



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

**Introducción a la  
Metodología de Cópulas**

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN ECONOMÍA  
P R E S E N T A :

CRISTÓBAL LEMUS RENDÓN

DIRECTOR DE TESINA: DR. FRANCISCO LÓPEZ HERRERA



CIUDAD UNIVERSITARIA

JUNIO 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

En el presente trabajo de investigación me gustaría agradecer a:

Marina, mi esposa, quien me ha brindado su amor y apoyo en la realización de este sueño.

Alex y Jazhiel, a quienes he robado momentos muy importantes de su vida para dedicarlos a la realización de este proyecto.

A mi director de tesina, Dr. Francisco López por su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado en mí que pueda terminar mis estudios con éxito.

## Índice General

Índice.....	iii
Introducción.....	vi
Capítulo 1. Fundamentación.....	1
Capítulo 2. Conceptos básicos de la administración de carteras.....	5
2.1 Principios básicos de un modelo de activos.....	5
Componentes básicos de un modelo financiero.....	5
2.2 Modelos básicos de precios de activos.....	6
Modelo Binomial para un periodo simple.....	6
Modelo para tiempo discreto con un número finito de estados.....	7
Rendimiento de los activos en términos generales.....	8
2.3 Métodos para el cálculo de los rendimientos de una cartera.....	9
Fórmula básica.....	9
Tomando en cuenta los flujos de capital.....	9
Método de la tasa de rendimiento del capital promedio.....	9
Método de la tasa interna de rendimiento.....	10
Método de la tasa ponderada en el tiempo.....	10
Evaluando los rendimientos por varios periodos.....	11
Media aritmética.....	11
Media geométrica.....	11
La media y la varianza de un conjunto de activos.....	11
2.4 Medidas de desempeño para carteras de inversión.....	12
Midiendo la tasa de rendimiento de la cartera.....	12
Tasa de rendimiento ponderada por el tiempo.....	12
Tasa de rendimiento ponderada por su valor.....	13
2.5 Medidas de desempeño de riesgo ajustado (CAPM).....	13
Índices de desempeño de riesgo ajustado.....	13
El índice Jensen (Jensen, 1968).....	14
El índice Sharp (Sharp, 1966).....	15
El índice Treynor (Treynor, 1965).....	15
2.6 Medida basada en el VaR de la cartera.....	16

2.7 Medidas de Benchmark de carteras de inversión.....	17
Beta.....	17
Alpha.....	17
R-cuadrado.....	18
Modelo de tres factores de Fama-French.....	18
Omega.....	19
Upside Potential Ratio.....	20
Information Ratio.....	20
Medida M2: Modigliani y Modigliani (1997).....	20
2.8 Diversificación de una cartera de valores.....	21
2.9 Funciones de utilidad esperada.....	22
2.10 Aversión al riesgo.....	23
Capítulo 3. Optimización.....	24
3.1 Concepto.....	24
3.2 El problema de optimización.....	24
3.3 Métodos para encontrar los minimizadores al optimizar.....	26
Métodos de búsqueda de una dimensión.....	26
Método de la búsqueda dorada.....	26
Método de la búsqueda de Fibonacci.....	26
Método de mínimos cuadrados.....	26
Método de programación lineal.....	26
Método de optimización convexa.....	27
Método de optimización no lineal.....	27
3.4 Optimización de carteras.....	27
Optimización de un cartera con dos activos.....	27
Criterio de la media-varianza para dos activos.....	29
Línea de la cartera.....	30
Escenarios de correlación para dos activos.....	31
Coeficiente es igual a 1.....	31
Coeficientes es igual a -1.....	31
Coeficiente es menor a 1.....	31
Cartera de mínima varianza.....	32
Optimización de carteras para n activos.....	32
La cartera de mínima varianza.....	35

Capítulo 4. Teoría de Cópulas.....	37
4.1 Definición de cópula.....	37
4.2 Propiedades de las cópulas.....	38
Propiedades probabilísticas de las cópulas.....	39
Ventajas de las cópulas.....	40
4.3 Teorema de Sklar.....	40
4.4 Familias de cópulas.....	43
Propiedades de las familias de cópulas.....	43
interpretabilidad.....	43
Flexibilidad y un gran rango de dependencia.....	44
Facilidad de manejo.....	44
Familia de cópulas elípticas.....	45
Familia de cópulas arquimedianas.....	47
Ejemplos de cópulas arquimedianas.....	47
Cópula Gumbel-Hougaard.....	48
Cópula Mardia-Takahasi-Clayton.....	48
Cópula Frank.....	48
Cópula Clayton generalizada.....	49
Familia de cópulas EFGM.....	49
4.5 Construcción de cópulas.....	50
Construcción de cópulas con marginales dimensionales bajas.....	50
Transformación de cópula a cópula.....	50
Sumas ordinarias.....	51
Distorsión.....	52
Composición puntual de cópulas.....	52
Mezcla de cópulas.....	53
Construcción geométrica de cópulas.....	53
4.6 Cópulas y conceptos teóricos asociados.....	53
Simulación de una variable aleatoria.....	53
Concepto de cuantil.....	54
Distribución condicional de la cópula y sus cuantiles.....	54
Dependencia de cola (Tail dependence).....	55
Límites de la dependencia.....	56
4.7 Calibración de cópulas.....	57
Correspondencia entre cópulas y correlación de rangos.....	57
Métodos de calibración de cópulas estimación de máxima verosimilitud.....	58
Modelo general de calibración de cópulas (EMV).....	58
Conclusiones.....	60
Bibliografía.....	62

Introducción.

Actualmente los mercados financieros y particularmente los mercados emergentes demandan nuevas técnicas para la valuación de la relación entre los activos que se manejan en ellos. Las condiciones que existían en los mercados cuando Harry Markowitz (1952) desarrolló la teoría matemática de la cartera han cambiado. El cálculo de la matriz de varianzas-covarianzas usada en el modelo de Harry Markowitz es una metodología que necesita modificarse con una nueva forma de medir la correlación.

La base de la teoría moderna de la cartera descansa en el hecho de que los rendimientos de los activos en una cartera son linealmente dependientes y normales, lo anterior no necesariamente se cumple con todos los rendimientos de los activos y particularmente en mercados emergentes.

En el año de 1952, Abe Sklar demuestra el teorema de relación de dependencia entre variables y surgen los primeros conceptos de cópulas. Para el año de 1973, la teoría de cópulas se desarrolló para tratar de estudiar las dependencias existentes en instrumentos del mercado de valores.

El presente trabajo de investigación documenta las ventajas que se obtienen al utilizar la metodología de cópulas para el cálculo de la matriz de correlación de activos, bajo la premisa de que las relaciones de los activos se dan de forma esférica y no lineal, a diferencia de la metodología tradicional de Harry Markowitz (1990). Además de que se pretende que sirva en el estudio de la metodología de cópulas, debido a la limitante que existe de material en idioma español.

El objetivo general de la investigación es analizar las consecuencias de contrastar los rendimientos de una cartera de inversión, resultado de calcular la matriz de correlación de rendimientos con la metodología tradicional y con la metodología de cópulas.

Se propone el cálculo de los rendimientos de varias carteras óptimas tanto con la metodología tradicional de Harry Markowitz en donde la matriz de correlación de activos se calcule a través del coeficiente de Pearson como con la metodología de cópulas.

La evaluación de los rendimientos de las carteras con ambas metodologías se obtendrá a través del uso del índice de Sharpe, el cual expresará la rentabilidad obtenida por cada unidad de riesgo soportado por la cartera.

De acuerdo con el valor numérico obtenido de dicho índice, podemos concluir en términos de rendimientos que mientras mayor sea este valor, mejor será el rendimiento de la cartera; si es negativo indica rendimientos inferiores a los rendimientos que se podrían obtener al invertir en certificados de la Tesorería, (CETES) y; si es menor a uno, significa que el rendimiento del activo es inferior comparado con una inversión en una cartera que tuviera todos los activos del mercado de valores.

Pregunta de investigación: ¿Se obtendrán mejores resultados en relación a los rendimientos, calculando la matriz de correlación de activos de una cartera de valores con la metodología tradicional (correlación de Pearson) que con la metodología de cópulas?

En el primer capítulo se discute la forma en que la idea de esta investigación surgió y algunos aspectos metodológicos de la investigación.

En el segundo capítulo se revisan conceptos básicos de la administración de carteras y conceptos clave para el desarrollo de la metodología moderna de valuación de Carteras de Harry Markowitz.

En el tercer capítulo se desarrolla el concepto de optimización matemática, el cual aplicado a una cartera de inversión nos ayudara a conocer cuando obtener un óptimo en una cartera.

Para finalizar en el cuarto capítulo se desarrolla la metodología de cópulas, sus propiedades; así como el Teorema de Sklar que da surgimiento al desarrollo de esta metodología para el manejo de correlaciones entre variables. De hecho, vale la pena comentar, en la circular única de Bancos<sup>a</sup> en México emitida por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores de aplicabilidad a las instituciones de crédito, se tomó directamente el modelo RiskMetrics de JP Morgan basado en cópulas para el cálculo del ponderador de capital por riesgo de crédito. Dicha metodología es obligatoria de acuerdo con los acuerdos de Basilea<sup>b</sup> para todas las instituciones de crédito a nivel mundial.

---

<sup>a</sup> Se recomienda revisar el Artículo 2 Bis 10 y el apartado C de esta circular en: <http://www.cnbv.gob.mx/Prensa/Presentaciones%20Seminario%20Corresponsales/i.%20Circular%20%C3%9Anica%20de%20Bancos.pdf>.

<sup>b</sup> Los acuerdos de Basilea son regulación de supervisión de bancos emitidas por el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea y son seguidos de forma obligatoria a nivel internacional. Ver [www.bis.org](http://www.bis.org) para mayor información.

## Capítulo 1. Fundamentación.

La idea de investigar sobre la metodología de cópulas surge en el año 2012, buscando información de bolsas de valores en la Internet encontré un artículo que me llamo la atención, se llama: “Recipe for disaster: The Formula that Killed Wall Street”<sup>1</sup> escrito por Félix Salmon, el autor trataba el tema de un modelo basado en la cópula gaussiana creado por el doctor X. Li y en principio decía que el doctor X. Li no recibiría el premio Nobel, el documento en términos generales plantea el uso de la cópula gaussiana como herramienta para calcular las correlaciones entre las variables a estudiar.

El doctor X. Li proponía este nuevo método que no está basado en la historia de los precios de los activos, sino en otros instrumentos llamados derivados; en el tiempo en que apareció el artículo, comenzaba la popularidad de estos instrumentos que al cabo de una década empezaron a crecer de forma exponencial y que ahora tienen una participación en el mercado de valores de trillones de millones de dólares.

La metodología propuesta fue tan popular que todos los gurús de los mercados de valores comenzaron a usarla de forma indiscriminada, sin poner atención en los riesgos sobre los cuales se estaba basando este modelo de precios. Lo utilizaron en el mercado hipotecario americano.

Lo anterior dio como resultado que en el 2008 el mercado de valores norteamericano, particularmente el hipotecario cayera, llevándose en su paso a muchas otras bolsas de valores del mundo y se tuviera una crisis financiera mundial. El gobierno del presidente George Bush tuvo que intervenir para rescatar a miles de empresas en quiebra y establecer una nueva reglamentación en los mercados de valores.

---

<sup>1</sup> Recuperado de <http://www.wired.com/2009/02/wp-quant/> el día 15 de marzo de 2016.

Después de leer el artículo me di a la tarea de tratar de entender el concepto de cópula, por qué es importante y cuál fue su participación en la crisis del 2008; lo anterior no fue fácil pues la mayoría de la literatura relacionada con el tema se encuentra en un nivel matemático muy alto con respecto al perfil de un economista y en idioma inglés. Encontré también que la mayoría de trabajos sobre cópulas tienen una aplicación a mercados perfectamente simétricos como los de naciones desarrolladas; pero es muy escasa.

Debido a la literatura escasa sobre cópulas y su aplicabilidad a un mercado emergente como el mexicano, surge la pregunta ¿Qué pasaría si se aplica la metodología del doctor X. Li al modelo de Harry Markowitz para calcular la matriz de covarianzas?

En el mundo financiero existen empresas deficitarias y empresas superavitarias que desean invertir en instrumentos financieros que reditúen beneficios máximos con un riesgo bajo. Lo anterior hace que los mercados de valores, intervengan en la economía de países enteros, pues las inversiones financiadas con los fondos de las empresas superavitarias son usados para impulsar negocios de las empresas deficitarias en áreas como capital de trabajo y proyectos de inversión.

Lo anterior no es nada fácil si consideramos que algunos inversionistas son adversos al riesgo y prefieren instrumentos que sean de rápida recuperación aún cuando se sepa que sí se tienen proyectos a largo plazo, la inversión en instrumentos como las "acciones" es la más adecuada puesto que el rendimiento recompensa el tiempo de mantener el dinero en uso.

Lo importante en inversiones a largo plazo, como las acciones, es contar con una metodología confiable que estime el riesgo. La metodología de Harry Markowitz, que es la más utilizada para el cálculo de la matriz de correlaciones entre activos que componen una cartera, presenta una debilidad desde el punto de vista de varios autores (Franco-Arbeláez L., Avendaño C. y Barbutín H., 2011) y (Kristjanpoller, W. y Liberona, C., 2010) entre otros, porque no permite el cálculo del riesgo de los activos al considerar una relación lineal entre las variables de estudio y desestimar

la influencia de cada una de ellas como un todo al componer una cartera de inversión.

Dada la importancia que hoy reviste el tema de administración de riesgos en la toma de decisiones, y dado lo limitado que resulta la metodología clásica de cálculo de la matriz de correlación, pues considera como punto de partida la normalidad de las variables de estudio; y por ende la optimización de carteras, la aplicación de la metodología de cópulas para el cálculo de la matriz de correlación de activos, llena un vacío que se tiene en el área de gestión de carteras, donde se concentra la influencia de dos o más activos, y sirve como estrategia para afrontar los nuevos retos en el ambiente de los negocios.

La metodología tradicional hace uso de la relación que existe entre la media de los rendimientos sobre la inversión y la varianza de los mismos para encontrar el punto de mínima varianza y construir la frontera eficiente. Dada una mínima varianza se tiene una cartera eficiente en términos de mejores resultados financieros.

En esta metodología se requiere calcular una matriz de varianzas-covarianzas que puede resultar un problema, en la medida que se incrementa el número de activos a considerar.

El uso de la matriz de varianzas-covarianzas, de antemano compleja se dificulta al considerar que las relaciones entre los instrumentos de los mercados de valores son de forma lineal o normal. Esto, resulta una limitante cuando se quiere obtener la participación de cada uno de los activos en los efectos totales de una cartera; es decir, la metodología hace uso de un instrumento estadístico como la correlación, en particular la de Pearson, que al estar compuesto por las varianzas de los activos, siendo la varianza la relación lineal entre los mismos, solo considera pares de ellos y no permite concentrar en un sólo instrumento la influencia de más de tres activos.

La metodología de cópulas es un instrumento matemático que concentra la influencia relacional de dos o hasta " $n$ " activos sin necesidad de que los cálculos se compliquen al ir creciendo el número de activos que participan en la cartera. Es un instrumento que contempla una relación multivariable. La metodología de cópulas no necesita que las marginales de los rendimientos que componen la función conjunta tengan una distribución normal como punto de partida para su uso.

## **Capítulo 2. Conceptos básicos de la administración de Carteras de inversión.**

En el este capítulo desarrollaremos los conceptos básicos que se deben manejar al trabajar con carteras de inversión, la fundamentación del modelo de la cartera, la constitución de la cartera y la evaluación de su desempeño.

### **2.1 Principios básicos de un modelo de precios de activos.**

De acuerdo con Campolieti (2014) en la práctica, las matemáticas de las finanzas recurren a los siguientes principios básicos cuando se trabaja con modelos de precios de activos: Las acciones de los inversionistas no afectan los precios del mercado; se puede comprar o vender cualquier cantidad de activos sin que se afecten los precios del mismo en el mercado; se tiene liquidez en el mercado al poder vender los activos en cualquier momento; se puede utilizar una posición corta en activos al poder pedir prestados los activos y venderlos, usando el dinero obtenido para invertir en otras inversiones; se pueden comprar cantidades fraccionales de un activo; no hay costos adicionales involucrados en las transacciones; los precios de los activos son inciertos en un futuro y los modelos de precios están basados en supuestos determinados antes de implementación.

**Componentes básicos de un modelo financiero.** Los modelos financieros poseen características básicas para su implementación; para Campolieti (2014) estas son las características básicas de un modelo financiero: El horizonte de tiempo, que es mayor a cero ( $T > 0$ ), es la fecha en que las actividades de comercialización del activo se detienen; las fechas de comercialización son fechas calendario entre el tiempo inicial  $t=0$  y el horizonte de tiempo  $t=T$  en las cuales se puede comercializar el activo; el estado del mundo está representado por  $w$  el cual es relevante para el ambiente económico que deseamos modelar; los estados de  $w$  son llamados escenarios de mercado o estados del mundo; el conjunto de todos los posibles escenarios o estados del mundo, se denotan por  $\Omega$ , el cual es llamado el espacio del estado; la base comercial de activos representa los activos que están

disponibles para comercializar; las reglas de comercialización tales como ventas en corto, presencia de costos de transacción e impuestos, se deben especificar al inicio.

Los modelos financieros pueden ser categorizados en dos tipos generales; tiempo continuo o tiempo discreto. Para un modelo de tiempo continuo, los tiempos permitidos y las fechas de comercialización caen dentro de un intervalo continuo  $[0, T]$  con tiempo inicial  $0$  y final  $T$  respectivamente. Para el modelo de tiempo discreto, los activos son observados dentro de un conjunto finito de fechas de calendario  $\{0, 1, \dots, T\}$ .

Los modelos de tiempo discreto pueden ser subdivididos en modelos de periodo simple con solo dos fechas relevantes de comercialización, la fecha actual  $t = 0$  y la fecha de madurez  $t = T$  y en modelos multiperiódicos, donde la comercialización de los activos tiene lugar en diferentes fechas.

## **2.2 Modelos básicos de precios de activos.**

Existen varios modelos para determinar los precios de los activos en una cartera, enseguida veremos los más importantes para el manejo de carteras.

**Modelo Binomial para un periodo simple.** Campolieti (2014) consideremos a un inversionista que tiene que enfrentar una economía cuyo estado futuro es desconocido con certidumbre. Se construye un modelo simple que describe dicha economía. Primero se supone que hay solo dos fechas: la fecha actual etiquetada como  $0$  y la fecha futura (o de madurez) etiquetada como  $T$ . Como la economía es incierta, debe haber al menos dos futuros estados, cada uno correspondiente a uno de los dos posibles resultados o escenarios. Sean estos dos posibles estados en nuestro modelo denotados por  $w^-$  y  $w^+$ . En este ejemplo los dos estados pueden representar “malas” o “buenas” noticias. Así para nuestro modelo financiero tenemos un modelo de periodo simple con el conjunto de estados  $\Omega = \{w^-, w^+\}$ .

La riqueza  $V$  de la inversión en la base comercial de activos es una función del tiempo  $V = V_t, t \in \{0, T\}$ . Es razonable asumir que la riqueza inicial  $V_0$  de la inversión es conocida en el tiempo  $t=0$ . Sin embargo, la riqueza final  $V_T$  en el tiempo de madurez es incierta, y es una función de estados  $w \in \Omega$ . Hay dos estados para  $V_t$  que puede tomar  $V_t(w^-)$  y  $V_t(w^+)$ .

Para desarrollar el modelo, necesitamos cuantificar los cambios en nuestra economía para determinar el valor de estados de  $\Omega$ . Segundo, necesitamos especificar que activos están disponibles para integrar nuestra cartera. Asumimos que  $w^+$  ocurre con probabilidad  $p \in (0, 1)$ . Por lo tanto  $w^-$  ocurre con probabilidad  $1-p$ . La riqueza al final  $V_T$  puede ser vista como una variable aleatoria dentro del espacio finito de probabilidad  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$  con  $\Omega$  como el conjunto de escenarios establecidos y  $P$  como una distribución de probabilidad definida con base en el conjunto  $\mathbb{F} = \{\emptyset, \{w^-\}, \{w^+\}, \Omega\}$  como sigue:

$$P(E) = \begin{cases} 0 & \text{Si } E = \emptyset, \\ p & \text{Si } E = \{w^+\} \\ 1-p & \text{Si } E = \{w^-\} \\ 1 & \text{Si } E = \Omega = \{w^-, w^+\} \end{cases}$$

**Modelo para tiempo discreto con un número finito de estados.** Campolieti (2014) propone hacer más realista el modelo anterior aumentando el número de periodos de observaciones y adicionando más estados de la economía. Asumiendo que la comercialización puede tomar lugar a cualquier tiempo monitoreado discreto  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ . Esto es, el tiempo de horizonte  $T$  es un entero, y el tiempo es medido en periodos. Un periodo de observación puede corresponder a un año, un mes, una semana, un día, una hora, un minuto y aún un segundo.

El espacio de estados  $\Omega$  es finito y contiene  $M$  estados del mundo  $w^1, w^2, \dots, w^M$ . Consideremos un activo tal como una acción ( $A = S$ ) o un bono ( $A = B$ ) con el precio  $A_t$  monitoreado sobre los tiempos  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ . Asumimos que  $A_t > 0$  para todo  $t$ . En el presente  $t = 0$ , el precio actual es  $A_0$  y se supone conocido. Los precios futuros  $A_t$  para  $t > 0$  permanecen inciertos hasta que la información del mercado es revelada. Así, matemáticamente, para cada tiempo fijo  $t$ , el precio es una variable positiva sobre un espacio finito de probabilidad.

**Rendimiento de los activos en términos generales.** Consideremos un activo  $A$  (o una cartera de activos) con un proceso de precios  $\{A_t\}_{t=0,1,\dots,T}$ . El rendimiento total y la tasa de rendimiento del activo sobre un intervalo de tiempo  $[s, t]$  con  $0 \leq s < t$ , denotado por  $R_{[s,t]}^A$  y  $r_{[s,t]}^A$ , son variables aleatorias definidas por  $R_{[s,t]}^A := \frac{A_t}{A_s}$  y  $r_{[s,t]}^A := \frac{A_t - A_s}{A_s}$ , respectivamente.

Están relacionadas por  $R_A = r_A + 1$ . A veces, por simplicidad, el término rendimiento es usado para ambos conceptos. Los rendimientos en instrumentos riesgosos son inciertos y representan estados del espacio  $w$  siendo por lo tanto funciones contenidas en el espacio de estados  $w \in \Omega$ . Para los rendimientos de un activo  $A$  sobre un periodo simple  $[t-1, t]$  donde  $t=1, 2, \dots, T$ , usamos la notación:

$$R_t^A = R_{[t-1,t]}^A \text{ y } r_t^A = r_{[t-1,t]}^A.$$

Por simplicidad y cuando el contexto es claro se omite el super script  $A$  y simplemente se denota el rendimiento total como  $R$  y la tasa de rendimiento como  $r$ . Los precios de los activos se pueden escribir en términos de un periodo simple.

Para cada  $t = 1, 2, \dots, T$ , tenemos que:

$$r_t = R_t - 1 = (A_t - A_{t-1}) / A_{t-1} = (A_t / A_{t-1}) - 1 \Rightarrow A_t = R_t A_{t-1} \text{ y } A_t = (1+r_t) A_{t-1}.$$

Aplicando sucesivamente esta regla para  $A_{t-1}, A_{t-2}, \dots, A_1$ , obtenemos

$$A_t = (1+r_t)A_{t-1} = (1+r_{t-1})(1+r_t)A_{t-2} = \dots = (1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_t)A_0.$$

Equivalentemente, tenemos que  $A_t = R_t R_{t-1} \dots R_1 A_0$  para  $t=0,1,\dots,T$ . Por lo tanto la dinámica de los precios de los activos puede ser descrita por los rendimientos de los activos y por el precio inicial del activo  $A_0$ . Hay que notar que los rendimientos agregados  $R_{[s,t]} = A_t / A_s$  y  $r_{[s,t]} = (A_t - A_s) / A_s$  sobre el activo  $A$  del tiempo  $s$  al tiempo  $t$  satisfacen respectivamente:

$$R_{[s,t]} = R_{s+1} R_{s+2} \dots R_t \text{ y } 1+r_{[s,t]} = (1+r_{s+1})(1+r_{s+2})\dots(1+r_t).$$

### 2.3 Métodos para el cálculo de los rendimientos de una cartera de activos.

De acuerdo con Le Sourd (2007) existen dos formas para calcular los rendimientos de una cartera a partir de su fórmula básica, aquellas que toman en cuenta los flujos de capital y las que evalúan los rendimientos por varios periodos.

**Fórmula Básica.** El rendimiento de una cartera está dado por  $R_{pt} = (V_t - V_{t-1} + D_t) / V_{t-1}$ .

Donde  $V_{t-1}$  representa el valor de la cartera al inicio del periodo y  $V_t$  denota el valor de la cartera al final del periodo y  $D_t$  denota los flujos de efectivo generados por la cartera durante el periodo de evaluación.

**Tomando en cuenta los flujos de capital.**

**Método de la tasa de rendimiento del capital promedio.** Esta tasa es igual a la relación entre la variación en valor de un cartera durante el periodo y el promedio del capital invertido durante el periodo.  $R_{CWR} = (V_T - V_0 - C_t) / (V_0 + 1/2 C_t)$ .

Donde  $V_0$  denota el valor de la cartera al comienzo del periodo;  $V_T$  denota el valor de la cartera al final del periodo y  $C_t$  denota el flujo de efectivo que ocurrió en el

tiempo  $t$ , donde  $C_t$  es positivo si representa una contribución y negativo si es una salida de efectivo. Aunque una medida más exacta es la siguiente:

$$R_{CWR} = (V_T - V_0 - C_t) / (V_0 + [(T-t)/T]C_t).$$

Donde  $T$  denota el tiempo total en el periodo y  $t$  el tiempo ocurrido entre flujos de efectivo. Si hay un flujo de  $n$  capitales la formula a usar es:

$$R_{CWR} = \left( V_T - V_0 - \sum_{t=1}^n C_t \right) / V_0 + \sum_{i=1}^n [(T-t_i)/T] C_i.$$

**Método de la tasa interna de rendimiento.** Este método está basado en cálculos actuariales. La tasa interna de rendimiento es la tasa descontada que se obtiene al valor la cartera al final del periodo y es igual a la suma de su valor inicial más los flujos de capital que se dan en el periodo. El flujo de efectivo para cada subperiodo es calculado tomando la diferencia entre los flujos de efectivo; la cual proviene de la reinversión de los dividendos, la contribución de los clientes y la salida de efectivo que son pagos a los clientes.  $R_t = V_0 + \sum_{t=1}^{n-1} C_t / (1 + R_t)^t = V_T / (1 + R_t)^T$ .

Donde  $T$  denota el periodo en años;  $t$  denota el tiempo en que se dan los flujos de efectivo, expresado en años,  $V_0$  es el valor inicial del cartera;  $V_T$  es el valor final de la cartera en la fecha  $t$ ;  $C_t$  representa los flujo de efectivo en la fecha  $t$ , los cuales pueden ser positivos si son entradas de capital o negativos si son salidas de capital.

**Método de la tasa ponderada en el tiempo.** El principio de este método es romper el periodo en varios subperiodos, durante los cuales la composición de la cartera permanece fija. El rendimiento por el periodo completo es obtenido calculando la media geométrica de los rendimientos sobre los subperiodos. El resultado nos da un rendimiento promedio ponderado por la longitud de los subperiodos. (Peterson, P y Fabozzi, F. 2010).

Tomamos un periodo de longitud  $T$  durante el cual ocurren los movimientos de capital en las fechas  $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Denotamos por  $V_{t_i}$  el valor del portafolio justo antes del movimiento de capital y  $C_{t_{i-1}}$  que representa los flujos de capital.

El rendimiento de los subperiodos es igual a  $R_{t_i} = (V_{t_i} - (V_{t_{i-1}} + C_{t_{i-1}})) / (V_{t_{i-1}} + C_{t_{i-1}})$ . Esta fórmula permite comparar los valores de la cartera al final y al inicio del periodo.

El rendimiento para el periodo total es:  $R_{TWR} = \left[ \prod_{i=1}^n (1 + R_{t_i}) \right]^{1/T} - 1$ . Este cálculo da la tasa de rendimiento por unidad monetaria invertida, independientemente de los flujos de capital que se den durante el periodo.

### **Evaluando los rendimientos por varios periodos.**

**Media aritmética.** El método más simple implica calcular la media aritmética de los rendimientos por los subperiodos. La media aritmética de los rendimientos pasados nos proporciona un estimador insesgado de los rendimientos del siguiente periodo. Es por lo tanto el rendimiento esperado de la cartera y puede ser usado como un pronóstico del futuro desempeño del mismo.  $\bar{R}_a = (1/T) \sum_{t=1}^T R_{P_t}$ .

**La media geométrica.** La media geométrica nos permite unir varias tasas de rendimiento aritméticas durante varios periodos, para obtener la tasa de crecimiento real de la inversión durante el periodo total. El cálculo asume que los ingresos intermedios son invertidos. La tasa promedio para el periodo está dada por  $\bar{R}_g = \left[ \prod_{t=1}^T (1 + R_{t_i}) \right]^{1/T} - 1$ . La media geométrica nos da el valor exacto observado durante el periodo, lo cual no hace la media aritmética.

**La media y la varianza de un conjunto de activos.** De acuerdo con Christou (2008) los rendimientos de un activo en el tiempo  $t$  se definen como:

$$R_t = (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1}.$$

Donde  $P_t$  y  $P_{t-1}$  son el precio del activo en el tiempo  $t$  y el precio del activo en el tiempo  $t-1$  respectivamente. Se pueden usar rendimientos diarios, semanales, o mensuales, pero en el manejo de las carteras se emplean los rendimientos mensuales. Si se reciben dividendos por parte del inversionista, se añaden al dividendo junto con el precio del activo en el momento  $t$ . Por lo tanto la media y la varianza de los rendimientos de una cartera  $i$  están definidos como:

$$\bar{R}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_{it}, \sigma_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_{it} - \bar{R}_i)^2. \text{ Y la covarianza entre los rendimientos del activo}$$

$$i \text{ y } j \text{ está dada por } \text{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j).$$

## 2.4 Medidas de desempeño para carteras de inversión.

**Midiendo la tasa de rendimiento de una cartera.** De acuerdo con Shahid (2007), la tasa de rendimiento de un cartera es medida como la suma del efectivo recibido (dividendos) y el cambio en el valor de mercado de la cartera (ganancia o pérdida de capital) dividido por el valor de mercado del capital.

$$\text{Tasa de retorno de una cartera} = \frac{\text{Efectivo(Dividendo)} + \text{capital(ganancia o pérdida)}}{\text{valor de mercado de la cartera(valor de compra)}}$$

La tasa de rendimiento es la medida más importante de una cartera. Es buena para carteras estáticas. Las carteras normalmente reciben cantidades adicionales para ser invertidas y se retiran cantidades de la misma.

**Tasa de rendimiento ponderada por el tiempo.** El monto invertido es neutralizado en los cálculos de la tasa ponderada por el tiempo debido a que hay depósitos y disposiciones que no están bajo el control del administrador del fondo, pero los rendimientos son computados con base en la distribución del efectivo y en los cambios en el valor de mercado de una parte del fondo; el cálculo de la tasa de rendimiento ponderada en el tiempo se calcula dividiendo el valor al comienzo de esa parte del fondo en la distribución de efectivo y su cambio en el valor durante el periodo.

**Tasa de rendimiento ponderada por su valor.** Esta metodología ignora los depósitos y disposiciones del fondo durante el periodo sobre el cual se está midiendo, pero toma el valor ponderado de los depósitos y las disposiciones en la cuenta. Suponga que  $w_T$  es una disposición en el tiempo  $T$  y  $D_t$  es un depósito en el tiempo  $t$  y además asumamos que el efectivo (dividendo) es recibido en la cartera al final del periodo. El valor de la tasa ponderada  $r$  se encuentra resolviendo la siguiente ecuación:  $Cartera = \sum_{t=1}^n (D_t / (1+r)^t) + \sum_{t=1}^m (w_T / (1+r)^t) + (vf \text{ cartera}) / (1+r)^t$ .<sup>2</sup>

Donde  $m$  es el número de disposiciones,  $t$  es el tiempo en años y  $n$  es el número de depósitos durante el periodo.

## **2.5 Medidas para desempeño de riesgo ajustado (Basadas en el Capital Asset Pricing Model (CAPM)<sup>3</sup>)**

De acuerdo con Shahid (2007) existe en los mercados información pública que es conocida por todos e información privada que está en posesión de algunos individuos. Si quisiéramos estimar los rendimientos esperados, la varianza y covarianza de una cartera basados solo en la información pública, veríamos que las carteras caerían en la línea de mercado.

**Indices de desempeño de riesgo ajustado.** Para Shahid (2007), Nielsen (1998), Le Sourd (2007), Knight y Satchell (2002) y Garza (2009) existen tres índices basados en el CAPM que ayudan a medir el desempeño del administrador de la cartera de inversión.

**El índice Jensen (Jensen, 1968).** Este índice se utiliza para determinar si el administrador de la cartera se desempeñó más allá de un índice de mercado. En

---

<sup>2</sup> VI Valor inicial; VF valor final.

<sup>3</sup> Traducción es Modelo de Precios de Activos de Capital.

finanzas este índice es usado para determinar el requerimiento en exceso sobre un activo o cartera basado en el modelo de precios de activos de capital.

El índice de Jensen utiliza la línea de mercado para comparar las carteras. En 1970, fue la primera metodología usada para evaluar el desempeño de los fondos mutualistas. El modelo es usado para ajustar el nivel de riesgo beta, para obtener rendimientos mayores de los activos más riesgosos. Permite que el inversionista lleve a cabo pruebas estadísticas para ver si la cartera da rendimientos normales o relativamente altos en comparación al mercado. En este índice lo primordial es escoger el índice de mercado, puesto que el desempeño de la cartera será comparado contra este.

De acuerdo con el modelo de precios de activos de capital (CAPM), en un modelo de riesgo de equilibrio la tasa de rendimiento de un activo o cartera se expresa de la siguiente manera:  $Er_p = r_f + (Er_m - r_f)\beta_p$ .

Donde  $Er_p$  es el rendimiento esperado de un activo o de un cartera;  $r_f$  la tasa de rendimiento libre de riesgo;  $Er_m$  es la tasa de rendimiento esperada del mercado y  $\beta_p$  es la beta o riesgo sistémico de un activo o cartera.

Si queremos obtener el índice Jensen, a una serie de tiempo de los rendimientos de la línea de seguridad  $(r_p - r_f)$  se aplica el método de regresión contra el exceso de rendimiento del mercado  $(r_m - r_f)$ . Obteniendo lo siguiente:

$$(r_p - r_f) = \alpha_p + (r_m - r_f)\beta_p + \varepsilon_p.$$

Donde  $r_p$  es el rendimiento de la cartera;  $r_f$  es la tasa libre de riesgo;  $\alpha_p$  es medida del índice de Jensen;  $\beta_p$  es la beta o riesgo sistemático de la cartera;  $r_m$  es rendimiento de la cartera del mercado y  $\varepsilon_p$  el término de error aleatorio de la cartera.

Al tomar la media de ambos lados de la ecuación de acuerdo con Shahid (2007) y mencionado por Levy y Sernat (1984), el término de error aleatorio de la cartera es siempre cero. Por lo tanto la ecuación queda como sigue:  $\alpha_p = r_p - (r_f + (r_m - r_f)\beta_p)$ .

En el marco del modelo de precios de capital (CAPM),  $\alpha_p$  debe ser siempre cero. Lo que significa que el activo se ha desempeñado exactamente igual que el mercado basado en su error sistemático.

**El índice Sharp (Sharp, 1966).** En 1966, de acuerdo con Shahid (2007), Nielsen (1998), Sharpe desarrollo una medida compuesta para evaluar el desempeño de una cartera la cual es muy similar a la de Treynor. La única diferencia es usar la desviación estándar en lugar de la beta. El índice de Sharp es una medida en la cual queremos medir el desempeño de una cartera dado un periodo de tiempo.

Para el índice de Sharpe, necesitamos conocer tres cosas, la tasa de rendimiento de la cartera, la tasa de rendimiento libre de riesgo y la desviación estándar de la cartera. Para la tasa libre de rendimiento libre de riesgo, podemos usar la tasa promedio de los rendimientos (dado un periodo de tiempo). La desviación estándar de la cartera es el riesgo sistemático de la cartera. El índice de Sharp se calcula de la siguiente manera:  $S_p = (r_p - r_f) / \sigma_p$ .

Donde  $r_p$  es la tasa de rendimiento de la cartera;  $r_f$  la tasa de rendimiento libre de riesgo y  $\sigma_p$  la desviación estándar de la cartera. Una medida alta del índice de Sharp indica un desempeño adecuado ya que cada unidad de riesgo (desviación estándar) es recompensada con un exceso en los rendimientos.

**El índice Treynor (Treynor, 1965).** En 1965, de acuerdo con Shahid (2007), Treynor fue el primer investigador que cálculo el desempeño de una cartera. Una medida en exceso de una cartera por unidad de riesgo es igual a la tasa de rendimiento de la cartera menos la tasa libre de riesgo, dividida por la beta de la cartera.

Esto es útil para evaluar los rendimientos en exceso, y para que los inversionistas evalúen como la estructura de la cartera afecta los rendimientos ante diferentes niveles de riesgo sistemático. El índice de Treynor es:  $T_p = (r_p - r_f) / \beta_p$ .

Donde  $r_p$  es la tasa de rendimiento de la cartera;  $r_f$  la tasa de rendimiento libre de riesgo y  $\beta_p$  la beta de la cartera. Cuando  $r_p > r_f$  y  $\beta_p > 0$ , tenemos el valor más grande de Treynor. Esto significa una mejor cartera para todos los inversionistas a pesar de su desempeño individual de riesgo.

Cuando  $r_p < r_f$  entonces el valor de Treynor es negativo porque  $r_p < r_f$ , en este caso el desempeño de la cartera es muy pobre. Cuando la negatividad se da por la beta, el desempeño de los fondos es excelente.

## 2.6 Medida basada en el VaR de la cartera.

De acuerdo con Le Sourd (2007) el Value at Risk ( $VaR$ <sup>4</sup>) es un indicador que permite resumir el conjunto de indicadores de riesgo asociados a una cartera que esta diversificado sobre varias clases de activos. El  $VaR$  mide el riesgo de una cartera como la cantidad máxima que puede perderse dado un nivel de confianza.

Esta definición de riesgo puede usarse para calcular un indicador de riesgo ajustado para evaluar el desempeño de una cartera. Para definir un indicador, dividimos el  $VaR$  por el valor inicial del cartera y por lo tanto obtenemos un valor de perdida comparado con el valor total de la cartera.

Obtenemos un índice parecido al de Sharp en el cual la desviación estándar es remplazada con un indicador basado en  $VaR$ , y lo definimos como:

$$VaR_r = (R_p - R_f) / (VaR_p / V_p^0) = (R_p - R_f) V_p^0 / VaR_p.$$

---

<sup>4</sup> Traducido como Valor en Riesgo.

Donde  $R_p$  denota el rendimiento de la cartera;  $R_f$  es la tasa de rendimiento del activo libre de riesgo;  $VaR_p$  es el  $VaR$  de la cartera; y  $V_p^0$  denota el valor inicial de la cartera. El cálculo del  $VaR$  presupone que se ha escogido un límite de confianza. Por lo tanto  $VaR$  se puede comparar para diferentes carteras con el mismo nivel de confianza.

## 2.7 Medidas de Benchmark<sup>5</sup> de carteras de inversión.

De acuerdo con Morningstar (2009) y Knight y Satchell (2002) se toman tres medidas para determinar el desempeño de una cartera:

**Beta  $\beta$ .** La Beta es una medida de la sensibilidad de los fondos a los movimientos de un índice de mercado (o cartera de comparación). La Beta del índice de mercado es 1. Una Beta de 1.10 tiende a proporcionar un 10% sobre el índice de mercado. Una Beta del 0.85 tiene un rendimiento menor al mercado del 15%. La Beta se calcula de la siguiente manera:  $\beta_r = Cov_{rb} / \sigma_b^2$ .

Donde  $\beta_r$  es la Beta de la cartera  $r$ .  $Cov_{rb}$  es la Covarianza entre los rendimientos de la cartera  $r$  y la cartera de comparación y  $\sigma_b^2$  es la varianza de los rendimientos de la cartera de comparación.

**Alpha  $\alpha$ .** Alfa mide el desempeño de una cartera después de ajustarse el riesgo sistemático medido por la Beta con respecto al índice de comparación. Un inversionista pudo haber formado una cartera pasiva con la misma Beta de la cartera invirtiendo en el índice y pidiendo prestado o prestando a la tasa de rendimiento libre de riesgo. Alfa es la diferencia entre la tasa de rendimiento de la cartera y la

---

<sup>5</sup> El anglicismo "benchmark" o "benchmarking" designa el hecho de elaborar una lista de productos o de servicios, definir criterios de evaluación del rendimiento o de eficacia y realizar el estudio comparativo, generalmente presentado en un cuadro. Recuperado de <http://es.ccm.net/faq/9457-benchmark-definicion> el día 13 de Septiembre, 2015.

tasa de rendimiento de la cartera de mercado por la beta de la cartera. Alfa se puede calcular de la siguiente manera:  $\alpha_M = \bar{R}^e - \beta \bar{B}^e$ .

Donde  $\alpha_M$  es la alfa mensual de la cartera (si se necesita la alfa anual se multiplica esta por 12);  $\bar{R}^e$  es el rendimiento promedio de la cartera;  $\beta$  es la Beta de mercado;  $\bar{B}^e$  es el rendimiento de mercado.

**R-cuadrada.** La R-cuadrada es un estadístico que se produce en el análisis de regresión de mínimos cuadrados. R-cuadrada es un número entre 0 y 1 que mide la relación existente entre las variables independientes y dependientes. Una R-cuadrada muy baja indica que los movimientos de la cartera no están muy bien explicados por los movimientos de la cartera de mercado. R-cuadrada se puede usar para tener una seguridad significativa de la estimación en particular de una Beta. Generalmente una R-cuadrada alta indica que la Beta es más confiable. La R-cuadrada se calcula de la siguiente manera:  $R^2 = (Cov_{rb} / \sigma_1 \sigma_2)$ . Donde  $Cov_{rb}$  es la covarianza entre la cartera  $r$  y la cartera de mercado;  $\sigma_1$  es la desviación estándar de la cartera  $r$  y  $\sigma_2$  es la desviación estándar de la cartera de mercado.

**Modelo de tres factores de Fama-French.** Una derivación adicional del Capital Asset Pricing Model (*CAPM*) fue desarrollado por Fama y French (1993) citados en Rojas y Ruiz (2011), donde extienden dos variables adicionales que entregan mayor poder explicativo: *SMB* y *HML*. Estas variables se derivan de la evidencia empírica encontrada por estos autores, de que históricamente aquellas acciones de menor capitalización bursátil y mayor valoración (book-to-market) tenderán a obtener mayores rendimientos, por lo tanto fue necesario corregir el modelo al evaluar los rendimientos de activos mediante *CAPM*.

Para hacer eso, se define *SMB* como “Small Minus Big”<sup>6</sup>, donde se compone una cartera con el 30% superior de acciones de menor capitalización y otra con el 30% superior y se restan sus rendimientos. De forma análoga, se realiza lo mismo para acciones de mayor valoración book-to-market menos los rendimientos de las de menor valor, obteniendo *HML* definida así por las siglas de “High Minus Low”<sup>7</sup>. El modelo se puede definir matemáticamente como:

$$r_t - r_f = \alpha_t + \beta(r_m - r_f) + \beta_s(SMB) + \beta_h(HML) + \varepsilon_{it}.$$

**Omega:** Keating y Shadwick (2002) citados por Rojas y Ruiz (2011) introducen esta medida en sus trabajos de 2002 y 2003, con el fin de evitar los problemas que presentan las medidas basadas en la relación media-varianza. Una de las principales ventajas es la simplicidad dentro de las medidas de momentos parciales, lo cual expandió su uso en la última década. Esta medida se define como el ratio de probabilidades ponderadas entre ganancias y pérdidas, ambas relativas a cierto nivel de rendimientos, y no como rendimientos positivos o negativos.

Es estrictamente positiva, lo que facilita su interpretación, y creciente, a mayor Omega, mejor rendimiento.  $\Omega F(L) = \left( \int_L^b (1 - F(x)) dx \right) / \int_a^L F(x) dx$ . Donde la función  $F(\bullet)$  es la función de distribución acumulada,  $(a, b)$  es el rango de rendimientos de la cartera y  $L$  es el nivel de rendimiento exigido o benchmark.

La evidente ventaja al considerar momentos mayores a los de la media y la varianza, sesgo y curtosis, permite incorporar inversiones de mayor complejidad y eliminar el supuesto de normalidad en los rendimientos, a cambio de pérdida de simplicidad y verse más sesgado por la arbitrariedad del benchmark a utilizar.

---

<sup>6</sup> Traducido como “El menor menos el grande”.

<sup>7</sup> Traducido como “El alto menos el bajo”

**Upside Potential Ratio**<sup>8</sup>. Esta medida es una derivación de la razón de Sortino (Sortino y Van der Meer (1991) citados por Rojas y Ruiz (2011)) definido por su mismo autor, Frank Sortino, que busca dar luces con respecto a que los inversionistas consideran el riesgo, de forma menos general, como las posibles caídas en los precios de sus activos, por lo tanto una medida de rendimiento ajustado por riesgo debería castigar las caídas y valorar las subidas con respecto a un determinado nivel mínimo.

De esta forma, se define el Upside Potential Ratio, en su forma discreta, como:

$$U = \left( \sum_{mín}^{+\infty} (r_i - r_{mín}) P_r \right) / \sqrt{\sum_{mín}^{+\infty} (r_i - r_{mín})^2 P_r}$$

Siendo  $r_{mín}$  el rendimiento mínimo esperado por el inversionista. Su gran utilidad radica en utilizar una definición de riesgo más intuitiva, siempre que se esperen rendimientos positivos del activo o cartera.

**Information Ratio (IR**<sup>9</sup>). De acuerdo con Le Sourd (2007) la razón de información, algunas veces llamada razón de valuación, está definida por el rendimiento residual de la cartera comparada con su riesgo residual. El residuo de una cartera corresponde a los rendimientos compartidos que no son explicados por el benchmark. Resultado de las opciones tomadas por el administrador de la cartera al sobrecargar los valores donde él espera que los rendimientos sean mayores que el valor del benchmark.  $IR = \frac{E(R_p) - E(R_B)}{\sigma(R_p - R_B)}$ . Donde  $R_B$  denota los rendimientos de

la cartera de benchmark.

**Modigliani y Modigliani M<sup>2</sup> (1997)**. Modigliani y Modigliani (1997) citado por Le Sourd (2007) demostró que la cartera y su cartera de comparación (benchmark)

---

<sup>8</sup> Traducido como "La razón potencial de subida"

<sup>9</sup> Traducido como "Razón de Información".

deben tener el mismo riesgo para ser comparables en términos de puntos base o desempeño de riesgo ajustado. Propusieron que la cartera debe ser apalancada y desapalancada usando un activo libre de riesgo. Definieron la siguiente medida:

$$RAP_p = \frac{\sigma_M}{\sigma_p} (R_p - R_f) + R_f. \text{ Donde } \sigma_M / \sigma_p \text{ es el factor de apalancamiento; } \sigma_M \text{ denota}$$

la desviación estándar anualizada de los rendimientos de mercado;  $\sigma_p$  denota la desviación estándar anualizada del fondo  $P$ ;  $R_p$  denota el rendimiento anualizado del fondo  $P$  y  $R_f$  denota la tasa libre de riesgo.

## **2.8 Diversificación de una cartera de valores.**

Para Mayes (2010) una cartera de valores es un conjunto de activos. Los inversionistas, ya sea individuos o corporaciones, por lo general son propietarios de carteras de valores formadas por más de un activo.

Con frecuencia, una cartera de valores tendrá menos riesgo que cualquiera de las inversiones individuales que contenga. Puede haber un costo, en la forma de un rendimiento un poco más bajo que el esperado cuando se compara con la alternativa de rendimiento más alto, pero mejora el punto medio general entre riesgo y rendimiento. Esta reducción en riesgo se conoce como efecto de diversificación.

De acuerdo con Fragkiskos (2014) al incorporar activos a la cartera, el riesgo se distribuye entre todos los activos integrados de acuerdo con la fórmula  $1/N$ , donde  $N$  es el número de activos. Esto comúnmente se llama diversificación nativa, mientras esta diversificación da buenos beneficios al adicionar indiscriminadamente activos a la cartera, mejores beneficios de diversificación o beneficios más eficientes de diversificación pueden obtenerse al utilizar técnicas de optimización, incluyendo la Teoría Moderna de la Cartera.

De acuerdo con Bender, Brian, Nielsen y Stefek (2010) citado por Fragkiskos (2014) la diversificación se encuentra en un contexto de correlación entre los mercados alcista “toro” y el bajista “oso”. Page y Tabor (2011), citados por Fragkiskos (2014),

consideran que aunque la diversificación de activos riesgosos y no riesgosos ofrece beneficios, tal combinación tiene un desempeño pobre durante periodos de crisis financieras, cuando la correlación de los activos aumenta. Los inversionistas pueden lograr correlaciones menores entre activos riesgosos y por ende una mejor diversificación.

Otra manera de definir a la diversificación es en términos de contribución al riesgo, lo cual es equivalente a la beta de una cartera. Esto se relaciona con la contribución a la pérdida, bajo ciertas circunstancias, las dos medidas son idénticas Quia (2005), citado por Fragkiskos (2014). La cartera de mínima varianza tiene un mejor desempeño con respecto al riesgo pero una pobre diversificación.

## **2.9 Funciones de utilidad esperada.**

De acuerdo con Campolieti (2014) el procedimiento para seleccionar inversiones se puede reducir a optimizar la distribución de probabilidad de la incertidumbre de la riqueza en el futuro.

Para el caso de resultados inciertos, el inversionista está interesado en minimizar la varianza de la respectiva probabilidad de distribución. En el caso de alternativas con resultados inciertos, se introduce una función que es calculada con un valor esperado llamado función de utilidad esperada.

La función específica de utilidad a utilizar depende de las preferencias de los inversionistas, tolerancia al riesgo y medio ambiente financiero. Las siguientes son las funciones de utilidad más comunes: La función de utilidad logarítmica ( $\log$ )  $u(x) = \ln x$ ; la función de utilidad exponencial  $u(x) = -e^{-ax}$  con  $a > 0$ ; la función de utilidad potencia  $u(x) = x^a$  con  $0 < a < 1$ ; la función de utilidad cuadrática  $u(x) = x - ax^2$  con  $0 < a$  definida para  $x < (1/2a)$  y la función de utilidad lineal  $u(x) = a + bx, b > 0$ . La suma o la multiplicación de la función de utilidad por una constante no son afectadas si la constante es positiva. En general, dada una función de utilidad  $u$  podemos definir otra función de utilidad  $\bar{u}$  equivalente a  $u$  de la forma

$\bar{u}(x) = a + bu(x)$  con  $b > 0$ . Esta nueva función de utilidad se dice es equivalente a la función original y dan idénticas clasificaciones de oportunidades de inversión.

### 2.10 Aversión al riesgo.

Las funciones de utilidad son construidas basadas en los siguientes principios Campolieti (2014): Primer principio. Los inversionistas prefieren más que menos. Si hay dos ganancias ciertas  $V_1$  y  $V_2$ , entonces el inversionista prefiere la que sea mayor; ejemplo,  $V_1 < V_2$  implica que  $u(V_1) < u(V_2)$ . Por lo tanto  $u$  es una función creciente. Segundo principio. Los inversionistas son adversos al riesgo. Desviaciones positivas  $\Delta V$  de un promedio de ganancia  $V$  no pueden compensarse con desviaciones negativas  $-\Delta V$  de cantidades del mismo tamaño y con la misma probabilidad de un promedio de riqueza. Ejemplo:  $u(V) - u(V - \Delta V) > u(V + \Delta V) - u(V)$ .

Por lo tanto,  $u(V) > (u(V + \Delta V) + u(V - \Delta V)) / 2$ . Esta desigualdad se mantiene verdadera para toda  $V$ , si  $u$  es una función cóncava. El lado izquierdo,  $u(V) - u(V - \Delta V)$ , es el dolor de perder  $\Delta V$  unidades monetarias, y el lado derecho  $u(V + \Delta V) - u(V)$ , es el placer de ganar  $\Delta V$  unidades monetarias.

Una función  $u$  definida en un intervalo  $[a, b]$  se dice que es cóncava si para cualquier  $\alpha$  con  $0 \leq \alpha \leq 1$  y cualquier  $x, y \in \mathbb{R}$ , se cumple  $u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(y)$ .

Una función  $u$  se dice es convexa sobre  $[a, b]$  si la función  $-u$  es cóncava. Esto es si para cualquier  $\alpha$  con  $0 \leq \alpha \leq 1$  y cualquier  $x, y \in \mathbb{R}$ , se cumple:

$$u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(y).$$

## Capítulo 3. Optimización.

La optimización es encontrar aquellas carteras que dan el mayor rendimiento ante un determinado nivel de riesgo de la misma. En este capítulo se ven de manera general los distintos modelos para eficientar carteras y los requisitos básicos que deben cumplir para ser eficientes.

### 3.1 Concepto.

Para Nocedal y Wright (2006) la optimización es una herramienta importante de decisión en la ciencia y en el análisis físico de sistemas. Para hacer uso de esta herramienta necesitamos identificar un objetivo, es decir una medida cuantitativa de desempeño del sistema bajo estudio.

Este objetivo puede ser la ganancia, el tiempo, el potencial energético, o cualquier cantidad o combinación de cantidades que puedan ser representadas por un simple número. El objetivo depende de ciertas características del sistema, llamadas variables. Nuestra meta es encontrar los valores de las variables que optimizan el objetivo. En muchas ocasiones las variables tienen restricciones. El proceso de identificar el objetivo, las variables y las restricciones para un problema dado se conoce como modelar. La construcción de un buen modelo es el primer paso en el proceso de optimización.

Una vez que el modelo ha sido formulado, un algoritmo de optimización puede ser usado para encontrar su solución, con ayuda de una computadora. No existe un algoritmo de optimización global, pero si una colección de algoritmos, cada uno de los cuales ha sido diseñado para un caso particular de optimización.

### 3.2 El problema de optimización.

De acuerdo con Chong y Zak (2001) el problema de optimización consiste en minimizar  $f(x)$  sujeto a que  $x \in \Omega$ . La función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que deseamos minimizar

es una función de valor real, y es llamada la función objetivo. El vector  $x$  es un vector de variables independientes, tales que  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ . Las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son también referidas como variables de decisión. El conjunto  $\Omega$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , llamado conjunto de restricciones o conjunto factible.

El problema de optimización puede ser visto como un problema de decisión que involucra encontrar el mejor vector  $x$  de las variables de decisión sobre todos los posibles vectores en  $\Omega$ . Por el mejor vector entendemos que solo un resultado es el más pequeño de la función objetivo. Este vector es llamado el minimizador de  $f$  sobre  $\Omega$ . Es posible que haya muchos minimizadores. En este caso al encontrar cualquiera de ellos es suficiente.

Hay problemas de optimización que requieren maximizar la función objetivo. Estos problemas, sin embargo, pueden ser representados en la forma anterior porque maximizar  $f$  es lo mismo que minimizar  $-f$ .

El problema anterior es la forma general de un problema de optimización con restricciones, porque las variables de decisión están restringidas o restringidas al conjunto  $\Omega$ . Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , entonces el problema se convierte en un problema de optimización sin restricciones.

De acuerdo con Boy (2009) en la optimización de una cartera, buscamos la mejor manera de invertir capital en un número  $n$  de activos. La variable  $x_i$  representa la inversión en el activo  $i$ , por lo tanto el vector  $x \in \mathbb{R}^n$  describe de forma general la distribución del conjunto de activos.

Las restricciones pueden representar límites en el presupuesto (límites sobre la cantidad máxima a ser invertida), los requerimientos de que la inversión no sea negativa (no asumir posiciones en corto), y un valor mínimo aceptable del rendimiento esperado de la cartera en su totalidad. El objetivo o la función de costo

pueden ser una medida del riesgo promedio o la varianza de los rendimientos de la cartera.

### 3.3 Métodos para encontrar los minimizadores al optimizar.

De acuerdo con Chong y Zak (2001) existen los siguientes métodos para encontrar los minimizadores en una optimización.

**Método de búsqueda de una dimensión.** En este método determinamos el minimizador de la función sobre un intervalo cerrado. La única propiedad que asumimos de la función objetivo es que es unimodal, lo que significa que tiene solo un minimizador local.

**Método de la búsqueda dorada.** El método de búsqueda dorada de una dimensión se basan en evaluar la función objetivo en diferentes puntos en el intervalo  $[a_0, b_0]$ . Escogemos puntos que van cerrando progresivamente al minimizador de  $f$  con las menos evaluaciones posibles. Nuestra meta es encajonar el minimizador con la suficiente exactitud.

**Método de la búsqueda de Fibonacci.** En este método suponemos que solo podemos variar el valor  $\rho$  en cada etapa, por lo que en la etapa  $k$ th en el proceso de reducción usamos el valor  $\rho_k$ , y en la siguiente etapa usamos el valor  $\rho_{k+1}$ , y así sucesivamente. Nuestra meta es seleccionar sucesivamente valores de  $\rho_k$ ,  $0 \leq \rho_k \leq 1/2$ , tal que solo una función es requerida para cada etapa.

**Método de mínimos cuadrados.** Para Boy (2009) un problema de mínimos cuadrados es una optimización de un problema sin restricciones y un objetivo el cual es la suma de los cuadrados de la forma:

$$a_i^T x - b_i : \text{minimizar } f(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^k (a_i^T x - b_i)^2.$$

Donde  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$  con ( $k > n$ ),  $a_i^T$  son los renglones de A, y el vector  $x \in \mathbb{R}^n$  es la variable de optimización. La solución de este método de mínimos cuadrados se

puede resumir resolviendo un conjunto de ecuaciones lineales,  $(A^T A)x = A^T b$ , para obtener la solución analítica  $x = (A^T A)^{-1} A^T B$ .

**Método de programación lineal.** Una clase importante de optimización son los problemas de programación lineal en el cual el objetivo y las restricciones son lineales. Boy (2009): Minimizar  $c^T x$ ; Sujeto a:  $a_i^T x \leq b_i, i=1, \dots, m$ .

Aquí los vectores  $c, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  y los escalares  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  son los parámetros que especifican el objetivo y las restricciones del problema.

**Método de Optimización convexa.** De acuerdo con Boy (2009) un problema de optimización convexa es de la forma: Minimizar  $f_0(x)$ ;

$$\text{Sujeto a: } a_i^T x - t \leq b_i, i = 1, \dots, k; -a_i^T x - t \leq -b_i, i = 1, \dots, k.$$

Donde las funciones  $f_0, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son convexas y satisfacen:

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0.$$

El método de mínimos cuadrados y el de programación lineal son casos particulares de los problemas generales de optimización convexa.

**Método de optimización no lineal.** De acuerdo con Boy (2009) la optimización no lineal es el término usado para describir un problema de optimización donde el objetivo o funciones de restricción son no lineales y no se sabe si son convexas.

Desgraciadamente, no existen métodos efectivos para resolver un problema general de programación no lineal. Los métodos para resolver estos tipos de problemas toman diferentes aproximaciones cada uno de los cuales involucra compromisos.

### 3.4 Optimización de carteras.

**Optimización de una cartera con dos activos.** Para Campolieti (2014), Kachapova (2013) y Elton et al (2014) se tiene un periodo en el cual consideramos un modelo con dos activos riesgosos  $A_t^1$  y  $A_t^2$ , donde  $t \in \{0, T\}$ .

Cada activo, etiquetado por  $i = 1, 2$ , está caracterizado por su valor inicial  $A_0^i$  y su respectivo rendimiento simple del periodo  $r_i = (A_T^i - A_0^i) / A_0^i$ . Por lo que tenemos  $A_T^i = A_0^i (1 + r_i)$ . Los rendimientos riesgosos  $r_1$  y  $r_2$  (así como los precios finales de los activos  $A_T^1$  y  $A_T^2$ ) son variables aleatorias definidas en un espacio común de probabilidad  $\Omega$  y la función de probabilidad  $P$ .

Formemos una cartera  $[x_1, x_2]^T$  comprando  $x_1$  acciones del activo 1 y  $x_2$  acciones del activo 2. La riqueza inicial de tal cartera es  $V_0 = x_1 A_0^1 + x_2 A_0^2$ . La tasa de rendimiento  $r_V$  está dada por

$$r_V = \frac{V_T - V_0}{V_0} = \frac{x_1(A_T^1 - A_0^1) + x_2(A_T^2 - A_0^2)}{V_0} = \frac{x_1(A_T^1 - A_0^1)}{A_0^1} \frac{A_0^1}{V_0} + \frac{x_2(A_T^2 - A_0^2)}{A_0^2} \frac{A_0^2}{V_0} = \frac{x_1 A_0^1}{V_0} r_1 + \frac{x_2 A_0^2}{V_0} r_2.$$

Introducimos los siguientes pesos:  $w_1 = (x_1 A_0^1) / V_0$  y  $w_2 = (x_2 A_0^2) / V_0$ .

Los cuales son llamados asignaciones de pesos de los fondos entre los dos activos.

En otras palabras,  $100w_i\%$  de la inversión inicial está invertida en los activos  $i = 1, 2$ .

Por definición de una función de ganancia, los pesos asignados deben sumar uno:

$w_1 + w_2 = 1$ . Si las ventas en corto son permitidas, los pesos pueden ser negativos, y

por lo tanto pueden ser mayores a uno. Para una cartera sin ventas en corto, ambos

pesos están entre cero y uno. Dados los valores de los rendimientos  $r_i$  y los pesos

$w_i$ , el valor total de la riqueza al final del periodo es:

$$V_T = (1 + r_V)V_0 = (1 + w_1 r_1 + w_2 r_2)V_0 = (w_1(1 + r_1) + w_2(1 + r_2))V_0.$$

Una cartera con pesos  $[w_1, w_2]^T$  puede ser caracterizada por el rendimiento esperado y la varianza de este rendimiento.

Dado que  $r_V = w_1 r_1 + w_2 r_2$ , tenemos que:  $E[r_V] = E[w_1 r_1] + E[w_2 r_2] = w_1 E[r_1] + w_2 E[r_2]$

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_V) &= \text{Var}(w_1 r_1) + \text{Var}(w_2 r_2) + 2\text{Cov}(w_1 r_1, w_2 r_2) \\ &= w_1^2 \text{Var}(r_1) + w_2^2 \text{Var}(r_2) + 2w_1 w_2 \text{Cov}(r_1, r_2) \\ &= w_1^2 \text{Var}(r_1) + w_2^2 \text{Var}(r_2) + 2w_1 w_2 \text{Corr}(r_1, r_2) \sqrt{\text{Var}(r_1)} \sqrt{\text{Var}(r_2)}. \end{aligned}$$

Aquí definimos el coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias como:

$$\text{Corr}(r_1, r_2) = \rho_{12} = \left[ \text{Cov}(r_1, r_2) / (\sqrt{\text{Var}(r_1)} \sqrt{\text{Var}(r_2)}) \right] \in [-1, 1].$$

Nota: Si la varianza de una de las variables es cero, el coeficiente de correlación esta indefinido. De acuerdo con Campolieti (2014) y Elton et al (2014) la varianza de los rendimientos de una cartera sin ventas en corto ( $w_1, w_2 \geq 0$ ) no puede exceder la mayor de las varianzas de los rendimientos de cualquier activo de la cartera.

$$0 \leq \text{Var}(r_V) \leq \max \{ \text{Var}(r_1), \text{Var}(r_2) \}.$$

Introduciremos la siguiente notación para la esperanza y la varianza de la cartera; los rendimientos esperados, la varianza de los rendimientos y el coeficiente de correlación:  $\mu_V = E[r_V]$ ,  $\sigma_V^2 = \text{Var}(r_V)$ ;  $\mu_i = E[r_i]$ ,  $\sigma_i^2 = \text{Var}(r_i)$ ; ( $i = 1, 2$ );  $\rho_{12} = \text{Corr}(r_1, r_2)$ .

**El criterio de la media-varianza para dos activos.** De acuerdo con Campolieti (2014) suponemos que tenemos una función de utilidad  $u$ , consideremos la expansión de Taylor de  $u$  sobre el punto

$$E[V]: u(V) \approx u(E[V]) + u'(E[V])(V - E[V]) + \frac{1}{2} u''(E[V])(V - E[V])^2.$$

Tomando esperanzas matemáticas:

$$\begin{aligned} E[u(V)] &\approx u(E[V]) + u'(E[V])E[(V - E[V])] + \frac{1}{2} u''(E[V])E[(V - E[V])^2] \\ &= u(E[V]) + u''(E[V])\text{Var}[V] / 2. \end{aligned}$$

Tenemos que  $E[V - E[V]] = E[V] - E[V] = 0$  y  $E[V - E[V]]^2 = \text{Var}(V)$ .

Por lo tanto, una aproximación razonable a la inversión óptima está dada cuando el inversionista maximiza  $u(E[V]) + u''(E[V])Var[V]/2$ .

Supongamos que  $u''(x)$  es una función no decreciente de  $x$ . Por lo tanto, dado que  $u''(x) \leq 0$ , una inversión óptima  $V$  puede ser seleccionada maximizando el valor esperado  $E[V]$  y minimizando la varianza  $Var(V)$ . Considerando que la desviación estándar  $\sigma_V = \sqrt{Var(V)}$  caracteriza el riesgo asociado con la inversión  $V$ . Por lo tanto, el criterio de la media varianza nos dice que la inversión óptima se obtiene al maximizar el valor esperado de la ganancia y minimizando el riesgo.

**Línea de la cartera.** Consideremos dos activos riesgosos con sus respectivos rendimientos  $r_1$  y  $r_2$ . Es una situación típica donde la probabilidad de distribución conjunta de los rendimientos es desconocida. Sin embargo, es posible estimar los momentos de los rendimientos con información histórica. Supongamos que solo conocemos los rendimientos esperados y las varianzas de los rendimientos y el coeficiente de correlación. Cada cartera en estos activos puede ser caracterizada por sus rendimientos esperados y sus respectivas varianzas. Campolieti (2014) y Elton et al (2014).

En el punto del plano  $(\sigma, \mu)$ , una cartera  $V$  con pesos  $[w_1, w_2]^T$  es representada por un punto  $(\sigma_V, \mu_V)$  que se calcula con  $\mu_V = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$ ;  $\sigma_V^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2\rho_{12}w_1w_2\sigma_1\sigma_2$ .

Encontremos el conjunto de puntos sobre el plano  $(\sigma, \mu)$  que describa todas las posibles carteras en los que caen los dos activos. Donde  $w_1 + w_2 = 1$ , todas las carteras pueden ser parametrizadas por una variable  $x \in \mathbb{R} : w_1 = x$  y  $w_2 = 1 - x$ . Por lo tanto, el conjunto de todas las posibles carteras pueden ser representadas por la línea de la cartera.

**Escenarios de correlación para dos activos.** De acuerdo con Campolieti (2014) y Elton et al (2014) se pueden dar los siguientes valores para el coeficiente de correlación:

**Primer caso con  $|\rho_{12}|=1$ .** Primero, si  $\rho_{12}=1$ . Tenemos que la varianza de la cartera  $V$  está dada por  $\sigma_V^2(x) = (x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2)^2$ . Y por lo tanto  $\sigma_V(x) = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2|$ .

La cartera queda descrita por:  $\mu_V(x) = x\mu_1 + (1-x)\mu_2$ ;  $\sigma_V(x) = |x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2|$  con  $x \in \mathbb{R}$ .

Los pesos de la cartera libre de riesgo quedarían de la manera siguiente:

$$\hat{w}_1 = \sigma_2 / (\sigma_2 - \sigma_1) \text{ y } \hat{w}_2 = \sigma_1 / (\sigma_1 - \sigma_2).$$

Uno de los pesos es negativo, por lo tanto se necesitan ventas en corto para construir una cartera libre de riesgo.

**Segundo caso con  $\rho_{12} = -1$ .** La cartera queda descrita por:

$$\mu_V(x) = x\mu_1 + (1-x)\mu_2; \quad \sigma_V(x) = |x(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2| \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

Los pesos de la cartera libre de riesgo quedarían de la manera siguiente:

$$\hat{w}_1 = \sigma_2 / (\sigma_2 + \sigma_1) \text{ y } \hat{w}_2 = \sigma_1 / (\sigma_1 - \sigma_2).$$

Los dos pesos son positivos por lo que no se necesitan ventas en corto para construir una cartera libre de riesgo.

**Tercer caso con  $|\rho_{12}| < 1$ .** Excluimos  $x$  de

$$\mu_V(x) = x\mu_1 + (1-x)\mu_2; \quad \sigma_V^2(x) = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}.$$

Y expresamos  $\sigma^2$  en función de  $\mu$  dándonos:

$$\sigma^2 = \left[ (\mu - \mu_2)^2 / (\mu_1 - \mu_2) \right] \sigma_1^2 + \left[ (\mu - \mu_1)^2 / (\mu_1 - \mu_2) \right] \sigma_2^2 - 2 \left[ (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) / (\mu_1 - \mu_2) \right] \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2.$$

Después de algunos movimientos algebraicos transformamos la ecuación en:

$$\sigma^2 = A\mu^2 - 2B\mu + C, \text{ donde } A = (\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) / (\mu_1 - \mu_2)^2,$$

$$B = [\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2(\mu_1 + \mu_2)] / (\mu_1 - \mu_2)^2,$$

$$C = [(\mu_1\sigma_2)^2 + (\mu_2\sigma_1)^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\mu_1\mu_2] / (\mu_1 - \mu_2)^2.$$

La curva definida de la ecuación anterior es una hipérbola. De hecho, si reescribimos la ecuación de la siguiente manera:  $\sigma_2 = A(\mu - (B/A))^2 + D$ . Donde  $D = C - (B^2/A)$ . Al cambiar las variables de  $(\sigma, \mu)$  a  $(x = \sigma/\sqrt{D}, y = (\sqrt{A}/\sqrt{D})\mu - (B/\sqrt{AD}))$ .

Fácilmente se puede obtener la ecuación canónica de la hipérbola:  $x^2 + y^2 = 1$ .

**La cartera de mínima varianza.** De acuerdo con Campolieti (2014) siempre hay una cartera con mínima varianza  $\sigma_v^2$ . Ya se han encontrado carteras libre de riesgo con varianza cero para el caso de  $|\rho_{12}| = 1$ . Encontramos la solución general para este problema. Supongamos que  $|\rho_{12}| < 1$  o  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  la cartera con la mínima

varianza se encuentra en:  $\hat{w}_1 = \frac{\sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$  y  $\hat{w}_2 = \frac{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$ .

La varianza de la cartera es  $\sigma_{mv}^2 = \frac{(1 - \rho_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$ .

**Optimización de carteras para  $n$  activos.** Campolieti (2014) y Kachapova (2013) consideran un modelo de mercado para  $N$  diferentes activos  $A_t^1, A_t^2, \dots, A_t^N$ , donde  $t \in \{0, T\}$ . El rendimiento del  $i$ th activo es  $r_i = (A_t^i - A_0^i) / A_0^i$ .

Supongamos que construimos una cartera con estos activos. Sea  $x_i$  el número de partes del activo  $i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$ . El valor de la cartera en el tiempo  $t$  es

$V_t = \sum_{i=1}^N x_i A_t^i$  para  $t \in \{0, T\}$ . El rendimiento de la cartera es una combinación lineal de

los rendimientos de los activos:

$$r_V = (V_T - V_0) / V_0 = \sum_{i=1}^N (x_i (A_T^i - A_0^i) / V_0) = \sum_{i=1}^N (x_i A_0^i / V_0) ((A_T^i - A_0^i) / A_0^i) = \sum_{i=1}^N (x_i A_0^i / V_0) r_i.$$

Definimos la distribución de los pesos como  $w_i = \sum_{i=1}^N x_i A_0^i / V_0$  con  $i = 1, 2, \dots, N$  de los fondos entre los  $N$  activos. La fórmula para el rendimiento  $r_V$  toma la siguiente

forma:  $r_V = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \dots + w_N r_N = \sum_{i=1}^N w_i r_i.$

Denotemos  $w := [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N]^T \in \mathbb{R}^N$ . Claramente la suma de los pesos es 1. Este hecho lo podemos escribir de la forma:  $u^T w = 1$ , donde  $u := [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^N$ .

Aquí  $x^T$  denota la transpuesta del vector  $x$ . Operando con vectores columna. Denotamos  $\mu_i = E[r_i]$  como el rendimiento esperado sobre el activo  $i$ ;  $\sigma_i^2 = Var(r_i)$  la varianza del rendimiento sobre el activo  $i$  y  $c_{ij} = Cov(r_i, r_j)$  como la covarianza entre los rendimientos  $r_i$  y  $r_j$  para  $i, j = 1, 2, \dots, N$ .

Los rendimientos esperados y las covarianzas entre los rendimientos pueden ser arregladas respectivamente en un vector columna  $N \times 1$  y una matriz  $N \times N$ :

$$m := \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} \text{ y } C := \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix}.$$

La matriz  $C$  es llamada la matriz de covarianzas. La covarianza  $\sigma_{XY} = Cov(X, Y)$  de dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  puede ser factorizada como un producto de

desviaciones estándar,  $\sigma_X$  y  $\sigma_Y$ , y el coeficiente de correlación entre  $X$  y  $Y$  denotado por  $\rho_{XY} = \text{Corr}(X, Y)$  como sigue:  $\sigma_{XY} = \sigma_X \rho_{XY} \sigma_Y$ .

Por lo tanto, la matriz de covarianza  $C$  puede ser representada como un producto de una matriz diagonal con las desviaciones estándar de los rendimientos,  $\sigma_i := \sqrt{\text{Var}(r_i)}$ , y una matriz de correlación cuyas entradas son los coeficientes de correlación entre los rendimientos,  $\rho_{ij} \equiv \text{Corr}(r_i, r_j), i, j = 1, 2, \dots, N$ :

$$C := \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N \end{bmatrix}.$$

Se usa el hecho de que  $\text{Corr}(X, X) = 1$  para cada variable aleatoria  $X$ , donde  $\rho_{ij} = 1$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ .

La matriz de covarianzas es simétrica  $C = C^T$  y definida positiva  $w^T C w > 0$  para cada vector  $w \in \mathbb{R}^N$  no nulo. Dado que  $C$  está definida positiva, es una matriz no singular y por lo tanto su inversa  $C^{-1}$  existe. Existen varios criterios necesarios para determinar si una matriz real simétrica es definida positiva, incluyendo los siguientes: Todos los eigen valores de  $C$  son positivos; todos los menores principales son positivos; el  $k$ th menor principal de  $C$  es el determinante de la esquina superior izquierda  $k \times k$  de  $C$  donde  $k = 1, 2, \dots, N$  este último criterio es conocido como el criterio de Sylvester.

Existe una única matriz triangular  $L$ , con elementos estrictamente positivos en la diagonal, que permiten factorizar  $C$  en  $C = LL^T$ . Tal factorización es llamada factorización de Cholesky. Nota que en general  $C$  puede ser una matriz definida semi positiva, lo que significa que  $w^T w \geq 0$  para todo  $w \in \mathbb{R}^N$ .

La esperanza matemática de la cartera  $V$  con los pesos  $w$  es

$$\mu_V = E[r_V] = E\left[\sum_{i=1}^N w_i r_i\right] = \sum_{i=1}^N [w_i r_i] = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i.$$

La varianza de  $r_V$  es

$$\sigma_V^2 = \text{Var}(r_V) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N w_i r_i\right) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^N w_i r_i, \sum_{j=1}^N w_j r_j\right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{Cov}(w_i r_i, w_j r_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j c_{ij}.$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma de vectores matrices:

$$\mu_V = m^T w; \quad \sigma_V^2 = w^T C w.$$

**La cartera de mínima varianza.** De acuerdo con Campolieti (2014) para encontrar la cartera de mínima varianza, necesitamos resolver

$$f(w) := w^T C w \rightarrow \min_w \text{ sujeto a } u^T w = 1.$$

Usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, primero, encontramos los puntos críticos de la función  $F(w, \lambda) := w^T C w - \lambda(u^T w - 1)$ .

Las derivadas parciales de  $F$  con respecto a  $w_i$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  son

$$\frac{\partial F}{\partial w_i}(w, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial w_i} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j c_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^N w_i + \lambda \right) = 2 \sum_{j=1}^N w_j c_{ij} - \lambda.$$

Igualando a cero obtenemos la ecuación lineal:  $2 \sum_{j=1}^N w_j c_{ij} - \lambda = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$ .

Sea  $c_j^T$  el  $j$ th renglón de la matriz  $C$ . Entonces las ecuaciones anteriores pueden ser reescritas en forma de vector:  $2c_j^T w - \lambda = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Finalmente tenemos que  $2Cw - \lambda u = 0$ . Multiplicando ambas partes por la matriz inversa  $C^{-1}$  el lado izquierdo nos da  $2C^{-1}Cw - \lambda C^{-1}u = 2w - \lambda C^{-1}u$  y  $C^{-1}0 = 0 \Rightarrow 2w - \lambda C^{-1}u = 0$ .

Al resolver esta ecuación para  $w$  obtenemos que  $w = \frac{\lambda}{2} C^{-1}u$ . La única variable que está faltando es  $\lambda$ . Sustituyendo la ecuación para  $w$  en la restricción  $u^T w = 1$  tenemos que  $1 = u^T w = u^T (\lambda / 2) C^{-1}u \Rightarrow \lambda = 2 / (u^T C^{-1}u)$ .

Finalmente, obtenemos el vector de pesos para la cartera de mínima varianza:

$$w_{mV} = C^{-1}u / u^T C^{-1}u.$$

Dado que la segunda derivada de la función  $f(w)$  es  $2C$  (la cual es definida positiva), la función  $F(w, \lambda)$  es una función cóncava de  $w$  para cada valor de  $\lambda$ .

Por lo tanto, la función  $f(w)$  tiene un mínimo en  $w_{mV}$ . La varianza mínima puede ser calculada poniendo los pesos de  $w_{mV}$  en  $\sigma_V^2 = w^T C w$ :  $\sigma_{mV}^2 = w_{mV}^T C w_{mV} = \frac{1}{u^T C^{-1}u}$ .

## Capítulo 4. Teoría de Cópulas.

Las marginales de las funciones se integran a una función llamada cópula en donde el concepto de normalidad no es importante.

### 4.1 Definición de Cópula.

De acuerdo con Jaworski et al (2009a) y Nelsen (2006) para cada  $d \geq 2$ , a d-dimensional cópula (en corto d-cópula) es una función de distribución (f.d) d-variable en  $I^d$  cuyas variables marginales univariadas están uniformemente distribuidas en  $I$ . Por lo tanto, cada d-cópula puede estar asociada con una variable aleatoria v.a.

Sea  $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$  tal que  $U_i \sim U(I)$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$  y  $U \sim C$ . De forma inversa, cualquier variable aleatoria cuyos componentes están uniformemente distribuidos sobre  $I$ , están distribuidos de acuerdo a una cópula. La clase de todas las copulas se denota por  $\mathcal{C}_d$ . Debido a que las cópulas son funciones de distribución multivariadas se pueden caracterizar por lo siguiente. Una función  $C: I^d \rightarrow I$  es una Cópula si, y sólo si, cumple las siguientes propiedades:

Para cada  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ ,  $C(u) = u_j$  cuando todos los componentes de  $u$  son igual a 1 con la excepción de  $j$ th que es igual a  $u_j \in I$ ;  $C$  es isotónica<sup>10</sup>, ejemplo:  $C(u) \leq C(v)$  para toda  $u, v \in I^d, u \leq v$ ;  $C$  es d-creciente.

---

<sup>10</sup> Una función isotónica es aquella que preserva el orden de la función  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ , para cualquier  $x, y \in X$  se cumple  $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$  y  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ .

Tomado de: [http://glossary.computing.society.informs.org/ver2/mpgwiki/index.php/Isotonic\\_function](http://glossary.computing.society.informs.org/ver2/mpgwiki/index.php/Isotonic_function)  
el día 11 de Noviembre, 2015

## 4.2 Propiedades de las cópulas.

De acuerdo con Jaworski et al (2009a) se puede probar que  $C(u) = 0$  para cada  $u \in I^d$  teniendo al menos uno de sus componentes el valor cero. Otra importante propiedad es que una cópula es una función Lipschitz<sup>11</sup>, es decir, para todo  $u, v \in I^d$ , se tiene que  $|C(u) - C(v)| \leq \sum_{i=1}^d |u_i - v_i|$ . Usando el teorema de Ascoli-Arzelá<sup>12</sup>. Se puede demostrar que  $\mathcal{C}_d$  es un conjunto compacto en el conjunto de todas las funciones continuas de  $I^d$  dentro de  $I$  equipado con el producto topológico, el cual corresponde a la topología del punto donde todas las funciones convergen. Ejemplos de lo anterior son:

Cópula independiente  $I_d(u) = u_1 u_2 \dots u_d$  asociada con un vector aleatorio  $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$  cuyos componentes son independientes e uniformemente distribuidos en  $I$ ; Cópula comonotónica<sup>13</sup>  $M_d(u) = \min(u_1, u_2, \dots, u_d)$  asociada con un vector  $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$  de una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre  $I$  y tal que  $U_1 = U_2 = \dots = U_d$ . Cópula contramonotónica

---

<sup>11</sup> Se recomienda revisar a González (2012) Análisis Real, para entender las propiedades de continuidad y diferenciación de las cópulas al ser funciones de Lipschitz.

<sup>12</sup> Es recomendable revisar el artículo de Medvedev (1992) Condiciones de Compacidad de Ascoli-Arzelá, donde se discute los trabajos de Ascoli y Arzelá sobre conjuntos infinitos de funciones, así como equicontinuidad y sobre condiciones de compacidad para conjuntos infinitos de funciones continuas.

<sup>13</sup> Es recomendable leer el artículo de Dhaenne et al (2002) sobre el concepto de comonotonicidad en ciencias actuariales y en finanzas y de Denuit, M. y Dhaene, J (2003) Sobre la caracterización de la comonotonicidad y Contramonotonicidad.

$W_2(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$  asociado con un vector  $U = (U_1, U_2)$  de una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre  $I$  y tal que  $U_1 = 1 - U_2$ . El conjunto  $\mathcal{C}_d$  es un conjunto convexo<sup>14</sup>.

Una combinación convexa de cópulas tiene la siguiente interpretación probabilística:

Combinación convexa de cópulas. Sea  $U^1$  y  $U^2$  dos variables d-dimensionales aleatorias sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  distribuido de acuerdo a las copulas  $C^1$  y  $C^2$ , respectivamente. Sea  $Z$  una variable aleatoria Bernoulli tal que  $P(Z=1) = \alpha$  y  $P(Z=2) = 1 - \alpha$  para alguna  $\alpha \in I$ . Supongamos que  $U^1$ ,  $U^2$  y  $Z$  son independientes. Ahora consideremos la variable aleatoria d-dimensional  $U^*$  donde  $U^* = \sigma_1(Z)U^1 + \sigma_2(Z)U^2$  para  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\sigma_i(x) = 1$  si y sólo si  $x = i$ ,  $\sigma_i(x) = 0$ . Entonces, se puede probar que  $U^*$  está distribuida de acuerdo con la copula  $\alpha C^1 + (1 - \alpha)C^2$ .

**Propiedades probabilísticas de las Cópulas.** De acuerdo con Jaworski et al (2009a) y Mai (2014) las cópulas son invariantes para una variable aleatoria  $X$  con respecto a cualquier aumento o rescalada de los componentes de  $X$ .

Sea  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  una variable aleatoria con distribución de frecuencias  $F$  y la cópula  $C$ . Sea  $T_1, T_2, \dots, T_d$  una función estrictamente creciente de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ . Entonces  $C$  es también la cópula de la variable aleatoria  $(T_1(X_1), T_2(X_2), \dots, T_d(X_d))$ . Por lo tanto, las cópulas que describen la dependencia de los componentes de un vector aleatorio son invariantes bajo transformaciones crecientes de cada coordinación.

---

<sup>14</sup> Berck y Sydsaeter (2010) un conjunto  $S \in \mathbb{R}^n$  es convexo si

$$x, y \in S \text{ y } \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in S.$$

**Ventajas de las cópulas.**<sup>15</sup> De acuerdo con Becerra (2008) las copulas tienen las siguientes ventajas: Dado que la cópula extrae la estructura de dependencia de la función de distribución multivariada, esta contiene mucha más información acerca de la dependencia entre d-variables aleatorias que la que puede contener un solo número.

La cópula tiene en cuenta todos los posibles casos de dependencia. Si existe dependencia perfecta positiva entre las variables aleatorias de interés, se dice que las variables aleatorias son “comonotónicas”; por su parte, cuando la dependencia es perfecta negativa, se dice que las variables son “contramonotónicas”. En ambos casos, estas situaciones pueden ser descritas por una cópula específica. Adicionalmente, cuando las variables aleatorias son independientes, su relación se resume en la cópula independiente.

La cópula es invariante ante transformaciones monótonas decrecientes, incluyendo las transformaciones afines positivas. Sean  $R_1, \dots, R_d$  variables aleatorias con funciones de distribución marginales  $F_1, \dots, F_d$  y cópula  $C$ . Si  $T_1, \dots, T_d$  son transformaciones monótonas crecientes, esta propiedad implica que  $R_1, \dots, R_d$  y  $T_1(R_1), \dots, T_d(R_d)$  tienen la misma cópula  $C$ . En efecto, si a  $R_i$  se le aplica una transformación monótona creciente  $T_i$ , entonces la función de distribución de  $T_i(R_i)$  es:  $P(T_i(R_i) \leq \tilde{r}_i) = P(R_i \leq T_i^{-1}(\tilde{r}_i))$ ;  $F_i \circ T_i^{-1}(\tilde{r}_i) = \tilde{F}_i(\tilde{r}_i)$ . Donde  $\tilde{r}_i \in \text{Rango}(T_i)$ .

### 4.3 Teorema de Sklar

El teorema de Sklar es la base para la construcción de la teoría de cópulas; sin él, el concepto de cópula sería solo un conjunto rico en uniones de funciones de distribución.

---

<sup>15</sup> Cuando las variables aleatorias no superan el supuesto de normalidad multivariada.

Teorema de Sklar: Sea  $F$  una función de distribución d-dimensional con marginales univariadas  $F_1, F_2, \dots, F_d$ . Sea  $A_j$  el rango de  $F_j$ ,  $A_j := F_j(\bar{\mathbb{R}})$  ( $j = 1, 2, \dots, d$ ). Entonces existe una cópula  $C$  tal que para todo  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \bar{\mathbb{R}}^d$ ,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)).$$

Tal  $C$  esta únicamente determinada sobre  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_d$  y, por lo tanto, es única cuando  $F_1, F_2, \dots, F_d$  son todas continuas.

El teorema anterior de acuerdo con Jaworski et al (2009a) y Nelsen (2006) también admite la siguiente implicación, usualmente muy importante cuando queremos construir modelos estadísticos considerando, separadamente, el comportamiento univariado de los componentes de un vector aleatorio y sus propiedades de dependencia al ser integrados a una cópula.

Si  $F_1, F_2, \dots, F_d$  son funciones de distribución univariadas y si  $C$  es cualquier d-cópula entonces la función  $F : \bar{\mathbb{R}}^d \rightarrow \mathbb{I}$ .

Definida para  $F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d))$  es una función de distribución d-dimensional con marginales  $F_1, F_2, \dots, F_d$ .

Específicamente, cuando  $F_i$  es continua para cada  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ ,  $C$  puede ser obtenida a través de la siguiente fórmula:  $C(u_1, u_2, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_d^{-1}(u_d))$ .

Donde  $F_i^{-1}$  denota la pseudo-inversa de  $F_i$  dada por  $F_i^{-1}(s) = \inf \{t | F_i(t) \geq s\}$ . Por lo tanto, las cópulas son esencialmente una manera de transformar la variable aleatoria  $(X_1, \dots, X_d)$  en otra variable aleatoria  $(U_1, \dots, U_d) = (F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$  teniendo las marginales distribuidas sobre  $\mathbb{I}$  y preservando la dependencia entre sus componentes.

En otro sentido, cualquier cópula puede ser combinada con diferentes funciones de distribución para obtener una función de distribución d-variada usando  $F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d))$ . En particular, las cópulas pueden servir para modelar situaciones donde se necesitan diferentes distribuciones para cada marginal, dando una alternativa válida para varias funciones de distribución multivariadas clásicas como la Gaussiana, Pareto, Gamma, etc.

El teorema de Sklar debe ser usado con precaución cuando las marginales tienen discontinuidades o saltos. De hecho, aún si existe una representación para una función de distribución conjunta no continua, esta no es única. En tales casos, el modelado y la interpretación de la dependencia a través de las cópulas es sujeto a precaución.

El teorema de Sklar y su consiguiente aplicación pueden ser formulados de manera análoga en términos de funciones de supervivencia<sup>16</sup> en lugar de funciones de distribución. Jaworski et al (2009a). Específicamente, dada una variable aleatoria  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  con función conjunta de supervivencia  $\bar{F}$  y funciones univariadas de supervivencia marginales  $F_i (i=1, 2, \dots, d)$ , para todo  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \bar{\mathbb{R}}^d$  se tiene que:  $\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \hat{C}(\bar{F}(x_1), \bar{F}(x_2), \dots, \bar{F}(x_d))$ .

Para alguna cópula  $\hat{C}$ , usualmente llamada cópula de supervivencia de  $X$  (esta cópula está asociada con la función de supervivencia  $X$ ). En particular, sea  $C$  la cópula de  $X$  y sea  $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$  un vector tal que  $U \sim C$ .

---

<sup>16</sup> Es recomendable leer el artículo de Mina-Valdez (2009) sobre el uso de funciones de supervivencia en las ciencias sociales. Discute el concepto y utilidad de las mismas para las ciencias sociales.

Entonces, tiene una  $\hat{C}(u) = \bar{C}(1-u_1, \dots, 1-u_d)$ , donde  $\bar{C}(u) = P(U_1 > u_1, \dots, U_d > u_d)$  es la función de supervivencia asociada con  $C$ , dada explícitamente por

$$C(u) = 1 + \sum_{k=1}^d (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} C_{i_1 i_2 \dots i_k}(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}),$$

con  $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$  denotando la marginal de  $C$  relacionada a  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ .

#### 4.4 Familias de cópulas

Las cópulas juegan un papel importante en la construcción de funciones de distribución multivariadas y, como consecuencia, tener a la mano una gran variedad de cópulas puede ser muy útil para construir modelos estocásticos teniendo diferentes propiedades, que son algunas veces indispensables en la práctica (ejemplo colas cargadas, asimetrías, etc.). Por lo tanto, se han llevado a cabo varias investigaciones para la construcción de diferentes familias de cópulas y sus propiedades. De acuerdo con Joe (1997) citado por Jaworski et al (2009a) una familia multivariada de cópulas  $\{C_\theta\}$ , donde  $\theta$  es un parámetro que pertenece a un subconjunto (usualmente, compacto<sup>17</sup>)  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$  ( $p \geq 1$ ).

#### Propiedades de las familias de cópulas:

**Interpretabilidad.** Los miembros de la familia deben tener alguna interpretación probabilística sugiriendo situaciones naturales donde la familia pueda ser considerada. Por ejemplo la familia de Cópulas Cuadras-Auge tiene una interpretación directa en términos de modelos de choque, asiendo esta clase de familia adecuadas para modelar situaciones donde un choque común tiene

---

<sup>17</sup> De acuerdo con Apóstol (2006:71) "un conjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  se llama compacto si, y sólo si, cada recubrimiento abierto de  $S$  contiene un subrecubrimiento finito; esto es, una subcolección finita que también recubra a  $S$ ".

consecuencias sobre un sistema compuesto por varios componentes (cartera de crédito, sistema de tiempo de vida, etc.).

**Flexibilidad y un gran rango de dependencia.** Los miembros de la familia deben describir diferentes tipos de dependencia, incluyendo la cópula independiente  $I_d$  y una dentro de los límites de la Frénchet-Hoeffding (posiblemente como un caso limitante con respecto a los parámetros).

**Facilidad de manejo.** Los miembros de la familia deben ser expresados en una forma cerrada o al menos, deben fácilmente ser simulables por medio de un algoritmo. Hay que notar, que muchos procedimientos de ajuste están basados en el hecho de que el ajuste de la familia puede ser rápidamente ejemplificado.

De acuerdo con Becerra (2008) las cópulas pueden ser agrupadas en diferentes categorías. Una primera categoría es la de las cópulas límite o cópulas “fundamentales”, ya que se encuentran asociadas con los casos extremos de dependencia: comonotonidad, contramonotonidad e independencia.

Una segunda categoría de agrupación comúnmente usada se encuentra asociada a la forma funcional de la cópula. Esta categoría identifica dos tipos de cópulas, las cópulas “explícitas”, aquellas que pueden ser expresadas a través de una forma funcional cerrada, o “implícitas” las cuales son derivadas de funciones de distribución multivariadas conocidas, aunque sus formas funcionales no son simples o cerradas. Ejemplos de cópulas explícitas se encuentran en las cópulas fundamentales, mientras que entre las cópulas implícitas se encuentran las cópulas derivadas de las funciones de distribución normal y  $t$  multivariada.

Por último la tercera categoría de agrupación depende directamente de las características particulares de las cópulas. Bajo esta categoría es posible identificar cuatro grandes grupos o familias de las cópulas.

De acuerdo con Jaworski et al (2009a) y Becerra (2008) se tienen las siguientes familias de cópulas:

**Familia de Cópulas Elípticas.** Las cópulas elípticas son aquellas asociadas a variables aleatorias cuya función de distribución multivariada es de la forma  $f(x', x)$ , por lo que las curvas de nivel de variables aleatorias que tengan este tipo de cópulas forman elipses. Bouyé et al (2000). Las dos cópulas más importantes de esta familia son la cópula normal (o gaussiana) y la cópula  $t$ -Student, las cuales se derivan de las funciones de distribución multivariada que poseen estos mismos nombres.

Un vector aleatorio  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  se dice tiene una distribución elíptica con vector medio  $\mu \in \mathbb{R}^d$ , matriz de covarianza  $\Sigma = (\sigma_{ij})$  y un generador  $g: [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ , y puede ser escrito como  $X \sim \mathcal{E}(\mu, \Sigma, g)$ , si puede ser expresado en la forma de  $X = \mu + RAU$ , donde  $AA^T = \Sigma$  es la descomposición de Cholesky de  $\Sigma$ ,  $U$  es un vector d-dimensional uniformemente distribuido sobre la esfera  $S^{d-1} = \{u \in \mathbb{R}^d : u_1^2 + \dots + u_d^2 = 1\}$ , y  $R$  es una variable aleatoria positiva independiente de  $U$ , con densidad dada para cada  $r > 0$ , por

$$fg(r) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} r^{d-1} g(r^2).$$

La función de densidad (si existe) de una distribución elíptica está dada, para cada  $x \in \mathbb{R}^d$ , por  $hg(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu))$ .

Por ejemplo, cuando  $g(t) = (2\pi)^{-d/2} \exp(-t/2)$ , entonces  $X$  tiene una distribución gaussiana multivariada. Similarmente,  $g(t) = c(1+t/V)^{-(d+v)/2}$ , para una constante  $c$  adecuada, genera la distribución multivariada  $t$ -Student con  $v$  grados de libertad.

Una de las características de una distribución elíptica es que la escala de componentes  $X_1 / \sqrt{\sigma_{11}}, \dots, X_d / \sqrt{\sigma_{dd}}$  está idénticamente distribuida de acuerdo a una función de distribución  $F_g$ . Este hecho representa limitaciones para el uso de dichas distribuciones al momento de modelar sistemas estocásticos cuando los

componentes no son similares. Para evitar esto, es útil calcular la cópula de una distribución elíptica y usarla, junto con algunas funciones de distribución marginales univariadas, para obtener modelos más flexibles. Estas distribuciones son llamadas comúnmente distribuciones meta-elípticas.

Sea  $X$  un vector elíptico aleatorio  $X \sim \mathcal{E}_d(\mu, \Sigma, g)$ . Supongamos que, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ ,  $(X_i / \sqrt{\sigma_{ii}}) \sim F_g$ . Llamamos cópula elíptica a la función de distribución

$$\left( F_g \left( \frac{X_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right), F_g \left( \frac{X_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right), \dots, F_g \left( \frac{X_d}{\sqrt{\sigma_{dd}}} \right) \right).$$

De acuerdo con Becerra (2008) la cópula gaussiana con matriz de correlación  $P$  tiene la forma:

$$C_P^{Ga}(u) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |P|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x' P^{-1} x\right) dx_1 \dots dx_d,$$

Donde  $\Phi_P$  es la función de distribución normal multivariada con matriz de correlaciones  $P \in \mathbb{R}^{d \times d}$  y  $\Phi^{-1}$  es la función de distribución inversa de la distribución normal estándar. Cherubini et al (2004).

La cópula  $t$ -Student con matriz de correlación  $P \in \mathbb{R}^{d \times d}$  y  $\nu > 0$  grados de libertad tiene la forma:

$$C_{\nu, P}^t(u) = t_{\nu, P}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d)) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right) |P|^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu\pi)^{d/2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} x' P^{-1} x\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} dx_1 \dots dx_d,$$

Donde  $t_{\nu, P}$  es la función de distribución  $t$ -Student multivariada con matriz de correlaciones  $P$  y  $\nu$  grados de libertad; y  $t_{\nu, P}^{-1}$  es la función de distribución inversa asociada a la distribución  $t$  univariada con  $\nu$  grados de libertad. Cherubini et al (2004).

Debido a que este tipo de cópulas está caracterizado principalmente por la matriz de correlaciones  $P$ , más el número de grados de libertad en el caso de la cópula  $t$ , las cópulas elípticas resultan atractivas en el mundo financiero, ya que en carteras conformadas por factores de riesgo que sigan una distribución elíptica se satisfacen las condiciones que garantizan la subaditividad del Valor en Riesgo ( $VaR_\alpha$ ) y el principio de diversificación. Becerra et al (2008).

**Familia de Cópulas Arquimedianas.** Llamamos generador arquimediano a cualquier función continua y decreciente  $\psi : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{I}$  que satisface la condición de  $\psi(0) = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$  y la cual es estrictamente decreciente sobre  $[0, \inf \{t | \psi(t) = 0\}]$ .

Por conveniencia,  $\psi(+\infty) = 0$  y  $\psi^{-1}(0) = \inf \{t \geq 0 | \psi(t) = 0\}$ , donde  $\psi^{-1}$  denota la pseudo inversa de  $\psi$ . Una Cópula  $d$ -dimensional es llamada Arquimediana si tiene la siguiente presentación, para todo  $u \in \mathbb{I}^d$  y para algún generador arquimediano  $\psi$ .  $C(u) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \psi^{-1}(u_2) + \dots + \psi^{-1}(u_d))$

Los siguientes resultados caracterizan a las cópulas Arquimedianas en términos de las propiedades de sus generadores. Sea  $\psi$  un generador arquimediano. Sea  $C_\psi$  la función dada por  $C(u)$ . Entonces  $C_\psi$  es una cópula  $d$ -dimensional si, y sólo si, la restricción de  $\psi$  para  $[0, \infty]$  es  $d$ -monótona, es decir satisface:  $\psi$  es diferenciable hasta el orden  $d-2$  en  $[0, +\infty]$  y la derivada satisface  $(-1)^k \psi^{(k)}(t) \geq 0$  para  $k \in \{0, 1, \dots, d-2\}$  para toda  $t > 0$ ;  $(-1)^{d-2} \psi^{(d-2)}$  es decreciente y convexo en  $[0, +\infty]$ .

**Ejemplos de cópulas Arquimedianas.** La mayoría de cópulas que pertenecen a esta familia son funciones de uno o dos parámetros, lo que si bien permite representar fácilmente diferentes tipos de dependencia, también implica una de sus mayores limitaciones, ya que resulta complicado describir relaciones de dependencia complejas con un número reducido de parámetros, especialmente en

dimensiones altas. Nelsen (2006). Cuatro son las cópulas más importantes de esta familia:

**Cópula Gumbel-Hougaard.** La expresión estándar para los miembros de esta

familia de d-cópulas es:  $C_{\theta}^{GH}(u) = \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^d (-\log(u_i))^{\theta}\right)^{1/\theta}\right)$ , donde  $\theta \geq 1$ .

Para  $\theta = 1$  obtenemos la cópula independiente como un caso especial, y el límite de  $C_{\theta}^{GH}$  para  $\theta \rightarrow +\infty$  es la copula comonotónica. El generador arquimediano de esta familia está dado por  $\psi(t) = \exp(-t^{1/\theta})$ .

**Cópula Mardia-Takahasi-Clayton.** La expresión estándar para los miembros de esta familia de d-cópulas es:

$$C_{\theta}^{MTC}(u, v) = \max\left\{\left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - (d-1)\right)^{-1/\theta}, 0\right\}, \text{ donde } \theta \geq -1/(d-1), \theta \neq 0.$$

El caso limite en donde  $\theta = 0$  corresponde a la cópula independiente.

El generador arquimediano de esta familia está dado por  $\psi_{\theta}(t) = (\max\{1 + \theta t, 0\})^{-1/\theta}$ .

Las cópulas de este tipo se pueden derivar de dos tipos de distribuciones multivariadas: Distribución de Pareto por Mardia y la distribución de Burr por Takahasi. Mucha gente se refiere a esta familia como cópulas de Clayton.

**Cópula Frank.** La expresión estándar de esta familia de d-cópula es

$$C_{\theta}^{Fr}(u) = -\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{\prod_{i=1}^d (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}}\right), \text{ donde } \theta > 0.$$

El caso limite en donde  $\theta = 0$  corresponde a  $\Pi_d$ . Para el caso de  $d = 2$ , el parámetro  $\theta$  puede ser extendido también al caso  $\theta < 0$ . Las cópulas de este tipo fueron introducidas por Frank (1969) en relación con un problema de funciones asociativas

sobre  $II$ . Estas son absolutamente continuas. El generador arquimediano está dado por:  $\psi_\theta(t) = -\frac{1}{\theta} \log(1 - (1 - e^{-\theta})e^{-t})$ .

**Cópula Clayton generalizada.** Esta es un ejemplo de cópula de Arquímedes de dos parámetros. El generador de esta cópula es  $\psi_\theta(t) = \theta^{-\delta} (t^{-\theta} - 1)^\delta$ , donde  $\theta > 0$  y  $\delta \geq 1$ .

La forma generalizada de esta cópula está dada por:

$$C^{GC}(u_1, u_2) = \left\{ \left[ (u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{1/\delta} + 1 \right\}.$$

Como se puede observar, si bien todas estas cópulas son arquimedias, describen tipos de dependencia completamente diferentes. Becerra et al (2008). La cópula Gumbel muestra dependencia en los extremos únicamente en la cola superior, mientras que la cópula Clayton la exhibe en la cola contraria. Por su parte, la cópula Frank no muestra dependencia en ninguna de las dos colas y la cópula Clayton generalizada muestra dependencia en los extremos para ambas colas, aunque pueden ser de intensidades diferentes.

**Familia de Cópulas EFGM.** Las llamadas distribuciones Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM) han sido consideradas por Morgenstern (1956) y Gumbel (1958) y desarrolladas por Farlie (1960). Sin embargo, la idea de considerar tales distribuciones se originaron en el trabajo de Eyraud (1936).

Sea  $d \geq 2$  y sea  $\mathcal{Q}$  la clase de todos los subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, d\}$  teniendo al menos 2 elementos. Trivialmente,  $\mathcal{Q}$  contiene  $2^d - d - 1$  elementos. Para cada  $S \in \mathcal{Q}$  asociamos un número real  $\alpha_S$ , con la convención de que, cuando  $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ,  $\alpha_S = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}$ .

Una cópula EFGM puede ser expresada de la siguiente manera:

$$C_2^{EFGM}(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \alpha_{12} (1 - u_1)(1 - u_2)), \text{ y}$$

$$C_3^{EFGM}(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2 u_3 [1 + \alpha_{12} (1 - u_1)(1 - u_2) + \alpha_{13} (1 - u_1)(1 - u_3) + \alpha_{23} (1 - u_2)(1 - u_3) + \alpha_{123} (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3)].$$

No es difícil demostrar que cualquier cópula EFGM es absolutamente continua con

función de densidad dada por:  $C_d^{EFGM}(u) = 1 + \sum_{S \in \mathcal{Q}} \alpha_s \prod_{j \in S} (1 - 2u_j)$ . Como consecuencia

el parámetro  $\alpha_s$  tiene que satisfacer la siguiente desigualdad:  $1 + \sum_{S \in \mathcal{Q}} \alpha_s \prod_{j \in S} \xi_j \geq 0$ .

Para cualquier  $\xi_j \in \{-1, 1\}$ . En particular se tiene que  $|\alpha_s| \leq 1$ . Las cópulas EFGM no permiten modelar una gran dependencia entre variables aleatorias.

#### 4.5 Construcción de Cópulas.

Varios modelos de construcción de cópulas se han desarrollado en los últimos años desde varias perspectivas. De una forma abstracta los modelos comienzan con una cópula conocida o algunas funciones auxiliares y generan en automático la nueva cópula. De acuerdo con Jaworski et al (2009a) y Nelsen (2006) se pueden distinguir tres tipos de construcción de cópulas.

**Construcción de cópulas con marginales dimensionales bajas.** Estas construcciones están estrictamente relacionadas con el problema original de Frénchet al considerar funciones de distribución con marginales fijas. En este contexto los resultados más interesantes se han obtenido por medio del método de condicionamiento, usado por Dall'Aglio et al (1991), Joe (1997) y Rüschendorf (1985). Un método muy poderoso introducido recientemente está basado en la idea de lo que se llama la construcción de cópulas por apareamiento.

**Transformación de Cópula a Cópula.** La construcción de este segundo tipo está basado en la transformación de d-cópulas en otras d-cópulas teniendo posiblemente

características adicionales (por ejemplo, un mayor número de parámetros). Específicamente los siguientes casos han sido estudiados con profundidad.

**Sumas ordinarias.** Esta construcción fue introducida bajo el marco algebraico, llamado teoría de semigrupos<sup>18</sup>; para después ser traducido al lenguaje de normas triangulares (t-normas)<sup>19</sup>, las cuales son operaciones binarias sobre  $I$  que son asociativas, conmutativas, monótonas y con elemento neutro 1, finalmente esto también se aplicó a las cópulas bivariadas (lo cual de hecho, puede ser visto como un caso especial de operaciones binarias sobre  $I$ ).

Las sumas ordinarias como método de construcción de cópulas está basado en los estudios de Alsina et al (2006), Klement et al (2000) y Schweizer (1983). Una extensión de la construcción de cópulas con sumas ordinarias sobre  $\mathcal{E}_d$  ha sido recientemente discutida por Jaworski et al (2009b), Jaworski (2008) y Mesiar (2010). Este método esencialmente se basa en un procedimiento de parche, consistente en redefinir el valor que una cópula asume en una d-caja B de  $I^d$  rescalando a una nueva cópula.

De acuerdo con Mesiar (2010) tenemos el siguiente resultado: Sea  $\mathcal{J}$  un subconjunto finito y contable de  $\mathbb{N}$  y sea  $[a_k, b_k]_{k \in \mathcal{J}}$  una familia de subintervalos de  $I$  indexados por  $\mathcal{J}$  y sea  $(C_k)_{k \in \mathcal{J}}$  una familia de cópulas en  $\mathcal{E}_d$  también indexada por  $\mathcal{J}$ . Se requiere que cualquiera de los dos intervalos  $[a_k, b_k]_{k \in \mathcal{J}}$  tenga al menos un punto final en común.

---

<sup>18</sup> Revisar Kolman et al (1997) para un entendimiento de la teoría de semigrupos y operaciones binarias.

<sup>19</sup> Revisar el trabajo de Barragán (2009) para el estudio y aplicación de las T-Normas.

Entonces la suma ordinaria de  $C$  de  $(C_k)_{k \in \mathcal{J}}$  con respecto a la familia de intervalos  $[a_k, b_k]_{k \in \mathcal{J}}$  es definida la d-cópula, para todo  $u \in I^d$  por:

$$C(u) := \begin{cases} a_k + (b_k - a_k) C_k \left( \frac{\min(u_1, b_k) - a_k}{b_k - a_k}, \dots, \frac{\min(u_d, b_k) - a_k}{b_k - a_k} \right), \\ \text{if } \min\{u_1, u_2, \dots, u_d\} \in [a_k, b_k] \text{ para algún } k \in \mathcal{J}, \\ \min\{u_1, u_2, \dots, u_d\}, \text{ cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Para tal  $C$  la podemos escribir de la siguiente manera

$$C = (\langle a_k, b_k, C_k \rangle)_{k \in \mathcal{J}} = \bigoplus_{\{(a_k, b_k)_{k \in \mathcal{J}}\}} C_k.$$

**Distorsión.** Dada una cópula  $C$  y una biyección incremental  $\psi: I \rightarrow I$ , la distorsión de  $C$  esta definida como la función  $C_\psi: I^d \rightarrow I$ ,

$$C_\psi(u) = \psi(C(\psi^{-1}(u_1), \psi^{-1}(u_2), \dots, \psi^{-1}(u_d))).$$

Tal transformación se ha originado del estudio de las funciones de distribución probabilísticas distorsionadas (especialmente, la distorsión de potencias), y ha sido considerada por Alvoni et al (2009), Charpentier (2008), Durante et al (2010), Durante et al (2005), Durrleman et al (2000), Frees et al (1998), Genest et al (2001), Klement et al (2007), Morillas (2005) y Nelsen et al (2006). En el contexto de obligaciones de deuda colateralizada sintética, la distorsión de cópulas se ha usado recientemente para producir distribuciones de pérdidas de colas pesadas en carteras. Crane et al (2008).

**Composición puntual de cópulas.** Dadas dos cópulas  $A$  y  $B$  en  $\mathcal{C}_d$  definimos la composición de  $A$  y  $B$  a través de una función adecuada  $H: I^2 \rightarrow I$ ,  $f_i: I \rightarrow I$  y  $g_i: I \rightarrow I$  ( $i = 1, 2, \dots, d$ ), y cualquier mapeo  $C_{A,B}: I^d \rightarrow I$  dado por  $C_{A,B}(u) = H(A(f_1(u_1), \dots, f_d(u_d)), B(g_1(u_1), \dots, g_d(u_d)))$ .

**Mezcla de cópulas.** Estas construcciones están basadas en la transformación de una cópula  $C$  en otra cópula por medio de un rearrreglo adecuado de la distribución de la masa original de  $C$ . La idea se origina de la noción de mezcla de mínimos introducida por Mikusinski (2009) y está relacionada con algunas modificaciones de la cópula  $M_d$  Mikusinski (1992). Una generalización reciente es discutida por Durante (2009).

**Construcción geométrica de cópulas.** El tercer tipo de construcción se refiere a métodos para originar cópulas comenzando con alguna información sobre su estructura (por ejemplo, apoyo, diagonales, secciones). Para una buena revisión de esta construcción debemos referirnos a Nelsen (2006): Cópulas con apoyo dado; Frederick (2005): Cópulas con un horizonte o sección vertical dado; Durante (2007); Klement (2007); Rodríguez-Lallena (2009a, 2009b) y Ubeda-Flores (2008): Cópula con secciones diagonales; De Baets et al (2007, 2009); Durante et al (2007, 2008); Erderly et al (2006); Jaworski (2009); Mayor (2008) y Nelsen (2008); y cópulas con secciones afines dadas Klement (2007) y Quesada-Molina (2008).

#### **4.6 Cópulas y conceptos teóricos asociados.**

Para Carol (2008) en la práctica se da que los rendimientos de las distribuciones marginales son asimétricos, la dependencia es no lineal o ambos. Esto significa que la correlación no nos sirve como una medida de dependencia, porque solo aplica cuando las variables aleatorias tienen una distribución elíptica multivariada. La alternativa es el uso de las cópulas, la cual es una herramienta flexible para la construcción de distribuciones conjuntas. Típicamente, el uso de una cópula para construir distribuciones conjuntas da una forma funcional que captura el comportamiento observado de los retornos financieros de los activos más allá de los de una distribución elíptica.

**Simulación de una variable aleatoria.** Para entender el concepto de cópula, reconsideremos el método usado para simular valores, dada una función de

distribución. De acuerdo con Carol (2008) las siguientes son definiciones y propiedades de las funciones univariadas y continuas de distribución:

Sea  $X$  una variable aleatoria continua con dominio  $D$ . Una función de distribución  $F$  en  $X$  es continua, monótona y creciente de  $D$  a  $[0,1]$  tal que  $F(x) = P(X < x)$ .

Por lo tanto para cualquier  $x \in D$ , la probabilidad de que  $X$  sea menor que  $x$  está dada por el valor de función de distribución en  $x$ . Asumiendo, si existe, la función de distribución inversa  $F^{-1}:[0,1] \rightarrow D$ , es definida como la inversa de la función,  $F^{-1}(F(x)) = x$  para toda  $x \in D$ .

Asumiendo que  $F$  es diferenciable sobre  $D$ , su función de densidad está definida como la derivada de la función de distribución,  $f(x) = F'(x)$ . Donde  $F$  es creciente monótona,  $f(x) \geq 0$ .

**Concepto de cuantil.** Para Carol (2008) el cuantil de una variable aleatoria continua  $X$  asociada con una probabilidad  $\alpha \in [0,1]$ ; el cuantil  $\alpha$  de  $X$  es el valor  $x_\alpha$  de  $X$  tal que  $P(X < x_\alpha) = \alpha$ . Los cuantiles se usan para simulaciones. Ejemplo: Simular un número aleatorio  $u$  para representar una probabilidad. Denotamos con  $u$  porque es una salida aleatoria de una distribución uniforme. Ahora usamos la inversa de la función de distribución para encontrar el correspondiente cuantil. Sea  $x = F^{-1}(u)$ , las variables uniformes tienen funciones de distribución lineal. En particular, la variable uniforme estándar  $U \sim U[0,1]$  tiene la propiedad de  $P(U < u) = u$ . Ahora para toda  $u \in [0,1]$ ,  $P(F(X) < u) = P(X < F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u$ .

**Distribución condicional de la cópula y sus curvas cuantiles.** De acuerdo con Carol (2008) al igual que una función de distribución conjunta, las cópulas tienen distribuciones condicionales. Una distribución condicional es la distribución de una variable dado que las otras toman algunos valores fijos específicos. La única diferencia entre la distribución de una cópula condicional y la distribución ordinaria

es que las marginales de cada cópula están uniformemente distribuidas por definición. Sin embargo, la distribución de la cópula condicional puede ser un poco diferente para diferentes cópulas. La distribución condicional de una cópula, usualmente expresada en términos de su función de densidad, es una de las partes más útiles de una cópula para muchas aplicaciones financieras.

Para definir la distribución condicional de una cópula debemos considerar, por simplicidad, una cópula bivariada  $C(u_1, u_2)$ . Entonces tenemos dos distribuciones condicionales de la cópula y están definidas por las funciones:

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = P(U_1 < u_1 | U_2 = u_2) \text{ y } C_{2|1}(u_2|u_1) = P(U_2 < u_2 | U_1 = u_1).$$

Las distribuciones condicionales son obtenidas tomando las primeras derivadas de la cópula con respecto a cada variable,  $C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2}$  y  $C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}$ .

Podemos describir la distribución condicional por su cuantil asociado. Para alguna probabilidad fija  $q$ , tenemos  $C_{2|1}(u_2|u_1) = q$ . Esto define a  $u_2$  como una función de  $q$  y  $u_1$ . Por lo que podemos escribir  $u_2 = g_q(u_1)$ , donde  $g_q$  es una función explícita o implícita del cuantil de la curva de la cópula.

**Dependencia de cola (Tail dependence).** De acuerdo con Carol (2008) la dependencia de cola examina la concordancia de las colas (valores extremos) de la distribución conjunta. Para las variables independientes la densidad de la copula se encuentra por todos lados. Las densidades de las cópulas no se ven como funciones ordinarias de densidad, las cuales son siempre positivas y tienen valores grandes en el centro. De hecho, es un poco la inversa: la densidad de la cópula que usamos en finanzas tiene valores en las esquinas, indicando la importancia de la dependencia de las colas.

Definimos el  $i, j$ -ésimo coeficiente de la dependencia de cola inferior como:

$$\lambda_{ij}^l = \lim_{q \downarrow 0} P(X_i < F_i^{-1}(q) | X_j < F_j^{-1}(q)), \text{ siempre y cuando el límite exista.}$$

Este representa la probabilidad condicional de que una variable tome valores en la cola inferior, dado que la otra variable toma valores en la cola superior. Donde el coeficiente es una probabilidad condicional,  $\lambda_{ij}^l \in [0,1]$ . Se dice que la cópula tiene una dependencia de cola baja para  $X_i$  y  $X_j$  cuando  $\lambda_{ij}^l > 0$ , y el valor del coeficiente de dependencia es el máximo.

Similarmente definimos el  $i, j$ -ésimo coeficiente de la dependencia de cola superior como:  $\lambda_{ij}^u = \lim_{q \uparrow 0} P(X_i > F_i^{-1}(q))$ . Siempre y cuando el límite exista. Este representa la probabilidad condicional de que una variable tome valores en la cola superior, dado que la otra variable toma valores en la cola inferior.

Donde el coeficiente es una probabilidad condicional,  $\lambda_{ij}^u \in [0,1]$ . Se dice que la cópula tiene una dependencia de cola alta para  $X_i$  y  $X_j$  cuando  $\lambda_{ij}^u > 0$ , y el valor del coeficiente de dependencia es el máximo.

Una cópula tiene dependencia de cola simétrica si  $\lambda_{ij}^l = \lambda_{ij}^u$  para todo  $i, j$ , y dependencia asimétrica de cola si los coeficientes de dependencia de cola superior y de cola inferior son diferentes.

**Límites de la dependencia.** Introducimos algunas cópulas especiales como las cópulas “análogas” de correlación cero y la de correlación entre -1 y 1. La versión multivariada  $C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F_1(x_1)F_2(x_2)$  es la cópula independiente que aplica en todos los casos en que las variables aleatorias son independientes. Esto puede ser escrito como  $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 u_2 \dots u_n$ . Por lo tanto, la función de distribución conjunta es el producto de las distribuciones marginales. La cópula Fréchet de límite superior está dada por  $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

Este es el límite superior de todas las posibles cópulas, en el sentido de que ninguna otra cópula puede tomar un valor más grande que el valor de esta cópula, y cuando

las variables aleatorias tienen el límite superior de Frénchet se dice que se tiene una dependencia positiva perfecta.

La cópula de límite inferior de Frénchet es una cópula para  $n=2$ . Esta definida como  $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_n - n + 1, 0)$ . Ninguna cópula puede tomar un valor menor que este valor, y corresponde al caso en donde las variables aleatorias tienen una dependencia negativa perfecta.

Decimos que una cópula captura una dependencia positiva o negativa entre variables si tiende a uno de los límites de Frénchet. Pero la cópula gaussiana no tiende al límite superior de Frénchet cuando la correlación se incrementa a 1, y tampoco tiende al límite inferior de Frénchet cuando la correlación disminuye a -1.

#### 4.7 Calibración de cópulas.

La conexión entre correlación de rango y ciertos parámetros de copulas bivariadas es importante para calibrar los parámetros de las cópulas, existiendo para ello también técnicas de calibración basadas en el método de estimación de máxima verosimilitud.

**Correspondencia entre cópulas y correlación de rangos.** De acuerdo con Carol (2008) se puede demostrar que la tau  $\tau$  de Kendall, tiene relación directa con una

cópula de función bivariada  $C(u, v)$  como sigue:  $\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1$ .

Por lo tanto, si la cópula depende de un parámetro entonces proporciona un medio para calibrar este parámetro usando una muestra estimada de la correlación de rango. La cópula normal bivariada tiene un solo parámetro, la correlación  $\rho$ , y la

identidad se expresa como  $\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau\right)$ . Esto también aplica a la cópula  $t$ -Student

y otras cópulas elípticas. Hay una relación entre esta copula y la rho de Spearman

$\rho$  usando:  $\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3$ , Probando que  $\rho = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} \rho\right)$ . Finalmente para

la cópula aqrimediana tenemos  $\tau = 1 + 4 \int_0^1 \left( \frac{\psi(x)}{\psi'(x)} \right) dx$ . Aplicando lo anterior a la cópula

de Gumbel obtenemos  $\tau = 1 - \delta^{-1} \Rightarrow \delta = (1 + \tau)^{-1}$ , y para la cópula Clayton

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \Rightarrow \alpha = 2\tau(1 + \tau)^{-1}.$$

**Métodos de calibración de cópulas por estimación de máxima verosimilitud (EMV).** De acuerdo con Carol (2008) es posible calibrar los parámetros de las cópulas haciendo la densidad de la cópula tan cercana como sea posible a la densidad de cópula empírica. Sin embargo, la densidad de la cópula empírica puede ser tan sensible que cambios pequeños pueden provocar cambios grandes en la calibración de los parámetros. Por lo tanto la densidad de cópula empírica es usada para juzgar la bondad de ajuste de la cópula estimada.

**Modelo general de calibración de cópulas (EMV):** De acuerdo con Carol (2008) primero describimos el algoritmo de calibración en términos generales. Supongamos que la densidad conjunta está definida por  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n) c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$  y especificamos los parámetros de las marginales y de la cópula. Por simplicidad suponemos que cada marginal tiene solo un parámetro  $\alpha_i$ , pero lo siguiente puede ser fácilmente generalizado a los casos en donde las marginales tienen un vector con parámetros. Sean las marginales de densidad y distribución definidas como  $f_i(x_i; \alpha_i)$  y  $F_i(x_i; \alpha_i)$  respectivamente y reescribimos la densidad conjunta de arriba como

$$f(x_1, \dots, x_n; \alpha, \theta) = c(F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_n(x_n; \alpha_n); \theta) \prod_{i=1}^n f_i(x_i; \alpha_i).$$

Donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es el vector de los parámetros de las marginales y  $\theta$  es el vector de los parámetros de la cópula.

Obtenemos la siguiente función de máxima verosimilitud

$$\ln L(\alpha, \theta; x_1, \dots, x_T) = \sum_{t=1}^T \left( \ln c(F_1(x_{1t}; \alpha_1), \dots, F_n(x_{nt}; \alpha_n); \theta) + \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{it}; \alpha_i) \right).$$

Donde  $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{nt})$  es el vector renglón de las observaciones de las  $n$  variables aleatorias en el tiempo  $t$  en una muestra de variables de series de tiempo. Y podemos reescribir la ecuación anterior como sigue:

$$\ln L(\alpha, \theta; x_1, \dots, x_T) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}; \alpha_1), \dots, F_n(x_{nt}; \alpha_n); \theta) + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_{it}; \alpha_i).$$

La máxima verosimilitud se puede obtener de dos formas: Calibrando los parámetros para cada densidad marginal, individualmente usando el método de estimación de máxima verosimilitud en la manera usual. Esto es, para cada  $\hat{\alpha}_i$  en

el vector de máxima verosimilitud estimar  $\hat{\alpha}$  resolviendo  $\max_{\alpha_i} \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_{it}; \alpha_i)$ , para

$i = 1, \dots, n$ . Calibrando los parámetros de la cópula resolviendo

$$\max_{\theta} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}; \alpha_1), \dots, F_n(x_{nt}; \alpha_n); \theta)$$

## **Conclusiones.**

Después de realizar una revisión de literatura exhaustiva y de recabar información suficiente que permitiese documentar las características y propiedades de la metodología de cópulas, para resolver el problema de cálculo de la matriz de varianzas-covarianzas, sin considerar las limitantes del coeficiente de correlación de Pearson se obtuvo lo siguiente:

La asociación de una variable de rendimiento con otras variables de rendimiento, en una cartera de inversión, juega un papel relevante, pues tiene un impacto directo en los rendimientos así como en las pérdidas esperadas.

El coeficiente de correlación usado en la metodología de Harry Markowitz para el cálculo de la matriz de varianzas-covarianzas solamente contempla una relación lineal entre las variables mientras que en la metodología de cópulas, las marginales que integran la función conjunta pueden cumplir, o no, el criterio de normalidad multivariable y además seguir diferentes procedimientos para obtener un índice elíptico de independencia. Esto último, explica mejor el comportamiento e influencia por variables microeconómicas y macroeconómicas.

En el presente análisis se obtuvo que la metodología de cópulas es más adecuada para el cálculo de la matriz de varianzas-covarianzas, porque es invariante ante transformaciones monótonas crecientes y decrecientes de las variables aleatorias que componen dicha matriz. Toma en cuenta los posibles casos de dependencia entre las variables de rendimientos, los cuales se pueden modelar a través de una cópula específica. En el caso de mercados emergentes, como el mexicano, resulta conveniente utilizar esta metodología dados los diferentes escenarios económicos de inversión (crecimiento del Producto Interno Bruto por debajo de lo planeado, aumento de la inflación debido a factores estructurales y de reforma económica, social y política, baja del precio del crudo mexicano, recortes al gasto corriente, etc.).

El resultado del comparativo entre ambas metodologías (Cópulas-Harry Markowitz) muestra la ventaja de la primera respecto de la segunda para el cálculo de la matriz de varianzas-covarianzas, pues tiene la libertad de especificar las marginales y así obtener una distribución empírica, o cualquier distribución paramétrica, que se ajuste a la información del mercado de valores en el que se esté creando la cartera de inversión, eliminando así la restricción de normalidad para las marginales.

## Bibliografía.

- [01] Alsina, C., Frank, M., Schweizer, B. (2006). Associative Functions Triangular Norms and Copulas, Estados Unidos: World Scientific Publishing Co.
- [02] Alvoni, E., Papini, P. y Spizzichino, F. (2009). On a class of transformations of copulas and quasi copulas, Fuzzy Sets Syst 130(3).
- [03] Apóstol, T. (2006). Analisis Matemático, Segunda Edición, España: Editorial Reverte
- [04] Barragán, A. (2009). Síntesis de Sistemas de Control Borroso estables para el Diseño, España: Tesis para obtener el grado de Doctor, Corrector José Manuel Andújar Universidad de Huelva.
- [05] Becerra, O. y Melo, L. (2008). Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones, Borradores de economía No. 489, Bogotá, Colombia: Banco de la Republica de Colombia.
- [06] Berck, P. y Sydsaeter, K (2010). Economics Mathematical Manual, Estados Unidos: Springer.
- [07] Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. y Roncalli, T. (2000). Copulas for Finance- A Reading Guide and Some Applications. Recuperado de <http://ssrn.com/abstract=1032533> el día 20 de Julio de 2015.
- [08] Boy, S y Vandenberghe, L. (2009). Convex Optimization, New York: Cambridge University Press.
- [09] Campolieti, G y Makarov, R. (2014). Financial Mathematics a comprehensive Treatment, New York USA: Chapman & Hall/CRC, Financial Mathematics Series.
- [10] Capéraà, P., Fourgères, A. Y Genest, C. (2000). Bivariate Distributions with Given Extreme Value Atractor, Journal of Multivariate Analysis 72. Recuperado de [http://ac.els-cdn.com/S0047259X99918456/1-s2.0-S0047259X99918456-main.pdf?\\_tid=7de18a30-a685-11e5-ba6f0000aacb35e&acdnat=1450552977\\_b39e7af2558b4bb7376538b5949542fb](http://ac.els-cdn.com/S0047259X99918456/1-s2.0-S0047259X99918456-main.pdf?_tid=7de18a30-a685-11e5-ba6f0000aacb35e&acdnat=1450552977_b39e7af2558b4bb7376538b5949542fb) el día 20 de Julio 2015.

- [11] Carol, A. (2008). Market Risk Analysis, Volume II, Practical Financial Econometrics, West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd.
- [12] Charpentier, A. (2008). Dynamic dependence ordering for Archimedean copulas and distorted copulas, Prague: Kybernetika 44(6).
- [13] Cherubini, U; Luciano, E. y Vecchiato, W. (2004). Copula Methods in Finance, West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd.
- [14] Chong, E. y Zak, S. (2001). An Introduction to Optimization. Second Edition New York: A Wiley-Interscience Publications.
- [15] Christou, N. (2008). Enhancing the Teaching of Statistics: Portfolio Theory, an Application of Statistics in Finance, Los Angeles, Estados Unidos: Journal of Statistics Education, Vol. 16, recuperado de [www.amstat.org/publications/jse/v16n3/christou.html](http://www.amstat.org/publications/jse/v16n3/christou.html) el día 25 Julio de 2015.
- [16] Crane, G. y Van der Hoek, J.(2008). Using distortions of copulas to price synthetic CDOs, Insurance Mathematics and Economics 42(3).
- [17] Dall'Aglio, G., Kotz, S. y Salinetti, G (1991). Advances in Probability Distributions with Given Marginals: Beyond the Copulas, Italia: Departamento de Estadística Universidad Sapienza, Springer Science Business Media, B.V.
- [18] De Baets, B, De Meyer, H., Mesiar, R. (2007). Asymmetric semilinear copulas, Prague: Kybernetika.
- [19] De Baets, B., De Meyer, H., Ubeda-Flores, M. (2009). Opposite diagonal sections of quasi-copulas and copulas, Int. J. Uncertain Fuzziness Knowl-Base Systems 17.
- [20] Denuit, M. y Dhaene, J. (2003). Simple Characterization of comonotonicity and countermonotonicity by extremal correlations. Bélgica: Belgican Actuarial Bulletin 3(1).
- [21] Dhaenne, J., Denuit, M., Goovaerts, M., Kaas, R. y Vyncke, D. (2002). The concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Theory. Estados Unidos: Insurance: Mathematics and Economics Volume 31, tomo 1.
- [22] Durante, F. y Sempi, C. (2005). Copula and semicopula transforms, Int J Math, Math Sci 352(2).

- [23] Durante, F., Forschi, R y Sarkoci, P (2010). Distorted copulas: construction and tail dependence, *Common Statistics Theory Methods* 37(18).
- [24] Durante, F., Kolesánová, A., Mesiar, R. y Sempi, C. (2007). Copulas with given diagonal sections: novel constructions and applications. *Int. J. Uncertain Fuzziness Knowl-Base Systems* 15.
- [25] Durante, F., Sarkoci, P. y Sempi, C. (2009). Shuffles of copulas, *Mathematics analisis* 352(2).
- [26] Durreleman, V. Nikeghbali, A. y Roncalli, T (2000). A simple transformation of copulas. Recuperado de [http://www.maths-fi.com/malliavin/A\\_simple\\_transformation\\_of\\_copulas\\_07\\_31\\_2000.pdf](http://www.maths-fi.com/malliavin/A_simple_transformation_of_copulas_07_31_2000.pdf) el día 25 de julio 2015.
- [27] Elton, E., Brown, S., Gribler, M. y Goetzmann, W. (2014). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 9 Edition Estados Unidos: Wiley & Sons.
- [28] Erderly, A. y González-Barrios, J. (2006). On the construction of families of absolutely continuous copulas with given restrictions, *Commun Statistics Theory Methods* 35.
- [29] Eyraud, H. (1936). *Les principes de la mesure des correlations*, France: University of Lyon III.
- [30] Farlie, D. (1960). The performance of some correlations coefficients for a general bivariate distribution, Estados Unidos: *Biometrika* 47.
- [31] Fragkiskos, A.(2014). What is a portfolio diversification? *Alternative Investment Analisis review* recuperado SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2331475> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2331475> el día 23 de agosto 2015.
- [32] Franco-Arbeláez, L; Avendaño, C. y Barbutín, H. (2011). Modelo de Markowitz y Modelo de Black- Litterman: la optimización de portafolios de inversión. *Revista Tecnológicas* No 26.
- [33] Fredricks, G., Nelsen, R. y Rodríguez-Lallena, J. (2005). Copulas with fractal supports, *Insur. Math. Econ.* 37

- [34] Frees, E. y Valdez, E. (1998). Understanding relationships using copulas, *American Society of Actuary* 2(1).
- [35] Garza, R. (2009). *La Teoría de Carteras en el Mercado Mexicano de Capitales*. México: Editorial Lulú.
- [36] Genest, C y Rivest L. (2001). On the multivariate probability integral transformation, *Statistics and Probability lectures* 53(4).
- [37] González, M (2012). *Análisis Real*, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.
- [38] Gumbel, E. (1958). Distributions à plusieurs variables dont les marges sont données, *París: Real Academia de Ciencias de Paris*. 246.
- [39] Jaworski, P. (2009a). On Copulas and their diagonals, *Science information* 179(17).
- [40] Jaworski, P. y Rychlik, T. (2008). On distributions of order statistics for absolutely continuous copulas with applications to reliability, *Prague: Kybernetika* 44(6).
- [41] Jaworski, P.; Durante, F.; Härdle, W. y Rychlik, T. (2009b). *Copula Theory and its applications*, New York, USA: Springer.
- [42] Joe, H.(1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. London: *Monographs in Statistics and Applied Probability* Chapman and Hall.
- [43] Kachapova, F. (2013). *Mathematical Models in Portfolio Analysis*, Estados Unidos: [bookboon.com](http://bookboon.com).
- [44] Klement, E. y Kolesánová, A. (2007). Intervals of 1-Lipschitz aggregation operators, quasi copulas, and copulas with given affine section, *Monasth: Math* 152.
- [45] Klement, E., and Mesiar, R. (2000). *Triangular Norms*. Trends in Logic Dordrecht: *Studia Logica Library* vol. 8 Kluber Academic Publishers.
- [46] Knight, J. y Satchell, S. (2002). *Performance Measurement in Finance: Firms, Funds and Managers*. Estados Unidos: Butterworth-Heinemann Finance, Quantitative Finance Series.
- [47] Kole, E., Koedijk, K., y Verbeek, M. (2007). Selecting Copulas for Risk Management. *Journal of Finance* 31. Recuperado de

<http://down.cenet.org.cn/upfile/36/20071220171222169.pdf> el día 17 de Noviembre 2015.

[48] Kolman, B., Busby, R. y Ross, S. (1997). Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación, Tercera Edición, México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

[49] Kristjanpoller, W. y Liberona, C. (2010). Comparación de modelos de predicción de retornos accionarios en el Mercado Accionario Chileno: CAPM, FAMA y French y Reward Beta. Suplemento vol. 7, Núm. 1.

[50] Le Sourd, V. (2007). Performance Measurement for Traditional Investment, Singapur: EDHEC Business School Risk and Asset Management Research Center.

[51] Mai, J y Scherer, M. (2014). Financial Engineering with Copulas Explained, New York, USA: Palgrave Macmillan.

[52] Malevergne, Y. y Sornette, D. (2003). Testing the Gaussian copula hypothesis for financial assets dependences. Quantitative Finance, Taylor & Francis (Routledge) 3 (4), recuperado de

[https://hal.inria.fr/file/index/docid/520539/filename/Gaussian\\_copula\\_article.pdf](https://hal.inria.fr/file/index/docid/520539/filename/Gaussian_copula_article.pdf) el día 15 de Diciembre, 2015.

[53] Mayes, T. R. y Shank, T.M. (2010). Análisis financiero con Microsoft Excel 5a Ed., México, D.F.: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

[54] Mayor, G., Mesiar, R. y Torrens, J. (2008). On quasi-homogeneous copulas, Prague: Kybernetika 44(6).

[55] Medvedev, F. (1992). Condiciones de compacidad de Ascoli-Arzelá, Moscú: Instituto de Historia de la Ciencia y la Tecnología vol. 15.

[56] Mesiar, R y Sempi, C. (2010). Ordinal Sums and idempotents of copulas, Aequationes Math 79.

[57] Mikunsinski, P. y Taylor, M. (2009). Some aproximations of n-copulas, Metrika.

[58] Mikunsinski, P., Sherwood, H. y Taylor, M. (1992). Shuffles of Min, Stochastica 13(1).

- [59] Mina-Valdez, A. (2009). Uso de las funciones de supervivencia en las ciencias sociales y en los estudios de población. Aplicación al caso de México, México: Scielo vol. 15 no 61.
- [60] Morillas, P. (2005). A method to obtain new copulas from a given one, *Metrika* 61(2).
- [61] Morgenstern, D. (1956). Einfache Beispiele zweidimensionaler Verteilungen *Mitteilungsbl: Mathematics and Statistics* 8.
- [62] Morningstar (2009). *Modern Portfolio Theory (MPT) Statistics* Estados Unidos: Morningstar, Methodology Paper recuperado de [http://corporate.morningstar.com/US/documents/MethodologyDocuments/MethodologyPapers/MorningstarMPTStatistics\\_Methodology.pdf](http://corporate.morningstar.com/US/documents/MethodologyDocuments/MethodologyPapers/MorningstarMPTStatistics_Methodology.pdf) el día 13 de Septiembre, 2015.
- [63] Nelsen R. (2006). *An introduction to Copulas* 2do Ed., Portland USA: Springer.
- [64] Nelsen, R., Quesada-Molina, J., Rodríguez-Lallena, J. y Ubeda-Flores, M. (2008). On the construction of copulas and quasi-copulas with given diagonal sections, *Insur. Math. Econ.* 42.
- [65] Nielsen, L. y Vassalou, M. (1998). *Performance Measures for Dynamic Portfolio Management*, Francia: INSEAD 98/25/FIN.
- [66] Nocedal, J. y Wright, S. (2006). *Numerical Optimization Second Edition*, Estados Unidos: Springer.
- [67] Peterson, P y Fabozzi, F. (2010). *The Basics of Finance: An Introduction to Financial Markets, Business Finance, and Portfolio Management*. Estados Unidos: John Wiley and Sons, Inc.
- [68] Quesada-Molina, J., Saminger-Platz, S. y Sempì, C. (2008). Quasi-copulas with a given subdiagonal section, *Nolier anal.* 69(12).
- [69] Rodríguez-Lallena, J (2009a). A class of copulas with piecewise linear horizontal sections, *J. Stat. Plan. Infer.* 139(11).
- [70] Rodríguez-Lallena, J. y Ubeda-Flores, M. (2009b). Multivariate copulas with quadratic sections in one variable, *Metrika*.

- [71] Rojas, S. y Ruiz J. (2011). Medidas de rendimiento: analisis en el Mercado de Portafolios Recomendadas en Chile, Chile: Universidad de Chile, Facultad de Economía y Negocios.
- [72] Rüschenndorf, L. (1985). Construction of multivariate distribution with given Marginals, Italia: Instituto de Estadística Matemática 37(2).
- [73] Schweizer, B., Sklar, A. (1974). Probabilistics Metric Spaces New York: North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics. North-Holland Publishing Co.
- [74] Shahid, M. (2007). Measuring Porfolio performance, Suiza: Uppsala University Tesis para obtener el grado en Maestría en Finanzas Matemáticas, Examinador Johan Tysk
- [75] Ubeda-Flores, M. (2008). Multivariate copulas with cubic sections in one variable J., Nonparametric Statistics 20(1)