UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

NUDOS CON NÚMERO DE TÚNEL UNO Y TOROS MERIDIONALES

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
GRISSEL SANTIAGO GONZÁLEZ

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. VÍCTOR NÚÑEZ HERNÁNDEZ
CIMAT

DR. MARCELO AGUILAR GONZÁLEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2016

Índice general

Introducción

Si tenemos un nudo $k \subset S^3$ nos interesa estudiar el exterior de k, que es la 3-variedad $E(k) = S^3 - \operatorname{int} N(k)$ donde $N(k)$ es una vecindad regular del nudo. Una manera de estudiar 3-variedades es a través de la comprensión de las superficies que contienen, principalmente de las superficies propiamente encajadas que son incompresibles. En la Teoría de Nudos, un problema importante es determinar todas las superficies incompresibles que hay en el complemento de un nudo. Estamos interesados en estudiar superficies cerradas o superficies meridionales, es decir, superficies propiamente encajadas, cuya frontera se compone de meridianos del nudo.

El número de túnel de un nudo k, denotado por $\tau(k)$, es el mínimo número de arcos disjuntos, propiamente encajados en $E(k)$, de modo que $E(k)$ menos una vecindad regular de los arcos es un cubo con asas. En particular decimos que un nudo no trivial k tiene número de túnel uno, si existe un arco τ encajado en $E(k)$ con $\tau \cap k = \partial\tau$ tal que $E(k \cup \tau) = S^3 - \operatorname{int} N(k) \cup N(\tau)$ es un cubo con asas de género dos.

En [13], Morimoto y Sakuma dieron una clasificación de los nudos con número de túnel uno que tienen un toro incompresible en su complemento. Posteriormente Eudave-Muñoz, [3], dio otra demostración de este hecho. Estos nudos son $(1,1)$-nudos, es decir, nudos de un puente con respecto a un toro estándar en S^3; ésta es una clase especial de nudos con número de túnel uno. Respecto a superficies de género mayor, Eudave-Muñoz, [4], mostró que para cualquier $g \geq 2$ existe un número infinito de nudos con número de túnel uno cuyo exterior contiene una superficie cerrada, meridionalmente incompresible de género g y, en [6], dio una caracterización de $(1,1)$-nudos que admiten tal tipo de superficies. En [5], Eudave-Muñoz muestra que para cada pareja de enteros $g \geq 1$ y $n \geq 1$, existen nudos k con número de túnel uno, de tal manera que existe una superficie meridional esencial S en el exterior de k, de género g y con $2n$ componentes en la frontera.

En [7], Eudave-Muñoz y Ramírez-Losada dan otra construcción que produce nudos con número de túnel uno, cuyo complemento contiene superficies esenciales meridionales S con dos fronteras. En este caso los nudos obtenidos son $(1,1)$-nudos.

Es natural preguntarse si estos ejemplos son todos los posibles nudos con número de túnel uno y que admiten un toro meridional esencial que toca a k en dos puntos.

El presente trabajo da una caracterización de los nudos con número de túnel uno que admiten un toro meridional esencial con dos componentes en la frontera. Tales nudos son $(1,1)$-nudos y, entonces, vienen de la construcción dada en [7], o bien son los nudos k^* iterados de k y τ, donde k es un nudo satélite con número de túnel uno y τ es un túnel de desanudamiento para k, es decir, vienen de la construcción dada en [5].

Hemos estructurado esta tesis de la siguiente forma: En el Capítulo 1 damos algunas definiciones y teoremas que nos ayudaran en el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 2 hacemos un resumen de los resultados conocidos para superficies incompresibles para nudos con número de túnel uno. En el Capítulo 3 se prueban unos lemas que necesitamos para la demostración del resultado principal y por último, en el Capítulo 4 damos la prueba del resultado principal.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Conceptos básicos.

En este capítulo daremos algunas definiciones que nos ayudarán en el desarrollo de la tesis. Para cuestiones básicas de Teoría de Nudos nos referimos a los libros [1] y [14] y, para las definiciones de 3-variedades, al libro [11] y las notas [10]. Todo el trabajo se desarrollará en la categoría PL.

Un *enlace* L de m componentes es un subconjunto de $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, o de $\mathbb{R}^3$, que consiste de m curvas simples cerradas, disjuntas y lineal por partes. Un enlace de una componente es un *nudo*.

Una *descomposición de Heegaard* de una 3-variedad cerrada y conexa, M, es una pareja (V_1, V_2) donde V_i es un cubo con asas $(i = 1, 2)$, $M = V_1 \cup V_2$, y $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$. Note que la frontera de un cubo con n-asas, V, es una superficie cerrada con característica de Euler $2 - 2n$ la cual es orientable si y sólo si V es orientable. Así para una descomposición de Heegaard (V_1, V_2) de una 3-variedad M, V_1 y V_2 tienen el mismo número de asas, llamado el género de la descomposición, y ambas son orientables o ambas son no-orientables dependiendo si M es orientable o no-orientable.

Sea $S^3 = V_1 \cup V_2$ una descomposición de Heegaard de género uno de la 3-esfera orientada S^3 tal que $\{\infty\}$ se encuentra en V_2. Supongamos que V_1 es un toro sólido no anudado en $\mathbb{R}^3$ y $F = V_1 \cap V_2$ un toro con la orientación inducida por V_1. Existen meridianos μ y ν de V_1 y V_2 sobre F los cuales se intersecan en el punto P con número de intersección 1 sobre F.

Definición 1.1. Sea (V_1, V_2) la descomposición de Heegaard de género uno de S^3 descrita arriba. Si t es una curva simple cerrada sobre F con número

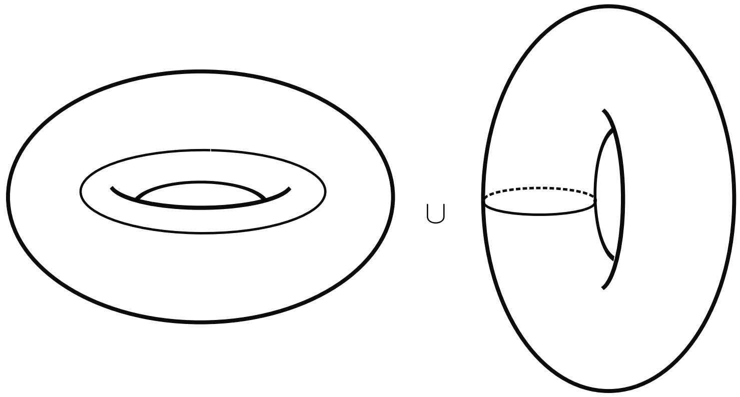


Figura 1.1: Descomposicón de Heegaard de S^3

de intersección a y b con ν y μ, respectivamente, y si $|a|, |b| \geq 2$, entonces llamamos a t un *nudo toroidal*; más precisamente, el nudo toroidal $t(a, b)$.

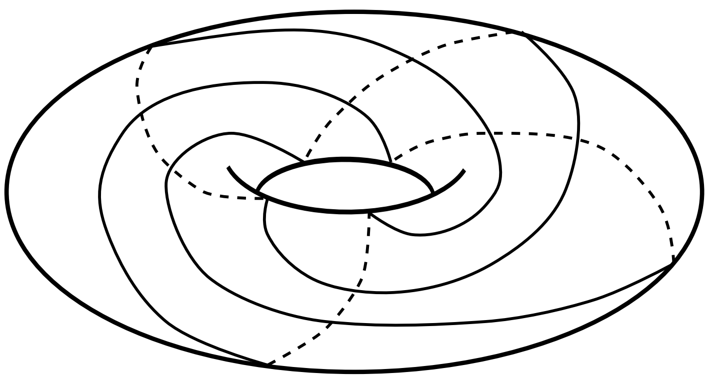


Figura 1.2: Nudo toroidal $t(4, 3)$

Definición 1.2. Sea k_1 un nudo dentro de un toro sólido no anudado, como en la Figura 1.3. Anudamos este toro sólido en la forma de un segundo nudo k_2. Con esto el nudo que se encuentra en el interior del toro sólido original se transforma en un nuevo nudo en el interior del toro sólido anudado. Llamamos a éste nuevo nudo, k_3, un *nudo satélite* (ver Figura 1.4). Decimos que el nudo k_2 es compañero del nudo satélite.

Suponemos siempre que el nudo compañero es un nudo no trivial. También suponemos que el nudo k_1 se interseca con cada disco meridiano del toro

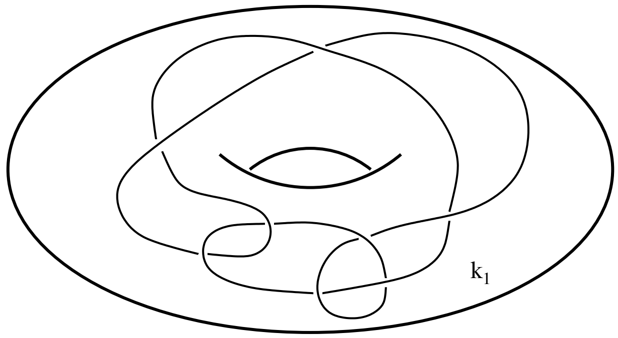


Figura 1.3:

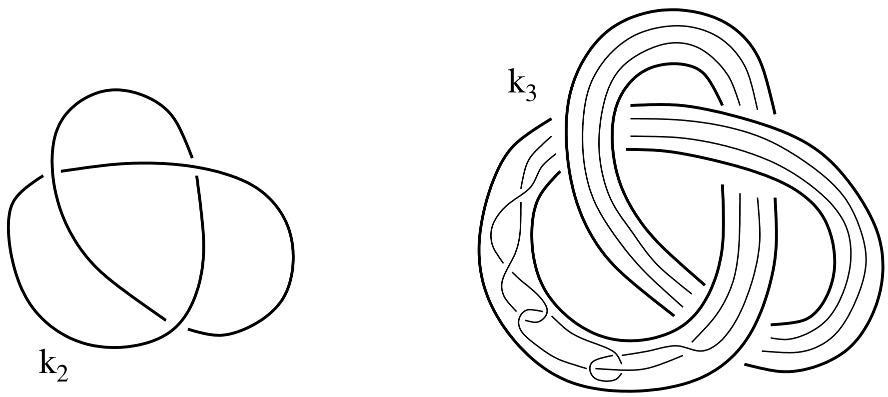


Figura 1.4: Nudo satélite k_3, con compañero k_2

sólido, y no puede ser isotopado para dejar de hacer contacto con alguno de ellos.

Si el nudo k_1 con el que comenzamos es un nudo toroidal, como en la Figura 1.2, entonces al nudo satélite resultante con compañero k_2 lo llamaremos un *nudo cable* sobre k_2. Podemos pensarlo como un cable que se enrolla alrededor del nudo k_2 un total de p veces meridionalmente y q veces longitudinalmente.

Un *n-ovillo* es una pareja $(B, \{\alpha_i\}_{i=1}^n)$, donde B es la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$ y $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto de n arcos propiamente encajados en B. Decimos que el n-ovillo es trivial si existe un conjunto de n discos disjuntos $D_1, D_2, \ldots, D_n \subset B$ con $int(D_i) \subset int(B)$, $\partial D_i = \alpha_i \cup a_i$, y $D_i \cap \partial B = a_i \subset \partial B$ es un arco.

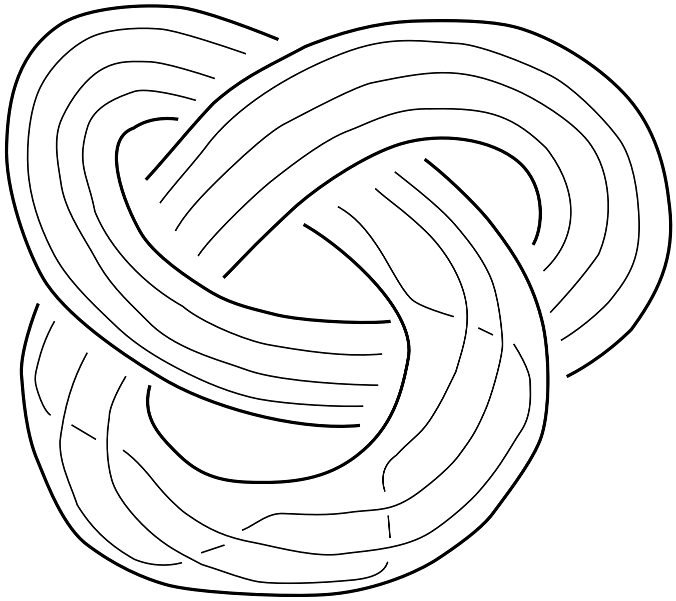


Figura 1.5: Nudo cable

Sea $k \subset S^3$ un enlace, k tiene una presentación de n puentes si existe una 3-bola $B \subset S^3$ tal que $(B, B \cap k)$ y $(\overline{S^3 - B}, (\overline{S^3 - B}) \cap k)$ son n-ovillos triviales.

Los nudos o enlaces de 2 puentes son una clase importante de nudos que fueron clasificados por H. Schubert. En [1] se da la siguiente manera de presentar los nudos o enlaces k de 2 puentes: El nudo k se interseca con un plano de proyección $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ en cuatro puntos, A, B, C, D. El plano $\mathbb{R}^2$ define un semiespacio superior y un semiespacio inferior, y cada uno de ellos se interseca con el nudo k en dos arcos. Cada pareja de arcos puede proyectarse sobre $\mathbb{R}^2$ homeomorfamente. Podemos suponer que una pareja de arcos se proyecta sobre segmentos rectos $w_1 = AB$, $w_2 = CD$ (Figura 1.6); la otra pareja de arcos se proyecta sobre dos arcos simples disjuntos v_1 (de B a C) y v_2 (de D a A). Un arco en este diagrama es un puente si contiene al menos un cruce superior.

Más precisamente, para un enlace de 2 puentes k existe una pareja de primos relativos (α, β) que satisfacen $\alpha > 0$, $|\beta| < \alpha$, β es impar, y k tiene la siguiente proyección regular: cada puente está dividido en α segmentos, con extremos numerados de 0 a α. Así, B y D tienen etiqueta 0, y A y C tienen etiqueta α. A lo largo del arco v_1, comenzamos de 0 sobre el puente w_1. El

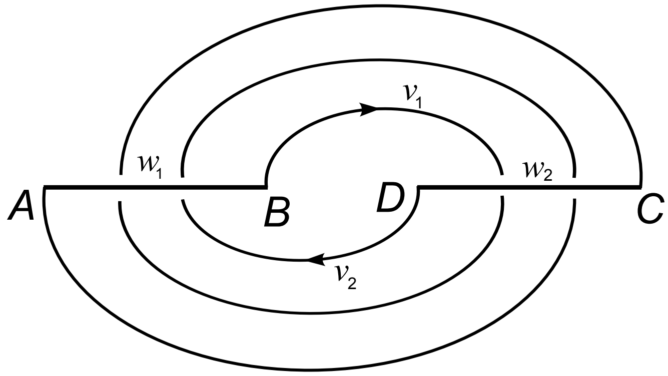


Figura 1.6: $S(3,1)$

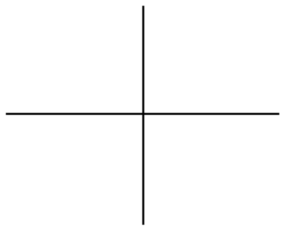
arco v_1 se interseca con w_2 en β y luego se interseca con w_1 en 2β módulo α, y luego con w_2 en 3β módulo α. Seguimos así hasta que llegamos a $\alpha\beta$ de w_2 o α de w_1, dependiendo si α es impar o par. Similarmente, a lo largo del arco v_2, comenzamos de 0 sobre el puente w_2. El arco v_2 se interseca con w_1 en β y luego se interseca con w_2 en 2β módulo α, y luego con w_1 en 3β módulo α. Repetimos esto hasta llegar a $\alpha\beta$ de w_1 o α de w_2, de acuerdo a cuando α sea impar o par. Observe que para un nudo, α es impar; para un enlace, α es par y $\partial v_1 = \{A, B\}$, $\partial v_2 = \{C, D\}$.

Llamamos a esta proyección regular, la forma normal de Schubert de un enlance de 2 puentes y la denotamos por $S(\alpha, \beta)$.

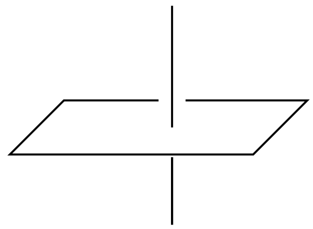
Las superficies en el espacio pueden intersecarse de muchas maneras, sin embargo, queremos que la intersección sea lo más sencilla posible; cuando esto se logra decimos que las superficies estan en posición general y que su intersección es una intersección transversal.

La intersección de dos curvas, o una curva y una superficie, o de dos superficies es transversal si cada punto en la intersección tiene una vecindad homeomorfa a uno de los siguientes cuatro modelos (ver Figura 1.7). Si la intersección es vacía, también decimos que es transversal.

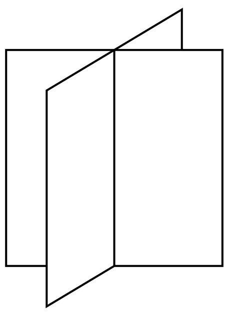
- Eje $x \cup$ eje y en $\mathbb{R}^2$,
- Eje $z \cup$ plano xy en $\mathbb{R}^3$,
- Plano $xz \cup$ plano yz en $\mathbb{R}^3$,
- Plano $xy \cup$ plano $xz \cup$ plano yz en $\mathbb{R}^3$.



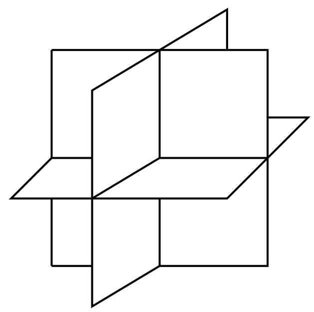
Dos líneas en $\mathbb{R}^2$



Una línea y una superficie en $\mathbb{R}^3$



Dos superficies en $\mathbb{R}^3$



Tres superficies en $\mathbb{R}^3$

Figura 1.7:

Estos modelos representan los únicos arreglos de objetos en dos y tres dimensiones que mantienen sus características esenciales después de hacer isotopía del ambiente. Un conjunto de objetos está en posición general si todas sus intersecciones son transversales.

Si tenemos un conjunto finito de curvas y superficies encajadas en $\mathbb{R}^3$ siempre podemos perturbar un poco, es decir, hacer isotopía del ambiente, para que todos los elementos estén en posición general unos con respecto a los otros.

Dos superficies cerradas en posición general se intersecan en un conjunto de curvas simples. Para una superficie con frontera y una superficie cerrada en posición general, la intersección también consiste en curvas simples. Para dos superficies con frontera en posición general, la intersección consiste en curvas simples y arcos.

En los siguientes capítulos vamos a trabajar con superficies meridionales esenciales, por lo que incluimos las siguientes definiciones.

Definición 1.3. Sea M una 3-variedad y $S \subset M$ una superficie propiamente encajada o contenida en ∂M. La superficie S es *incompresible* en M si para todo encaje de un disco $D \subset M$, con $D \cap S = \partial D$, existe un disco $\tilde{D} \subset S$ con $\partial \tilde{D} = \partial D$. Ver Figura 1.8.

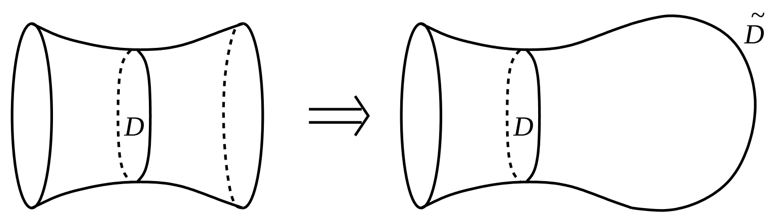


Figura 1.8:

Sea k un nudo en S^3. Recordemos que una superficie S propiamente encajada en el exterior de k, $E(k) = S^3 - \text{int}N(k)$, es *meridional* si ∂S consiste en una colección no vacía de meridianos en $\partial N(k)$.

Definición 1.4. Sea k un nudo en S^3 y S una superficie propiamente encajada en $E(k)$ la cual es meridional o es disjunta de $\partial N(k)$. Decimos que S es *meridionalmente compresible* en (S^3, k), si existe un disco $D \subset S^3$ tal que $D \cap S = \partial D$, D se interseca con k transversalmente en un punto y ∂D es esencial en S, es decir, ∂D no es frontera de un disco en S y no es paralela en S a una componente de ∂S. Llamamos al disco D un disco de compresión meridional para S. Decimos que S es meridionalmente incompresible en (S^3, k) si S es incompresible y no es meridionalmente compresible en (S^3, k). Decimos que una superficie meridional S es *esencial* si es meridionalmente incompresible, ∂-incompresible y no es ∂-paralela en $E(k)$.

Una superficie meridional se puede ver como la intersección de una superficie cerrada $\bar{S}$ con el exterior del nudo tal que $\bar{S}$ se interseca con el nudo transversalmente en un número finito de puntos. Cuando decimos que $\bar{S}$ es una superficie meridional esencial que se interseca con un nudo k en n puntos, esto quiere decir que la superficie $S = \bar{S} \cap E(k)$ es una superficie meridional esencial en $E(k)$ como en la Definición 1.4

Definición 1.5. Un nudo no trivial k en S^3 tiene número de túnel uno si existe un arco τ encajado en S^3 con $\tau \cap k = \partial\tau$, tal que $E(k \cup \tau) = S^3 - \text{int}\, N(k \cup \tau)$ es un cubo con asas de género dos. A τ lo llamamos un *túnel de desanudamiento* de k.

Algunas veces es conveniente expresar el túnel τ para el nudo k como $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, donde τ_1 es una curva simple cerrada en $E(k)$ y τ_2 es un arco en $E(k)$ que conecta a τ_1 con $\partial N(k)$; resbalando el túnel sobre sí mismo, podemos pasar de una forma a otra. Nótese que el exterior de $k \cup \tau$ no cambia al resbalar el túnel sobre sí mismo.

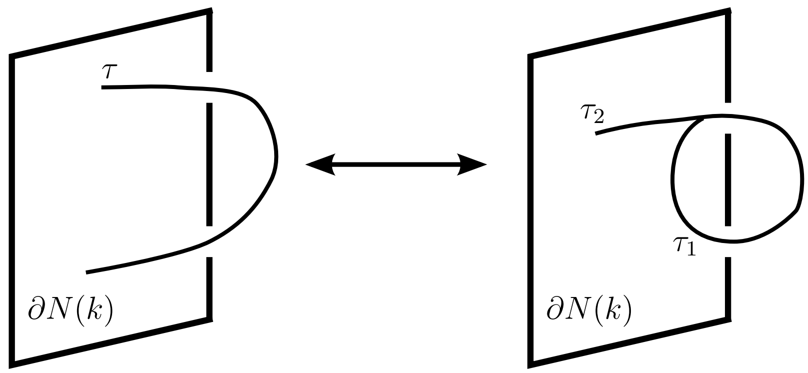


Figura 1.9: $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$

Ejemplo 1.6. Todo nudo toroidal k tiene número de túnel uno.

Sean T el toro donde está encajado el nudo k y H uno de los toros sólidos del que es frontera la superficie T. El túnel será una curva cerrada unida mediante un arco al nudo. Sea $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ donde τ_1 es el ánima de H y τ_2 es un arco recto que conecta a τ_1 con k.

Resbalamos k sobre τ_2 y luego sobre τ_1; repetimos esto tantas veces como el número de longitudes de k; al resbalar también estamos eliminando los meridianos de k; al final obtenemos el nudo toroidal k de tipo $1/0$. Así, obtenemos dos nudos triviales k_1 y τ_1 unidos por el arco τ_2, por lo que el complemento, $S^3 - \operatorname{int} N(k \cup \tau)$, es un cubo con dos asas. Si tomamos como τ_1 el ánima del otro toro sólido, $S^3 - \operatorname{int} H$, obtenemos un resultado similar.

Un nudo k en la 3-esfera tiene una (g, b)-*descomposición* si existe una descomposición de Heegaard de género g para S^3 tal que la intersección de k con cada uno de los cubos con asas en la descomposición consiste en una colección de b arcos paralelos a la frontera.

Definición 1.7. Un nudo k en S^3 es un $(1, 1)$-*nudo* si existe un toro estándar T en S^3 tal que k es de un puente con respecto a T, es decir, k y T se intersecan transversalmente en dos puntos, los cuales dividen a k en dos arcos y tal que cada arco es paralelo a un arco sobre T. Esto es, k admite una $(1,1)$-descomposición.

Observación 1.8. Todo nudo de 2 puentes es un $(1,1)$-nudo.

Un nudo de 2 puentes admite una $(0,2)$-descomposición, entonces existe una descomposición de Heegaard $V_0 \cup W_0$ de S^3 tal que $V_0 \cap k$ y $W_0 \cap k$ consisten en una colección de dos arcos triviales. Elegimos un arco, digamos k_1, de la colección de arcos en V_0 y sea $V_0' = \overline{V_0 - N(k_1)}$ y $W_0' = W_0 \cup N(k_1)$. Entonces $V_0' \cup W_0'$ es una descomposición de Heegaard de género uno de S^3 y tenemos una $(1,1)$-descomposición de k.

El siguiente lema lo usaremos en los siguientes capítulos. La demostración se puede consultar en [2], [12] o [15].

Lema 1.9. *Sea M una 3-variedad irreducible con frontera compresible y sea γ una curva simple cerrada en ∂M. Supongamos que $\partial M - \gamma$ es incompresible en M. Supongamos también que la componente de ∂M donde se encuentra γ no es un toro. Sea $M[\gamma]$ la 3-variedad que se obtiene al añadir una 2-asa a M a lo largo de γ. Entonces $\partial M[\gamma]$ es incompresible en $M[\gamma]$ y $M[\gamma]$ es irreducible.*

Ejemplo 1.10. Los $(1,1)$-nudos tienen número de túnel uno.

Sea k un $(1,1)$-nudo. Un túnel de desanudamiento para k es $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, donde τ_1 es el ánima de uno de los toros sólidos del que es frontera la superficie T y τ_2 es un arco recto en este toro sólido que conecta a τ_1 con k. La demostración es similar a la de los nudos toroidales. Inversamente, se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.11. *Si k es un nudo con túnel de desanudamiento $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, donde τ_1 es un nudo trivial en S^3, entonces k es un $(1,1)$-nudo.*

Demostración. Nótese que $E(\tau_1)$ es un toro sólido. Deslizamos k sobre τ_2, hasta que se forma un arco k' propiamente encajado en $E(\tau_1)$. La variedad $E(\tau_1) - \operatorname{int} N(k') \cong E(k \cup \tau)$ tiene frontera compresible, ya que es un cubo con asas. Si cada disco de compresión para $E(\tau_1) - \operatorname{int} N(k')$ se interseca con un meridiano de k', entonces la variedad que obtenemos al añadir una 2-asa a lo largo de un meridiano de k' tendría frontera incompresible, por el Lema 1.9. Pero esto no es posible, ya que la variedad que obtenemos es $E(\tau_1)$ la cual es un toro sólido. Entonces, existe un disco de compresión disjunto de k'; al comprimir a lo largo de este disco tenemos que k' se encuentra dentro de una 3-bola, por lo que debe ser paralelo a un arco contenido en $\partial E(\tau_1)$. Entonces podemos expresar k como $k = k' \cup k''$, donde k' es un arco propiamente encajado en $E(\tau_1)$ y paralelo a un arco en $\partial E(\tau_1)$, y k'' es un arco contenido en $\partial E(\tau_1)$. Así, k es de un puente con respecto al toro $\partial E(\tau_1)$. $\square$

Definición 1.12. Sea k un nudo con número de túnel uno, y τ un túnel de desanudamiento para k, el cual es un arco encajado con extremos sobre $\partial N(k)$. Sea k^* un nudo formado por la unión de dos arcos $k^* = \tau \cup \gamma$, tal que γ esta contenido en $\partial N(k)$. Decimos que k^* es un *iterado* de k y τ.

El nudo k^* también es un nudo con número de túnel uno; éste es dado por la unión de k y un arco recto en $N(k)$ que conecta k^* y k, como se muestra en el siguiente lema.

Lema 1.13. *Sean k y τ como antes y sea k^* un iterado de k y τ. Entonces k^* es un nudo con número de túnel uno. Un túnel de desanudamiento β para k^* está dado por la unión de k y un arco en $N(k)$ que conecta k^* y k.*

Demostración. Sea δ un arco contenido en un meridiano de $N(k)$ que toca a k en un punto, tal que δ conecta k y uno de los puntos de $\tau \cap \gamma$. Entonces $\beta = k \cup \delta$ es un túnel de desanudamiento para k^*. Para ver esto, deslizamos γ sobre δ y luego sobre k, para obtener un 1-complejo, el cual es equivalente a $k \cup \tau$, así su complemento es un cubo con asas de género dos. $\square$

Un *espacio lente* $L(p, q)$, es la 3-variedad obtenida pegando las fronteras de dos toros sólidos, de modo que el meridiano del primer toro sólido va a una (p, q)-curva en el segundo toro sólido, donde p es el número de longitudes y q es el número de meridianos.

1.2. Algo de gráficas.

Una *gráfica* consta de un conjunto finito de puntos V, llamados *vértices*, y un conjunto finito de *aristas* E. Cada arista se puede representar como una pareja $[v_i, v_j] \in V \times V$. Los vértices v_i y v_j se llaman los *extremos* de la arista. Una arista con el mismo vértice en ambos extremos se llama un *lazo*.

El *orden* de una gráfica es el número de sus vértices, la *valencia* (o grado) de un vértice v es el número de aristas que tienen un extremo en v, los

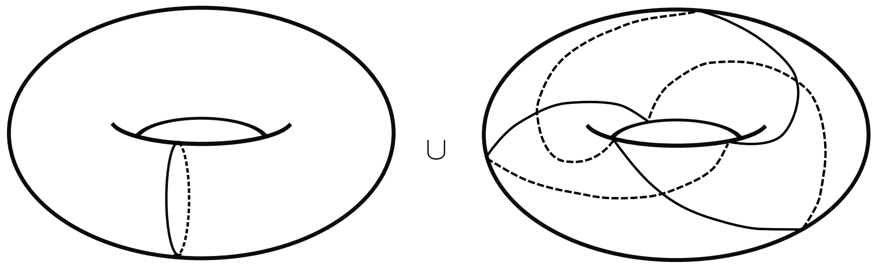


Figura 1.10: Espacio lente $L(2,3)$.

lazos se cuentan dos veces. Decimos que dos vértices son *adyacentes* si están conectados por una arista.

Una *trayectoria* en una gráfica es una sucesión de aristas que podemos escribir como $[v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_3], \ldots, [v_{n-1}, v_n]$. La trayectoria es *simple* si todos los vértices v_i son distintos.

Un *circuito* en una gráfica es una trayectoria la cual tiene el mismo vértice en los dos extremos: $v_0 = v_n$. En la gráfica de la Figura 1.11 una trayectoria es $[v_1, v_6], [v_6, v_4], [v_4, v_5]$ y un circuito es $[v_1, v_4], [v_4, v_3], [v_3, v_2], [v_2, v_1]$.

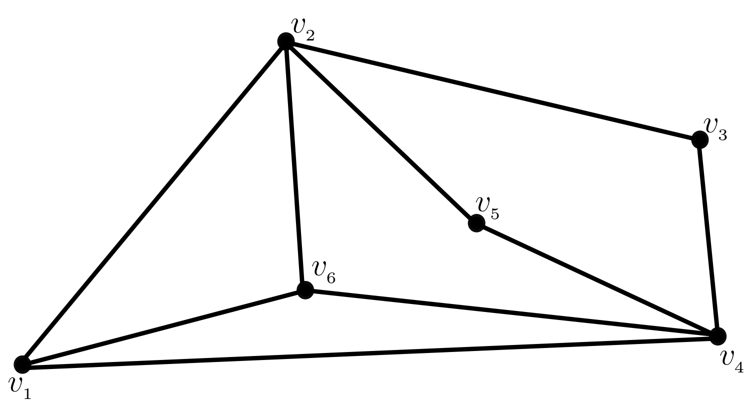


Figura 1.11: Trayectorias y circuitos.

Una gráfica es *conexa* si existe una trayectoria entre cualesquiera dos vértices. Un *árbol* es una gráfica conexa que no tiene circuitos.

Los vértices de un árbol algunas veces se llaman *nodos*. Los vértices de valencia uno en un árbol se llaman *nodos terminales*, y las aristas unidas a ellos se denominan *hojas*.

Observación 1.14. Un árbol con n vértices tiene $n-1$ aristas.

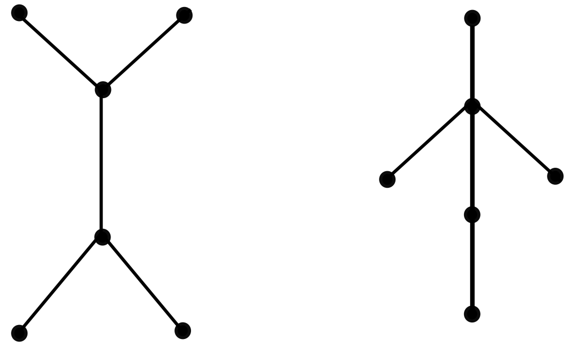


Figura 1.12: Árboles de orden seis.

Una gráfica $G' = (V', E')$ es una *subgráfica* de una gráfica $G = (V, E)$ si $V' \subset V$ y $E' \subset E$. Como G' es una gráfica, los puntos finales de todas las aristas en E' deben pertenecer a V'.

Capítulo 2

Nudos con número de túnel uno.

En este capítulo estudiaremos algunos resultados ya conocidos para nudos con número de túnel uno.

2.1. Satélites y $(1,1)$-nudos.

Recordemos primero la definición de fibrado de Seifert, veánse por ejemplo las notas de Hatcher [10]. Un modelo fibrado de Seifert de $S^1 \times D^2$ es una descomposición de $S^1 \times D^2$ en círculos disjuntos, denominados fibras, construido de la siguiente manera. Comenzamos con la descomposición de $[0,1] \times D^2$ en los segmentos $[0,1] \times \{x\}$, identificamos los discos $\{0\} \times D^2$ y $\{1\} \times D^2$ a través de una $2\pi p/q$ rotación, para $p/q \in \mathbb{Q}$, con p y q primos relativos. Entonces el segmento $[0,1] \times \{0\}$ se convierte en una fibra $S^1 \times \{0\}$, mientras que todas las demás fibras en $S^1 \times D^2$ están hechas de q segmentos $[0,1] \times \{x\}$, si $q > 1$. Un fibrado de Seifert de una 3-variedad M es una descomposición de M en círculos disjuntos, las fibras, tal que cada fibra tiene una vecindad que es difeomorfa, bajo un difeomorfismo que preserva fibras, a una vecindad de una fibra en algún modelo fibrado de Seifert de $S^1 \times D^2$.

Cada fibra circular C en un fibrado de Seifert de una 3-variedad M tiene una multiplicidad bien definida, el número de veces que un pequeño disco transversal a C se interseca con cada fibra cercana. Las fibras de multiplicidad 1 son fibras regulares, y las otras fibras son múltiples (o singulares, o excepcionales).

Sea $k = T(p,q)$ el nudo toroidal en S^3 de tipo (p,q). El exterior del nudo toroidal, $E(k)$, se obtiene pegando dos toros sólidos Q_1 y Q_2 a lo largo de un anillo $A = \partial Q_1 \cap \partial Q_2 = Q_1 \cap Q_2$. Consideremos la clase de todas las variedades obtenidas de esta forma. Tal variedad tiene una fibración para la cual el ánima de A es una fibra regular y las ánimas de Q_1 y Q_2 son las únicas fibras excepcionales. Además, el espacio base del espacio fibrado de Seifert es un disco y, por tanto, el espacio está determinado salvo homeomorfismos que preservan orientación por los tipos r/p y s/q mod 1, de Q_1 y Q_2. Denotamos esta variedad por $D(r/p, s/q)$. En particular, $E(T(p,q)) = D(r/p, s/q)$ con $ps + qr = \pm 1$.

Sea $k = T(p,q)$ el nudo toroidal en S^3 de tipo (p,q). Sean r y s enteros tales que $ps - qr = 1$. El exterior del nudo toroidal, $E(k)$, es un espacio fibrado de Seifert $D(-r/p, s/q)$, es decir, el espacio fibrado de Seifert cuyo espacio base es un disco con dos puntos cónicos, y el invariante de Seifert de las fibras singulares, digamos u y v, son $-r/p$ y s/q, respectivamente.

La construcción de Morimoto y Sakuma, [13], para nudos satélites con número de túnel uno es como sigue: Sea k_0 un nudo toroidal no trivial $T(p,q)$ de tipo (p,q) en S^3, con $|p| \geq 2, q \geq 2$, y sea $L = k_1 \cup k_2$ un enlace de 2 puentes, $S(\alpha,\beta)$, de tipo (α,β) en S^3 con $\alpha \geq 4$, es decir, L no es un enlace trivial ni es el enlace de Hopf.

Como k_2 es un nudo trivial, existe un homeomorfismo que preserva orientación $f : E(k_2) \to N(k_0)$ el cual manda un meridiano $m_2 \subset \partial E(k_2)$ de k_2, es decir una longitud del toro sólido $E(k_2)$, a una fibra regular $h \subset \partial N(k_0) = \partial E(k_0)$ del fibrado de Seifert $D(-r/p, s/q)$ de $E(k_0)$. Denotamos al nudo $f(k_1) \subset N(k_0) \subset S^3$ por $k(\alpha,\beta,p,q)$. Nótese que el toro $\partial N(K_0)$ es esencial en el exterior de $k(\alpha,\beta,p,q)$, es decir, obtenemos un nudo satélite con compañero un nudo toroidal.

El nudo resultante es un $(1,1)$-nudo. Para probar esto, sea $k = k(\alpha,\beta,p,q)$, y sea $L = k_1 \cup k_2$ un enlace de 2 puentes de tipo (α,β). Como L es un enlace de 2 puentes, existe una 2-esfera Σ que se interseca con L en cuatro puntos, y la cual descompone a L en una unión de dos ovillos triviales. Entonces Σ se interseca con k_1 en dos puntos; así k_1 tiene una presentación de un puente con respecto a Σ. Sea $A = \Sigma - \mathrm{int}N(k_2)$; A es un anillo propiamente encajado en $S^3 - \mathrm{int}N(k_2)$ cuya frontera consiste en dos meridianos de k_2. Podemos arreglar el anillo A de manera que $f(A)$ esté hecho de fibras del fibrado de Seifert $D(-r/p, s/q)$ de S^3; esto implica que $f(A)$ se encuentra en la frontera de un toro sólido estándar R y $f(\partial A)$ consiste en dos curvas de tipo (p,q)

en tal toro. Esto muestra que $f(k_1) = k$ tiene una presentación de un puente con respecto a $f(A)$ y, por lo tanto, es de un puente respecto al toro ∂R.

Como $k(\alpha, \beta, p, q)$ es un $(1, 1)$-nudo, tiene número de túnel uno.

Los nudos $k(\alpha, \beta, p, q)$ también pueden describirse de la siguiente manera (ver [3]). Sea T un toro estándar en S^3 y sea $A_{p,q} \subset T$ un anillo tal que una componente de ∂A es una curva de pendiente (p, q) sobre T, $|p| \geq 2, q \geq 2$. Decimos que un nudo k pertenece a la clase de nudos $\mathcal{T}$, si k tiene una presentación de un puente con respecto a algún anillo $A_{p,q}$; esto es, k es de un puente con respecto a T, tal que los puntos de intersección de k con T están en $A_{p,q}$, y los arcos de k son paralelos a arcos sobre $A_{p,q}$. Si k pertenece a la clase $\mathcal{T}$, entonces k se puede isotopar para que esté en $N(A_{p,q})$, para algún $A_{p,q}$. Sea $S_{p,q} = \partial N(A_{p,q})$. Para cualesquiera de estos nudos k que no son el nudo trivial ni el nudo toroidal de tipo (p, q), el toro $S_{p,q}$ será esencial en el exterior de k. Se puede observar que k pertenece a $\mathcal{T}$ si y sólo si es uno de los nudos $K(\alpha, \beta; p, q)$.

A continuación describimos los túneles de desanudamiento para un nudo en $\mathcal{T}$. El toro T divide S^3 en dos toros sólidos R_1 y R_2. Sea k un nudo en $\mathcal{T}$ tal que k es de un puente con respecto a un anillo $A_{p,q}$; así $k \subset N(A_{p,q})$. Entonces k se divide en dos arcos k_1 y k_2, los cuales son arcos triviales en R_1 y R_2, respectivamente. Consideremos que R_1 está foliado por toros concéntricos alrededor del ánima de R_1 y, entonces, k_1 es un arco que se interseca con cada uno de los toros en dos o cero puntos, excepto para un toro el cual es tangente a k_1, que define un punto máximo en k_1. De manera similar definimos un mínimo de k_2 en R_2. Por un arco recto en R_1 o R_2 queremos decir un arco que se interseca con cada toro de la foliación en a lo más un punto. Tomamos un arco recto ρ_1 el cual va del máximo de k_1 a un punto x sobre $S_{p,q}$. Similarmente, tomamos un arco recto ρ_2 el cual va del mínimo de k_2 a un punto y sobre $S_{p,q}$. Sea ρ_3 un arco en $S_{p,q}$ que conecta a x con y, atraviesa T en un punto y el cual es disjunto de un meridiano de $N(A_{p,q})$. Sea τ_x la unión del ánima del toro sólido R_1 y un arco recto que conecta al punto x con el ánima de R_1. Similarmente, sea τ_y la unión del ánima del toro sólido R_2 y un arco recto que conecta al punto y con el ánima de R_2. Note que τ_x y τ_y son túneles de desanudamiento para el exterior de $N(A_{p,q})$, esto es, para el nudo toroidal $T(p, q)$.

Ahora definimos $\tau(1, x) = \tau_x \cup \rho_1, \tau(1, y) = \tau_y \cup \rho_3 \cup \rho_1, \tau(2, x) = \tau_x \cup \rho_3 \cup \rho_2$ y $\tau(2, y) = \tau_y \cup \rho_2$. Cada uno de estos 1-complejos es un túnel de desanudamiento para k. Ejemplos de estos túneles de desanudamiento se muestran en las Figuras 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4. Además, por [13], tenemos que si

τ es un túnel de desanudamiento para k, entonces k es uno de los túneles $\tau(1,x), \tau(1,y), \tau(2,x)$ o $\tau(2,y)$ salvo homeomorfismos de $E(k)$. En [13] también están clasificados todos los túneles de desanudamiento para k salvo isotopía del ambiente de $E(k)$. Aquí necesitamos solamente la clasificación salvo homeomorfismo de $E(k)$, ya que si dos túneles son homeomorfos, aunque no sean isotópicos, producirán la misma familia de nudos cuando se toman iterados del nudo y los túneles.

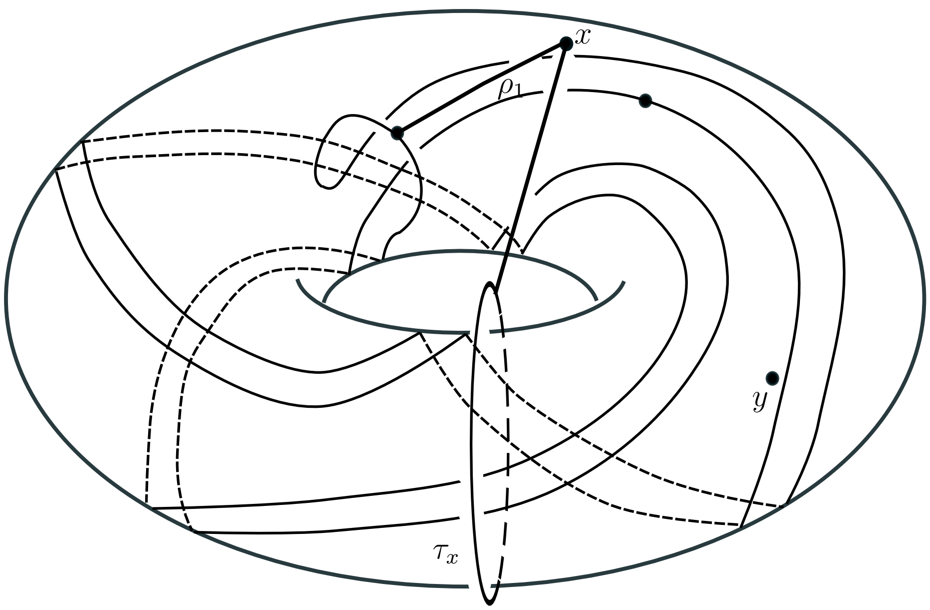


Figura 2.1: $\tau(1,x)$

En [5], Eudave-Muñoz muestra el siguiente Teorema que proporciona una forma de construir superficies meridionales esenciales de género g en el exterior del nudo k y con $2n$ componentes en la frontera.

Teorema 2.1. *Para cada pareja de enteros $g \geq 1$ y $n \geq 1$, existen nudos k con número de túnel uno tal que existe una superficie meridional esencial $\hat{S}$ en el exterior de k de género g y con $2n$ componentes en la frontera.*

En la próxima sección damos una idea de la prueba de este teorema en el caso $g = 1$ y $n = 1$.

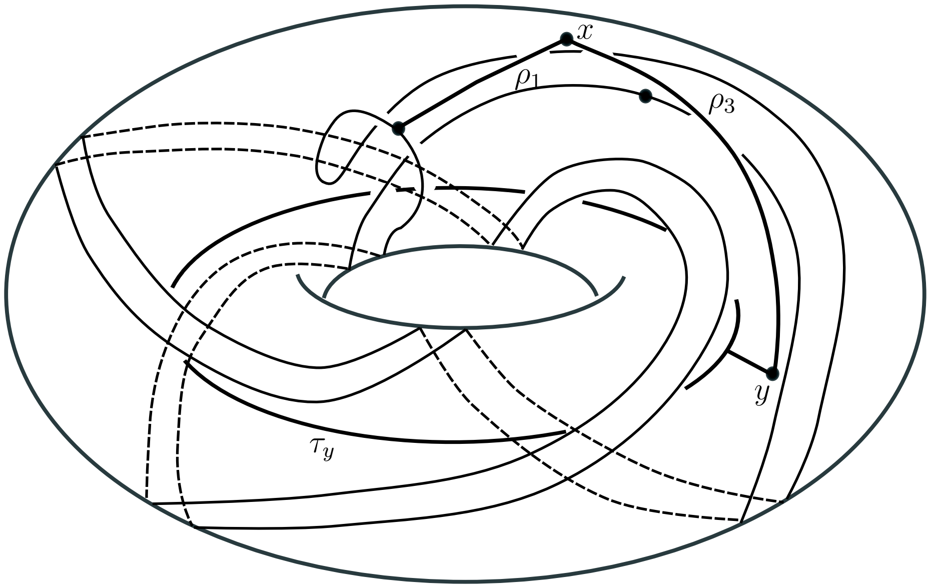


Figura 2.2: $\tau(1, y)$

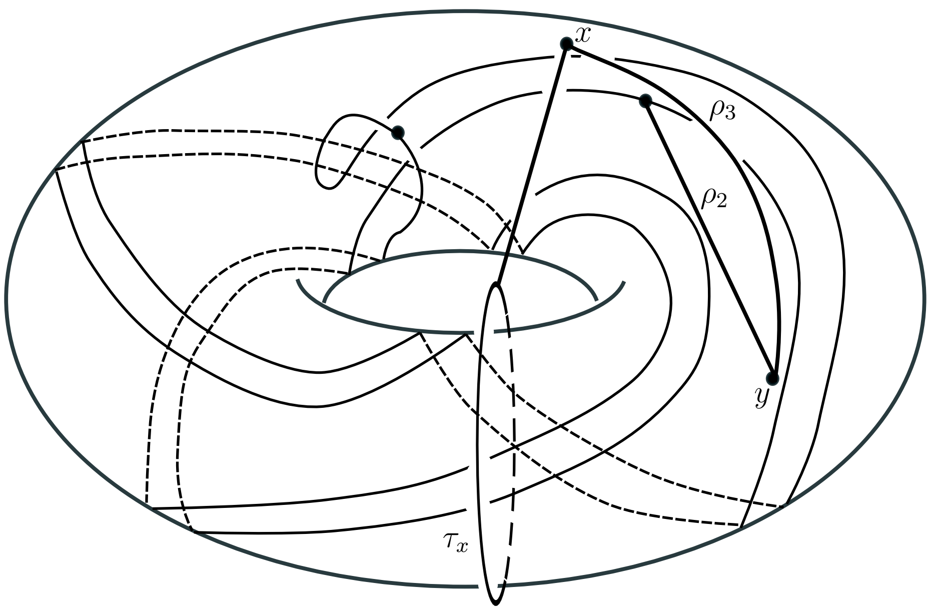


Figura 2.3: $\tau(2, x)$

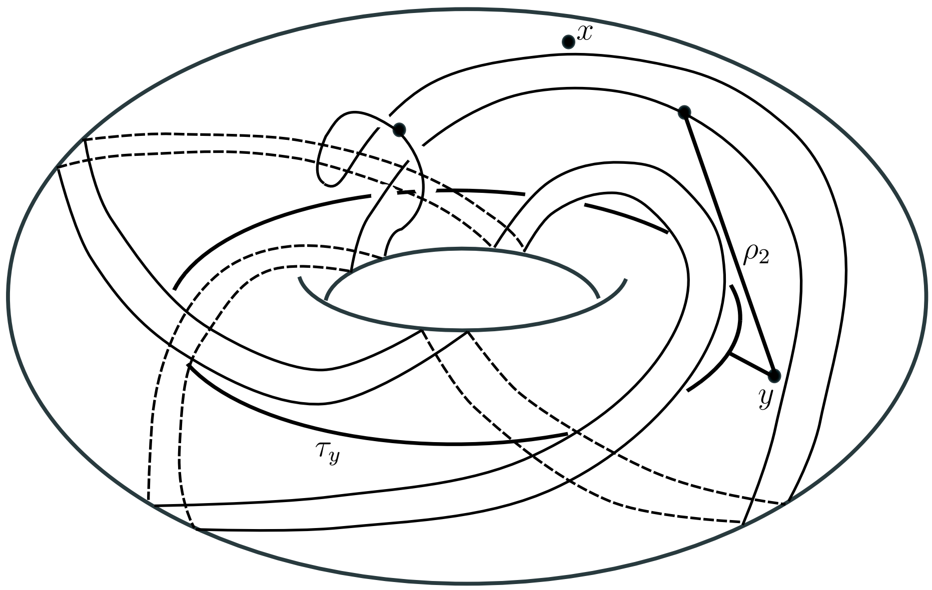


Figura 2.4: $\tau(2, y)$

2.2. Familias de nudos con número de túnel uno

En [7], M. Eudave-Muñoz y E. Ramírez-Losada, dieron una construcción general de $(1,1)$-nudos que admiten superficies meridionales esenciales. En particular, existen tres familias de nudos, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, las cuales constan de $(1,1)$-nudos que admiten un toro meridional esencial que interseca al nudo en dos puntos.

Sea T un toro estándar en S^3 y sea $T \times [0,1] \subset S^3$, donde identificamos T con $T \times \{1/2\}$.

Denotamos por R_0 y R_1 a los dos toros sólidos complementarios de $T \times I$ en S^3 donde $R_0 \cap T \times [0,1] = \partial R_0 = T \times \{0\}$ y $R_1 \cap T \times [0,1] = \partial R_1 = T \times \{1\}$. Suponemos que R_1 contiene el punto al infinito de S^3.

Recordemos otra definición de $(1,1)$-nudo. Si k es un nudo de un puente con respecto a T, entonces puede isotoparse para estar situado en $T \times [0,1]$ tal que tiene solamente un máximo y un mínimo con respecto a la proyección de $T \times [0,1]$ sobre $[0,1]$. Inversamente, si k está contenido en $T \times [0,1]$ y tiene solamente un máximo y un mínimo, entonces k es de un puente con respecto a T.

Describiremos tres familias de $(1,1)$-nudos tal que cada nudo en una de estas familias tiene un toro meridional esencial con dos componentes en la frontera.

Sea γ una curva simple cerrada contenida en ∂R_0 de pendiente (p,q) en R_0, con $|p|,|q| \geq 2$. Sea α un arco recto en $T \times [0,1/2]$, tal que su extremo en $T \times \{0\}$ se encuentra sobre γ. Sea M_0 una vecindad regular de $\gamma \cup \alpha$ en $R_0 \cup T \times [0,1/2]$. Esto es un toro sólido tal que $M_0 \cap T \times \{1/2\}$ es un disco D.

Sea A un anillo en T que contiene al disco D en su interior y tal que su frontera consiste en dos curvas meridionales en el toro sólido $T \times [1/2,1] \cup R_1$. Sean B_1 y B_2 dos discos meridianos en $T \times [1/2,1] \cup R_1$, tal que $\partial A = \partial B_1 \cup \partial B_2$. Así $A \cup B_1 \cup B_2$ es frontera de una 3-bola que llamaremos M_1. Claramente $M = M_0 \cup M_1$ es un toro sólido y, entonces, $S = \partial M$ es un toro.

Sea $\mathcal{A}$ la familia de nudos K que viene de la siguiente construcción. K es un nudo en $T \times [0,1]$ tal que $K = k_0 \cup k_1$, donde k_0 es un arco en $T \times [0,1/2]$ y k_1 es un arco en $T \times [1/2,1]$. Supongamos lo siguiente:

1. k_0 está contenido en M_0 y sus extremos se encuentran en el disco D.

2. k_0 tiene solamente un mínimo en $T \times [0,1/2]$, es decir, $k_0 \cap T \times \{0\}$ es un punto de tangencia, el cual divide k_0 en dos arcos rectos en $T \times [0,1/2]$.

3. Sea $\hat{k}_0$ el nudo obtenido a partir de k_0 uniendo sus extremos con un arco que se encuentra en D, y luego empujándolo hacia el interior de M_0. Supongamos que el número de enrollamiento de $\hat{k}_0$ en M_0 es ≥ 2.

4. k_1 está contenido en $T \times [1/2,1]$ y sus extremos se encuentran en el disco D.

5. k_1 tiene solamente un máximo en $T \times [1/2,1]$, es decir, $k_1 \cap T \times \{1\}$ es un punto de tangencia, el cual divide k_1 en dos arcos rectos en $T \times [1/2,1]$.

6. k_1 se interseca con cada uno de los discos B_1 y B_2 en exactamente un punto.

7. Sea $\hat{k}_1$ el arco obtenido de $k_1 \cap M_1$ uniendo los dos extremos de k_1 que se encuentran en D con un arco situado en D, y luego empujándolo hacia el interior de M_1. Así, $\hat{k}_1$ es un arco propiamente encajado en

M_1. Supongamos que $\hat{k}_1$ está anudado en M_1, es decir, no es un arco trivial; de hecho, está anudado como un nudo de 2-puentes.

Por construcción, se sigue que K es un $(1,1)$-nudo, ya que tiene solamente un máximo y un mínimo en $T \times [0,1]$. Se deduce también que K se interseca con el toro S en dos puntos. Para un ejemplo ver la Figura 2.5.

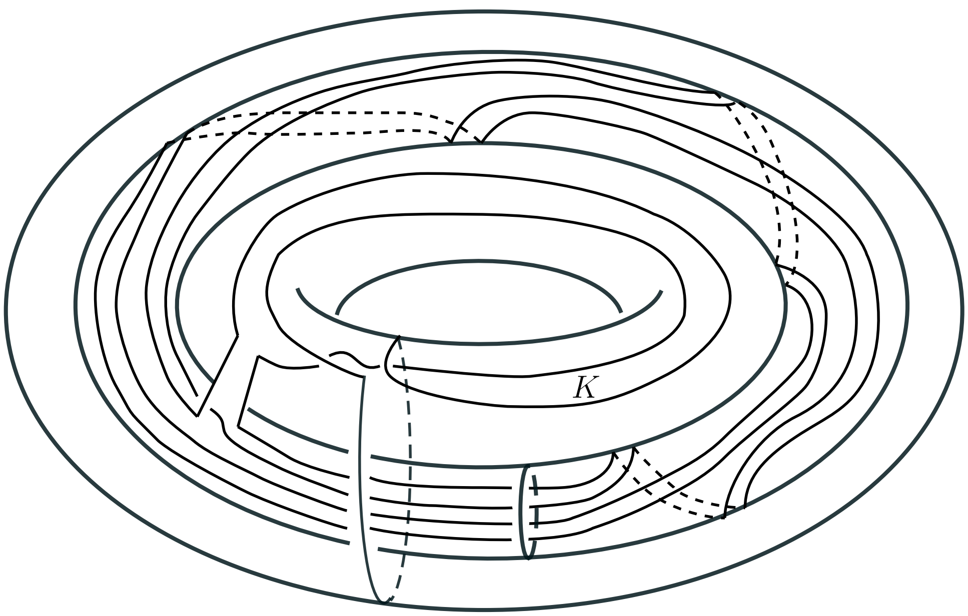


Figura 2.5:

Teorema 2.2. *Sea K un nudo en la familia $\mathcal{A}$. Entonces K es un $(1,1)$-nudo y S es un toro meridional esencial que se interseca con K en dos puntos.*

Para una demostración ver [7], Lema 2.3.2, Lema 2.4.2, y Teorema 2.8.2. No es difícil construir nudos que satisfagan estas condiciones. Además, si las condiciones (3) o (7) no se satisfacen, entonces el toro S es compresible o meridionalmente compresible.

Sea A_0 un anillo propiamente encajado en el toro sólido $R_0 \cup T \times [0,1/2]$, tal que la frontera del anillo consiste en dos curvas en $T \times \{1/2\}$ que van al menos dos veces longitudinalmente a lo largo de este toro sólido. Sea

A_1 un anillo propiamente encajado en el toro sólido $R_1 \cup T \times [1/2, 1]$, tal que la frontera del anillo consiste en dos curvas en $T \times \{1/2\}$ que van al menos dos veces longitudinalmente a lo largo de este toro sólido. Supongamos que $\partial A_0 = \partial A_1$, tal que $S = A_0 \cup A_1$ es un toro en S^3. Supongamos que $S \cap T \times [0, 1]$ consiste en dos anillos producto B_0 y B_1. El anillo A_0 corta un toro sólido N_0 contenido en $R_0 \cup T \times [0, 1/2]$, y el anillo A_1 corta un toro sólido N_1 contenido en $R_1 \cup T \times [1/2, 1]$.

Existen dos posibilidades para el toro S. La primera, N_0 y N_1 se intersecan en un anillo que se encuentra en $T \times \{1/2\}$ y, entonces, S es frontera de un toro sólido formado por la unión de N_0 y N_1 que está anudado como un nudo toroidal no trivial. En este caso denotamos al toro por S_1. La segunda posibilidad ocurre cuando $N_0 \cap N_1 = \partial A_0 = \partial A_1$ y, de hecho, el toro S es un toro estándar en S^3; en este caso denotamos al toro por S_2.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de nudos K que viene de la siguiente construcción. K es un nudo en $T \times [0, 1]$ que interseca S_1 en dos puntos, ambos ubicados en $\partial A_1 = \partial A_2 \subset T \times \{1/2\}$, pero en componentes diferentes de ∂A_1. Así, K se divide en dos arcos, $K = k_0 \cup k_1$, donde k_0 es un arco en $T \times [0, 1/2]$ y k_1 es un arco en $T \times [1/2, 1]$. Supongamos lo siguiente:

1. k_0 es un arco contenido en $T \times \{1/2\}$.

2. k_1 está contenido en $(N_0 \cup N_1) \cap T \times [0, 1]$. El interior de k_1 interseca $T \times \{1/2\}$ en un punto, y k_1 tiene un máximo local y un mínimo local en $T \times [0, 1]$.

3. $\hat{k}_0 = k_1 \cap N_0$ es un arco con un mínimo local. Encajamos el toro sólido N_0 en S^3 de manera estándar, tal que la imagen del anillo A_0 es una longitud preferente de dicho toro sólido. Un extremo de $\hat{k}_0$ se encuentra en una componente de ∂A_0, y el otro en $T \times \{1/2\}$. Sea α la frontera de un disco meridiano de N_0 que pasa a través de estos puntos finales. Los extremos de $\hat{k}_0$ separan α en dos arcos; unimos los extremos de k_0 con el subarco de α que atraviesa A_0. Esto define un nudo k en S^3; por construcción este nudo tiene una presentación con dos mínimos. Supongamos que k es un nudo no trivial de 2 puentes.

4. $\hat{k}_1 = k_1 \cap N_1$ es entonces un arco con un máximo local. Encajamos el toro sólido N_1 en S^3 de manera estándar, tal que la imagen del anillo A_1 es una longitud preferente de dicho toro sólido. Un extremo de $\hat{k}_1$

se encuentra en una componente de ∂A_1, y el otro en $T \times \{1/2\}$. Sea β la frontera de un disco meridiano de N_1 que pasa a través de estos puntos finales. Los extremos de $\hat{k}_1$ separan β en dos arcos; unimos los extremos de k_1 con el subarco de β que atraviesa A_1. Esto define un nudo k en S^3, el cual por construcción tiene una presentación con dos máximos. Supongamos que k es un nudo no trivial de 2 puentes.

Se sigue por construcción que K es un $(1,1)$-nudo, ya que tiene solamente un máximo y un mínimo en $T \times [0,1]$. Se sigue también que K interseca al toro S_1 en dos puntos. Para un ejemplo ver la Figura 2.6.

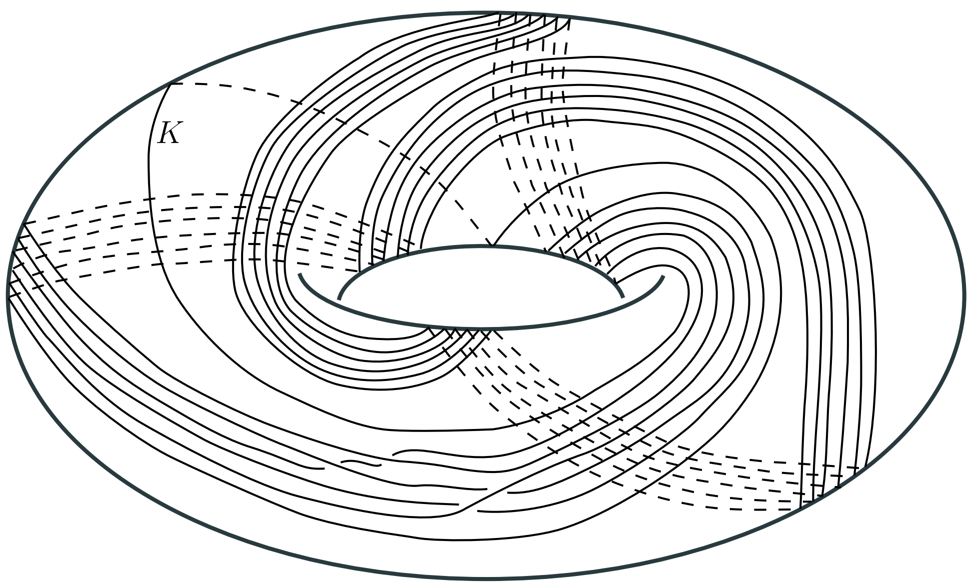


Figura 2.6:

Teorema 2.3. *Sea K un nudo en la familia $\mathcal{B}$. Entonces K es un $(1,1)$-nudo y S_1 es un toro meridional esencial que se interseca con K en dos puntos.*

Para una demostración ver [7], Lema 2.5.2. No es difícil construir nudos que satisfagan estas condiciones. Además, si las condiciones (3) o (4) no se satisfacen, entonces el toro S_1 es compresible o meridionalmente compresible.

Sea $\mathcal{C}$ la familia de nudos K que viene de la siguiente construcción. K es un nudo en $T \times [0,1]$ que se interseca con S_2 en dos puntos, ambos se encuentran en $\partial A_1 = \partial A_2 \subset T \times \{1/2\}$, pero en diferentes componentes de ∂A_1. Así, K se divide en dos arcos, $K = k_0 \cup k_1$, donde k_0 es un arco en $T \times [0, 1/2]$ y k_1 es un arco en $T \times [1/2, 1]$. Supongamos lo siguiente:

1. $k_0 \subset N_0$, k_0 tiene solamente un mínimo en $T \times [0, 1/2]$, es decir, $k_0 \cap T \times \{0\}$ es un punto de tangencia que divide k_0 en dos arcos rectos en $T \times [0, 1/2]$.

2. Encajamos el toro sólido N_0 en S^3 de manera estándar, tal que la imagen del anillo A_0 es una longitud preferente de tal toro sólido. Los extremos de k_0 se encuentran en componentes diferentes de ∂A_0. Sea α la frontera de un disco meridiano de N_0 que pasa a través de estos puntos finales. Los extremos de k_0 separan α en dos arcos; unimos los extremos de k_0 con el subarco de α que se encuentra en A_0. Esto define un nudo k en S^3. Por construcción este nudo tiene una presentación con dos mínimos. Supongamos que k es un nudo no trivial de 2 puentes.

3. $k_1 \subset N_1$, k_1 tiene solamente un máximo en $T \times [1/2, 1]$, esto es, $k_1 \cap T \times \{1\}$ es un punto de tangencia que divide k_1 en dos arcos rectos en $T \times [1/2, 1]$.

4. Encajamos el toro sólido N_1 en S^3 de manera estándar, tal que la imagen del anillo A_1 es una longitud preferente de N_1. Los extremos de k_1 se encuentran en componentes diferentes de ∂A_1. Sea β la frontera de un disco meridiano de N_1 que pasa a través de estos puntos finales. Los extremos de k_1 separan β en dos arcos; unimos los extremos de k_1 con el subarco de β que se encuentra en A_1. Esto define un nudo k en S^3. Por construcción este nudo tiene una presentación con dos máximos. Supongamos que k es un nudo no trivial de 2 puentes.

Se sigue por construcción que K es un $(1, 1)$-nudo, ya que tiene solamente un máximo y un mínimo en $T \times [0, 1]$. Se sigue también que K interseca al toro S_2 en dos puntos. Para un ejemplo ver la Figura 2.7.

Teorema 2.4. *Sea K un nudo en la familia $\mathcal{C}$. Entonces K es un $(1, 1)$-nudo y S_2 es un toro meridional esencial que se interseca con K en dos puntos.*

Para una demostración ver [7], Lema 2.5.2. No es difícil construir nudos que satisfagan estas condiciones. Además, si las condiciones (2) o (4) no se satisfacen, entonces el toro S_2 es compresible o meridionalmente compresible.

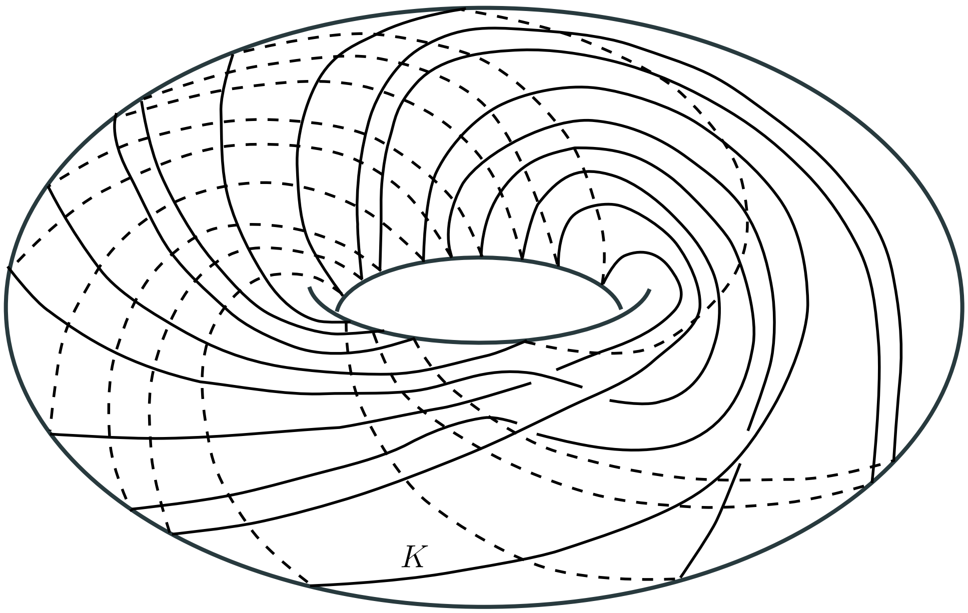


Figura 2.7:

Teorema 2.5. *Sea K un $(1,1)$-nudo en S^3, tal que existe un toro meridional esencial S que interseca K en dos puntos. Entonces K pertenece a una de las familias $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ o $\mathcal{C}$.*

Para una demostración ver [7], Teorema 3.1.

En [4], Eudave-Muñoz mostró que existen nudos k con número de túnel uno tal que existe un toro meridional esencial S en el exterior de k, con dos componentes en la frontera. La construcción es la siguiente.

Sea k un nudo satélite en S^3 con número de túnel uno. Sea $\bar{S}$ el toro esencial que se encuentra en el exterior de k, por [13] y [3] sabemos que $\bar{S}$ está anudado como un nudo toroidal. Sea τ cualquiera de los túneles de desanudamiento $\tau(1,x), \tau(1,y), \tau(2,x)$ o $\tau(2,y)$ para k como los definidos en la sección anterior. Note que τ puede expresarse como $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, donde τ_1 es una curva simple cerrada, y τ_2 es un arco con extremos en $\partial N(k)$ y τ_1, tal que τ_1 es disjunto de $\bar{S}$ y τ_2 se interseca con $\bar{S}$ transversalmente en un punto. El toro $\bar{S}$ divide a S^3 en dos partes, denotadas por M_1 y M_2, suponemos que k está en M_2.

Note que $M_2 \cap N(\tau_2)$ es un cilindro $R \cong D^2 \times I$, tal que $R \cap \bar{S}$ es un disco $D_1 = D^2 \times \{1\}$, y $R \cap N(k)$ es un disco $D_0 = D^2 \times \{0\}$. Deslizamos

τ_1 sobre τ_2, para obtener un arco τ con ambos extremos en $D_0 \subset \partial N(k)$, tal que $\tau \cap M_2$ consiste en dos arcos rectos contenidos en R, es decir, arcos que se intersecan con cada disco $D^2 \times \{x\}$ transversalmente en un punto. La superficie $\bar{S}$ y el arco τ se intersecan entonces en dos puntos. El arco τ tiene una vecindad $N(\tau) \cong D^2 \times I$, tal que $N(\tau) \cap M_2 \subset R$.

Sea k^* un iterado de k y τ como se definió en 1.12. Así $k^* = \tau \cup \lambda$, donde λ está contenida en $\partial N(k)$. El toro $\bar{S}$ y el nudo k^* se intersecan en dos puntos. Empujamos el interior de λ hacia el interior de $N(k)$, tal que λ es ahora un arco propiamente encajado en $N(k)$ cuyos extremos se encuentran en D_0. Recordemos que el número de enrollamiento de un nudo en un toro sólido se define como el número mínimo de veces que el nudo se interseca con cualquier disco meridional de tal toro sólido. Definimos el número de enrollamiento del arco λ en $N(k)$ como el número de enrollamiento del nudo obtenido al unir los extremos de λ con un arco en D_0 y luego empujándolo hacia el interior de $N(k)$. Esto está bien definido.

Sea $\mathcal{D}$ la familia de nudos construidos como antes, tal que cualquiera de las siguientes condiciones se satisface:

1. k no es un nudo cable, y el número de enrollamiento de λ en $N(k)$ es mayor o igual a 2.

2. Supongamos que k es un nudo cable. Sea A el anillo esencial de k y $\bar{S}$, esto es, $A \subset M_2$, una componente frontera de A está en $\partial N(k)$ y la otra es una curva sobre $\bar{S}$. Podemos asumir que la parte de τ que se encuentra en M_2 está contenida en A. Sea $B = \partial N(k) \cap N(A)$; esto es un anillo en $\partial N(k)$. Supongamos que $D_0 \subset B$. En este caso suponemos que el número de enrollamiento de λ en $N(k)$ es ≥ 2 y que el arco λ no puede ser isotopado, rel D_0, a un arco que se encuentra en B.

3. El número de enrollamiento de λ en $N(k)$ es 1. Encajamos el toro sólido $N(k)$ en S^3 de manera estándar. Sea $\hat{\lambda}$ el nudo que se obtiene al unir los extremos de λ con un arco situado en D_0. La imagen de este nudo en S^3 es un $(1,1)$-nudo, de hecho, es un nudo de 2 puentes (ver 1.8). En este caso asumimos que $\hat{\lambda}$ es un nudo no trivial de 2 puentes.

Si ninguna de las condiciones anteriores se satisface el toro $\bar{S}$ debe ser compresible en $E(k^*)$.

Teorema 2.6. *Sea k^* un nudo en la familia $\mathcal{D}$. Entonces k^* es un nudo con número de túnel uno y $\bar{S}$ es un toro meridional esencial que se interseca con k^* en dos puntos.*

Demostración. El nudo k^* tiene número de túnel uno ya que es un iterado de k y τ. Por construcción k^* se interseca con $\bar{S}$ en dos puntos. Si las condiciones (1) o (2) se satisfacen, entonces $\bar{S}$ es esencial, por [5], Teorema 2.1. Si se satisface la condición (3), entonces observe que k^* también pertenece a la familia de nudos $\mathcal{A}$. □

2.3. Resultado principal

El resultado principal es el siguiente, lo probamos en el Capitulo 4.

Teorema 2.7. *Sea k un nudo con número de túnel uno, $\bar{S}$ un toro meridional esencial el cual se interseca con el nudo en dos puntos y $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ un túnel de desanudamiento para k, donde τ_1 es una curva simple cerrada y τ_2 es un arco que conecta τ_1 y $\partial N(k)$. Entonces se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *k es un $(1,1)$-nudo, o*
2. *$\bar{S} \cap \tau = \emptyset$, y se cumple lo siguiente:*
   a) *$\bar{S}$ esta anudado como un nudo toroidal no trivial.*
   b) *El nudo τ_1 es un nudo satélite con número de túnel uno.*
   c) *k es un iterado de τ_1 y de un túnel de desanudamiento para τ_1.*

De los Teoremas 2.5, 2.6 y 2.7 se tiene lo siguiente,

Corolario 2.8. *Sean $k \subset S^3$ un nudo con número de túnel uno, S un toro meridional esencial que se interseca con el nudo en dos puntos. Entonces k pertenece a una de las familias $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ o $\mathcal{D}$ definidas en la Sección 2.2.*

Capítulo 3

Algunos lemas de desanudamiento

En esta sección probamos algunos lemas generales acerca de túneles de desanudamiento.

Sea M una 3-variedad compacta, orientable e irreducible, cuya frontera es un toro T. Supongamos que τ es un túnel de desanudamiento para M, es decir, τ es un arco propiamente encajado en M tal que $H = M - \operatorname{int} N(\tau)$ es un cubo con asas de género dos.

Proposición 3.1. *Supongamos que τ se desliza sobre T y sobre sí mismo, tal que $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, donde τ_1 es una curva simple cerrada en el interior de M y τ_2 es una arco que conecta T y τ_1. Supongamos que no existe un disco de compresión para T disjunto de τ. Entonces τ_1 no puede estar contenido en una 3-bola $B \subset M$.*

Demostración. Supongamos que τ_1 está contenido en una 3-bola $B \subset M$. Sea β una curva sobre $\partial N(\tau)$ la cual es un meridiano del arco τ_2, es decir, β es frontera de un disco en $N(\tau)$ que se interseca con τ_2 en un punto. Hay dos casos, existe un disco de compresión para ∂H disjunto de β, o bien, cualquier disco de compresión se interseca con β.

Supongamos primero que D es un disco de compresión para ∂H disjunto de β. Isotopando D podemos asumir que ∂D está situada en T o en $\partial N(\tau_1)$. Si ∂D se encuentra en T, entonces T es compresible y existe un disco de compresión disjunto de τ; o bien, existe un disco $D' \subset T$, con $\partial D' = \partial D$, tal que $D \cup D'$ es frontera de una 3-bola en la cual se encuentra τ. Si esto ocurre, cortamos H a lo largo de D para obtener dos toros sólidos, ya que

H es un cubo con asas. Pero entonces M es un toro sólido y existe un disco de compresión para T disjunto de τ. En cualquiera de los dos casos, esto establece la proposición.

Por lo tanto, podemos suponer que ∂D se encuentra sobre $\partial N(\tau_1)$. Sea F una copia de $\partial N(\tau)$ empujada ligeramente hacia el interior de H; esto es un toro con un agujero propiamente encajado en H, cuya frontera bordea un disco $D' \subset T$, el cual es una vecindad de $\tau_2 \cap T$. Podemos asumir que ∂D se encuentra sobre F, entonces cortamos F a lo largo de D y obtenemos un disco D'' con $\partial D'' = \partial F = \partial D'$. Note que $D'' \cup D'$ debe ser frontera de una 3-bola en la cual se encuentra τ. Como antes, esto muestra que existe un disco de compresión para T disjunto de τ.

Supongamos ahora que cualquier disco de compresión para ∂H debe intersecar a β. Por el Lema 1.9, tenemos que al añadir una 2-asa a lo largo de β obtenemos una variedad irreducible con frontera incompresible. Pero esto es una contradicción, pues lo que obtenemos es $M - \operatorname{int} N(\tau_1)$, lo cual es reducible ya que asumimos que τ_1 se encuentra dentro de una 3-bola. Esto completa la prueba. $\square$

Para la prueba de la Proposición 3.3 necesitamos una versión mas general del Lema 1.9, se incluye a continuación.

Sea F una superficie sobre la frontera de una 3-variedad M, y sea γ una 1-variedad propiamente encajada en F. Por lo general γ es una unión de curvas esenciales disjuntas en F. Un disco de compresión D de F es un disco propiamente encajado en M tal que ∂D es una curva esencial en F. Decimos que D es un disco de n-compresión (con respecto a γ) si ∂D interseca a γ en n puntos. También decimos que un disco de compresión D de $F - \gamma$ es un disco de 0-compresión de F. La superficie F es n-compresible si existe un disco de n-compresión. De otra manera es n-incompresible. Por definición F es 0-compresible si y sólo si $F - \gamma$ es compresible.

Dada una curva simple cerrada J sobre F, sea M' la variedad que se obtiene añadiendo una 2-asa $D^2 \times I$ a M tal que $\partial D^2 \times I$ se identifica con una vecindad regular de J en F. Sea F' la superficie $(F - \partial D^2 \times I) \cup (D^2 \times \partial I)$ sobre la frontera de M'.

Teorema 3.2. *Sea γ una 1-variedad en F, y sea J una curva en F disjunta de γ. Supongamos que $F - \gamma$ es compresible.*

1. *Si F' es $n-$compresible, entonces $F - J$ es $k-$compresible para alguna $k \leq n$.*

2. *Si F' tiene un disco D de $n-$compresión con ∂D una curva que no separa sobre F', entonces $F-J$ es 0-compresible, o bien tiene un disco B de $k-$compresión tal que $k \leq n$ y ∂B es no separante sobre $F-J$.*

La prueba del teorema anterior se puede consultar en [16].

La siguiente proposión es natural de alguna manera, pero no es tan fácil de probar a causa de ciertos hechos. Si T es un toro y t_1 es un arco propiamente encajado en un producto $T \times I$, tal que $T \times I - \operatorname{int} N(t_1)$ es un cubo con asas, entonces por un resultado de Frohman [9], t_1 es isotópico a un arco recto en $T \times I$. Pero si t_1 y t_2 son una pareja de arcos propiamente encajados en $T \times I$ tal que $T \times I - \operatorname{int} N(t_1 \cup t_2)$ es un cubo con asas, entonces t_1 y t_2 pueden no ser arcos rectos simultáneamente en $T \times I$. Ahora, si A es un anillo y t_1 es un arco propiamente encajado en $A \times I$, con extremos en $A \times \{0\}$ y $A \times \{1\}$, tal que $A \times I - \operatorname{int} N(t_1)$ es un cubo con asas. Entonces por un argumento como en el Lema 1.11, t_1 es paralelo a un arco situado en $\partial(A \times I)$, pero puede no ser isotópico a un arco recto en $A \times I$, si los extremos de t_1 los mantenemos sobre $A \times \{0\}$ y $A \times \{1\}$.

Proposición 3.3. *Sean M, T y τ como en la Proposición 3.1 y supongamos que T es incompresible. Sea T' un toro encajado en M el cual es paralelo a T; es decir, T y T' bordean una región homeomorfa a $T \times I$. Supongamos que τ se interseca con T' en dos puntos. Entonces $(T \times I) \cap \tau$ consiste en dos arcos rectos en $T \times I$, esto es, τ puede isotoparse, sin intersecarse con T' en más puntos, de modo que $(T \times I, (T \times I) \cap \tau) = (T \times I, \{x, y\} \times I)$, donde $x, y \in T$.*

Demostración. Sea $M' = M - \operatorname{int}(T \times I)$, entonces $M = M' \cup (T \times I)$, donde $\partial M' = M' \cap (T \times I) = T'$. Tenemos que $H = M - \operatorname{int} N(\tau)$ es un cubo con asas de género dos. Note que el arco τ no puede isotoparse de manera que sea disjunto de T', en caso contrario T' sería un toro incompresible en el cubo con asas H, lo cual no es posible. Supongamos que τ se divide en tres arcos $\tau = k_1 \cup k_m \cup k_2$, tal que $k_1, k_2 \subset T \times I$, y $k_m \subset M'$. Sea $\tilde{T}' = T' \cap H = T' - \operatorname{int} N(k_1) \cup N(k_2)$; esto es un toro con dos agujeros propiamente encajado en H. Note que $\tilde{T}'$ es incompresible en H, de otra manera T' sería compresible en M, o el arco τ podría isotoparse para ser disjunto de T'.

Sea D un disco de compresión para H. Supongamos que D y $\tilde{T}'$ se intersecan trasversalmente y que esta intersección es mínima. Etiquetamos los extremos de los arcos de intersección entre D y $\tilde{T}'$ con 1 ó 2, dependiendo si los extremos se encuentran en $\partial N(k_1) \cap \tilde{T}'$ o en $\partial N(k_2) \cap \tilde{T}'$. Sea γ un arco de intersección de más afuera en D, entonces es frontera de un disco $D' \subset D$, con $\partial D' = \alpha \cup \gamma$, donde α es un arco sobre ∂H y el interior de D' es disjunto de $\tilde{T}'$.

Hay varios casos posibles para las etiquetas de los extremos del arco γ.

1. Los extremos de γ tienen etiquetas 1 y 2 y α se encuentra en $\partial N(k_m)$. Esto implica que el arco k_m es isotópico a un arco sobre T'. Entonces podemos isotopar a τ para que sea disjunto de T', lo cual no es posible.

2. Los extremos de γ tienen etiquetas 1 y 2 y D' se encuentra en $T \times I$. Entonces α es un arco que va sobre $N(k_1)$, luego sobre T y luego sobre $N(k_2)$. Esto muestra que k_1 y k_2 son un par de arcos paralelos en $T \times I$. Como H es un cubo con asas, cortando H a lo largo de la superficie incompresible $\tilde{T}'$ obtenemos una pareja de cubos con asas; uno de ellos es $T \times I - \operatorname{int} N(k_1 \cup k_2)$. Note que el disco D' está propiamente encajado en $T \times I - \operatorname{int} N(k_1 \cup k_2)$. Entonces cortamos este cubo con asas con D' y obtenemos otro cubo con asas, el cual es homeomorfo a $T \times I - \operatorname{int} N(k_1)$, ya que k_1 y k_2 son paralelos en $T \times I$. Esto muestra que $T \times I - \operatorname{int} N(k_1)$ es un cubo con asas y, entonces, por un resultado de Frohman [9], k_1 es isotópico a un arco recto en $T \times I$. Como k_1 y k_2 son paralelos, se deduce que ambos son rectos de manera simultánea en $T \times I$.

3. Los extremos de γ tienen etiquetas 1 y 1 (o 2 y 2) y D' se encuentra en $T \times I$. Entonces α es un arco que va sobre $N(k_1)$, luego sobre T y luego sobre $N(k_1)$ otra vez. El arco α corta $\partial N(k_1)$ en dos discos; sea F cualquiera de ellos. Entonces $D' \cup F$ es un anillo en $T \times I$ con una componente frontera en T y la otra en T'; podemos suponer que k_1 es un arco esencial del anillo. El anillo $D' \cup F$ debe ser isotópico a un anillo de la forma $\delta \times I$, donde δ es una curva simple cerrada en T. Esto muestra que k_1 es un arco recto en $T \times I$.

Si existe otro arco de más afuera en D con extremos etiquetados con 2 y 2, entonces k_2 también deber ser un arco recto en $T \times I$ y como existirían dos anillos disjuntos que contienen a k_1 y k_2, respectivamente, resulta que ambos arcos son rectos de manera simultánea en $T \times I$. Entonces podemos asumir que todos los arcos de más afuera en D tienen extremos etiquetados con 1 y 1; de lo contrario hemos terminado.

Note que existe una pareja de arcos paralelos en D: uno de más afuera cuyos extremos tienen etiqueta 1 y 1 y uno al lado de éste con extremos etiquetados con 2 y 2. Esto sucede porque cualquier arco de más afuera tiene los extremos etiquetados con 1 y 1 y, junto a cualquier etiqueta 1, hay una etiqueta 2. Entonces supongamos que existen dos arcos γ_1 y γ_2 en D, donde γ_1 determina un disco D', con $\partial D' = \alpha \cup \gamma_1$, y α es un arco que va sobre $N(k_1)$, luego sobre T, y luego sobre $N(k_1)$ otra vez. El arco γ_1 sobre $\tilde{T}'$ va de $N(k_1)$ a $N(k_1)$ y γ_2 es un arco sobre $\tilde{T}'$ el cual va de $N(k_2)$ a $N(k_2)$. Los arcos γ_1 y γ_2 delimitan un disco $D'' \subset D$, tal que $\partial D'' = \gamma_1 \cup \beta_1 \cup \gamma_2 \cup \beta_2$, donde β_1 y β_2 son arcos sobre $\partial N(k_m)$. El arco α corta a $\partial N(k_1)$ en dos discos; sea F cualquiera de ellos. Entonces $D' \cup F$ es un anillo A, en $T \times I$, con una componente frontera en T y la otra en T'. Isotopamos A en $T \times I$ tal que el arco k_1 es un arco generador de A. Los arcos β_1 y β_2 cortan a $\partial N(k_m)$ en dos discos; sea F' cualquiera de ellos. Entonces $D'' \cup F'$ es un anillo B, propiamente encajado en M'. Isotopamos B en M' tal que el arco k_m es un arco generador de B. Entonces el anillo B es incompresible y ∂-incompresible, de otra manera T' sería compresible o el arco k_m sería isotópico a un arco sobre T'. Podemos asumir que A y B tienen una componente frontera en común, por lo que $A \cup B$ es un anillo, con una de sus componentes frontera en T y la otra en T'.

Tomamos una vecindad producto $A \times I$ de A, donde A se identifica con $A \times \{1/2\}$. Consideremos el anillo $C = (T' - \partial A \times I) \cup (A \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$; note que C está propiamente encajado en M, es ∂-paralelo en M y se interseca con τ en un punto. Note también que $A \cup B$ y C se intersecan en una curva simple cerrada, es decir, la componente frontera de $A \cup B$ que se encuentra en T'. Ahora tomamos una vecindad producto, $(A \cup B) \times I$, de $A \cup B$, donde $A \cup B$ se identifica con $(A \cup B) \times \{1/2\}$, y la cual se interseca con C solamente en una vecindad de la curva $(A \cup B) \cap C$.

Consideremos los anillos $(C - \partial(A \cup B) \times I) \cup ((A \cup B) \times \{0\}) \cup ((A \cup B) \times \{1\})$; llamémoslos C_0 y C_1. Observemos que C_0 y C_1 son anillos propiamente encajados en M, los cuales son paralelos en M; es decir, son frontera de una región producto $C_0 \times I$, donde $C_0 = C_0 \times \{0\}$ y $C_1 = C_0 \times \{1\}$ y tal que τ se encuentra dentro de la región producto $C \times I$, pero es disjunto de C_0 y C_1 (ver Figura 3.1).

Note que C_0 y C_1 son incompresibles y $\partial-$incompresibles en M, ya que son las extensiones de B, a través de $T \times I$, a M. Entonces C_0 y C_1 son anillos incompresibles en H, pero son ∂-compresibles en H ya que H es un cubo con asas. Entonces existe un disco E en H, tal que $\partial E = \rho_0 \cup \rho_1$; podemos

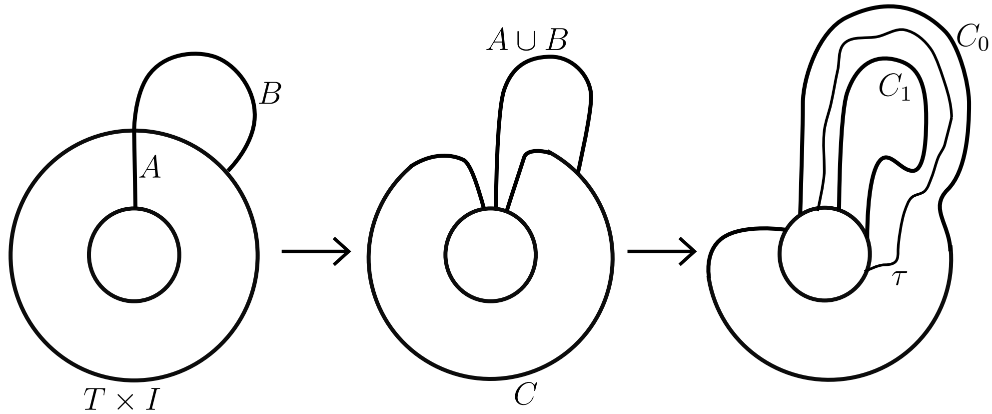


Figura 3.1: Obteniendo los anillos paralelos C_0 y C_1

suponer que ρ_0 es un arco esencial de C_0 y ρ_1 se encuentra sobre ∂H. Además $E \cap C_0 = \rho_0$ y $E \cap C_1 = \emptyset$. El disco E debe estar en $H' = C_0 \times I - \operatorname{int} N(\tau)$, de otra manera C_0 sería $\partial-$compresible en M. Observe que H' es un cubo con asas, ya que es una de las componentes que se obtiene cuando cortamos H a lo largo de $C_0 \cup C_1$. Tomamos dos copias paralelas de E, las unimos por el disco $\overline{C_0 - N(E)}$ y empujamos el interior del disco resultante hacia el interior de H'. Obtenemos un disco E', propiamente encajado en H', cuya frontera es disjunta de $C_0 \cup C_1$. Note que $\partial E'$ es una curva no trivial en $\partial H'$.

Sean ξ_0 y ξ_1 las ánimas de los anillos C_0 y C_1 respectivamente. Observe que E' es un disco de compresión para $\partial H' - (\xi_0 \cup \xi_1)$. Sea J un meridiano de τ, es decir, una curva en $\partial N(\tau)$ la cual es frontera de un disco en $N(\tau)$ que se interseca con τ en un punto. Note que $C_0 \times I$ es la variedad obtenida al añadir una 2-asa a H' a lo largo de J. Entonces existe un disco de compresión E'' en $C_0 \times I$ el cual se interseca con $\xi_0 \cup \xi_1$ en dos puntos, es decir, E'' es un disco de 2-compresión para $\partial(C_0 \times I)$ con respecto a $\xi_0 \cup \xi_1$, como se define en [16]. Entonces, por el Teorema 3.2, existe un disco de compresión F para H' disjunto de J, el cual interseca $\xi_0 \cup \xi_1$ en a lo más dos puntos. Como ∂F es disjunto de J, podemos suponer que ∂F se encuentra en $\partial(C_0 \times I)$.

Existen dos posibilidades para F: que ∂F sea un meridiano de $C_0 \times I$ que se interseca con cada ξ_i una vez, o bien que ∂F sea una curva trivial en $\partial(C_0 \times I)$ que se interseca con ξ_0 o con ξ_1 dos veces. En el último caso ∂F es frontera de un disco F' en $\partial(C_0 \times I)$, tal que $F \cup F'$ es frontera de una 3-bola que debe contener a τ. Entonces existe otro disco de 2-compresión para $C_0 \times I$ el cual es un meridiano de $C_0 \times I$. En cualquier caso se deduce que existe un disco meridiano F de $C_0 \times I$, disjunto de $N(\tau)$. Si cortamos H' a lo largo de este disco obtenemos un toro sólido. Sin embargo, al cortar $C_0 \times I$ a lo largo de F, obtenemos una 3-bola que contiene a τ y entonces τ debe ser un arco desanudado en la 3-bola. Esto muestra que τ es un arco paralelo a un arco sobre C_0, y entonces k_1 y k_2 son arcos rectos paralelos en $T \times I$.

$\square$

Capítulo 4

Nudos y toros meridionales esenciales.

En este capítulo daremos la prueba del Teorema 2.7. En la primera sección consideramos el caso cuando el toro meridional esencial $\bar{S}$ se interseca con el túnel y en la segunda sección consideramos el caso cuando $\bar{S}$ y el túnel no se intersecan.

4.1. $\bar{S}$ se interseca con el túnel.

Proposición 4.1. *Sea k un nudo con número de túnel uno, $\bar{S}$ un toro meridional esencial que se interseca con el nudo en dos puntos y $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ un túnel de desanudamiento para k, donde τ_1 es una curva simple cerrada y τ_2 es un arco que conecta τ_1 y $\partial N(k)$. Supongamos que $\bar{S}$ y τ no se pueden hacer disjuntos. Entonces se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1. *τ_1 es un nudo trivial o*

2. *existe un toro meridional esencial $\bar{S}'$ que se interseca con el nudo en dos puntos y tal que $\bar{S}' \cap \tau = \emptyset$ y tal que $\bar{S}'$ es frontera de un toro sólido con τ_1 como su ánima.*

Demostración. Sean k y $\bar{S}$ como en el enunciado de la proposición. Así $S = \bar{S} \cap E(k)$ es una superficie meridional esencial en $E(k)$ cuya frontera consiste en dos meridianos de k. Sea τ un túnel de desanudamiento para k tal que τ puede deslizarse sobre sí mismo; en este caso puede expresarse como $\tau =$

$\tau_1 \cup \tau_2$, donde τ_1 es una curva simple cerrada y τ_2 es un arco que conecta τ_1 con $\partial N(k)$. Sea ν el punto de intersección entre τ_1 y τ_2. Podemos suponer que S y τ se intersecan transversalmente en un número finito de puntos, esto es $S \cap \tau_1$ consta de n puntos y $S \cap \tau_2$ consta de m puntos, $n + m > 0$ y que esta intersección es mínima.

Etiquetamos con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ los discos de intersección entre S y $N(\tau_1)$, etiquetados en orden como ocurren las intersecciones con S, empezando en ν, con una elección arbitraria de la dirección. Etiquetamos con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ los discos de intersección entre S y $N(\tau_2)$, etiquetados en orden como ocurren las intersecciones con S, comenzando en ν hacia $\partial N(k)$; así β_m es la curva más cercana a $\partial N(k)$ (Figura 4.1). Sean s_1 y s_2 los discos de intersección entre $N(k)$ y $\bar{S}$.

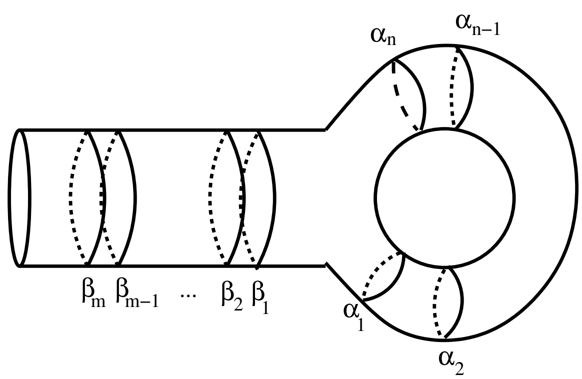


Figura 4.1: $N(\tau_1 \cup \tau_2)$

Sea $M = S^3 - \operatorname{int} N(k \cup \tau)$; tenemos que M es un cubo con asas de género dos. Sea $\tilde{S} = S \cap M$.

Lema 4.2. *$\tilde{S}$ es incompresible en M.*

Demostración. Supongamos que $\tilde{S}$ es compresible, entonces existe un disco de compresión E para $\tilde{S}$, tal que ∂E es frontera de un disco E' en S, pues S es incompresible en $E(k)$ y E' se debe intersecar con τ. Intercambiando E' por E obtenemos una superficie S' isotópica a S; esta superficie S' tiene menos intersecciones con τ, pero esto no es posible ya que la intersección de S y τ es mínima. $\square$

Sea D un disco de compresión de M. Supongamos que D se ha isotopado para que se interseque con $\tilde{S}$ transversalmente, supongamos también que la intersección es mínima entre todos los discos de compresión para M. Estudiamos la intersección entre D y $\tilde{S}$; por posición general podemos suponer que ésta consiste en arcos y curvas simples cerradas.

Sea γ una curva de intersección que es de más adentro en D; entonces γ es frontera de un disco D'; como $\tilde{S}$ es incompresible se sigue que γ es una curva trivial en $\tilde{S}$, la cual es frontera de un disco D'' en $\tilde{S}$. La unión $D' \cup D''$ es frontera de una 3-bola; isotopando $\tilde{S}$ eliminamos γ de la intersección $\tilde{S} \cap D$. Continuando así podemos eliminar todas las curvas de intersección entre D y $\tilde{S}$. Entonces $D \cap \tilde{S}$ consiste en una colección de arcos. Note que cualquier arco de intersección no es ∂-paralelo en $\tilde{S}$, de otra manera, si un arco δ en $\tilde{S}$ es ∂-paralelo, entonces, cortando D con el disco determinado por δ en $\tilde{S}$, obtenemos un disco de compresión para M con menos intersecciones con $\tilde{S}$, una contradicción.

Etiquetamos los extremos de los arcos de intersección en D con las etiquetas de los discos de $S \cap N(\tau)$ o la etiqueta de la componente de ∂S en la cual se encuentran los extremos del arco. Parte de la demostración del siguiente lema es similar a la Proposición 2.3 en [4], incluimos aquí una prueba más detallada.

Lema 4.3. *El número n es 0. Además, si δ es cualquier arco de intersección entre D y $\tilde{S}$, el cual es de más afuera en D, entonces ambos extremos de δ tienen etiquetas β_1 y el arco γ de ∂D, determinado por dicho arco de más afuera, se enrolla al menos una vez alrededor de $N(\tau_1)$.*

Demostración. Sea δ un arco de más afuera en D y sea $D' \subset D$ el disco que obtenemos al cortar por la curva δ, con $D' \cap \tilde{S} = \delta$ y $\partial D' = \delta \cup \gamma$ donde γ es un arco sobre $\partial N(k \cup \tau)$.

Existen varios casos posibles para δ.

Caso 1. Un extremo de δ tiene etiqueta α_i y el otro α_{i+1}, $1 \leq i < n$ (o β_j y β_{j+1}, $1 \leq j < m$) y γ es disjunto de $N(\nu)$ y de $\partial N(k)$.

En este caso la superficie S se puede empujar a lo largo de D'; con esto eliminamos α_i y α_{i+1}.

Caso 2. Un extremo de δ tiene etiqueta α_1 y el otro α_n, $n \neq 1$.

Supongamos que γ se interseca ya sea con $\partial N(k)$ o con $N(\nu)$; de otra manera sería un caso especial del Caso 1, cuando $n = 2$.

Si $m \neq 0$, empujamos S a través de D'; con esto α_1 y α_n forman una nueva β_1 y esto reduce $m + n$.

Si $m = 0$ y γ no se interseca con $\partial N(k)$, entonces empujamos S como antes, creando una nueva curva β_1. Si γ se interseca con $\partial N(k)$, primero deslizamos τ_1 sobre τ_2, luego deslizamos τ_1 sobre $\partial N(k)$ y luego deslizamos otra vez sobre τ_2 siguiendo γ, sin introducir nuevas intersecciones con S. Así D' se transforma en un disco como en el caso anterior, donde $m = 0$ y $\partial D' \cap \partial N(k) = \emptyset$

Caso 3. Ambos extremos de δ tienen etiqueta α_1 (o ambos están etiquetados con α_n).

Note que ambos extremos de γ están de un mismo lado de α_1, ya que $\tilde{S}$ es una superficie de dos lados. Primero suponemos que $m \neq 0$. Isotopamos γ para que esté completamente contenida en $N(\tau_1)$. Si γ no se interseca con $N(\nu)$, entonces la intersección entre ∂D y $\tilde{S}$ no es mínima.

Si γ se interseca con $N(\nu)$, entonces encontramos un disco E en $N(\tau_1 \cup \tau_2)$ tal que E se interseca con τ_1 una vez y no interseca a τ_2, y $\partial E = \gamma \cup \alpha'_1$, donde α'_1 es un subarco de α_1. Sea $E' = E \cup D'$, entonces $E' \cap S = \partial E' = \delta \cup \alpha'_1$. Como E' está contendido en $E(k)$ y S es incompresible, $\partial E'$ es frontera de un disco E'' en S. Tenemos dos casos, dependiendo si α_1 está o no contenido en E''. En cualquier caso, debe haber al menos una intersección de τ con E'', distinta de α_1, de otro modo el arco δ en $\tilde{S}$ sería ∂-paralelo. Intercambiando E' por E'' obtenemos una superficie S' isotópica a S. Supongamos, primero, que α_1 no está contenido en E''. Como E' se interseca con τ una vez y E'' se interseca con τ al menos una vez, la nueva superficie tiene a lo más tantas intersecciones con τ como S. Note que $S' \cap N(\tau)$ contiene al disco $E \cup \alpha_1$, el cual se interseca con τ en dos puntos. Entonces, isotopando S', el disco $E \cup \alpha_1$ se convierte en una nueva β_1 y se interseca con τ solamente en un punto. Así, S' tiene menos intersecciones con τ que S, lo cual es una contradicción. Ahora supongamos que α_1 está contenido en E''. En este caso E'' se interseca con τ en al menos dos puntos y E' se interseca con τ solamente en un punto. Así, S' tiene menos intersecciones con τ que S. En este caso la intersección de S' con $N(\tau)$ contiene al disco E. Entonces, estamos eliminando α_1 y alguna otra curva α_i o β_j y obtenemos una nueva curva α_n.

Supongamos ahora que $m = 0$. Si podemos isotopar γ de manera que esté contenida en $N(\tau)$, entonces la prueba es como en el caso anterior. De otra manera, un subarco de γ está contenido en $\partial N(k)$ y no se interseca con ∂S. Deslizamos τ_1 sobre τ_2, para obtener un arco τ propiamente encajado en $E(k)$. Esto lo podemos hacer siguiendo γ de manera que no se crean nuevas intersecciones entre $\tilde{S}$ y D. Existe un disco E contenido en $N(k \cup \tau)$,

$\partial E = \gamma \cup \alpha_1'$, donde α_1' es un subarco de α_1 y tal que E se interseca con k una vez. Sea $E' = E \cup D'$, entonces $E' \cap S = \partial E' = \delta \cup \alpha_1'$. Como E' se interseca una vez con k y S es meridionalmente incompresible, $\partial E'$ es frontera de un disco F en $\bar{S}$ el cual se interseca con k en un punto; digamos que interseca a $N(k)$ en s_1. Entonces $E' \cup F$ es una esfera que es frontera de una bola que interseca k en un arco desanudado, ya que k es un nudo primo. Sea $\bar{S}' = (\bar{S} - F) \cup E'$; ésta es una superficie que se interseca con k en dos puntos, tal que la superficie meridional correspondiente $S' = \bar{S}' \cap E(k)$ es isotópica a S. Al isotopar ligeramente el túnel τ, vemos que S' tiene menos intersecciones con τ que S, ya que al menos eliminamos α_1, pero esto es una contradicción.

Caso 4. Los dos extremos de δ tienen etiqueta β_m (y si $m = 1$, supongamos que γ está sobre el lado de β_1 más cercano a $\partial N(k)$).

Si podemos isotopar γ sobre ∂M de modo que esté contenido en $N(\tau)$, entonces la intersección entre ∂D y $\tilde{S}$ no es mínima. De otra manera, un subarco de γ está contenido en $\partial N(k)$ y no se interseca con ∂S. La prueba ahora es idéntica a la del Caso 3 cuando $m = 0$, con β_m en lugar de α_1.

Caso 5. Un extremo de δ tiene etiqueta α_1, α_n o β_m y la etiqueta del otro extremo es s_i, con $i = 1, 2$.

Supongamos primero que un extremo de δ tiene etiqueta α_1 (o α_n); note que en este caso $m = 0$. Deslizamos τ_1 sobre τ_2, siguiendo γ y sin introducir nuevas intersecciones entre S y τ, hasta que τ sea un arco propiamente encajado en $E(k)$. Ahora empujamos τ a través de D'; con esto se elimina el disco de intersección α_1. Si un extremo de δ tiene etiqueta β_m, entonces empujamos τ como antes para eliminar β_m.

Caso 6. Un extremo de δ tiene etiqueta s_1 y la etiqueta del otro extremo es s_2.

Como $m + n \neq 0$, γ se puede hacer disjunta de $\partial N(\tau)$ deslizando τ, si es necesario. Esto implica que S es ∂-compresible; lo cual es una contradicción.

Caso 7. Los dos extremos de δ tienen etiqueta s_i, con $i = 1, 2$.

Podemos suponer que γ no se interseca con $\partial N(\tau)$. Como S es ∂-incompresible, obtenemos un disco E de S al cortar por δ; este disco puede contener α's y β's. Note que $\partial E = \delta \cup s_i'$, donde s_i' es un subarco de s_i. Entonces, al pegar $D' \cup E$ a lo largo de δ se forma un disco con frontera en $N(k)$ y también es frontera de un disco E' en $\partial N(k)$ ya que $\partial N(k)$ es incompresible en $E(k)$. Note que E' debe intersecar a τ, de otra manera D se puede isotopar a lo largo de E' para reducir el número de intersecciones entre ∂D y S, lo cual no es posible. Así, $D' \cup E \cup E'$ es frontera de una 3-bola en $E(k)$. Como τ interseca E', también debe intersecar E en al menos un punto. Ahora cambiamos E con D', para obtener una superficie esencial S' isotópica a S en $E(k)$ y con menos intersecciones con τ. Note que una componente frontera de S' es $\gamma \cup s_i''$, donde s_i'' es el otro subarco de s_i, y de hecho $\gamma \cup s_i''$ es un meridiano de $N(k)$.

Caso 8. Un extremo de δ tiene etiqueta β_1 y la etiqueta del otro extremo es α_1 (o α_n).

En este caso empujamos la superficie S a través de D', con esto α_1 y β_1 forman una curva paralela a α_n y esto reduce $m+n$.

Caso 9. Ambos extremos de δ tienen etiqueta β_1 y el arco δ se puede isotopar sobre $N(\tau_2) \cup N(\nu)$.

Si γ es disjunto de $N(\nu)$, entonces la intersección entre ∂D y $\tilde{S}$ no es mínima. Si γ se interseca con $N(\nu)$, entonces se puede colocar de manera que γ se interseque con $N(\tau_2)$ en dos arcos. Existe un disco E contenido en $N(\tau)$ tal que $\partial E = \gamma \cup \beta_1'$, donde β_1' es un subarco de β_1. Sea $E' = D' \cup E$, entonces $\partial E' = \delta \cup \beta_1'$ está contenido en S y, como S es incompressible, $\partial E'$ es frontera de un disco D'' en S. Podemos elegir los discos E y D'' de modo que τ_2 se interseque con D'' en un punto correspondiente a β_1 y que τ se interseque con E' en un solo punto. El disco D'' se interseca necesariamente con τ en más puntos, de otra manera el arco δ seria ∂-paralelo en $\tilde{S}$. Intercambiando D'' con E' obtenemos una superficie S' isotópica a S, tal que $m'+n' < m+n$, donde n' y m' son las intersecciones transversales de S' con τ_1 y τ_2, respectivamente.

Hasta ahora el único caso que falta considerar para el arco δ, es cuando los extremos de δ tienen etiqueta β_1 y el arco γ no se puede isotopar a $N(\tau_2) \cup N(\nu)$, es decir, γ da una o más vueltas alrededor de $N(\tau_1)$; pero esto sólo es posible cuando $n = 0$; es decir, cuando S se interseca con el túnel solamente en el arco τ_2. □

Lema 4.4. *Existe una colección de m arcos, digamos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ en $D \cap \tilde{S}$ los cuales son paralelos en D y δ_1 es un arco de más afuera en D.*

Demostración. $D \cap \tilde{S}$ consiste en una colección de arcos en D. Construimos un árbol en D como sigue. Asignamos un punto, o sea un vértice, por cada región de $D - \tilde{S}$ y conectamos dos vértices si sus regiones respectivas son adyacentes, es decir, si tienen un arco de $D \cap \tilde{S}$ en común. La gráfica resultante G es un árbol, ya que D es un disco. Los extremos del árbol, o sea los vértices de grado uno, corresponden a las regiones de más afuera en D. En la Figura 4.2 se muestra un ejemplo de un árbol en D.

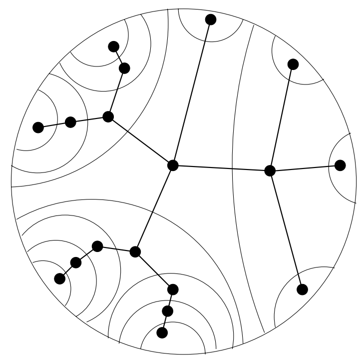


Figura 4.2: Ejemplo de un árbol en D.

Una rama de G es una trayectoria que empieza en un extremo de G y termina en un vértice de grado mayor que 2, tal que todos los vértices intermedios de la rama son de grado 2. Si todos los vértices de G son de grado 1 o 2, es decir, si G es una trayectoria, entonces todos los arcos son paralelos y hay al menos $2m$ de tales arcos. En otro caso, sea G' la gráfica obtenida al eliminar las ramas; esto es, quitamos los vértices de grado 1 y 2 de las ramas y las aristas correspondientes. Sea V un vértice de grado 1 de G' (si no hay vértices de grado 1, sea V el único vértice de G'). Entonces llegan a V al menos dos ramas, digamos que r_1 y r_2 son dos ramas adyacentes que llegan a V. Sean η_1 y η_2 los arcos de más afuera correspondientes a r_1 y r_2, respectivamente. Los extremos de η_1 y η_2 tienen etiquetas β_1 y β_1, por el Lema 4.3. Sea φ un arco de ∂D que va de un extremo de η_1 a un extremo de η_2. Entonces φ debe cruzar las etiquetas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \beta_m, \beta_{m-1}, \ldots, \beta_2, \beta_1$ y, tal vez, más etiquetas entre β_m y β_m. Cualquier arco de intersección que tenga estas etiquetas corresponde a una arista de r_1 o de r_2, por la elección de las ramas. Esto implica que $r_1 \cup r_2$ tiene al menos $2m$ aristas y entonces al menos una de las ramas tiene m o más aristas correspondientes a m arcos paralelos.

$\square$

Etiquetamos con i a los extremos de δ_i para $1 \leq i \leq m$. Sea E_1 el disco de más afuera en D delimitado por δ_1. Sea β_0 una curva sobre $\partial N(\tau_2)$, paralela a β_1, que es frontera de un disco en $N(\tau)$ y que interseca a τ solamente en el punto ν. Podemos isotopar $E_1 \cap \partial N(\tau)$ para que se interseque con β_0 en dos puntos esto divide a $E_1 \cap \partial N(\tau)$ en tres arcos, digamos γ_1, ρ_1 y δ_0; donde γ_1, ρ_1 están en $\partial N(\tau_2)$ y δ_0 está en $\partial N(\tau_1)$.

Sean γ_i y ρ_i los arcos en ∂D con extremos en $i-1$ e i. Los arcos γ_i y ρ_i están contenidos en $\partial N(\tau_2)$ y descomponen a β_i en dos arcos, llamamos a estos β_i^1 y β_i^2, para $0 \leq i \leq m$ (Ver Figura 4.3). Así $\beta_i^1, \beta_{i-1}^1, \gamma_i$ y ρ_i, para $1 \leq i \leq m$, forman un disco en $\partial N(\tau_2)$, que llamamos C_i. También $\beta_i^2, \beta_{i-1}^2, \gamma_i$ y ρ_i forman un disco en $\partial N(\tau_2)$, que llamamos C_i'. Sean $E_i \subset D$ los discos formados por δ_i, δ_{i-1}, ρ_i y γ_i, para $2 \leq i \leq m$ (Ver Figura 4.4).

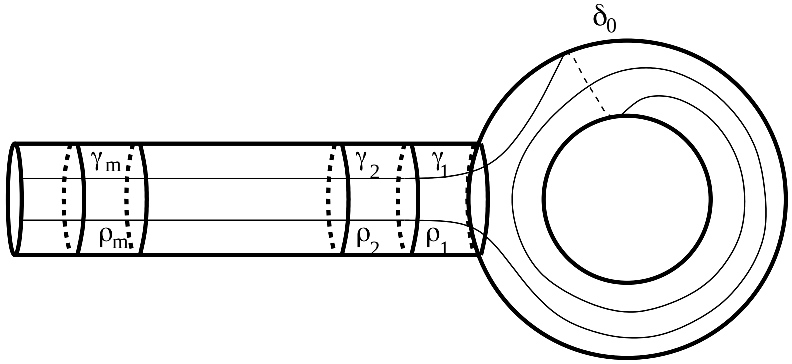


Figura 4.3:

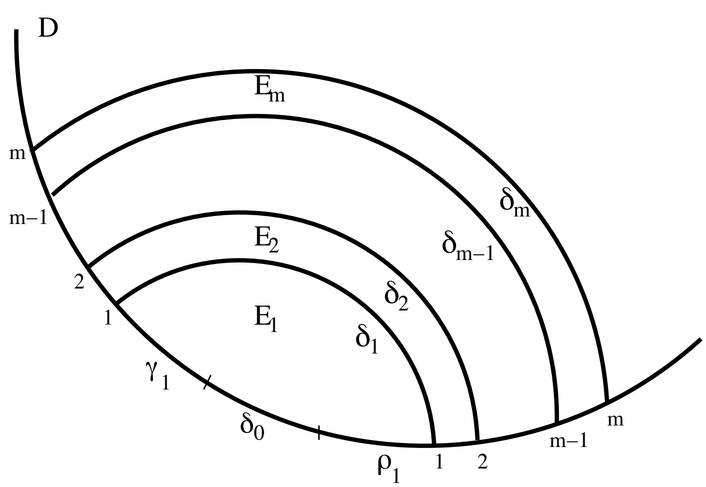


Figura 4.4:

Lema 4.5. *Existe un anillo A con interior disjunto de S, tal que una de sus componentes frontera es $\delta_1 \cup \beta_1^1 \subset S$ y la otra es $\delta_0 \cup \beta_0^1 \subset \partial N(\tau_1)$, con alguna pendiente p/q y $q \geq 2$*

Demostración. Notemos que $E_1 \cup C_1$ es un anillo A con una de sus componentes frontera $\delta_1 \cup \beta_1^1 \subset S$ y la otra componente frontera es $\delta_0 \cup \beta_0^1$, la cual está contenida en $\partial N(\tau_1)$, con alguna pendiente p/q. Si $q = 1$; es decir, $\delta_0 \cup \beta_0^1$ sólo da una vuelta alrededor de $N(\tau_1)$, entonces τ_1 es isotópico a la curva $\delta_1 \cup \beta_1^1$ sobre S, por lo que podemos empujar el túnel a través de S, usando el anillo A y eliminando una intersección con S, o sea, la correspondiente a β_1. Así $q \geq 2$. □

Como $\bar{S}$ es un toro en S^3, es frontera de un toro sólido R. Tenemos dos casos, dependiendo si τ_1 está contenido en R o no.

Caso 1. Supongamos que τ_1 no está contenido en R.

En este caso el interior del anillo A es disjunto de R. Una componente frontera de A se encuentra en $\partial N(\tau)$, y la otra en $\partial R = \bar{S}$.

Lema 4.6. *El ánima de R es un cable alrededor de τ_1 y ∂A es una longitud de R, o bien, el ánima de R y τ_1 forman un enlace de Hopf.*

Demostración. Por el Lema 4.5, la componente de ∂A en $N(\tau_1)$ es una curva con pendiente p/q, y $q \geq 2$. Si la componente de ∂A en R es también una curva con pendiente r/s, y $s \geq 2$, entonces la única posibilidad es que τ_1 y el ánima de R formen un enlace de Hopf, por el Teorema $1(iv)$ de [8]. De otra manera, la pendiente de ∂A en R es longitudinal; en este caso el ánima de R es un cable alrededor de τ_1. □

Si τ_1 y el ánima de R forman un enlace de Hopf, entonces τ_1 es un nudo trivial, y hemos terminado.

Lema 4.7. *Supongamos que el ánima de R es un cable alrededor de τ_1 y ∂A es una longitud de R, entonces $m = 1$.*

Demostración. Suponemos que $m \geq 2$ y consideremos el anillo $F = E_2 \cup C_2$, donde E_2 y C_2 están pegados a lo largo de γ_2 y ρ_2 y cuya frontera está en S. Tenemos que $F \subset R$, y ∂F consiste en dos longitudes de R, una de sus componentes frontera es $\delta_1 \cup \beta_1$, la cual esta contenida en ∂A. El anillo F divide R en dos toros sólidos, sólo uno de ellos se interseca con el nudo y podemos empujar el arco τ_2 por el otro toro sólido para eliminar al menos dos intersecciones con él, lo cual es una contradicción. $\square$

Supongamos entonces que $S \cap \tau_2$ es un punto. Sea $N(A)$ una vecindad de A tal que $z_1 = N(A) \cap R$ es una vecindad de $\delta_1 \cup \beta_1^1$ en S y $N(A) \cap N(\tau_1)$ es una vecindad de $\delta_0 \cup \beta_0^1$ en $\partial N(\tau_1)$. Podemos suponer que $N(A)$ y k son ajenos. Sea $W = R \cup N(A) \cup N(\tau_1)$. Entonces W es un toro sólido y τ_1 es un ánima de W. Sea $T_1 = \partial W$; ésta superficie es un toro que interseca a k en dos puntos.

Lema 4.8. *La superficie agujereada $T_1 - k$ es incompresible en $S^3 - k$, o bien τ_1 es un nudo trivial.*

Demostración. Primero probaremos que $T_1 - k$ es incompresible en $W - k$. Note que z_1 es un anillo propiamente encajado en W, con pendiente p/q, tal que no se interseca con el nudo k. Supongamos que Q es un disco de compresión para $T_1 - k$. Entonces $Q \cap z_1$ consiste en curvas simples cerradas y arcos. Las curvas simples cerradas las podemos eliminar porque z_1 es esencial en W. Luego, tomamos un arco η de más afuera en Q. Si η es trivial en z_1, entonces podemos isotopar Q para eliminar intersecciones con este anillo. Si η es esencial en z_1, entonces el disco de más afuera determinado por z_1 en Q está contenido en R, pues $q \geq 2$. Esto implica que S es compresible en $R - k$, lo cual no es posible.

Si $T_1 - k$ es compresible en $S^3 - \operatorname{int} W$ tenemos dos casos, que la frontera de un disco de compresión Q sea esencial en el toro T_1, o bien que sea trivial en dicho toro.

Si la curva ∂Q es esencial en T_1, tenemos que el toro sólido W no está anudado; entonces τ_1 es un nudo trivial.

Si la curva ∂Q es trivial en T_1, entonces es frontera de un disco $Q' \subset T_1$ que se interseca con k en dos puntos. Si W no está anudado, entonces τ_1 es un nudo trivial. Supongamos que W está anudado; intercambiando Q' por Q, tenemos un toro más grande T_1', paralelo a T_1 y tal que no toca al nudo. El toro T_1' es incompresible en $S^3 - \operatorname{int} N(k \cup \tau)$, pues es frontera de un toro sólido anudado y τ_1 es un ánima de W, pero esto no puede suceder ya que $S^3 - \operatorname{int} N(k \cup \tau)$ es un cubo con asas. $\square$

En este caso concluimos que τ_1 es un nudo trivial, o bien existe otro toro meridional esencial que se interseca con k en dos puntos, es ajeno de τ y tal que τ_1 es un ánima del toro sólido que tiene como frontera a T_1.

Caso 2. Supongamos que τ_1 está contenido en R. En este caso τ_1 es un ánima de R.

Lema 4.9. *$m = 1$, o bien τ_1 es un nudo trivial.*

Demostración. Supongamos que $m \geq 2$. Sea F_2 definido como antes, $F_2 = E_2 \cup C_2$, donde E_2 y C_2 están pegados a lo largo de γ_2 y ρ_2 y cuya frontera está en S. Ahora tenemos que F_2 no está contenido en R. ∂F_2 consiste en dos curvas en ∂R, con pendiente p/q y $q \geq 2$. Es decir, F_2 es un anillo en el exterior de R y, como la pendiente de su frontera es no entera, se tiene que F_2 es paralelo a un anillo $G_2 \subset \partial R$. Si k no está en la región cuya frontera es $F_2 \cup G_2$, podemos eliminar dos intersecciones con τ, empujando τ_2 a través del toro sólido cuya frontera es $F_2 \cup G_2$. Supongamos entonces que k se encuentra en tal región. Considere cualquier otro de los anillos F_i definido como antes, $F_i = E_i \cup C_i$, donde E_i y C_i están pegados a lo largo de γ_i y ρ_i, con su frontera situada sobre S. Supongamos que F_i no está contenida en R. De nuevo, F_i es paralelo a un anillo $G_i \subset \partial R$ y k debe estar contenido en la región cuya frontera es $F_i \cup G_i$. Esto muestra que F_2 y F_i deben ser paralelos. (Ver Figura 4.5)

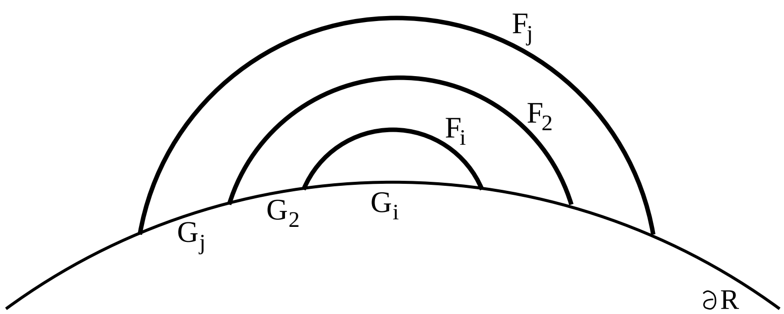


Figura 4.5: Anillos paralelos

Sea F_j el anillo no contenido en R, que delimita una region paralela máxima entre F_j y G_j. Sea $T = (\partial R - G_j) \cup F_j$. Empujando T levemente, tenemos que $T \cap \tau = \emptyset$, y $T \cap k = \emptyset$. El toro T es frontera de un toro sólido R' con τ_1 como su ánima. Si τ_1 no es el nudo trivial, entonces T es incompresible en $S^3 - N(k \cup \tau)$, lo cual no es posible ya que $S^3 - N(k \cup \tau)$ es un cubo con asas. Entonces τ_1 es un nudo trivial. $\square$

Supongamos, ahora, que $m = 1$. Recordemos que D denota a un disco meridiano de $S^3 - \operatorname{int} N(k \cup \tau)$. Por el Lema 4.3, tenemos que $n = 0$, y podemos suponer que la intersección del disco D con S consta de colecciones de arcos en D, donde los arcos de más afuera tienen extremos en β_1.

Construimos un árbol en D como en la prueba del Lema 4.4. Consideramos la gráfica que se obtiene al cortar los vértices de más afuera y en la nueva gráfica elegimos uno de los vértices de más afuera. Estudiaremos, ahora, la región F asociada con estos vértices. Ésta es un disco cuya frontera es una unión de arcos de intersección, donde todos los arcos son de más afuera, excepto a lo mucho uno, al cual denotaremos por λ.

Los arcos de más afuera tienen extremos en β_1 y los extremos $\{a, b\}$ del arco λ son una de las parejas en el conjunto $\{\{s_1, s_2\}, \{s_i, s_i\}, \{s_i, \beta_1\}, \{\beta_1, \beta_1\}\}$, con $i = 1$ ó 2. (Figura 4.6)

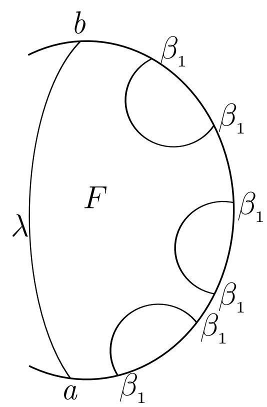


Figura 4.6:

Caso 1. El arco λ en la región F tiene extremos en $\{s_1, s_2\}$.

El arco λ conecta s_1 con s_2. Sea γ un arco en $\partial N(k)$, situado en la parte de $N(k)$ que se encuentra en el toro sólido R, tal que $\partial\gamma = \partial\lambda$. Sea L el enlace formado por τ_1 y $\gamma \cup \lambda$. Note que $\lambda \subset \partial R$ y que el interior de γ está en el interior de R. Mostraremos que L es un enlace con número de túnel uno. Sea k' el arco de k que se encuentra en el exterior de R. Sea k^i un arco en $\partial N(k')$ que conecta s_i y el punto $\tau_2 \cap N(k')$, $i = 1, 2$. Supongamos que $N(k') = N(k^1) \cup N(k^2)$. Un túnel de desanudamiento $\hat{\tau}$ para L está formado por la unión de τ_2 y k^1. Sea F' el disco en D que obtenemos al cortar por λ y que contiene a F. Note que $\partial F' = \lambda \cup \rho$, donde

ρ es un arco en $N(k') \cup N(\tau)$, además $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3$, con $\rho_1 \subset \partial N(k^1)$ y $\rho_3 \subset \partial N(k^2)$, ver Figura 4.7. Resbalamos λ a lo largo de $\hat{\tau}$, siguiendo ρ, primero resbalamos λ sobre $N(k^1)$, luego deslizamos λ sobre $N(\tau_2)$, luego deslizamos λ sobre $N(\tau_1)$, y así sucesivamente. Hacemos esto siguiendo $\partial F'$, hasta llegar al punto $\rho_2 \cap \rho_3$. Ahora empujamos el arco anterior (equivalente a $\lambda \cup \rho_1 \cup \rho_2$) a través de F', deformándolo en ρ_3. Vemos que una vecindad del complejo $L \cup \hat{\tau} = \lambda \cup \gamma \cup k^1 \cup \tau_2 \cup \tau_1$ se deforma en una vecindad del complejo $k^2 \cup k^1 \cup \gamma \cup \tau_2 \cup \tau_1 = k \cup \tau$. Esto prueba que $\hat{\tau}$ es un túnel para L.

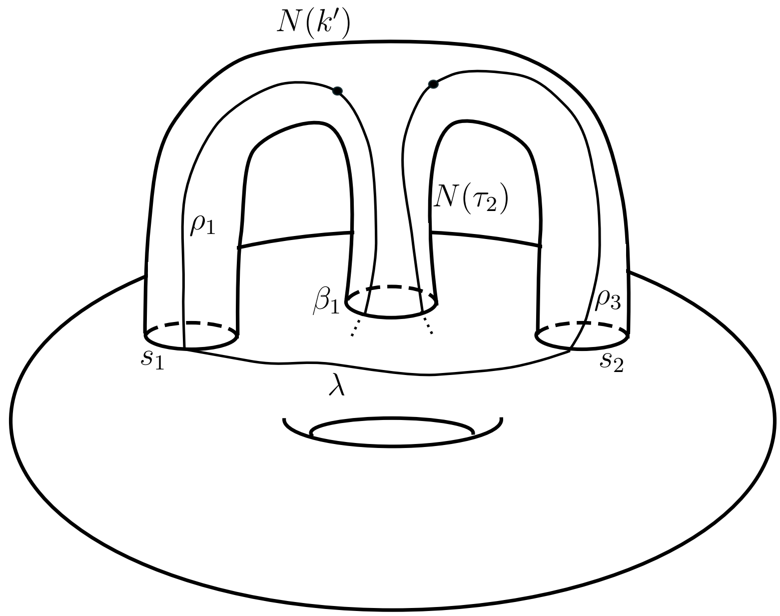


Figura 4.7: $\partial F'$

Podemos isotopar el enlace L sobre R, ya que $\lambda \subset \partial R$ y el interior de γ se encuentra dentro de R. Este enlace tiene número de túnel uno y no se interseca con $\bar{S}$. Por la clasificación de enlaces con número de túnel uno y cuyo complemento contiene un toro incompresible, [8], tenemos que τ es un nudo trivial, y en ese caso hemos terminado.

En los siguientes casos supongamos que el arco τ_2 es muy corto, esto es, isotopamos τ_2 hasta que esté casi contenido en la frontera del toro sólido R. Sea R' el toro sólido $R' = R \cup N(\tau_2)$ y sea $S' = \partial R'$. Note que S' se interseca con k en cuatro puntos y entonces existen dos arcos de k en el complemento de R', digamos k_1 y k_2, donde k_i es el arco con un extremo en s_i, con $i = 1, 2$.

Caso 2. El arco λ en la región F tiene extremos en $\{s_1, s_1\}$.

Consideremos el arco λ en S, que conecta s_1 con s_1. En S tenemos una colección de arcos con extremos en β_1, que corresponden a los arcos de más afuera determinados por F. Estos arcos son paralelos en S, pues cada disco de más afuera determina un anillo con frontera en $\bar{S}$ y $\partial N(\tau_1)$, como en el Lema 4.5. Además, la frontera de cada uno de estos anillos en $\bar{S}$ es una curva de pendiente p/q, con $q \geq 2$. Como el arco λ es disjunto de estas curvas, tenemos dos posibilidades para este arco. Que sea frontera de un disco o un disco agujereado D' en S, o bien, que junto con un subarco de s_1 sea una curva de pendiente p/q en S.

Si λ es frontera de un disco D', entonces existe un arco de intersección entre S y D, que es trivial y de más afuera en S. Esto es claro si s_2 no está contenido en D'. Si s_2 está contenido en D', entonces existe un arco trivial con extremos en s_2, ya que ∂D interseca s_1 y s_2 en el mismo número de puntos, pero esto no es posible.

Tenemos entonces que λ junto con un subarco de s_1 es una curva de pendiente p/q en S. Podemos considerar a F como un disco cuya frontera consiste en el arco λ, dos arcos μ_1 y μ_2 en $N(k_1)$ y un arco λ' en S', ver Figura 4.8. Note que μ_1 y μ_2 son paralelos en $N(k_1)$, es decir, existe un disco G en $\partial N(k_1)$ tal que $F \cap G = \mu_1 \cup \mu_2$.

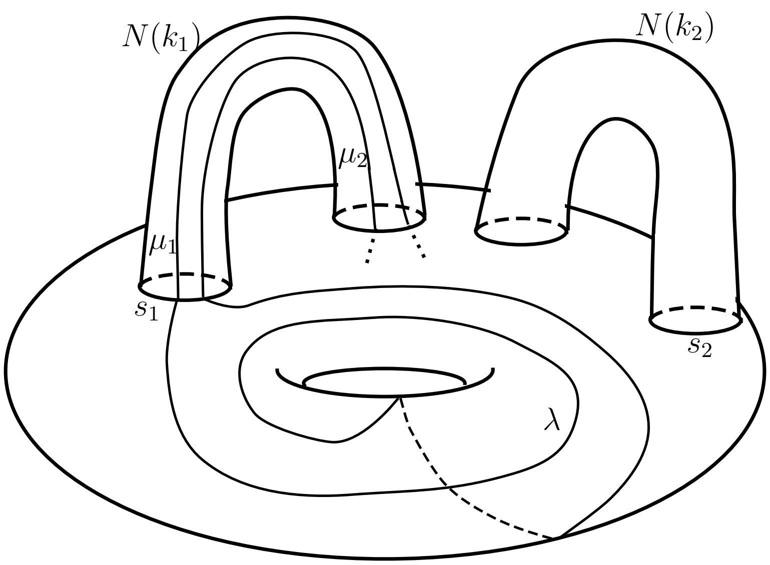


Figura 4.8: ∂F

Sea $H = F \cup G$. Esto es un anillo cuya frontera está contenida en S' y cada una de estas curvas tiene pendiente p/q. Entonces H es un anillo propiamente encajado en el exterior de R' y su frontera consiste en curvas con pendiente no entera. Luego H es paralelo a un anillo H' contenido en S', o sea, H y H' son frontera de un toro sólido. Sea $T = H \cup (S' - H')$ y empujamos ligeramente este toro para que el arco k_1 esté contenido en el interior del toro sólido cuya frontera es H y H'.

Tenemos dos posibilidades:

1) T es ajeno de k y de τ. Este caso no es posible si R está anudado, ya que T sería un toro incompresible en el cubo con asas $S^3 - N(k \cup \tau)$. Entonces, τ_1 debe ser un nudo trivial.

2) El toro T se interseca con k en dos puntos y es ajeno de τ. Afirmamos que T es incompresible en $E(k)$ o que τ_1 es un nudo trivial. Note que T y S son frontera de una región producto y cada uno de estos toros se interseca con k en dos puntos. Así T debe ser incompresible en la región que contiene a R. Supongamos que existe un disco de compresión E situado en la región que no contiene a R. Sea $\gamma = \partial E$. Tenemos dos casos: γ es esencial en T o γ es trivial en T (sin considerar las intersecciones con k).

Si γ es esencial en T, entonces T no está anudado. Así τ_1 es un nudo trivial.

Si γ es trivial en T, entonces debe ser frontera de un disco $E' \subset T$. Como γ es esencial en $T - N(k)$, E' debe contener los puntos de intersección entre k y T; entonces el arco de k está contenido en la bola cuya frontera es $E \cup E'$. Ahora, $T' = (T - E') \cup E$ es un toro que no se interseca con k ni con τ. Si T' es incompresible en $S^3 - N(k \cup \tau)$, entonces debería ser un toro incompresible en $S^3 - N(k \cup \tau)$, lo cual no puede suceder. Si T' es compresible, entonces no está anudado, así τ_1 es un nudo trivial.

Concluimos que τ_1 es un nudo trivial, o bien existe otro toro T que se interseca con k en dos puntos, es incompresible en $E(k)$, es disjunto de τ; pero tal que τ_1 es un ánima del toro sólido acotado por T.

Caso 3. El arco λ en la región F tiene extremos en $\{s_1, \beta_1\}$.

El arco λ conecta s_1 con β_1. Supongamos que ∂F consta del arco λ, un arco μ_1 en $N(k_1)$ y un arco en S'. Empujamos el arco k_1, usando el disco F, hasta que esté en una vecindad de R'. Ahora tomamos un toro más grande T, el cual no se interseca con el túnel y se interseca dos veces con k. Observamos que T es incompresible en $E(k)$ o bien que τ_1 es un nudo trivial. La prueba es similar a la del caso anterior.

Caso 4. El arco λ en la región F tiene extremos en $\{\beta_1, \beta_1\}$.

En este caso todos los arcos tienen extremos en β_1. Podemos suponer que la frontera del disco F se encuentra en el toro S'. Si ∂F no es trivial en S', el toro R' no está anudado y entonces τ_1 es un nudo trivial. Si ∂F es trivial en S', entonces, por argumentos homológicos, el arco λ debe ser paralelo en S' a los otros arcos con extremos en β_1; así existen en total un número par de arcos con extremos en β_1. Entonces F es frontera de un disco E en S'; este disco contiene los dos puntos de intersección de k con $\partial N(\tau_2)$. Entonces ambos arcos k_1 y k_2 están dentro de la 3-bola cuya frontera es $F \cup E$; intercambiando F por E, encontramos un toro más grande que no se interseca con k ni con τ. Entonces el toro no está anudado, así τ_1 es un nudo trivial.

Esto completa la prueba de la Proposición 4.1. □

4.2. $\bar{S}$ y el túnel no se intersecan.

Proposición 4.10. *Sea k un nudo con número de túnel uno, $\bar{S}$ un toro meridional esencial que se interseca con el nudo en dos puntos y $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ un túnel de desanudamiento para k, donde τ_1 es una curva simple cerrada y τ_2 es un arco que conecta τ_1 y $\partial N(k)$. Supongamos que $\bar{S} \cap \tau = \emptyset$. Entonces $\bar{S}$ es frontera de un toro sólido V y $S^3 - V$ no es toro sólido, además se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1. *τ_1 es un nudo trivial o*
2. *τ_1 es esencial en V; es decir, no está dentro de una 3-bola y no es isotópico a un ánima de V.*

Demostración. Sean k y $\bar{S}$ como en el enunciado de la Proposición. Como antes, sea $S = \bar{S} \cap E(k)$ y sea $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ un túnel de desanudamiento para k tal que $S \cap \tau = \emptyset$. La superficie $\bar{S}$ divide a S^3 en dos partes, $S^3 = V \cup W$, una de ellas es un toro sólido. Supongamos que τ está contenido en V. Sea $M = S^3 - \operatorname{int} N(k \cup \tau)$. Entonces M es un cubo con asas y S divide a M en dos cubos con asas, digamos $M = V' \cup W'$, donde $V' = V - \operatorname{int} N(k \cup \tau)$ y $W' = W - \operatorname{int} N(k)$.

Lema 4.11. *V es un toro sólido y W no es un toro sólido.*

Demostración. Supongamos que W es un toro sólido. Como W' es un cubo con asas, $\partial W'$ es compresible. Sea c la frontera de un disco meridiano de k que está en W. Note que $\partial W' - c$ es incompresible en W', de otra manera S sería compresible. Aplicando el Lema 1.9, tenemos que $W'[c]$ tiene frontera incompresible, aquí $W'[c]$ denota W' con una 2-asa pegada a lo largo de la curva c. Por otra parte $W'[c] = W$ la cual tiene frontera compresible, pero esto no es posible. Por lo tanto W no puede ser un toro sólido; entonces V es toro sólido. $\square$

Esto implica que V está anudado en S^3. Como V es un toro sólido, tenemos 3 casos:

a) τ_1 está dentro de una 3-bola en V, o

b) τ_1 es un ánima de V, o

c) τ_1 es esencial en V; esto es, los casos (a) y (b) no ocurren.

Lema 4.12. *El caso (b) no puede suceder, y si pasa el caso (a), entonces τ_1 es un nudo trivial.*

Demostración. Supongamos que sucede (a), es decir, que τ_1 esta dentro de una 3-bola B contenida en V. Entonces $k \cap V$ consiste en un arco k' propiamente encajado en V. Sea $k' = k_1 \cup k_2$, donde k_1 y k_2 son arcos tales que $k_1 \cap k_2 = k \cap \tau_2$.

Sea D un disco de compresión para M. La intersección entre S y D consiste en curvas simples cerradas y arcos; las curvas simples cerradas se pueden eliminar de manera usual, ya que $S \cap M$ es incompresible en M. Sea γ un arco de más afuera en D y sea F el disco que obtenemos al cortar por γ. Si F estuviera contenido en W', entonces sería un disco de ∂-compresión para S, lo cual no es posible, por lo que $F \subset V'$. Note que $\partial F = \gamma \cup \beta$, donde $\gamma \subset S$ y $\beta \subset N(k \cup \tau)$. Entonces $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$, donde β_1 está contenido en $\partial N(k_i)$, β_2 está contenida en $\partial N(\tau_2 \cup \tau_1)$ y β_3 está contenida en $\partial N(k_j)$.

Supongamos primero que $i \neq j$. Contraemos τ_2 sobre τ_1, de manera que podemos ver a k_1 y k_2 como arcos con uno de sus extremos en $\partial N(\tau_1)$. Entonces el arco β lo podemos expresar como $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$, donde β_1 y

β_3 son como antes y β_2 es un arco sobre $\partial N(\tau_1)$. Deslizando k_1 a lo largo de $\partial N(\tau_1)$ siguiendo β_2, vemos que k_1 y k_2 son arcos paralelos, es decir, existe un disco F' en V' tal que $\partial F' = \gamma \cup \beta_1 \cup \beta_2' \cup \beta_3$, donde β_2' es un arco en $N(\tau)$, disjunto de un meridiano de τ_1. Cortamos V' a lo largo de F para obtener un cubo con asas V'', el cual es homeomorfo a $V - N(\tau_1 \cup k'')$, donde k'' es un arco con extremos sobre S y τ_1. Esto no es posible por la Proposición 3.1.

Supongamos ahora que ambos β_1 y β_3 están contenidos en $\partial N(k_1)$. Contraemos otra vez τ_2 sobre τ_1, de manera que podemos ver a k_1 y k_2 como arcos tal que cada uno tiene un extremos en $\partial N(\tau_1)$. Existe un disco $C \subset \partial N(k_1)$ tal que $C \cup F$ es un anillo con una conponente en la frontera, digamos C_1, localizada sobre S, y la otra componenete en la frontera C_2, localizada sobre $\partial N(\tau_1)$. La curva cerrada C_2 es trivial en $\partial N(\tau_1)$ o bien es esencial.

Vamos a suponer, primero, que C_2 es trivial en $\partial N(\tau_1)$. Entonces es frontera de un disco $E \subset \partial N(\tau_1)$, el cual contiene un extremo de k_2. Si C_1 es trivial sobre S, entonces k_2 debe ser un arco paralelo a k_1 y procedemos como en el caso anterior. Si C_1 es no trivial sobre S, entonces deber ser un meridiano de S, ya que $C \cup F \cup E$ es un disco en V con frontera C_1. Tomando una copia de $C \cup F \cup E$ y empujándola para que sea disjunta de $k_1 \cup \tau_1$, obtenemos un disco cuya frontera es un meridiano de S y que se interseca con k_2 en un punto, entonces es un disco meridiano que se interseca con k en un punto. Pero esto no es posible porque S es meridionalmente incompresible.

Supongamos ahora que C_2 es esencial en $\partial N(\tau_1)$. Supongamos que el anillo $C \cup F$ y la esfera ∂B se intersecan transversalmente. Note que $\partial(C \cup F)$ es disjunto de ∂B. Sea α una curva de intersección de más adentro sobre ∂B. Si α es una curva trivial en $C \cup F$, podemos encontrar otra 3-bola que contenga a τ_1 y cuya frontera tenga menos intersecciones con $C \cup F$. Si α es esencial en $C \cup F$, entonces cortando $C \cup F$ con el disco en ∂B cuya frontera es α obtenemos un disco encajado con frontera C_2. Si C_2 no es una curva longitudinal en $\partial N(\tau_1)$, esto implica que existe un espacio lente agujereado encajado en V, lo cual no es posible. Así, C_2 debe ser una longitud de $\partial N(\tau_1)$ y, entonces, τ_1 debe ser un nudo trivial.

Supongamos ahora que sucede (b), es decir, τ_1 es un ánima de V. Como antes, sea k' el arco $k \cap V$, tal que $k' = k_1 \cup k_2$, donde k_1, k_2 son arcos con $k_1 \cap k_2 = k \cap \tau_2$. Deslizamos k_2 sobre τ_2 obteniendo dos arcos, k_1' y k_2', cada uno con un extremo sobre S y el otro extremo en τ_1. Por la Proposición 3.3, se sigue que k_1' y k_2' son una pareja de arcos rectos en el espacio producto $V - N(\tau_1)$. Deslizando de nuevo k_2' sobre k_1', vemos que k' es un arco en V que es isotópico a un arco contenido en ∂V; esto implica que S es compresible en $S^3 - k$, lo cual es una contradicción.

Entonces, τ_1 es un nudo trivial o bien sucede el caso (c), es decir, τ_1 es una curva esencial en V. □

Esto completa la prueba de la Proposición 4.10. □

4.3. Demostración del Teorema 2.7

Sea k un nudo con número de túnel uno, $\bar{S}$ un toro meridional esencial que se interseca con el nudo en dos puntos y $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ un túnel de desanudamiento para k.

Primero vamos a suponer que τ no se puede hacer disjunto de $\bar{S}$. Entonces por la Proposición 4.1, τ_1 es un nudo trivial o bien existe otro toro meridional esencial $\bar{S}'$, el cual se interseca con k en dos puntos, es disjunto de τ y tal que τ_1 es el ánima del toro sólido acotado por $\bar{S}'$.

Sin embargo, la existencia de este toro contradice la Proposición 4.10 (2), por lo que este caso no puede suceder. Por lo tanto, τ_1 es un nudo trivial y por el Lema 1.11, k es un $(1,1)$-nudo.

Ahora supongamos que τ y $\bar{S}$ son disjuntos. Por la Proposición 4.10, $\bar{S}$ es frontera de un toro sólido V donde se encuentra τ. Entonces, τ_1 es un nudo trivial o bien τ_1 es una curva esencial en V.

Si τ_1 es un nudo trivial entonces por el Lema 1.11, k es un $(1,1)-$nudo.

Por lo tanto, supongamos que τ_1 es esencial en V. Entonces $\bar{S}$ es esencial en $S^3 - \tau_1$ y $\tau_2 \cup k$ es un túnel para τ_1. Entonces τ_1 es un nudo satélite con número de túnel uno y, por el resultado de Morimoto y Sakuma [13], esto implica que $\bar{S}$ esta anudado como un nudo toroidal. Deslizamos k sobre τ_2 hasta que se convierte en un arco k' con extremos sobre τ_1. Entonces k' debe ser uno de los túneles de desanudamiento para τ_1 según la clasificación de Morimoto y Sakuma [13]; esto es, deslizando k' sobre $\partial N(\tau_1)$ obtenemos un arco ρ el cual es uno de los túneles $\tau(1,x)$, $\tau(2,x)$, $\tau(1,y)$ o $\tau(2,y)$ para τ_1, como se definió en el Capítulo 2. Para obtener k de ρ, tenemos que deslizar ρ sobre $\partial N(\tau_1)$ y luego sobre sí mismo, pero esto es equivalente a tomar un arco sobre $\partial N(\tau_1)$ que una los extremos de ρ, de hecho, el arco γ determinado mediante el deslizamiento de ρ sobre $\partial N(\tau_1)$, y luego tomar el iterado de ρ y τ_1 usando el arco γ.

Esto completa la demostración del Teorema 2.7.

Bibliografía

[1] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter, 1985.

[2] A.J. Casson and C. McA. Gordon, *Reducing Heegaard splittings*, Topology Appl. 27 (1987) 275-283.

[3] M. Eudave-Muñoz, *On nonsimple 3-manifolds and 2-handle addition*, Topology Appl. 55 (1994), 131-152.

[4] M. Eudave-Muñoz, *Incompressible surfaces in tunnel number one knot complements*, Topology Appl. 98 (1999), 167-189.

[5] M. Eudave-Muñoz, *Essential meridional surfaces for tunnel number one knots*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 6 (2000), 263-277.

[6] M. Eudave-Muñoz, *Incompressible surfaces and (1,1)-knots*, J. Knot Theory Ramifications 15 (2006), no. 7, 935-948.

[7] M. Eudave-Muñoz, E. Ramírez-Losada, *Meridional surfaces and* $(1,1)$-*knots*, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 671–696.

[8] M. Eudave-Muñoz, Y. Uchida, *Non-simple links with tunnel number one*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 1567-1575.

[9] C. Frohman, *An unknotting lemma for systems of arcs in* $F \times I$, Pacific J. Math. **139** (1989), 59–66.

[10] A. Hatcher, *Notes on basic 3-manifold topology*, http://www.math.cornell.edu/˜ hatcher.

[11] J. Hempel, *3-Manifolds*, Princeton University Press, 1976.

[12] W. Jaco, *Adding a 2-handle to a 3-manifold: an application to property R*, Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984) 288-292.

[13] K. Morimoto, M. Sakuma, *On unknotting tunnels for knots*, Math. Ann. 289 (1991) 143-167.

[14] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.

[15] M. Scharlemann, *Outermost forks and a theorem of Jaco*, Proceedings Rochester Conference, Contemporary Mathematics 44 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1985) 189-193.

[16] Y-Q. Wu, *A generalization of the handle addition theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 114 (1992) 237-242.