



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

La integral respecto al tiempo de algunos  
procesos estocásticos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

PRESENTA:

Carlos Fidel Selva Ochoa

TUTORA

Dra. Ana Meda Guardiola



Ciudad Universitaria, CDMX, 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno  
Selva  
Ochoa  
Carlos Fidel  
70212910  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Actuaría  
309205823
  
2. Datos del tutor  
Dra  
Ana  
Meda  
Guardiola
  
3. Datos del sinodal 1  
Dr  
Luis Antonio  
Rincón  
Solís
  
4. Datos del sinodal 2  
Dr  
Fernando  
Baltazar  
Larios
  
5. Datos del sinodal 3  
Act  
Alejandro  
Santoyo  
Cano
  
6. Datos del sinodal 4  
Dra  
Ruth Selene  
Fuentes  
García
  
7. Datos del trabajo escrito  
La integral respecto al tiempo de algunos procesos estocásticos  
47 pp.  
2016

---

# Agradecimientos

A Ana Meda por guiarme, a Luis Rincón por apoyarme y a mis amigos y familia por estar.

---

# Prefacio

Este trabajo pretende encontrar las propiedades de la integral respecto al tiempo de algunos procesos estocásticos, mostrar algunas aplicaciones, hacer la simulación de trayectorias y describir su comportamiento probabilístico. También analizamos los requisitos que debe cumplir un proceso estocástico para poder ser integrado.

En el primer capítulo se dan las bases para construir la integral de las trayectorias como el límite de sumas parciales, se exhiben las propiedades del proceso integrado y se dan ejemplos de procesos a los que se puede aplicar la teoría desarrollada en el inicio de esta tesis.

En los capítulos dos y tres se tratan a fondo las propiedades y el comportamiento probabilístico del movimiento browniano integrado y el proceso de Poisson integrado respectivamente. En el cuarto capítulo se muestran y proponen usos para los procesos integrados anteriormente discutidos y, por último, en el quinto capítulo se proponen algunos códigos en el lenguaje de programación estadístico R para simular los procesos integrados aquí descritos e incluir algunos ejemplos gráficos de las trayectorias obtenidas.

Elegí la integral de Riemann porque es la que conocía y manejaba cuando inicié este trabajo. Es por eso que la mayoría de los resultados que empecé probando tienen una estrecha relación con las sumas de Riemann. Después conocí la integral de Lebesgue, pero no consideramos necesario cambiar de integral porque los resultados, aunque de manera general parece que se heredan fácilmente, no es así. Y los ejemplos que tenía interés en estudiar tienen trayectorias Riemann-integrables.

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>Prefacio</b>	<b>4</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Definiciones básicas . . . . .	7
1.2. Ejemplos . . . . .	13
1.2.1. Cadena de Markov a tiempo continuo . . . . .	13
1.2.2. Cadena de primera ocurrencia . . . . .	14
1.2.3. Proceso Poisson . . . . .	16
1.2.4. Movimiento browniano . . . . .	17
<b>2. El movimiento browniano integrado</b>	<b>19</b>
2.1. Propiedades . . . . .	19
2.2. Distribuciones conjuntas . . . . .	22
<b>3. El proceso Poisson integrado</b>	<b>27</b>
3.1. Propiedades . . . . .	28
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>33</b>
4.1. Movimiento browniano integrado . . . . .	33
4.1.1. Física . . . . .	33
4.1.2. Finanzas . . . . .	34
4.1.3. Ecuaciones diferenciales . . . . .	35
4.1.4. Fórmula de Feynman-Kac . . . . .	37

4.1.5. Martingalas . . . . .	39
4.2. Proceso Poisson integrado . . . . .	40
<b>5. Simulación</b>	<b>41</b>
5.1. Movimiento browniano integrado . . . . .	41
5.2. Proceso Poisson . . . . .	42
5.3. Cadena de Markov a tiempo continuo . . . . .	44
<b>6. Conclusiones</b>	<b>46</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

---

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo daremos las bases para poder definir y trabajar con un proceso estocástico integrado. También calcularemos sus primeros dos momentos y varianza, para lo cual nos apoyamos en las referencias [3], [8] y en [5].

### 1.1. Definiciones básicas

**Definición 1.1.** *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \in T\}$  definidas en un espacio de probabilidad común  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , parametrizada por un conjunto  $T$ , llamado espacio parametral. Las variables toman valores en un conjunto  $S$  llamado espacio de estados.*

En este trabajo utilizaremos los números reales como espacio de estados y los números no negativos como espacio parametral, esto es,  $S = \mathbb{R}$  y  $T = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ . Así, un proceso estocástico es una función  $X: \Omega \times T \rightarrow S$  tal que para cada  $t_0 \in T$ , la función  $X_{t_0}: \Omega \rightarrow S$  definida como  $X_{t_0}(\omega) = X(\omega, t_0)$ , es una variable aleatoria. Si fijamos una  $\omega_0 \in \Omega$  tendremos  $X_{\omega_0}: T \rightarrow S$ , una trayectoria del proceso. Esta trayectoria es ahora una función  $X_{\omega_0}(t) = X(\omega_0, t)$  con  $t \in \mathbb{R}^+$ .

**Definición 1.2.** *Una filtración es una colección de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  que cumplen la contención  $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$  cuando  $s \leq t$ . En particular, la filtración natural o canónica de un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es la colección de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  dadas por  $\mathfrak{F}_t = \sigma(\{X_s : 0 \leq s \leq t\})$ , con  $\sigma(\{X_s : 0 \leq s \leq t\}) = \sigma\left(\bigcup_{0 \leq s \leq t} \sigma(X_s)\right)$ .*



**Definición 1.3.** Se dice que el proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es adaptado a una filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  si para cada  $t \geq 0$  la variable aleatoria  $X_t$  es  $\mathfrak{F}_t$  medible.

**Definición 1.4.** Un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es continuo respecto al tiempo en el intervalo  $[0, T]$  si sus trayectorias son continuas respecto al tiempo casi seguramente en dicho intervalo. Esto es, si cumple que

$$P[\{\omega \in \Omega : t \mapsto X_\omega(t) \text{ es continua en el intervalo } [0, T]\}] = 1.$$

**Definición 1.5.** Un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es integrable respecto al tiempo en el intervalo  $[0, T]$  si sus trayectorias son integrables casi seguramente en dicho intervalo. Esto es, si cumple que

$$P[\{\omega \in \Omega : t \mapsto X_\omega(t) \text{ es integrable en el intervalo } [0, T]\}] = 1.$$

En esta tesis trabajaremos con procesos integrables respecto al tiempo, por ejemplo el movimiento browniano, las cadenas de Markov a tiempo continuo o el proceso Poisson. En estos casos podemos definir el proceso estocástico asociado que llamamos: *primitiva del proceso*  $\{X_t : t \geq 0\}$ .

**Definición 1.6.** Para un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$ , sea  $I_T$  el conjunto

$$I_T = \{\omega \in \Omega : t \mapsto X_\omega(t) \text{ es Riemann integrable en el intervalo } [0, T]\}.$$

Definimos a  $X_I$ , para cada  $\omega \in I_T$ , como:

$$X_I(\omega, t) = \int_0^t X(\omega, s) ds = \int_0^t X_\omega(s) ds.$$

Como queremos que esta nueva función sea un proceso estocástico, tenemos que demostrar que para cada  $t \in T$ ,  $X_I(t)$  es variable aleatoria. Más aún, es un proceso estocástico adaptado a la filtración canónica del proceso  $X$ .

**Definición 1.7.** Un conjunto  $A \in \mathfrak{F}$  se dice de medida finita si  $\mu(A) < \infty$ , donde  $\mu$  es una medida del espacio  $\Omega$ .

**Definición 1.8.** Una medida se dice que es  $\sigma$ -finita si el conjunto  $\Omega$  se puede expresar como la unión numerable de conjuntos de medida finita.

**Definición 1.9.** Un espacio de medida  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  se dice completo si sucede que todo subconjunto de un conjunto de medida cero es medible.

**Definición 1.10.** Dadas dos medidas  $\mu$  y  $\nu$  de los espacios  $A$  y  $B$  respectivamente, podemos definir a la medida producto  $\mu \times \nu$ , como la medida del espacio  $A \times B$  extendida por  $\mu$  y  $\nu$ .

Estas definiciones de teoría de la medida hacen posible definir la integral de una función respecto de una medida. En el caso particular de la probabilidad, a la integral de una variable aleatoria respecto a la medida de probabilidad del espacio se le llama la esperanza de la variable aleatoria. Esta integral tiene varias propiedades análogas a las de la integral de Riemann. El siguiente resultado nos será útil para el análisis de los procesos integrados que estudiamos.

**Teorema 1.1** (Teorema de Fubini-Tonelli). Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de espacios con medidas  $\sigma$ -finitas  $\mu$  y  $\nu$  respectivamente y  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable entonces, si alguna de las tres integrales:

$$\begin{aligned} & \int_A \left( \int_B |f| d\mu \right) d\nu, \\ & \int_B \left( \int_A |f| d\nu \right) d\mu, \\ \text{ó} & \int_{A \times B} |f| d(\mu \times \nu) \end{aligned}$$

es finita, entonces

$$\int_A \left( \int_B f d\nu \right) d\mu = \int_B \left( \int_A f d\mu \right) d\nu = \int_{A \times B} f d\mu \times d\nu.$$

**Proposición.** Si el proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es integrable en el intervalo  $[0, T]$  y el espacio de medida  $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  es completo, entonces la función  $X_I$  es un proceso estocástico adaptado a la filtración canónica de  $X$ .

*Demostración.* Tomemos  $t$  un número no negativo menor a  $T$  y sea  $\omega \in I_T$ . Como la trayectoria  $s \mapsto X_\omega(s)$  es integrable en el intervalo  $[0, t]$ , para cada sucesión de particiones  $\{\Pi_n\}_{n \geq 1}$  del intervalo, con  $\Pi_n = \{t_{n,i}\}_{i=0}^n$ ,  $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,n} = t$

tal que  $\Delta t_n = \max_i |t_{n,i} - t_{n,i-1}|$  converja a cero conforme  $n$  tiende a infinito, tenemos que la sucesión de sumas  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  definidas como

$$S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{t_i}(\omega)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{donde } t_i \in \Pi_n$$

converge puntualmente a  $X_I(\omega, t)$  y lo hace para toda  $\omega$  en el conjunto  $I_T$  cuyo complemento tiene medida de probabilidad cero, con lo que  $S_n$  converge casi seguramente bajo la medida  $P$ , a  $X_I(t) = X_I(\cdot, t)$ . Además,  $S_n$  es una variable aleatoria  $\mathfrak{F}_t$  medible pues es combinación lineal de variables aleatorias  $\mathfrak{F}_t$  medibles. Como el límite puntual casi seguro de funciones medibles es medible en espacios de medida completos [7], llegamos a que  $X_I(\cdot, t)$  es una variable aleatoria  $\mathfrak{F}_t$  medible y por tanto  $X_I(t)$  es un proceso estocástico adaptado.  $\square$

De manera más general, se denota por  $\mathcal{H}^2[0, T]$  al conjunto de procesos estocásticos  $X$ , tales que:

$$E \left[ \int_0^T |X(s)|^2 ds \right] < \infty,$$

Para poder calcular la esperanza y varianza de los procesos integrados pediremos que pertenezcan a  $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2[0, \infty)$ .

**Notación.**  $E^2[\cdot] = (E[\cdot])^2$

**Teorema 1.2** (Desigualdad de Cauchy). *Para todo par de variables aleatorias  $X$  e  $Y$  con segundo momento finito, se cumple que:*

$$E^2[XY] \leq E[X^2]E[Y^2]$$

y

$$Cov(X, Y)^2 \leq Var(X)Var(Y).$$

Usando el teorema de Fubini-Tonelli aplicado a la medida de probabilidad  $P$  y a la medida de Lebesgue  $\lambda$ , y ya que la integral de Lebesgue coincide con la de Riemann para funciones Riemann integrables, dado un proceso estocástico Riemann integrable  $\{X_t : t \geq 0\}$ , podemos intercambiar la esperanza del proceso integrado con la integral de Riemann del proceso original.

**Proposición.** Si un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  pertenece a  $\mathcal{H}^2[0, T]$  entonces

$$E \left[ \int_0^T |X(s)| ds \right] < \infty.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T |X(s)| ds \right] &= E \left[ \int_0^T |X(s)| \mathbf{1}_{\{|X(s)| \leq 1\}} ds + \int_0^T |X(s)| \mathbf{1}_{\{|X(s)| > 1\}} ds \right] \\ &\leq E \left[ \int_0^T ds + \int_0^T |X(s)|^2 \mathbf{1}_{\{|X(s)| > 1\}} ds \right] \\ &\leq E \left[ T + \int_0^T |X(s)|^2 ds \right] < \infty. \end{aligned}$$

□

**Proposición.** Si un proceso  $\{X_t : t \geq 0\}$  pertenece a  $\mathcal{H}^2[0, T]$  entonces

$$E \left[ \left( \int_0^T |X_s| ds \right)^2 \right] < \infty.$$

*Demostración.*

$$\int_0^T \int_0^T E^2 [|X_s X_u|] dud s \leq \int_0^T \int_0^T E [|X_s|^2] E [|X_u|^2] dud s \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^T E [|X_s|^2] ds \int_0^T E [|X_u|^2] du \\ &= \left( \int_0^T E [|X_s|^2] ds \right)^2 \\ &= \left( E \left[ \int_0^T |X_s|^2 ds \right] \right)^2 < \infty, \quad (2) \end{aligned}$$

donde en (1) se usó el Teorema 1.2 y en (2) el Teorema 1.1. Entonces,

$$\int_0^T \int_0^T E [|X_s X_u|] dud s < \infty,$$

y como la integral es finita, entonces podemos utilizar el teorema de Fubini-Tonelli,

$$E \left[ \left( \int_0^T |X_s| ds \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^T \int_0^T |X_s X_u| du ds \right] = \int_0^T \int_0^T E [|X_s X_u|] du ds < \infty.$$

□

La proposición anterior nos permite usar el Teorema 1.1 para intercambiar la esperanza de  $X_s^2$  o la de  $X_s X_t$  con su integral. A partir de ahora supondremos que el proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  pertenece a  $\mathcal{H}^2[0, T]$  ya que no es un supuesto tan restrictivo y como se acaba de demostrar garantiza la existencia del primer y segundo momento del proceso integrado.

Ahora calcularemos los primeros dos momentos y la varianza del proceso integrado  $X_I$  a tiempo  $t$  con  $0 \leq t \leq T$ .

La esperanza de  $X_I(t)$  es

$$\begin{aligned} E[X_I(t)] &= E \left[ \int_0^t X_s ds \right] \\ &= \int_0^t E[X_s] ds, \end{aligned}$$

el segundo momento es

$$\begin{aligned} E[X_I(t)^2] &= E \left[ \left( \int_0^t X_s ds \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \left( \int_0^t X_s ds \right) \left( \int_0^t X_u du \right) \right] \\ &= E \left[ \int_0^t \int_0^t X_s X_u ds du \right] \\ &= \int_0^t \int_0^t E [X_s X_u] ds du \\ &= 2 \int_0^t \int_0^u E [X_s X_u] ds du, \end{aligned}$$

y la varianza es

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_I(t)) &= E[X_I^2] - E^2[X_I] \\
&= \int_0^t \int_0^t E[X_s X_u] ds du - \left( \int_0^t E[X_s] ds \right)^2 \\
&= \int_0^t \int_0^t E[X_s X_u] ds du - \left( \int_0^t E[X_s] ds \right) \left( \int_0^t E[X_u] du \right) \\
&= \int_0^t \int_0^t E[X_s X_u] ds du - \int_0^t \int_0^t E[X_s] E[X_u] ds du \\
&= \int_0^t \int_0^t E[X_s X_u] - E[X_s] E[X_u] ds du \\
&= \int_0^t \int_0^t \text{Cov}(X_s, X_u) ds du \\
&= 2 \int_0^t \int_0^u \text{Cov}(X_s, X_u) ds du.
\end{aligned}$$

## 1.2. Ejemplos

En esta sección aplicaremos las fórmulas de esperanza y varianza de los procesos estocásticos integrados a las cadenas de Markov a tiempo continuo con espacio de estados finito, al proceso de Poisson y al movimiento Browniano, pues estos tres procesos pertenecen a  $\mathcal{H}^2[0, T]$ .

### 1.2.1. Cadena de Markov a tiempo continuo

La notación y propiedades de cadenas de Markov a tiempo continuo son las utilizadas en el libro [1].

**Definición 1.11.** *Un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es una cadena de Markov a tiempo si su espacio de estados  $S$  es a lo más numerable, satisface la propiedad de Markov:*

$$P[X_t = j | \mathfrak{F}_s] = P[X_t = j | \sigma(X_s)],$$

*y sus transiciones son homogéneas en el tiempo*

$$P[X_t = j | X_0 = i] = P[X_{t+s} = j | X_s = i]$$

Denotamos por  $\pi$  al vector de probabilidades iniciales definido como  $\pi_i = P[X_0 = i]$ , y a la probabilidad de transición del proceso como  $p_{ij}(s) = P[X_s = j | X_0 = i]$ .

Si el proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados finito, la esperanza del proceso integrado es

$$E[X_I(t)] = \int_0^t E[X_s] ds = \int_0^t \sum_i \sum_j j \pi_i p_{ij}(s) ds,$$

el segundo momento es

$$\begin{aligned} E[X_I(t)^2] &= 2 \int_0^t \int_0^u E[X_s X_u] ds du \\ &= 2 \int_0^t \int_0^u \sum_i \sum_j \sum_k j k \pi_i p_{ij}(s) p_{jk}(u-s) ds du, \end{aligned}$$

y la varianza es

$$\begin{aligned} Var(X_I(t)) &= 2 \int_0^t \int_0^u Cov(X_s, X_u) ds du \\ &= 2 \int_0^t \int_0^u \sum_i \sum_j \sum_k j k \pi_i p_{ij}(s) p_{jk}(u-s) \\ &\quad - \sum_i \sum_j j \pi_i p_{ij}(s) \sum_i \sum_k k \pi_i p_{ik}(u) ds du. \end{aligned}$$

Utilizaremos las fórmulas anteriores en un ejemplo concreto y sencillo: la cadena de primera ocurrencia.

### 1.2.2. Cadena de primera ocurrencia

Un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$  es una cadena de primera ocurrencia si es una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados  $\{0, 1\}$ , con el estado 1 absorbente y estado inicial  $X_0 = 0$ . El tiempo de absorción al estado 1 es una variable aleatoria con distribución  $exp(\lambda)$ .

La esperanza del proceso integrado es

$$\begin{aligned}
 E[X_I(t)] &= \int_0^t \sum_i \sum_j j \pi_i p_{ij}(s) ds \\
 &= \int_0^t p_{0,1}(s) ds \\
 &= \int_0^t (1 - e^{-\lambda s}) ds \\
 &= t - \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda},
 \end{aligned}$$

que converge a  $t$  cuando  $\lambda$  converge a infinito y converge a cero cuando  $\lambda$  converge a cero. Se puede interpretar como el valor de las integrales de las funciones idénticamente uno e idénticamente cero respectivamente pues corresponden a los eventos en los que la cadena cambió de estado en el tiempo cero y cuando lo hizo en infinito. El segundo momento del proceso integrado es

$$\begin{aligned}
 E[X_I(t)^2] &= 2 \int_0^t \int_0^u \sum_i \sum_j \sum_k j k \pi_i p_{ij}(s) p_{jk}(u-s) ds du \\
 &= 2 \int_0^t \int_0^u 1 - e^{-\lambda s} ds du \\
 &= 2 \int_0^t u - \frac{1 - e^{-\lambda u}}{\lambda} du \\
 &= t^2 - 2 \frac{t - (1 - e^{-\lambda t}) / \lambda}{\lambda},
 \end{aligned}$$

que converge a  $t^2$  cuando  $\lambda$  converge a infinito y converge a cero cuando  $\lambda$  converge a cero. La interpretación es la misma que para la esperanza.

La varianza del proceso integrado es

$$\begin{aligned}
 Var(X_I(t)) &= 2 \int_0^t \int_0^u \sum_i \sum_j \sum_k j k \pi_i p_{ij}(s) p_{ij}(u-s) \\
 &\quad - \sum_i \sum_j j \pi_i p_{ij}(s) \sum_i \sum_k k \pi_i p_{ik}(u) ds du \\
 &= 2 \int_0^t \int_0^u (1 - e^{-\lambda s}) [1 - (1 - e^{-\lambda u})] ds du
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^t \int_0^u (1 - e^{-\lambda s}) e^{-\lambda u} ds du \\
&= 2 \int_0^t \left( u - \frac{1 - e^{-\lambda u}}{\lambda} \right) e^{-\lambda u} du \\
&= \frac{2e^{-\lambda t} (\sinh(\lambda t) - \lambda t)}{\lambda^2},
\end{aligned}$$

que converge a cero cuando  $\lambda$  converge a cero o a infinito. La interpretación es que en ambos casos el valor de  $X_I(t)$  es una constante determinista por lo que su varianza es cero.

En el capítulo cuatro simularemos una trayectoria de la cadena de primera ocurrencia conjuntamente con la trayectoria de su integral.

### 1.2.3. Proceso Poisson

Un proceso estocástico  $\{N_t : t \geq 0\}$  es un proceso Poisson no homogéneo con tasa instantánea  $\lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  si el proceso comienza en cero, sus incrementos son independientes y la distribución del incremento  $N_t - N_s$ ,  $0 < s < t$ , es Poisson con parámetro  $\int_s^t \lambda(s) ds$ .

La esperanza del proceso integrado es

$$E[N_I(t)] = \int_0^t E[N_s] ds = \int_0^t \Lambda(s) ds.$$

Donde

$$\Lambda(s) = \int_0^s \lambda(u) du,$$

el segundo momento es

$$\begin{aligned}
E[N_I(t)^2] &= 2 \int_0^t \int_0^u E[N_s N_u] ds du \\
&= 2 \int_0^t \int_0^u \Lambda(s) \Lambda(u) - \Lambda(s)^2 + \Lambda(s) ds du,
\end{aligned}$$

y la varianza es

$$\begin{aligned} \text{Var}(N_I(t)) &= 2 \int_0^t \int_0^u \text{Cov}(N_s, N_u) ds du \\ &= 2 \int_0^t \int_0^u \Lambda(s) ds du. \end{aligned}$$

El caso en el que  $\lambda$  es una función constante, al proceso  $\{N_t : t \geq 0\}$  se le conoce como proceso Poisson homogéneo. En cuyo caso las fórmulas para la esperanza y la varianza se reducen a lo siguiente. El primer momento del proceso Poisson homogéneo integrado es

$$E[X_I(t)] = \int_0^t E[X_s] ds = \int_0^t s \lambda ds = t^2 \lambda / 2,$$

y la varianza es

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_I(t)) &= 2 \int_0^t \int_0^u \text{Cov}(X_s, X_u) ds du \\ &= 2 \int_0^t \int_0^u s \lambda ds du = t^3 \lambda / 3. \end{aligned}$$

Retomaremos el estudio del proceso Poisson no homogéneo en el capítulo tres.

#### 1.2.4. Movimiento browniano

Un proceso estocástico  $\{B_t : t \geq 0\}$  es un movimiento browniano estándar si el proceso comienza en cero, tiene incrementos independientes y estacionarios, la distribución del incremento  $B_t - B_s$ ,  $0 < s < t$ , es normal con parámetros  $(0, t - s)$ , y sus trayectorias son continuas.

La esperanza del proceso integrado es

$$E[B_I(t)] = \int_0^t E[B_s] ds = \int_0^t 0 ds = 0,$$

el segundo momento es

$$E[B_I(t)^2] = 2 \int_0^t \int_0^u E[B_s B_u] ds du = 2 \int_0^t \int_0^u s ds du = \frac{t^3}{3},$$

y la varianza es

$$\text{Var}(B_I(t)) = 2 \int_0^t \int_0^u \text{Cov}(B_s, B_u) ds du = 2 \int_0^t \int_0^u s ds du = \frac{t^3}{3}.$$

En el siguiente capítulo estudiaremos las propiedades del movimiento browniano integrado, calcularemos su distribución y aplicaremos las fórmulas de los momentos obtenidas para caracterizar los parámetros de la distribución.

---

## Capítulo 2

# El movimiento browniano integrado

Las propiedades del movimiento browniano  $\{B_t : t \geq 0\}$  que utilizaremos en este capítulo están basadas en [6] y nos servirán para analizar al movimiento browniano integrado

$$B_I(t) = \int_0^t B_s ds. \quad (2.1)$$

**Observación 2.1.** Si  $\{B_t : t \geq 0\}$  es un movimiento browniano entonces sus trayectorias son continuas y por lo tanto para toda  $T > 0$  el proceso pertenece a  $\mathcal{H}^2[0, T]$ .

### 2.1. Propiedades

En esta sección veremos que el movimiento browniano integrado tiene distribución normal con esperanza

$$E[B_I(t)] = 0,$$

y varianza

$$\text{Var}(B_I(t)) = \frac{t^3}{3}.$$

A continuación probaremos un resultado sobre la distribución de las combinaciones lineales del movimiento browniano para poder concluir que el proceso (2.1) es gaussiano.

**Proposición 2.1.** Sean  $\{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento browniano,  $n \in \mathbb{N}$ , y  $\Pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = t$ , una partición del intervalo  $[0, t]$ . La suma sobre la partición  $S(\Pi) = B_{t_1} + \dots + B_{t_n}$  tiene distribución normal con parámetros  $\left(0, \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 (t_i - t_{i-1})\right)$ .

*Demostración.* Si expresamos a  $S(\Pi)$  como la suma de incrementos, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n B_{t_i} = \sum_{i=1}^n (n-i+1)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

donde  $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$  son variables aleatorias normales independientes con media cero y varianza  $t_i - t_{i-1}$ , de donde obtenemos que  $(n-i+1)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$  tiene distribución normal con media cero y varianza  $(n-i+1)^2(t_i - t_{i-1})$  y entonces

$$\sum_{i=1}^n B_{t_i} \sim N\left(0, \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 (t_i - t_{i-1})\right).$$

□

Como el movimiento browniano es continuo, entonces es integrable y si  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de particiones del intervalo  $[0, t]$ , con  $\Pi_n = \{t_{n,i}\}_{i=0}^n$ ,  $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,n} = t$  tal que  $\Delta t_n = \max_i |t_{n,i} - t_{n,i-1}|$  converja a cero conforme  $n$  tiende a infinito, entonces la sucesión  $S_n = S(\Pi_n)$  de sumas de Riemann definidas previamente converge a  $B_I(t)$ , así que basta encontrar la distribución del límite de alguna sucesión que cumpla esta hipótesis para encontrar la distribución de  $B_I(t)$ . Sea  $\Pi_n$  la partición uniforme del intervalo  $[0, t]$  en  $n$  partes iguales. Entonces tenemos que  $t_i = \frac{it}{n}$ , y

$$S_n = \sum_{i=1}^n B_{t_i}(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n B_{t_i} \left(\frac{it}{n} - \frac{(i-1)t}{n}\right) = \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n B_{\frac{it}{n}},$$

utilizando la Proposición 2.1,

$$S_n \sim N\left(0, \frac{t^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 \left(\frac{t}{n}\right)\right).$$

**Definición 2.1.** La función generadora de momentos de una variable aleatoria  $X$  es la función  $m_X(u) = E[e^{uX}]$ , siempre que exista.

**Definición 2.2.** por ejemplo, la función característica de una variable aleatoria  $X$  es la función  $\varphi_X(u) = E[e^{iuX}]$ , donde  $i = \sqrt{-1}$  está en el campo de los complejos.

La función característica de una variable aleatoria  $X$  con distribución normal  $(\mu, \sigma^2)$  es  $\varphi_X(u) = \exp(i\mu u - \sigma^2 u^2/2)$

**Teorema 2.1** (Teorema de continuidad de Lévy). Sea  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de variables aleatorias y sea  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  la sucesión de sus respectivas funciones características. Si  $\varphi_n(u)$  converge a una función  $\varphi(u)$  para toda  $u \in \mathbb{R}$  y además  $\varphi$  es continua en cero, entonces existe una variable aleatoria  $X$  tal que  $\varphi$  es su función característica y  $X_n$  converge en distribución a  $X$ . [3]

A continuación expresaremos la función característica de  $S_n$  y calcularemos su límite conforme  $n$  tiende a infinito para después utilizar el Teorema 2.1.

**Proposición.** El proceso estocástico integrado  $\{B_I(t) : t \geq 0\}$  a tiempo  $t$  tiene distribución normal con parámetros  $(0, t^3/3)$ .

*Demostración.* Como  $S_n$  se distribuye normal con media cero y varianza  $\frac{t^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 \left(\frac{t}{n}\right)^2$ , su función característica es:

$$\varphi_{S_n}(u) = \exp\left(-\frac{u^2 t^2}{2 n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 \left(\frac{t}{n}\right)^2\right).$$

Obtenemos el límite cuando  $n$  tiende a infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{S_n}(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{u^2 t^2}{2 n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 \left(\frac{t}{n}\right)^2\right) \\ &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{u^2 t^3}{2 n^3} \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2\right) \\ &= \exp\left(-\frac{u^2 t^3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(-\frac{u^2}{2}t^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{u^2t^3}{6}\right),
\end{aligned}$$

que es la función característica de una variable aleatoria con distribución normal. Utilizando el teorema de continuidad de Lévy, podemos decir que el límite de  $S_n$  cuando  $n$  tiende a infinito se distribuye normal con parámetros  $(0, t^3/3)$ .  $\square$

## 2.2. Distribuciones conjuntas

El siguiente punto a tratar será encontrar la distribución conjunta del movimiento browniano hasta el tiempo  $u \geq 0$ ,  $B_u$ , con su movimiento browniano integrado respectivo hasta tiempo  $t \geq 0$ ,  $B_I(t)$ , para entender mejor el comportamiento conjunto de estos dos procesos. Como  $B_I$  es el límite de  $S_n$ , la distribución conjunta de  $B_I(t)$  con  $B_u$  es el límite de la distribución conjunta de  $S_n$  con  $B_u$ , la cual es normal bivariada pues las combinaciones lineales del movimiento browniano mantienen la normalidad. Para calcular la distribución conjunta basta calcular el vector de medias y la matriz de covarianzas del vector aleatorio  $(B_u, B_I(t))$ . Ya conocemos la esperanza y varianza de cada uno, por lo que procederemos a calcular la covarianza. Empecemos por el caso  $0 \leq t \leq u$ :

$$\begin{aligned}
Cov(B_I(t), B_u) &= E[B_I(t)B_u] \\
&= E\left[\int_0^t B_s \, ds B_u\right] \\
&= E\left[\int_0^t B_s B_u \, ds\right] \\
&= \int_0^t E[B_s B_u] \, ds \\
&= \int_0^t s \, ds \\
&= t^2/2,
\end{aligned}$$

por otro lado, si  $0 \leq u < t$ :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_I(t), B_u) &= \int_0^t E[B_s B_u] ds \\ &= \int_0^u s ds + \int_u^t u ds \\ &= \frac{u^2}{2} + u(t - u) \\ &= ut - u^2/2. \end{aligned}$$

Los parámetros del vector normal bivariado  $(B_I(t), B_u)$  son:

si  $0 \leq t \leq u$ :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & u \end{pmatrix},$$

si  $0 \leq u < t$ :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} & ut - \frac{u^2}{2} \\ ut - \frac{u^2}{2} & u \end{pmatrix},$$

o de manera general, si  $0 \leq u, 0 \leq t$ :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} & (u \wedge t)t - \frac{(u \wedge t)^2}{2} \\ (u \wedge t)t - \frac{(u \wedge t)^2}{2} & u \end{pmatrix},$$

que nos dice que si estamos fuera de la región de integración no importa qué tan lejos nos encontremos de ésta, la dependencia es la misma a la del último punto de la región.

**Proposición 2.2.** Si el vector  $(X, Y)$  tiene distribución normal bivariada con vector de medias  $\mu = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}$  y matriz de covarianzas  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$  entonces la distribución de  $(X|Y = y)$  es normal con media  $\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$  y varianza  $(1 - \rho^2)\sigma_x^2$ .

*Demostración.*

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right]\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \left[\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y)\right]\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2}\right)
\end{aligned}$$

□

Haciendo uso de la Proposición 2.2, podemos dar las distribuciones condicionales del movimiento browniano y su integral. Sabemos que la distribución conjunta de  $B$  con  $B_I$  es normal multivariada, lo que significa que la distribución condicional es normal. Dicho eso, basta conocer los parámetros.

La esperanza del movimiento browniano integrado condicionado a un punto del movimiento browniano es:

$$E[B_I(t)|B_u] = 0 + \frac{(u \wedge t)t - (u \wedge t)^2/2}{u}(B_u - 0) = \frac{(u \wedge t)t - (u \wedge t)^2/2}{u}B_u,$$

y la varianza es:

$$Var(B_I(t)|B_u) = \left(1 - \frac{\left[(u \wedge t)t - \frac{(u \wedge t)^2}{2}\right]^2}{\frac{t^3}{3}u}\right) \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{3} - \frac{\left[(u \wedge t)t - \frac{(u \wedge t)^2}{2}\right]^2}{u}$$

La esperanza del movimiento browniano condicionado a un punto del movimiento browniano integrado es:

$$E[B_u|B_I(t)] = 0 + \frac{(u \wedge t)t - (u \wedge t)^2/2}{\frac{t^3}{3}}(B_I(t) - 0) = \frac{(u \wedge t)t - (u \wedge t)^2/2}{\frac{t^3}{3}}B_I(t),$$

y su varianza es:

$$\text{Var}(B_u|B_I(t)) = \left(1 - \frac{\left[(u \wedge t)t - \frac{(u \wedge t)^2}{2}\right]^2}{\frac{t^3}{3}u}\right) u = u - \frac{\left[(u \wedge t)t - \frac{(u \wedge t)^2}{2}\right]^2}{u}.$$

Hasta ahora sólo conocemos la distribución del proceso integrado en un punto del tiempo. El comportamiento del movimiento browniano integrado como proceso tiene como características el ser diferenciable respecto al tiempo casi seguramente, sus trayectorias son continuas casi seguramente, no cumple la propiedad de Markov y no es martingala, submartingala ni supermartingala. Su esperanza condicionada a la filtración canónica del movimiento browniano, si  $s < t$  es:

$$\begin{aligned} E[B_I(t)|\mathfrak{F}_s] &= E\left[\int_0^t B_u \, du \middle| \mathfrak{F}_s\right] \\ &= E\left[\int_0^s B_u \, du + \int_s^t B_u \, du \middle| \mathfrak{F}_s\right] \\ &= E\left[\int_0^s B_u \, du \middle| \mathfrak{F}_s\right] + E\left[\int_s^t B_u \, du \middle| \mathfrak{F}_s\right] \\ &= \int_0^s B(u) \, du + E\left[\int_s^t B'_{u-s} + B_s \, du \middle| \mathfrak{F}_s\right] \\ &= B_I(s) + E\left[\int_s^t B'_{u-s} \, du + \int_s^t B_s \, du \middle| \mathfrak{F}_s\right] \\ &= B_I(s) + E\left[\int_0^{t-s} B'_{u-s} \, du \middle| \mathfrak{F}_s\right] + (t-s)B_s \\ &= B_I(s) + (t-s)B_s, \end{aligned}$$

donde  $B'$  es otro movimiento browniano comenzado en cero independiente de  $B$ . La interpretación de este resultado es que, dada la información hasta el tiempo  $s$ , la esperanza es un nuevo proceso browniano integrado comenzado en cero más la altura a la que se encontraba el proceso; si no conociéramos toda la información hasta el tiempo  $s$  sino solamente el valor que tomó el proceso en ese tiempo, la esperanza cambiaría a:

$$E[B_I(t)|B_I(s)] = E[E[B_I(t)|\mathfrak{F}_s]|B_I(s)]$$

$$\begin{aligned} &= E [B_I(s) + (t - s)B_s | B_I(s)] \\ &= B_I(s) + (t - s)E [B_s | B_I(s)] \\ &= B_I(s) + (t - s)\frac{3}{2s}B_I(s) \\ &= B_I(s) \left( \frac{3t}{2s} - \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

que es mayor que  $B_I(s)$  si  $B_I(s)$  es positiva y menor si es negativa, con lo que concluimos que no es martingala ni submartingala ni semimartingala.

---

## Capítulo 3

# El proceso Poisson integrado

En este capítulo se darán las propiedades del proceso Poisson integrado con base en las fórmulas del primer capítulo y en [6]. De igual manera se obtendrá su función generadora de momentos y una manera de calcular su distribución.

El proceso Poisson integrado se define como:

$$N_I(t) = \int_0^t N_s \, ds,$$

donde  $\{N_s : s \geq 0\}$  es un proceso Poisson no homogéneo.

**Proposición.** *El proceso Poisson  $\{N_t : t \geq 0\}$  pertenece a  $\mathcal{H}^2[0, T]$ , con  $T > 0$ , si y sólo si  $\Lambda(T) < \infty$ .*

*Demostración.* Los eventos  $\{Se\ presentan\ exactamente\ k\ discontinuidades\ en\ el\ intervalo\ [0, T]\}$  y  $\{N_T = k\}$  son iguales para toda  $k$  natural por lo que la probabilidad de que haya una cantidad infinita de discontinuidades es  $P(N_T = \infty)$ . Como  $N_T$  es una variable aleatoria Poisson con parámetro  $\Lambda(T)$ , tenemos que  $P(N_T = \infty)$  es cero si y sólo si  $\Lambda(T) < \infty$ , en cuyo caso el proceso es integrable por tener una cantidad finita de discontinuidades, y como  $E \left[ \int_0^T |N_s| ds \right] \leq E \left[ \int_0^T N_T ds \right]$  pues el proceso Poisson es no negativo y no decreciente y la esperanza del término derecho de la desigualdad es  $TE[N_T] < \infty$ , concluimos que  $\{N_t : t \geq 0\}$  pertenece a  $\mathcal{H}^2[0, T]$ .  $\square$

### 3.1. Propiedades

La esperanza y la varianza del proceso Poisson integrado, como vimos en el primer capítulo, son:

$$E[N_I(t)] = \int_0^t \Lambda(s) ds$$

$$Var(N_I(t)) = 2 \int_0^t \int_0^u \Lambda(s) ds du$$

Queremos saber cuál es el comportamiento de este proceso, para lo cual su función de distribución nos serviría mucho. Sin embargo,  $N_I(t)$  no sigue ninguna distribución de probabilidad común. Para demostrarlo basta ver quién es la función generadora de momentos de  $\int_0^t N_s ds$ , y, para lograrlo, haremos algunas observaciones previas:

**Observación 3.1.** *La suma de los términos de un proceso Poisson sobre una partición  $\Pi_n$  del intervalo  $[0, t]$ , con  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ , es*

$$\sum_{i=1}^n N_{t_i} = \sum_{i=1}^n (n - i + 1)(N_{t_i} - N_{t_{i-1}}),$$

donde  $\{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}\}_{i=1}^n$  son variables aleatorias independientes y tienen distribución Poisson con parámetro  $\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1})$ .

Si el proceso Poisson  $\{N_t : t \geq 0\}$  y la partición  $\Pi_n$  son homogéneos, esto es, si la función  $\lambda$  es constante y si los intervalos de la partición tienen la misma longitud, la suma  $S_n$  sobre  $\Pi_n$  queda como

$$S_n = \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n N_{\frac{ti}{n}},$$

que se simplifica utilizando la Observación 3.1 a

$$S_n \sim \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n (n - i + 1) X_i,$$

con  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con distribución Poisson( $\lambda t/n$ ). La función característica de una variable aleatoria  $X$  con distribución Poisson( $\lambda$ )

es  $\varphi_X(u) = \exp(\lambda(\exp(it) - 1))$ , por lo que la función característica de  $S_n$  estaría dada por:

$$\begin{aligned} m_{S_n}(u) &= E \left[ \exp \left( u \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n N_{it/n} \right) \right] \\ &= E \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^n \frac{ut}{n} (n-i+1) \text{Pois}(\lambda t/n) \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

$$= E \left[ \prod_{i=1}^n \exp \left( ut \frac{n-i+1}{n} \text{Pois}(\lambda t/n) \right) \right] \quad (2)$$

$$= \prod_{i=1}^n E \left[ \exp \left( ut \frac{n-i+1}{n} \text{Pois}(\lambda t/n) \right) \right]$$

$$= \prod_{i=1}^n m_{\text{Pois}(\lambda t/n)}(ut(n-i+1)/n)$$

$$= \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{\lambda t}{n} [e^{ut(n-i+1)/n} - 1] \right\}$$

$$= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\lambda t}{n} [e^{ut(n-i+1)/n} - 1] \right\}$$

$$= \exp \left\{ \frac{\lambda t}{n} \left[ \sum_{i=1}^n (e^{ut/n})^i - n \right] \right\}$$

$$= \exp \left\{ \frac{\lambda t}{n} \left[ \frac{e^{ut/n} - e^{ut(n+1)/n}}{1 - e^{ut/n}} - n \right] \right\},$$

donde en (1) se hizo uso de la Observación 3.1 y en (2) se utilizó la independencia de las variables aleatorias. Sabemos también que el Proceso Poisson es integrable, por lo que  $S_n$  converge a  $N_I(t)$ . Podemos usar el teorema de continuidad de Lévy para encontrar la función generadora de momentos de  $N_I(t)$  cuando  $N$  es un Proceso Poisson homogéneo:

$$\begin{aligned} m_{N_I(t)}(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m_{S_n}(u) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{\lambda t}{n} \left[ \frac{e^{ut/n} - e^{ut(n+1)/n}}{1 - e^{ut/n}} - n \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda t \left[ \frac{1 - e^{ut(1+1/n)}}{n(1 - e^{ut/n})} - \frac{1}{n} - 1 \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ \lambda t \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{ut} e^{\frac{ut}{n}}}{n(1 - e^{ut/n})} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 1 \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ \lambda t \left[ \frac{e^{ut} - 1}{ut} - 1 \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ \lambda \left[ \frac{e^{ut} - 1}{u} - t \right] \right\}
\end{aligned}$$

Que no corresponde a ninguna distribución absolutamente continua ni absolutamente discreta.

La variable aleatoria  $N_I(t)$  en general es mixta pues tiene probabilidad positiva de valer cero y para valores estrictamente positivos es continua. Para encontrar la función de distribución primero demostraremos la siguiente propiedad.

**Proposición 3.1.** *Los tiempos de arribo  $W_i$  de un Proceso Poisson no homogéneo  $\{N(t) : t \geq 0\}$  de tasa  $\lambda(t)$  continua, condicionados al valor que tomó el proceso a tiempo  $t$ , se distribuyen como estadísticos de orden, i.e.*

$$f_{W_1, \dots, W_n | N(t)=n}(t_1, \dots, t_n) = n! \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(t_i) \quad 0 < t_1 < \dots < t_n < t$$

donde  $f_{Y_t}$  es la función de densidad de una variable aleatoria  $Y_t$  que tiene dominio en el intervalo  $[0, t]$  dada por:

$$f_{Y_t}(y) = \frac{\lambda(y)}{\int_0^t \lambda(s) ds} = \frac{\lambda(y)}{\Lambda(t)} \quad 0 \leq y \leq t.$$

*Demostración.* Notemos que para  $0 < t_1 < \dots < t_n < t$ , ocurre que:

$$\begin{aligned}
f_{W_1, \dots, W_n | N(t)=n}(t_1, \dots, t_n) &= \frac{\partial^n}{\partial_{t_n} \dots \partial_{t_1}} F_{W_1, \dots, W_n | N(t)=n}(t_1, \dots, t_n) \\
&= \frac{\partial^n}{\partial_{t_n} \dots \partial_{t_1}} \frac{\mathbf{P}[W_1 \leq t_1, \dots, W_n \leq t_n, N(t) = n]}{\mathbf{P}[N(t) = n]} \\
&= \frac{\partial^n}{\partial_{t_n} \dots \partial_{t_1}} \frac{\mathbf{P}[N(t_1) \geq 1, \dots, N(t_n) \geq n, N(t) = n]}{e^{\int_0^t \lambda(s) ds} \left( \int_0^t \lambda(s) ds \right)^n / n!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^n}{\partial_{t_n} \cdots \partial_{t_1}} n! \frac{\mathbf{P} [N(t_1) = 1, \dots, N(t_{n-1}) - N(t_n) = 1, N(t) - N(t_n) = 0]}{e^{\int_0^t \lambda(s) ds} \left( \int_0^t \lambda(s) ds \right)^n} \\
&= \frac{\partial^n}{\partial_{t_n} \cdots \partial_{t_1}} n! \frac{\left( \prod_{i=1}^n \mathbf{P} [N(t_i) - N(t_{i-1}) = 1] \right) \mathbf{P} [N(t) - N(t_n) = 0]}{e^{\int_0^t \lambda(s) ds} \left( \int_0^t \lambda(s) ds \right)^n} \\
&= \frac{\partial^n}{\partial_{t_n} \cdots \partial_{t_1}} n! \frac{\left( \prod_{i=1}^n e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(s) ds} \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(s) ds \right) \right) e^{\int_{t_n}^t \lambda(s) ds}}{e^{\int_0^t \lambda(s) ds} \left( \int_0^t \lambda(s) ds \right)^n} \\
&= \frac{\partial^n}{\partial_{t_n} \cdots \partial_{t_1}} n! \frac{\prod_{i=1}^n \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(s) ds \right)}{\left( \int_0^t \lambda(s) ds \right)^n} \\
&= \frac{\partial^n}{\partial_{t_n} \cdots \partial_{t_1}} n! \prod_{i=1}^n \frac{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(s) ds}{\int_0^t \lambda(s) ds} \\
&= \frac{\partial^n}{\partial_{t_n} \cdots \partial_{t_1}} n! \prod_{i=1}^n \frac{\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1})}{\Lambda(t)} \\
&= n! \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(t_i)}{\Lambda(t)},
\end{aligned}$$

donde la expresión de la tercer igualdad es idéntica a la expresión en la cuarta igualdad pues al descomponer a la tercera en todas las posibilidades para los incrementos, cualquier otro incremento (exceptuando el último) es cero, con lo que la derivada se anula.  $\square$

Otra observación antes de obtener la función de distribución, es que la suma de los estadísticos de orden tiene la misma distribución que la suma de las variables aleatorias no ordenadas, por lo que el valor de  $X_I(t)$  es igual al valor de la suma de las áreas de los rectángulos formados por los incrementos  $\sum_{j=1}^i (t - W_j)$ .

Dicho eso, podemos continuar:

$$F_{X_I(t)}(s) = \mathbf{P} [X_I(t) \leq s]$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P} [X_I(t) \leq s \mid N(t) = i] \mathbf{P} [N(t) = i] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P} \left[ \sum_{j=1}^i (t - W_j) \leq s \mid N(t) = i \right] \frac{e^{\Lambda(t)} \Lambda(t)^i}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P} \left[ ti - \sum_{j=1}^i W_j \leq s \mid N(t) = i \right] \frac{e^{\Lambda(t)} \Lambda(t)^i}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P} \left[ \sum_{j=1}^i (Y_t)_{(j)} \geq ti - s \right] \frac{e^{\Lambda(t)} \Lambda(t)^i}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P} \left[ \sum_{j=1}^i (Y_t)_j \geq ti - s \right] \frac{e^{\Lambda(t)} \Lambda(t)^i}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1 - F_{Y_t}^{*n}(ti - s)) \frac{e^{\Lambda(t)} \Lambda(t)^i}{i!},
\end{aligned}$$

que, como al tiempo  $t$  las variables aleatorias  $Y_t$  con densidad generada por el parámetro  $\lambda(s)$  están acotadas, entonces tienen todos sus momentos finitos y para  $i$  suficientemente grande,  $F_{Y_t}^{*n}(ti - s)$  se puede aproximar usando el teorema central del límite.

---

# Capítulo 4

## Aplicaciones

En este capítulo se expondrán algunos usos a los procesos integrados aquí tratados con base en las referencias [2, 4, 9].

### 4.1. Movimiento browniano integrado

Este proceso estocástico tiene aplicaciones a la física, a las finanzas, y en general, a cualquier rama en la que sea necesario integrar una función que pueda ser pensada como un movimiento browniano, como pudiera ser en física la aceleración o la velocidad, en finanzas la fuerza de interés, etc.

#### 4.1.1. Física

Se puede modelar la posición en cada punto del tiempo de un objeto sometido a una fuerza  $B$  donde  $B$  es un movimiento browniano. Por ejemplo, si el movimiento de un grano de arena sobre una superficie sometida a altas frecuencias sonoras es descrito por un movimiento browniano, entonces si una pelota yace sobre granos de arena en las mismas condiciones, la pelota estaría sometida una fuerza que se puede modelar con el proceso browniano integrado pues el diferencial de esta fuerza se modela con un movimiento browniano.

### 4.1.2. Finanzas

Si suponemos un mercado en el que la fuerza de interés es un movimiento browniano, entonces el valor presente de una unidad monetaria invertida durante un tiempo  $t$  sería:

$$e^{B_I(t)},$$

recordando que  $B_I$  tiene distribución normal, podemos utilizar su función generadora de momentos para calcular la esperanza:

$$E [e^{B_I(t)}] = m_{B_I(t)}(1) = e^{t^3/6},$$

y la esperanza condicional es ( $s < t$ ):

$$\begin{aligned} E [e^{B_I(t)} | \mathfrak{F}_s] &= E \left[ e^{\int_0^t B(u) du} \middle| \mathfrak{F}_s \right] \\ &= E \left[ e^{\int_0^s B_u du} e^{\int_s^t B(u) du} \middle| \mathfrak{F}_s \right] \\ &= e^{B_I(s)} E \left[ e^{\int_s^t B_u du} \middle| \mathfrak{F}_s \right] \\ &= e^{B_I(s)} e^{(t-s)B_s} m_{B_I(t-s)}(1) \\ &= e^{B_I(s)} e^{(t-s)B_s} e^{(t-s)^3/6} \end{aligned}$$

Si aplicamos una función  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  al movimiento browniano antes de integrarlo, pidiendo a la composición pertenecer a  $\mathcal{H}^2$ , entonces el proceso estocástico formado por la composición caería dentro del conjunto de procesos con los que estamos trabajando, por lo que podemos aplicar las fórmulas desarrolladas en el primer capítulo.

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^t V(B_s) ds \right] &= \int_0^t E [V(B_s)] ds \\ Var \left( \int_0^t V(B_s) ds \right) &= \int_0^t \int_0^t Cov(V(X_s), V(X_u)) ds du \end{aligned}$$

Por ejemplo, si  $V$  es continua se puede hacer todo lo anterior.

### 4.1.3. Ecuaciones diferenciales

Aunado a los métodos directos, si la función  $V$  es de clase  $C^2$  existe otra manera de calcular la esperanza haciendo uso de las ecuaciones diferenciales retrospectivas, también conocidas como *backward* o hacia atrás.

Para eso definimos la función retrospectiva más general

$$f(x, s) = E \left[ \int_s^t V(B_u) du \middle| B_s = x \right].$$

Consideremos también la variable aleatoria

$$F(s) = E \left[ \int_s^t V(B_u) du \middle| B_s \right].$$

**Proposición.** *La función  $f$  satisface la ecuación diferencial*

$$\partial_s f + \frac{1}{2} \partial_x^2 f + V(x) = 0,$$

con condición inicial  $f(x, t) = 0$ .

*Demostración.* Esta demostración está basada en aproximaciones y no es muy rigurosa. Notemos que como

$$\int_s^t V(B_u) du = \int_s^{s+\Delta s} V(B_u) du + \int_{s+\Delta s}^t V(B_u) du$$

entonces

$$f(x, s) = E \left[ \int_s^{s+\Delta s} V(B_u) du \middle| B_s = x \right] + E \left[ \int_{s+\Delta s}^t V(B_u) du \middle| B_s = x \right]. \quad (1)$$

El primer término de la suma vale  $V(x)\Delta s + o(\Delta s)$  para  $\Delta s$  pequeño. Para calcular el segundo término, utilizaremos la propiedad de torre para la esperanza condicional,

$$\begin{aligned} E \left[ \int_{s+\Delta s}^t V(B_u) du \middle| B_s \right] &= E \left[ E \left[ \int_{s+\Delta s}^t V(B_u) du \middle| B_{s+\Delta s}, B_s \right] \middle| B_s \right] \\ &= E [F(s + \Delta s) | B_s] \\ &= E [f(B_{s+\Delta s}, s + \Delta s) | B_s], \end{aligned}$$

Aproximando a  $B_{s+\Delta s}$  por  $B_s + \Delta B$ , llegamos a que

$$E \left[ \int_{s+\Delta s}^t V(B_u) du \middle| B_s \right] = E [f(B_s + \Delta B, s + \Delta s) | B_s].$$

Obteniendo la esperanza condicionada a  $B_s = x$  de ambos lados:

$$E \left[ \int_{s+\Delta s}^t V(B_u) du \middle| B_s = x \right] = E [f(B_s + \Delta B, s + \Delta s) | B_s = x].$$

sin embargo el segundo término de la suma de (1) tiene fijo el valor de  $B_s$  en  $x$  por lo que en realidad quedaría igual a  $f(x + \Delta B, s + \Delta s)$ , y procedemos a desarrollar la expansión de Taylor de  $f$ .

Esto es un desarrollo válido pues la existencia de las derivadas parciales está garantizada por el teorema de convergencia dominada ya que  $V$  es, por hipótesis, de clase  $C^2$ .

$$\begin{aligned} f(x + \Delta B, s + \Delta s) &= f(x, s) + \Delta s \partial_s f(x, s) + \Delta B \partial_x f(x, s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta B^2 \partial_x^2 f(x, s) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2)$$

Las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, s) - f(x, s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ E \left[ \int_s^t V(B_u) du \middle| B_s = x + h \right] - E \left[ \int_s^t V(B_u) du \middle| B_s = x \right] \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ E \left[ \int_s^t V(B_u^* + x + h) du \middle| B_s^* = 0 \right] - E \left[ \int_s^t V(B_u^* + x) du \middle| B_s^* = 0 \right] \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ E \left[ \int_s^t V(B_u^* + x + h) du - \int_s^t V(B_u^* + x) du \middle| B_s^* = 0 \right] \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} E \left[ \frac{\int_s^t V(B_u^* + x + h) - V(B_u^* + x) du}{h} \middle| B_s^* = 0 \right] \\ &= E \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_s^t V(B_u^* + x + h) - V(B_u^* + x) du}{h} \middle| B_s^* = 0 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$= E \left[ \int_s^t V'(B_u) du | B_s = x \right]$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x, s) &= \partial_x^2 f(x, s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(x+h, s) - \partial_x f(x, s)}{h} = E \left[ \int_s^t V''(B_u) du | B_s = x \right] \\ &= \partial_s f(x, s) = E [V(B_s) | B_s = x] = V(x) \end{aligned}$$

Donde en (3) se utiliza el teorema de convergencia acotada pues como  $V$  es de clase  $C^2$ , éste está acotado por el máximo de  $V'$  para cualquier intervalo cerrado.

Sustituyendo tenemos que:

$$f(x, s) = \Delta s V(x) + o(\Delta s) + f(x, s) + \Delta s \partial_s f(x, s) + \frac{1}{2} \Delta s \partial_x^2 f(x, s) + o(\Delta s).$$

Cancelando de ambos lados a  $f(x, s)$ , dividiendo entre  $\Delta s$  y haciendo a  $\Delta s$  tender a cero obtenemos la ecuación diferencial

$$\partial_s f + \frac{1}{2} \partial_x^2 f + V(x) = 0.$$

□

Esta es una ecuación diferencial parcial elíptica de segundo orden con solución no trivial, y usualmente se calculan aproximaciones mediante simulación del proceso estocástico subyacente. Esto es, el resultado se usa en ambas direcciones: para calcular la esperanza de la composición del movimiento browniano si la ecuación diferencial parcial es sencilla de resolver, así como para resolver ecuaciones diferenciales parciales por el método de Monte Carlo.

#### 4.1.4. Fórmula de Feynman-Kac

Sea  $V$  con las condiciones que se piden en el caso anterior. Regresando al caso financiero, podemos calcular la esperanza de la exponencial del movimiento browniano compuesto con la función  $V$  lo que nos llevará a otra aplicación que involucra

la fórmula de Feynman-Kac. Buscamos una manera de calcular

$$f(x, s) = E \left[ e^{\int_s^t V(B_u) du} \middle| B_s = x \right].$$

Una manera de encontrarla es mediante su expresión diferencial, que como mostraremos a continuación es:

$$\partial_s f + \frac{1}{2} \partial_x^2 f + V(x) f = 0,$$

con condición inicial  $f(x, t) = 1$ . Para verificarlo comencemos notando que podemos aproximar a  $f$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x, s) &= E \left[ e^{\int_s^{s+\Delta s} V(B_u) du} e^{\int_{s+\Delta s}^t V(B_u) du} \middle| B_s = x \right] \\ &= E \left[ (1 + V(B_s) \Delta s + o(\Delta s)) e^{\int_{s+\Delta s}^t V(B_u) du} \middle| B_s = x \right] \\ &= (1 + V(x) \Delta s + o(\Delta s)) E \left[ e^{\int_{s+\Delta s}^t V(B_u) du} \middle| B_s = x \right], \end{aligned}$$

que utilizando la propiedad de torre queda como

$$\begin{aligned} &(1 + V(x) \Delta s + o(\Delta s)) E [f(B_s + \Delta B, s + \Delta s) | B_s = x] \\ &= (1 + V(x) \Delta s + o(\Delta s)) E \left[ f(B_s, s) + \Delta s \partial_s f(B_s, s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta s \partial_x^2 f(B_s, s) + o(\Delta s) \middle| B_s = x \right] \\ &= (1 + V(x) \Delta s + o(\Delta s)) \left( f(x, s) + \Delta s \partial_s f(x, s) + \frac{1}{2} \Delta s \partial_x^2 f(x, s) + o(\Delta s) \right) \\ &= f(x, s) + \left( \partial_s f(x, s) + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(x, s) + V(x) f(x, s) \right) \Delta s + o(\Delta s), \end{aligned}$$

restando  $f(x, s)$  de ambos lados, dividiendo entre  $\Delta s$  y haciendo  $\Delta s$  tender a cero, obtenemos:

$$0 = \partial_s f + \frac{1}{2} \partial_x^2 f + V(x) f,$$

con lo que podemos calcular las soluciones numéricas de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales a través de simulaciones.

### 4.1.5. Martingalas

Dos martingalas que involucran al browniano integrado son:

- $\int_0^t B_s \, ds - tB_t$
- $B_t^3 - 3 \int_0^t B_s \, ds$

Para ver que son martingalas tomemos  $u < t$  en los reales positivos. Como ambos casos son operaciones lineales de procesos adaptados y medibles, basta calcular su esperanza condicional. Para el primer proceso estocástico tenemos que su esperanza condicional es:

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^t B_s \, ds - tB_t \middle| \mathfrak{F}_u \right] &= E \left[ \int_0^t B_s \, ds \middle| \mathfrak{F}_u \right] - tE [B_t | \mathfrak{F}_u] \\ &= \int_0^u B_s \, ds + (t - u)B_u - tB_u \\ &= \int_0^u B_s \, ds - uB_u. \end{aligned}$$

Para el segundo proceso estocástico primero observemos que:

$$E \left[ B_t^3 - 3 \int_0^t B_s \, ds \middle| \mathfrak{F}_u \right] = E [B_t^3 | \mathfrak{F}_u] - 3E \left[ \int_0^t B_s \, ds \middle| \mathfrak{F}_u \right],$$

donde el primer sumando lo podemos desarrollar como:

$$\begin{aligned} E [B_t^3 | \mathfrak{F}_u] &= E [(B_u + (B_t - B_u))^3 | \mathfrak{F}_u] \\ &= E [B_u^3 + 3B_u^2(B_t - B_u) + 3B_u(B_t - B_u)^2 + (B_t - B_u)^3 | \mathfrak{F}_u] \\ &= B_u^3 + 3(B_u^2)0 + 3B_u E [(B_t - B_u)^2 | \mathfrak{F}_u] + 0 \\ &= B_u^3 + 3B_u(t - u), \end{aligned}$$

con lo que la esperanza condicional del segundo proceso estocástico es:

$$\begin{aligned} E \left[ B_t^3 - 3 \int_0^t B_s \, ds \middle| \mathfrak{F}_u \right] &= B_u^3 + 3B_u(t - u) - 3 \left( \int_0^u B_s \, ds + (t - u)B_u \right) \\ &= B_u^3 - 3 \int_0^u B_s \, ds. \end{aligned}$$



## 4.2. Proceso Poisson integrado

Para cualquier serie de ocurrencias modeladas con un proceso Poisson tal que el parámetro  $\lambda(t)$  sea continuo, podemos obtener la distribución de la suma de los tiempos entre cada ocurrencia y el tiempo  $t$ . Esa distribución está dada por el proceso Poisson integrado a tiempo  $t$ .

Por ejemplo, si suponemos que el número de personas que esperan en una fila que no avanza sigue el comportamiento de un proceso Poisson, el tiempo total esperado, visto como la suma del tiempo que cada persona espera hasta tiempo  $t$ , se puede modelar como el proceso Poisson integrado. De igual manera, si el número de fallas en un sistema eléctrico se modela con un proceso Poisson, y cada falla presenta fuga de electricidad, entonces la electricidad total perdida también se puede modelar con este proceso.

Cabe aclarar que el proceso de Poisson integrado es distinto al proceso Poisson compuesto pues la derivada de las trayectorias del segundo son cero casi seguramente mientras las del primero tienen probabilidad estrictamente positiva de ser mayores o iguales a uno.

---

# Capítulo 5

## Simulación

En este capítulo se trabaja con el lenguaje de programación **R** para presentar simulaciones de los procesos estocásticos trabajados en esta tesis. La principal motivación de este capítulo es apreciar la forma que tienen las trayectorias de los procesos integrados, dada la trayectoria del proceso original.

### 5.1. Movimiento browniano integrado

El siguiente código simula un movimiento browniano mediante la suma de los incrementos de una partición uniforme en  $n$  partes. Para calcular la integral de la trayectoria se obtiene la suma de Riemman de la partición generada. Al final el código grafica al proceso en color negro y su integral en color rojo.

1

```
1 set.seed(1) #Semilla inicial para poder reproducirlo
n=1000 #La particion sera en mil
3 ti<-3 #El punto del tiempo hasta donde llegara
t<-1:(ti*n) #t contiene el vector de tiempos
5 t<-t/n
norm<-rnorm(n*ti,0,1/sqrt(n))#Simula n incrementos por unidad de tiempo
7 x<-cumsum(norm) #El browniano es la suma de sus incrementos
plot(x~t,type="l",ylim=c(-sqrt(ti),sqrt(ti)),xaxt='n', yaxt='n')
```

---

<sup>1</sup>El código presentado en este capítulo está escrito sin acentos.

```

9      ,bty='n',xlab="",ylab="",main="Movimiento browniano",cex.main=3)#
      Lo grafica
x<-cumsum(x)/n          #la integral aproximada por la suma de Riemman
11 lines(x~t,col="red")  #Lo grafica sobre el browniano
arrows(0,0,ti,0,lwd=1,length=0.15) #Dibuja el eje t
13 arrows(0,-1.7,0,1.7,lwd=1,length=0.15)#Dibuja el eje Bt
text(0.17,1.7,"Bt",pos=2,cex=3)    #Agrega el texto Bt
15 text(ti-.02,0.05,"t",pos=3,cex=3) #Agrega el texto t

```

browniano.r



De la gráfica podemos observar el cambio del comportamiento errático del movimiento browniano, al movimiento más suave del movimiento browniano integrado, así como que ambos procesos se mantienen cerca del cero. Recordemos que ambos procesos tienen media cero.

## 5.2. Proceso Poisson

Este código sirve para simular una trayectoria de un proceso de Poisson homogéneo, su respectivo proceso integrado asociado, y graficarlos. El código usa la

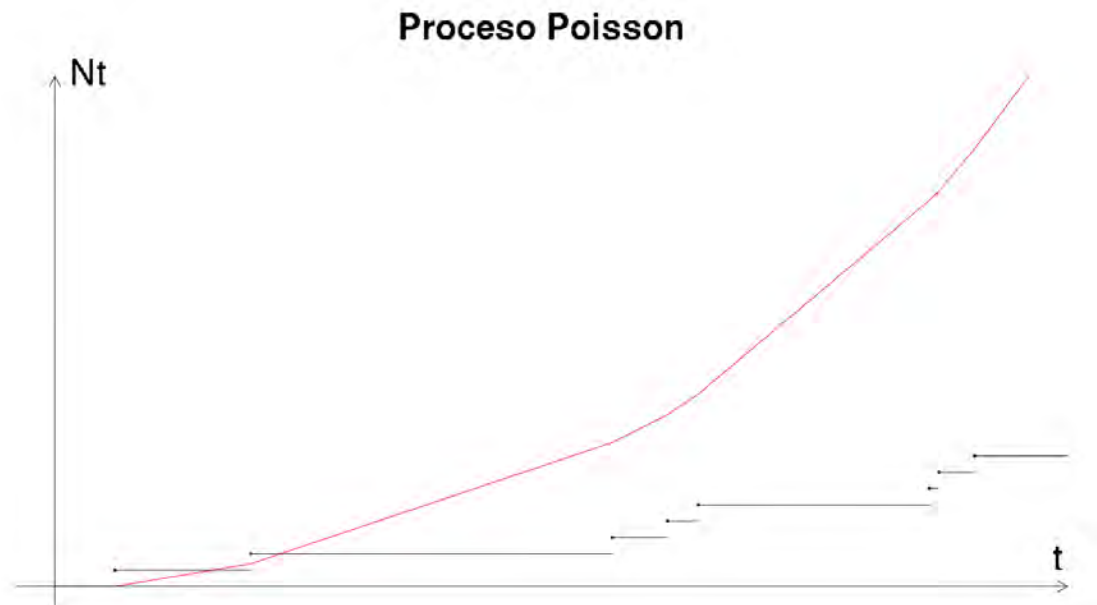
propiedad de que los tiempos de interarribo condicionados al proceso Poisson se distribuyen uniformemente como se vió en la Proposición 3.1.

```

1 set.seed(1)
  t<-10
3 lambda<-1
  x<-rpois(1,lambda*t)           #Genera el numero de saltos
5 y<-sort(runif(x)*t)           #Los tiempos de salto son
  uniformes
  f<-stepfun(y,0:x)
7 yi<-cumsum(diff(c(0,y,t))*(0:x)) #La suma del area
  plot(f, verticals=F, pch=20, xlim=c(0,t)#de los rectangulos
9     ,ylim=c(0,max(yi,x)), cex=.7, xaxt='n'
     , yaxt='n', bty='n', xlab="", ylab="", cex.main=3
11    , main="Proceso Poisson")   #Grafica el proceso
  lines(c(y,t),yi,col="red")     #Poisson y su integral
13 arrows(0,0,t+.4,0,lwd=1,length=0.15)#Dibuja el eje t
  arrows(0,-2,0,max(yi),lwd=1,length=0.15)#Dibuja el eje Nt
15 text(0.6,max(yi),"Nt",pos=2,cex=3)#Agrega el texto Nt
  text(t+.3,0.5,"t",pos=3,cex=3) #Agrega el texto t

```

poisi.R



En esta gráfica se puede apreciar que, así como el proceso Poisson es no decreciente, también lo es el proceso Poisson integrado. Y que la distancia entre ellos va aumentando con orden  $O(t^2)$ .

### 5.3. Cadena de Markov a tiempo continuo

El siguiente ejemplo es de un proceso de Markov a tiempo continuo con dos estados  $\{-1, 1\}$  donde el tiempo de estancia en cada estado se distribuye exponencial de parámetros  $\lambda$  y  $\gamma$  respectivamente.

```

set . seed (1)
2 t<-100
  lambda<-.1
4 gamma<-.1
  te<-0
6 s<-c(-1,1)
  x<-NULL
8 flag<-T
  while (te [length (te)]<t) { #Genera los tiempos de estancia
10   if (flag)
      te<-c (te , te [length (te)]+rexp (1 , lambda))
12   else
      te<-c (te , te [length (te)]+rexp (1 , gamma))
14   x<-c (x , s [c (flag , !flag)])
      flag<-!flag
16 }
  te<-te [-length (te)]
18 te<-te [-1]
  f<-stepfun (te , x)
20 yi<-cumsum (diff (c (0 , te , t)) * x) #Calcula la integral del proceso
  plot (f , verticals=F , pch=20 , xlim=c (3.7 , t - 3.5) , ylim=c (min (yi , x)
22   , max (yi , x)) , xaxt='n' , yaxt='n' , bty='n' , cex=.7 , cex.main=3
      , xlab="" , ylab="" , main="Cadena de Markov a tiempo continuo")
24 lines (c (0 , te , t) , c (0 , yi) , col="red") #Poisson y su integral
  arrows (0 , 0 , t , 0 , lwd=1 , length=0.15) #Dibuja el eje t
26 arrows (0 , min (yi) , 0 , max (yi) , lwd=1 , length=0.15) #Dibuja el eje Xt
  text (4.5 , max (yi) - 1 , "Xt" , pos=2 , cex=3) #Agrega el texto Nt
28 text (t - .5 , -3 , "t" , pos=3 , cex=3) #Agrega el texto t

```

markov.R



Para esta cadena de Markov en particular, se tiene que la esperanza de la cadena y por lo tanto de su integral son cero. Es posible apreciar ese comportamiento en la gráfica presentada.

---

# Capítulo 6

## Conclusiones

Los procesos estocásticos continuos en el tiempo tienen muchas propiedades útiles derivadas del hecho de que su filtración canónica también es continua, por lo que es preferible trabajar con versiones continuas de los procesos estocásticos, sin embargo no todos los procesos tienen una versión continua. Observamos que al integrar un proceso estocástico discontinuo obtenemos un proceso estocástico continuo, derivable por la derecha en los puntos de continuidad del proceso original, medible respecto a la filtración generada por el proceso original, y sobre todo, obtenemos un proceso estocástico al cual, derivando por la derecha resulta en el proceso original. En general, obtener la distribución del proceso integrado no es sencillo. Las distribuciones obtenidas en esta tesis no son expresiones cerradas salvo en el caso del movimiento browniano, que gracias a que es un proceso gaussiano su integral vuelve a ser un proceso gaussiano.

Las simulaciones nos muestran que aunque el dominio del proceso estocástico original fuera finito, el dominio del proceso integrado siempre será continuo salvo en el caso del proceso idénticamente cero, el cual tiene integral idénticamente cero.

---

# Bibliografía

- [1] Mostafa Bachar, Jerry J. Batzel, Ditlevsen, y Susanne. *Stochastic Biomathematical Models*. Springer, 2013.
- [2] Jonathan Goodman. Integrals involving brownian motion. <http://www.math.nyu.edu/faculty/goodman/teaching/StochCalc2004/notes/16.pdf>, 2012. Visto: 29/04/2015.
- [3] Jean Jacod y Philip Protter. *Probability Essentials*. Springer, 2004.
- [4] Fima C. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press, 2005.
- [5] Juan Carlos Pardo Millán. Martingalas y tiempos de paro en tiempo continuo. <http://www.cimat.mx/~jcpardo/martcon.pdf>, 2015. Visto: 29/04/2015.
- [6] Sheldon M. Ross. *Stochastic Processes*. Wiley, 1996.
- [7] René L. Schilling. *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge, 2006.
- [8] Luis Antonio Rincón Solís. *Introducción a los procesos estocásticos*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, 2011.
- [9] J. Michael Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer, 2001.