UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

"EL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE LEFSCHETZ-HOPF "

T E S I N A

QUE PARA OPTAR EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

JOSÉ JAIME CALLES LOPERENA

ASESOR: DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. ABRIL DEL 2016

Índice general

Introducción

La teoría de punto fijo es una de las herramientas más poderosas de la matemática moderna. Recordemos que, dada una aplicación $f : X \to X$, un punto fijo de f es un punto $x \in X$ que satisface la ecuación $f(x) = x$. A los teoremas que involucran la existencia y propiedades de puntos de este tipo se les conoce como teoremas de punto fijo. Dicha teoría se puede aplicar en varias áreas de la matemática como teoría de juegos, economía matemática, teoría de optimización y teoría de aproximación, entre otras.

La teoría de punto fijo se ha estudiado y generalizado en diferentes espacios, y varios teoremas se han desarrollado a lo largo de los años. En 1886, Poincaré fue el primero en trabajar en esta área. Luego, alrededor de 1912, Brouwer probó que si tomamos a X como una bola cerrada en un espacio euclidiano, entonces toda aplicación $f : X \to X$ tiene un punto fijo. A este resultado se le conoce como el teorema de punto fijo de Brouwer. Tiempo despues, en 1926, Solomon Lefschetz probó un resultado que en la actualidad se conoce como el teorema de punto fijo de Lefschetz. Este teorema da condiciones suficientes para que una aplicación $f : X \to X$, definida en un poliedro compacto X, tenga un punto fijo. Más concretamente, el teorema dice que si el número de Lefschetz $\Lambda(f)$ (que es un invariante construido a partir de los homomorfismos inducidos en homología por la aplicación f) no es cero, entonces f tiene puntos fijos. Se puede ver que el teorema Lefschetz generaliza el de Brouwer.

En este trabajo mostraremos una versión más general del teorema de punto fijo de Lefschetz, que se conoce como el teorema de punto fijo de Lefschetz-Hopf. Este teorema dice que justo $\Lambda(f) = I_f$, donde I_f es el índice de punto fijo de la aplicación f (el cual se puede interpretar como el número de puntos fijos contados con ciertas multiplicidades, las cuales explicaremos más adelante) y X es un espacio más general conocido como retracto de vecindad euclidiana. Los resultados que se muestran están inspirados en [3].

Capítulo 1

Retractos de vecindad y el grado de una aplicación.

En este capítulo introduciremos el concepto de retracto de vecindad y definiremos el grado de una función. También estudiaremos algunas propiedades del grado y mostraremos una manera de calcularlo. Por último, daremos algunas propiedades homológicas de los retractos de vecindad en $\mathbb{R}^n$, las cuales usaremos más adelante.

1.1. Retractos de vecindad.

Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X. El subconjunto A se dice que es retracto de X si existe una aplicación $r : X \to A$ tal que la restricción de r a A es la identidad, esto es, $r|_A = id_A$. En este caso a r se le llama retracción. Decimos que A es retracto de vecindad de X (abreviado NR por su nombre en inglés ***neighborhood retract***) si existe una vecindad abierta U de A en X tal que A es retracto de U. De la definición se sigue que todo abierto en X es NR de X, y que si A es NR de X y B es NR de A, entonces B es NR de X.

Definamos ahora lo que es el grado de una aplicación. Recordemos primero que todo endomorfismo ϕ de un grupo cíclico libre esta dado por un entero, esto es, $\phi(x) = nx$ para un determinado $n \in \mathbb{Z}$. Aplicando lo anterior a grupos de homología definamos ahora la noción de grado en topología algebraica. En adelante trabajaremos con grupos de homología sobre $\mathbb{Z}$ a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.1. *Dada una aplicación $f : S^n \to S^n$, el endomorfismo inducido f_* de $\widetilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ esta dado por $f_*(x) = deg(f)x$, donde $deg(f) \in \mathbb{Z}$ está determinado de manera única. Al entero $deg(f)$ se le conoce como el* **grado** *de f.*

Algunas propiedades del grado de una función son:

1. $deg(id) = 1$.

2. $deg(f \circ f') = deg(f)deg(f')$.

3. Si $f \simeq f'$, entonces $deg(f) = deg(f')$.

4. El grado de una equivalencia homotópica es ± 1.

Por ejemplo, el grado de una transformación ortogonal $f : S^n \to S^n$ coincide con el determinante, esto es, $deg(f) = det(f)$. Por otra parte, si $f : S^n \to S^n$ es una función antípoda ($x \mapsto -x$), entonces $deg(f) = (-1)^{n+1}$. Como una aplicación de esto tenemos el siguiente resultado; en él llamaremos a x punto antípoda de f si $f(x) = -x$. Denotaremos con $a : S^n \to S^n$ a $a(x) = -x$.

Proposición 1.1. *Si $f : S^n \to S^n$ no tiene puntos fijos, entonces $deg(f) = (-1)^{n+1}$. Si $f : S^n \to S^n$ no tiene puntos antípodas ($f(x) \neq -x$), entonces $deg(f) = 1$. En particular, toda aplicación $f : S^{2k} \to S^{2k}$ tiene un punto fijo o un punto antípoda.*

Demostración. Si f no tiene puntos fijos, $d_x(t) = (1-t)f(x) - tx \neq 0$ para toda $t \in [0,1]$ y $x \in S^n$. Por lo tanto $D(x,t) = \frac{d_x(t)}{||d_x(t)||}$ es una deformación de f en una aplicación antípoda. De esta manera, de ser f homotópica a la aplicación antípoda, $deg(f) = (-1)^{n+1}$.
Ahora, si $f(x) \neq -x$ para toda $x \in S^n$, entonces $g(x) = -f(x)$ no tiene puntos fijos y por tanto

$$deg(f) = deg(a \circ g) = deg(a)deg(g) = (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} = 1.$$

Concluimos entonces que, si f no tiene puntos antípodas, $deg(f) = 1$. Finalmente, si $f : S^{2k} \to S^{2k}$ no tiene puntos fijos ni puntos antípodas, entonces $deg(f) = (-1)^{2k+1} = -1$ y $deg(f) = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto f tiene un punto fijo o un punto antípoda. □

Lo que queremos ahora es definir el grado de una función localmente.

Definición 1.2. *Sean $V \subset S^n$ (con $n > 0$) un conjunto abierto, $f : V \to S^n$ una aplicación y $q \in S^n$ un punto tal que $f^{-1}(q)$ es compacto. Consideremos entonces la composición*

$$H_n(S^n) \xrightarrow{j_*} H_n(S^n, S^n - f^{-1}(q)) \overset{exc}{\cong} H_n(V, V - f^{-1}(q)) \xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n - q) \cong H_n(S^n) \quad (1.1)$$

donde exc es el isomorfismo de escisión (escindiendo $S^n - V$) y el último isomorfismo está dado por

$$H_n(S^n, S^n - q) \cong H_n(S^n, p) \cong \widetilde{H}_n(S^n) \cong H_n(S^n)$$

pues $S^n - q$ es contraible.

La composición (1.1) tiene la forma $x \mapsto deg_q(f)x$, donde $deg_q(f) \in \mathbb{Z}$ y está determinado de manera única. A este entero se le conoce como el ***grado local*** de f en q. Tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1. *Si $q \notin Im(f)$, entonces $deg_q(f) = 0$. Si $f : V \to S^n$ es la inclusión, entonces $deg_q(f) = 1$ para toda $q \in V$ pues*

$$H_n(S^n) \cong H_n(S^n, S^n - q) \cong H_n(S^n).$$

Si f es un homeomorfismo sobre un conjunto abierto $f(V) \subset S^n$, entonces $deg_q(f) = \pm 1$ para toda $q \in f(V)$ pues

$$H_n(S^n) \cong H_n(S^n, S^n - f^{-1}(q)) \overset{exc}{\cong} H_n(V, V - f^{-1}(q)) \cong H_n(f(V), f(V) - q) \overset{exc}{\cong} H_n(S^n, S^n - q) \cong H_n(S^n),$$

donde el primer isomorfismo se obtiene considerando la sucesión de la pareja $(S^n, S^n - f^{-1}(q))$.

Lo que justifica el adjetivo local de la definición dada es la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Si $f^{-1}(q) \subset K \subset U \subset V$, donde K es compacto y U es una vecindad de K, entonces el grado de f en q está también dado por la composición*

$$H_n(S^n) \xrightarrow{j'_*} H_n(S^n, S^n - K) \overset{exc}{\cong} H_n(U, U - K) \xrightarrow{(f|_U)_*} H_n(S^n, S^n - q) \cong H_n(S^n) \qquad (1.2)$$

La proposición 1.2 nos dice que podemos reemplazar $f^{-1}(q)$ por cualquier conjunto compacto más grande que $f^{-1}(q)$ que lo contenga y esté dentro de V, también reducir a V por una vecindad de $f^{-1}(q)$. Por ejemplo, podemos reducirlo a $f^{-1}(B)$, donde B es una vecindad de q.

Corolario 1.1. *Dada una aplicación $f : S^n \to S^n$, $deg(f) = deg_q(f)$ para toda $q \in S^n$.*

Demostración. Se sigue de la proposición 1.2 tomando $K = S^n = U$. □

El siguiente resultado nos permitirá calcular el grado local de una función.

Proposición 1.3. *Sea $f : V \to S^n$ y $q \in S^n$ como en la definición 1.2. Supongamos que V es unión finita de conjuntos abiertos, $V = \bigcup_{\lambda=1}^r V_\lambda$, tal que los conjuntos $f_\lambda^{-1}(q)$, con $f_\lambda = f|_{V_\lambda}$, son compactos y mutuamente ajenos, esto es, $f_\lambda^{-1}(q) \cap f_\mu^{-1}(q) = \emptyset$ para todo $\lambda \neq \mu$. Entonces $deg_q(f) = \sum_{\lambda=1}^r deg_q(f_\lambda)$.*

Demostración. Elijamos primero una vecindad U_λ de $f_\lambda^{-1}(q)$ en V_λ tal que $U_\lambda \cap U_\mu = \emptyset$ si $\lambda \neq \mu$, y definamos $U = \bigcup_{\lambda=1}^r U_\lambda$. Consideremos ahora el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\{id\}"] & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(q)) \arrow[r, "exc"] \arrow[d, "\{i_{\lambda *}\}"] & H_n(U, U - f^{-1}(q)) \arrow[r] & {} \\
\bigoplus_{\lambda=1}^r H_n(S^n) \arrow[r, "\bigoplus j_{\lambda *}"] & \bigoplus_{\lambda=1}^r H_n(S^n, S^n - f_\lambda^{-1}(q)) \arrow[r, "exc"] & \bigoplus_{\lambda=1}^r H_n(U_\lambda, U_\lambda - f_\lambda^{-1}(q)) \arrow[u, "\{i'_{\lambda *}\}", "\cong"'] \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n, S^n - q) \cong H_n(S^n) \\
{} \arrow[r, "\bigoplus f_{\lambda *}"] & \bigoplus_{\lambda=1}^r H_n(S^n, S^n - q) \cong \bigoplus_{\lambda=1}^r H_n(S^n) \arrow[u, "\{id\}"]
\end{tikzcd}$$

donde exc es el isomorfismo de escisión, $\{id\}$ es la aplicación cuyas componentes son funciones identidad, e i_λ, i'_λ denotan inclusiones. Ahora, la función $\{i'_\lambda\}$ es un isomorfismo pues U es unión ajena de $\{U_\lambda\}$ y por [1]. La conmutatividad del diagrama es clara excepto tal vez por el segundo cuadrado. Notemos que la composición

$$H_n(U_\lambda, U_\lambda - f_\lambda^{-1}(q)) \xrightarrow{i'_{\lambda *}} H_n(U, U - f^{-1}(q)) \overset{exc}{\cong} H_n(S^n, S^n - f^{-1}(q)) \xrightarrow{i_{\mu *}} H_n(S^n, S^n - f_\mu^{-1}(q))$$

coincide con la inclusión si $\lambda = \mu$, y es cero si $\lambda \neq \mu$ (pues $U_\lambda \subset S^n - f_\mu^{-1}(q)$). Luego, por la proposición 1.2, la parte superior define a $deg_q(f)$, mientras que la parte inferior define $\{deg_q(f_\lambda)\}$. Por lo tanto, considerando la parte superior, inferior y las flechas de los extremos, tenemos que

$$deg_q(f) = \sum_{\lambda=1}^{r} deg_q(f_\lambda).$$

□

Como ya dijimos antes, la proposición 1.3 nos permitirá calcular $deg_q(f)$. Supongamos por un instante que $f^{-1}(q)$ es un conjunto finito, digamos $f^{-1}(q) = \{p_1, ..., p_r\}$. Podemos entonces elegir conjuntos abiertos V_λ tales que $p_\lambda \in V_\lambda$ y $V_\lambda \cap V_\mu = \emptyset$ para todo $\lambda \neq \mu$. Basta entonces que calculemos $deg_q(f_\lambda)$. A este número se le suele llamar la multiplicidad del punto p_λ. Por lo tanto, $deg_q(f)$ es igual al número de puntos en $f^{-1}(q)$ contando sus multiplicidades. Como ya vimos antes, la multiplicidad se puede calcular en cualquier vecindad de p_λ, y si f es localmente homeomorfo, entonces todas sus multiplicidades son ± 1.

1.2. Propiedades homológicas de los retractos de vecindad en $\mathbb{R}^n$

Consideremos primero subconjuntos arbitrarios $B \subset A \subset S^n$. Para todo $p \in A$, las inlcusiones inducen los homomorfismos

$$H_n(S^n - B, S^n - A) \xrightarrow{j_p} H_n(S^n, S^n - p) \xleftarrow{i_p} \widetilde{H}_n(S^n)$$

donde i_p es isomorfismo pues $S^n - p$ es contraible.

Lema 1.1. *Para toda $y \in H_n(S^n - B, S^n - A)$, la función $J_y : A \to \widetilde{H}_n(S^n)$ dada por*

$$(J_y)(p) = {i_p}^{-1}(j_p(y))$$

es continua, esto es, localmente constante. Por lo tanto, $(J_y)|_B = 0$.

Demostración. Recordemos que una función de un espacio topológico A en un espacio discreto B es continua si y sólo si es localmente constante. Sea $(J_y)(p) = x$, esto es, $j_p(y) = i_p(x)$. Queremos ahora construir una vecindad U de p tal que si $q \in U \cap A$, entonces $j_q(y) = i_q(x)$,

[1] Sea X un espacio arbitrario con componentes por trayectorias X_λ, $\lambda \in \Lambda$. Sea $A \subset X$ un subespacio y $A_\lambda = A \cap X_\lambda$. Entonces las inclusiones $i_\lambda : (X_\lambda, A_\lambda) \to (X, A)$ inducen un isomorfismo $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda, A_\lambda) \cong H_n(X, A)$.

esto para toda $q \in U \cap A$. Sea $\zeta \in S_*(S^n - B) \subset S_*(S^n)$ y $z \in S_*(S^n)$, entonces la suposición de que $j_p[\zeta] = i_p[z]$ significa que existen cadenas $c \in S_*(S^n)$ y $c' \in S_*(S^n - p)$ tales que

$$\zeta - z = \partial(c) + c'.$$

Ahora, $c' \in S_*(S^n - p)$ es una combinación lineal de un número finito de simplejos singulares σ, cada uno de los cuales evita a p y por lo tanto evita una vecindad abierta de p que denotaremos como U_σ (esto, pues $Im(\sigma)$ es cerrada). Por lo tanto,

$$c' \in S_*(S^n - U) \subset S_*(S^n - q)$$

donde $U = \bigcap_{\sigma \in I} U_\sigma$ y $q \in U \cap A$. Entonces, por lo anterior,

$$j_q[\zeta] = i_q[z].$$

La segunda afirmación, $(J_y)|_B = 0$, se debe a que, para $p \in B$, la función j_p se factoriza a través de un grupo cero, esto es,

$$H_n(S^n - B, S^n - A) \to H_n(S^n - B, S^n - B) \to H_n(S^n - B, S^n - p).$$

$\square$

Del lema anterior obtenemos la siguiente definición.

Definición 1.3. *Sea $B \subset A \subset S^n$ y $\Gamma(A, B)$ el grupo aditivo de las aplicaciones continuas (o localmente constantes) $A \to \widetilde{H}_n(S^n)$ que son cero en B, tomando $\Gamma(A, \emptyset) = \Gamma(A)$. Entonces el lema 1.1 nos define un homomorfismo*

$$J = J(A, B) : H_n(S^n - B, S^n - A) \longrightarrow \Gamma(A, B)$$

dado por

$$y \longmapsto \Big(p \mapsto {i_p}^{-1}(j_p(y))\Big).$$

Es fácil ver que el homomorfismo J es natural respecto a inclusiones, esto es, si $(A_1, B_1) \subset (A_2, B_2)$, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n - B_2, S^n - A_2) & \xrightarrow{i_*} & H_n(S^n - B_1, S^n - A_1) \\ \downarrow J & & \downarrow J \\ \Gamma(A_2, B_2) & \xrightarrow{i'} & \Gamma(A_1, B_1) \end{array}$$

es conmutativo (donde i_* y i' son inducidas por las inclusiones).

La importancia del homomorfismo J se debe a la siguiente proposición, que aunque no demostraremos, va a jugar un papel importante en los resultados que veremos más adelante.

Proposición 1.4. *Si $X \subset Y$ son subconjuntos de S^n que son retractos de vecindad (por ejemplo X y Y abiertos), entonces*

1. $H_i(Y, X) = 0$ *para toda* $i > n$.
2. $J : H_n(Y, X) \cong \Gamma(S^n - X, S^n - Y)$.

La prueba de la proposición anterior se puede ver en [3].

Capítulo 2

Retractos de vecindad euclidiana.

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de los retractos de vecindad, con el fin de introducir el concepto de retracto de vecindad euclidiana (ENR).

2.1. Retractos de vecindad euclidiana (ENR).

Claramente los conjuntos abiertos son retractos de vecindad. Sin embargo no todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es retracto de vecindad como se muestra a continuación.

Proposición 2.1. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un NR, entonces es de la forma $X = C \cap O$, donde C es cerrado y O es abierto en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Dado que X es NR de $\mathbb{R}^n$, existe una vecindad abierta $O \subset \mathbb{R}^n$ y una función continua $r : O \to X$ tal que r es una retracción, es decir, $r|_X = id_X$. Entonces X es cerrado en O y por lo tanto $X = O \cap C$ para algún cerrado C en $\mathbb{R}^n$. $\square$

A los conjuntos de la forma $C \cap O$ descritos en la proposición anterior se les conoce como conjuntos ***localmente cerrados***. A estos conjuntos siempre se les puede ver como cerrados de un espacio euclidiano como se muestra en el siguiente resultado.

Lema 2.1. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es localmente cerrado, entonces X es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración. Dado que $X = C \cap O$ con C cerrado y O abierto en $\mathbb{R}^n$, podemos definir una función continua $j : O \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$j(x) = \left(x, \frac{1}{dist(x, \mathbb{R}^n - O)} \right)$$

donde $dist$ representa la distancia de un punto a un conjunto usando la métrica euclidiana. Entonces

$$j(O) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid t \cdot dist(x, \mathbb{R}^n - O) = 1\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$. Luego, por cómo esta definida la función j, O es homeomorfo a $j(O)$. De esta manera, dado que X es cerrado en O, $j(X)$ es cerrado en $j(O)$ y por lo tanto cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Veamos ahora el siguiente resultado.

Lema 2.2. *Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, X es localmente cerrado si y sólo si X es localmente compacto, es decir, todo punto $p \in X$ tiene una vecindad compacta en X.*

Demostración. Si X es localmente cerrado, existe un conjunto abierto O y un conjunto cerrado C de $\mathbb{R}^n$ tal que $X = C \cap O$. Sea $x \in X$. Entonces existe una vecindad compacta K de x en $\mathbb{R}^n$ tal que $K \subset O$. Dado que $K \cap X = K \cap C$ es una vecindad compacta de x en X, entonces X es localmente compacto.
Supongamos ahora que X es localmente compacto, es decir, para cada $x \in X$ existe una vecindad compacta K_x de x en X. Entonces K_x se escribe como $K_x = X \cap V_x$, donde V_x es una vecindad compacta de x en $\mathbb{R}^n$. Definamos $O_x = int(V_x)$. Así, dado que $K_x \subset \mathbb{R}^n$ también es compacto,

$$X \cap O_x = K_x \cap O_x = \overline{X} \cap O_x$$

y por tanto

$$X = \bigcup_x (X \cap O_x) = \bigcup_x (\overline{X} \cap O_x) = \overline{X} \cap \big(\bigcup_x O_x\big).$$

Concluimos entonces que X es localmente cerrado. □

Del lema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1. *Si $X \subset \mathbb{R}^m$ es localmente cerrado y $Y \subset \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a X, entonces Y es localmente cerrado.*

Demostración. Por el lema anterior sabemos que un conjunto es localmente cerrado si y sólo si es localmente compacto. Así, X es localmente compacto. Sea $q \in Y$ y $p \in X$ tal que $f(p) = q$, donde f es el homeomorfismo de X en Y. Si tomamos la vecindad compacta K_p de p en X,

$$K_p \overset{f}{\cong} f(K_p)$$

donde $f(K_p)$ es vecindad compacta de q en Y, esto es, Y es localmente compacto y por tanto localmente cerrado. □

Veamos ahora un resultado similar al anterior, pero para retractos de vecindad.

Proposición 2.2. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es NR y $Y \subset \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a X, entonces Y es NR.*

Demostración. Dado que X es retracto de vecindad, X es localmente cerrado. De esta manera, por corolario 2.1, Y es localmente cerrado. Lo anterior nos asegura que existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que Y es cerrado en V.
Consideremos ahora el homeomorfismo $h : Y \to X$ que existe por hipótesis. Dado que $V \subset \mathbb{R}^n$ es normal, Y cerrado en V y Y es homeomorfo a X, por el teorema de extensión de Tietze, existe una función continua $g : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $g|_Y = h$. Luego, como X es NR, existe una vecindad abierta O de $\mathbb{R}^n$ y una retracción $r : O \to X$. Notemos que el conjunto $W = g^{-1}(O)$ es un abierto en V, y por tanto abierto en $\mathbb{R}^n$, tal que $Y \subset W$ y $h^{-1} \circ r \circ g|_W$ es retracción (pues $(h^{-1} \circ r \circ g|_W)|_Y = id_Y$). Por lo tanto Y es NR.

□

Definamos ahora el concepto de retracto de vecindad euclidiana, el cual va a ser de gran importancia en el presente trabajo.

Definición 2.1. *A un espacio topológico Y se le llama retracto de vecindad euclidiana (o ENR) si existe un retracto de vecindad $X \subset \mathbb{R}^n$ que sea homeomorfo a Y. Así, por la proposición 2.2, cualquier otro $X' \subset \mathbb{R}^n$ que sea homeomorfo a Y será retracto de vecindad.*

Por ejemplo, S^{n-1} es retracto de $\mathbb{R}^n - 0$, y B^n es retracto de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que sea homeomorfo a S^{n-1} o B^n es NR.

Lema 2.3. *Toda variedad diferenciable es un ENR.*

Demostración. Sea M una variedad diferenciable. Por el teorema del encaje de Whitney podemos pensar en M como una subvariedad encajada en $\mathbb{R}^N$, con $N \in \mathbb{N}$. Luego, por el teorema de la vecindad tubular, M tiene una vecindad U que es la imagen bajo un difeomorfismo de una abierto en el haz normal NM. Notemos que U es la vecindad que buscamos, ya que el teorema de la vecindad tubular nos afirma que M es retracto de U. Por lo tanto, toda variedad diferenciable es ENR. □

Más aún, se puede probar que toda variedad topológica es un ENR (véase [1]).

Capítulo 3

Teorema de punto fijo de Lefschetz-Hopf.

En este capítulo definiremos el índice de punto fijo y daremos algunas propiedades importantes de el. Definiremos también el número de Lefschetz de un endomorfismo de rango finito y veremos que coincide con la traza del endomorfismo. Por último, demostraremos el resultado principal de este trabajo, el teorema de punto fijo de Lefschetz-Hopf.

3.1. Índice de punto fijo.

Sea V un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $g : V \to \mathbb{R}^n$ una aplicación. Entonces, por la proposición 1.3 del capítulo 1, bajo ciertas condiciones, el grado de g sobre $q \in \mathbb{R}^n$ se puede interpretar como el "número" de puntos en $g^{-1}(q)$, suponiendo que el conjunto es finito o al menos compacto. Nótese que el conjunto de puntos fijos $Fix(g)$ de g coincide con $(i-g)^{-1}(0)$, donde i es la inclusión. Por lo tanto el "número" de puntos fijos debería ser medido por el grado de $(i-g)$ sobre 0, tomando F_g compacto. A este grado le llamaremos el indice de punto fijo I_g de g.

Antes de entrar en detalles definamos qué es una clase fundamental. Consideremos una pareja (V, K), donde V es abierto en $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, y $K \subset V$ es compacto. Por la proposición 1.4 sabemos que

$$H_n(V, V-K) \cong \Gamma(S^n - (V-K), S^n - V),$$

donde $\Gamma(S^n - (V-K), S^n - V)$ representa el grupo aditivo de las aplicaciones $S^n - (V-K) \to \widetilde{H}_n(S^n)$ que son cero en $S^n - V$. Entonces existe un único elemento $o_K \in H_n(V, V-K)$ tal que, para todo $p \in K$, la imagen de o_K bajo

$$H_n(V, V-K) \to H_n(V, V-p) \cong H_n(S^n, S^n - p) \cong \widetilde{H}_n(S^n)$$

es un generador fijo de $\widetilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Cada clase correspondiente a cada generador de $\widetilde{H}_n(S^n)$ se llama clase fundamental alrededor de K. Claramente, si $V \subset V'$, la función inclusión lleva clases fundamentales de $H_n(V, V-K)$ a clases fundamentales de $H_n(V', V'-K)$. Esto justifica la expresión "alrededor de K" y la notación "o_K" donde no importa quien es V. Tomemos un generador fijo o de $\widetilde{H_n}(S^n)$ y $o_K \in H_n(V, V-K)$ su respectiva clase fundamental. Entonces o_K es la imagen del generador o bajo

$$H_n(S^n) \to H_n(S^n, S^n - K) \cong H_n(V, V-K)$$

y está caracterizada, por la proposición 1.4, por el hecho de que su imagen bajo $H_n(V, V-K) \to H_n(V, V-p) \cong \mathbb{Z}$ coincida con o_p para toda $p \in K$. Definamos ahora, formalmente, el índice de punto fijo de una aplicación.

Definición 3.1. *Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $g : V \to \mathbb{R}^n$ una aplicación. Supongamos que*

$$F = Fix(g) = \{x \in V | g(x) = x\},$$

el conjunto de puntos fijos, es compacto (F siempre es cerrado). Consideremos la función $i-g : (V, V-F) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$, dada por $(i-g)(x) = x - g(x)$, y el homomorfismo inducido

$$(i-g)_* : H_n(V, V-F) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong \mathbb{Z}.$$

Definimos entonces el **índice de punto fijo** *$I_g \in \mathbb{Z}$ de g como*

$$(i-g)_*(o_F) = I_g \cdot o_0,$$

donde o_0 genera a $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$. Notemos que esta definición no depende de la elección del generador $o \in H_n(S^n)$ pues $-(o_F) = (-o)_F$ y $-(o_0) = (-o)_0$.

Nótese que el índice de punto fijo coincide con la definición de grado local que dimos anteriormente; esto pues lo estamos definiendo en función de la clase fundamental o_F. Tenemos ahora la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Dado $g : V \to \mathbb{R}^n$ como en la definición anterior, sea W subconjunto abierto y K compacto tales que*

$$F = F_g \subset K \subset W \subset V.$$

Entonces $(i-g)$ manda $(W, W-K)$ en $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ y $(i-g)_*(o_K) = I_g \cdot o_0$.

La prueba es clara pues la inclusión $(W, W-K) \hookrightarrow (V, V-F)$ manda O_K en O_F (tomando sus respectivos homomorfismos en homología). La proposición anterior nos dice que el índice I_g depende sólo de $g|_W$, donde W es una vecindad de F, y que podemos sustituir a F por un compacto K que lo contenga tal que $K \subset W$. Enlistemos algunas propiedades del índice de punto fijo y bosquejemos sus pruebas.

Lema 3.1. *El índice de punto fijo tiene las siguientes propiedades:*

1. *(Unidad) Una función constante $g : V \to \mathbb{R}^n$ tiene índice* 1 *si $g(V) \subset V$, e índice* 0 *si $g(V) \notin V$.*

2. *(Aditividad) Sea $g : V \to \mathbb{R}^n$ como en la definición 3.1, tal que V es una unión finita de conjuntos abiertos V_i, con $i = 1, 2, ..., r$, todo $F^i = \{x \in V_i | g(x) = x\}$ es compacto y se cumple que $F^i \cap F^j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Entonces $F_g = \bigcup_{i=1}^r F^i$ e $I_g = \sum_{i=1}^r I_{g|_{V_i}}$.*

3. *(Multiplicatividad) Sean $g : V \to \mathbb{R}^n$ y $g' : V' \to \mathbb{R}^{n'}$ funciones como en la definición 3.1. Entonces el conjunto de puntos fijos de $g \times g' : V \times V' \to \mathbb{R}^{n+n'}$ es $F_{g\times g'} = F_g \times F_{g'}$ e $I_{g\times g'} = I_g \cdot I_{g'}$.*

4. *(Invariancia homotópica) Si $g_t : V \to \mathbb{R}^n$, con $0 \leq t \leq 1$, es una deformación tal que $K = \{x \in V | g_t(x) = x \text{ para algun } t\} = \bigcup_t F_{g_t}$ es compacto, entonces $I_{g_0} = I_{g_1}$.*

5. *(Conmutatividad) Si $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos y $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : V \to \mathbb{R}^m$ aplicaciones continuas, entonces las dos composiciones*

$$g \circ f : W = f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^m \quad y \quad f \circ g : W' = g^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$$

tienen conjuntos de puntos fijos homeomorfos, es decir, $Fix(g \circ f) \cong Fix(f \circ g)$. Si además estos conjuntos son compactos, entonces $I_{g\circ f} = I_{f\circ g}$.

Demostración. 1. Si $g(V) \notin V$, entonces $Fix(g) = \emptyset$ y por tanto $o_F = 0$. Si $g(V) = p \in V$, entonces

$$i - g : (V, V - p) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$$

manda o_p en o_0.

2. Dado que estamos en un espacio de Hausdorff, y cada F^i es compacto, podemos encontrar vecindades abiertas W_i de los F^i tales que $W_i \subset V_i$ y $W_i \cap W_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Definamos $W = \bigcup_i W_i$. Entonces, por la proposición 3.1, $I_g = I_{g|_W}$ e $I_{g|_{V_i}} = I_{g|_{W_i}}$. Luego, dado que los abiertos W_i son ajenos,

$$H_n(W, W - F) \cong \bigoplus_i H_n(W_i, W_i - F^i)$$

y el isomorfismo identifica o_F con $\{o_{F^i}\}$. Así,

$$I_{g|_W} o_0 = (i - g)_*(o_F) = \sum_i (i - g)_*(o_{F^i}) = \big(\sum_i I_{g|_{W_i}}\big) o_0.$$

3. Si definimos $F = Fix(g)$ y $F' = Fix(g')$, entonces $o_F \times o'_{F'}$ y $o_0 \times o'_{0'}$ son clases fundamentales alrededor de $F \times F' = F_{g\times g'}$ y $0 \times 0' \in \mathbb{R}^{n+n'}$. Por lo tanto, utilizando propiedades del producto exterior,

$$\begin{aligned} I_{g\times g'}(o_0 \times o'_{0'}) &= (i \times i' - g \times g')_*(o_F \times o'_{F'}) = [(i - g) \times (i' - g')]_*(o_F \times o'_{F'}) \\ &= [(i - g)_*(o_F)] \times [(i' - g')_*(o'_{F'})] = (I_g I_{g'})(o_0 \times o'_{0'}). \end{aligned}$$

4. Por la proposición 3.1, $(i - g_t)_*(o_K) = I_{g_t} o_0$ para toda $0 \leq t \leq 1$. Luego, dado que $(i - g) : (V, V - K) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ es una deformación, por invariancia del dominio

$$I_{g_0} o_0 = (i - g_0)_* = (i - g_1)_* = I_{g_1} o_0.$$

5. Para la primera parte consideremos la aplicación $\alpha : Fix(g \circ f) \to Fix(f \circ g)$ dada por $\alpha(x) = f(x)$ con inversa $\beta(x') = g(x')$. Supongamos ahora que los conjuntos $Fix(g \circ f)$ y $Fix(f \circ g)$ son compactos, y definamos la aplicación $\gamma : W \to W'$ dada por

   $$\gamma(x, y) = (g(y), f(x)).$$

   Sea γ_t una deformación de γ dada por

   $$\gamma_t(x, y) = \big(t(g \circ f(x)) + (1 - t)g(y), f(x)\big)$$

   con $x \in W$, $y \in W'$ y $0 \leq t \leq 1$. Debido que $Fix(\gamma_t) = \{(x, y) \mid x \in Fix(g \circ f), f(x) = y\}$ es compacto e independiente a t, por la propiedad de invariancia homotópica, $I_\gamma = I_{\gamma_1}$. Notemos que la aplicación γ_1 es la restricción de la aplicación $\delta : W \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definida como

   $$\delta(x, y) = (g \circ f(x), f(x)).$$

   Entonces, por la proposición 3.1, $I_{\gamma_1} = I_\delta$. Consideremos ahora una deformación de δ dada por

   $$\delta_t(x, y) = (g \circ f(x), (1 - t)f(x)),$$

   donde $Fix(\delta_t) = \{(x, y) \mid x \in Fix(g \circ f), (1-t)f(x) = y\}$. De lo anterior, $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} Fix(\delta_t)$ coincide con la imagen de la aplicación $Fix(g \circ f) \times [0, 1] \to W \times \mathbb{R}^n$ dada por

   $$(x, t) \mapsto (x, (1 - t)f(x)),$$

   que es compacta. Así, por la propiedad de invariancia homotópica, $I_\delta = I_{\delta_1}$ con $\delta_1(x, y) = (g \circ f(x), 0)$. Pero δ_1 es una aplicación producto. Entonces, por la propiedad de multiplicatividad, $I_{\delta_1} = I_{g \circ f} I_{cte} = I_{g \circ f}$. Juntando todo, $I_\gamma = I_{g \circ f}$. Por último, por la simetría de γ, y modificando las deformaciones que dimos anteriormente, tenemos que

   $$I_{f \circ g} = I_\gamma = I_{g \circ f}.$$

□

Para más detalles, véase [3]. La propiedad 5 del lema anterior nos sugiere la siguiente generalización del índice de punto fijo. Supongamos que Y es un espacio topológico, $U \subset Y$ es abierto, y $h : U \to Y$ es una aplicación que se factoriza a través de un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$, esto es, $h = \beta \circ \alpha$ donde

$$h : U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} Y.$$

Entonces, el índice de h (si se puede definir), debe coincidir con el índice de

$$\alpha \circ \beta = \beta^{-1}(U) \to V.$$

Lo que nos preguntamos ahora es cuándo el índice es independiente de la descomposición $h = \beta \circ \alpha$. En general esto no se sabe, sin embargo, si U es un ENR, sí se cumple.

Proposición 3.2. *Si Y es cualquier espacio topológico y $U \subset Y$ es un conjunto abierto que es ENR, entonces toda función continua $h : U \to Y$ admite una descomposición $h = \beta \circ \alpha$ donde $h : U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} Y$ y V es un abierto en algún espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Si además $F_h = \{x \in U | h(x) = x\}$ es compacto, entonces el índice de punto fijo de*

$$\alpha \circ \beta : \beta^{-1}(U) \to V \subset \mathbb{R}^n$$

está definido y es independiente de la descomposición $h = \beta \circ \alpha$, esto es, sólo depende de h. Este número $I_{\alpha\circ\beta}$ es entonces, por definición, el índice de punto fijo de h (en símbolos $I_h = I_{\alpha\circ\beta}$).

Demostración. Dado que U es ENR, existe $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $U \cong X$ y X es NR. Así, existe $V' \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & V' \arrow[r, "r'"] \arrow[dr, "r"] & X \arrow[d, "\cong"] \\
U \arrow[ur, "i"] & & U
\end{tikzcd}$$

con $r \circ i = id_U$. Entonces

$$U \xrightarrow{i} V' \xrightarrow{h\circ r} Y$$

es una descomposición de h, lo que prueba la existencia. Ahora, si $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} Y$ es cualquier descomposición de h, $F_{\alpha\circ\beta} \cong F_{\beta\circ\alpha} = F_h$ (por la propiedad 5 del lema 3.1). Si suponemos entonces que F_h es compacto, $F_{\alpha\circ\beta}$ es compacto y $I_{\alpha\circ\beta}$ está definido. Falta ahora ver que $I_{\alpha\circ\beta}$ no depende de la descomposición de h. Consideremos las funciones

$$\alpha \circ r : V' \to V \subset \mathbb{R}^n \quad y \quad i \circ \beta : \beta^{-1}(U) \to V' \subset \mathbb{R}^n.$$

Por la propiedad 5 del lema 3.1, las composiciones

$$(\alpha \circ r) \circ (i \circ \beta) = \alpha \circ \beta \quad y \quad (i \circ \beta) \circ (\alpha \circ r) = i \circ (h \circ r)$$

tienen el mismo índice, esto es, $I_{\alpha\circ\beta} = I_{i\circ h\circ r}$. Por lo tanto, $I_{\alpha\circ\beta}$ no depende de la descomposición $\alpha \circ \beta$. □

Nótese que si $Y = \mathbb{R}^n$, $V = U$, $\alpha = id$ y $\beta = h$, tenemos la definición 3.1. Cabe mencionar que las propiedades que tenemos para el índice de punto fijo de una función $g : V \to \mathbb{R}^n$ también se cumplen para esta nueva definición.

3.2. Teorema de punto fijo de Lefschetz-Hopf.

En adelante R denotará un anillo fijo conmutativo con unidad, a menos que se indique lo contrario. Nótese que podemos darle a R estructura de anillo graduado definiendo $R_0 = R$ y $R_i = 0$ si $i \neq 0$.

Definición 3.2. *Sea $M = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un $R-$módulo graduado, y sea $M^*_{-i} = Hom_R(M_i, R)$. Para todo $R-$módulo graduado N definimos $\Theta = \Theta_{MN} : M^* \otimes N \to Hom_R(M, N)$ dada por*

$$\Theta(\varphi \otimes n)(m) = (-1)^{|m|\cdot|n|}\varphi(m)n.$$

Notemos que $M^* \otimes N$ y $Hom_R(M,N)$ tienen estructura de $R-$módulo graduado, es decir, podemos reescribir a Θ como

$$\Theta : \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \Big(\bigoplus_{j+k=i} M_j^* \otimes N_k \Big) \to \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \Big(\prod_{l\in\mathbb{Z}} Hom_R(M_l, N_{l+i}) \Big).$$

Luego, usando la propiedad universal de la suma directa y el producto tensorial, podemos ver que Θ es un homomorfismo de $R-$módulos graduados que es natural respecto a M y N.

Proposición 3.3. *La imagen de Θ consiste en aquellos homomorfismos $\beta : M \to N$ que se factorizan a través de un módulo graduado libre finitamente generado, es decir, tales que son una composición*

$$\beta : M \to F \to N$$

donde $F_i = R \bigoplus R \bigoplus ... \bigoplus R$ para toda i y $F_i = 0$ para casi toda i. A estos homomorfismo se les llama de rango finito. Si además N es libre, entonces Θ es un monomorfismo, es decir, Θ representa un isomorfismo de $M^* \otimes N$ en $Im(\Theta) = \{\beta : M \to N | \beta \text{ es de rango finito}\}$.

Demostración. Sea $\varphi \in M^*$ y $n \in N \cong Hom_R(R,N)$. Entonces, a excepción del signo, $\Theta(\varphi \otimes n)$ coincide con la composición $M \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{n} N$ $(m \mapsto \varphi(m) \mapsto \varphi(m)n)$. Lo anterior prueba la primera afirmación, pues los elementos de $M^* \otimes N$ son sumas finitas de términos $\varphi \otimes n$ y los homomorfismos de rango finito son sumas finitas de composiciones $M \to R \to N$. Supongamos ahora que N es libre. Sea $\{i_\gamma : R \to N\}_{\gamma\in\Gamma}$ una base libre de N. Entonces todo $a \in M^* \otimes N$ es de la forma $a = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma \otimes i_\gamma(1)$. Ahora, si $p_\mu : N \to R$ es la $p-$ésima proyección (esto es, $p_\mu \circ i_\mu = id$ y $p_\mu \circ i_\lambda = 0$ para toda $\mu \neq \lambda$), entonces

$$(id \otimes p_\mu)(a) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma \otimes \big(p_\mu \circ i_\gamma(1)\big) = \varphi_\mu \otimes 1$$

y por lo tanto

$$\Theta_{MR}\big((id \otimes p_\mu)(a)\big) = \Theta_{MR}(\varphi_\mu \otimes 1) = \pm\varphi_\mu.$$

Luego, por la naturalidad de Θ aplicada a p_μ, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^* \otimes N \arrow[r, "id\otimes p_\mu"] \arrow[d, "\Theta_{MN}"'] & M^* \otimes R \arrow[d, "\Theta_{MR}"] \\ Hom_R(M,N) \arrow[r, "p_\mu"] & Hom_R(M,R) \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\Theta_{MR}\big((id \otimes p_\mu)(a)\big) = p_\mu \circ \Theta_{MN}(a)$. Por lo tanto, $\Theta_{MN}(a) = 0$ implica que $\varphi_\mu = \pm p_\mu \circ \Theta_{MN}(a) = 0$ para toda $\mu \in \Gamma$ y por lo tanto $a = 0$.

□

Definición 3.3. *Sea N un $R-$módulo graduado y sea $e : N^* \otimes N \to R$ la función evaluación, $e(\varphi \otimes n) = \varphi(n)$. Si N es libre y $\beta : N \to N$ es un endomorfismo de rango finito, entonces $\Theta^{-1}(\beta) \in N^* \otimes N$ (por la proposición 3.3) y $\Lambda(\beta) = e(\Theta^{-1}(\beta)) \in R$ se llama la **traza** o el **número de Lefschetz** de β.*

La función $e : N^* \otimes N \to R$ anula todos los elementos de dimensión diferente de 0, esto por la estructura de $R-$módulo graduado que tiene N. Así, el número de Lefschetz de β es cero a menos que $|\beta| = 0$, esto es, a menos que $\beta = \{\beta_i\}$ donde $\beta_i : N_i \to N_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Para calcular $\Lambda(\beta)$ en este caso, tomemos una base Γ_i para cada N_i. Entonces

$$\beta(\gamma) = \sum_{\mu \in \Gamma_i} \beta_\mu^\gamma \cdot \mu$$

para toda $\gamma \in \Gamma_i$, con matriz de coeficientes $\beta_\mu^\gamma \in R$. Ahora, para toda $j \in \mathbb{Z}$ y $\mu \in \Gamma_j$ definimos $\varphi^\mu \in N_{-j}^* = Hom(N_j, R)$ como

$$\varphi^\mu(\gamma) = \beta_\mu^\gamma$$

para $\gamma \in \Gamma_j$. Si β es de rango finito, entonces casi todos los φ^μ son cero. Por lo tanto

$$a = \sum_{\substack{\mu \in \Gamma_j \\ j \in \mathbb{Z}}} (-1)^j \varphi^\mu \otimes \mu \in N^* \otimes N$$

esta definido y para $\gamma \in \Gamma_j$

$$\begin{aligned}
\big(\Theta(a)\big)(\gamma) &= \sum_{\substack{\mu \in \Gamma_j \\ j \in \mathbb{Z}}} (-1)^j \Theta(\varphi^\mu \otimes \mu)(\gamma) \\
&= \sum_{\substack{\mu \in \Gamma_j \\ j \in \mathbb{Z}}} (-1)^j (-1)^{|\gamma| \cdot |\mu|} \varphi^\mu(\gamma)\mu \\
&= \sum_{\substack{\mu \in \Gamma_j \\ j \in \mathbb{Z}}} (-1)^{j + j \cdot |\gamma|} \varphi^\mu(\gamma)\mu \\
&= \sum_{\mu \in \Gamma_j} \varphi^\mu(\gamma)\mu \\
&= \sum_{\mu \in \Gamma_j} \beta_\mu^\gamma \mu \\
&= \beta(\gamma),
\end{aligned}$$

esto es, $\Theta(a) = \beta$. Por lo tanto,

$$\Lambda(\beta) = e(\Theta^{-1}(\beta)) = e(a) = \sum_{\substack{\mu \in \Gamma_j \\ j \in \mathbb{Z}}} (-1)^j \varphi^\mu(\mu) = \sum_{\substack{\mu \in \Gamma_j \\ j \in \mathbb{Z}}} (-1)^j \beta_\mu^\mu = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \sum_{\mu \in \Gamma_j} \beta_\mu^\mu \tag{3.1}$$

que justo es la traza de β. Se puede verificar que la expresión anterior es independiente de la elección de la base Γ_j de N_j. Esta definición la usaremos en algunas ocasiones en lo que resta.

Veamos ahora el resultado principal de este trabajo. En la siguiente prueba consideraremos a $H(X)$ como la suma directa de los grupos de homología de X. De esta manera, dada la graduación trivial que le dimos al anillo R, $H(X)$ es un $R-$módulo graduado.

Teorema 3.1. ***[Teorema de punto fijo de Lefschetz-Hopf]*** *Sea Y un ENR, $K \subset Y$ compacto y $f : Y \to K \subset Y$ continua. Entonces el conjunto de puntos fijos de f es compacto, $(f|_K)_* = H(K, \mathbb{Q}) \to H(H, \mathbb{Q})$ tiene rango finito e $I_f = \Lambda(f|_K)_*$.*

Demostración. El conjunto de puntos fijos de f es cerrado en K y por lo tanto compacto. Luego, dado que Y es ENR, existe $X \subset \mathbb{R}^n$ retracto de vecindad tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & V \arrow[r, "r'"] \arrow[dr, "r"] & X \arrow[d, "\cong"] \\ Y \arrow[ur, "j"'] & & Y \end{tikzcd}$$

y se satisface que $r \circ j = id_Y$, para algún $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces $j(K) \cong K$ y el índice de f es igual al índice de la función

$$g = j \circ f \circ r : V \xrightarrow{r} Y \xrightarrow{f} K \cong j(K) \subset \mathbb{R}^n$$

(por la proposición 3.2 tomando $f = f \circ r \circ j$) y $f|_K \cong g|_K$[3]. Debemos mostrar que $I_g = \Lambda(g|_K)_*$, pues de ser así,

$$I_f = I_g = \Lambda(g|_K)_* = \Lambda(f|_K)_*{}^4.$$

Usaremos en la prueba homología racional (omitiendo los coeficientes $\mathbb{Q}$) y el hecho de que $H(X \times Y) \cong H(X \otimes Y) \cong H(X) \otimes H(Y)$[5]. Además, la clase fundamental o_K bajo el morfismo $H(V, V - K; \mathbb{Z}) \to H(V, V - K; \mathbb{Q})$ se sigue denotando o_K. Consideremos primero el diagrama

$$\begin{tikzcd} H(V, V-K) \otimes H(V) \arrow[r, "id \otimes g_*"] & H(V, V-K) \otimes H(K) \arrow[r, "\widehat{d} \otimes id"] \arrow[d, "d"] & (HK)^* \otimes H(K) \arrow[d, "e"] \\ H(V, V-K) \arrow[u, "\triangle_*"] \arrow[r, "(i-g)_*"] & H(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) & \mathbb{Q} \arrow[l, "o_0", "\cong"'] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

donde $\triangle : (V, V - K) \to (V, V - K) \times V$ dado por $\triangle(x) = (x, x)$ es la función diagonal, $d : (V, V - K) \times K \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ dada por $d(x, y) = x - y$ es la diferencia, e es la evaluación y $\widehat{d} : H(V, V - K) \to (HK)^* = Hom(H(K), \mathbb{Q})$ está definida para hacer el segundo diagrama conmutativo, esto es, $\big([\widehat{d}(v)](k)\big)o_0 = d_*(v \otimes k)$. El diagrama de la izquierda es conmutativo dado que

$$d\big(id \times g(\triangle(x))\big) = d(x, g(x)) = x - g(x) = (i - g)(x).$$

Por la definición del índice de punto fijo, la parte inferior del diagrama 3.2 manda la clase fundamental o_K de la siguiente manera

$$o_K \longmapsto I_g \cdot o_0 \longmapsto I_g.$$

[3]Usaremos la notación $f|_K \cong g|_{j(K)}$ para referirnos a que $f|_K$ y $g|_{j(k)}$ difieren por el homeomorfismo inducido por j, $K \cong j(K)$.

[4]Dado que $f|_K \cong g|_K$, las trazas de los respectivos homomorfismos en homología coinciden y por tanto $\Lambda(g|_K)_* = \Lambda(f|_K)_*$.

[5]El primer isomorfismo se debe a la equivalencia homotópica que da el mapeo de Eilenberg-Zilber y el segundo isomorfismo es por el teorema de Künneth.

Entonces, como el diagrama 3.2 es conmutativo, lo mismo pasa para la parte superior, es decir,

$$I_g = e(a_g) \quad donde \quad a_g = (\widehat{d} \otimes g_*) \circ \triangle_*(o_K).$$

Dado que $H(K)$ es libre, por la proposición 3.3, $H(K)^* \otimes H(K)$ es isomorfo al conjunto de homomorfismos $\beta : H(K) \to H(K)$ de rango finito. Así, por la definición del número de Lefschetz, tomando $\Theta(a_g) = \beta$,

$$I_g = e(a_g) = e(\Theta^{-1}(\beta)) = \Lambda(\beta) = \Lambda(\Theta(a_g))$$

donde $a_g = (\widehat{d} \otimes g_*) \circ \triangle_*(o_K)$. Veamos que $\Theta(a_g) = (g|_K)_*$, lo que probará el teorema. Para esto, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
H(V,V-K) \otimes H(V) \otimes H(K) \arrow[r, "id\otimes t_*"] \arrow[d, "\widehat{d}\otimes g_*\otimes id"] & H(V,V-K) \otimes H(K) \otimes H(V) \arrow[r, "d_*\otimes id"] \arrow[d, "\widehat{d}\otimes id\otimes g_*"] & H(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \otimes H(V) \cong H(V) \arrow[d, "o_0^{-1}\otimes g_*"] \\
(HK)^* \otimes H(K) \otimes H(K) \arrow[r, "id\otimes t_*"] & (HK)^* \otimes H(K) \otimes H(K) \arrow[r, "e\otimes id"] & \mathbb{Q} \otimes H(K) \cong H(K)
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

donde $t_* : H(V) \otimes H(K) \to H(K) \otimes H(V)$ esta dada por $t_*(\xi \otimes \eta) = (-1)^{|\xi|\cdot|\eta|}\eta \otimes \xi$. La conmutatividad del cuadrado de la derecha en el diagrama 3.3 se sigue de la conmutatividad del cuadrado de la derecha en 3.2 haciendo producto tensorial con g_*. La conmutatividad del cuadrado de la izquierda es clara. Ahora, si tomamos $\triangle_*(o_K) \otimes k \in H(V, V-K) \otimes H(V) \otimes H(K)$, su imagen bajo la parte inferior del diagrama 3.3 es

$$\begin{tikzcd}
\triangle_*(o_K) \otimes k \arrow[d, mapsto, "\widehat{d}\otimes g_*\otimes id"'] & & & \\
a_g \otimes k = \xi \otimes \eta \otimes k \arrow[r, mapsto, "id\otimes t_*"] & (-1)^{|\eta|\cdot|k|}\xi \otimes k \otimes \eta \arrow[r, mapsto, "e\otimes id"] & (-1)^{|\eta|\cdot|k|}\xi(k) \otimes \eta \arrow[r, mapsto, "\cong"] & (-1)^{|\eta|\cdot|k|}\xi(k)\eta,
\end{tikzcd}$$

es decir, obtenemos $(-1)^{|\eta|\cdot|k|}\xi(k)\eta = \Theta(\xi \otimes \eta)(k) = \Theta(a_g)(k)$. De igual manera, dado que el diagrama 3.3 es conmutativo, si mandamos $\triangle_*(o_K) \otimes k$ por la parte superior obtenemos el mismo resultado, esto es,

$$\Theta(a_g) = g_* \circ \Phi(K, V), \tag{3.4}$$

donde $\Phi(K, V) = \{\Phi_\lambda(K, V)\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ es la siguiente composición:

$$\begin{aligned}
&\Phi_\lambda(K,V) : H_\lambda(K) \xrightarrow{o_K\times} H_{\lambda+n}[(V, V-K) \times K] \xrightarrow{(\triangle\times id)_*} H_{\lambda+n}[(V, V-K) \times V \times K] \\
&\xrightarrow{(id\times t)_*} H_{\lambda+n}[(V, V-K) \times K \times V] \xrightarrow{(d\times id)_*} H_{\lambda+n}[(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \times V] \xrightarrow{(o_0\times)^{-1}} H_\lambda(V).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

De la definición de producto exterior, el mapeo de Eilenberg-Zilber y el teorema de Künneth, se sigue que la parte superior del diagrama 3.3 y la composición $g_* \circ \Phi(K, V)$ coinciden. Para finalizar la prueba veamos que

$$\Phi_\lambda(K, V) = i_*(K, V),$$

donde $i(K,V): K \to V$ es la inclusión. De esta manera tendríamos que

$$\Theta(a_g) = g_* \circ \Phi(K,V) = (g|_K)_*$$

y por lo tanto

$$I_g = \Lambda(\Theta(a_g)) = \Lambda(g|_K)_*.$$

La prueba consiste en varios pasos y está basada en las siguientes propiedades de Φ. Si $K' \subset K \subset V \subset V' \subset \mathbb{R}^n$, con V' abierto y K compacto, entonces

$$i_*(V,V')\Phi(K,V) = \Phi(K,V'), \tag{3.6}$$

$$\Phi(K,V)i_*(K',K) = \Phi(K',V), \tag{3.7}$$

donde i_* es el homomorfismo inducido por la inclusión. La propiedad 3.6 se debe a que el homomorfismo inducido por la inclusión manda clases fundamentales en clases fundamentales, es decir, $i_*(o_K) = o_K$. Luego, la propiedad 3.7 se debe a que en la definición de $\phi(K,V)$ podemos reemplazar $(V, V-K')$ por $(V, V-K)$ y $o_{K'}$ por o_K sin alterar el resultado, esto pues la inclusión manda o_K en $o_{K'}$. Otras propiedades que usaremos en la prueba, y que se derivan de las dos anteriores son:

$$\Phi(K,V) = i_*(K,V) \quad \Rightarrow \quad \Phi(K,V') = i_*(K,V'), \tag{3.8}$$

$$\Phi(K,V) = i_*(K,V) \quad \Rightarrow \quad \Phi(K',V) = i_*(K',V), \tag{3.9}$$

$$\Phi(K,V') = i_*(K,V') \quad \Rightarrow \quad i_*(V,V')[\Phi(K,V) - i_*(K,V)] = 0, \tag{3.10}$$

$$\Phi(K',V) = i_*(K',V) \quad \Rightarrow \quad [\Phi(K,V) - i_*(K,V)]i_*(K,K') = 0. \tag{3.11}$$

<u>Paso 1:</u> Supongamos primero que $K = p$ con p un punto. Por la propiedad 3.8 podemos sustituir a V por una bola abierta pequeña alrededor de p. Entonces el generador $1_P \in H_0(p) = H_0(V)$ se mapea bajo Φ de la siguiente manera

$$1_p \mapsto o_p \times 1_p \mapsto o_p \times 1_p \times 1_p \mapsto o_p \times 1_p \times 1_p \mapsto d_*(o_p \times 1_p) \times 1_p = o_0 \times 1_p \mapsto 1_p$$

y por tanto $\Phi_0(p,V) = i_*(p,V)$.

<u>Paso 2:</u> Sea $\Phi_0 : H_0(K) \to H_0(V)$. Dado que $H_0(K)$ está generado por grupos $H_0(p)$, con $p \in K$, entonces este paso se reduce al paso ! por la propiedad 3.11.

<u>Paso 3:</u> Supongamos que $K \cong S^\lambda$, con $\lambda > 0$, y V es una vecindad de la cual K es retracto por deformación. Dado que

$$i_*(K,V) : H_\lambda(K) \cong H_\lambda(V) \cong \mathbb{Q},^6$$

existe un número $q \in \mathbb{Q}$ (que depende de K y V) tal que

$$\Phi_\lambda(K,V) = q \cdot i_*(K,V).$$

Sea $\mathcal{A}$ la función antípoda de $K \cong S^\lambda$, y sea $r : V \to S^\lambda$ una retracción. Entonces la función $g = \mathcal{A} \circ r : V \xrightarrow{r} S^\lambda \xrightarrow{\mathcal{A}} S^\lambda$ es libre de puntos fijos y por tanto $I_g = 0$. Luego,

$$g_* \circ \Phi_\lambda(K, V) = q(g_* \circ i_*(K, V)) = q\mathcal{A}_* = q(-1)^{\lambda+1} id_*,$$

esto pues la función antipodal tiene grado $(-1)^{\lambda+1}$. Ahora, de la igualdad 3.4, aplicada a la función g que acabamos de definir, tenemos que $\Theta(a_g) = g_* \circ \Phi(K, V)$ y por tanto

$$\Lambda(\Theta(a_g)) = \Lambda(q(-1)^{\lambda+1} id_*) = 1 + (-1)^\lambda q(-1)^{\lambda+1} = 1 - q.$$

Así, dado que $I_g = \Lambda(\Theta(a_g))$, $q = 1$ y por lo tanto $\Phi_\lambda(K, V) = i_*(K, V)$.

Paso 4: Supongamos que $K = C^\lambda$, donde C^λ es el $\lambda-$esqueleto de la descomposición de una retícula cúbica de un cubo C (con $\lambda > 0$), y sea V arbitraria. Usando homología celular tenemos que $H_\lambda(C^\lambda)$ está generado por grupos $i_*(S, K)(H_\lambda(S))$, donde $S \cong S^\lambda$ es la frontera de un $(\lambda + 1)-$cubo en C. La frontera S tiene una vecindad abierta W en V de la cual es retracto por deformación[7]. Así, $\Phi_\lambda(S, W) = i_*(S, W)$ por el paso 3 y $\Phi_\lambda(S, V) = i_*(S, V)$ por la propiedad 3.8. Luego, por la propiedad 3.11,

$$[\Phi_\lambda(K, V) - i_*(K, V)] i_*(S, K) = 0,$$

y como las imágenes de $i_*(S, K)$ generan $H_\lambda(K)$, $\Phi_\lambda(K, V) = i_*(K, V)$.

Paso 5: Supongamos que K es un subespacio CW de C^λ, donde C^λ es como se definió en el paso anterior, y V arbitraria. Tomemos un subconjunto abierto U del cual C^λ sea retracto por deformación[7] y un conjunto abierto W contenido en $U \cap V$ del cual K sea retracto por deformación[7]. Usando homología celular, dado que C^λ no tiene $(\lambda+1)-$células, $H_{\lambda+1}(C^\lambda, K) = 0$.[8] Entonces, si consideramos la sucesión de la pareja (C^λ, K),

$$i_*(K, C^\lambda) : H_\lambda(K) \to H_\lambda(C^\lambda)$$

es monomorfismo y por lo tanto $i_*(W, U) : H_\lambda(W) \to H_\lambda(U)$ también lo es. Por otra parte, $\Phi_\lambda(C^\lambda, U) = i_*(C^\lambda, U)$ por el paso 4, y $\Phi_\lambda(K, U) = i_*(K, U)$ por la propiedad 3.9. Así,

$$i_*(W, U)[\Phi_\lambda(K, W) - i_*(K, W)] = 0$$

por a propiedad 3.10, y dado que $i_*(W, U)$ es monomorfismo, $\Phi_\lambda(K, W) = i_*(K, W)$. Por último, aplicando la propiedad 3.8, $\Phi_\lambda(K, V) = i_*(K, V)$.

Paso 6: Supongamos por último que V y K son arbitrarios. Elijamos una retícula

[6]Si K es retracto por deformación de V, entonces la inclusión natural i de K en V induce un isomorfismo en homología.

[7]Si $X \subset Y$ son subespacios CW de una retícula cúbica de $\mathbb{R}^n$ y V es un conjunto abiertos que contiene a X, entonces X tiene una vecindad abierta W en $Y \cap V$ de la cual es retracto fuerte por deformación. Véase [3], lema 6.20, pagina 212.

[8]Si Y es un subespacio CW de X tal que $X - Y$ no contiene ninguna $n-$célula, entonces $H_n(X, Y) = 0$. Véase [3], corolario 4.3, pagina 101.

cúbica lo suficientemente fina de tal manera que toda célula que intersecta a K este contenida en V, y definamos a M como la unión de esas células. Entonces M es un subespacio CW de algún cubo C (donde C es como lo describimos en los pasos 4 y 5) y $K \subset M \subset V$. Por la propiedad 3.9 es suficiente probar que $\Phi_\lambda(M,V) = i_*(M,V)$. Sea $M^\lambda = M \cap C^\lambda$ el $\lambda-$esqueleto de M. Entonces $\Phi_\lambda(M^\lambda, V) = i_*(M^\lambda, V)$ por el paso 5 y

$$[\Phi_\lambda(M,V) - i_*(M,V)]i_*(M^\lambda, M) = 0 \tag{3.12}$$

por la propiedad 3.11. Ahora, usando homología celular tenemos que $H_\lambda(M^{\lambda+1}) \cong H_\lambda(M)$ $\big($pues las inclusiones $i : M^{\lambda+1} \hookrightarrow M$ inducen isomorfismos $H_k(M^{\lambda+1}) \cong H_k(M)$ para toda $k < \lambda + 1\big)$ y $H_\lambda(M^{\lambda+1}, M^\lambda) = 0$ $\big($pues $H_k(M^{\lambda+1}, M^\lambda) = 0$ para toda $k \neq \lambda + 1\big)$. Luego, si tomamos la sucesión de la pareja $(M^{\lambda+1}, M^\lambda)$,obtenemos que

$$i_*(M^\lambda, M) : H_\lambda(M^\lambda) \to H_\lambda(M)$$

es epimorfismo. Por lo tanto, de 3.12 concluimos que $\Phi_\lambda(M,V) = i_*(M,V)$.

Esto concluye la prueba. □

Si N es un $R-$módulo graduado libre, entonces la función identidad $id : N \to N$ es de rango finito si y sólo si todo N_i tiene base finita y casi todo $N_i = 0$. En este caso

$$\Lambda(id) = \sum_j (-1)^j \beta_j,$$

donde β_j es el número de elementos en la base de N_j. Por lo tanto, el número de Lefschetz generaliza la característica de Euler-Poincaré[9], es decir,

$$\chi(N) = \Lambda(id_N)$$

para grupos abelianos libres graduados. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Corolario 3.1. *Si Y es un ENR compacto y $f : Y \to Y$ es una aplicación continua tal que $f_* = id_* : H(Y,\mathbb{Q}) \to H(Y,\mathbb{Q})$ (es decir, $f \simeq id$), entonces $I_f = \chi(Y)$.*

[9]Si $G = \{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un grupo abeliano graduado (es decir, una sucesión de grupo abeliano) tal que $rank(G_n)$ es finito para toda n e igual a 0 para casi toda n, entonces

$$\chi(G) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n rank(G_n)$$

se define como la característica de Euler-Poincare de G, donde $rank(A)$ es el número máximo de elementos linealmente independientes de A.

Referencias

[1] N. Aoki and K. Hiraide. *Topological Theory of Dynamical Systems: Recent Advances.* North-Holland Mathematical Library. Elsevier Science, 1994.

[2] P.E. Bland. *Rings and Their Modules.* De Gruyter Textbook. De Gruyter, 2011.

[3] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology.* Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1995.

[4] C. Prieto. *Topología básica.* Ciencia y Tecnología. Fondo de Cultura Económica México, 2005.