{d}_n-$bola de radio ϵ que intersecta al cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ está contenida

en $I_2 = [-1,2] \times [-1,2]$. Por tanto el número de bolas que intersectan el cuadrado unitario no excede el área de I_2 dividido por el área de una $\tilde{d}_n-$bola de radio ϵ. Entonces el toro se puede cubrir con $9\lambda^n/C\epsilon^2$ d_n-bolas cerradas de radio ϵ. Por tanto $D_{T_A}(n,2\epsilon) \leq 9\lambda^n/C\epsilon^2$, entonces $h_{top}(T_A) \leq log|\lambda|$. Por tanto $h_{top}(T_A) = log|\lambda|$. $\square$

Proposición 3.6 *Sea* $E_m : S^1 \to S^1$, $E_m(z) = z^m$. *Entonces* $h_{top}(E_m) = \log m$.

Demostración. Sean $x, y \in S^1$ con $d(x,y) < m^{-n}/2$. Entonces $d_n(x,y) = d(E_m^{n-1}(x), E_m^{n-1}(y))$. Así, si $d_n(x,y) \geq \epsilon$, entonces $d(x,y) \geq \epsilon m^{-n}$. Entonces para $\epsilon = m^{-k}$, el conjunto $\{im^{-n-k} : i = 0, ..., m^{n+k} - 1\}$ cuenta el máximo número de elementos con distancia d_n mayor o igual a m^{-k}. Por tanto $N_{E_m}(n, m^{-k}) = m^{n+k}$, y en consecuencia

$$\begin{aligned} h_{top}(E_m) &= \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{\log N_{E_m}(m^{-k}, n)}{n} \\ &= \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{n+k}{n} \log m \\ &= \log m. \square \end{aligned}$$

Proposición 3.7 *Sea* $\sigma_N : \Omega_N \to \Omega_N$ *la transformación shift. Entonces* $h_{top}(\sigma_N) = \log N$.

Demostración. Recordemos que para cada $\lambda > 1$ la métrica d_λ en Ω_N está dada por

$$d_\lambda(\omega, \omega') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\omega_n - \omega'_n|}{\lambda^{|n|}},$$

y d_λ genera la topología de Ω_N. Además para $\lambda = 10N$ se cumple que para cada $\alpha = (\alpha_{-n}, ..., \alpha_n)$ el cilindro simétrico $C_\alpha^m = \{\omega \in \Omega_N : \omega_i = \alpha_i \; para \; |i| \leq m\}$ es también la bola (respecto a $d = d_{10N}$) de radio $\epsilon_m = (10N)^{-m}/2$ cuyo centro es cualquiera de sus puntos. Similarmente para los números $\alpha_{-m}, ..., \alpha_{m+n}$, el cilindro $C_{\alpha_{-m},...,\alpha_{-m+n}}^{-m,..,-m+n} = \{\omega \in \Omega_N : \omega_i = \alpha_i, -m \leq i \leq m+n\}$ es la bola de radio ϵ_m respecto a d_n cuyo centro es cualquiera de sus puntos. Por tanto, cualesquiera dos d_n-bolas de radio ϵ_m son iguales o disjuntas. Como exsiten N^{n+2m+1} bolas de tal forma, entonces se concluye que $S_{\sigma_N}(\epsilon_m, n) = N^{n+2m+1}$, y así

$$h_{top}(\sigma_N) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N^{n+2m+1} = \log N. \square$$

3.2. Teoría Ergódica y Entropía de Medida.

El objetivo principal de esta sección es presentar el teorema del *principio variacional*, el cual establece una igualdad entre la entropía topológica y el supremo de las entropías de medida sobre medidas invariantes o ergódicas (respecto al mapa T). El principio variacional es un resultado importante que se usará en la prueba del teorema central de esta tesis.

La teoría ergódica se refiere a los sistemas en donde X es un espacio medible y $T : X \longrightarrow X$ es un mapa que preserva la medida. Para un sistema de estos (X, T) también se define la entropía de medida del mapa T. En el caso que X es un espacio topológico, μ es una medida de Borel (invariante) y $T : X \longrightarrow X$ es continua, entonces al sistema (X, T) le corresponden dos entropías diferentes, la entropía topológica y la entropía de medida.

Iniciamos recordando algunos conceptos de teoría de la medida.

Definición 3.2 *Sea X un conjunto no vacío. Una colección no vacía $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es llamada una $\sigma-$**álgebra** si:*

(i) $X \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

(iii) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

Note que las propiedades (ii) y (iii) de la definición anterior implican que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo intersecciones numerables.

Para cualquier conjunto X, el conjunto potencia $2^X = \{A : A \subset X\}$ es una $\sigma-$álgebra.

Observación. Sea $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de $\sigma-$álgebras en X. Entonces $\bigcap_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha$ es una $\sigma-$álgebra, y es la mínima que contiene a todos los $\mathcal{A}_\alpha$.

Definición 3.3 *Dado $\mathcal{A} \subset 2^X$, la intersección de las $\sigma-$álgebras que contienen a $\mathcal{A}$ se llama la $\sigma-$**álgebra generada** por $\mathcal{A}$.*

Una ***medida*** en $\mathcal{A}$ es una función $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$, tal que $\mu(\emptyset) = 0$ que es $\sigma-$***aditiva***, es decir, $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ para cualquier colección numerable de conjuntos disjuntos $A_i \in \mathcal{A}$, y tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Los elementos de $\mathcal{A}$ son llamados conjuntos ***medibles***. Decimos que μ es $\sigma-$***finita*** si X es la unión numerable de conjuntos de medida finita. Un conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$ es llamado un ***conjunto nulo***. Un conjunto cuyo complemento es un conjunto nulo se dice que tiene ***medida total***. Decimos que una propiedad se vale ***mod 0*** en X, o se vale μ ***casi en todas partes (c.d.)*** si ésta se vale en un conjunto de medida total.

Un ***espacio medible*** es una terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$, donde X es un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida $\sigma-$aditiva. Sean $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(Y, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ dos espacios medibles. Un mapa $T : X \longrightarrow Y$ es ***medible*** si la preimagen de cualquier conjunto medible es medible. Si $\mu(X) = 1$, entonces $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama un ***espacio de probabilidad***. Si $\mu(X)$ es finito, entonces multiplicando μ por el factor $1/\mu(X)$ obtenemos un espacio de probabilidad.

Sea X un espacio topológico. La mínima $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ que contiene los abiertos de X se llama la $\sigma-$***álgebra de Borel*** de X. Si $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel, entonces una medida μ en $\mathcal{B}$ es una ***medida de Borel*** si la medida de cualquier compacto es finita.

3.2.1. Invarianza y Ergodicidad.

Definición 3.4 *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, y $T : X \to X$ un mapa medible. Decimos que μ es una **medida** $T-$**invariante** (o que T **preserva la medida**) si para todo $A \in \mathcal{A}$, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Si μ es $T-$invariante y, para cada $A \in \mathcal{A}$ tal que $T^{-1}(A) = A$, entonces $\mu(A) =$*

0 ó $\mu(A) = 1$, decimos que μ es una ***medida $T-$ergódica*** *(o que T* ***es $\mu-$ergódica).***

Sea

$\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra ***en*** X, sea $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de las medidas de probabilidad definidas en $\mathcal{A}$. Denotaremos por $\mathcal{M}_T(X)$ al conjunto de todas las $\mu \in \mathcal{M}(X)$ que son $T-$invariantes, y $\mathcal{M}_{erg}(T) := \{\mu \in \mathcal{M}_T(X) : \mu$ es $T-$ergódica$\}$.

Proposición 3.8 *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probablilidad, y $T : X \longrightarrow X$ que preserva la medida. Entonces T es $\mu-$ergódica si y sólo si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}(B)) = \mu(A)\mu(B). \square$$

El siguiente resultado nos garantiza la existencia de medidas invariantes sobre espacios métricos compactos. Una prueba del teorema se puede encontrar en [1, pag 135].

Teorema 3.1 (**Krylov y Bogolubov**). *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, $\mathcal{B}$ la $\sigma-$álgebra de Borel y $T : X \longrightarrow X$ continua. Entonces existe μ medida de probabilidad $T-$invariante.* $\square$

Las medidas $T-$ergódicas corresponden a los puntos extremales de $\mathcal{M}_T(X)$. Este hecho nos garantiza la existencia de medidas $T-$ergódicas sobre espacios métricos compactos.

Definición 3.5 *Para una medida de Borel μ en un espacio métrico X se define el* ***soporte de*** *μ y se denota por* ***supp****μ al conjunto suppμ*

$$\textbf{\textit{supp}}\mu := \{x \in X : \textit{para todo abierto } U \textit{ tal que } x \in U,\ \mu(U) > 0\}.$$

El lema siguiente nos presenta otra familia de subsistemas. A partir de cada μ medida de Borel $f-$invariante, suppμ es un conjunto cerrado y $f-$invariante.

Lema 3.1 *Sean (X, d) un espacio métrico compacto, $f : X \longrightarrow X$ continua y μ una medida de Borel $f-$invariante. Entonces*

(i) $\mu(X \backslash supp\mu) = 0$.

(ii) $supp\mu$ es cerrado.

(iii) $supp\mu$ es un conjunto $f-$invariante.

Prueba. (i) Como cada $x \in X\backslash\text{supp}\mu$ tiene una vecindad abierta U tal que $\mu(U) = 0$ y X es separable (por ser X compacto), entonces $X\backslash\text{supp}\mu$ puede ser cubierto por una familia numerable de abiertos de medida 0 cada uno. Luego, ya que μ es $\sigma-$aditiva, entonces $\mu(X\backslash\text{supp}\mu) = 0$.

(ii) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \text{supp}\mu$, $x_n \to x$ y $x \in U$, U abierto. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$. Por tanto, ya que $x_n \in \text{supp}\mu$, se tiene que $\mu(U) > 0$. Así $x \in \text{supp}\mu$**.** Luego suppμ es cerrado.

(iii) Para ver que suppμ es $f-$invariante, sea $x \in \text{supp}\mu$, U abierto que contiene a $f(x)$. Entonces $f^{-1}(U)$ es una abierto que contiene a x (por continuidad de f). Luego $0 < \mu(f^{-1}(U)) = \mu(U)$. Así $f(x) \in \text{supp}\mu$. Por tanto $f(\text{supp}\mu) \subset \text{supp}\mu$.

Para ver que supp$\mu \subset f(\text{supp}\mu)$, note que supp$\mu \subset f^{-1}(f(\text{supp}\mu))$. Luego

$$\mu(\text{supp}\mu) \leq \mu(f^{-1}(f(\text{supp}\mu))) = \mu(f(\text{supp}\mu)).$$

Por tanto, ya que suppμ tiene medida total, también la tiene $f(\text{supp}\mu)$. Así, si existe $x \in \text{supp}\mu \setminus f(\text{supp}\mu)$, como X es compacto y suppμ es cerrado, entonces suppμ es compacto, por tanto $f(\text{supp}\mu)$ es compacto, en particular es cerrado. Luego $U = X \setminus f(\mathrm{supp}\mu)$ es un abierto que contiene x, por tanto $\mu(U) > 0$. Esto contradice que $f(\mathrm{supp}\mu)$ tiene medida total. Por tanto $\mathrm{supp}\mu \subset f(\mathrm{supp}\mu)$, como se quería probar. $\square$

Proposición 3.9 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, $\mathcal{B}$ la $\sigma-$álgebra de Borel, $T : X \longrightarrow X$ y μ una medida de probabilidad en $\mathcal{B}$ con $\mu(U) > 0$ para todo abierto $U \neq \emptyset$, y $\mu-$ergódica. Entonces $\mu(\{x \in X : \overline{orb(x)} = X\}) = 1$.*

Lema 3.2 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y $f : X \longrightarrow X$ continua. Suponga que μ es una medida $f-$ergódica. Entonces $f_{|supp\mu}$ tiene una órbita densa.*

Prueba. Consideramos el sistema $f_{|\mathrm{supp}\mu} : \mathrm{supp}\mu \to \mathrm{supp}\mu$. Ya que $\mathrm{supp}\mu$ es compacto, y por definición $\mu(U) > 0$ para todo $U \neq \emptyset$ abierto en $\mathrm{supp}\mu$, entonces por la proposición 3.9, $\mu(\{x \in \mathrm{supp}\mu : \overline{\mathrm{orb}(x)} = \mathrm{supp}\mu\}) = 1$. Esto prueba el lema. $\square$

3.2.2. Entropía con Respecto a una Medida

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad. Decimos que $A \subset B$ ***mod*** 0 si $\mu(A \setminus B) = 0$. Una ***partición*** de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es una familia $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ ($\mathcal{P}$ es una familia numerable) de conjuntos de medida positiva tales que $X = \bigcup \mathcal{P}$ mod 0, y para culesquiera $A, B \in \mathcal{P}$, con $A \neq B$, $\mu(A \cap B) = 0$. Sea $\mathcal{P}$ una partición finita de $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Sea $\phi(x) = x \log x$ si $0 < x \leq 1$ y $\phi(0) = 0$. Definimos la ***entropía*** de $\mathcal{P}$ como

$$H(\mathcal{P}) = H_\mu(\mathcal{P}) := -\sum_{P \in \mathcal{P}} \phi(\mu(P)).$$

Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son dos particiones de $(X, \mathcal{A}, \mu)$, decimos que $\mathcal{Q}$ es un ***refinamiento*** de $\mathcal{P}$, denotado por $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$ si todo elemento de $\mathcal{Q}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{P}$ mod 0. Denotamos por $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ a la partición cuyos elementos son los conjuntos $P \cap Q$ con medida positiva y $P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}$. Evidentemente $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ es un refinamiento de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.

Supongamos que $T : X \longrightarrow X$ preserva medida, sea $\mathcal{P}$ una partición finita, entonces $T^{-1}\mathcal{P} = \{T^{-1}(P) : P \in \mathcal{P}\}$ es también una partición finita. Definimos la ***entropía*** $h(T, \mathcal{P})$ de T con respecto a $\mathcal{P}$ como

$$h(T, \mathcal{P}) := \text{lím}_{n\to\infty} 1/n \; H(\mathcal{P} \vee T^{-1}\mathcal{P} \vee ... \vee T^{-(n-1)}\mathcal{P}).$$

Este límite existe pues la sucesión

$$a_n = H(\mathcal{P} \vee T^{-1}\mathcal{P} \vee ... \vee T^{-(n-1)}\mathcal{P}).$$

es subaditiva, es decir, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{n+m} \leq a_n + a_m$.

Definición 3.6 *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ de probabilidad y $T : X \longrightarrow X$ que preserva la medida. La* ***entropía de medida*** *de T respecto a μ se define como*

$$h(T) = h_\mu(T) := \sup\{h(T, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \textit{ es una partición finita}\}.$$

Una prueba del siguiente torema puede encontrarse en [1, pag 181].

Teorema 3.2 (**Teorema del principio variacional**).

Sea X un espacio métrico compacto, $T : X \longrightarrow X$ continua. Entonces

$$\begin{aligned} h_{top}(T) &= \sup\{h_\mu(T) : \mu \in \mathcal{M}_T(X)\} \\ &= \sup\{h_\mu(T) : \mu \in \mathcal{M}_{erg}(T)\}. \ \square \end{aligned}$$

Capítulo 4

Propiedades del $\omega-$límite

En este capítulo se presentan algunas propiedades de los conjuntos ω- límite, y que en condiciones favorables nos dan caracterizaciones de tales conjuntos. El resultado principal de esta tesis se presenta en el capítulo siguiente, nos dice que la entropía topológica de un sistema dinámico $f : X \to X$ está determinada por sus subsistemas ω- límite, por eso pretendemos conocer algo más sobre estos conjuntos.

Para cada $x \in X$, sabemos que $\omega(x)$ es $f-$invariante, entonces el conjunto $\bigcup_{x\in X} \omega(x)$ es también $f-$invariante. Sin embargo $\bigcup_{x\in X} \omega(x)$ no es necesariamente cerrado. Por tanto, obtenemos un subsistema si consideramos su cerradura.

Denotamos por

$$\Delta^+(f) = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x).}$$

Proposición 4.1 *Sea $f : X \to X$ un sistema dinámico. Entonces el conjunto $\Delta^+(f)$ es cerrado y $f-$positivamente invariante.*

Prueba. Por definición $\Delta^+(f)$ es cerrado. Para ver que $\Delta^+(f)$ es positivamente invariante, sea $y \in \Delta^+(f)$, entonces existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{x\in X} \omega(x)$ tal que $y_n \to y$ $(n \to \infty)$. Por continuidad de f, $f(y_n) \to f(y)$. Sin embargo, $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{x\in X}\omega(x)$ pues cada $\omega(x)$ es $f-$ invariante. Por tanto $f(y) \in \Delta^+(f)$. Es decir, $f(\Delta^+(f)) \subset \Delta^+(f)$. Así $\Delta^+(f)$ es positivamente invariante. $\square$

Recordamos que un punto x es no errante si para cada vecindad U de x existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ y que el conjunto de puntos no errantes se denota por $\Omega(f)$.

Proposición 4.2 *Sea $f : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Entonces para cada $x \in X$ se tiene que $\omega(x) \subset \Omega(f)$.*

Prueba. Sean $x \in X$, $y \in \omega(x)$. Entonces existe una sucesión de enteros $n_k \to +\infty$ tal que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y$. Sea U un abierto que contiene a y, por tanto existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq r$, $f^{n_k}(x) \in U$. Así, $f^{n_{r+1}}(x) \in U \cap f^{n_{r+1}-n_r}(U)$, entonces $y \in \Omega(f)$. Luego, para cada $x \in X$ se tiene que $\omega(x) \subset \Omega(f)$. $\square$

Corolario 4.1 *Sea $f : X \to X$ un sistema dinámico. Sea $\triangle^+(f) = \overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}$, entonces $\triangle^+(f) \subset \Omega(f)$.*

Prueba. La proposición anterior implica que $\bigcup_{x\in X}\omega(x) \subset \Omega(f)$. Como $\Omega(f)$ es cerrado, entonces

$$\overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)} \subset \Omega(f). \square$$

Definición 4.1 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ continua. Entonces un conjunto $Y \subset X$ se llama un **sistema** $\omega-$**límite** si existe $x \in X$ tal que $Y = \omega_f(x)$.*

Definición 4.2 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua. Decimos que X es $f-$**conexo** si para todo subconjunto cerrado no vacío propio $A \subset X$ se tiene que $f(A) \cap \overline{A^c} \neq \emptyset$.*

Teorema 4.1 *Sea (X, d) espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ conttinua. Sea $x \in X$. Entonces $\omega(x)$ es $f-$conexo.*

Prueba. Procedemos por contradicción. Sea $Y = \omega(x)$. Supóngase que Y no es $f-$conexo. Entonces existe $A \subset Y$ no vacío, cerrado, tal que $f(A) \cap \overline{A^c} = \emptyset$ (el complemento y la cerradura de A es tomado en Y). Sea $d(f(A), \overline{A^c}) = \epsilon$. Como Y es compacto y f es continua en Y, entonces f es uniformemente continua en Y. Así, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in Y$ con $d(y, A) < \delta$, se tiene que $d(f(y), f(A)) < \epsilon/2$. Como Y es el conjunto $\omega-$límite de x, existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $d(f^n(x), Y) < \delta$; pues si no, entonces existe una sucesión infinita de elementos de la forma $f^{n_k}(x)$ $(n_k \to \infty)$ en el conjunto

$$B_\delta(Y)^c = \{z \in X : d(z, Y) \geq \delta\},$$

el cual es compacto, y por tanto existe $z_0 \in B_\delta(Y)^c$ tal que z_0 es el límite de una subsucesión de $f^{n_k}(x)$. Entonces z_0 es un punto $\omega-$límite de x, lo cual es una contradicción. También existe $r > N$ tal que $d(f^r(x), A) < \delta$, ésto implica que $d(f^{r+1}(x), f(A)) < \epsilon/2$, y ésto a su vez implica que $d(f^{r+1}(x), \overline{A^c}) > \epsilon/2$, y como también $d(f^{r+1}(x), Y) < \delta$, entonces $d(f^{r+1}(x), A) < \delta$, y nuevamente por continuidad uniforme $d(f^{r+2}(x), f(A)) < \epsilon/2$, lo cual implica que $d(f^{r+2}(x), \overline{A^c}) > \epsilon/2$. Repitiendo este argumento vemos que en general $d(f^{r+m}(x), \overline{A^c}) > \epsilon/2$ para todo $m = 1, 2, ...$ Esto es una contradicción. Así, Y es $f-$conexo. $\square$

De hecho, para un homeomorfismo $f : X \to X$ la propiedad de ser $f-$conexo es necesaria y suficiente para que X sea un sistema $\omega-$límite. La prueba del siguiente teorema puede encontrarse en [4].

Teorema 4.2 *Sea (X, d) espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ un homeomorfismo. Sea $Y \subset X$ un subconjunto cerrado y $f-$invariante. Entonces Y es un conjunto $\omega-$límite si y sólo si Y es $f-$conexo.*

Corolario 4.2 *Sea (X,d) espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ continua. Sea $x \in X$ tal que $\omega(x)$ es finito. Entonces existe $y \in X$ periódico tal que*

$$orb(y) = \omega(x).$$

Prueba. Sea $y \in \omega(x)$, entonces $\mathrm{orb}(y) \subset \omega(x)$. Como $\omega(x)$ es finito, entonces el conjunto $\mathrm{orb}(y)$ es también finito, y por tanto y es periódico. Entonces $\mathrm{orb}(y)$ es cerrado y además es claro que $f(\mathrm{orb}(y)) = \mathrm{orb}(y)$. Suponga que $\omega(x) \subsetneq \mathrm{orb}(y)$. Por el teorema anterior $\omega(x)$ es $f-$conexo. Entonces se cumple que $\mathrm{orb}(y) \cap \mathrm{orb}(y)^c = f(\mathrm{orb}(y)) \cap \overline{\mathrm{orb}(y)^c} \neq \emptyset$ (complemento y cerradura de $\mathrm{orb}(y)$ es sobre $\omega(x)$), lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathrm{orb}(y) = \omega(x)$. $\square$

Definición 4.3 *Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua. Decimos que X es $f-$**irreducible** si no existen $A, B \subset X$ no vacíos, disjuntos, cerrados y $f-$invariantes tal que $X = A \cup B$.*

Corolario 4.3 *Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ un mapa continuo. Si X es un conjunto $\omega-$límite, entonces X es $f-$irreducible.*

Prueba. Supóngase que X es un conjunto $\omega-$límite. Entonces por el teorema 4.1, X es $f-$conexo. Ahora supóngase que X no es $f-$irreducible; entonces existen $A, B \subset X$ no vacíos, disjuntos, cerrados y $f-$invariantes tales que $X = A \cup B$. Por lo tanto $A \subset X$ es también abierto y $f(A) \subset A$. Esto contradice el hecho de que X es $f-$conexo. Por tanto X es $f-$irreducible. $\square$

Otra propiedad que cumplen los conjuntos $\omega-$límite es la de ser *internamente transitivo por cadenas*. Un estudio más detallado del tema se encuentra en [9].

Definición 4.4 *Sea (X, f) un sistema. Sea $A \subset X$, no vacío y $f-$invariante. Decimos que A es* ***internamente transitivo por cadenas*** *si para cada $a, b \in A$ y cada $\epsilon > 0$, existe una sucesión finita $x_1, ..., x_m$ en A con $x_1 = a$, $x_m = b$ tal que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$, $1 \leq i \leq m-1$. La sucesión $\{x_1, ..., x_m\}$ es llamada una $\epsilon-$cadena que conecta a con b.*

Lema 4.1 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua. Sea $x \in X$ y $\omega(x)$ su conjunto $\omega-$límite. Entonces $\omega(x)$ es internamente transitivo por cadenas.*

Prueba. Sea $x_n = f^n(x)$. Entonces $\omega(x)$ es no vacío, compacto y $f-$invariante. Además $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, \omega(x)) = 0$ (para $A \subset X$, $z \in X$, $d(z, A) = \inf\{d(z, a) : a \in A\}$). Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $0 < \delta < \frac{\epsilon}{3}$ tal que si $u, v \in U := \{z \in X : d(z, \omega(x)) < \delta\}$ y $d(u, v) < \delta$, entonces $d(f(u), f(v)) < \frac{\epsilon}{3}$. Por tanto existe $N > 0$ tal que $x_n \in U$, para todo $n \geq N$. Sean $a, b \in \omega(x)$. Entonces existen $k > m \geq N$ tal que $d(x_m, f(a)) < \frac{\epsilon}{3}$ y $d(x_k, b) < \frac{\epsilon}{3}$. Así la sucesión $\{y_0 = a,\ y_1 = x_m, ..., y_{k-m} = x_{k-1}, y_{k-m+1} = b\}$ es una $\frac{\epsilon}{3}-$cadena que conecta a con b. Para cada $y_i \in U,\ i = 0, ..., k-m$, nos tomamos $z_i \in \omega(x)$ tal que $d(z_i, y_i) < \delta$. Sea $z_0 = a$ y $z_{k-m+1} = b$. Entonces para cada $i = 0, ..., k-m$ se cumple que $d(f(z_i), z_{i+1}) \leq d(f(z_i), f(y_i)) + d(f(y_i), y_{i+1}) + d(y_{i+1}, z_{i+1}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Es decir, la sucesión $z_0, z_1, ..., z_{k-m+1}$ es una $\epsilon-$cadena que conecta a con b. $\square$

Capítulo 5

Entropía Topológica Vía los $\omega-$límite

En este capítulo iniciamos con el resultado principal de la tesis. Este teorema (5.1) establece una igualdad entre la entropía topológica de un sistema (X, f) (X un espacio métrico compacto y f continua) y el supremo de las entropías de sus conjuntos $\omega-$límite. Usando el teorema (5.1) probaremos algunos resultados importantes ya conocidos, por ejemplo, probamos de manera muy sencilla y directa que la entropía de un sistema se alcanza en los subconjuntos $\Omega(f)$ y $\Delta^+(f)$. Con ayuda del teorema (5.1) mostramos también que para los homeomorfismos con entropía positiva debe existir un punto cuyo $\omega-$límite es no numerable.

La utilidad del teorema (5.1) se hará evidente en la medida que logremos obtener buena información sobre los subconjuntos $\omega-$límite, es decir, en ocaciones esto último resulta más sencillo que calcular de manera directa la entropía de un sistema dado.

Teorema 5.1 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ continua. Entonces*

$$h_{top}(f) = \sup\{h_{top}(f_{|\omega(x)}) : x \in X\}.$$

Prueba. Sea $M = \sup\{h_{top}(f_{|\omega(x)}) : x \in X\}$. Sea $x \in X$. Como $\omega(x)$ es cerrado y $f-$ invariante, $h_{top}(f_{|\omega(x)}) \leq h_{top}(f)$. Tomando supremos en ambos lados (el lado derecho no depende de x), obtenemos que $M \leq h_{top}(f)$. Ahora, si $h_{top}(f) = 0$, para cada $x \in X$, $h_{top}(f_{|\omega(x)}) = 0$, por tanto $M = h_{top}(f)$. Supóngase entonces que $h_{top}(f) > 0$. Sea m tal que $0 < m < h_{top}(f)$. Entonces, por el principio variacional existe μ medida ergódica tal que $m < h_\mu(f) < h_{top}(f)$. Sea supp$\mu$ el soporte de μ en X. Como suppμ es cerrado y f-invariante podemos considerar $h_{top}(f_{|\mathrm{supp}\mu})$. Sabemos que $h_\mu(f) = h_\mu(f_{|\mathrm{supp}\mu})$. Como μ es ergódica, entonces por el lema 3.3 existe $x_0 \in \mathrm{supp}\mu$ tal que $\overline{orb(x_0)}$ =suppμ. Entonces

$$h_{top}(f_{|\omega(x_0)}) \quad = \quad h_{top}(f_{|\mathrm{supp}\mu}).$$

.

Así,

$$\begin{aligned} m &< h_\mu(f) \\ &= h_\mu(f_{|\mathrm{supp}\mu}) \\ &\leq h_{top}(f_{|\mathrm{supp}\mu}) \text{ (otra vez por el principio variacional)} \\ &= h_{top}(f_{|\omega(x_0)}) \\ &\leq h_{top}(f). \end{aligned}$$

Es decir, para m tal que $0 < m < h_{top}(f)$, encontramos x_0 tal que $m < h_{top}(f_{|\omega(x_0)}) \leq h_{top}(f)$. Como m fué arbitrario, entonces se tiene que $M = \sup\{h_{top}(f_{|\omega(x)}) : x \in X\} = h_{top}(f)$. $\square$

Corolario 5.1 *Sea (X, d) compacto y $f : X \to X$ un homeomorfismo. Entonces*

$$h_{top}(f) = \sup\{h_{top}(f_{|\alpha_f(x)}) : x \in X\}.$$

Prueba. Por la proposición 3.3, $h_{top}(f) = h_{top}(f^{-1})$. Además tenemos que para cada $x \in X$, se cumple que $\alpha_f(x) = \omega_{f^{-1}}(x)$. Entonces usando el teorema 5.1 obtenemos que:

$$\begin{aligned} h_{top}(f) &= h_{top}(f^{-1}) \\ &= \sup\{h_{top}(f^{-1}_{|\omega_{f^{-1}}(x)}) : x \in X\} \\ &= \sup\{h_{top}(f_{|\omega_{f^{-1}}(x)}) : x \in X\} \\ &= \sup\{h_{top}(f_{|\alpha_f(x)}) : x \in X\}. \ \square \end{aligned}$$

Corolario 5.2 *Sea (X, d) compacto y $f : X \longrightarrow X$ continua. Sea $\Delta^+(f) = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$. Entonces*

$$h_{top}(f) = h_{top}(f_{|\Delta^+(f)}).$$

Prueba. Como $\Delta^+(f)$ es cerrado y $f-$invariante, $h_{top}(f_{|\Delta^+(f)}) \leq h_{top}(f)$. Por otro lado, para cada $x \in X$ se tiene que $h_{top}(f_{|\omega(x)}) \leq h_{top}(f_{|\Delta^+(f)})$. Ahora, tomando supremos en ambos lados (el derecho no depende de x),

$$h_{top}(f) = \sup\{h_{top}(f_{|\omega(x)}) : x \in X\} \leq h_{top}(f_{|\Delta^+(f)}).$$

Por tanto se tiene la igualdad deseada. $\square$

Corolario 5.3 *Sea (X, d) compacto y $f : X \longrightarrow X$ continua. Sea $\Omega(f)$ el conjunto de puntos no errantes. Entonces*

$$h_{top}(f) = h_{top}(f_{|\Omega(f)}).$$

Prueba. Sabemos por el corolario anterior que $h_{top}(f) = h_{top}(f_{|\Delta^+(f)})$. Entonces, ya que $\Delta^+(f) \subset \Omega(f)$, en particular $h_{top}(f) = h_{top}(f_{|\Omega(f)})$. $\square$

Proposición 5.1 *Sea (X, d) compacto y X numerable. Sea $f : X \longrightarrow X$ un homeomorfismo. Entonces $h_{top}(f) = 0$.*

Prueba. Sea μ una medida ergódica en X. Como X es numerable y f es homeomorfismo, entonces debe existir $R \subset X$ también numerable tal que $X = \bigcup_{x \in R} \mathrm{orb}(x)$ (en este caso $\mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}_{\mathbb{Z}}(x) = \{f^m(x) = m \in \mathbb{Z}\}$) y $\mathrm{orb}(x) \cap \mathrm{orb}(y) = \emptyset$, si $x \neq y$. Ahora sea $x \in R$ y suponga que $\mathrm{orb}(x)$ no es finita. Ya que μ es ergódica, para cualesquiera $A, B \subset X$ medibles se cumple que

$$\lim_{n \to \infty} 1/n \sum_{i=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-i}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

En particular si $A = B = \{x\}$. Obviamente para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(\{x\}) \cap \{x\} = \emptyset$. Entonces $\mu(\{x\})^2 = 0$, luego $\mu(\{x\}) = 0$. Y como f es homeomorfismo, se cumple que $\mu(\mathrm{orb}(x)) = 0$. Por tanto $\mu(X \setminus Per(f)) = 0$. Así, existe $x_0 \in Per(f)$ tal que $\mathrm{supp}\mu = \mathrm{orb}(x)$. Como $h_\mu(f) = h_\mu(f_{|\mathrm{supp}\mu})$. Entonces es fácil ver que $h_\mu(f) = 0$. Como μ fué arbitraria, por el principio variacional, $h_{top}(f) = 0$. $\square$

Una consecuencia directa del teorema 5.1 y del corolario anterior es el siguiente resultado.

Corolario 5.4 *Sea (X, d) compacto, y $f : X \longrightarrow X$ un homeomorfismo tal que $h_{top}(f) > 0$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\omega(x)$ es no numerable.*

Prueba. Supongamos que para todo $x \in X, \omega(x)$ es numerable. Entonces por el corolario anterior, para todo $x \in X$, $h_{top}(f_{|\omega(x)}) = 0$. Por tanto $h_{top}(f) = \sup\{h_{top}(f_{|\omega(x)}) : x \in X\} = 0$. Esto contradice la hipótesis de que $h_{top}(f) > 0$. Entonces debe existir $x \in X$ tal que $\omega(x)$ es no numerable. $\square$

Proposición 5.2 *Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ un homeomorfismo. Entonces $h_{top}(f) = 0$.*

Prueba. Por el teorema del valor intermedio y la inyectividad de f, se tiene que f es estrictamente monótona. Supóngase que f es creciente. Sea $x \in [a,b]$, si $f(x) < x$, entonces se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) < f^{n-1}(x)$. Entonces la sucesión $f^n(x)$ es estrictamente decreciente y acotada en $[a,b]$. Por lo tanto $f^n(x)$ converge a un punto $y \in [a,b]$. Así, cualquier subsucesión de $f^n(x)$ converge también a y, y por tanto $\omega_f(x) = \{y\}$. De igual manera se ve que si $f(x) > x$, el conjunto $\omega_f(x)$ consta de un sólo punto. Para el caso que $f(x) = x$, es claro que $\omega_f(x) = \{x\}$. Es decir, hemos probado que si f es creciente, entonces para todo $x \in [a,b]$, $\omega_f(x)$ es finito. Similarmente se puede ver que esto pasa cuando f es decreciente. Por lo tanto, para todo $x \in [a,b]$, $h_{top}(\omega_f(x)) = 0$, y usando el teorema 5.1 obtenemos que $h_{top}(f) = 0$. $\square$

Una consideración muy general que se puede hacer es tomar la aplicación funcional h_{top} que a cada sistema dinámico (X,f) (X métrico compacto y f continua) le asocia su entropía topológica $h_{top}(f)$. En ciertos contextos específicos el dominio de h_{top} puede ser un conjunto, o incluso mejor, por ejemplo un espacio topológico, y entonces podemos preguntarnos sobre la continuidad de h_{top}, entre otras cosas. Algo que si podemos decir acerca de h_{top}, y se debe al teorema 5.1, es que h_{top} queda determinada por sus valores en la colección de sistemas $\omega-$límites. Además, por el teorema 4.1, el corolario 4.3 y el lema 4.1, sabemos que un sistema $\omega-$límite (X,f) es $f-$conexo, $f-$irreducible y $f-$internamente transitivo por cadenas. Entonces si consideramos a las colecciones

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &:= \{(X,f) : (X,d) \text{ es compacto y } f : X \to X \text{ continua}\}.\\
\mathcal{W} &:= \{(X,f) : (X,f) \in \mathcal{S} \text{ y } X \text{ es un conjunto } \omega - \text{límite}\}.\\
\mathcal{C} &:= \{(X,f) : (X,f) \in \mathcal{S} \text{ y } X \text{ es } f - \text{conexo}\}.\\
\mathcal{I} &:= \{(X,f) : (X,f) \in \mathcal{S} \text{ y } X \text{ es } f - \text{irreducible}\}.\\
\mathcal{T} &:= \{(X,f) : (X,f) \in \mathcal{S} \text{ y } X \text{ es } f - \text{internamente transitivo por cadenas}\},
\end{aligned}$$

podemos concluir el siguiente corolario:

Corolario 5.5 *Sea $h_{top} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ la aplicación definida por $h_{top}(X, f) = h_{top}(f)$. Entonces h_{top} está determinada por sus valores en las colecciones $\mathcal{W}$,$\mathcal{C}$,$\mathcal{I}$ y $\mathcal{T}$.*

Se había observado ya a partir de la definición de entropía topológica para un sistema (X, f), que ésta se podía extender a cualquier subconjunto $A \subset X$, con A compacto. Sin embargo, el teorema 5.1 nos permite extender la definición de entropía topológica para cualquier subconjunto $A \subset X$.

Definición 5.1 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ continua. Sea $A \subset X$ un subconjunto no vacío, definimos la entropía topológica $\overline{H}$ de f en A y la escribimos como $\overline{H}(f, A) = \sup\{h_{top}(\omega_f(x)) : x \in A\}$.*

El teorema 5.1 nos dice precisamente que la definición que acabamos de dar de entropía topológica $\overline{H}$ coincide con la definición de h_{top} en sistemas compactos invariantes.

Por supuesto $\overline{H}$ depende de la métrica d en X, pero si no hay lugar a confusión escribimos $\overline{H}$ en vez de $\overline{H}_d$. Ahora, sabemos que para cada x, $h_{top}(\omega_f(x))$ es invariante sobre métricas que generan la misma topología. Entonces, de la definicion se obtiene que si d' es otra métrica en X que genera la misma topología que d, se tiene que $\overline{H}_d = \overline{H}_{d'}$.

Veamos algunas propiedades de $\overline{H}$:

Proposición 5.3 *Sea (X, f) un sistema dinámico (X es un espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ continua). Entonces se cumplen las siguientes propiedades para $\overline{H}$:*

i) Si d y d' son métricas que generan la misma topología en X , entonces $\overline{H}_d = \overline{H}_{d'}$.

ii) Si $A \subset X$ es cerrado y $f-$positivamente invariante, entonces $\overline{H}(f, A) = h_{top}(f_{|A})$.

iii) Si (X, f) y (Y, g) son topologicamente conjugados vía un homeomorfismo $k : X \to Y$ y $A \subset X$, entonces $\overline{H}(f, A) = \overline{H}(g, k(A))$.

iv) Si $A, B \subset X$ y $A \subset B$, entonces $\overline{H}(f, A) \leq \overline{H}(f, B)$.

v) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X tal que $X = \bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$. Entonces $\overline{H}(f, X) = \sup\{\overline{H}(f, A_\alpha) : \alpha \in J\}$.

vi) Si $g : Y \to Y$ y g es factor de f vía un mapa continuo sobreyectivo $p : X \to Y$ y $B \subset X$, entonces $\overline{H}(g, p(B)) \leq \overline{H}(f, B)$.

Prueba. Ya hemos visto que i) se cumple. La propiedad ii) nos la da el teorema 5.1.

iii) Sea $A \subset X$. Como (X, f) y (Y, g) son topologicamente conjugados por k, entonces para cada $x \in X$, $\omega_f(x)$ es conjugado a $\omega_g(k(x))$ (por el homeomorfismo $k_{|\omega_f(x)}$). Por tanto $h_{top}(f_{|\omega_f(x)}) = h_{top}(g_{|\omega_g(k(x))})$. Así,

$$\begin{aligned} \overline{H}(f, A) &= \sup\{h_{top}(f_{|\omega_f(x)}) : x \in A\}. \\ &= \sup\{h_{top}(g_{|\omega_g(k(x))}) : x \in A\}. \\ &= \sup\{h_{top}(g_{|\omega_g(y)}) : y \in k(A)\}. \\ &= \overline{H}(g, k(A)). \end{aligned}$$

iv) Dados $A, B \subset X$, es evidente por definición de $\overline{H}$ que

$$\overline{H}(f, A) \leq \overline{H}(f, B).$$

v) Dado que para cada $\alpha \in J$, $\overline{H}(A_\alpha, f) \leq \overline{H}(f, X)$, entonces se cumple que $\sup\{\overline{H}(A_\alpha, f) : \alpha \in J\} \leq \overline{h}(f, X)$. Por otro lado, sea $x \in X$, entonces existe $\alpha \in J$ tal que $x \in A_\alpha$, por definición tenemos que $h_{top}(f_{|\omega(x)}) \leq \overline{H}(f, A_\alpha)$. Así, podemos tomar supremos en ambos lados para obtener que $\overline{H}(f, X) = \sup\{h_{top}(f_{|\omega(x)}) : x \in X\} \leq \sup\{\overline{H}(A_\alpha, f) : \alpha \in J\}$. Esto prueba la igualdad.

vi) Sea $x \in B$, entonces es claro que $g_{|\omega_g(p(x))}$ es factor de $f_{|\omega_f(x)}$. Por la proposicion 3.4, se cumple entonces que $h_{top}(g_{|\omega_g(p(x))}) \leq h_{top}(f_{|\omega_f(x)})$. Por lo tanto $\overline{H}(g, p(B)) = \sup\{h_{top}(g_{|\omega_g(p(x))}) : p(x) \in p(B)\} \leq \sup\{h_{top}(f_{|\omega_f(x)}) : x \in B\} = \overline{H}(f, (B))$ $\square$

Por último, del teorema 5.1 podemos definir la noción de un punto con entropía maximal.

Definición 5.2 *Sea* (X, f) *un sistema. Decimos que un punto* $x \in X$ *tiene* ***entropía maximal*** *si* $h_{top}(f_{|\omega_f(x)}) = h_{top}(f)$.

Sea $E_{max}(f) = \{x \in X : h_{top}(f_{|\omega_f(x)}) = h_{top}(f)\}$.

Una cuestión natural que surge es la de estudiar la estructura topológica y dinámica del conjunto $E_{max}(f)$, y las relaciones de este conjunto con propiedades del sistema (X, f). Entre los casos extremos de que el conjunto de puntos con entropía maximal sea el vacío ó el total, existe un amplio espectro de posibilidades que pudieran determinar cosas significativas sobre la dinámica global.

Finalmente, cabe mencionar que en este capítulo se pudo excibir la utilidad del teorema principal de esta tesis, por ejemplo para la prueba de resultados ya conocidos con demostraciones mucho más sencillas, y también el establecer nuevos resultados. Es de nuestro interes (en trabajos posteriores) ampliar la utilidad del teorema; usarlo para calcular la entropía topológica de una forma más sencilla en sistemas donde ya se conoce la entropía, o calcular la entropía topológica de sistemas para los cuales todavía no se ha calculado, después de todo, el trabajo depende de poder conocer la entropía topológica de los subsistemas ω-límite en un sistema dado.

Bibliografía

[1] Katok, Anatole; Hasselblatt, Boris. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. New York, 1995.

[2] Brin, Michael; Stuck, Garrett. Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University. New York, 2002.

[3] Jost, Jurgen. Dynamical Systems. Springer-Verlag. Alemania, 2005.

[4] Dowker, Yael Naim; Friedlander, F,G. On Limit Sets in Dynamical Systems. November 1952.

[5] Robinson, R. Clark. An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete. Prentice Hall. New Jersey, 2004.

[6] Bruckner, A.M.; Cede, J. Chaos in terms of the map $x \to \omega(x, f)$. Pacific Journal of mathematics. Vol. 156. No. I, 1992.

[7] Bowen, Rufus. Topological Entropy for Noncompact Sets. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 184, October 1973.

[8] W.Hirsch, Morris; L.Smith, Hal; Qiang Zhao, Xiao. Chain Transitivity , Attractivity and Strong Repellors for Semidynamical Systems. June, 2000.