



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ALGUNAS APLICACIONES DE LOS NÚMEROS  
ARMÓNICOS EN LA TEORÍA ELEMENTAL Y  
ANALÍTICA DE LOS NÚMEROS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**M A T E M Á T I C A**

**P R E S E N T A:**

**DANIELA FERNÁNDEZ MARTÍNEZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
MAT. JULIO CÉSAR GUEVARA BRAVO**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2016**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos de alumno

Fernández

Martínez

Daniela

55 20 18 64 39

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

304047246

2. Datos del tutor

Mat.

Julio César

Guevara

Bravo

3. Datos del sinodal 1

M. en C.

José Rafael

Martínez

Enríquez

4. Datos del sinodal 2

Mat.

Omar

Vigueras

Herrera

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Alejandro  
Garcíadiego  
Dantan

6. Datos del sinodal 4

Mat.

Mauricio Enrique

Elizalde

Mejía

7. Datos del trabajo escrito

Algunas aplicaciones de los números armónicos en la teoría elemental y analítica de los números.

94 p

2016

# Índice

<b>Índice</b> .....	I
<b>Introducción</b> .....	II
<b>Capítulo 1. Sobre los números armónicos</b> .....	1
1.1. Naturaleza de los números armónicos .....	2
1.2. Aproximaciones .....	3
1.3. Generalización de la constante de Euler .....	16
1.4. Algunas utilidades de los números armónicos para funciones aritméticas.....	18
<b>Capítulo 2. Promedios</b> .....	22
2.1. Números armónicos de segundo orden.....	35
<b>Capítulo 3. Los armónicos de Ore</b> .....	44
3.1. Conjuntos con media armónica entera.....	44
<b>Capítulo 4. Los números armónicos vistos desde los ciclos de las permutaciones</b> .....	50
4.1. Números de Stirling.....	51
4.2. Propiedades entre armónicos y números de Stirling.....	56
<b>Capítulo 5. Temas actuales sobre números armónicos</b> .....	66
5.1. Teorema de Wolstenholme .....	66
5.2. Primos de Wolstenholme .....	74
5.3. Líneas actuales de investigación.....	75
<b>Conclusiones</b> .....	77
<b>Apéndice I</b> .....	79
<b>Apéndice II</b> .....	84
<b>Bibliografía</b> .....	86

# Introducción

Es ampliamente conocida la aparición frecuente de la serie armónica en diversas áreas de la matemática. Desde hace cientos de años sabemos que la serie completa diverge, y sin embargo se han encontrado propiedades matemáticas interesantes al recurrir al uso de sumas finitas extraídas de la serie armónica. En esta situación se presenta el problema de cómo se manejará esta suma finita, que ahora sí converge, es decir, se plantean cuáles son las mejores estrategias para analizar la siguiente sumatoria:

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n},$$

Lo más recomendable, parece ser, es hacerlo a través de aproximaciones.

El resultado de estas sumas finitas es lo que conocemos como números armónicos, mismos que se denotan como  $H_n$ , para cualquier  $n$  en los enteros positivos.

Este trabajo de tesis presenta ejemplos de la aparición en la teoría de números, así como en otras ramas de las matemáticas, de los números armónicos, y qué de manera conjunta se nos presenta la necesidad de conocer una aproximación de sus valores. Cuando se da el caso de que  $n$  sea grande, entonces la complicación aumenta para aproximar el valor de  $H_n$ .

La tesis pretende ser un trabajo de introducción a los números armónicos, dirigido principalmente a los que se inician en la teoría analítica de los números, pero también se adentra en otros tópicos vinculados con funciones aritméticas-multiplicativas, medias armónicas enteras y números de Stirling, entre otros.

La tesis comprende cinco capítulos y en ellos aparece lo siguiente:

El **Capítulo uno** inicia con la base histórica de la serie armónica. Se plantea la problemática de aproximar a  $H_n$  para cualquier  $n$  y se muestran los métodos adoptados para que las aproximaciones sean cada vez mejores. En el proceso de refinar los resultados se hace uso de lo que se conoce como la *constante de Euler*, misma que ocupa un destacado lugar en este trabajo de tesis.

Otra parte del capítulo está dedicada a exponer cómo se usan los números armónicos para trabajar con funciones aritméticas que tienen un comportamiento inestable y difícil de describir en determinados intervalos. Una de éstas puede ser  $\sigma(n)$ , es decir, la suma de los divisores de un entero positivo.

En el **Capítulo dos** se retoma el comportamiento irregular de las funciones aritméticas, pero ahora se estudiarán bajo la idea de promedios, es decir, se examinará el promedio de conjuntos finitos de valores en la imagen de este tipo de funciones, y esto sí nos permitirá conocer algunas características de esta clase de funciones tan inestables. Posteriormente se definen los números armónicos de segundo orden, y se presenta una aproximación análoga a la dada en el capítulo anterior para los armónicos de primer orden.

En el **Capítulo tres** nos adentramos en el camino de considerar a otros subconjuntos de la armónica, y entonces cabe preguntarnos, ¿por qué no tomar elementos que sean más dispersos, es decir, que no necesariamente empiecen con el uno, o que no tengan que ser consecutivos?. En este sentido podríamos pensar en la suma de los recíprocos de los primos

$\sum_p \frac{1}{p}$  o en la suma de los recíprocos de los cuadrados  $\sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2}$ , pero sabemos estos dos casos ya han sido ampliamente estudiados.

Bajo las directrices anteriores, en este capítulo introducimos un conjunto de denominadores que no están vinculados directamente con la definición de número armónico; aquí consideramos denominadores que pertenecen al conjunto de divisores de un entero, y con esto damos entrada a lo que se conoce como *número divisor armónico* o *número de Ore*. Lo que se pretende con esto es encontrar medias armónicas enteras.

En el **Capítulo cuatro** se muestra que los números armónicos  $H_n$  se pueden expresar en términos de la cantidad de permutaciones, con  $n$  elementos determinados, que se pueden descomponer exactamente en  $k$  ciclos. En otras palabras, lo que haremos es expresar a los números armónicos empleando los números de Stirling de primer grado, pero sólo con la suma que la definición de  $H_n$  nos sugiere y con una interpretación combinatoria del resultado de la misma.

El **Capítulo cinco** está dedicado a la exposición de algunos resultados que involucran a números armónicos, pero con la característica de que son extraídos de trabajos publicados en

años recientes. Lo anterior tiene el propósito de mostrar que el tema de los armónicos sigue presente las investigaciones actuales.

Principalmente en este capítulo se abordará el teorema de Wolstenholme y los primos que también llevan su nombre.

# Capítulo 1

## Sobre los números armónicos.

Cuando se aborda cualquier tema de las matemáticas, desde la perspectiva que se quiera, siempre es apropiado recordar el origen y las inquietudes que llevaron a los interesados en estas disciplinas, en particular, a observar determinados elementos que motivaron los desarrollos en ese tópico. Es en este contexto en el que damos inicio a la exposición de los números armónicos.

Los números armónicos son el resultado de sumas finitas de la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Los primeros resultados formales que se conocen sobre la serie armónica son los aportados por Nicolas Oresme (1320-1382). Este personaje escribió en 1360 el *De proportionibus proportionum* y allí presenta una base teórica para el tratamiento de las relaciones y proporciones que emplean exponentes. Oresme usó métodos gráficos para encontrar la convergencia de series como:

$$\frac{1 \times 3}{4} + \frac{2 \times 3}{16} + \frac{3 \times 3}{64} + \dots + \frac{n \times 3}{4^n} + \dots = \frac{4}{3}$$
$$\frac{a}{n} + \frac{a}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{a}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{a}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = a,$$

En *Questiones super geometriam Euclides* se ocupó de algunas series, demostrando por primera vez que la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \text{ es divergente}$$

Fue hasta mediados del siglo XVIII cuando Leonhard Euler tuvo la necesidad de trabajar con sumas parciales finitas de la serie armónica, y en 1730 se adentró en el estudio de encontrar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

y que hoy se conoce como el problema de Basilea; por otro lado también se enfrentó a una función que hoy conocemos como la función Gamma. Estas dos rutas llevaron a Euler a tener que usar sumas parciales finitas de la serie armónica, pero fue hasta *Institutiones Calculi Differentialis* (1755 Parte II, cap. VI) donde dedicó una parte del capítulo a la construcción de la suma

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m},$$

y de manera ejemplar enunció un resultado que se expresa en términos de números de Bernoulli<sup>1</sup>. Este tema lo retomaremos más adelante.

## 1.1 Naturaleza de los números armónicos.

Ya se mencionó que los números armónicos son sumas parciales de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ . Entonces, para cada  $n$  en  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  designamos con  $H_n$ , al valor de dicha suma y lo identificamos como el  $n$ -ésimo número armónico. A continuación se presentan algunos de los primeros  $n$  números armónicos:

$$\begin{aligned} H_1 &= 1 \\ H_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ H_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &\vdots \\ H_{n-1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \\ H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Los número de Bernoulli son los coeficientes  $B_k$  de la expansión en una serie de Taylor de la función

$$G(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \text{ es decir, } G(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \text{ para } |x| < 2\pi.$$

Acto seguido la primera pregunta que se plantea es ¿cuál es el valor de la suma para cada número armónico?. Sabemos que cada  $H_n$  es un racional y el camino más apropiado para obtenerlo, cuando  $n$  es grande, es el de las aproximaciones. En ocasiones es necesario saber el valor exacto de  $H_n$  (que es fácil llegar a él para  $n$  pequeña); sin embargo, en el estudio de los números armónicos en ocasiones vale la pena estudiar las aproximaciones a sus valores, ya que éstas nos permiten conocer más acerca de la naturaleza de los mismos. A continuación se construirán algunas cotas que serán de utilidad para poder llegar a dichas aproximaciones de  $H_n$ .

## 1.2 Aproximaciones

Una manera interesante de recorrer esta ruta es mediante el uso de logaritmos y para ello es recomendable tener presente que

$$\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{x} dx.$$

Veamos que el teorema que sigue nos proporciona una manera de acotar al logaritmo de  $n$ , lo cual se logra recurriendo a los números armónicos. Esto nos aportará lo necesario para que posteriormente podamos obtener una aproximación de  $H_n$ .

### Teorema 1.1.

$H_n - 1 < \ln(n) < H_{n-1}$  para toda  $n > 1$  en los enteros positivos.

### Demostración: Primera parte

Primero demostraremos la desigualdad

$$H_n - 1 < \ln(n),$$

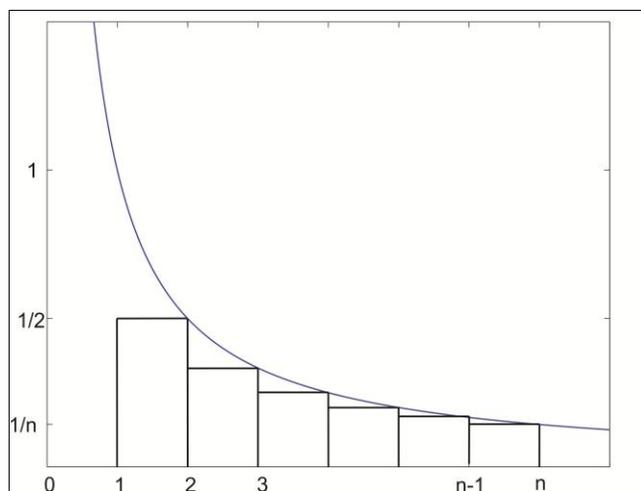
y lo haremos con base en la comparación de las representaciones geométricas, tanto de  $H_n - 1$  como de  $\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{x} dx$ , es decir, recurriremos al área bajo la curva de  $y = \frac{1}{x}$  en el intervalo  $[1, n]$ .

Sabemos que  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ , y de esto se obtiene que

$$H_n - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Ahora, pasamos a representar geoméricamente a  $H_n - 1$ . Para esto colocamos rectángulos de ancho uno sobre el eje  $x$ , en el intervalo  $[1, n]$  (Ver Figura 1.1); en lo que corresponde al eje  $y$  se levantan las alturas  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$ , de esta forma se consiguen  $n - 1$  rectángulos de áreas  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$ , y cuya suma de sus áreas es igual a  $H_n - 1$ .

A continuación comparamos el área bajo la curva  $y = \frac{1}{x}$  en el intervalo  $[1, n]$ , con la suma de las áreas de los  $n - 1$  rectángulos, que representan a  $H_n - 1$ . Como se muestra en la Figura 1.1,  $H_n - 1$  es menor que el área bajo la curva  $y = \frac{1}{x}$  en dicho intervalo. De esta forma se hace evidente que  $H_n - 1 < \ln(n)$ .



**Figura 1.1.** Comparación entre el área que representa  $H_n - 1$  y la que representa  $\ln(n)$ .

### Segunda parte

Se demostrará que  $\ln(n) < H_{n-1}$ . La ruta a seguir es semejante a lo hecho en la demostración anterior. Considérense nuevamente rectángulos sobre el intervalo  $[1, n]$  con ancho 1, pero ahora tomemos al primero de ellos con altura 1 (Fig. 1.2), el segundo  $\frac{1}{2}$ , y así hasta el  $n - 1$  rectángulo con altura  $\frac{1}{n-1}$ . Entonces la suma de las áreas es igual a

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

que representa a  $H_{n-1}$ .

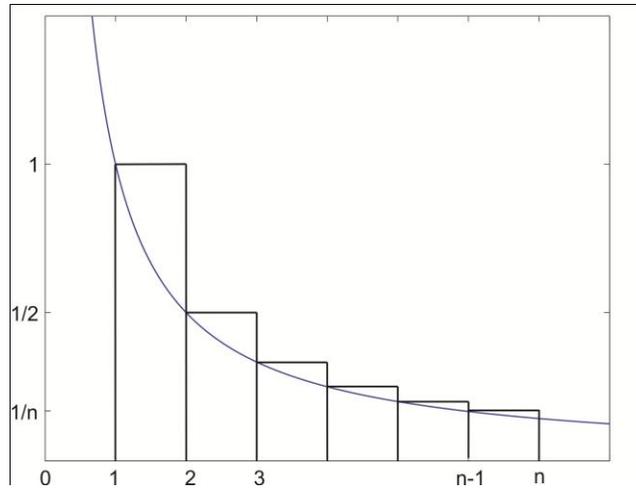


Figura 1.2. Comparación entre el área que representa  $H_{n-1}$  y la que representa  $\ln(n)$ .

En la Figura 1.2 se aprecia la representación de los rectángulos, pero si comparamos a la suma de las áreas de los rectángulos con  $\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{x} dx$ , entonces el área de todos los rectángulos es superior al área bajo la curva  $y = \frac{1}{x}$ , por lo se tiene que  $\ln(n) < H_{n-1}$ .

Con este teorema ya tenemos los elementos suficientes para enunciar la primera aproximación del  $n$ -ésimo armónico. Antes de seguir adelante con las aproximaciones es importante mencionar que los resultados contemplarán un margen de error, es decir, el valor obtenido para  $H_n$  no estará dado en términos de un número racional. En lugar de ello éste será una aproximación con elementos más manejables, que contemplen el uso de un margen de error, y que más adelante se intentará exhibir que tiende a cero cuando  $n$  es grande, en el orden de  $H_n$ .

Para obtener las aproximaciones que queremos se hará uso de lo que se conoce como la **gran O**. En nuestro caso la usaremos como un elemento de aproximación que nos permitirá calcular qué tan “próximas” se encuentran dos funciones a partir de cierto intervalo. Para esto consideremos dos funciones,  $f(x)$  y  $g(x)$  para las que se puede establecer la relación  $f(x) = g(x) + O(h(x))$ . Se dice que  $f(x)$  es igual a  $g(x)$  más la gran  $O$  de  $h(x)$ , donde  $O(h(x))$  es el margen de error. Ahora, en nuestro caso particular, una de las funciones es  $f(x) = H_n$  y la otra es  $g(x) = \ln(n)$ , para que la comparación se dé en términos de una igualdad se requiere a  $O(h(x))$ .

Para un uso más adecuado de  $O(h(x))$  usaremos lo que se conoce como notación de Landau.<sup>2</sup>

La conveniencia de trabajar con aproximaciones de este tipo para  $H_n$  es que permite visualizar el comportamiento de  $H_n$  a través de la comparación de ésta con una función tan conocida como lo es  $\ln(n)$ .

Ahora proponemos el siguiente teorema que da lugar a la primera aproximación para  $H_n$ , y que en el siguiente capítulo será de utilidad para alguna de las demostraciones.

### **Teorema 1.2.**

$$H_n = \ln(n) + O(1) \text{ para } n \geq 1.$$

Esta expresión nos dice que  $H_n$  es cercana a  $\ln(n)$  excepto por un error que es cercano a uno. Cuando  $n$  toma valores cercanos a 1 la diferencia entre  $H_n$  y  $\ln(n)$  es cercana a uno; conforme  $n$  crece la diferencia va decreciendo .

### **Demostración.**

Antes de presentar la demostración es adecuado mencionar qué es lo que se quiere desarrollar en el contexto de la gran  $O$ . Ya se mencionó que se quiere demostrar que  $H_n = \ln(n) + O(1)$ , y esto significa que  $|H_n - \ln(n)| \ll 1$ , lo que conlleva a que existan  $C$  y  $N$ , tales que  $|H_n - \ln(n)| \leq C \times 1$ , para toda  $n > N$ . Aquí podemos omitir el valor absoluto porque  $H_{n-1} < H_n$ , y además  $\ln(n) < H_{n-1}$ . Entonces tenemos que  $\ln(n) < H_{n-1} < H_n$ , por lo que  $\ln(n) < H_n$  y  $0 < H_n - \ln(n)$ . En consecuencia, sólo se tiene que demostrar que existen  $C$  y  $N$  tales que  $H_n - \ln(n) \leq C \times 1$ , para toda  $n > N$ .

Ahora pasamos a la demostración.

---

<sup>2</sup>La notación de Landau se refiere al símbolo  $\ll$ , que se lee como *menor menor que* el cual define una relación entre dos funciones de la siguiente manera:

Dadas  $f(x)$  y  $g(x)$ ,  $f(x) \ll g(x)$  si existen  $C$  en los reales y una  $x_0 \in \text{Dom}(f) \cup \text{Dom}(g)$  tal que:

$$f(x) \leq C g(x), \text{ para toda } x > x_0.$$

Con esta notación ahora podemos comparar en términos de una igualdad a  $f(x)$  con  $g(x)$  agregando a esta última el margen de error usando la notación de la gran  $O$  sobre una función  $h(x)$  (se denota como  $O(h(x))$ ) y que se pretende sea una constante o que decrezca en la medida que  $x$  crece. Dicho de otra manera, y usando la definición anterior del menor menor, decimos que  $|f(x) - g(x)| \ll h(x)$ , lo que significa que  $f(x) = g(x) + O(h(x))$ .

Sabemos que  $H_{n-1} < H_n$ , y por el Teorema 1.1, que establece que  $H_n - 1 < \ln(n) < H_{n-1}$ , se sigue que  $H_n - 1 < \ln(n) < H_{n-1} < H_n$ , y en consecuencia que

$$H_n - 1 < \ln(n) < H_n$$

Después de restar  $H_n$  de todos los términos de la expresión, se obtiene

$$-H_n + H_n - 1 < -H_n + \ln(n) < H_n - H_n$$

y, por lo tanto,  $-1 < -H_n + \ln(n) < 0$ , o de manera equivalente,  $0 < H_n - \ln(n) < 1$ . Así, para  $C \geq 1$  y para toda  $n > 0$  se tiene que  $H_n - \ln(n) \leq C \times 1$ , y así se llega a que  $|H_n - \ln(n)| \ll 1$ , para dar lugar a que  $H_n = \ln(n) + O(1)$ . De esta manera se puede ver que el margen de error oscila entorno de una constante que es uno, y se puede decir que el error no tiene grandes modificaciones aunque la  $n$  cambie.

El siguiente resultado proporciona una mejor aproximación para  $H_n$ , y tiene la característica de que el margen de error tiende a cero cuando  $n$  es grande, y además la igualdad para  $H_n$  contará con una constante que no tiene relación con la gran  $O$ . Cabe decir que la demostración recurre a elementos geométricos, lo que nos permitirá visualizar la relación entre  $H_n$  y  $\ln(n)$ .

### **Teorema 1.3.**

$H_n = \ln(n) + \gamma + O(1/n)$ , para  $n$  mayor o igual que uno y una constante  $\gamma$ .<sup>3</sup>

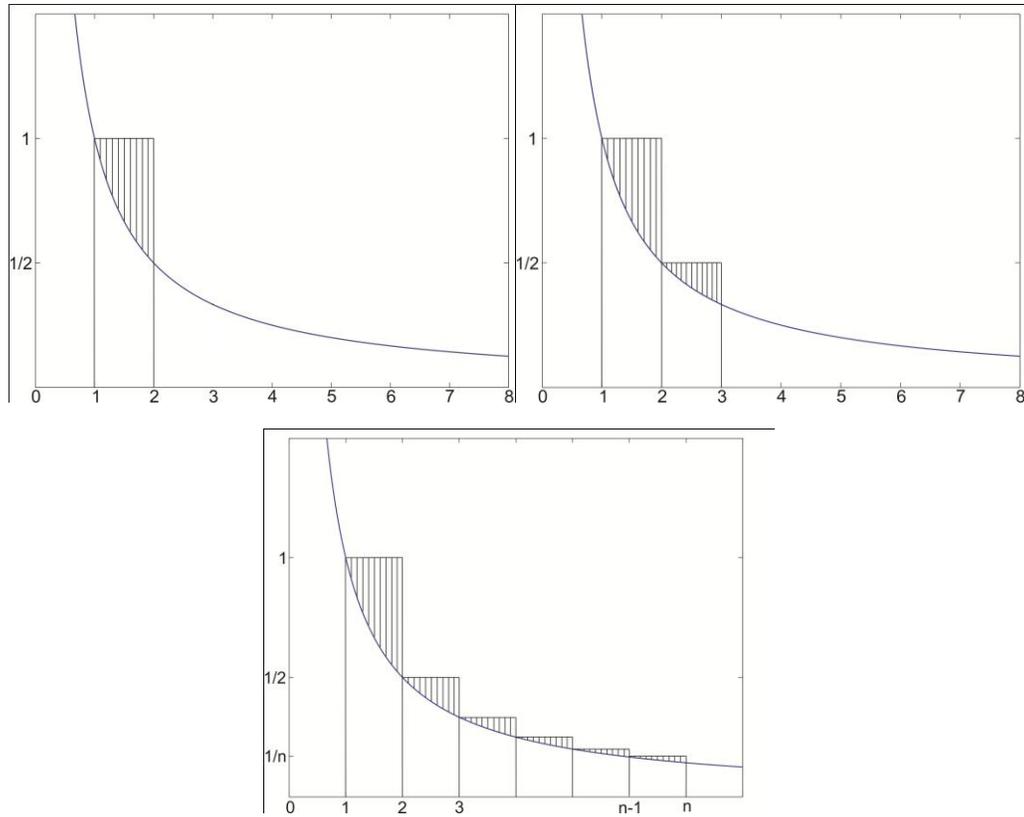
### **Demostración**

Hagamos primero algunas consideraciones geométricas. En las Figura 1.3 se muestra que la parte rayada es lo que  $H_n$  sobrepasa a  $y = \frac{1}{x}$ . A la sección que corresponde el  $i$ -ésimo término de la partición le llamaremos  $E_i$ .

Cada  $E_i$  con  $1 \leq i \leq n - 1$  se pueden alojar en una sección con base de longitud 1 y altura 1, como se muestra en la Figura 1.4, y las partes no se traslapan porque la función  $y = \frac{1}{x}$  es estrictamente decreciente.

---

<sup>3</sup> Lo que se plantea es que  $|H_n - (\ln(n) + \gamma)| \ll 1/n$ , que a su vez por definición significa que existen  $N$  y  $C$  tales que  $|H_n - (\ln(n) + \gamma)| \leq C \times \frac{1}{n}$  para toda  $n > N$ .



**Figura 1.3. Representación por pasos de las  $n$  primeras secciones  $E_i$ .**

Como la sección –de la extrema izquierda– donde colocamos las partes sombreadas, que es lo que le sobra a cada  $H_n$  para igualar  $\ln(n)$ , mide uno de base por uno de altura, entonces  $\sum_{i=1}^{n-1} E_i \leq 1$ . Así, el valor de la suma de los  $E_i$  cuando su cantidad tiende a infinito, es menor que 1 y ésta es la constante  $\gamma$ .<sup>4</sup>

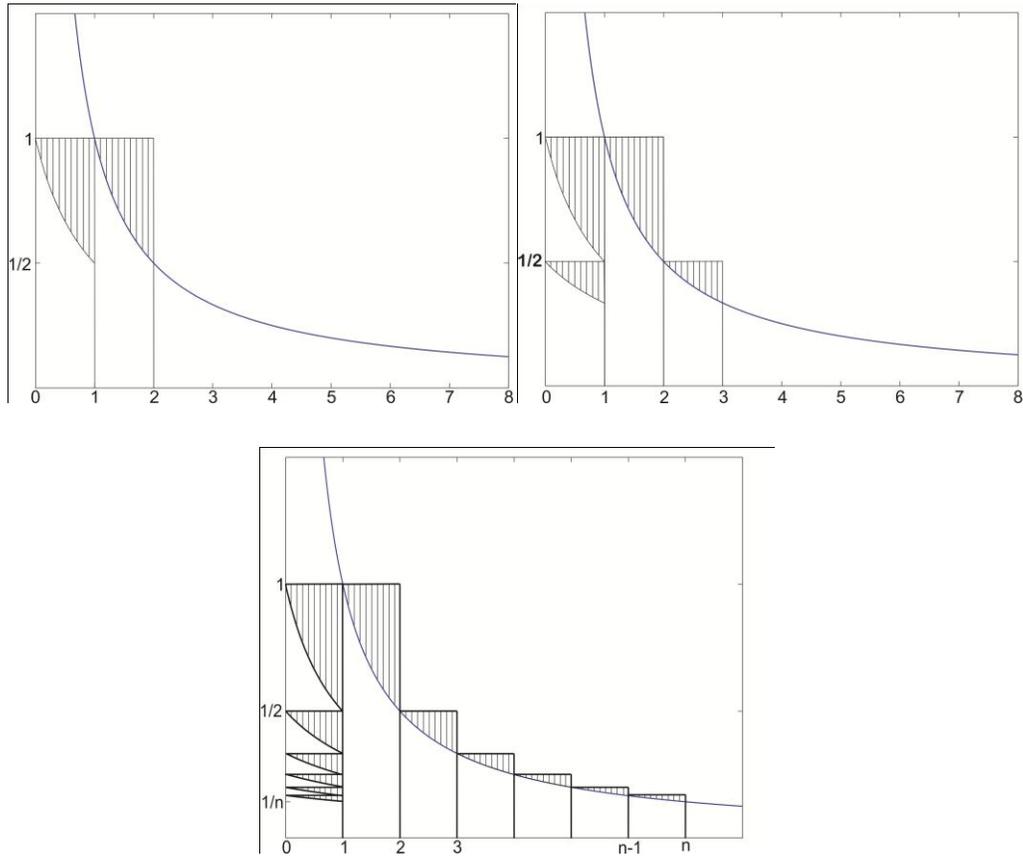
Si a la constante  $\gamma$  le restamos las primeras  $n - 1$  secciones  $E_i$ , cuya suma es  $\sum_{i=1}^{n-1} E_i$ ; llegamos a la siguiente expresión:

$$\gamma - \sum_{i=1}^{n-1} E_i = \gamma - (H_{n-1} - \ln(n)),$$

Donde  $\gamma$  corresponde a la suma de todos los sobrantes (partes sombreadas en la Figura 1.4) cuando  $n$  tiende a infinito, mientras que  $E_i$  son los sobrantes desde 1 hasta  $n - 1$ .

---

<sup>4</sup>  $\gamma$  es una constante importante en matemáticas y recibe el nombre de “constante de Euler”. Tiene un valor aproximado de  $\gamma = 0.57721566490153286061\dots$ . Para saber más de  $\gamma$  consúltese el apéndice al final del capítulo, donde aparecen más comentarios acerca de ella.



**Figura 1.4. Se muestran los acomodos de las secciones  $E_i$  en un cuadrado de área uno, para algunos valores de  $n$**

A partir de  $n + 1$  los sobrantes pueden entrar en un rectángulo de altura  $\frac{1}{n}$  y base uno, el cual tendrá área  $\frac{1}{n}$ , y por la configuración de estos sectores sombreados ellos no llenan todo el rectángulo de área  $\frac{1}{n}$ . Entonces  $\gamma - \sum_{i=1}^{n-1} E_i$  representa a los sobrantes a partir de  $n + 1$ , y por los señalamientos anteriores podemos decir que  $\gamma - \sum_{i=1}^{n-1} E_i < \frac{1}{n}$ , y como la parte izquierda de la desigualdad es mayor que cero, entonces se llega a que

$$0 < \gamma - (H_{n-1} - \ln(n)) < 1/n.$$

Enseguida multiplicamos las desigualdades por  $-1$  y obtenemos que  $-1/n < H_{n-1} - \ln(n) - \gamma < 0$ , y si además se le suma  $\frac{1}{n}$ , se llega a

$$-1/n + 1/n < H_{n-1} - \ln(n) - \gamma + 1/n < 0 + 1/n,$$

y como  $H_{n-1} + \frac{1}{n} = H_n$ , entonces  $0 < H_n - \ln(n) - \gamma < 1/n$ . Empero, si  $C = 1$  y  $N = 1$ , entonces,  $0 < H_n - \ln(n) - \gamma < C \cdot 1/n$ , para todo  $n > N$ . Por lo tanto  $|H_n - \ln(n) - \gamma| \ll 1/n$ , y por la notación de la gran O finalmente se llega a

$$H_n = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

En la Figura 1.4 de la demostración que acabamos de exhibir encontramos el resumen gráfico de la aproximación de  $H_n$  a través de la comparación con  $\ln(n)$ , además de la relación de los números armónicos con la constante de Euler  $\gamma$ .

Enseguida mostraremos que el Teorema 1.3 no solamente es válido para  $n \in \mathbb{N}$ , sino que también para cualquier  $t \in \mathbb{R}^+$ . Este hecho será usado en el capítulo 2 en el proceso de describir el comportamiento de funciones aritméticas, tal como se hará más adelante en este capítulo.

**Teorema 1.4.**

$$H_t = \ln(t) + \gamma + O\left(\frac{1}{t}\right), \text{ con } t \in \mathbb{R}^+.$$

**Demostración:**

Sabemos que<sup>5</sup>

$$H_t = H_{[t]} = \ln[t] + \gamma + O\left(\frac{1}{[t]}\right)$$

Demostremos que

$$\ln[t] = \ln(t) + O\left(\frac{1}{[t]}\right)$$

Y luego lo sustituiremos en la expresión anterior.

Por una parte  $\int_{[t]}^t \frac{1}{x} dx = \ln(t) - \ln[t] \geq 0$  es el área bajo la curva  $y = \frac{1}{x}$ . Ver Figura 1.5.

---

<sup>5</sup> Se define  $H_t$  para  $t \in \mathbb{R}$  como

$$H_t = \sum_{k \leq t} \frac{1}{k}$$

Dado que  $k \leq t$  exactamente cuando  $k \leq [t]$ , donde  $[t]$  simboliza la parte entera de  $t$ , entonces

$$H_{[t]} = \sum_{k \leq [t]} \frac{1}{k}$$

De lo anterior tenemos que  $H_t = H_{[t]}$ .

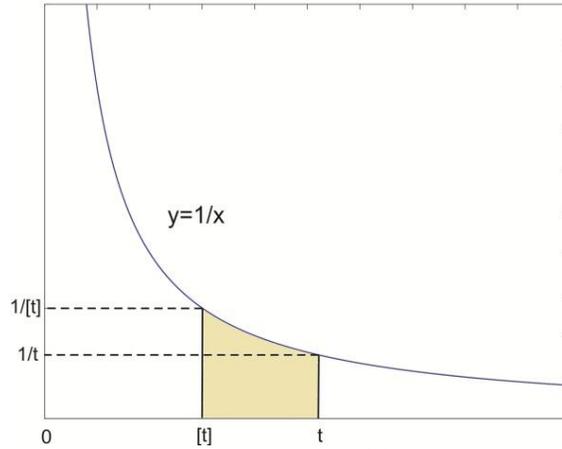


Figura 1.5. Área bajo la gráfica de  $y = 1/x$ , en el intervalo  $[[t], t]$ .

Por otra parte la distancia de  $[t]$  a  $t$  es menor que 1, así que un rectángulo de base  $t - [t]$  y altura  $\frac{1}{[t]}$  tendría área a lo más  $\frac{1}{[t]}$ , como se ve en la Figura 1.6.

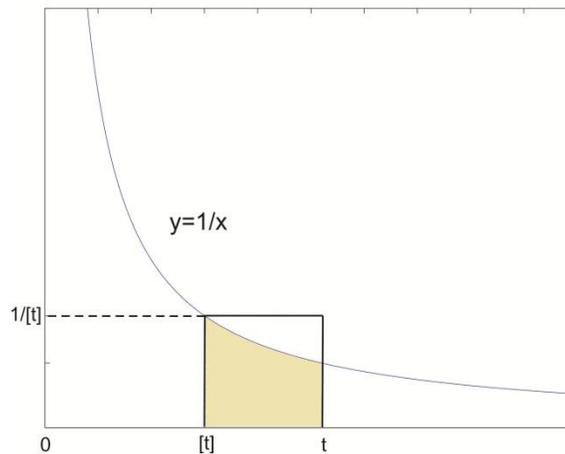


Figura 1.6: El área bajo la gráfica de  $y = 1/x$ , es menor a la del rectángulo de altura  $1/[t]$ .

Así que  $0 < \ln(t) - \ln[t] \leq \frac{1}{[t]}$  para toda  $[t] \geq 1$ , entonces  $\ln[t] = \ln(t) + o\left(\frac{1}{[t]}\right)$ . Sustituyendo esto en  $H_{[t]}$ :

$$H_t = H_{[t]} = \ln(t) + o\left(\frac{1}{[t]}\right) + \gamma + o\left(\frac{1}{[t]}\right) = \ln(t) + \gamma + 2o\left(\frac{1}{[t]}\right) = \ln(t) + \gamma + o\left(\frac{1}{[t]}\right)^6$$

pero que  $H_t = \ln(t) + \gamma + o\left(\frac{1}{[t]}\right)$  se cumpla implica que:

$$|H_t - (\ln(t) + \gamma)| \ll \frac{1}{[t]}$$

<sup>6</sup> El error  $2o\left(\frac{1}{[t]}\right)$  queda representada por  $o\left(\frac{1}{[t]}\right)$ .

Pero  $\frac{1}{[t]} \ll \frac{1}{t}$ , ya que existen  $C = 2$  y  $N = 1$  tales que  $\frac{1}{[t]} \leq 2 \cdot \frac{1}{t}$ , para toda  $t \geq 1$ , por lo que  $|H_t - (\ln(t) + \gamma)| \ll \frac{1}{[t]} \ll \frac{1}{t}$ , por lo tanto  $|H_t - (\ln(t) + \gamma)| \ll \frac{1}{t}$ , esto es,  $H_t = \ln(n) + \gamma + o\left(\frac{1}{t}\right)$ .

A pesar de que la segunda aproximación que construimos para el  $n$ -ésimo armónico ya tiene un buen grado de aproximación, considerando que  $1/n$  se hace pequeño muy rápido, resulta que es posible contemplar la posibilidad de que el margen de error se puede mejorar para que así la aproximación sea mejor con valores pequeños de  $n$ . Para esto presentamos las siguientes aproximaciones, de las cuales sacaremos algunas conclusiones a partir de cálculos numéricos.

### Otras aproximaciones

#### Tipo A

Al observar la Tabla<sup>7</sup> 1.1.

$n$	$H_n$	$\ln(n) + \gamma + 1/(2n)$
10	2.9289682539682539683	2.9298007578955785446
$10^2$	5.1873775176396202608	5.1873858508896242286
$10^3$	7.4854708605503449127	7.4854709438836699127
$10^4$	9.7876060360443822642	9.7876060368777155967
$10^5$	12.090146129863427947	12.090146129871761281

**Tabla 1.1**

vemos que la expresión  $\left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)$  se acerca muy rápido al valor racional del  $n$ -ésimo armónico, es decir, para valores pequeños de  $n$  la aproximación ya es muy certera. Entonces, es apropiado analizar la posibilidad de que exista una función  $h(n)$  tal que:

$$\left|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)\right| \ll h(n)$$

que a su vez implicaría que existen  $C$  y  $N$  tales que:

$$\left|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)\right| \ll C \cdot h(n), \text{ para toda } n > N, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

De los datos de la Tabla 1.1 se percibe que el valor absoluto de la diferencia  $H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)$  se puede expresar de esta manera:

<sup>7</sup> Esta tabla fue tomada de (Stopples, 2003)

$n$	$\left  H_n - \left( \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} \right) \right $
10	$8.325 \times 10^{-4}$
$10^2$	$8.333 \times 10^{-6}$
$10^3$	$8.333 \times 10^{-8}$
$10^4$	$8.333 \times 10^{-10}$
$10^5$	$8.333 \times 10^{-12}$

Con estos datos podemos ver que los valores de  $\left| H_n - \left( \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} \right) \right|$  se comportan aproximadamente como una función de la forma  $\frac{k}{n^m}$ , con  $m$  en los naturales. Después de probar para algunos valores de  $m$  y de  $C$ , encontramos que con  $C = \frac{1}{11}$ ,  $h(n) = \frac{1}{n^2}$  y  $N = 10$  se podría satisfacer la desigualdad deseada. Esto es, si tomamos esos valores obtenemos que  $\frac{1}{11 \cdot n^2}$  es más grande que  $\left| H_n - \left( \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} \right) \right|$ , según los valores de la Tabla anterior, como se muestra en la tabla que sigue:

$n$	$\frac{1}{11 \cdot n^2}$
10	$9.09 \times 10^{-4}$
$10^2$	$9.09 \times 10^{-6}$
$10^3$	$9.09 \times 10^{-8}$
$10^4$	$9.09 \times 10^{-10}$
$10^5$	$9.09 \times 10^{-12}$

Como  $\frac{1}{11 \cdot n^2}$  y  $\left| H_n - \left( \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} \right) \right|$  son funciones decrecientes, entonces tenemos la certeza de que

$$\left| H_n - \left( \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} \right) \right| \leq \frac{1}{11 \cdot n^2}, \text{ para } n > 10$$

Así, con base en lo anterior podemos decir que:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En conclusión, se propone un margen de error  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  que tiende a cero rápidamente, y esta aproximación de  $H_n$  es mejor que la anterior, expresada como

$$H_n = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Todo esto se justifica con los cálculos que nos sugerían los datos de Tabla 1.1.

### Aproximación Tipo B

De manera análoga ahora tenemos el conjunto de datos de la Tabla 1.2.<sup>8</sup>

$n$	$H_n$	$\ln(n) + \gamma + 1/(2n) - 1/(12n^2)$
10	2.9289682539682539683	2.9289674245622452113
$10^2$	5.1873775176396202608	5.1873775175562908953
$10^3$	7.4854708605503449127	7.4854708605503365793
$10^4$	9.7876060360443822642	9.7876060360443822633
$10^5$	12.090146129863427947	12.090146129863427934

**Tabla 1.2**

Nótese que en la Tabla 1.2 se aprecia que la aproximación que proporciona la fórmula  $\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}$  del  $n$ -ésimo armónico tiene una exactitud que alcanza 9 decimales desde  $n = 10^2$ , mientras que la fórmula anterior de la aproximación **Tipo A** es de solo cuatro decimales.

Entonces, como en el caso anterior, trataremos de encontrar una función  $h(n)$  y constantes  $C$  y  $N$ , tales que:

$$\left| H_n - \left( \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \right) \right| \leq C \cdot h(n), \text{ para toda } n > N.$$

En la tabla que sigue se muestran algunos valores de

$$\left| H_n - \left( \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \right) \right|,$$

encontrados con base en los datos de la Tabla 1.2:

<sup>8</sup> Esta tabla fue tomada de (Stopples, 2003)

$n$	$\left  H_n - \left( \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \right) \right $
10	$8.29 \times 10^{-7}$
$10^2$	$8.33 \times 10^{-11}$
$10^3$	$8.33 \times 10^{-15}$
$10^4$	$8.33 \times 10^{-19}$
$10^5$	$8.33 \times 10^{-23}$

Con estos datos y con los cálculos hechos para el ejercicio anterior podemos proponer a la función  $h(n) = \frac{1}{n^5}$ , junto con  $C = \frac{1}{11}$  y  $n > 10$ .

Así, con base en estos elementos podemos hacer la siguiente tabla

$n$	$\frac{1}{11 \cdot n^5}$
10	$9.09 \times 10^{-7}$
$10^2$	$9.09 \times 10^{-11}$
$10^3$	$9.09 \times 10^{-15}$
$10^4$	$9.09 \times 10^{-19}$
$10^5$	$9.09 \times 10^{-23}$

Y como también  $\left| H_n - \left( \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \right) \right|$  y  $\frac{1}{11 \cdot n^5}$  son decrecientes, entonces

$$\left| H_n - \left( \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \right) \right| \leq \frac{1}{11 \cdot n^5}, \text{ para toda } n > 10.$$

Por lo tanto se llega a que  $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$ , y ésta es la nueva aproximación para el  $n$ -ésimo armónico según los datos de la Tabla 1.2, la cual supera ampliamente lo logrado con la aproximación Tipo A.

Para terminar este apartado mencionaremos que Leonhard Euler aportó los elementos necesarios (*Institutiones Calculi Differentialis*(1755 Parte II, cap. VI)) para que fuera posible elaborar una igualdad semejante a

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Ésta es  $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - [\dots]$  o, enunciada de otra manera,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{n^k}, \text{ donde } B_k \text{ es el } k\text{-ésimo número de Bernoulli.}$$

Esta igualdad no es una aproximación tan manejable como la construida en el **Tipo B**, pero lo sobresaliente es que nos proporciona una relación directa con los números de Bernoulli.

### 1.3. Generalización de la constante de Euler

Una vez más hay que hacer énfasis en que en las cuatro expresiones que acabamos de construir para obtener una aproximación del  $n$ -ésimo armónico aparece la constante  $\gamma$  de Euler. Acto seguido extenderemos la idea del uso de una constante para obtener la suma de una sucesión  $\{d_n\}$  de números que representan sectores de áreas sobre una curva  $f$ , que es positiva y estrictamente decreciente. Consideremos que  $f$  es una función estrictamente decreciente y positiva en el intervalo  $[1, \infty)$ ; por otro lado la sucesión  $\{d_n\}$  es de los  $n$ -números que representan las áreas que sobrepasan la curva (véase que en la Figura 1.7 los  $d_n$  son los sectores sombreados), que son parte de los rectángulos que cubren “super ormente” el área bajo la curva de  $f$  en el intervalo  $[1, n]$ . Entonces, definimos

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x) dx, \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots \quad (1.1)$$

Se nota que  $d_{n+1} > d_n$ , y que además las partes sombreadas pueden ser nuevamente concentradas en una zona de altura  $f(1)$  y base unitaria (véase la Figura 1.7). Como  $f$  es estrictamente decreciente entonces no existe traslape de las zonas sombreadas cuando se agrupan en la zona antes mencionada. Y al comparar las áreas de cada una de las  $d_i$  se tiene que  $d_n < d_{n+1} < f(1)$ , entonces se ve que  $\{d_n\}$  es una sucesión creciente que a la vez converge a un límite  $C(f)$ , por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = C(f)$$

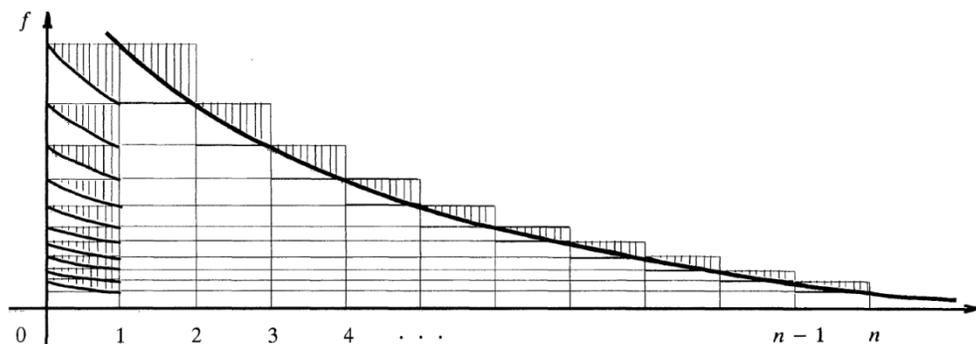


Figura. 1.7 . Representacion grafica de la sucesión  $\{d_n\}$ .

Aquí nos podemos referir a  $C(f)$  como una constante de carácter general asociada a cada función  $f$ . La interpretación geométrica de este resultado es que  $C(f)$  es la suma de todas las partes sombreadas que sobrepasan a la función  $f$  en el intervalo  $[1, \infty)$ . Véase en la Figura 1.7 que estas partes sombreadas cumplen con  $0 < C(f) < f(1)$ ; por otro lado,  $(C(f) - d_n)$  representa la suma de las áreas sombreadas en el intervalo  $[n, \infty)$ , y estas áreas nuevamente se pueden trasladar a la izquierda dentro de un rectángulo de altura  $f(n)$ , y con esto se llega a que:

$$0 < C(f) - d_n < f(n), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (1.2)$$

Con base en esto podemos enunciar lo siguiente:

Si  $f$  es una función estrictamente decreciente sobre  $[1, \infty)$ , entonces existen una constante positiva  $C(f) < f(1)$  y una sucesión  $\{E_f(n)\}$ , donde  $0 < E_f(n) < f(n)$ , tales

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + C(f) + E_f(n), \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.3)$$

Nótese que esta ecuación nos indica que la diferencia entre la suma y la integral es igual a una constante que dependerá de cómo sea  $f$ , más una cantidad positiva  $E_f(n)$ , que es menor que el último término de la suma. Entonces, si  $f(n)$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito, entonces  $E_f(n)$  también tiende a cero.

Para demostrar la proposición enunciada definimos la igualdad

$$E_f(n) = f(n) - (C(f) - d_n),$$

entonces la ecuación (1.3) es una consecuencia de la definición en la ecuación (1.1), y las desigualdades

$$0 < E_f(n) < f(n)$$

surgen de la ecuación (1.2).

Finalmente, si  $f(n)$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito, entonces de (3) se tiene que

$$C(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right)$$

Esta constante es un caso general de lo que conocemos como la constante de Euler asociada a una función  $f$ .

Un caso particular, cuando  $f(x) = \frac{1}{x}$  entonces  $C(f)$  es la constante  $\gamma$  de Euler que ya conocimos, y que usamos antes en la aproximación de  $H_n$ .

Para profundizar más en este estudio de la generalización de las constantes asociadas con la suma  $\sum_{k=1}^n f(k)$  recomendamos leer el artículo de (Apostol, 1999)

#### 1.4. Algunos usos de los números armónicos para analizar funciones aritméticas.

En la sección anterior se vio cómo acotar a  $H_n$  y también cómo encontrar valores muy cercanos a él. Las aproximaciones se hicieron utilizando la función  $\ln(n)$  y la constante de Euler. Ahora procederemos a estudiar cómo se pueden usar estas propiedades de los armónicos para evaluar otras funciones aritméticas, las cuales generalmente son muy inestables, y por lo mismo no es fácil describir su comportamiento en determinados intervalos. En el primer caso se trata de acotar la función suma de divisores, es decir, la función aritmética  $\sigma(n)$  usada en la teoría de números.

#### Teorema 1.5.

$$\sigma(n) \ll n \ln(n).$$

## Demostración

La ruta de la prueba consiste en demostrar primero que  $\sigma(n) \leq n \ln(n) + n$ , para toda  $n$ . En segundo lugar, si mostramos que  $n \ln(n) + n \ll n \ln(n)$ , obtendremos que  $\sigma(n) \ll n \ln(n)$ .

Pasemos ahora a la primera parte: demostrar que  $\sigma(n) \leq n \ln(n) + n$ , para toda  $n$ . Para esto se requiere considerar las siguientes propiedades de los divisores de un entero:

Dado un número  $n$  y un divisor  $d$  de  $n$ , entonces  $\frac{n}{d}$  también es un divisor de  $n$ .<sup>9</sup> Esto nos dice que para los divisores  $d_1 = 1, d_2, d_3, \dots, d_m = n$  de  $n$  se tienen sus complementos

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{d_2}, \frac{n}{d_3}, \dots, \frac{n}{n},$$

que finalmente son los mismos divisores  $d_i$  pero escritos de diferente manera y en otro orden. Con estos elementos se propone que

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d}, \text{ y esto impl ca que } \sigma(n) = \sum_{d|n} \frac{n}{d}$$

Donde  $d|n$  denota a los números  $d$  divisores de  $n$ . Como la suma corre en  $d$ , entonces  $\sigma(n) = n \sum_{d|n} \frac{1}{d}$  y de aquí se sigue que  $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$ .

Y si consideramos una suma que no esté restringida a correr sólo en los divisores de  $n$ , sino que puede desarrollarse para todos los enteros menores o iguales que  $n$ , entonces se tiene que

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \leq \sum_{d=1}^n \frac{1}{d} = H_n.$$

Para el lado derecho de la expresión anterior podemos aplicar las cotas obtenidas anteriormente, es decir, que  $H_n - 1 < \ln(n)$ , o lo que es equivalente  $H_n < \ln(n) + 1$ . Así, llegamos a que:

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \leq \sum_{d=1}^n \frac{1}{d} = H_n \leq \ln(n) + 1$$

---

<sup>9</sup>Por ejemplo, tomemos si  $n=8$ , sus divisores son  $d=1,2,4,8$ , pero también se pueden ver como  $\frac{8}{1}=8, \frac{8}{2}=4,$

$\frac{8}{4}=2, \frac{8}{8}=1.$

y por tanto  $\frac{\sigma(n)}{n} \leq \ln(n) + 1$ , o de manera equivalente,  $\sigma(n) \leq n \ln(n) + n$ , que es lo que se quería demostrar primeramente.

Es así como los números armónicos fueron un elemento fundamental para llegar al resultado requerido.

Ahora pasamos a la segunda parte de la demostración, que es la de probar que existen unas constantes  $C$  y  $N$  tales que  $n \ln(n) + n \leq n \ln(n) \cdot C$ , para toda  $n > N$ .

Así, considérese que para  $n \geq 3$  se tiene que  $1 \leq \ln(n)$ , y de esto se sigue que  $n \leq n \ln(n)$  para  $n \geq 3$ . Después de sumar en ambos lados  $n \ln(n)$  se obtiene que

$$n \ln(n) + n \leq 2n \ln(n).$$

Si suponemos que para el lado derecho  $2n \ln(n) \leq Cn \ln(n)$  para alguna  $C$ , entonces  $0 \leq Cn \ln(n) - 2n \ln(n)$ , y por tanto  $0 \leq (C - 2)n \ln(n)$ . De esto último tenemos que para  $C = 3$  siempre se cumple, considerando que <sup>10</sup>  $n \geq 3$ . Con esto último tenemos que  $2n \ln(n) \leq Cn \ln(n)$  para  $n \geq 3$ , y por lo tanto

$$n \ln(n) + n \leq 2n \ln(n) \leq Cn \ln(n)$$

De donde tenemos que  $n \ln(n) + n \leq Cn \ln(n)$ , con este resultado aunado a la primera parte de la demostración llegamos a que  $\sigma(n) \leq n \ln(n) + n \leq Cn \ln(n)$  <sup>11</sup>, por lo tanto  $\sigma(n) \ll n \ln(n)$ .

Como uno de los objetivos de la matemática es simplificar los procesos así como sus expresiones (fórmulas), entonces cabe preguntarnos si es posible mejorar la cota anterior de  $\sigma(n)$  y obtener una más simple. A continuación veremos la posibilidad de establecer que  $\sigma(n) \ll n$ .

Que  $\sigma(n)$  sea  $\ll n$  significaría que existen constantes  $C$  y  $N$  tales que  $\sigma(n) \leq Cn$  para toda  $n > N$ . Pero si  $\sigma(n)$  no es  $\ll n$ , entonces veamos qué pasa con  $C$  y  $N$ .

Si no existen  $C$  y  $N$  tales que  $\sigma(n) \leq Cn$  para toda  $n > N$ , implica que para cualesquiera  $C$  existen una infinidad de enteros  $n$  tales  $\sigma(n) > Cn$ .

<sup>10</sup> Aquí tenemos que  $C = 3$  y  $N = 3$  son las constantes requeridas.

<sup>11</sup> Para  $C$  y  $N$  elegidas convenientemente.

Así, dada una constante  $C$  necesitamos examinar si es posible generar una infinidad de valores para  $n$  tales que  $\sigma(n) > Cn$ , y si es así, entonces terminamos la demostración de la imposibilidad de que  $\sigma(n) \ll n$ .

Para examinar con más detalle lo anterior elegimos cualquier  $N \in \mathbb{Z}$  tal que  $N > e^C$ , y de esto se obtiene  $\ln(N) > C$ . Ahora como  $\ln(N)$  es una función creciente, entonces sin problema podemos considerar a  $n = N!$ .

Con base en lo ya visto sabemos que  $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$ , donde  $d$  corre en los divisores de  $n$ , pero los divisores de  $n = N!$  son más que si sólo consideramos a los divisores  $1, 2, 3, \dots, N$ .

Entonces  $\sum_{d|n} \frac{1}{d}$  tiene más o igual cantidad de sumandos que  $\sum_{d=1}^N \frac{1}{d}$ , por lo que

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \geq \sum_{d=1}^N \frac{1}{d}$$

Nuevamente podemos ver cómo al trabajar con los divisores de  $n$  llegamos a una desigualdad que involucra números armónicos, y entonces podemos utilizar las desigualdades obtenidas en el teorema 1.1 de esta tesis, y de dichas desigualdades tenemos que  $H_{N-1} < H_N$ ; y como  $\ln(N) < H_{N-1} < H_N$ , entonces  $\ln(N) < H_N$ . De aquí concluimos que  $\sum_{d=1}^N \frac{1}{d} = H_N > \ln(N)$ .

Además, por la elección de  $N$  sabemos que  $\ln(N) > C$ ;

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \geq \sum_{d=1}^N \frac{1}{d} = H_N > \ln(N) > C$$

por lo tanto  $\frac{\sigma(n)}{n} > C$  y, finalmente,  $\sigma(n) > Cn$  para una infinidad de valores de  $n$ .

Por último se llega a que existen una infinidad de valores de  $n$  para cada  $C$  tales que  $\sigma(n) > Cn$ , y con esto se concluye que no es posible que  $\sigma(n) \ll n$ .

En resumen, hemos presentado diversas cotas y aproximaciones para  $H_n$  y con base en ello mostramos algunos resultados que involucran a otras funciones aritméticas. Lo que deseamos destacar es que las demostraciones de dichos resultados requieren de los números armónicos y de sus propiedades previamente presentadas.

## Capítulo 2

### Promedios

La primera parte de este capítulo estará dedicada al estudio del comportamiento de funciones aritméticas –como en el capítulo anterior–, pero ahora desde la perspectiva del concepto de promedios en funciones, y siempre apoyándose en los resultados sobre números armónicos obtenidos en el capítulo anterior. En la segunda parte se definirán los números armónicos de segundo orden –la suma de fracciones con denominadores cuadrados–, además de una relación análoga a la del Teorema 1.2 del capítulo 1, pero ahora para los armónicos de segundo orden.

En el capítulo anterior se estudiaron algunas formas para aproximar ciertas funciones aritméticas, como fue el caso de  $\sigma(n)$ , y se hizo a partir del uso de otras más simples o ya conocidas. Con esto se pretendía que el margen de error para que se diera la igualdad fuera muy *pequeño*. Sin embargo, sucede que para funciones como  $\tau(n)$ <sup>12</sup> no es fácil poder plantear una aproximación con base en una función simple, y esto se debe a que  $\tau(n)$  es una función muy irregular, pues sucede que ésta puede tener como valor al dos, cuando  $n$  es un primo, pero si el siguiente número,  $n + 1$ , es un número compuesto con muchos divisores, entonces el valor de  $\tau(n + 1)$  dar un gran salto.

Así, frente a la dificultad de poder modelar el comportamiento de la función, y ante la inquietud por conocer más sobre  $\tau(n)$ , optamos por el estudio de los promedios, esto es, analizar el promedio de conjuntos finitos de valores en la imagen de este tipo de funciones, y esto sí nos permitirá conocer ciertas características de esta clase de funciones tan inestables.

Con el fin de suavizar esos saltos y así aproximar a manera de promedio una función con otra para compararlas, a continuación se enuncia una definición.

---

<sup>12</sup> Recordemos que ésta es la función aritmética que nos indica la cantidad de divisores de un número. Por ejemplo, los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12, entonces  $\tau(12) = 6$ , pero si el número en cuestión es primo, como el 13, sus divisores son 1 y 13, entonces  $\tau(k) = 2$ .

**Definición.** Decimos que  $f(n)$  es asintótica a  $g(n)$  si  $\frac{f(n)}{g(n)} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y se escribe como  $f(n) \sim g(n)$ .

Para ejemplificar el sentido de la definición usemos la relación ya conocida  $H_n = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Al restar  $\ln(n)$  de ambos lados se obtiene

$$H_n - \ln(n) = \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

y al dividir cada lado entre  $\gamma$

$$\frac{H_n - \ln(n)}{\gamma} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Aquí  $\gamma^{-1}$  es absorbida por el término de la gran O, que es  $\frac{1}{n}$ , y a la vez este término tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , lo que significa que el error se hace tan pequeño como se quiera cuando  $n$  se hace grande. Finalmente  $\frac{H_n - \ln(n)}{\gamma} \rightarrow 1$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , esto es  $H_n - \ln(n) \sim \gamma$ .

El siguiente resultado nos proporciona información por intervalos de las imágenes de  $\tau(n)$ ; la ventaja de esto es que sí nos permite visualizar explícitamente los resultados dentro de una función continua. Para llegar a esto, el uso de los números armónicos es fundamental dado que simplifican la demostración del teorema que ahora enunciamos.

**Teorema 2.1.** La suma de los primeros  $n$  valores de  $\tau(n)$  es

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = n \ln(n) + O(n)$$

o de manera equivalente,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau(k) = \ln(n) + O(1).$$

### Demostración:

Para adentrarnos más en la ubicación de los divisores de un entero primero damos un ejemplo numérico (Stopples 2003), y posteriormente pasamos a la demostración general.

Sabemos que por cada divisor  $d$  de  $k$  podemos tener que  $\frac{k}{d} = c$ , donde  $c$  también es un divisor de  $k$ . Más aún, podemos ubicar a los enteros  $c$  y  $d$  como un punto  $(c, d)$  en el plano cuyas coordenadas son las de un punto en la gráfica de la función  $x \cdot y = k$ . En la Figura 2.1 podemos ver los puntos  $(c, d)$  para el caso de  $k = 8$ .

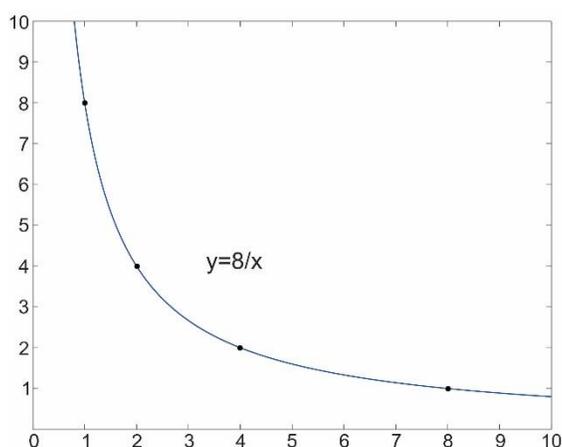


Figura 2.1: Gráfica de  $y = 8/x$ , resaltando los puntos  $(c, d)$ , con  $c$  y  $d$  divisores de 8

Ahora hagamos lo mismo para  $k = 1, 2, \dots, 7$  (ver la siguiente tabla) y coloquemos los puntos  $(c, d)$  de la misma manera que en  $k = 8$ , como se muestra en la Figura 2.2.

$k$	$d$ divisor de $k$	Puntos de forma $(c, d)$
1	1	(1,1)
2	1, 2	(2,1), (1,2)
3	1,3	(3,1), (1,3)
4	1, 2, 4	(4,1), (2,2), (1,4)
5	1, 5	(5,1), (1,5)
6	1, 2, 3, 6	(6,1), (3,2), (2,3), (1,6)
7	1, 7	(7,1), (1,7)

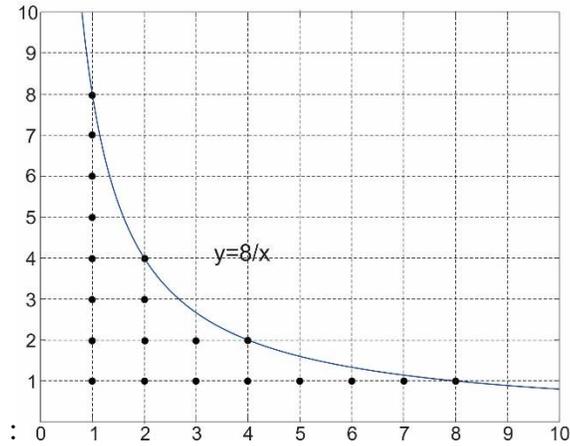


Figura 2.2: Los puntos  $(c, d)$ , con  $c$  y  $d$  divisores de  $n = 1, 2, \dots, 8$ .

Al visualizarlos podemos notar que según el valor de  $k$  los puntos  $(c, d)$  se localizan en alguna de las hipérbolas  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{2}{x}$ , ...,  $y = \frac{8}{x}$  y ellos a la vez son los que se contabilizan en la suma

$$\sum_{k=1}^8 \tau(k) = \tau(1) + \tau(2) + \dots + \tau(8),$$

es decir, se están contando los pares de enteros  $(c, d)$  con  $c \cdot d \leq n$ , sin considerar los ejes.

Por otro lado, si se consideran los cuadrados de área unitaria de la Figura 2.2 asociados a los puntos resaltados, de tal forma que a cada punto le asociamos el cuadro donde él se ubica en la esquina superior izquierda, entonces el área total de los cuadros que están bajo la curva  $y = \frac{8}{x}$  y sobre ella es  $\int_1^8 \frac{8}{x} dx = 8 \ln(8)$ . Pero se tiene que considerar un aspecto adicional de los cuadrados que están sobre la curva, y es que entre ellos existen los que tienen una parte de su área que no está asociada a uno de los puntos señalados, y también están los que sí se asocian a un punto pero que su área rebasa a la curva  $y = \frac{8}{x}$ . Estos sectores de áreas los podemos ver sombreados en la Figura 2.3.

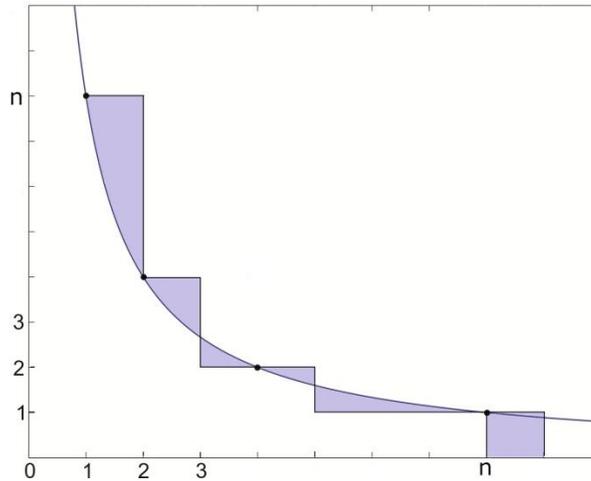


Figura 2.3.

Nótese que las áreas que rebasan, en conjunto no pueden ser mayores que 8, o en los términos que estamos usando,  $O(8)$ , y se debe a que la función  $y = \frac{8}{x}$  es continua y estrictamente decreciente. Entonces las áreas no se traslapan y se pueden alojar en el rectángulo de base uno y altura ocho.

Finalmente tenemos que  $\sum_{k=1}^8 \tau(k) = 8 \ln(8) + O(8)$ , o de forma equivalente  $\frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \tau(k) = \ln(8) + O(1)$ , que es el promedio de la suma.

Después del caso particular que nos lleva al resultado de una forma un tanto heurística, pasamos a un planteamiento más general.

Primero contamos los divisores de cada  $k$  y luego sumamos los totales

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{d|k} 1,$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{d|k} 1 = \sum_{\substack{c,d \\ c \cdot d \leq n}} 1$$

Como se pudo ver en el ejemplo,  $d$  recorre todos y cada uno de los divisores de los enteros menores o iguales que  $n$ . Pero antes de continuar con la demostración es importante describir el uso de los números armónicos en esta demostración.

Al igual que antes es útil ver a los divisores de  $n$  como  $n/d$ , y de esta forma es más fácil notar que  $\left[\frac{n}{d}\right] = n\left(\frac{1}{d}\right) + O(1)$ . Ahora, la suma de los divisores  $d$  menores o iguales a  $n$ , tienen a la expresión  $n \cdot H_n + O(n)$ , y a partir de aquí se pueden usar las propiedades ya demostradas de  $H_n$  –en el Teorema 1.2– del capítulo anterior, para dar lugar al resultado que se busca. Enseguida continuamos con la demostración.

Dado que  $c \cdot d \leq n$ ,  $c \leq \frac{n}{d}$  y también  $d \leq n$ , podemos ver a  $\sum_{\substack{c,d \\ c \cdot d \leq n}} 1$  como

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{\substack{c,d \\ c \cdot d \leq n}} 1 = \sum_{d \leq n} \sum_{c \leq \frac{n}{d}} 1$$

Esto se ve mejor en el ejemplo numérico y en la Figura 2.2. La suma interior de la parte derecha de la igualdad significa que por cada divisor  $d$  de  $k = 1, 2, \dots, n$  menor o igual a  $n$  se toma  $\frac{n}{d}$  y se cuentan todos los enteros  $c$  menores o iguales a  $\frac{n}{d}$ , en caso de que éste sea entero. Esto último es representado por la función  $\left[\frac{n}{d}\right]$ , (entiéndase por  $\left[\frac{n}{d}\right]$  la parte entera de  $\frac{n}{d}$ ), así que podríamos escribir solo a

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d \leq n} \left[\frac{n}{d}\right].$$

Pero la parte decimal de  $\frac{n}{d}$  no pasa de 1, así que  $\left[\frac{n}{d}\right] = \frac{n}{d} + O(1)$  por lo que ahora tenemos:

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d \leq n} \left[\frac{n}{d}\right] = \sum_{d \leq n} \left(\frac{n}{d} + O(1)\right) = n \sum_{d \leq n} \frac{1}{d} + \sum_{d \leq n} O(1) = nH_n + O(n)$$

Por cada término  $\frac{n}{d}$  hay un error de alrededor de 1, y como son  $n$ , entonces al sumarlos el error es menor o igual a  $n$ , esto es,  $O(n)$ . Además, ya se demostró que  $H_n = \ln(n) + O(1)$ , por lo tanto, si sustituimos a  $H_n$  en la igualdad anterior, se obtiene que

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = n(\ln(n) + O(1)) + O(n) = n \ln(n) + O(n) + O(n) = n \ln(n) + 2O(n) = n \ln(n) + O(n)$$

La última igualdad es posible porque al 2 lo podemos integrar junto con el término  $n$  de la gran  $O$ . Con esto termina la demostración. De este resultado se deriva el siguiente corolario, y a pesar de que no intervienen directamente los números armónicos

consideramos que es adecuado presentarlo porque complementa el estudio de la función  $\tau(k)$ .

**Corolario 2.1.**

$\frac{\sum_{k=1}^n \tau(k)}{\ln(n!)} \sim 1$  cuando  $n$  tiende a infinito. Dicho en otras palabras,  $\sum_{k=1}^n \tau(k)$  es asintótica a  $\ln(n!)$  cuando  $n$  tiende a infinito.

Pero antes de demostrar el Corolario 2.1 requerimos de dos lemas previos que facilitarán el proceso

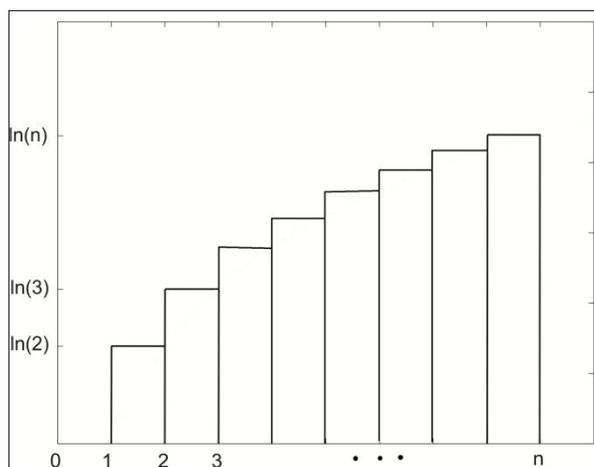
**Lema 2.1.**

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + O(\ln(n)),$$

Lo demostraremos por dos vías: la primera seguirá una forma más geométrica, como ya lo hemos hecho antes; la segunda sigue un derrotero dentro del cálculo integral y ésta la presentamos en el Apéndice II.

**Demostración**

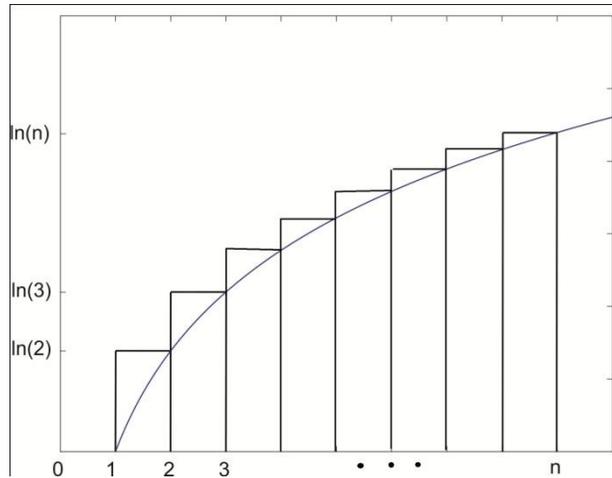
En la Figura 2.4 se muestran rectángulos de área  $\ln(2), \ln(3), \dots, \ln(n)$ , y la suma de todas las áreas  $\sum_{k=2}^n \ln(k)$ , es la zona sombreada.



**Figura 2.4:** Rectángulos de área  $\ln(2), \ln(3), \dots, \ln(n)$ .

Por otro lado  $\int_1^n \ln(x)dx$  es el área bajo la curva  $y = \ln(x)$  desde 1 hasta  $n$ . Al sobreponer los rectángulos y la curva (véase Figura 2.5) se puede apreciar que

$$\sum_{k=2}^n \ln(k) \geq \int_1^n \ln(x) dx$$



**Figura 2.5:** Área bajo la gráfica del  $\ln(x)$  hasta  $n$  comparada con área de los rectángulos de alturas  $\ln(2), \ln(3), \dots, \ln(n)$ .

y la diferencia  $0 \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) - \int_1^n \ln(x) dx$  se puede visualizar en la Figura 2.6. Lo que está sombreado, que sobresale por encima de  $\ln(n)$  y que cabe en el rectángulo de área  $\ln(n)$ , da lugar a que

$$0 \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) - \int_1^n \ln(x) dx \leq \ln(n)$$

Ahora consideremos que

$$\sum_{k=2}^n \ln(k) = \ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(n) = \ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = \ln(n!)$$

y como sabemos que  $\int_1^n \ln(x) dx = n \ln(n) - n + 1$ , entonces llegamos a que

$$0 \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) - \int_1^n \ln(x) dx \leq \ln(n)$$

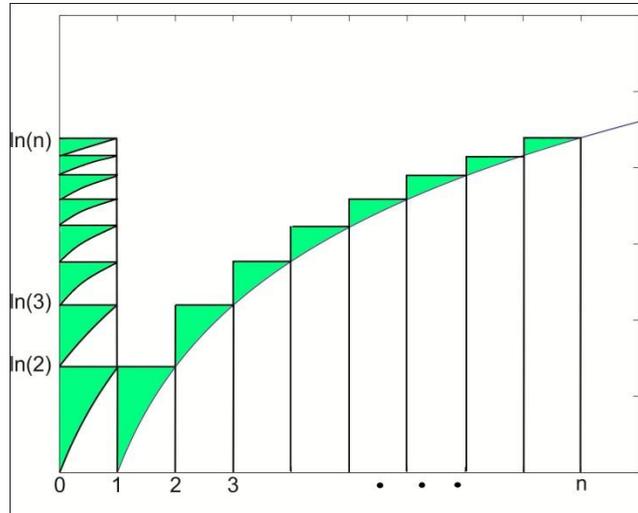


Figura 2.6: Área sombreada sobresaliendo por encima de la gráfica de  $\ln(n)$ , dada por  $\sum_{k=2}^n \ln(k) - \int_1^n \ln(x) dx$ , y que puede ser acomodada en el rectángulo de área  $\ln(n)$ .

Esto es equivalente a

$$0 \leq \ln(n!) - (n \ln(n) - n + 1) \leq \ln(n),$$

por lo tanto  $0 \leq \ln(n!) - (n \ln(n) - n) \leq \ln(n) + 1$ , pero aquí podemos encontrar una constante  $d$  tal que  $\ln(n) + 1 \leq d \ln(n)$  para toda  $n$  a partir de cierta  $n_0$ , es decir, de la desigualdad anterior  $0 \leq (d - 1) \ln(n) - 1$ , por lo tanto para  $d = 2$  y  $n_0 = 1$  se cumple siempre la desigualdad para toda  $n \geq n_0$ . Así tenemos que

$$|\ln(n!) - (n \ln(n) - n)| \ll \ln(n)$$

y finalmente tenemos que  $\ln(n!) = n \ln(n) - n + O(\ln(n))$ , que es lo que se quería demostrar. Para la segunda demostración véase el Apéndice II.

### Lema 2.2

$$\frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} \rightarrow 1, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

### Demostración.

Retomando que  $|\ln(n!) - (n \ln(n) - n)| \ll \ln(n)$  sabemos que existen  $C$  y  $N$  tales que  $0 \leq \ln(n!) - (n \ln(n) - n) \leq C \cdot \ln(n)$  para toda  $n > N$ .

Multiplicando la desigualdad por  $\frac{1}{n \ln(n)}$  se obtiene

$$0 \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} - \left(1 - \frac{n}{n \ln(n)}\right) \leq C \frac{\ln(n)}{n \ln(n)}.$$

Simplificando

$$0 \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} - \left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right) \leq C \frac{1}{n},$$

y de esto se infiere que  $\frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} = 1 - \frac{1}{\ln(n)} + O\left(\frac{1}{n}\right)$ , pero cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{\ln(n)}$  y  $\frac{1}{n}$  tienden a cero. Así  $\frac{\ln(n!)}{n \ln(n)}$  tiende a 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Regresemos ahora al Corolario 2.1 y recordemos que deseamos demostrar que

$$\frac{\sum_{k=1}^n \tau(k)}{\ln(n!)} \rightarrow 1$$

Cuando  $n$  tiende a infinito.

**Demostración:**

Dividiendo la igualdad del Teorema 2.1,  $\sum_{k=1}^n \tau(k) = n \ln(n) + O(n)$ , entre  $n \ln(n)$  obtenemos

$$\frac{\sum_{k=1}^n \tau(k)}{n \ln(n)} = \frac{n \ln(n)}{n \ln(n)} + \frac{1}{n \ln(n)} O(n) = 1 + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

pero cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{\ln(n)} \rightarrow 0$ , entonces  $\frac{\sum_{k=1}^n \tau(k)}{n \ln(n)} \rightarrow 1$ , es decir,  $\sum_{k=1}^n \tau(k) \sim n \cdot \ln(n)$ , y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \tau(k)}{n \ln(n)} = 1$$

Pero del Lema 2.2 sabemos que  $\ln(n!) \sim n \ln(n)$ , y como  $\sim$  es una relación de equivalencia se sigue que

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) \sim \ln(n!),$$

y finalmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \tau(k)}{\ln(n!)} = 1$$

Antes de terminar esta sección de las aproximaciones de  $\sum_{k=1}^n \tau(k)$  expondremos otra igualdad que emplea un resultado del capítulo anterior sobre números armónicos (ver página 10), pero aquella tiene la particularidad de que se cumple para cualquier número real. El teorema dice que

$$H_t = \ln(t) + \gamma + O\left(\frac{1}{t}\right), \text{ con } t \in \mathbb{R}^+$$

Enseguida enunciamos el teorema que ofrece una mejor aproximación de  $\sum_{k=1}^n \tau(k)$ .

**Teorema 2.2.**

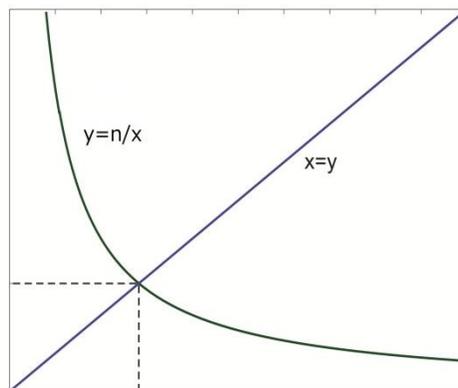
$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = n \ln(n) + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$$

Donde  $\gamma$  es la constante de Euler.

**Demostración:**

Iniciamos contando los puntos  $(c, d)$  tal y como se hizo en un ejemplo numérico mostrado previamente para obtener el promedio de  $\tau(k)$  (ver Figura 2.1 de este capítulo), pero ahora se hará para el caso general. Al contar los puntos  $(c, d)$  obtenemos  $\tau(k)$  para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Como todos los puntos  $(c, d)$  están sobre hipérbolas, y éstas son simétricas con respecto a la recta  $y = x$ , entonces basta contar los puntos que están sobre la recta  $y = x$  y los que están bajo ella. En Figura 2.7 está la representación del caso general.



**Figura 2.7:** La identidad se interseca con la hipérbola  $y = n/x$  en el punto  $(\sqrt{n}, \sqrt{n})$ .

Dado que  $y = x$  y  $y = \frac{n}{x}$  son iguales en  $x = \sqrt{n}$ , entonces algunos de los puntos que queremos contar y que están sobre la recta  $y = x$  van desde el  $(1,1), (2,2)$  hasta el  $([\sqrt{n}], [\sqrt{n}])$ , esto implica que hay  $[\sqrt{n}]$  de ellos. Pero a la vez  $[\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$ , y entonces podríamos considerarlos dentro del error de aproximación  $O(\sqrt{n})$  y con ello los dejamos de tomar en cuenta.

Como ya mencionamos, los números armónicos se utilizarán en esta demostración a través de considerar los divisores de  $n$  en su forma  $\frac{n}{d}$ ; pero en esta ocasión, debido a la aparición de  $H_{\sqrt{n}}$ , utilizaremos el hecho de que  $H_t = \ln(t) + \gamma + O\left(\frac{1}{t}\right)$  para  $t \in \mathbb{R}$ , demostrado en el Teorema 1.4 del capítulo 1.

Prosiguiendo con la demostración, recordemos que ya habíamos tomado en cuenta los puntos que están sobre  $y = x$ , pero aún falta ver qué ocurre con los que están por debajo de ella. Para esto, por cada  $d = 1, d = 2$ , hasta  $d = [\sqrt{n}]$  contamos  $\left[\frac{n}{d}\right] - d$  puntos,<sup>13</sup> y al final multiplicamos por 2 para considerar los puntos que están por encima de  $y = x$ , esto es

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \tau(k) &= 2 \sum_{d \leq \sqrt{n}} \left( \left[\frac{n}{d}\right] - d \right) + O(\sqrt{n}) \\ &= 2 \sum_{d \leq \sqrt{n}} \left[ \left( \frac{n}{d} + O(1) \right) - d \right] + O(\sqrt{n}) = 2 \sum_{d \leq \sqrt{n}} \frac{n}{d} + 2 \sum_{d \leq \sqrt{n}} O(1) - 2 \sum_{d \leq \sqrt{n}} d + O(\sqrt{n}) \end{aligned}$$

Para simplificar la última expresión veamos qué sucede con las sumas  $2 \sum_{d \leq \sqrt{n}} O(1)$  y  $\sum_{d \leq \sqrt{n}} d$ . La primera identidad  $\sum_{d \leq \sqrt{n}} O(1)$  es una suma de a lo más  $\sqrt{n}$  errores con tamaño  $O(1)$ , así que al sumarlos el error no pasa de  $\sqrt{n}$ , es decir, tendríamos un error  $O(\sqrt{n})$ .

Y para  $\sum_{d \leq \sqrt{n}} d$ , demostremos primero que para  $t \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\sum_{k \leq t} k = \frac{t^2}{2} +$

$O(t)$ .<sup>14</sup> Para lo cual vamos a comparar a  $\sum_{k \leq t} k$  con  $\frac{t^2}{2}$  vistos como áreas.

El área que representa  $\frac{t^2}{2} = \int_0^t x dx$  y el área que representa  $\sum_{k \leq t} k$  se ven en la Figura 2.8.

<sup>13</sup>Para convencerse de esto puede uno ayudarse del ejemplo numérico antes mencionado.

<sup>14</sup>Esta es una generalización de la suma de los  $n$  primeros enteros, es decir, es la suma de los primeros  $k$  enteros hasta un  $t$  real.

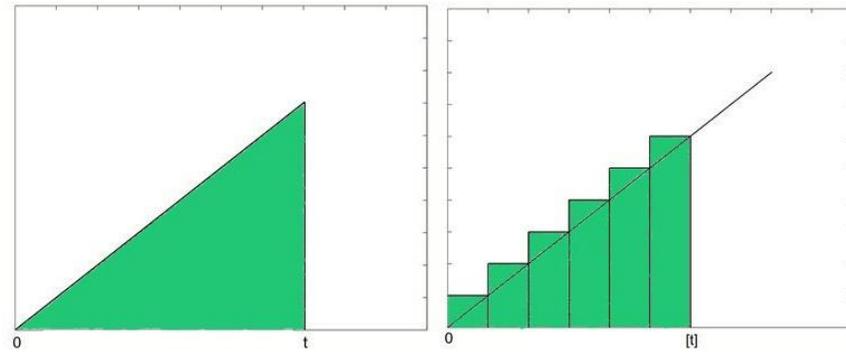


Figura 2.8: El área que representa  $\int_0^t x dx = \frac{t^2}{2}$  y el área que representa  $\sum_{k \leq t} k$ .

El área que representa  $\sum_{k \leq t} k$  sería igual al área que representa  $\int_0^t x dx$  si los triángulos sombreados izquierda<sup>15</sup> de la Figura 2.9 tuvieran la misma área que el sector de área sombreado mostrado en la parte derecha de la Figura 2.9. Pero el área de los triángulos sombreados es  $\frac{[t]}{2}$  y el área del sector sombreado es a lo más  $t$ , y como  $\frac{[t]}{2} < t$ , entonces  $0 \leq \sum_{k \leq t} k - (t) \leq \int_0^t x dx$ , y de aquí que  $0 \leq \sum_{k \leq t} k - \int_0^t x dx \leq t$ , por lo tanto:

$$\sum_{k \leq t} k = \frac{t^2}{2} + O(t)$$

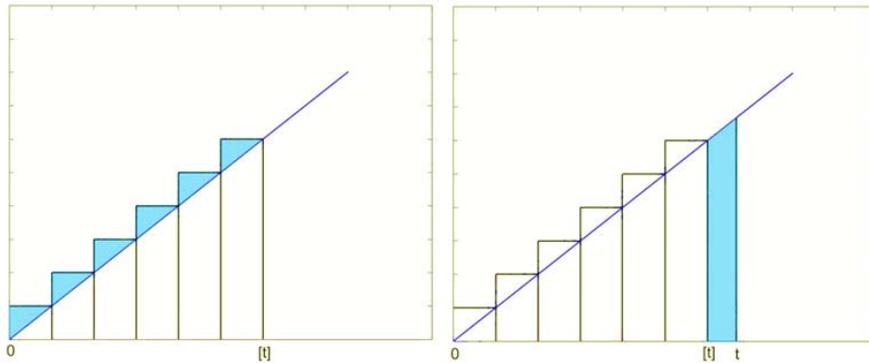
Sabiendo cuánto es la suma de los primeros  $k$  enteros hasta un número real  $t$ , tenemos que  $\sum_{d \leq \sqrt{n}} d = \frac{n}{2} + O(\sqrt{n})$ .

Sustituyendo en la ecuación  $\sum_{k=1}^n \tau(k) = 2 \sum_{d \leq \sqrt{n}} \frac{n}{d} + 2 \sum_{d \leq \sqrt{n}} O(1) - 2 \sum_{d \leq \sqrt{n}} d + O(\sqrt{n})$  los valores de  $\sum_{d \leq \sqrt{n}} O(1)$  y  $\sum_{d \leq \sqrt{n}} d$  que acabamos de obtener resulta

<sup>15</sup>El área sombreada en la Figura 2.9 en la izquierda de la misma, es  $\frac{[t]}{2}$ , dado que tenemos  $[t]$  triángulos de área  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \tau(k) &= 2nH_{\sqrt{n}} - 2\left(\frac{n}{2} + O(\sqrt{n})\right) + O(\sqrt{n}) = 2n\left(\ln(\sqrt{n}) + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - n + 2O(\sqrt{n}) \\
&= 2n \ln(\sqrt{n}) + 2n\gamma + 2nO\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n + O(\sqrt{n}) \\
&= 2n \frac{\ln(n)}{2} + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n}) + 2nO\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n \ln(n) + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})
\end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia de la definición de la gran  $O$ .



**Figura 2.9:** En el lado izquierdo, la parte sombreada tiene área  $\frac{[t]}{2}$  y en el lado derecho de la figura, la parte sombreada tiene a lo más área igual a  $t$ .

Con esto terminamos la otra aproximación de  $\sum_{k=1}^n \tau(k)$  lo cual nos permitió conocer otra modalidad del uso de los armónicos.

## 2.2. Números armónicos de segundo orden.

A continuación presentamos la definición de los números armónicos de segundo orden, así como algunas relaciones análogas a las de los números armónicos de primer orden vistas en el capítulo anterior. Éstas serán de utilidad para demostrar otras propiedades vinculadas a funciones aritméticas.

Los números armónicos de segundo orden son:

$$H_1^{(2)} = 1$$

$$H_2^{(2)} = 1 + \frac{1}{2^2}$$

$$H_3^{(2)} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

⋮

$$H_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Y como ya ocurrió en el capítulo anterior, lo primero que nos interesa es conocer una aproximación de  $H_n^{(2)}$ . En los de primer orden usamos la constante de Euler para construir aproximaciones cada vez más precisas; ahora, para los de segundo orden, usaremos a  $\zeta(2)$ ,<sup>16</sup> y posteriormente, en la generalización, aparecerán las constantes  $\zeta(3), \dots, \zeta(k)$ .

**Teorema 2.3.** Existe un número real  $\zeta(2)$  tal que:

$$H_n^{(2)} = -\frac{1}{n} + \zeta(2) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Este resultado es el análogo del Teorema 1.3 del capítulo 1.

**Demostración:**

Por una parte, el área bajo la curva  $y = \frac{1}{x^2}$ , a partir de  $x = 1$  está dada por la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = 1$$

En la Figura 2.10 se muestra la gráfica de  $y = \frac{1}{x^2}$  y debajo de ella a los rectángulos de área  $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots$

---

<sup>16</sup> $\zeta(2)$  es un valor de la función zeta de Riemann.

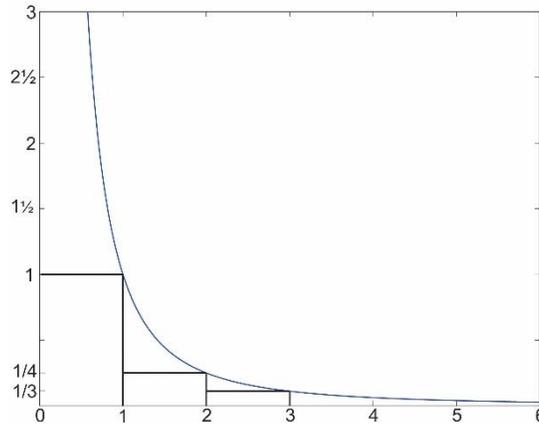


Figura 2.10: La gráfica de  $y = \frac{1}{x^2}$  y los rectángulos de área  $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots$

Se percibe directamente que la suma de las áreas de los rectángulos de área  $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots$  es menor que el área bajo la curva de  $y = \frac{1}{x^2}$  a partir de  $x = 1$  y por tanto es menor que 1. Así, se define  $\zeta(2)$  como

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Por otra parte, lo que se quiere demostrar es equivalente a que

$$\zeta(2) - H_n^{(2)} = \frac{1}{n} - O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

El lado derecho representa el área de todos los rectángulos con área  $\frac{1}{n^2}$  excepto los primeros  $n$ . Tal área es aproximadamente la que está bajo la curva  $y = \frac{1}{x^2}$ , desde  $x = n$  en adelante, y está dada por la integral

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_n^B \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_n^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{B}\right) = \frac{1}{n}$$

$\int_n^\infty \frac{1}{x^2} dx$  se aproxima a  $\zeta(2) - H_n^{(2)}$ , pero tiene pequeños excedentes, como se ve en la Figura 2.11.

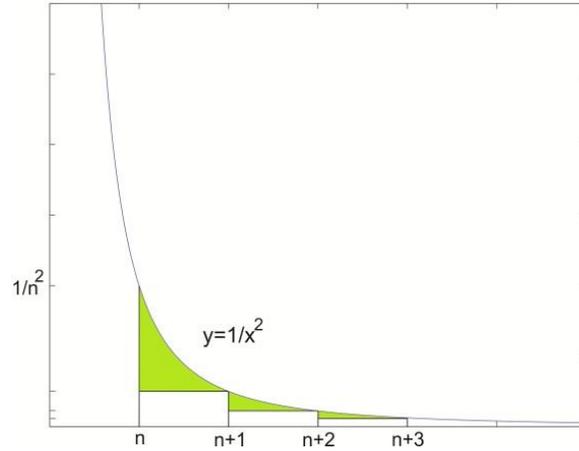


Figura 2.11: La parte sombreada es lo que se excede  $\int_n^\infty \frac{1}{x^2} dx$  sobre  $\zeta(2) - H_n^{(2)}$ .

Alojando los sectores sobrantes en el rectángulo de área  $\frac{1}{n^2}$ , como se ve en la Figura 2.12,

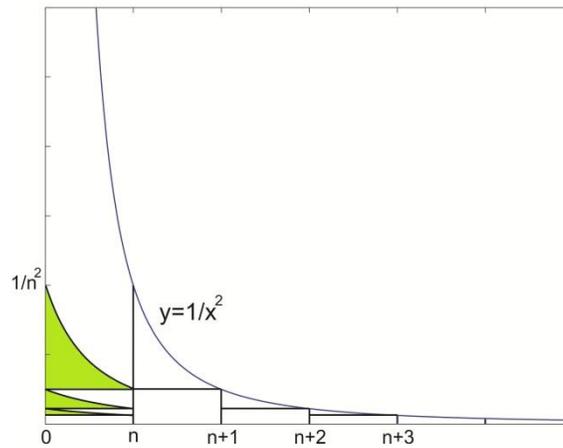


Figura 2.12: Las partes sombreadas se puede acomodar en el rectángulo de área  $1/n^2$

se consigue que el área de los excedentes no sea más grande que  $\frac{1}{n^2}$ , es decir, el margen de error del área bajo la curva y de los rectángulos no es mayor que  $\frac{1}{n^2}$ .

Así, para que  $\zeta(2) - H_n^{(2)}$  sea cercano a  $\int_n^\infty \frac{1}{x^2} dx$  se tiene que considerar un margen de error muy cercano a  $\frac{1}{n^2}$ . Por lo tanto,  $\zeta(2) - H_n^{(2)} = \frac{1}{n} - O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , y en consecuencia

$$H_n^{(2)} = -\frac{1}{n} + \zeta(2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

### Armónicos de orden $k$

Para el caso de los armónicos de orden  $k$ , definimos a  $\zeta(k)$  como

$$\zeta(k) = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots$$

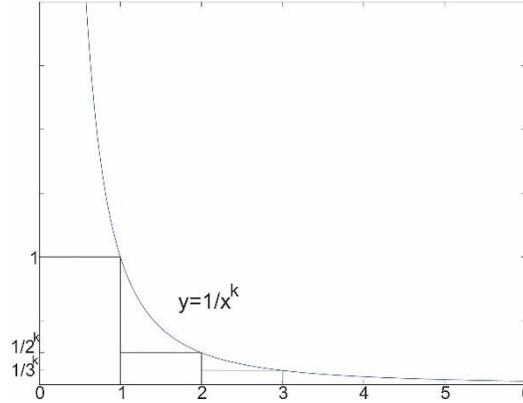


Figura 2.13: La gráfica de  $y = 1/x^k$  y los rectángulos de área  $1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{3^k}, \dots$

Nuevamente  $\zeta(k) - H_n^{(k)}$  es el área de los rectángulos de área  $\frac{1}{n^k}$  con  $n = 1, 2, \dots$ , menos una cantidad finita de ellos  $H_n^{(k)}$ .

El área bajo la gráfica de  $y = \frac{1}{x^k}$  esta dada por:

$$\begin{aligned} \int_n^\infty \frac{1}{x^k} dx &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_n^B \frac{1}{x^k} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{-k+1} \cdot \frac{1}{x^{k-1}} \right) \Big|_n^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{B^{k-1}} \right) \\ &= \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} \end{aligned}$$

De igual manera  $\int_n^\infty \frac{1}{x^k} dx$  es cercano a  $\zeta(k) - H_n^{(k)}$ , y la diferencia está en los sobrantes (las partes sombreadas) que se ilustran en la Figura 2.14.

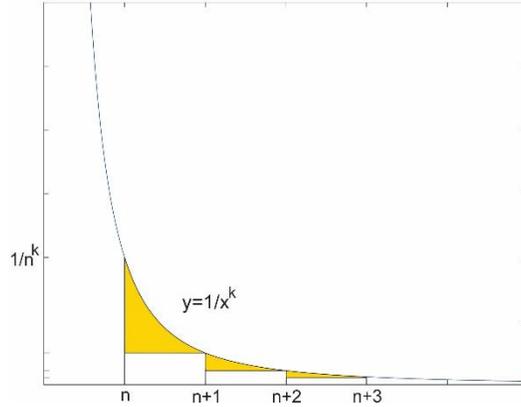


Figura 2.14: La parte sombreada muestra lo que le sobra a  $\int_n^\infty \frac{1}{x^k}$  para ser  $\zeta(k) - H_n^{(k)}$

Igual que antes, a los excedentes los podemos ubicar en el rectángulo de área  $\frac{1}{n^k}$  (véase Figura 2.15.)

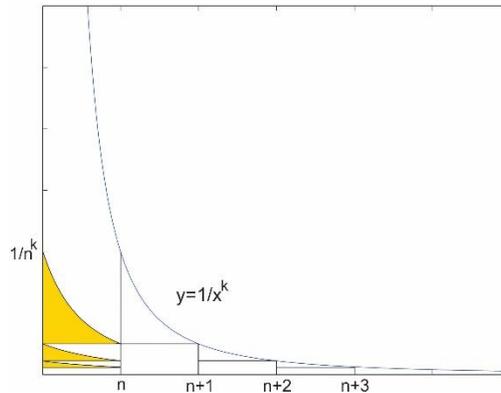


Figura 2.15: La parte sombreada se puede acomodar en el rectángulo de área  $1/n^k$ .

Por lo tanto se puede enunciar que

$$\zeta(k) - H_n^{(k)} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} - O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

o

$$H_n^{(k)} = -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \zeta(k) + O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Con la aproximación deducida para  $H_n^{(2)}$  ahora podemos regresar al cálculo de promedios de funciones aritméticas, como ya se había adelantado antes. Enseguida analizaremos a la función  $\sigma(n)$  (que es la suma de los divisores de  $n$ ).

#### Teorema 2.4.

Para toda  $n$  en los enteros positivos

$$\sum_{k=1}^n \sigma(k) = \zeta(2) \frac{n^2}{2} + O(n \ln(n)).$$

Esto podemos verlo también desde la perspectiva de conocer el promedio de una suma finita de las funciones sigma. Lo anterior en vista de que se puede plantear la equivalencia

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma(k) = \zeta(2) \frac{n}{2} + O(\ln(n)).$$

#### Demostración:

Para la demostración nos podemos ayudar del ejemplo numérico que hemos usado antes, aquel donde los divisores de un entero se representan con puntos con coordenadas enteras, solo que ahora no se contarán los puntos, y lo que se hará es sumar la segunda coordenada de esos pares de enteros  $(c, d)$ .

$$\sum_{k=1}^n \sigma(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{d|k} d = \sum_{\substack{(c,d) \\ c \cdot d \leq n}} d$$

Como  $c \cdot d \leq n$ , entonces  $d \leq \frac{n}{c}$ ,  $c \leq n$ , así que

$$\sum_{k=1}^n \sigma(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{d|k} d = \sum_{\substack{(c,d) \\ c \cdot d \leq n}} d = \sum_{c \leq n} \sum_{d \leq \frac{n}{c}} d$$

Haciendo un alto en la demostración diremos que en esta ocasión los números armónicos aparecerán naturalmente luego de introducir la expresión  $\sum_{k \leq t} k = \frac{t^2}{2} + O(t)$  en la anterior serie de igualdades. Haciendo esto,  $\sum_{k=1}^n \sigma(k)$  se podrá poner en términos de números armónicos de segundo orden y de primer orden.

Retomando la demostración; usamos la siguiente expresión  $\sum_{k \leq t} k = \frac{t^2}{2} + O(t)$ , con  $t = \frac{n}{c}$ , en la suma interna; de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^n \sigma(k) = \sum_{c \leq n} \sum_{d \leq \frac{n}{c}} d = \sum_{c \leq n} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{c^2} + O\left(\frac{n}{c}\right) \right) = \frac{n^2}{2} \sum_{c \leq n} \frac{1}{c^2} + \sum_{c \leq n} O\left(\frac{n}{c}\right) = \frac{n^2}{2} \sum_{c \leq n} \frac{1}{c^2} + O\left(n \sum_{c \leq n} \frac{1}{c}\right)$$

Esta última igualdad se debe a que la suma de  $n$  errores, cada uno acotado por una constante  $k$  veces  $\frac{n}{c}$ , está acotada por  $kn \sum_{c \leq n} \frac{1}{c}$ .

Y por lo demostrado en el Teorema 2.3 para los números armónicos de segundo orden se puede proponer que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sigma(k) &= \frac{n^2}{2} \sum_{c \leq n} \frac{1}{c^2} + O\left(n \sum_{c \leq n} \frac{1}{c}\right) = \frac{n^2}{2} \left( \zeta(2) - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + O(nH_n) \\ &= \zeta(2) \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O(nH_n) = \zeta(2) \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + O(1) + O(n \ln(n)) \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que  $nH_n \ll n \ln(n)$ , puesto que  $H_n \leq 1 \cdot \ln(n)$ , para toda  $n > 2$ , y si multiplicamos de ambos lados por  $n > 0$  entonces  $nH_n \leq n \cdot \ln(n)$ , para todo  $n > 2$ , y como  $-\frac{n}{2} + 1 \ll n \ln(n)$ , entonces

$$\sum_{k=1}^n \sigma(k) = \zeta(2) \frac{n^2}{2} + O(n \ln(n))$$

Un resultado inmediato es el siguiente.

**Corolario 2.2.**

$$\sum_{k=1}^n \sigma(k) \sim \sum_{k=1}^n \zeta(2)k.$$

Y al igual que el teorema anterior a este resultado se puede visualizar en términos de los promedios de ambas sumas.

**Demostración:**

Usando la igualdad del Teorema 2.4, y dividiéndola entre  $\zeta(2) \frac{n^2}{2}$ , tenemos que

$$\frac{\sum_{k=1}^n \sigma(k)}{\zeta(2) \frac{n^2}{2}} = \frac{\zeta(2) \frac{n^2}{2}}{\zeta(2) \frac{n^2}{2}} + \frac{O(n \ln(n))}{\zeta(2) \frac{n^2}{2}},$$

de donde

$$\frac{\sum_{k=1}^n \sigma(k)}{\zeta(2) \frac{n^2}{2}} = 1 + \frac{2}{\zeta(2)} \cdot O\left(\frac{n \ln(n)}{n^2}\right)$$

y como

$$\frac{n \ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

entonces

$$1 + \frac{2}{\zeta(2)} \cdot O\left(\frac{n \ln(n)}{n^2}\right) \rightarrow 1$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^n \sigma(k) \sim \zeta(2) \frac{n^2}{2}$$

Por otro lado, al multiplicar a  $\sum_{k=1}^n k$  por  $\zeta(2)$ , que es lo que cambia en la suma, se tiene

$$\text{que } \sum_{k=1}^n \zeta(2)k = \zeta(2) \frac{n(n+1)}{2} = \zeta(2) \frac{n^2}{2} + O(n)$$

Por lo tanto  $\sum_{k=1}^n \zeta(2)k \sim \zeta(2) \frac{n^2}{2}$ . Y por la transitividad de  $\sim$  concluimos que

$$\sum_{k=1}^n \sigma(k) \sim \sum_{k=1}^n \zeta(2)k.$$

Finalmente llegamos a la equivalencia de lo que puede ser el valor promedio de la suma de hasta  $n$  sumandos de la función sigma, y lo interesante es que el resultado queda en términos de un valor de la función zeta de Riemann.

## Capítulo 3

### Los armónicos de Ore

En los capítulos anteriores se expusieron propiedades de los números armónicos que nos permitieron calcular aproximaciones. También recurrimos a ellos como elementos de aproximación de otro tipo de funciones que se comportan de manera inestable, y en todos los casos el estudio de los armónicos estuvo centrado en considerar partes finitas de la serie armónica, pero con la característica de que los sumandos inician desde el denominador uno y todos los restantes son consecutivos.

También podemos adentrarnos en la dirección de considerar subconjuntos de la armónica, y entonces cabe preguntarnos, ¿por qué no tomar elementos que sean más dispersos, es decir, que no necesariamente empiecen con el uno, y que no tengan que ser consecutivos?. En este sentido podemos considerar la suma de los recíprocos de los primos  $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p}$  o la suma de los recíprocos de los cuadrados  $\sum_{n \text{ entero}} \frac{1}{n^2}$  que, como sabemos, estos casos ya han sido estudiados.

Bajo las directrices anteriores ahora podemos analizar conjuntos de denominadores considerados de manera arbitraria, y para este caso no se puede dejar de mencionar a Oystein Ore, que fue quien introdujo la idea de lo que se conoce como *número divisor armónico* o *número de Ore*.

En 1948 Ore, académico de la Universidad de Yale, escribió el artículo *On the averages of the divisors of a numbers*. En el presenta un estudio donde analiza algunos conjuntos de números que posean una media armónica, aritmética y geométrica que resultan ser enteros positivos. En esta tesis sólo consideraremos el caso de la media armónica entera de ciertos conjuntos.

#### 3.1. Conjuntos con media armónica entera.

Esta sección estará dedicada a la construcción de ciertos conjuntos que cumplen con lo mencionado en los párrafos anteriores. Recordemos que la media armónica  $H$  de un conjunto de  $n$  elementos  $a_i$  está dada por la relación  $\frac{1}{H(n)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ , y aquí es donde

reconocemos porque hemos vinculado esto con los números armónicos. Dado que nuestro interés está en los conjuntos cuya media armónica es un entero, revisaremos el caso en que Ore consideró el conjunto de los divisores de un entero  $n$ . Para esto considérese  $n$  un entero y su descomposición en primos  $n = p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p^{\alpha_r}$ , y por otro lado veamos que la media armónica de los divisores de  $n$  es  $\frac{1}{H(n)} = \frac{1}{\tau(n)} \cdot \sum_{d|n} \frac{1}{d}$ . Ahora, si  $d$  es un divisor de  $n$ , entonces  $\frac{n}{d}$  también lo es, y en consecuencia

$$n \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d|n} d,$$

Por lo que

$$\frac{n}{H(n)} = \frac{1}{\tau(n)} \cdot \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \frac{1}{\tau(n)} \cdot \sum_{d|n} d$$

Entonces

$$\frac{n}{H(n)} = \frac{1}{\tau(n)} \cdot \sigma(n), \text{ así } H(n) = \frac{n \cdot \tau(n)}{\sigma(n)}$$

Aquí Ore nos presenta una elegante expresión para la media armónica del conjunto de los divisores de un entero  $n$ , y lo que hay que destacar es que la media quedó como el múltiplo de un cociente de funciones aritméticas de  $n$ .

Acto seguido, veamos cuáles enteros  $n$  pueden tener un conjunto de divisores cuya media armónica sea un entero, y en consecuencia cómo interviene una suma finita que es una parte de la serie armónica. Pero antes de seguir adelante veamos dos ejemplos de enteros cuyos divisores tienen una media armónica que pertenece a los enteros. Así, para  $n = 6$  sus divisores son 1, 2, 3 y 6, y de la expresión  $\frac{1}{H(n)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\tau(n)} \frac{1}{a_i}$  tenemos que la media armónica de ellos es

$$\frac{4}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2$$

Para el caso de  $n = 140$ , sus divisores son 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140, y su media armónica es

$$\frac{12}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{20} + \frac{1}{28} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \frac{1}{140}} = 5$$

Pasemos a estudiar algunos casos en los cuales se puede determinar que la media armónica no es entera, para después pasar a los que la media armónica si es entera.

Ore parte de considerar los casos de enteros que son potencia sólo de un primo, es decir, para  $n = p^\alpha$ , y como  $H(n) = \frac{n \cdot \tau(n)}{\sigma(n)}$ , entonces:

$$H(n) = \frac{p^\alpha(\alpha + 1)}{p^\alpha + p^{\alpha-1} + \dots + p + 1}$$

y de aquí podemos decir que  $p^\alpha$  y  $[p^\alpha + p^{\alpha-1} + \dots + p + 1]$  son primos relativos. Veamos porqué. Supongamos que no son primos relativos, entonces existe un entero  $d \neq 1$  tal que  $d|p^\alpha$  y  $d|p^\alpha + p^{\alpha-1} + \dots + p + 1$ , entonces podemos ver que como  $d|p^\alpha$ , y  $p$  es un primo, en consecuencia el divisor común es de la forma  $d = p^i$ . Así, si asumimos que el divisor común es  $p^i$ , entonces

$$p^i|p^i, p^i|p^i \cdot p, p^i|p^i \cdot p^2, \dots, p^i|p^i \cdot p^{-i+n},$$

y se llega a que

$$p^i|p^i + p^{i+1} + \dots + p^\alpha.$$

Pero si estamos considerando que  $p^i|p^0 + p^1 + \dots + p^i + \dots + p^\alpha$ , y que además  $p^i|p^i + p^{i+1} + \dots + p^\alpha$ , entonces tiene que suceder que

$$p^i|[p^{i-1} + p^{i-2} + \dots + p^1 + 1] = \frac{p^i - 1}{p - 1}.$$

Pero aquí llegamos a un inconveniente, porque  $p^i|\frac{p^i-1}{p-1}$  entonces  $p^i \leq \frac{p^i-1}{p-1}$ , pero  $p^i - 1 < p^i$ , y más aún,  $p^i > \frac{p^i-1}{p-1}$ . Esto constituye una contradicción y por lo tanto  $p^\alpha$  y  $p^\alpha + p^{\alpha-1} + \dots + p + 1$  no tienen divisores comunes diferentes de uno y entonces son primos relativos. Entonces, por el lado de los enteros  $p^i$  y  $[p^{i-1} + p^{i-2} + \dots + p^1 + 1]$  ya vimos que no es posible que  $H(n)$  sea un entero. Ahora sólo queda analizar que  $[p^{i-1} + p^{i-2} + \dots + p^1 + 1]$  pueda dividir a  $[\alpha + 1]$ . Pero tampoco puede suceder esto, y se debe a que  $p^\alpha + p^{\alpha-1} + \dots + p + 1$  tiene  $\alpha + 1$  sumandos mayores o iguales a 1, lo cual lleva a que

$$p^\alpha + p^{\alpha-1} + \dots + p + 1 > \alpha + 1.$$

Con esto se llega finalmente a que  $H(n)$  no puede ser un entero cada vez que  $n$  sea la potencia de un primo.

Después de este primer descarte de enteros que no pueden tener media armónica entera, Ore prosiguió su análisis y se ocupó de demostrar que cuando  $n \neq 6$  y es producto de primos diferentes, entonces la media armónica de los factores no puede ser un entero. Para demostrar esta proposición recordemos que  $H(n) = \frac{n \cdot \tau(n)}{\sigma(n)}$  y del enunciado considérese que  $n = p_1 p_2 \dots p_r$ , con los factores ordenados de forma ascendente. Sustituyendo los elementos de  $H(n)$  se obtiene que

$$H(n) = \frac{p_1 p_2 \dots p_r \cdot 2^r}{(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_r + 1)}$$

(nótese que  $\tau(n) = 2^r$  y  $\sigma(n) = ((p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_r + 1))$ ).

Ahora supongamos que  $n$  es impar y reescribamos a  $H(n)$  de la siguiente manera:

$$H(n) = \frac{\frac{1}{2^r} \cdot p_1 p_2 \dots p_r \cdot 2^r}{\frac{1}{2^r} (p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_r + 1)} = \frac{p_1 p_2 \dots p_r}{\left(\frac{p_1 + 1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{p_r + 1}{2}\right)}$$

En el denominador podemos apreciar que cada  $\frac{p_i + 1}{2}$ , con  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , o es primo o se puede descomponer en primos, así que en el denominador habría por lo menos  $r$  primos; pero nótese que cada factor del denominador es más pequeño que cualquiera del numerador, y esto nos lleva a concluir que ningún elemento del denominador puede ser  $p_r$ . Entonces, si todos los factores del denominador fueran primos, y como ninguno de ellos es  $p_r$ , podría suceder que éste se cancelara con algún primo entre  $p_1 p_2 \dots p_{r-1}$ , pero como son  $r$  factores entonces sobraría uno que no se cancela con  $p_r$ , así que el cociente no sería un entero. Y si fueran más de  $r$  primos se podrían eliminar a lo más  $r - 1$ , y quedaría  $p_r$  en el numerador, y en el denominador primos que no se cancelan con  $p_r$ , y nuevamente el cociente  $H(n)$  tampoco sería un entero.

Para el caso en que  $n$  sea par, es decir, que  $p_1 = 2$  y se tiene que

$$H(n) = \frac{2^{r+1} \cdot p_2 \dots p_r}{3 \cdot (p_2 + 1) \dots (p_r + 1)} = \frac{2^2 \cdot p_2 \dots p_r}{3 \cdot \left(\frac{p_2 + 1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{p_r + 1}{2}\right)}$$

y esta igualdad sólo puede ser un entero si  $p_2 = 3$ , porque de no ser así entonces no habría forma de eliminar al tres del denominador y en consecuencia  $H(n)$  no sería un entero. Así, con  $p_2 = 3$  se tiene

$$H(n) = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot p_3 \dots p_r}{3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{p_3 + 1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{p_r + 1}{2}\right)} = \frac{2 \cdot p_3 \dots p_r}{\left(\frac{p_3 + 1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{p_r + 1}{2}\right)}$$

y como se requiere cancelar al 2 y los factores del denominador también están en orden creciente, entonces  $\left(\frac{p_3+1}{2}\right)$  tiene que ser necesariamente 2. Pero si  $\left(\frac{p_3+1}{2}\right) = 2$ , entonces  $p_3 = 3$ , pero en las hipótesis se mencionó que todos los primos en la factorización  $p_1 p_2 \dots p_r$  son diferentes y puestos en orden creciente, entonces se da una contradicción porque ya se tenía que  $p_2 = 3$ , y esto no puede ser el caso. Lo anterior nos lleva finalmente a que  $H(n)$  no puede ser un entero.

Hasta ahora prácticamente solo hemos visto conjuntos de números cuyo conjunto de divisores no tienen una media armónica que corresponda a un entero positivo, pero en lo que resta de esta sección se mostrarán las propuestas de Ore de enteros que sí pueden tener conjuntos de divisores que tienen una media armónica entera.

Los casos de Ore apuntan en la dirección de los números perfectos, aquellos que cumplen que  $\sigma(n) = 2n$ . De la definición de media armónica para el conjunto de los divisores de  $n$  se tiene que  $H(n) = \frac{n \cdot \tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{n \cdot \tau(n)}{2n} = \frac{\tau(n)}{2}$ . Para el caso de un perfecto par de la forma  $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$  se tiene que  $\tau(n) = (m - 1 + 1)(1 + 1) = 2m$ ; entonces se concluye que

$$H(n) = \frac{\tau(n)}{2} = \frac{2m}{2} = m$$

es un entero, es decir, la media armónica pertenece a los enteros positivos.

Pero aún falta una parte y es la que corresponde a los perfectos impares. Por lo que conocemos como factor de Euler, sabemos que si se llega a encontrar un perfecto impar éste tiene que ser de la forma  $n = p^\alpha q_1^{2\beta_1} \dots q_r^{2\beta_r}$  donde  $p^\alpha \equiv \alpha \equiv 1 \pmod{4}$ <sup>18</sup>. Lo anterior nos lleva directamente a que  $\alpha = 4k + 1$ , y entonces al calcular  $\tau(n)$  se llega a que  $\tau(n) = (4k + 2)(2\beta_1 + 1) \dots (2\beta_r + 1) = 2(2k + 1)(2\beta_1 + 1) \dots (2\beta_r + 1)$  es par, y por lo tanto  $H(n)$  es un entero.

Para terminar veamos que si se tiene un número con media armónica entera, entonces es posible construir otro número también con media armónica entera. Para esto supongamos que  $n$  tiene media armónica entera. Haciendo  $n_1 = kn$ , con  $k$  un número con media armónica entera tal que  $(k, n) = 1$ , se tiene que

---

<sup>18</sup> El término  $p^6$  es lo que conocemos actualmente como factor de Euler.

$$H(n_1) = H(k \cdot n) = \frac{k \cdot n \cdot \tau(k \cdot n)}{\sigma(k \cdot n)}$$

La segunda igualdad resulta de que  $(k, n) = 1$ .

Considerando las propiedades tanto de  $\tau(n)$  como las de  $\sigma(n)$ , y reacomodando términos encontramos que

$$H(n_1) = H(k \cdot n) = \frac{k \cdot n \cdot \tau(k \cdot n)}{\sigma(k \cdot n)} = \frac{n \cdot \tau(n)}{\sigma(n)} \cdot \frac{k \cdot \tau(k)}{\sigma(k)}$$

Así,  $n_1$  será un entero con media armónica entera.

Lo que tenemos es que los números que cumplen con tener media armónica entera son los que actualmente se nombran como los números *armónicos de Ore*.

## Capítulo 4

# Los números armónicos vistos desde los ciclos de las permutaciones.

En los primeros dos capítulos se trabajó en aproximaciones de los números armónicos y se tomó a estos como una función de  $n$ , y ésta se comparó posteriormente con otras funciones. Lo que se busca en esta sección es mostrar que los números armónicos se pueden expresar en términos de la cantidad de permutaciones, con  $n$  elementos determinados, que se pueden descomponer exactamente en  $k$  ciclos.<sup>19</sup> En otras palabras, lo que haremos es expresar a los números armónicos empleando los números de Stirling de primer grado, utilizando sólo la suma que la definición de  $H_n$  nos sugiere y adoptando una interpretación combinatoria del resultado de la misma.<sup>20</sup>

Retomemos al  $n$ -ésimo número armónico

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n}$$

Si queremos expresarlo como un racional entonces nos tenemos que enfrentar a una operación no muy grata como lo sería ésta

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{n! + (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n) + (1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n) + (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n) + \dots + (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1))}{n!}$$

Si consideramos  $n \geq 0$ , entonces se puede expresar al  $n$ -ésimo número armónico de la siguiente manera:  $H_n = \frac{p_n}{n!}$ , donde  $p_n \geq 0$ .

Así, en este contexto definimos a  $p_0 = H_0 = 0$ , y para  $n \geq 1$ , sabemos que  $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$ ; a partir de esto se puede llegar a que

---

<sup>19</sup> Para el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , se va a entender por ciclo un arreglo de la forma  $(1, 2 \dots n)$  o sus permutaciones, como por ejemplo  $(n \dots 2, 1)$ .

<sup>20</sup> Lo que se expone en este capítulo se basa en (Benjamin, 2002).

$$H_n = \frac{p_n}{n!} = \frac{p_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n} = \frac{np_{n-1} + (n-1)!}{n!},$$

de donde

$$\frac{p_n}{n!} = \frac{np_{n-1} + (n-1)!}{n!}, \quad (4.1)$$

por lo que

$$p_n = np_{n-1} + (n-1)!$$

Lo que tenemos es una expresión recursiva para  $p_n$ , pero lo más importante es que tenemos la posibilidad de interpretar cómo es el numerador del  $n$ -ésimo armónico. Para explicar combinatoriamente esta expresión primero veamos cómo son los números de Stirling, ya que esto nos facilitará su comprensión.

#### 4.1. Números de Stirling

Los números de Stirling se denotan por  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  con  $n \geq k \geq 1$  y representan el número de permutaciones de  $n$  elementos en  $k$  ciclos. Antes de seguir daremos un ejemplo de los ciclos para que se entienda mejor su significado. Veamos el ejemplo de contar el número de maneras de sentar a  $n$  personas diferentes alrededor de  $k$  mesas circulares idénticas, y sin permitir que alguna esté vacía.<sup>21</sup>

Para calcular  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  seguiremos el camino de la recursividad, y para ello veamos que a partir de la definición, con  $n \geq 1$ , se tiene que  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = (n-1)!$ .

Pero retomemos el ejemplo para el caso de la última igualdad. Consideremos al conjunto  $\{1,2,3\}$ , y que representan a tres personas, la #1, #2 y #3, que se tienen que sentar alrededor de una mesa circular. Así, podríamos sentarlas de las siguientes formas

$$(123), (132), (231), (213), (312), (321),$$

---

<sup>21</sup>Por ejemplo:

$\left[ \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 6$ , ya que tenemos las siguientes configuraciones posibles, (1)(2)(34), (1)(3)(24), (1)(4)(32), (2)(3)(14), (2)(4)(31), (3)(4)(21).

pero como la mesa es circular, entonces los arreglos (123), (231) y (312) se pueden considerar como el mismo, ya que la persona #1 siempre tiene del mismo lado a la persona #2. Por otra parte, en los arreglos (132), (213), (321) la persona #1 tiene del otro lado a la persona #2, entonces, tanto los arreglos (123), (231) y (312), así como los de (132), (213), (321), cuentan como uno por cada grupo. Con este ejemplo podemos ver que las permutaciones de tres elementos en un ciclo son exactamente  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 = (3 - 1)!$ .

Ahora, para  $k \geq 2$  se tiene que

$$\begin{bmatrix} n + 1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k - 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

donde  $\begin{bmatrix} n + 1 \\ k \end{bmatrix}$  es el número de permutaciones de  $n + 1$  elementos en  $k$  ciclos, o pensando en el ejemplo, se cuenta el número de maneras en las que se pueden sentar  $n + 1$  personas diferentes en  $k$  mesas circulares. Acto seguido abordemos la igualdad, pensando que en el lado derecho se pone atención a la persona  $n + 1$ , considerando si ésta se encuentra sola en una mesa o no.

Entonces si la persona  $n + 1$  está sola en una mesa, se tiene que  $n$  personas restantes se acomodan en las  $k - 1$  mesas restantes de  $\begin{bmatrix} n \\ k - 1 \end{bmatrix}$  formas. Pero si la persona  $n + 1$  no está sola, entonces primero acomodamos a las otras  $n$  personas en las  $k$  mesas y así tendríamos  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  formas de hacerlo, pero para cada una de ellas hay que agregar a la persona  $n + 1$ , por lo tanto, tendríamos  $n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  maneras de colocar a las  $n + 1$  personas, y que además la  $\#(n + 1)$  no esté sola. Así, al sumar ambas situaciones, cuando la persona está sola y cuando no lo está obtenemos que  $\begin{bmatrix} n + 1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k - 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ .

Para el caso particular en que  $k = 2$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} n + 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + (n - 1)!$$

Nótese que en el caso de que  $p_n$  en (4.1) fuera igual a  $\begin{bmatrix} n + 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , entonces la igualdad  $p_n = np_{n-1} + (n - 1)!$  quedaría representada de la manera

$$\begin{bmatrix} n + 1 \\ 2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + (n - 1)! = p_n,$$

obteniéndose así una interpretación combinatoria para  $p_n$ .

Además, como  $p_1 = 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ , y si para toda  $n \geq 1$ ,  $p_n = \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$  entonces se tendría que  $H_n = \frac{\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}}{n!}$ , y éste sería un resultado importante.

Si se justifica que  $H_n = \frac{\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}}{n!}$  entonces ya estaremos en posesión de una herramienta que nos permitirá relacionar a los números de Stirling con los armónicos.

Pasemos ahora a demostrar el teorema. Primero se hará de una manera que permita familiarizarse con la idea de qué se está contando. La segunda forma también está orientada al conteo, pero poniendo especial atención en la posición de cierto elemento; tal manera de contar no sólo nos sirve para facilitar los cálculos en futuras demostraciones, sino que también muestra detalladamente cómo acomodar los elementos en los ciclos para que las configuraciones resultantes sean válidas. Esto será utilizado para las siguientes demostraciones.

**Teorema 4.1.** Para todo  $n \geq 1$ .

$$H_n = \frac{\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}}{n!}$$

### Lineamientos generales para la demostración:

Sea  $T_n$  el conjunto de maneras en las que se puede disponer a los elementos del 1 hasta el  $n$ , en dos ciclos disjuntos no vacíos. Por lo tanto  $|T_n| = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$ . También convenimos en que siempre el primer elemento de cada ciclo es el más pequeño de los elementos que éste contiene; además, asumimos que los ciclos se adecúan a un orden creciente con base en el primer elemento del ciclo. De esta manera el ciclo que contiene al 1 siempre es el primero, esto es, está a la izquierda, y por eso se le llama ciclo izquierdo, y al otro se le llama ciclo derecho. Por lo anteriormente convenido, las permutaciones en  $T_n$  tienen la forma:

$$(a_1 a_2 \dots a_j)(a_{j+1} \dots a_n), \text{ con } 1 \leq j \leq n-1, a_1 = 1$$

y  $a_{j+1}$  es el elemento más pequeño del ciclo derecho.

## Demostración I

Para la demostración será útil contar las permutaciones en  $T_{n+1}$  que tienen exactamente  $k$  elementos en el ciclo derecho, para  $1 \leq k \leq n$ .

Primero se escogen  $k$  elementos del conjunto  $\{2, \dots, n+1\}$ , y estos se pueden elegir de  $\binom{n}{k}$  maneras. Después, para cada una de esas  $\binom{n}{k}$  formas, podemos acomodar a los  $k$  elementos en el ciclo derecho de  $(k-1)!$  maneras. Además, para cada una de las  $\binom{n}{k} (k-1)!$  maneras de arreglar  $k$  elementos en el ciclo derecho, se tienen  $(n-k)!$  maneras de arreglar a los  $n-k$  elementos restantes en el ciclo izquierdo, de manera que hay  $\binom{n}{k} (k-1)! (n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!} (k-1)! (n-k)! = \frac{n!}{k}$  permutaciones de  $T_n$  con  $k$  elementos en el ciclo derecho.

Pero si sumamos los términos  $\frac{n!}{k}$ , para cada valor de  $k$ , entonces obtendremos el número de permutaciones en  $T_{n+1}$ , que es igual a  $\left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right]$ . Entonces

$$\left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k} = n! H_n,$$

Y así llegamos a que  $\left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] = n! H_n$ , que es lo que queríamos probar.

## Demostración II

La otra manera de demostrar que  $H_n = \frac{1}{n!} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right]$  será a través de considerar que para  $2 \leq r \leq n+1$  hay  $\frac{n!}{r-1}$  permutaciones en  $T_{n+1}$  que tienen a  $r$  como el elemento mínimo en el ciclo derecho.

Por lo antes mencionado podemos decir que los ciclos a contar son de la forma  $(1 \dots)(r \dots)$ , y que todos los elementos del 1 hasta el  $r-1$  aparecen en el ciclo izquierdo, garantizando así que  $r$  sea el mínimo en el ciclo derecho; mientras tanto los elementos de  $r+1$  hasta  $n+1$  podrían estar en el ciclo izquierdo o derecho.

Para empezar a contar lo primero que hacemos es acomodar de 1 hasta el  $r - 1$  en el ciclo izquierdo y tomar a  $r$  al principio del ciclo derecho; entonces habría  $(r - 2)!$  maneras de que esto suceda en el ciclo izquierdo.

Así, para cada una de las  $(r - 2)!$  maneras de arreglar a los elementos desde 1 hasta  $r - 1$  en el ciclo izquierdo, y con  $r$  en el lugar que le corresponde en el ciclo derecho, comenzamos a acomodar los elementos faltantes, que son  $r + 1, r + 2, \dots, n + 1$ . La manera de hacerlo es insertando uno a la vez, a la derecha de los que ya estaban acomodados (lo hacemos a la derecha para garantizar que 1 y  $r$  sean los primeros de su correspondiente ciclo).

Por cada una de las  $(r - 2)!$  maneras de ubicar desde el 1 hasta  $r - 1$  en el ciclo izquierdo, y con  $r$  al principio del ciclo derecho, hay  $r$  elementos ya posicionados, por lo que a  $r + 1$  lo podemos poner a la derecha de los  $r$  ya colocados, de  $r$  maneras diferentes. Con lo cual, ahora ya hay  $r + 1$  acomodados; a  $r + 2$  lo podemos ubicar de  $r + 1$  maneras diferentes a la derecha de los  $r + 1$  ya acomodados, y así continuamos hasta  $n + 1$ , donde debe de haber  $n$  que ya están acomodados, y por eso hay  $n$  maneras de colocar a  $n + 1$  a la derecha de los  $n$  ya acomodados.

Lo anterior en conjunto significa que por cada una de las  $r$  maneras de acomodar a  $r + 1$  hay  $r + 1$  maneras de colocar a  $r + 2$ , y así sucesivamente hasta  $n$ , por lo que el número de maneras de poner de  $r + 1$  hasta  $n + 1$ , para alguna de las  $(r - 2)!$  maneras de acomodar a los elementos de 1 hasta  $r - 1$  estará dado por

$$r(r+1)(r+2)\cdots n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r-1 \cdot r \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r-1} = \frac{n!}{(r-1)!}.$$

Si recorremos cada uno de los valores que puede tomar  $r$  (a saber,  $2 \leq r \leq n + 1$ ), estaremos contando las permutaciones en  $T_{n+1} = \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right]$ .

Así,

$$\left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] = \sum_{r=2}^{n+1} \frac{n!}{r-1} = n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n! H_n$$

donde la segunda igualdad se da porque hicimos  $k = r - 1$ ; además, si  $2 \leq r \leq n + 1$  y restamos 1, tenemos que  $1 \leq r - 1 = k \leq n$ .

Recapitulando: la igualdad  $H_n = \frac{\left[ \frac{n+1}{2} \right]}{n!}$  es una manera interesante de relacionar a los números armónicos con los de Stirling, pues el significado del numerador nos indica que la definición de  $H_n$  también tiene una interpretación en términos de los ciclos de las permutaciones.

## 4.2. Propiedades que vinculan números armónicos y números de Stirling.

En esta sección ofrecemos una interpretación combinatoria de algunas identidades que originalmente se presentaban sólo en términos de números armónicos y coeficientes binomiales a través de la identidad antes planteada,  $H_n = \frac{\left[ \frac{n+1}{2} \right]}{n!}$ , que relaciona a  $H_n$  con los números de Stirling.

Aquí presentamos algunas de esas relaciones entre números armónicos y fórmulas combinatorias que darán lugar a ciertas identidades que estarán en términos de los números de Stirling.

Para  $n$  y  $m$  enteros no negativos se tiene:

$$a) \sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$$

$$b) \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \binom{n}{m+1} \left( H_n - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$c) \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = \binom{n}{m} (H_n - H_m)$$

### Propiedad a)

Por medio de la conexión entre números armónicos y de Stirling ya señalada es posible obtener una expresión que sólo involucre números de Stirling, y ésta brinda la posibilidad de dar una demostración basada plenamente en el conteo y que se desarrolla de manera intuitiva.

Para transformar la identidad  $\sum_{k=1}^n H_k = nH_n - n$  aplicamos el Teorema 4.1, es decir, sustituimos a  $H_k$  y a  $H_n$ , por una expresión en términos de números de Stirling, para llegar a que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left[ \begin{matrix} k+1 \\ 2 \end{matrix} \right] = \frac{n}{n!} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] - n = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] - n$$

o visto de otra manera,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} \left[ \begin{matrix} k+1 \\ 2 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] - n!$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} \left[ \begin{matrix} k+1 \\ 2 \end{matrix} \right] + n! = \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right]$$

Haciendo el cambio  $n := n - 1$  llegamos a

$$\left[ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = (n-1)! + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!} \left[ \begin{matrix} k+1 \\ 2 \end{matrix} \right], \text{ para } n \geq 2$$

y esta última expresión es la que se va a demostrar.

Sabemos lo que representa el lado izquierdo; falta entonces ver qué representa el lado derecho en términos de Stirling. Para llevar a cabo esto nos servirá contar el número de permutaciones en  $T_n$  que tienen al 2 en el ciclo derecho, que junto con las permutaciones que tienen al 2 en el ciclo izquierdo nos dará el total  $\left[ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right]$ .

$\left[ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right]$  cuenta el número de permutaciones en  $T_n$ , y sabemos, a partir de la demostración del Teorema 4.1, que  $\frac{n!}{r-1}$  cuenta las permutaciones de  $T_{n+1}$  que tienen a  $r$  como el elemento mínimo en el lado derecho. En nuestro caso, si  $r = 2$ , entonces tenemos  $\frac{(n-1)!}{2-1} = (n-1)!$ , es decir,  $(n-1)!$  cuenta el número de permutaciones en  $T_n$  que tienen al 2 en el ciclo derecho.

Contemos ahora las permutaciones donde el 2 esté en el ciclo izquierdo para obtener el total de permutaciones en  $T_n$ .

Se tiene que cualquier permutación con el 2 en el ciclo izquierdo tiene la forma

$$(1a_1a_2 \dots a_{n-2-k}2b_1b_2 \dots b_{j-1})(b_j \dots b_k)$$

con  $1 \leq k \leq n - 2$  y  $1 \leq j \leq k$ .

Cuando  $k = n - 2$  el 2 está al lado del 1, y si variamos a  $k$  y  $j$  tenemos que los ciclos son de esa forma.

Aseguramos que el número de tales ciclos, con exactamente  $k$  términos a la derecha del 2, está dado por el  $k$ -ésimo término de la suma.

Para ver que tal es el caso, primero se toman  $a_1a_2 \dots a_{n-2-k}$  del conjunto  $\{3, \dots, n\}$ , en cualquiera de las  $(n - 2)!/k!$  formas. En el conjunto  $\{3, \dots, n\}$  hay  $n - 2$  elementos, y si tomamos  $n - 2 - k$  de ellos, sobran  $k$  que no fueron escogidos más el 2; así, tenemos  $k + 1$  elementos no escogidos que se acomodan de  $\binom{k + 1}{2}$  maneras en dos ciclos que tienen la forma  $(2b_1b_2 \dots b_{j-1})(b_j \dots b_k)$  con  $1 \leq j \leq k$  (esto nos asegura que el 2 permanece siempre en el ciclo izquierdo).

Así, por cada una de las  $(n - 2)!/k!$  formas que se pueden escoger a  $a_1a_2 \dots a_{n-2-k}$  hay  $\binom{k + 1}{2}$  maneras de acomodar a  $b_1b_2 \dots b_{j-1}b_j \dots b_k$  de la manera antes descrita, por lo que  $\frac{(n-2)!}{k!} \binom{k + 1}{2}$  es el número de ciclos con exactamente  $k$  elementos a la derecha del 2 y este último en el ciclo izquierdo.

### Propiedad b)

La idea nuevamente es transformar la identidad b) a una que involucre a los números de Stirling y a los coeficientes binomiales, ya que estos se prestan para una demostración basada en el conteo.

Así, a la identidad  $\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \binom{n}{m+1} (H_n - \frac{1}{m+1})$ , le aplicamos el Teorema 4.1 y obtenemos

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{k!} \binom{k+1}{2} = \binom{n}{m+1} \left( \frac{1}{n!} \binom{n+1}{2} - \frac{1}{m+1} \right)$$

Sustituyendo a  $\binom{k}{m}$  y  $\binom{n}{m+1}$  resulta que

$$\sum_{k=m}^{n-1} \frac{k!}{m!(k-m)!k!} \left[ \begin{matrix} k+1 \\ 2 \end{matrix} \right] = \frac{n!}{(m+1)!(n-(m+1))!} \left( \frac{1}{n!} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] - \frac{1}{m+1} \right)$$

Simplificando, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{m!(k-m)!} \left[ \begin{matrix} k+1 \\ 2 \end{matrix} \right] &= \frac{1}{(m+1)!(n-(m+1))!} \left( \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] - \frac{n!}{m+1} \right) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(m+1)!(n-(m+1))!}{m!(k-m)!} \left[ \begin{matrix} k+1 \\ 2 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] - \frac{n!}{m+1} \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(m+1)!(n-(m+1))!}{m!(k-m)!} \left[ \begin{matrix} k+1 \\ 2 \end{matrix} \right] + \frac{n!}{m+1} = \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

Haciendo  $n := n - 1, m := t - 1$  y  $k := k - 2$ , llegamos a la expresión que nos importa demostrar:

$$\left[ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = \frac{(n-1)!}{t} + t \sum_{k=t+1}^n \left[ \begin{matrix} k-1 \\ 2 \end{matrix} \right] \frac{(n-1-t)!}{(k-1-t)!}, \text{ con } 1 \leq t \leq n-1$$

En esta demostración es importante decir cuáles son los últimos  $t$  elementos ( $1 \leq t \leq n - 1$ ) de los ciclos  $(1a_2a_3 \dots a_j)(a_{j+1} \dots a_n)$ , los cuales resultan ser

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n+1-t}$$

aun cuando alguno de ellos esté en el ciclo izquierdo.

Lo que se va a realizar es una partición de las permutaciones en  $T_n$ , de acuerdo a si el mayor de los últimos  $t$  elementos está solo en el ciclo derecho o no.

Se afirma que para  $1 \leq t \leq n - 1$ , el número de permutaciones en  $T_n$ , donde el mayor de los últimos  $t$  elementos está solo en el ciclo derecho, es  $(n-1)!/t$ .

Las permutaciones por contar tienen la forma  $(1a_2a_3 \dots a_j)(a_n)$ , donde  $a_n$  es el más grande del conjunto  $\{a_{n+1-t}, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ .

A los elementos  $a_2a_3 \dots a_{n-1}a_n$  (que son  $n-1$ ) los podemos permutar de  $(n-1)!$  maneras, y así obtener los ciclos de la forma  $(1a_2a_3 \dots a_{n-1})(a_n)$  antes descritos. En todos esos ciclos el mayor de los últimos  $t$  elementos tiene la misma probabilidad de estar en

cualquiera de las últimas  $t$  posiciones, y por eso hay  $(n - 1)!/t$  permutaciones en las que el mayor de los últimos  $t$  elementos está solo en el ciclo derecho.

Como siempre, hay que contar en cuantas permutaciones el mayor de los últimos  $t$  elementos no está solo en el ciclo derecho. Para eso elegimos una  $t$ , tal que  $1 \leq t \leq n - 1$ . Él 1 no está incluido en los últimos  $t$  elementos, y por las convenciones antes hechas, por ello, si llamamos  $k$  al mayor de los últimos  $t$  elementos, tenemos que  $t + 1 \leq k \leq n$ .

Construyamos las permutaciones que intentamos contar: para ello, acomodamos del 1 hasta el  $k - 1$  en dos ciclos; para ello hay  $\binom{k - 1}{2}$  maneras de hacerlo, y para cada una de esas maneras insertamos a  $k$  a la derecha de alguno de los últimos  $t$  elementos, habiendo así  $t \binom{k - 1}{2}$  maneras de realizar este proceso, asegurándonos así que  $k$  es el mayor de los últimos  $t$  elementos y que no está solo en el ciclo derecho (ya teníamos dos ciclos no vacíos y todavía insertamos a  $k$ ).

Para cada una de las configuraciones anteriores ya tenemos  $k$  lugares ocupados y nos falta aún acomodar a  $k + 1, k + 2, \dots, n$ . Pero para asegurarnos de que  $k$  siga siendo el mayor de los últimos  $t$  elementos colocamos a los faltantes a la derecha de cualquier elemento que no sea alguno de los últimos  $t$  elementos.

Por lo anterior sabemos que ya hay  $k$  ubicados, pero no podemos colocar al  $k + 1$  a la derecha de ninguno de los últimos  $t$  elementos; debido a ello, sólo hay  $k - t$  lugares disponibles para  $k + 1$ ; para  $k + 2$  ya habrá  $k + 1$  acomodados, y por tanto  $k + 1 - t$  maneras de colocar a  $k + 2$ , y así seguimos con un argumento similar al de la segunda demostración del Teorema 4.1. Concluimos que por cada una de las  $t \binom{k - 1}{2}$  configuraciones hay  $(k - t)(k + 1 - t) \dots (n - 1 - t) = \frac{(n - 1 - t)!}{(k - 1 - t)!}$  maneras de acomodar a  $k + 1, k + 2, \dots, n$ , de modo que  $k$  sea el mayor de los últimos  $t$  elementos. Por tanto, variando los valores posibles de  $t$  obtenemos el segundo sumando de la expresión que deseamos demostrar.

### Propiedad c)

Al igual que antes usaremos el Teorema 4.1, pero ahora lo haremos para pasar de una expresión en términos de armónicos a una que sólo tendrá números de Stirling. Previamente habíamos visto que es conveniente hacerlo de esa manera.

Tenemos  $\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = \binom{n}{m} (H_n - H_m)$  y aplicamos el Teorema 4.1; entonces

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = \binom{n}{m} \left( \frac{1}{n!} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] - \frac{1}{m!} \left[ \begin{matrix} m+1 \\ 2 \end{matrix} \right] \right)$$

Sustituyendo a  $\binom{n}{m}$  resulta

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \left( \frac{1}{n!} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] - \frac{1}{m!} \left[ \begin{matrix} m+1 \\ 2 \end{matrix} \right] \right)$$

Simplificando

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{m!(n-m)!}{n-k} = \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right] - \frac{n!}{m!} \left[ \begin{matrix} m+1 \\ 2 \end{matrix} \right]$$

por lo tanto

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{m!(n-m)!}{n-k} + \frac{n!}{m!} \left[ \begin{matrix} m+1 \\ 2 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n+1 \\ 2 \end{matrix} \right]$$

Haciendo  $n := n - 1, m := m - 1$  y  $k := t - 1$  llegamos a la siguiente ecuación:

$$\left[ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} m \\ 2 \end{matrix} \right] \frac{(n-1)!}{(m-1)!} + \sum_{t=m}^{n-1} \binom{t-1}{m-1} \frac{(m-1)!(n-m)!}{(n-t)}, \text{ para } 1 \leq m \leq n$$

y ésta es la igualdad cuya validez demostraremos.

En el lado izquierdo de la igualdad tenemos a  $\left[ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right]$ , que ya sabemos lo que cuenta. Del otro lado hay una expresión, de la cual se demostrará que lo que cuenta es el número de permutaciones en  $T_n$  que tienen del 1 hasta  $m$  en el ciclo izquierdo y el número de permutaciones en las que los elementos del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  están repartidos en ambos ciclos de  $T_n$ , no sólo en el izquierdo o el derecho.

Empecemos con el caso en que los elementos  $1, 2, \dots, m$  están repartidos en los dos ciclos, de manera tal que cada ciclo tiene al menos uno de ellos.

Los elementos  $1, 2, \dots, m$  se pueden arreglar en dos ciclos de  $\binom{m}{2}$  maneras, y para cada una de ellas hay que ver de cuántas formas se pueden acomodar a  $m + 1, m + 2, \dots, n$  en los lugares restantes. Para cada una de las  $\binom{m}{2}$  maneras de arreglar al  $1, 2, \dots, m$  en dos ciclos, ya se tienen ocupados  $m$  lugares; así que para el elemento  $m + 1$  hay  $m$  maneras de colocarlo a la derecha de los  $m$  elementos ya acomodados,<sup>22</sup> y por cada  $\binom{m}{2}$  maneras de arreglar del 1 hasta el  $m + 1$ , el elemento  $m + 2$  se puede colocar de  $m + 1$  formas a la derecha de los  $m + 1$  ya acomodados, y así sucesivamente<sup>23</sup> hasta llegar al elemento  $n$ , para el cual por cada  $\binom{m}{2} m(m + 1) \dots (n - 2)$  formas de acomodar del 1 hasta el  $n - 1$ , hay  $n - 1$  formas de acomodarlo a la derecha de los  $n - 1$  elementos ya acomodados. Así, el número de permutaciones que tienen a los elementos  $1, 2, \dots, m$  repartidos en ambos ciclos es

$$\binom{m}{2} m(m + 1) \dots (n - 1) = \binom{m}{2} \frac{(n - 1)!}{(m - 1)!}$$

Ahora contemos cuántos ciclos de  $T_n$  tienen al  $1, 2, \dots, m$  en el ciclo izquierdo.

Se afirma que el otro sumando en la parte derecha de la identidad cuenta el número de permutaciones antes descritas, pero con exactamente  $t$  elementos en el ciclo izquierdo y  $n - t$  en el derecho, para una  $t$  que cumple con  $m \leq t \leq n - 1$ . Es decir, que en el ciclo izquierdo tienen que estar del 1 hasta el  $m$ , y podría o no haber otros elementos.

Para empezar el conteo consideremos una  $t$  fija tal que  $m \leq t \leq n - 1$ , por lo que el ciclo izquierdo tendrá  $t$  y el derecho  $n - t$ .

Se desea contar el número de ciclos de  $T_n$  en los cuales todos los elementos del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  estén en el ciclo izquierdo; para ello, y por las convenciones antes hechas, colocamos al 1 en el principio del ciclo izquierdo, por lo que quedan  $t - 1$  lugares disponibles en el ciclo izquierdo para los  $m - 1$  elementos del conjunto  $\{2, \dots, m\}$ . Existen

<sup>22</sup>Se colocan los elementos  $m + 1, m + 2, \dots, n$  a la derecha de los ya acomodados para que nos aseguremos de que el primer elemento de cada ciclo sea el más pequeño.

<sup>23</sup>La justificación es semejante al argumento de la segunda demostración del Teorema 4.1

$\binom{t-1}{m-1}$  maneras de escoger  $m-1$  lugares de los  $t-1$  disponibles en el ciclo izquierdo. Y por cada una de esas  $\binom{t-1}{m-1}$  maneras hay  $(m-1)!$  formas en que los elementos  $2, \dots, m$  ocupen  $m-1$  lugares. Pero para cada una de las  $\binom{t-1}{m-1}(m-1)!$  formas de acomodar a los elementos  $2, \dots, m$  falta acomodar a los elementos  $m+1, m+2, \dots, n$  en los  $n-m$  lugares restantes. Hay  $(n-m)!$  maneras de hacer eso, pero por cada  $n-t$  maneras, solo una pone al elemento más pequeño del ciclo derecho al principio del mismo; por eso dividimos a  $(n-m)!$  entre  $n-t$ , obteniendo  $(n-m)!/(n-t)$ , de manera que no haya repeticiones. Por lo tanto, para la  $t$  elegida, existen

$$\binom{t-1}{m-1} \frac{(m-1)!(n-m)!}{(n-t)}$$

maneras de acomodar a todos los elementos del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  en el ciclo izquierdo, mismo que tiene  $t$  lugares disponibles. Además, cumple con el requisito de que el primer elemento del ciclo es el más pequeño.

Recorriendo todos los posibles valores de  $t$  llegamos a que

$$\sum_{t=m}^{n-1} \binom{t-1}{m-1} \frac{(m-1)!(n-m)!}{(n-t)}$$

Sumando los subtotaes de los casos obtenemos el número de permutaciones en  $T_n$ .

En las tres proposiciones anteriores pudimos utilizar la relación entre  $H_n$  y los números de Stirling. Esto para cambiar de unas identidades que envolvían armónicos y coeficientes binomiales a otras identidades que involucran números armónicos y de Stirling, lo cual nos llevó a realizar demostraciones basadas en el hecho de contar elementos de un conjunto, lo cual es un concepto más cercano a la intuición que los que se usan al realizar una demostración algebraica.

Para finalizar este capítulo estudiaremos el siguiente teorema que nos provee de otra relación entre números armónicos y de Stirling, donde se hace nuevamente uso del teorema 4.1 para transformar la expresión inicial a una que facilite el conteo vía los números de Stirling.

**Teorema 4.2.** En promedio, una permutación de  $n$  elementos tiene  $H_n$  ciclos.

### **Demostración:**

Como  $n$  elementos tienen  $n!$  permutaciones y de las cuales  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  tienen  $k$  ciclos, entonces el Teorema 4.2 enuncia de forma equivalente que

$$\frac{\sum_{k=1}^n k \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]}{n!} = H_n$$

y si se aplica el Teorema 4.1, entonces

$$\sum_{k=1}^n k \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} n+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right], \text{ con } n \geq 1$$

En el lado izquierdo se cuenta el número de permutaciones de  $\{1, \dots, n\}$ , con  $k$  ciclos, y donde uno de ellos es diferenciado de alguna manera. Por su parte, el lado derecho cuenta el número de permutaciones del conjunto  $\{0, 1, \dots, n\}$ , con exactamente 2 ciclos. Para demostrar la igualdad se dará una correspondencia uno a uno entre ambos conjuntos.

Para ver la correspondencia se transforma la permutación de  $n$  elementos con  $k$  ciclos y tomando a  $C_j$  como el ciclo diferenciado:

$$(C_k)(C_{k-1}) \dots (C_{j+1}) \underline{(C_j)}(C_{j-1}) \dots (C_2)(C_1),$$

en

$$(0C_1C_2 \dots C_{j-1}C_{j+1} \dots C_{k-1}C_k)(C_j).$$

Si contrariamente tenemos  $(0a_1a_2 \dots a_{n-j})(b_1 \dots b_j)$  en  $T_{n+1}$ , con  $\underline{(b_1 \dots b_j)}$  el ciclo distinguido, tal ciclo se insertará entre los ciclos  $C_{k-1} \dots C_2C_1$  que se generan de la siguiente manera:

$C_1$ , el ciclo que está más a la derecha, empieza con  $a_1$ , seguida por  $a_2$ , y así sucesivamente, hasta encontrar un número  $a_i$  que sea menor que  $a_1$ . Asumiendo que  $a_i$  existe, es decir,  $a_1 \neq 1$ , construimos a  $C_2$  poniendo a  $a_i$  al principio del ciclo y repetimos el procedimiento anterior; empezaremos un nuevo ciclo cada vez que encontremos un nuevo elemento más pequeño. Ya formados los ciclos y habiendo insertado el ciclo diferenciado, obtenemos una permutación de  $n$  elementos de acuerdo con las convenciones hechas. Así, obtenemos la correspondencia uno a uno que buscábamos.

Se puede generalizar lo que acabamos de demostrar de la siguiente manera:

Si hay  $m$  ciclos de los  $k$  ciclos dados, entonces

$$\sum_{k=m}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m} = \begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}$$

Esta vez el lado izquierdo cuenta el número de permutaciones de  $\{1, \dots, n\}$  con  $k$  ciclos, pero  $m$  de ellos son diferenciados y hay  $\binom{k}{m}$  maneras de escogerlos de entre  $k$  ciclos. El lado derecho  $\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}$  cuenta el número de permutaciones del conjunto  $\{0, 1, \dots, n\}$  con  $m+1$  ciclos.

Si tenemos la permutación con  $n$  elementos,  $k$  ciclos y  $m$  de ellos diferenciados, lo transformamos en  $m+1$  ciclos de la siguiente manera: el primer ciclo consiste en juntar todos los ciclos no diferenciados acomodados en orden descendente de acuerdo con el primer elemento del ciclo, y los siguientes  $m$  son los ciclos diferenciados acomodados en orden creciente, de acuerdo con el primer elemento de cada ciclo.

Y si tenemos  $m+1$  ciclos en las permutaciones del conjunto  $\{0, 1, \dots, n\}$ , procedemos de manera semejante a la demostración del Teorema 4.2; pero ahora, después de formar los ciclos, insertamos los  $m$  ciclos distinguidos según las convenciones hechas antes.

Todavía se puede generalizar más la ecuación anterior si planteamos que

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} 2^k = (n+1)!$$

donde tenemos un número arbitrario de ciclos diferenciados.

Con este último resultado se cierra este capítulo, habiendo mostrado algunas relaciones que se generan entre los números armónicos y la cantidad de permutaciones en  $k$  ciclos, y esta relación permite que se expresen de un lado u otro las equivalencias entre armónicos y números de Stirling.



## Capítulo 5

### Temas de actualidad sobre números armónicos

Este capítulo está dedicado a la exposición de algunos resultados que involucran a números armónicos, pero con la característica de que son extraídos de trabajos publicados en años recientes, y esto tiene el propósito de mostrar que el estudio de los números armónicos sigue produciendo resultados. Enseguida mostraremos algunos de estos resultados que dan una idea de los temas en donde se desarrollan los mismos.

Uno de los aspectos que podemos estudiar de  $H_n$  bajo el enfoque de cantidades fraccionarias, es el de darle una interpretación combinatoria a través de los números de Stirling –que es lo que ya se hizo en el capítulo anterior– y en especial apelando a la parte del numerador. Otro aspecto, pero con  $H_n$  expresado como una fracción irreducible, es la divisibilidad de  $H_n$  para una  $n \in \mathbb{N}$ , o cuando  $H_n$  es congruente módulo  $n \in \mathbb{N}$ . Un caso especial e interesante se presenta cuando  $n = p - 1$  con  $p$  primo, y es ese caso precisamente el tema de estudio de este capítulo. Comenzaremos con la congruencia de Wolstenholme que tendrá dos demostraciones. La primera estará dividida en varias partes en las que podremos observar el manejo y algunas propiedades de  $H_n$ . La segunda está basada en el uso de las propiedades de ciertos polinomios.

La llamada congruencia de Wolstenholme es equivalente al teorema de Wolstenholme, del cual veremos algunas variaciones y generalizaciones relacionadas –directa o indirectamente– con los números armónicos y que involucran coeficientes binomiales y números de Bernoulli.

Por último, en este capítulo vamos a mencionar algunos trabajos recientes sobre teoría aritmética de los números armónicos.

#### 5.1. Teorema de Wolstenholme

Sea el número armónico  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ , del que sabemos que está representado por un número racional que se puede llevar a su forma irreducible. En particular podemos considerar al conjunto de los  $H_{p-1}$ , que serán números armónicos donde  $p$  es un

primo, es decir, que son los de la forma  $H_{p-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros. Lo que nos enuncia Wolstenholme es una propiedad muy interesante sobre divisores primos del numerador  $a$  y que además no es libre de cuadrados<sup>24</sup>. Así, el resultado principal señala que

Si  $p > 3$ , entonces  $p^2$  divide al numerador del racional irreducible  $\frac{a}{b}$  que es la suma de  $H_{p-1}$ .

Antes de proceder con la demostración de este teorema se requiere probar algunos resultados previos, pero es importante mencionar que estos no son solo un tipo de lemas necesarios para el resultado principal, sino que también aportan por sí solos propiedades interesantes de los armónicos. Pasemos ahora a presentarlos junto con sus demostraciones.

### Propiedad I

Sea  $p$  un primo, entonces  $p$  divide al numerador de la fracción irreducible  $\frac{a}{b}$  que representa a la suma  $H_{p-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$ .

### Demostración

Sea  $H_{p-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$ . Si agrupamos los sumandos de manera simétrica tomando de  $H_{p-1}$  sucesivamente el primero y el último de los sumandos, tenemos que

$$H_{p-1} = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{p-3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{p - \frac{p-1}{2}}\right),$$

Si se multiplica cada término por la unidad de manera adecuada se obtiene

$$H_{p-1} = \left(\frac{(1)(p-1)}{(p-1)} + \frac{(1)1}{(1)(p-1)}\right) + \left(\frac{(1)(p-2)}{2(p-2)} + \frac{1(2)}{(2)(p-2)}\right) + \dots + \left(\frac{1\left(p - \frac{p-1}{2}\right)}{\frac{p-1}{2}\left(p - \frac{p-1}{2}\right)} + \frac{1\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(p - \frac{p-1}{2}\right)}\right)$$

y sumando cada binomio se llega a que

$$H_{p-1} = \left(\frac{p}{(1)(p-1)}\right) + \left(\frac{p}{(2)(p-2)}\right) + \left(\frac{p}{(3)(p-3)}\right) + \dots + \left(\frac{p}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(p - \frac{p-1}{2}\right)}\right)$$

---

<sup>24</sup> Se dice que un número  $n$  es libre de cuadrados si en su factorización en primos ningún factor tiene potencia mayor que uno.

$$\begin{aligned}
H_{p-1} &= p \left( \binom{1}{(1)(p-1)} + \binom{1}{(2)(p-2)} + \binom{1}{(3)(p-3)} + \cdots + \binom{1}{\binom{p-1}{2}(p-\frac{p-1}{2})} \right) = \\
&= p \left( \frac{2(p-2) \cdots \binom{p-1}{2} (p-\frac{p-1}{2}) + (p-1)3(p-3) \cdots \binom{p-1}{2} (p-\frac{p-1}{2}) + \cdots + (p-1)2(p-2) \cdots \binom{p-2}{2} (p-\frac{p-2}{2})}{(p-1)(2)(p-2) \cdots \binom{p-1}{2} (p-\frac{p-1}{2})} \right) \\
&= \frac{p \left( \frac{(p-1)!}{(1)(p-1)} + \frac{(p-1)!}{(2)(p-2)} + \cdots + \frac{(p-1)!}{\binom{p-1}{2} (p-\frac{p-1}{2})} \right)}{(p-1)!}
\end{aligned}$$

Aquí se percibe que el producto de los denominadores contiene  $(p-1)$  factores diferentes enteros entre 1 y  $(p-1)$ , y por lo tanto

$$H_{p-1} = p \left( \frac{N}{(p-1)!} \right)$$

Nótese que  $N$  es un entero y que ninguno de los factores diferentes de 1, contenidos en  $(p-1)!$ , divide a  $p$ ; entonces en el racional irreducible de  $H_{p-1}$  el numerador es divisible por  $p$ . Esto es lo que se quería demostrar.

Es en la demostración de esta propiedad donde podemos observar que cuando  $p$  es un primo en  $H_{p-1}$  entonces se facilita la manipulación de la suma  $H_{p-1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}$ , así como conocer más sobre la naturaleza de  $H_{p-1}$ .

Sigamos ahora con el análisis de los elementos del cociente  $\frac{N}{(p-1)!}$  y veamos que a partir del entero  $N$ , que es de la forma

$$\left( \frac{(p-1)!}{(1)(p-1)} + \frac{(p-1)!}{(2)(p-2)} + \frac{(p-1)!}{(3)(p-3)} + \cdots + \frac{(p-1)!}{\binom{p-1}{2}(p-\frac{p-1}{2})} \right),$$

se puede inferir que

Para toda  $n$  en el conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, (p-1)\}$  se cumple que

$$\frac{(p-1)!}{(n)(p-n)} \equiv (n^2)^{-1} \pmod{p}.$$

(nótese que el lado izquierdo de la congruencia involucra a todos los sumandos de  $N$ , incluso dos veces).

### **Demostración.**

Sea  $x = \frac{(p-1)!}{(n)(p-n)}$ , por lo tanto  $(n)(p-n)x = (p-1)!$ . Ahora, por el teorema de Wilson<sup>25</sup> tenemos que  $(n)(p-n)x = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ , pero como  $n(p-n)x = np x -$

<sup>25</sup>El teorema de Wilson enuncia que “Si  $p$  es un número primo, entonces  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ ”.

$n^2x$ , entonces  $-n^2x \equiv -1 \pmod{p}$ , o de manera equivalente,  $n^2x \equiv 1 \pmod{p}$ . Pero como  $n$  está en el conjunto  $\{1,2,3, \dots, (p-1)\}$ , por lo tanto  $n^2$  y  $p$  son primos relativos y esto nos lleva a que la congruencia  $n^2x \equiv 1 \pmod{p}$  sí tiene solución incongruente para  $x$ , y ésta es  $x \equiv (n^2)^{-1} \pmod{p}$ . Finalmente se obtiene que

$$\frac{(p-1)!}{(n)(p-n)} \equiv (n^2)^{-1} \pmod{p}.$$

Ya podemos pasar al análisis de la existencia de por lo menos un primo al cuadrado entre los divisores del numerador de  $H_{p-1} = \frac{a}{b}$ , pero como  $H_{p-1} = p \left( \frac{N}{(p-1)!} \right)$ , entonces demostraremos que  $p$  divide a  $N$ , que es parte del numerador de  $H_{p-1}$ .

Ahora demostraremos que  $N \equiv 0 \pmod{p}$ .

### **Demostración**

La ruta a seguir será la de probar primero que  $2N \equiv 0 \pmod{p}$ . Para esto consideramos que  $(n^2)^{-1} \equiv (n^{-1})^2 \pmod{p}$ , y como acabamos de demostrar que

$$\frac{(p-1)!}{(n)(p-n)} \equiv (n^2)^{-1} \pmod{p},$$

entonces

$$N \equiv (1^2)^{-1} + (2^2)^{-1} + \dots + \left( \left( \frac{p-1}{2} \right)^2 \right)^{-1} \pmod{p},$$

o de manera equivalente

$$N \equiv (1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + \dots + \left( \left( \frac{p-1}{2} \right)^{-1} \right)^2 \pmod{p}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2N = N + N &\equiv (1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + \dots + \left( \left( \frac{p-1}{2} \right)^{-1} \right)^2 + (1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + \dots \\ &+ \left( \left( \frac{p-1}{2} \right)^{-1} \right)^2 \pmod{p} \\ &\equiv (1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + \dots + \left( \left( \frac{p-1}{2} \right)^{-1} \right)^2 + (-(1^{-1}))^2 + (-(2^{-1}))^2 + \dots \\ &+ \left( - \left( \left( \frac{p-1}{2} \right)^{-1} \right) \right)^2 \pmod{p} \end{aligned}$$

Pero sabemos que  $-(r^{-1}) \equiv (-r)^{-1} \pmod{p}$  y que  $(p-1) \equiv -1 \pmod{p}$  por lo tanto

$$\begin{aligned}
2N &\equiv (1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + \dots + \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^{-1}\right)^2 + ((-1^{-1}))^2 + ((-2^{-1}))^2 + \dots \\
&\quad + \left(\left(-\left(\frac{p-1}{2}\right)^{-1}\right)\right)^2 \pmod{p} \\
&\equiv (1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + \dots + \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^{-1}\right)^2 + \left(\left(-\left(\frac{p-1}{2}\right)^{-1}\right)\right)^2 + \dots \\
&\quad + ((-2^{-1}))^2 ((-1^{-1}))^2 \pmod{p} \\
&\equiv (1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + \dots + \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^{-1}\right)^2 + \left(\left(\frac{p+1}{2}\right)^{-1}\right)^2 + \dots + ((p-2)^{-1})^2 \\
&\quad + ((p-1)^{-1})^2 \pmod{p} \equiv (1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + \dots + ((p-1)^{-1})^2 \pmod{p} \\
&\equiv (1)^2 + (2)^2 + \dots + (p-1)^2 \pmod{p}
\end{aligned}$$

Pero sabemos que  $(1)^2 + (2)^2 + \dots + (p-1)^2 \equiv 0 \pmod{p}$ , entonces  $2N \equiv 0 \pmod{p}$ . Finalmente como  $p$  es mayor que 3, entonces  $p$  no divide a 2, y por tanto  $p$  divide a  $N$ .

Retomando a  $H_{p-1} = \frac{a}{b} = p \left(\frac{N}{(p-1)!}\right)$ , ya podemos decir que  $p^2$  divide al numerador de  $H_{p-1}$ , y en consecuencia hemos llegado a que  $H_{p-1} = \left(\frac{p^2 M}{(p-1)!}\right)$ .

Se ha establecido que al sumar de manera adecuada los sumandos de  $H_{p-1}$ , y considerando que  $p$  es primo se pueden obtener resultados sobre la divisibilidad del numerador de  $H_{p-1}$ .

Tenemos además otra forma de visualizar al factor cuadrático del numerador de  $H_{p-1}$ . Por lo anterior sabemos que al numerador lo podemos escribir como  $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k}$ , y esta suma puede ser analizada desde el perfil de que cada sumando es un producto de  $(p-2)$  números diferentes tomados del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, (p-1)\}$ . Pero esta suma a la vez es el coeficiente del término  $(-x)$  en el polinomio

$$g(x) = (x-1)(x-2) \dots (x-(p-1)).$$

Recordemos que los coeficientes del polinomio  $g(x)$  pueden ser representados como productos de las raíces del mismo  $g(x)$ .

Tenemos que  $g(x)$  se puede escribir en la forma

$$g(x) = x^{p-1} - D_1 x^{p-2} + D_2 x^{p-3} - \dots + D_{p-3} x^2 - D_{p-2} x + (p-1)!$$

donde el coeficiente  $D_k$  es la  $k$ -ésima función elemental simétrica de las raíces, es decir, la suma de los productos de los números del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, (p-1)\}$  tomados de  $k$  en  $k$ . Aunado al siguiente resultado de polinomios que dice

Para cada primo  $p$  todos los coeficientes del polinomio

$$f(x) = (x-1)(x-2) \dots (x-(p-1)) - x^{p-1} + 1,$$

son divisibles por  $p$ .

Concluimos que cada uno de los coeficientes  $D_1, D_2, \dots, D_{p-2}$  es divisible por  $p$ . Y lo que nos interesa en este caso es que  $D_{p-2}$  sea divisible por  $p^2$ .

Así, lo que se tiene es que  $g(x)$  evaluada en  $p$  da lugar a que  $g(p) = (p-1)!$ , y que por lo tanto  $(p-1)! = g(p) = p^{p-1} - D_1 p^{p-2} + D_2 p^{p-3} - \dots + D_{p-3} p^2 - D_{p-2} p + (p-1)!$ . Y si reducimos la expresión anterior, y ahora también consideramos que  $p > 5$ , y finalmente volvemos a reducir pero módulo  $p^3$ , entonces  $D_{p-2} p \equiv 0 \pmod{p^3}$ , y por lo tanto  $D_{p-2} p \equiv 0 \pmod{p^2}$ , que es a lo que se quería llegar.

Estas congruencias que acabamos de mostrar donde intervienen los números armónicos pueden ser vistas como los dos casos equivalentes del teorema de Wolstenholme donde ahora la congruencia está en términos de un coeficiente binomial. El teorema en cuestión entonces diría lo siguiente:

$$\text{Para todo primo } p > 3 \text{ se cumple la congruencia } \binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}.$$

Siguiendo esta parte del estudio de los coeficientes binomiales, se han descubierto decenas de propiedades importantes que han complementado y generalizado el teorema de Wolstenholme. Pero, como el tema de este trabajo son los números armónicos, entonces centraremos principalmente nuestra atención en las partes donde intervienen directa o indirectamente. Aparecerán congruencias que relacionan coeficientes binomiales con números armónicos, y estos a su vez con números de Bernoulli módulo potencias de primos y un tipo particular de primos, los primos de Wolstenholme, que se definirán a partir de los números armónicos.

$$\text{Ahora se tiene que la congruencia mencionada } \binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3},$$

fue generalizado por J. W. L. Glaisher en 1900. Su propuesta es que para  $p \geq 5$  se tiene que

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \pmod{p^4},$$

En 1995 R. J. McIntosh (McIntosh, 1995) trabajó con el módulo  $p^5$  y propuso que si  $p \geq 7$  tendría que suceder que

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^5}.$$

Para 2007 J. Zhao (Zhao, 2007) planteó que si  $p \geq 7$  entonces

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 + 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \pmod{p^5},$$

y nótese que esta propuesta sí quedó en términos de un número armónico, ya que la anterior, que también fue para módulo  $p^5$ , estaba en función de la suma de recíprocos de cuadrados y no de enteros positivos que son los que corresponden a los armónicos.

Para la potencia  $p^6$  y  $p \geq 7$ , R. Tauraso propuso en 2010 que

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 + 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + 2 \frac{p^3}{3} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^3} \pmod{p^6},$$

o de manera equivalente

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - 2p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^6}.$$

Recientemente, en 2011 R. Mestrovic enunció que para  $p \geq 11$  se tendría que

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + 2p^2 \left( \left( 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \right)^2 - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \right) \pmod{p^7}.$$

Nótese que todas estas congruencias involucran al número armónico  $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$ , salvo la de McIntosh, pero la de J. Zhao sí retoma los números armónicos en el caso del módulo cinco.

De aquí podemos inferir que  $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$  se puede expresar de diversas formas según la potencia de un módulo primo, es decir, de lo anterior tenemos que

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \pmod{p^4}$$

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 + 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \pmod{p^5}$$

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - 2p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^6}$$

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + 2p^2 \left( \left( 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \right)^2 - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \right) \pmod{p^7}.$$

Y esto nos lleva a expresiones de la forma

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + p^4 r_1$$

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 + 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + p^5 r_2$$

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - 2p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} + p^6 r_3$$

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + 2p^2 \left( \left( 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \right)^2 - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \right) + p^7 r_4.$$

Y por tanto el coeficiente binomial  $\binom{2p-1}{p-1}$  tiene una representación como expansión en potencias de  $p$ ; dicho de otra forma, el coeficiente binomial tiene una representación  $p$ -ádica, y además es notable que los coeficientes de esta representación  $p$ -ádica incluyen números armónicos en algunos de sus coeficientes.

Por otro lado el coeficiente binomial  $\binom{2p-1}{p-1}$  también se puede visualizar en términos de los números de Bernoulli. Estos números que denotamos por  $B_k$  ( $k$  en los naturales), y que recordamos se definen como los coeficientes de la función generadora

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} = \frac{x}{e^x - 1},$$

De aquí se puede ver que  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -1/2$ ,  $B_2 = 1/6$ ,  $B_4 = -1/30$ , y  $B_n = 0$  para los impares  $n \geq 3$ .

Además se tiene una congruencia que se conoce como congruencia de Glaisher que involucra a los números de Bernoulli  $B_{p-3}$ , y que es la siguiente:

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - \frac{2}{3}p^3 B_{p-3} \pmod{p^4},$$

para todo primo  $p \geq 7$ .

Nótese que ya se tenía que  $\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \pmod{p^4}$ , y por la transitividad de las congruencias se puede llegar a que

$$\frac{2}{3}p^3 B_{p-3} \equiv 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \pmod{p^4}.$$

De manera semejante se tienen resultados para los módulos 5, 6, y 7. En estos casos se dan las siguientes relaciones

$$p^3 B_{p^3-p^2-2} \equiv -2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \pmod{p^5}$$

$$p^3 B_{p^3-p^2-2} - \frac{1}{3}p^5 B_{p-3} + \frac{6}{5}p^5 B_{p-5} \equiv 2p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + 2p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^6}.$$

Nótese nuevamente cómo se genera la relación entre armónicos de grado uno y dos con las expresiones  $p$ -ádicas que se acompañan de números de Bernoulli.

Ahora pasamos a definir y dar unas propiedades de lo que recientemente se conoce como los primos de Wolstenholme.

## 5.2. Primos de Wolstenholme

Un primo  $p$  se conoce como primo de Wolstenholme si satisface la congruencia

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^4}.$$

Se puede ver que esta congruencia se tiene la igualdad

$$\frac{\binom{2p-1}{p-1} - 1}{p^3} = V_p \quad p \geq 5,$$

se puede apreciar que  $V_p$  es divisible por el primo  $p$ .

Véase que de la congruencia ya mencionada  $\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - \frac{2}{3}p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}$ ; se tiene que  $V_p \equiv -\frac{2}{3}B_{p-3} \pmod{p}$ . Así, se puede señalar que  $p$  es un primo de Wolstenholme si y sólo si  $p$  divide al numerador de los números de Bernoulli  $B_{p-3}$ .

En 2007 (J. Zhao 2007) definió a los primos de Wolstenholme, recurriendo a números armónicos, de esta forma:

Un primo  $p$  es un primo de Wolstenholme si  $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv 0 \pmod{p^3}$ .

En 2011 se llegó a un resultado interesante que involucra armónicos de primer grado y de grado mayor. (Mestrovic 2011) demostró que si  $p$  es un primo de Wolstenholme entonces

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 + p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - \frac{p^2}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} + \frac{p^3}{3} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^3} - \frac{p^4}{4} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^4} + \frac{p^5}{5} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^5} - \frac{p^6}{6} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^6} \pmod{p^8}.$$

### 5.3. Líneas actuales de investigación.

El tema de los números armónicos sigue vigente y algunas de las líneas actuales de investigación son las siguientes:

**Números armónicos y sucesiones de Lucas.** Este trabajo lo ha desarrollado (Zhi-WeiSun 2011) quien estudia congruencias que relacionan números armónicos y sucesiones de Lucas. Uno de los teoremas que ha demostrado es el siguiente: Sea  $u_0 = 0, u_1 = 1$ , y  $u_{n+1} = u^n - 4u_{n-1}$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Entonces para todo primo  $p > 5$  se tiene que

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k}{2^k} u_{k+\delta} \equiv 0 \pmod{p}$$

donde  $\delta = 0$  si  $p \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15}$ , y  $\delta = 1$  en los otros casos.

En este artículo podemos encontrar congruencias que relacionan armónicos con números de Fibonacci y de Lucas.

**Teoría Aritmética de los números armónicos.** En este caso (Zhi-WeiSun 2012) ha demostrado varias propiedades que involucran a los armónicos dentro de un contexto de la aritmética de residuos según un módulo que involucra primos. Algunas de las propiedades de la aritmética residual son:

Sea  $p > 3$  un primo, entonces

- a)  $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k}{k2^k} \equiv 0 \pmod{p}$
- b)  $\sum_{k=1}^{p-1} H_k^2 \equiv 2(p-1) \pmod{p^2}$

c)  $\sum_{k=1}^{p-1} H_k^3 \equiv 6 \pmod{p}$

d)  $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k^2}{k^2} \equiv 0 \pmod{p}$  para  $p > 5$ .

Para tener más datos sobre este tema se puede consultar el artículo de (R. Meštrović 2011). Aquí también se encontrará una extensa bibliografía sobre el tema.

## Conclusiones

En los capítulos de la tesis estudiamos a los números armónicos  $H_n$  y exploramos cómo pueden ser una herramienta muy eficiente para construir y demostrar resultados que han llegado a ser de gran importancia en la teoría de números, por ejemplo en la construcción de la constante de Euler o en la deducción de los números de Bernoulli

Como la serie armónica diverge entonces desde el inicio sabíamos que no sería fácil trabajar con sumas parciales de ella, que son precisamente los números armónicos  $H_n$ , entonces para encontrar aproximaciones cada vez más cercanas al valor real de ellos se usaron los elementos que nos proporciona el concepto de la gran O, y con ésta cada aproximación tenía un margen de error el cual siempre se procuró que tendiera a cero conforme  $n$  crecía en  $H_n$ . Aquí podemos concluir que el uso de las propiedades de la gran O y de los números armónicos nos permitió entender más el comportamiento de funciones aritmético-multiplicativas, que son generalmente muy inestables como es el caso de  $\sigma(n)$  y  $\tau(n)$ .

En el capítulo cuatro estudiamos la relación que existe entre los números armónicos y los números de Stirling, y cómo a partir de ella se obtienen identidades que antes estaban en términos de coeficientes binomiales y números armónicos, pero después están en términos de números de Stirling. En este capítulo tuvimos otra manera de tratar a los números armónicos, ya que el objetivo no fue aproximar a  $H_n$ , sino entender el comportamiento de  $H_n$  tanto en el denominador como en el numerador de la suma parcial  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ . Aquí es donde surge la manera de relacionar a  $H_n$  con los números de Stirling. También es importante mencionar que a través de la relación antes mencionada fue posible visualizar de mejor manera la demostración de las identidades antes citadas, ya que todas las demostraciones se reducen a contar elementos de ciertos conjuntos.

Después de escribir el capítulo cinco concluimos que el estudio de los armónicos está en plena actividad creativa para aportar nuevos resultados, como es el caso de Zhi Wei Sun, Zhao o Meštrović, que están enfocados al estudio de congruencias que contienen a  $H_n$ , con especial interés en que el módulo sea un número primo; o sobre el teorema de Wolstenholme que es uno de los resultados más sobresalientes.

El tema de los números armónicos es muy vasto y tuvimos la oportunidad de comprobar al momento de decidir que características incluiríamos en la tesis, ya que teníamos frente a nosotros usos de ellos de gran utilidad en matemática así como en otras ciencias, pero nuestro objetivo estaba dirigido a la teoría de números. Así, sólo tomamos aquellas propiedades que convergían en tal rama de las matemáticas, dejando fuera las que se alejaban del objetivo, tal es el caso de la representación analítica de los números armónicos o fórmulas explícitas para sumas de la forma  $\sum a_k H_k$  presentes en el análisis de algoritmos, entre otras aplicaciones.

# Apéndice I

## La constante $\gamma$ de Euler.

La constante  $\gamma$  de Euler<sup>26</sup> definida como el límite de  $\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x}\right] - \ln(x)$ , cuando  $x$  tiende a infinito, surgió a mediados del siglo XVIII. El análisis de Euler de la constante  $\gamma$  se gestó en un entorno de interés por las series del tipo  $1 + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{x^n}$  y su convergencia. Fue en su escrito titulado *De Progressionibus harmonicis observationes* (Euler, 1734) donde dio a conocer dicha relación entre el logaritmo natural y los números armónicos.

A pesar de que  $\gamma$  es considerablemente más difícil de calcular que las conocidas constantes  $\pi$  y  $e$ , el reconocimiento que se le ha otorgado no es del mismo calibre que el de las otras constantes.

Los usos de  $\gamma$  en otras disciplinas de la matemática son amplios, pero aún resta por conocer de ella. En este sentido falta determinar si  $\gamma$  es un número irracional o trascendente. Según T. Papanikolaou (Havil, 2003) si  $\gamma$  se pudiera expresar como un cociente simple  $\frac{a}{b}$ , entonces el denominador  $b$  tendría que cumplir con ser mayor a  $10^{242080}$ . Por otra parte Hilbert (Havil, 2003) se refirió a la irracionalidad de  $\gamma$  como un problema sin resolver que parece intratable.

Entre otras propiedades de  $\gamma$  se puede demostrar que la diferencia entre el  $n$ -ésimo armónico menos  $\ln(n)$  y  $\gamma$  da lugar a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma = \int_n^{\infty} \frac{x - [x]}{x^2} dx$$

donde  $[x]$  es la parte entera menor a  $x$ . La anterior diferencia también cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2(n+1)} < H_n - \ln(n) - \gamma < \frac{1}{2n}$$

También se puede expresar mediante expansiones asintóticas (sirven para hacer estimaciones de  $\gamma$ ):

---

<sup>26</sup>Posteriormente sería conocida como la constante de Euler-Mascheroni, y cabe señalar que Mascheroni fue quien la denota por  $(\gamma)$ ; además contribuyó con algunos cálculos para su aproximación en 1790.

$$\begin{aligned}
\text{a) } \gamma &\sim H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \dots \\
\text{b) } \gamma &\sim H_n - \ln\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{24n} + \frac{1}{48n^3} + \dots\right) \\
\text{c) } \gamma &\sim H_n - \frac{\ln(n) + \ln(n+1)}{2} - \frac{1}{6n(n+1)} + \frac{1}{30n^2(n+1)^2} - \dots
\end{aligned}$$

La primera expansión asintótica fue planteada por Euler, la segunda por Negoi (Negoi, 1997) y la tercera por Cesaro (Cesàro, 1885).

Otras razones que justifican la relevancia de la constante de Euler es que puede ser encontrada en expresiones como: a) la integral exponencial; b) el primer término de la expansión en serie de Taylor para la función zeta de Riemann; c) el cálculo de la función Digamma; d) la solución de la ecuación de Bessel de segunda clase; e) una definición del coseno integral. Todas estas aplicaciones aparecen en el contexto del Análisis. En teoría de números la podemos hallar en la definición de la función Gamma, en el cálculo del orden de la magnitud de funciones aritméticas, en una conjetura sobre los primos de Mersenne, entre otros (véase, (Weisstein)).

En los párrafos siguientes se mencionan algunas maneras como se puede expresar  $\gamma$  en términos de integrales, series, límites y como parte de una igualdad que involucra funciones de Bessel.

Entre la numerosa cantidad de límites mediante los cuales se puede que expresar  $\gamma$ , hemos seleccionado como ejemplo los siguientes:

1.- El límite antisimétrico (Whittaker & Watson, 1990):

$$\gamma = \lim_{s \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{s^n} \right)$$

2.- En el siguiente límite se puede ver otra relación entre la constante de Euler y la función Zeta de Riemann:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2n-1}{2n} - \ln(n) + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{\zeta(1-k)}{n^k} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2^n}{e^{2^n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{mn}}{(m+1)!} \sum_{t=0}^m \frac{1}{t+1} - n \ln 2 + O\left(\frac{1}{2^n e^{2^n}}\right) \right]
\end{aligned}$$

Debido a que la función en el término del error decrece rápidamente cuando  $n \rightarrow \infty$ , resulta que este límite es conveniente para alcanzar una buena aproximación para  $\gamma$ .

3.- Por último tenemos que

$$-\gamma = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \Gamma(z) - \frac{1}{z} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \Psi(z) - \frac{1}{z} \right\}$$

Dando lugar a las siguientes igualdades:

$$-\gamma = \Gamma'(1) = \Psi(1)$$

Donde  $\Gamma(z)$  es la función gamma y  $\Psi(z)$  es la función digamma.

Para concluir con esta parte de las representaciones de la constante  $\gamma$  presentamos la siguiente igualdad

$$\gamma = \frac{S_0(z) - K_0(z)}{I_0(z)} - \ln\left(\frac{1}{2}z\right).$$

Aquí  $K_0(z)$  es una función de Bessel de segunda clase modificada,  $I_0(z)$  es una función de Bessel de primera clase modificada y  $S_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{2k} H_k}{(k!)^2}$  (véase, (Weisstein)). De esta última representación se puede obtener un algoritmo iterativo eficiente para calcular  $\gamma$ .

Ahora pasamos a exponer algunos cálculos para aproximar a  $\gamma$ . Éstos fueron presentados por Euler en 1734 (ver Euler, 1734), y con ellos obtuvo la primera aproximación de la constante:

Sabiendo que la expansión en serie de Taylor de  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  es

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n^5} - \dots$$

y despejando a  $-\frac{1}{n}$  obtenemos

$$-\frac{1}{n} = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n^5} - \dots$$

De aquí resulta que

$$\frac{1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n^5} + \dots$$

Ahora, sustituyendo valores para  $n = 1, 2, 3, \dots, i$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 1 &= \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \\
 \frac{1}{2} &= \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \dots \\
 &\quad \vdots \\
 \frac{1}{i} &= \ln \frac{i+1}{i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{i^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{i^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{i^4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{i^5} + \dots
 \end{aligned}$$

Sumando estas igualdades y considerando que  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ , se llega a que

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{i} = \ln(i+1) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) - \dots$$

A partir de esta última expresión Euler calculó por primera vez el valor aproximado de  $\gamma = 0.577218$ . Más tarde, en 1736, utilizó una fórmula que se deriva de la definición que había presentado antes (Euler, 1736), la cual es un caso especial de la nombrada suma de Euler-Maclaurin, a saber:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \gamma + \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{B_1}{2n^2} + \frac{B_2}{4n^4} - \frac{B_3}{6n^6} + \dots + \frac{B_k}{2kn^{2k}}$$

Tomando  $k = 7$  y  $n = 10$  consiguió ofrecer como valor de la constante la cifra 0.5772156649015329. Este método proporciona una mejor estimación que el primero, pero hay que calcular los valores de  $B_{2k}$ , lo que podría dificultar el proceso.

El método anterior ha sido usado en varias ocasiones. Tal es el caso del astrónomo J. C. Adams (Adams, 1878), quien en 1878 usó los cálculos de M. Ohm (Ohm, 1840) y los suyos para obtener su propia aproximación de  $\gamma$ . En 1825 A. M. Legendre (Legendre, 1825-1828), al igual que Oettienger en 1861 (Oettinger) y W. Shanks en 1869 (Shanks, 1869), utilizaron la misma idea para sus propios cálculos. Otros cálculos que se han realizado para la suma de Euler-Maclaurin en épocas más recientes son los de J. W. Wrench en 1952 (Wrench Jr., 1952) y D. E. Knuth en 1962 (Knuth, 1962).

Pero volvamos con Mascheroni. En 1790, calculó una aproximación de 32 decimales de  $\gamma$ , sin embargo sólo los primeros 19 decimales eran correctos, como se pudo comprobar años más tarde en 1809 con el cálculo de J. Von Soldner, el cual está basado en la función logaritmo-integral con la que calculó hasta 24 decimales. En 1812 F.B.C. Nicolai extendió la cifra hasta 40 decimales bajo la dirección de Gauss, reafirmando la validez del cálculo de Soldner (Glaisher, 1872).

Para 1887 T. J. Stieltjes (Stieltjes & T.J., 1887) utilizó la siguiente serie (con rápida convergencia) basada en la función Zeta de Riemann:

$$\gamma = 1 - \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta(2k+1) - 1)}{4^k(2k+1)}$$

Al haber calculado primero varios valores para la función Zeta de Riemann, Stieltjes pudo dar una cifra de 32 decimales para  $\gamma$ .

En 1962 D. W. Sweeney (Sweeney, 1963) utilizó una expansión de la integral de una exponencial y calculó 3683 decimales (esta fórmula ya era conocida por Euler).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} n^k}{k! k} - \ln n - \gamma = \int_n^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = O\left(\frac{e^{-n}}{n}\right)$$

Usando el enfoque de Sweeney, en 1977 R. P. Brent calculó 20 700 cifras decimales (Brent, 1977). Este método también fue usado por X. Gourdon en 1998, pero con un proceso de división binaria hecha por medio de una computadora durante 47 horas, obteniendo 7 286 255 decimales.

R. P. Brent y E. M. McMillan en 1980 (Brent & McMillan, 1980) usaron variantes de funciones de Bessel para calcular a  $\gamma$  con 30 100 decimales en 20 horas, utilizando una computadora en un programa que se basó en la siguiente ecuación, haciendo  $x = 17400$ .

$$\gamma = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} H_k \left(\frac{n^k}{k!}\right)^n}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n^k}{k!}\right)^n} - \ln n + O(e^{-cn}) \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

y donde  $C_n$  es

$$C_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2n \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right), & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

En 1993 J. Borwein usó una variante en el método anterior obtuvo 172 000 cifras decimales.

En 1999 X. Gourdon elaboró un programa con un refinamiento de la ecuación de Brent y McMillan, dándole un tratamiento binario, mientras que P. Demichel se encargó del procesamiento, y así llegaron a obtener 108 000 000 decimales.

## Apéndice II.

Demostración<sup>27</sup> de la igualdad:  $\ln(n!) = n \ln(n) - n + O(\ln(n))$ ,

### Demostración:

Consideremos a un entero  $k$ , y una  $x$  tal que  $k - 1 \leq x \leq k$ . Por lo tanto

$$\ln(k - 1) \leq \ln(x) \leq \ln(k),$$

y como la función logaritmo es creciente entonces podemos integrar entre  $x = k - 1$  y  $x = k$ , esto es,

$$\int_{k-1}^k \ln(k - 1) dx \leq \int_{k-1}^k \ln(x) dx \leq \int_{k-1}^k \ln(k) dx$$

Y como  $\ln(k - 1)$  y  $\ln(k)$  son funciones constantes respecto a  $x$ , entonces

$$(k - (k - 1)) \ln(k - 1) \leq \int_{k-1}^k \ln(x) dx \leq (k - (k - 1)) \ln(k)$$
$$\ln(k - 1) \leq \int_{k-1}^k \ln(x) dx \leq \ln(k)$$

Ahora, multiplicando por  $-1$  y sumando  $\ln(k)$  se obtiene

$$0 \leq \ln(k) - \int_{k-1}^k \ln(x) dx \leq \ln(k) - \ln(k - 1),$$

Y sumando cada término desde  $k = 2$  hasta  $k = n$  se tiene

$$0 \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) - \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(x) dx \leq \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k - 1)) \dots (1)$$

Pero nos tenemos que detener a ver las partes:

El término  $\sum_{k=2}^n \ln(k)$  es igual a  $\ln(n!)$ .

El término  $\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(x) dx$  se puede expresar como

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(x) dx = \int_1^2 \ln(x) dx + \int_2^3 \ln(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n \ln(x) dx$$
$$= \int_1^n \ln(x) dx = n \ln(n) - n + 1$$

Y finalmente para el término de la derecha resulta que

---

<sup>27</sup> Esta demostración está tomada de (Stoppale, 2003)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) \\
&= (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + (\ln(4) - \ln(3)) + \dots \\
&\quad + (\ln(n) - \ln(n-1)) = \ln(n)
\end{aligned}$$

De regreso a (1), y sustituyendo las tres igualdades anteriores, se llega a que

$$0 \leq \ln(n!) - (n \ln(n) - n) \leq \ln(n) + 1,$$

En consecuencia  $\ln(n!) - (n \ln(n) - n) \ll \ln(n)$ , y finalmente concluimos que  $\ln(n!) = n \ln(n) - n + O(\ln(n))$ .

## Bibliografía

- Adams, J. C. (1878). "On the value of Euler's constant". *Proc. Roy. Soc.* , 27, 88-94.
- Apostol, Tom M. 1999. An Elementary View of Euler's Summation Formula. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 106, No. 5 (May, 1999), pp. 409-418.
- Benjamin, Arthur T. *et. al.* 2002. "A Stirling Encounter with Harmonic Numbers." *Mathematics Magazine*, Vol. 75, No. 2 (Apr., 2002), pp. 95-103.
- Brent, R. P. (1977). "Computation of the regular continued fraction for Euler's Constant". *Math. Comp.* , 31, 771-777.
- Brent, R. P., & McMillan, E. M. (1980). "Some New Algorithms for High-Precision Computation of Euler's constant". *Math. Comput.* , 34, 305-312.
- Cesàro, E. (1885). "Sur la serie harmonique". *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 295-296.
- Euler, L. (1734). "De Progressionibus harmonicis observationes". *Comm. Acad. Petropol.* , VII, 156.
- Euler, L. (1736). "Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali".
- Glaisher, J. L. (1872). "On the History of Euler's Constant". *Messenger of Mathematics* , 1, 25-30.
- Havil, J. (2003). *Gamma: Exploring Euler's Constant*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Knuth, D. E. (1962). "Euler's constant to 1271 places". *Math. Comput.* , 16, 275-281.
- Legendre, A. M. (1825-1828). "Traité des Fonctions Elliptiques". 2, 434.
- McIntosh, R. J. 1995. On the converse of Wolstenholme's theorem. *Acta Arith.* 71, pp. 381-389.
- Mestrovic, R. 2011. "On the mod  $p^7$  determination of  $\binom{2p-1}{p-1}$  accepted for publication in Rocky Mount." *J. Math.* Preprint arXiv:1108.1174v1 [math. NT]
- Meštrović, R. [2011a]. *Wolstenholme's theorem: its generalizations and extensions in the last hundred and fifty years (1862-2012)*, submitted, 31 pages, submitted, preprint arXiv:1111.3057 [math.NT], 2011.
- Negoi, T. (1997). "A faster convergence to the constant of Euler". *Gazeta Matematică*, 111-113.

- Oettinger. "Über die richtige Werthbestimmung der Constante des Integrallogarithmus". *Crelle* , 29, 375.
- Ohm, M. (1840). "Etwas über die Bernoullischen Zahlen". *J. reine angew. Math* , 20, 11-12.
- Ore, O. (Dec. de 1948). "On the averages of the divisors of a number". *The American Mathematical Monthly*, 55(10), 615-619.
- Tauraso, R. 2010. "More congruences for central binomial coefficients." *J. Number Theory*. Vol. 130 pp. 2639-2649.
- Shanks, W. (1869). "On Euler constant". *Proc. Roy. Soc.* , 18, 49.
- Stieltjes, & T.J. (1887). "Tables des valeurs des sommes." *Acta Mathematica* , 10, 299-302.
- Stoppale, Jeffrey. 2003. *A primer of analytic number theory. From Pythagoras to Riemann*. Cambridge University Press.
- Sun, Z.-W. (2011). "On harmonic numbers and Lucas sequences". *Publ. Math. Debrecen*.
- Sun, Z.-W. (2012). "Arithmetic theory of harmonic numbers". *Proc. Amer. Math.Soc.*, 415-428.
- Sweeney, D. W. (1963). "On the computation of Euler's constant". *Matemathics of computation* , 170-178.
- Weisstein, E. W. (s.f.). "Euler-Mascheroni constant". *MathWorld* , --A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html>.
- Whittaker, E. T., & Watson, G. N. (1990). *A course in modern analysis* (4ta ed.). Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Wolstenholme, J. (1862). "On certain properties of prime numbers". *Quarterly journal of mathematics*, 5, 35-39.
- Wrench Jr., J. W. (1952). "A new calculation of Euler's constant". *MTAC* , 6, 255.
- Zhao, J. 2007. "Bernoulli Numbers, Wolstenholme's theorem, and  $p^5$  variations of Lucas's theorem." *J. Number Theory*. Vol. 123, pp. 18-26.