



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio de flujo transversal de energía como función
de la carga topológica en vórtices ópticos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

ESTEBAN GÓMEZ LÓPEZ

ASESORA

DRA. KAREN PATRICIA VOLKE SEPÚLVEDA

Mayo de 2016

Ciudad Universitaria, CDMX





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Gómez

López

Esteban

55 56 84 41 33

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Física

308506983

2. Datos del tutor

Dra

Karen Patricia

Volke

Sepúlveda

3. Datos del sinodal 1

Dra

Marcela Dolores

Grether

González

4. Datos del sinodal 2

Dra

Rocío

Jáuregui

Renaud

5. Datos del sinodal 3

Dr

Alejandro

Vásquez

Arzola

6. Datos del sinodal 5

Dr

Fernando

Ramírez

Martínez

7. Datos del trabajo escrito.

Estudio de flujo transversal de energía como función de la carga topológica en vórtices
ópticos

114 p

2016

*A mis padres, Tessy y Ricardo,
cuya paciencia y apoyo lo han sido todo.*

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi mamá por haber estado siempre a mi lado, por la formación que me dio, el apoyo en los tiempos difíciles y las alegrías en los buenos, pero sobre todo por su fortaleza que me ha servido como guía e inspiración.

A mi papá por ser una gran persona de quien siempre aprendo mucho y no dejaré de aprender, y que a pesar de sus constantes dudas e inquietudes nunca ha dejado de apoyarme en las decisiones que he tomado en mi vida.

A Karen Volke Sepúlveda que ha dedicado tanto tiempo para enseñarme y dirigirme en la dirección correcta y cuyo fruto ha sido esta obra. También agradezco a todos los integrantes del Laboratorio de Micromanipulación Óptica por estar presentes.

A mis amigos, tanto a los más antiguos cómo a los más nuevos, que siempre me han dado su apoyo y con quienes he pasado muy buenos ratos, y sobrevivido las situaciones más adversas.

Agradezco al CONACyT por su ayuda económica para terminar esta tesis (ayudante de investigador SNI III Karen Volke Sepúlveda). A la UNAM por los cinco años en los que estuve en sus aulas y a todos los profesores que me enseñaron a ser un buen físico, así mismo, su apoyo financiero a través de DGAPA-UNAM proyecto PAPIIT-115614.

Índice

Introducción	VII
1. Conceptos básicos	1
1.1. Ecuaciones de Maxwell	1
1.2. Difracción de Fresnel	3
1.3. Difracción de Fraunhofer y espectro de Fourier	7
1.4. Transformación de fase por una lente delgada	8
1.5. Ecuación de Helmholtz y aproximación paraxial	13
2. Vórtices ópticos	17
2.1. Haces Laguerre-Gauss	17
2.2. Campos Invariantes en Propagación	22
2.2.1. Haces Bessel	23
2.2.2. Espectro de Fourier de los BBs: Cálculo de parámetros experimentales en función de los parámetros del sistema óptico	27
2.3. Carga topológica y frentes de onda helicoidales	30
2.4. Circulación de energía	32
2.5. Momento angular orbital	38
3. Metodología teórica y experimental	42
3.1. Métodos de generación de haces Bessel	42
3.1.1. Métodos refractivos	43
3.1.2. Métodos difractivos	48
3.2. Análisis de difracción de campo cercano	51
3.3. Descripción teórica del flujo de energía	57
3.4. Experimento	61

<i>ÍNDICE</i>	VI
4. Caracterización del flujo de energía	64
4.1. Resultados de las simulaciones	64
4.2. Resultados experimentales	73
4.3. Comparación teórica-experimental	77
5. Discusión y conclusiones generales	81
A. Expresión completa de $\tan \alpha_\varphi$	92
B. Programas desarrollados	95
B.1. Programa de generación del holograma BB	95
B.2. Propagación de Fresnel	97
B.3. Ubicación del máximo por ajuste de función sinc	102

Introducción

Desde tiempos muy antiguos se ha estudiado la luz, desde los colores del arcoíris hasta cómo formar imágenes con distintos dispositivos, encontrando lentes y otros sistemas de formación de imágenes que preceden nuestra era. A pesar de ser uno de los fenómenos físicos más antiguos estudiados por la humanidad, la óptica sigue siendo un tema de frontera, incluso en un nivel clásico, que no deja de arrojar nuevos y fascinantes comportamientos.

Uno de estos temas de frontera es lo que hoy se conoce como óptica singular, que tuvo su origen en un trabajo de John Nye y Michael Berry en 1974 [1], obra en la que se describen las propiedades de los vórtices ópticos. De acuerdo a Nye y Berry, un vórtice es una dislocación en un tren de ondas, en particular una dislocación de fase azimutal, de tipo “tornillo”, del tren de ondas de los campos eléctrico y magnético, en el caso de la óptica. Esta dislocación descrita por una fase $\exp(il\varphi)$, donde φ es la coordenada azimutal y l un entero positivo o negativo llamado carga topológica, genera un punto de intensidad cero en su centro, una singularidad de fase.

Alrededor del vórtice la fase varía y la carga topológica es el número que mide dicho cambio de 0 a 2π en un circuito cerrado que encierra a la singularidad. Así, haces con la misma estructura tendrán diferentes propiedades, por ejemplo de distribución de intensidad, si se varía l .

Desde que se descubrió esta rama de estudio se han buscado diversas formas de obtener vórtices ópticos cuyas propiedades, tanto de estructura como dinámicas, se puedan manipular alterando parámetros experimentales accesibles, como la polarización. Esto ha llevado al estudio de diversos haces con estructuras que van de la onda plana hasta funciones más complicadas que los describen, como los haces Laguerre-Gauss [2], haces Bessel [3] y combinaciones de haces Mathieu [4] y Weber [5] que generan vórtices ópticos. Éstos son solo algunos ejemplos de lo que se conoce como haces estructurados.

La luz porta tanto energía como momento, y un vórtice óptico genera además un flujo transversal de energía [6–8] y un momento angular adicional al generado por el estado de polari-

zación de la luz, si es que ésta tiene una polarización distinta a la lineal [2, 9, 10]. Son estas propiedades lo que hacen a los vórtices ópticos, además de la región de intensidad prácticamente nula alrededor de la singularidad, un objeto de estudio muy interesante.

No sólo se han estudiado los vórtices ópticos de haces estructurados desde un punto de vista exclusivamente teórico, sino también diferentes métodos de generarlos en la práctica buscando con ello la mejor calidad de imagen del haz, o la mayor eficiencia energética, dependiendo del uso que se les dará. Dichas técnicas van desde métodos refractivos, que emplean lentes con fase en espiral, o cónicas, como los axicones, para generar vórtices ópticos [11–14]; hasta el uso de técnicas holográficas para modular la fase de la luz directamente y producir así el vórtice óptico deseado [15–18].

Además de los muchos trabajos teóricos y experimentales dedicados a describir las propiedades y los métodos de generación de los vórtices ópticos, como los citados previamente, existen una cantidad enorme de investigaciones que se centran en las aplicaciones de estos vórtices ópticos.

Las pinzas ópticas, sistemas de micromanipulación que atrapan objetos microscópicos con luz, es una de las áreas que emplean regularmente los vórtices ópticos para transferir momento angular a las partículas atrapadas y hacerlas girar [19–23].

Otro uso de los vórtices ópticos lo podemos encontrar en el diseño y uso de micromáquinas dirigidas por campos ópticos con momento angular orbital generando una torca óptica que hace girar las micromáquinas [24–27].

También podemos encontrar aplicaciones de dichos vórtices en el área de comunicación cuántica creando entrelazamiento del momento angular orbital con el de espín permitiendo un intercambio de información codificada en la polarización hacia el momento angular y viceversa [28–30].

Aún más, los vórtices ópticos han servido para mejorar la técnicas de visualización de los microscopios ópticos, en particular empleando la microscopía de contraste de fase en espiral (Spiral Phase Contrast Microscopy), que se basa en convertir variaciones de fase en modulaciones de intensidad por medio de manipulaciones ópticas, en este caso usando el vórtice óptico como filtro [31–33].

Cada vez se van encontrando más aplicaciones de estas singularidades de fase, pero al igual que las aplicaciones avanzan, la comprensión de las propiedades de estos vórtices debe avanzar también para contestar muchas de las preguntas que surgen siempre que se descubren fenóme-

nos nuevos. Una de estas preguntas es cómo se relaciona la carga topológica, parámetro que describe la helicidad de la dislocación de fase de tipo “tornillo” con el flujo transversal de energía en un vórtice óptico sin importar su estructura radial.

En esta investigación buscamos estudiar el flujo transversal de energía como función únicamente de la carga topológica en vórtices ópticos. Para ello aprovecharemos una propiedad de los haces Bessel, una familia de vórtices ópticos. El espectro de Fourier de estos haces tiene la peculiaridad de ser exactamente el mismo sin importar el valor de la carga topológica, siempre que posean el mismo vector de onda. De esta forma ocultamos la información de estructura radial por lo que los cambios en el flujo transversal de energía serán ocasionadas sólo por la variación de la carga topológica.

Para estudiar el flujo transversal de energía de los haces Bessel enfocados empleamos una rendija vertical ubicada en el plano de Fourier del sistema para difractar la luz del espectro de Fourier rompiendo la simetría azimutal del sistema. Usando como referencia un haz no vortical, un Bessel de orden cero, las diferencias en el patrón de difracción se deberán al flujo transversal de energía creado por los haces Bessel de orden mayor a cero, manteniendo fijo el vector de onda.

Con este objetivo en mente, el primer capítulo de este trabajo consiste en desarrollar las herramientas elementales para el análisis de la luz difractada. Abordamos la luz como un fenómeno de campos eléctricos y magnéticos ondulatorios que pueden ser descritos por una teoría escalar, en distintos sistemas de coordenadas, si usamos una aproximación paraxial. En esta teoría escalar abordamos la difracción de campo cercano, o de Fresnel, que nos describe el campo eléctrico o magnético, al propagarse y difractarse. Además tratamos los elementos ópticos de un sistema como transformaciones de fase y explicamos la ecuación de Helmholtz que nos permite describir a los vórtices ópticos.

Posteriormente, en el segundo capítulo, tratamos con los vórtices ópticos como una dislocación de fase de tipo “tornillo”, o con fase helicoidal. Se describen los haces Laguerre-Gauss como una solución de la ecuación paraxial del Helmholtz, siendo esta familia de soluciones uno de los vórtices ópticos más fáciles de estudiar y generar. También explicamos los campos ópticos invariantes en propagación, soluciones a la ecuación vectorial de Helmholtz, centrándonos en la familia de soluciones que presentan vórtices ópticos naturalmente, los haces Bessel. Describimos sus propiedades y el espectro de Fourier de éstos, que será fundamental para nuestra investigación.

Además, en el mismo capítulo, explicamos el significado de la carga topológica y los frentes de onda helicoidales para comprender la aparición de los vórtices en haces con fase azimutal $\exp(il\varphi)$. Teniendo esto a la mano desarrollamos la circulación de energía en un vórtice óptico explicando la componente de espín asociada a la polarización y la orbital asociada al vórtice.

Finalizando el capítulo, trabajamos con el momento angular de los vórtices ópticos y su relación con la circulación de energía en busca de una primera relación que no incluya información radial para describir la circulación de energía.

En el tercer capítulo explicamos los métodos más conocidos para generar haces Bessel, como el empleo de axicones como técnica refractiva y el uso de holografía con moduladores espaciales de luz (SLM) que codifican la fase del haz de manera local, permitiendo la emulación de un axicón, o directamente la codificación de la fase de un Bessel de orden arbitrario. Luego tratamos el análisis por difracción de campo cercano de los haces Bessel por medio de simulaciones numéricas explicando el principio del programa desarrollado para calcular la propagación del haz y su difracción por una rendija vertical.

También calculamos el flujo transversal de energía teóricamente aplicado al caso de un haz Bessel de orden l pasando por la rendija vertical. Finalmente se explica el montaje experimental, incluido el método de generación de los haces Bessel por medio del SLM. De esta forma podemos estudiar por métodos esencialmente diferentes el mismo fenómeno, y comparar los resultados de éstos para asegurarnos por triplicado que el estudio de la circulación transversal de energía, propuesto en este trabajo, es correcto y confiable.

En el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos por los tres métodos descritos. Se realiza una caracterización detallada de los haces Bessel, en particular de su distribución de intensidad tanto en el espacio de coordenadas como en el espacio de Fourier. Se analiza la intensidad difractada por la rendija vertical tanto de manera simulada como de forma experimental y se comparan entre sí.

En el quinto capítulo, por medio de la teoría desarrollada en los capítulos previos, se relaciona el desplazamiento de los máximos de intensidad con flujo transversal de energía, mencionando las posibles fuentes de error entre las mediciones obtenidas, las simulaciones realizadas y los cálculos teóricos, llegando a una conclusión satisfactoria sobre el comportamiento del flujo transversal de energía como una función dependiente sólo de la carga topológica en dichos vórtices ópticos.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este primer capítulo se tratarán los conceptos más elementales y necesarios de la teoría electromagnética referente a la descripción ondulatoria de la luz, por medio de las ecuaciones de Maxwell. Se aborda el estudio de la propagación de la luz por medio de difracción tanto de campo cercano como de campo lejano para poder describir campos ópticos de interés mientras se propagan en el espacio. Se menciona la descripción de sistemas ópticos por medio de transformaciones de fase que permiten una descripción concisa cuando se trabaja con la propagación de campos ópticos que atraviesan dichos sistemas. Y finalmente se tratará la ecuación de Helmholtz que nos dará soluciones en forma de haces estructurados, de los cuales nos centraremos en los vórtices ópticos.

1.1. Ecuaciones de Maxwell

La luz y su propagación es el objeto de interés de la presente obra por lo que comprender su descripción matemática y lograr una interpretación física clara es de vital importancia. La luz puede ser tratada hoy en día por medio de la teoría electromagnética clásica o la electrodinámica cuántica. Pondremos especial atención en la interpretación clásica del electromagnetismo, sin dejar de lado la descripción cuántica. Sin embargo, nos mantendremos en una aproximación semiclassical, sin entrar en los detalles más sutiles de la teoría cuántica, puesto que esta aproximación es de gran ayuda para comprender lo que sucede en casos más complejos [2, 9] donde se llega a perder la comprensión intuitiva del fenómeno que se está estudiando.

Las ecuaciones de Maxwell describen en su totalidad los fenómenos asociados a la luz y son la base en la que se desarrollará la teoría necesaria en este trabajo, por lo que a continuación se

enuncian en forma diferencial para el caso en el vacío [34, 35]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Considerando propagación en el vacío y sin fuentes, i.e. $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$ podemos desacoplar las ecuaciones de Maxwell, es decir, separar los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} . Aplicando el rotacional a las Ecs. (1.2) y (1.4), y tomando en cuenta (1.1) y (1.3), se obtiene [35]:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Las Ecs. (1.5) son dos ecuaciones de onda, una para \vec{E} y otra para \vec{B} que se propagan con velocidad $v = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c$, donde c es la velocidad de la luz. Este hecho reafirma que la luz es una onda electromagnética y debe de ser tratada acorde a la teoría que sigue a las ecuaciones de onda para comprender fenómenos tan importantes como la difracción.

Para trabajar con estas ecuaciones de onda junto con las ecuaciones de Maxwell consideraremos casos particulares y ciertas aproximaciones que se mencionarán cuando sean necesarias.

1.2. Difracción de Fresnel

El tratamiento más detallado de la propagación de luz requiere ir más allá de los límites de la óptica geométrica y tomar la naturaleza ondulatoria de la luz. El principio de Huygens, propuesto por Christiaan Huygens en 1690, fue uno de los primeros intentos de comprender el comportamiento de la luz como una onda aseverando que [36]: “cada elemento de un frente de onda puede ser considerado como el centro de una perturbación secundaria que da lugar a ondas esféricas. La posición del frente de onda a cualquier tiempo posterior es la envolvente de todas esas ondas esféricas.” Este principio está ilustrado de forma esquemática en la figura 1.1.

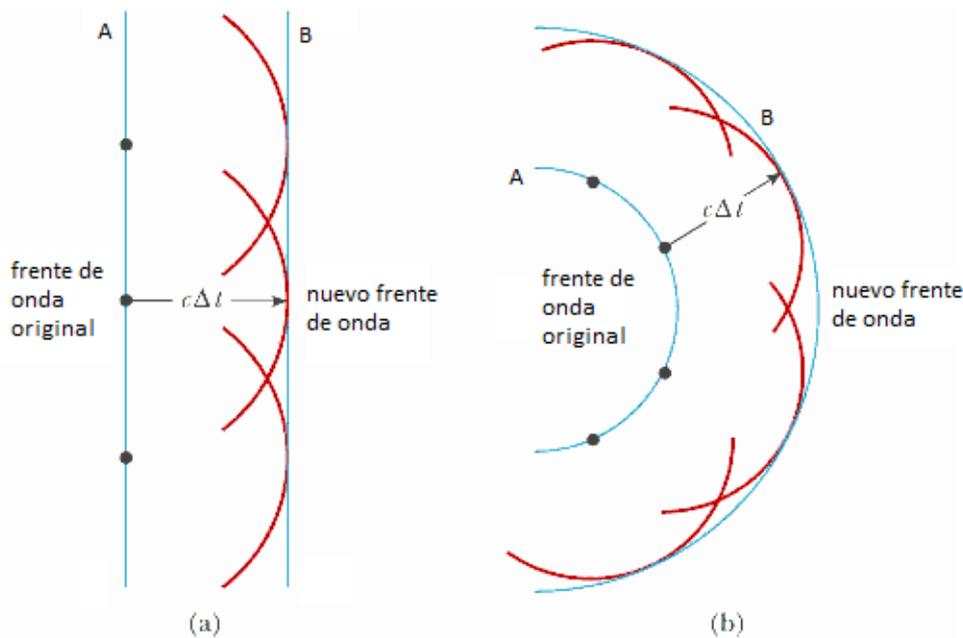


Figura 1.1: Principio de Huygens. Cada punto en el frente de onda A es una fuente de ondas esféricas secundarias (marcadas en rojo). El nuevo frente de onda B es la envolvente de estas ondas secundarias. (a) Frente de onda plana que da origen a otro frente de onda plana. (b) Frente de onda esférico que crea otro frente de onda esférico.

Posteriormente Augustin-Jean Fresnel retomó y complementó el principio de Huygens para abordar el fenómeno de difracción agregando que las ondas esféricas secundarias interfieren mutuamente. Esta combinación del principio de Huygens con el principio de interferencia es llamado principio de Huygens-Fresnel [36–38].

La difracción es un fenómeno de gran importancia cuando se trabaja con propagación de luz. Puede ser definida como “cualquier desviación de los rayos de luz de trayectorias rectilíneas que no pueden ser interpretadas como reflexión o refracción.” [39].

Esta formulación toma importancia cuando la propagación de la luz ocurre cerca de obje-

tos u obstáculos, o donde una gran cantidad de rayos (visto desde la perspectiva de la óptica geométrica) convergen [36].

La teoría escalar de difracción traduce el carácter vectorial de las ecuaciones de onda para \vec{E} y \vec{B} , Ec. (1.5), tomando en cuenta que los vectores están descritos por sus componentes, i.e., $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ ¹, por lo que se cumple por ejemplo que

$$\nabla^2 E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0, \quad (1.6)$$

y similarmente para E_y, E_z, B_x, B_y, B_z , por lo que podemos escribir en general para todas las componentes de \vec{E} y \vec{B} una sola ecuación escalar de onda que resume el comportamiento de todas las componentes de esos vectores,

$$\nabla^2 u(P, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(P, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.7)$$

donde $u(P, t)$ representa cualquiera de la componentes del campo escalar, donde u depende explícitamente de la posición P al tiempo t .

Cuando colocamos un obstáculo en el camino de la luz hay que aplicar condiciones a la frontera, lo que produce un acoplamiento entre \vec{E} y \vec{B} al igual que entre varias de sus componentes escalares por lo que el uso de la teoría escalar conlleva cierto error. Sin embargo, ese error será pequeño si el área en el que las condiciones a la frontera tienen efecto es pequeña en comparación con el área total por la que la onda está pasando. En el caso de difracción por una apertura, los campos vectoriales sólo son modificados en las orillas de la apertura donde la luz interactúa con el material con el que la apertura está hecha, y los efectos sólo se extienden unas pocas longitudes de onda hacia la apertura. Entonces si el área de la apertura es grande en comparación a la longitud de onda, los efectos de acoplamiento por condiciones a la frontera serán pequeños y el error introducido por la teoría escalar será despreciable [40].

Para comprender la formulación matemática de la difracción de Fresnel usemos el sistema coordenado de la Fig. 1.2. Supongamos una apertura Σ en el plano (ξ, η) iluminado en dirección

¹Se han escrito las componentes en coordenadas cartesianas. Sin embargo, para otros sistemas coordenados es posible que las ecuaciones se acoplen en las distintas coordenadas. Cuando trabajemos en otros sistemas coordenados mencionaremos las aproximaciones realizadas para que la separación de componentes, requerida por la aproximación escalar, siga siendo válida.

z positivo. Nos interesa conocer el campo en un plano (x,y) paralelo al plano (ξ,η) a una distancia z de éste con el eje z cruzando el origen de ambos planos.

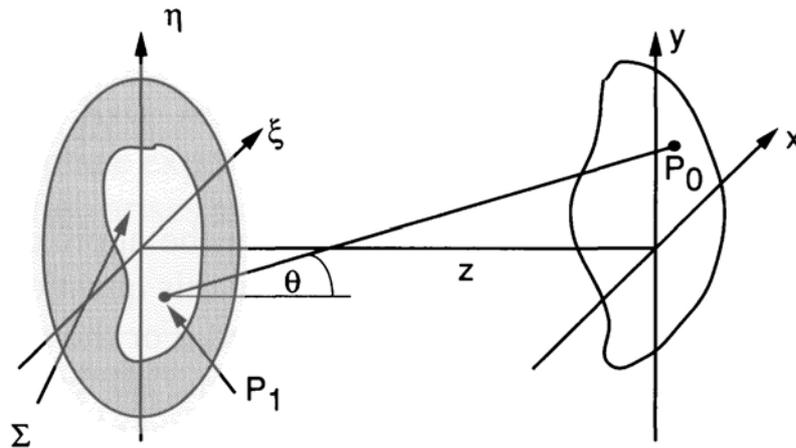


Figura 1.2: Geometría de difracción [40].

El principio de Huygens-Fresnel, que nos da el campo U en el punto P_0 , puede ser escrito como [40]:

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp\{ikr_{01}\}}{r_{01}} \cos \theta ds, \quad (1.8)$$

donde θ es el ángulo entre la normal \hat{n} al plano (ξ,η) , y el vector \vec{r}_{01} apuntando de P_0 a P_1 . De la Fig. 1.2 podemos ver que el termino $\cos \theta$ esta dado exactamente como:

$$\cos \theta = \frac{z}{r_{01}}. \quad (1.9)$$

Por lo que el principio de Huygens-Fresnel puede ser reescrito como

$$U(x,y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi,\eta) \frac{\exp\{ikr_{01}\}}{r_{01}^2} d\xi d\eta, \quad (1.10)$$

donde

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (1.11)$$

Cabe mencionar que para llegar a la expresión (1.8) se utilizó la suposición de que la distancia de observación desde la apertura Σ es varias veces más grande que la longitud de onda, $r_{01} \gg \lambda$. De esta formulación es posible ver que el campo en un punto P_0 en el plano (x, y) es la suma de las ondas esféricas que provienen de los puntos P_1 en toda la apertura Σ donde se considera la interferencia al considerar el factor de inclinación $\cos \theta$.

Para simplificar el principio de Huygens-Fresnel (1.10) se realiza una expansión binomial del factor (1.11),

$$\begin{aligned} r_{01} &= z \sqrt{1 + \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2} \\ &\approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde hemos tomado hasta los términos de orden 2 en la expansión.

Así, podemos emplear esta expansión (1.12) para simplificar el principio de Huygens-Fresnel (1.10) por lo que el campo en el plano (x, y) en términos del campo en (ξ, η) , $U(\xi, \eta)$ será

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \right\} d\xi d\eta, \quad (1.13)$$

los límites de la apertura han sido incluidos en la definición de $U(\xi, \eta)$, por lo que la integración ahora se realiza sobre todo el espacio.

A la expresión (1.13) se le conoce como integral de difracción de Fresnel y nos permite conocer el campo en un plano posterior al plano iluminado, en lo que se conoce como propagación de campo cercano [36–41], siempre y cuando el plano posterior se encuentre a una distancia tal que se siga cumpliendo la condición $r_{01} \gg \lambda$.

Notemos que la expresión (1.13) puede ser vista como una convolución de la forma [40,41]:

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \quad (1.14)$$

con Kernel de la convolución

$$h(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right]. \quad (1.15)$$

Ver la difracción de Fresnel como una convolución será realmente útil al trabajar en el espacio de Fourier puesto que una convolución en el espacio de coordenadas es una multiplicación en el espacio de frecuencias [40]. Esta cuestión la trataremos a detalle más adelante.

1.3. Difracción de Fraunhofer y espectro de Fourier

La aproximación de Fresnel al realizar la expansión binomial (1.12) nos da una buena descripción del campo propagado para distancias tanto cortas como largas, propagación de campo cercano. Si además de esta aproximación consideramos una condición más fuerte, conocida como aproximación de Fraunhofer, los cálculos se simplifican notablemente.

Dicha condición consiste en considerar que [40]

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{2}. \quad (1.16)$$

Reescribiendo la Ec. (1.13) factorizando el término $\exp \left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right]$ tenemos

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta. \quad (1.17)$$

Si se cumple la condición (1.16) entonces la fase cuadrática dentro de la integral en la Ec. (1.17) es aproximadamente cero sobre toda la apertura, por lo que en la región de difracción de Fraunhofer, o de campo lejano, tenemos

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta. \quad (1.18)$$

La expresión (1.18) se conoce como integral de difracción de Fraunhofer o de campo lejano [36–41].

Notemos que la Ec. (1.18) es una transformada de Fourier con un factor multiplicativo de fase y de escala. En esencia la difracción de Fraunhofer es la transformada de Fourier de la distribución espacial de la apertura evaluada en frecuencias

$$\begin{aligned} f_x &= x/\lambda z, \\ f_y &= y/\lambda z. \end{aligned} \tag{1.19}$$

En la región de frecuencias ópticas la aproximación es válida, por ejemplo para el rojo en 600 nm , si $z \gg 1,600 \text{ m}$ [40], por lo que es complicado lograrlo en ambientes como un laboratorio, pero es posible observar la difracción de Fraunhofer en dichos entornos pequeños si se emplean ondas esféricas convergentes o una lente positiva entre la apertura y el plano de observación [37, 38]. Dado que la segunda es el método que utilizaremos, a continuación se muestra el funcionamiento de la lente delgada positiva desde el punto de vista de la difracción de Fresnel.

1.4. Transformación de fase por una lente delgada

La luz al pasar por un medio material homogéneo, como el vidrio, con un índice de refracción n tendrá una reducción en su velocidad de propagación² mientras esta viaja dentro del medio. Más allá de refractar la luz siguiendo la ley de Snell³ [37, 38], la onda sufre un retardo en su fase de acuerdo al espesor del medio por el que está pasando. Una lente es un objeto de algún material óptico, como vidrio, con determinada forma. La aproximación de lente delgada considera que un rayo de luz entrando en la posición (x, y) de la lente sale aproximadamente en la misma posición. Teniendo en cuenta esto y haciendo referencia a la Fig. 1.3 consideremos el máximo espesor de la lente Δ_0 y el espesor en el punto (x, y) , $\Delta(x, y)$, entonces el retraso total

²Recordemos que el índice de refracción se define como la razón de la velocidad de la luz en el vacío entre la velocidad de la luz en el medio en cuestión, i.e. $n = c/v$ [38]

³La luz es refractada, desviada de su trayectoria rectilínea, en una interfaz entre dos medios con diferentes índices de refracción de acuerdo al ángulo de incidencia, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ [36–39]

de la fase es [40]

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)], \quad (1.20)$$

donde n es el índice de refracción del material con el que está hecha la lente. Fijándonos en detalle podemos observar que el término $kn\Delta(x, y)$ es el retraso introducido por la lente y $k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$ es el retraso introducido por la región de espacio libre entre los dos planos. Este retraso de fase, expresado en la Ec. (1.20), puede ser escrito como una transformación de fase multiplicativa [40]:

$$t_L(x, y) = \exp[ik\Delta_0] \exp[ik(n - 1)\Delta(x, y)]. \quad (1.21)$$

El campo complejo $U'_L(x, y)$ en el plano inmediatamente detrás de la lente estará relacionado con el campo original en el plano inmediatamente delante de la lente $U_L(x, y)$ de la forma

$$U'_L(x, y) = t_L(x, y)U_L(x, y). \quad (1.22)$$

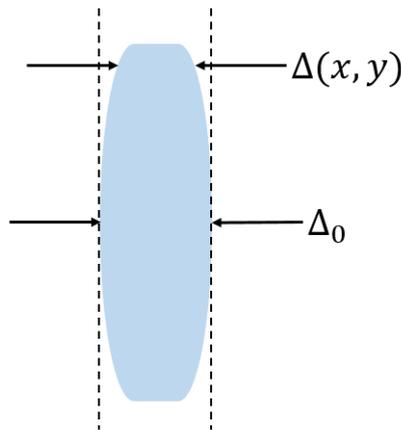


Figura 1.3: Función de espesor en una lente delgada.

Para construir la función de espesor $\Delta(x, y)$ consideremos la lente delgada como dos superficies esféricas con la posibilidad de contener un prisma rectangular en el medio. En la Fig. 1.4 se muestran las componentes de la lente. Considerando un rayo que va de izquierda a derecha a través de la lente, cada superficie convexa tiene un radio de curvatura po-

sitiva mientras que cada superficie cóncava se le asigna un radio de curvatura negativo. La función de espesor total de la lente será la suma de las contribuciones de cada parte, i.e. $\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y) + \Delta_3(x, y)$.

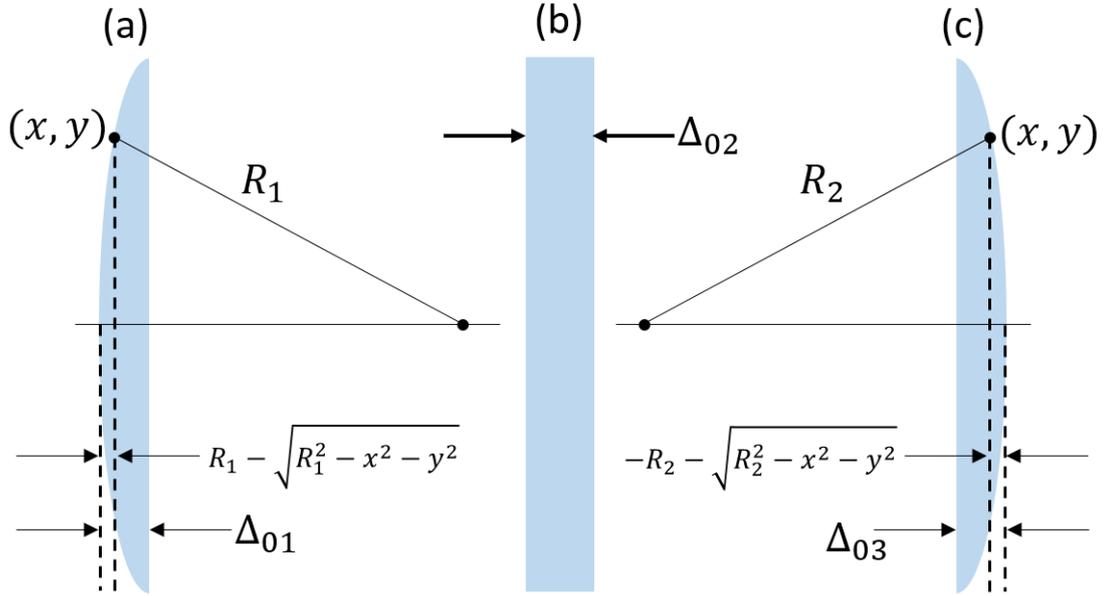


Figura 1.4: Cálculo de la función de espesor. (a) Geometría para la cara de entrada. (b) Geometría para el cuerpo de la lente. (c) Geometría para la cara de salida.

Siguiendo la geometría en la Fig. 1.4 podemos ver que el espesor del cuerpo de la lente está constituido por una función de fase constante, mientras que la función para la primera cara es

$$\begin{aligned}
 \Delta_1(x, y) &= \Delta_{01} - \left(R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2 + y^2} \right) \\
 &= \Delta_{01} - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right),
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

y de manera similar para la segunda cara es

$$\begin{aligned}
 \Delta_3(x, y) &= \Delta_{03} - \left(-R_2 - \sqrt{R_2^2 - x^2 + y^2} \right) \\
 &= \Delta_{03} + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right),
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

por lo que la función de espesor total será

$$\Delta(x,y) = \Delta_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right), \quad (1.25)$$

donde $\Delta_0 = \Delta_{01} + \Delta_{02} + \Delta_{03}$.

Tomando regiones que están cerca del eje de la lente, es decir, considerando solo rayos paraxiales, podemos simplificar la función descrita en (1.25). Tomando valores suficientemente pequeños de x y y podemos tomar

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_1^2}, \quad (1.26)$$

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_2^2},$$

por lo que la función de espesor en la aproximación paraxial será

$$\Delta(x,y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.27)$$

Sustituyendo la expresión (1.27) en la transformación de fase (1.21) tenemos que la lente actúa como

$$t_L = \exp[ikn\Delta_0] \exp \left[-ik(n-1) \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]. \quad (1.28)$$

Podemos agrupar las propiedades físicas de la lente, n, R_1, R_2 en un número llamado distancia focal, f , definido como [40]

$$\frac{1}{f} \equiv (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.29)$$

Luego, ignorando el factor de fase constante tenemos que la transformación de fase por una lente delgada es

$$t_L(x, y) = \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (1.30)$$

Si consideramos una lente finita podemos incluir una función de pupila $P(x, y)$ que es igual a 1 dentro de la apertura de la lente y 0 para el resto del plano, entonces el campo inmediatamente detrás de la lente será

$$U'_L(x, y) = U(x, y)P(x, y) \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (1.31)$$

Para conocer la distribución final en el plano focal $U_f(u, v)$ empleamos la difracción de Fresnel (1.17) con $z = f$. Ignorando factores constantes de fase global tenemos

$$U_f(u, v) = \frac{\exp \left[i \frac{k}{2f} (u^2 + v^2) \right]}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} U_L(x, y)P(x, y) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (xu + yv) \right] dx dy. \quad (1.32)$$

Notemos que el factor de fase cuadrático en la integral de Fresnel se cancela con el factor cuadrático introducido por la transformación de fase de la lente. Si además consideramos que la distribución de luz que entra a la lente es más pequeña que la apertura de la lente el factor $P(x, y)$ puede ser ignorado, por lo que el campo en el plano focal será

$$U_f(u, v) = \frac{\exp \left[i \frac{k}{2f} (u^2 + v^2) \right]}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} U_L(x, y) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (xu + yv) \right], \quad (1.33)$$

que es precisamente la difracción de Fraunhofer descrita en la Ec. (1.18), donde la condición requerida de campo lejano ha dejado de ser necesaria gracias a la transformación de fase de

la lente. De esta forma es posible tener la difracción de Fraunhofer, o lo que es equivalente a tener el espectro de Fourier de la amplitud y fase del campo que entra a la lente, a una distancia accesible en un laboratorio.

Para conocer el campo de entrada de la lente es necesario conocer la propagación del campo original hasta que llega a la lente, por lo que es necesario usar la difracción de Fresnel si el campo de entrada no está colocado inmediatamente delante de la lente. Esto puede ser calculado numéricamente de manera sencilla empleando la integral de Fresnel como la convolución del campo de entrada con el kernel correspondiente descrito en la Ec. (1.15) puesto que sólo es necesario pasar ambos al espacio de Fourier donde la transformada de una convolución pasa a ser la multiplicación de las transformadas constituyentes.

Con lo anterior hemos construido las herramientas necesarias para conocer cualquier campo propagado una distancia determinada por medio de la difracción de Fresnel, e incluso obtener su transformada de Fourier a través de elementos ópticos como la lente delgada positiva que trae el espectro de campo lejano al plano focal de la lente. Sólo requerimos conocer el campo original que se quiere estudiar. En la presente obra los campos de interés son los conocidos como vórtices ópticos y que serán descritos en los capítulos siguientes.

1.5. Ecuación de Helmholtz y aproximación paraxial

Ahora requerimos encontrar las distribuciones de intensidad que son soluciones a las ecuaciones de onda. Las ecuaciones de Maxwell dictan los posibles tipos de onda que puede formar la luz, siendo los más conocidos la onda plana y la onda esférica, componente fundamental del principio de Huygens-Fresnel. La onda plana corresponde a la solución más sencilla a la ecuación de onda vectorial, Ec. (1.5), en coordenadas cartesianas, mientras que la onda esférica es una solución a la ecuación de onda escalar en coordenadas esféricas con simetría angular, Ec. (1.7).

Para construir distribuciones de intensidad y fase con más estructura, lo que se conoce como haces estructurados, necesitamos desarrollar las ecuaciones de onda vectoriales y encontrar otras simetrías convenientes para representar las soluciones.

Partiendo de las ecuaciones de onda de los campos vectoriales \vec{E} y \vec{B} , Ec. (1.5), consideremos que la onda está constituida por una sola frecuencia, es decir, que estamos tratando con una onda monocromática. Esta suposición es muy fuerte pues la luz más habitual, y la única que

estuvo disponible hasta mediados del siglo XX, es la luz compuesta por varias frecuencias, ya sea luz blanca o luz conformada por varias líneas espectrales de emisión. Sin embargo desde la invención del láser (LASER por sus siglas en inglés⁴) se han podido construir fuentes de emisión de luz que pueden considerarse monocromáticas, puesto que emiten en un espectro muy angosto [42], por lo que la suposición de tener una onda monocromática es más que razonable hoy en día. Así podemos proponer para la ecuación de onda escalar

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1.34)$$

una solución del tipo

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z) e^{-i\omega t}. \quad (1.35)$$

Al sustituirla en la ecuación de onda obtenemos

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0, \quad (1.36)$$

donde $k = \omega/c$. A la Ec. (1.36) se le conoce como ecuación de Helmholtz y es una ecuación de onda independiente del tiempo [36, 38, 40, 42]. Ahora nuestro trabajo consiste en resolver esta ecuación considerando las simetrías que más interesantes nos parezcan, en este caso la simetría cilíndrica circular como hemos mencionado previamente.

Si observamos detenidamente la integral de difracción de Fresnel, Ec. (1.13), podemos ver la aparición de un factor e^{ikz} fuera de la integral, por lo que sugiere que la solución de la ecuación de Helmholtz tenga este factor incluido. Proponiendo una solución de este tipo

$$U(x, y, z) = u(x, y, z) e^{ik_z z}, \quad (1.37)$$

donde k_z es la componente longitudinal del vector de onda, paralela a la dirección de propagación del haz, por lo que u nos representa una componente perpendicular a la dirección de

⁴LASER son las siglas para Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, que se puede traducir como luz amplificada por emisión estimulada de radiación.

propagación, dentro de esta aproximación escalar.

Al sustituir esta solución en la ecuación de Helmholtz (1.36) obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + (k^2 - k_z^2) u = 0. \quad (1.38)$$

Si además consideramos haces fuertemente dirigidos en la dirección de propagación, i.e. $k_z \approx k$, y consideramos nuevamente la aproximación paraxial, esta vez entendiéndola como una lenta variación de $u(x, y, z)$ a lo largo de z , aproximación que podemos escribir matemáticamente como [42, 43]:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial u}{\partial z} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|. \quad (1.39)$$

Empleando esto en la Ec. (1.38) obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (1.40)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación paraxial de Helmholtz [19, 42–45], puesto que para llegar a ella hemos requerido emplear la aproximación paraxial.

Esta misma ecuación la podemos escribir de una forma más general

$$\nabla_t^2 u(s, z) + 2ik \frac{\partial u(s, z)}{\partial z} = 0, \quad (1.41)$$

donde s se refiere a las coordenadas transversales, $s \equiv (x, y)$ ó $s \equiv (\rho, \varphi)$ dependiendo el sistema coordenado que se esté usando, ya sean coordenadas rectangulares o cilíndricas circulares, y ∇_t^2 es el operador laplaciano operando sobre estas coordenadas en el plano transversal.

De resolver la ecuación en coordenadas rectangulares obtendremos una familia de soluciones conocidas como haces Hermite-Gauss (HG) [42, 44] o TEM_{lm} , transversal electromagnético de orden l, m , siendo el haz gaussiano fundamental el TEM_{00} [42]. Dado que nuestro interés

está en los vórtices ópticos, no entraremos en detalles sobre los haces Hermite-Gauss y nos centraremos en la solución de la ecuación paraxial (1.41) en coordenadas cilíndricas circulares.

El laplaciano aplicado a cualquier función ψ en coordenadas cilíndricas circulares es [46]:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (1.42)$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\varphi = \arctan(y/x)$ son las coordenadas radial y azimutal respectivamente.

Tomando la parte transversal del laplaciano, es decir, los factores en la Ec. (1.42) que dependen de ρ y φ , y sustituyéndolos en la Ec. (1.41) obtenemos la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cilíndricas circulares:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (1.43)$$

Esta ecuación nos servirá para obtener haces estructurados conocidos como vórtices ópticos, siendo los más sencillos aquellos que son solución para esta ecuación y que trataremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Vórtices ópticos

La ecuación de Helmholtz tiene muchas soluciones posibles, en este capítulo trataremos las soluciones a dicha ecuación en coordenadas cilíndricas circulares que dan lugar a los haces Laguerre-Gauss, que son vórtices ópticos. Trataremos con otra familia de soluciones cuyo perfil de intensidad no varía al propagarse, los Campos Invariantes en Propagación, dentro de los cuales una familia en particular, los haces Bessel, poseen vórtices ópticos de manera natural. Estudiaremos sus propiedades y características, describiendo el papel del parámetro de helicidad, conocido como carga topológica, en las propiedades de los haces. También trabajaremos sobre la circulación de energía en estos haces, el momento angular, tanto de espín como orbital, que portan y la dependencia de ambas respecto a la estructura del haz en busca de una relación entre éstas y la carga topológica.

2.1. Haces Laguerre-Gauss

Usando la ecuación de Helmholtz, Ec. (1.36), al trabajar en diferentes simetrías y usando distintas aproximaciones de dicha ecuación podemos obtener muchas familias de soluciones. Dos de ellas nos resultan de particular interés, la solución de la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cilíndricas circulares, Ec. (1.43), que da lugar a la familia conocida como haces Gauss, y en su forma más general, haces Laguerre-Gauss (LG) [2, 19], y la solución de la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndricas circulares que dan lugar a los haces Bessel (BB) [47] y otros Campos Ópticos Invariantes en Propagación (COIPs) [19].

Tanto los LG como los BB comparten la característica de poseer frentes de onda helicoidales y dislocaciones de fase tipo “tornillo” por lo que se les denomina como vórtices ópticos [1].

Cabe mencionar que los BB son los únicos COIPs que poseen de manera natural dicha estructura de fase.

La solución completa normalizada para la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cilíndricas circulares, Ec. (1.43), puede ser escrita como [19, 42, 44, 45]:

$$u_{pl}(\rho, \varphi, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(l+p)!}} \frac{\exp\{i(2p+l+1)\Phi(z)\}}{w(z)} \exp\{\pm il\varphi\} \times \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right)^{l/2} L_p^l\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right) \exp\left\{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right\} \exp\left\{\frac{ik\rho^2}{2R(z)}\right\}, \quad (2.1)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right), \\ z_R &= k \frac{w^2(z)}{2}, \\ w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}, \\ R(z) &= z \left(1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde p y l son dos índices enteros conocidos como radial y azimutal respectivamente [19]; z_R es la distancia de Rayleigh¹; $w(z)$ es el ancho del haz, dado por el parámetro w_0 , conocido como cintura del haz². Además $\Phi(z)$ es la fase de Gouy³, asociada a la velocidad de fase de la luz. Así como L_p^l son los polinomios asociados de Laguerre de grado l y orden p ; y $R(z)$ es el radio de curvatura de los frentes de onda a lo largo de la dirección de propagación z .

Los polinomios asociados de Laguerre están definidos a través de la representación de Rodrigues o por medio de los polinomios de Laguerre $L_n(x)$ como [46, 48]:

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+k} \right) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x), \quad (2.3)$$

que al diferenciar las series de potencias de $L_n(x)$ obtenemos la siguiente forma explícita para

¹Distancia en el eje de propagación, en nuestro caso z , sobre la cual el haz permanece aproximadamente paralelo y colimado antes de que la expansión por difracción comience a aumentar el tamaño del haz [42].

²La cintura del haz w_0 es el ancho mínimo del haz en la dirección de propagación. Tanto el valor de w_0 como el de w_z se determina como el radio al cual la amplitud cae a $1/e$ respecto a su valor en eje, en el plano xy a lo largo del haz.

³La fase de Gouy genera un incremento aparente de la longitud de onda cerca de la cintura del haz debido a que la velocidad de fase en esa región excede la velocidad de la luz en el medio.

los polinomios asociados de Laguerre [46, 49]:

$$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!}. \quad (2.4)$$

Como ya hemos mencionado previamente, la Ec. (2.1) representa una familia de soluciones que se le conoce como haces Laguerre-Gauss, o TEM_{pl}^* ⁴. Podemos ver de esta ecuación que al hacer $p = l = 0$, i.e. al tener TEM_{00}^* recuperamos el haz Gaussiano fundamental de la misma forma que con los haces HG, así

$$u_{00}(\rho, \varphi, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right\} \left\{\frac{ik\rho^2}{2R(z)}\right\} \exp\{i\Phi(z)\}. \quad (2.5)$$

Además en el origen obtenemos la conocida función gaussiana,

$$u_{00}(\rho, \varphi, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_0} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right\}, \quad (2.6)$$

de ahí el nombre Laguerre-Gauss de esta familia de soluciones, y de manera análoga para los Hermite-Gauss.

Para comprender aún mejor el significado físico de algunos de los términos de la solución (2.1) se muestra en la Fig. 2.1 el comportamiento de un TEM_{00}^* a lo largo del eje de propagación z .

Si bien este es un resultado muy importante, puesto que nos permite caracterizar el haz emitido por la mayoría de los láseres, nuestro interés recae en los haces LG de orden mayor a cero, en particular los haces con $l \neq 0$.

⁴Donde se ha empleado TEM_{pl}^* para diferenciarlos de los haces Hermite-Gauss TEM_{lm}

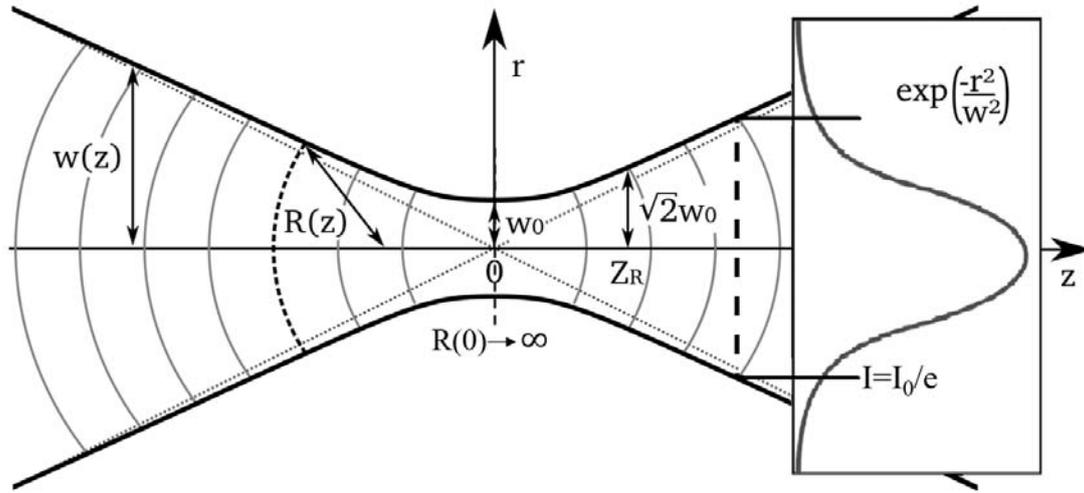


Figura 2.1: Comportamiento del haz TEM_{00}^* , haz Gaussiano fundamental. La curva en el recuadro de la derecha es el perfil de intensidad del haz a la distancia z señalada por las líneas punteadas gruesas.

En la Fig. 2.2 podemos ver las características transversales de los LG conforme se va variando el índice azimutal, l , y el radial, p . Notemos que p le da una estructura radial diferente, generando anillos concéntricos de nula intensidad, esto debido a que en los nodos ocurre una dislocación de fase tipo “borde”, fenómeno que sucederá de igual manera con los haces Bessel y que trataremos más adelante.

Con $l \neq 0$ podemos ver que la solución recupera todos sus términos, en particular el término que depende de la coordenada azimutal φ . Es este término $\exp\{\pm il\varphi\}$ el que origina la dislocación de tipo tornillo en la fase [1], es decir, el creador de los vórtices ópticos, por lo que los haces LG con $l \neq 0$ son vórtices ópticos. Por esta razón, en la siguiente sección discutiremos a detalle el significado de este término.

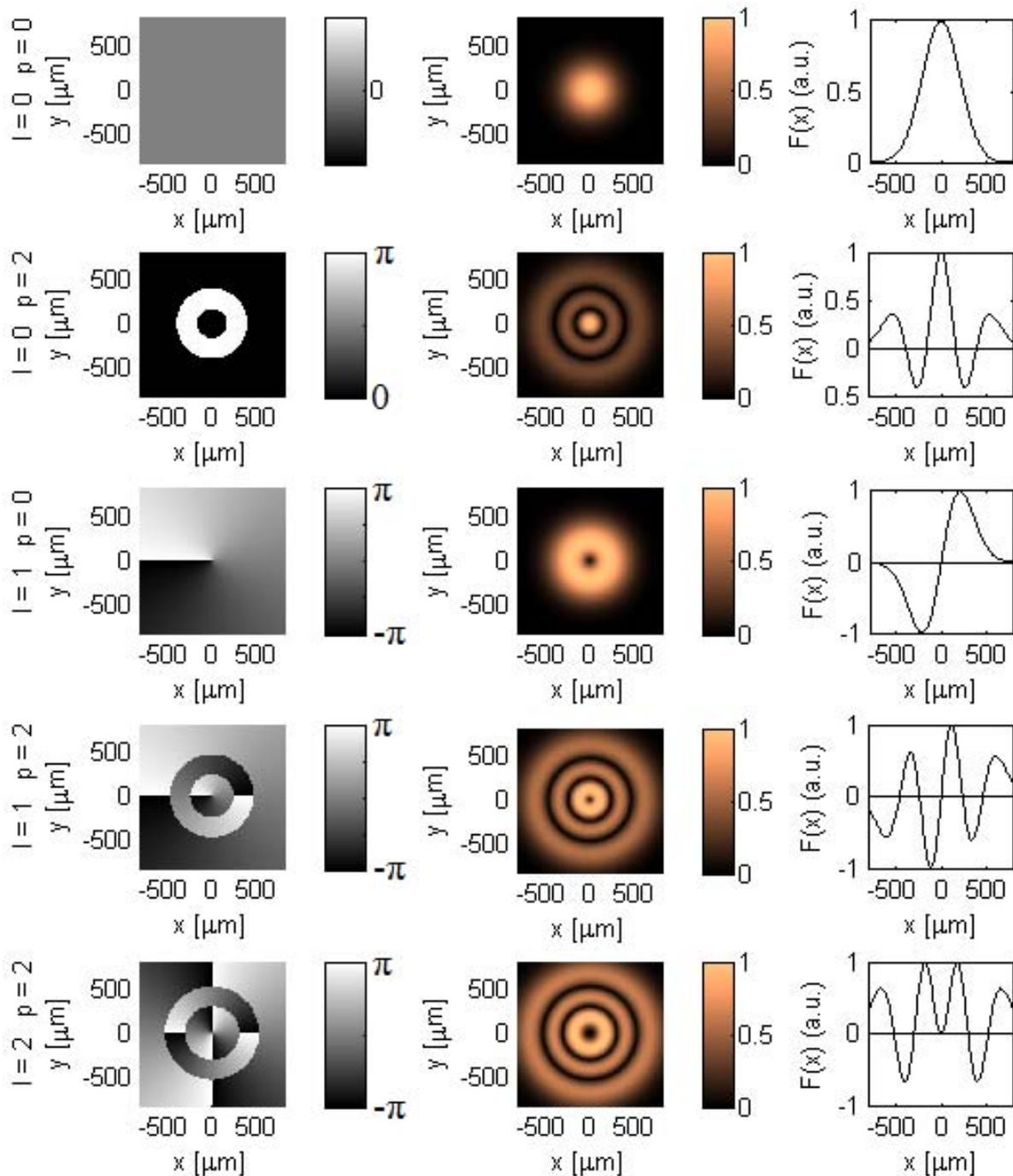


Figura 2.2: Características transversales de los haces Laguerre-Gauss para diferentes índices l y p . Columnas, izquierda: fase del LG; central: intensidad del haz en el plano $z = 0$; derecha: campo $u = F$ como función de x en el plano $z = 0$ a la altura $y = 0$.

2.2. Campos Invariantes en Propagación

Ahora trataremos otra familia de soluciones a la ecuación de Helmholtz, Ec. (1.36) que pueden generar vórtices ópticos, los Campos Invariantes en Propagación (COIPs), como ya hemos mencionado previamente. Si consideramos la ecuación de Helmholtz en tres dimensiones, la podemos separar en once sistemas coordenados ortogonales. Soluciones conocidas a esta ecuación son las ondas planas, esféricas y cilíndricas [19].

Las ondas cónicas no fueron estudiadas como sistemas que se propagan sino hasta 1987, estas soluciones fueron llamados haces adifraccionales [3, 47], puesto que estos haces no presentan difracción al propagarse grandes distancias.

Para tratar con los haces adifraccionales se ha acuñado el término Campos Ópticos Invariantes en Propagación [4, 5, 50] (COIPs⁵). La condición para que un haz sea un COIP puede ser escrita como [19, 47]:

$$I(x, y, z \geq 0) = I(x, y, z = 0) \quad (2.7)$$

donde I es la intensidad del campo electromagnético.

Se puede escribir un campo arbitrario $u(\vec{r})$ como su transformada de Fourier $\tilde{u}(\vec{k})$ de la forma

$$u(\vec{r}) = \iiint \tilde{u}(\vec{k}) \exp \{i(k_x x + k_y y + k_z z)\} dV_k, \quad (2.8)$$

donde se integra sobre todo el espacio de frecuencias. Hemos asumido ondas monocromáticas, $k = \omega/c$, lo que fija la norma del vector \vec{k} a una esfera, $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Haciendo $\tilde{u}(\vec{k}) = \tilde{A}(\theta, \varphi) \delta(k - \omega/c)$, donde se ha utilizado la delta de Dirac para reducir el espacio de integración, entonces podemos escribir la expresión (2.8) como

$$u(\vec{r}) = \iint_{\Omega} \tilde{A}(\theta, \varphi) \exp \{ik [\sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi) + z \cos \theta]\} k^2 d\Omega, \quad (2.9)$$

donde hemos pasado a coordenadas esféricas usando $k_x = k \sin \theta \cos \varphi$, $k_y = k \sin \theta \sin \varphi$ y $k_z =$

⁵donde la s en COIPs se utiliza para señalar la forma en plural de las siglas.

$k \cos \theta$; y Ω la superficie de la esfera unitaria. La única forma de cumplir con la condición de haz adifraccional, Ec. (2.7) es fijar $\theta = \theta_0$, es decir, fijar la componente axial del vector de onda [51]. Esto lo podemos hacer forzando

$$\tilde{A}(\theta, \varphi) = \frac{1}{k^2} \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) A(\varphi), \quad (2.10)$$

por lo que la integral (2.9) será [19, 47]

$$u(\vec{r}) = e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\varphi) \exp\{ik_t(x \cos \varphi + y \sin \varphi)\} d\varphi, \quad (2.11)$$

donde $k_t = k \sin \theta_0$, $k_z = k \cos \theta_0$ y $A(\varphi)$ es una función compleja. Dependiendo de la función $A(\varphi)$ podemos obtener diferentes familias de COIPs.

2.2.1. Haces Bessel

Ahora nos centraremos en la familia de COIPs que producen vórtices ópticos de forma natural. En general, cualquier solución de la ecuación de onda que pueda ser separada en la forma

$$u(\vec{r}, t) = \exp\{i(k_z z \pm \omega t)\} U(q_1, q_2), \quad (2.12)$$

donde q_1 y q_2 son coordenadas transversales cilíndricas generalizadas, representa un COIP escalar [50]. Esta forma es resultado directo de la Ec. (2.11) escogiendo una función $A(\varphi)$ apropiada.

Si proponemos $A(\varphi) = e^{-il\varphi}$, el término vortical que encontramos en los LG, Ec. (2.1), y utilizamos algunas identidades de funciones especiales para tratar con la integral (2.11), en particular las funciones de Bessel de primera especie [46], obtenemos que el campo óptico más general será [3, 19, 44, 47]

$$u(\rho, \varphi, z) = J_l(k_t \rho) \exp\{i(l\varphi + k_z z)\}, \quad (2.13)$$

donde $J_l(x)$ es la función de Bessel de primera especie de orden l con argumento x . Esta familia de campos son los haces Bessel. Si tomamos esta solución propuesta en la ecuación de Helmholtz, Ec. (1.36) podemos ver que la igualdad se mantiene por lo que es una solución válida, esto nos dice que son haces realizables con sentido físico.

La onda plana en coordenadas cartesianas y los haces Bessel, como podemos ver de la expresión (2.13), son COIPs pero no son los únicos que existen. En otros sistemas coordenados también es posible encontrar haces invariantes en propagación, por ejemplo, los haces Mathieu en coordenadas cilíndricas elípticas [4] y los haces Weber en coordenadas cilíndricas parabólicas [5].

En todos los casos, como su nombre colectivo lo indica, los haces cumplen con la condición (2.7), es decir, su perfil de intensidad en planos transversales a la dirección de propagación se mantiene invariante, puesto que así han sido definidos en la Ec. (2.11). Ahora bien, en el caso ideal, esta condición es válida incluso si $z \rightarrow \infty$. En la práctica esta distancia se ve limitada por el método de generación de los haces [19], por lo que la característica de campo invariante es válida para una distancia de propagación finita, pero ciertamente esta distancia es mucho más grande para los COIPs comparado con los haces que sí presentan difracción, como los haces Gauss o los LG por mencionar algunos.

En la Fig. 2.3 podemos ver la forma de los BBs descritos por la Ec. (2.13). Al compararla con los LG, Fig. 2.6, podemos notar que los BBs tienen una estructura más complicada, pero para el caso de $l = 0$ se recupera la situación de no vorticidad en el haz estructurado. En cambio, cuando l aumenta vemos la aparición del vórtice en el eje óptico.

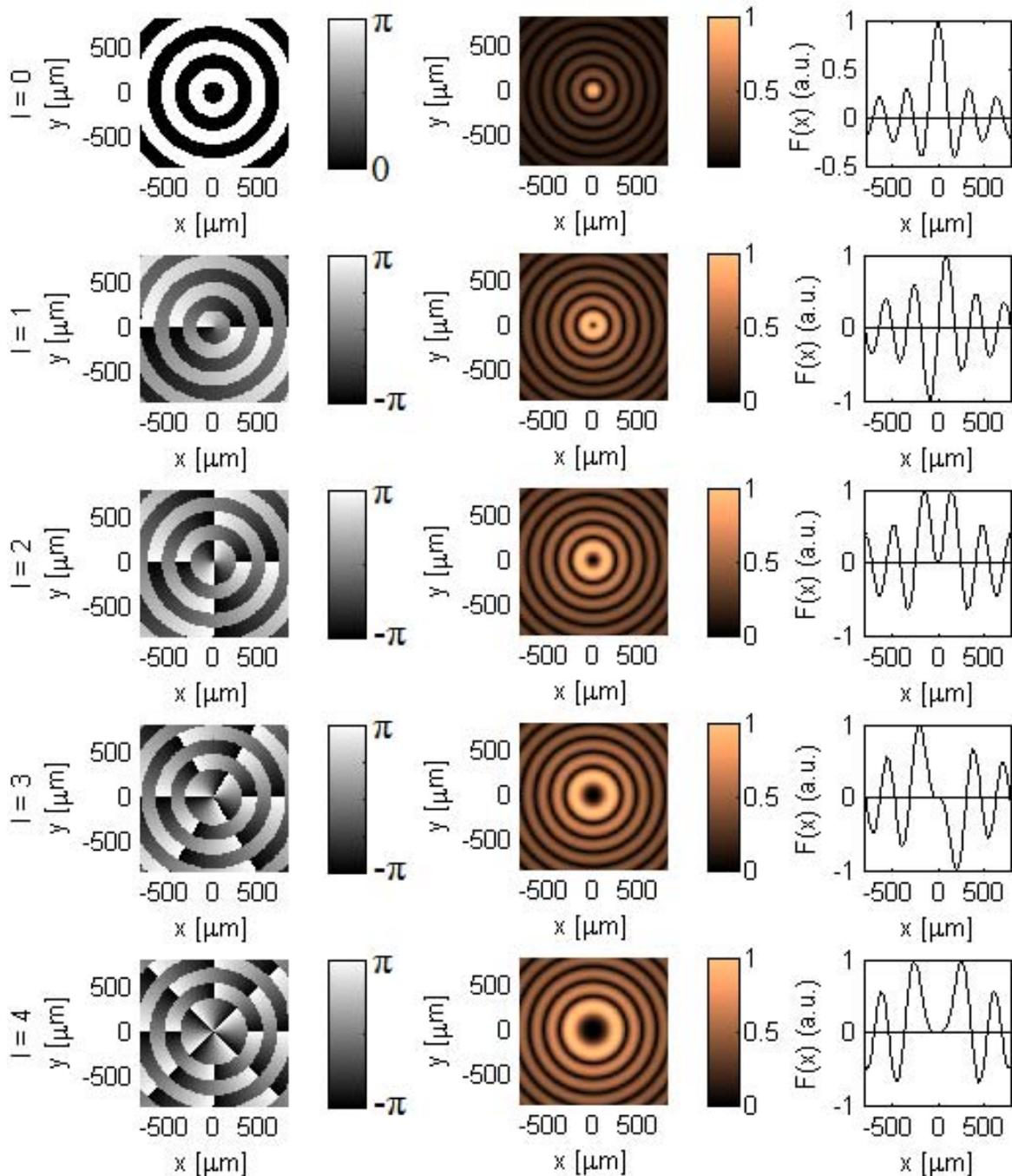


Figura 2.3: Características transversales de los haces Bessel para diferentes cargas topológicas. Columnas, izquierda: fase del BB; central: intensidad del haz en el plano $z = 0$; derecha: campo $u = F$ como función de x en el plano $z = 0$ a la altura $y = 0$. De arriba hacia abajo la carga topológica aumenta en uno en cada renglón desde $l = 0$ hasta $l = 4$.

Viendo los perfiles de intensidad podemos notar que el vórtice, es decir, la región de nula intensidad solo ocurre en el eje, pero la función de intensidad va creciendo cada vez más lento conforme l incrementa, lo que provoca regiones de muy baja, prácticamente nula, intensidad.

Notemos que los anillos oscuros se forman en los nodos donde hay un cambio de fase de π . Este cambio es una discontinuidad en la fase, de modo que esto también representa una dislo-

cación de fase, pero de tipo “borde”, en contraste con la dislocación de “tornillo” de un vórtice, el cual también se encuentra presente, pero únicamente en el eje del haz, mismo fenómeno que aparece en los haces LG con $p \neq 0$ como ya hemos mencionado.

Por otro lado, en la Fig. 2.4 podemos ver la propiedad de los campos invariantes en propagación, en particular de un BB, en comparación con un LG, ambos son vórtices ópticos con la misma carga topológica de valor $l = 3$. Pero sus propiedades son distintas, desde la estructura de fase y de intensidad, ver Figs. 2.6 y 2.3 para LG y BB respectivamente, hasta la propagación.

En dicha figura podemos ver que bajo las mismas condiciones de propagación⁶ el haz LG se difracta notablemente mientras que en el mismo intervalo espacial de propagación el BB se mantiene sin variación alguna. Esta propiedad es realmente notable pues se puede trabajar con los BB en un rango muy amplio donde se tiene la certeza que las propiedades del haz no han variado.

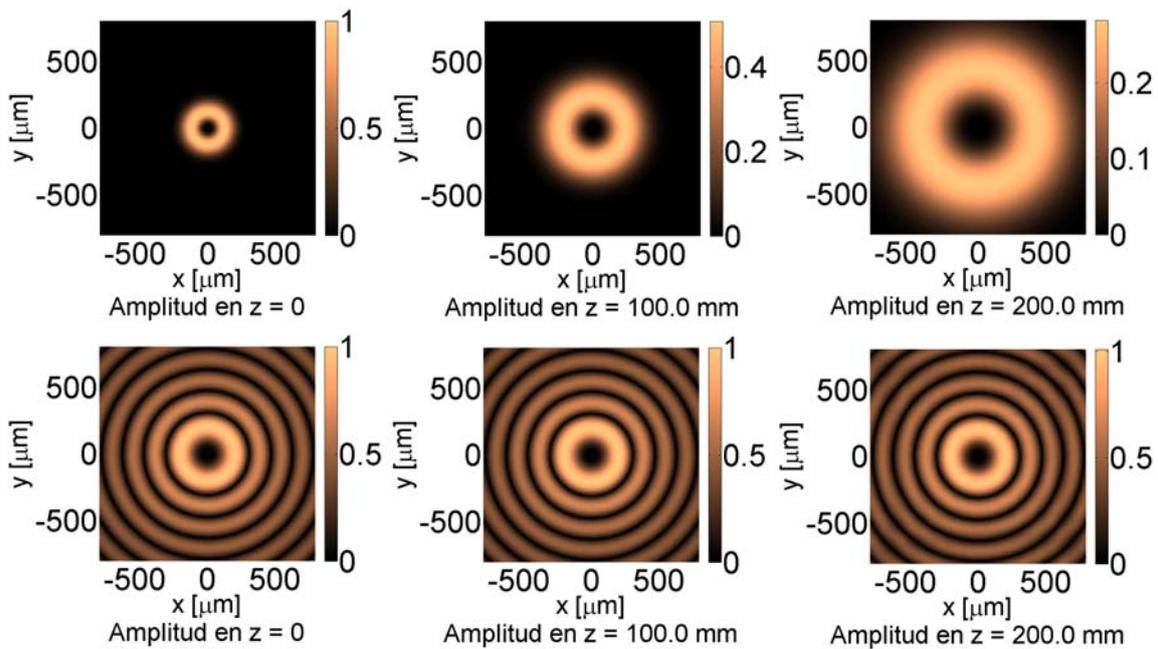


Figura 2.4: Comparación de la propagación de un LG (arriba) y un BB (abajo), ambos con carga topológica $l = 3$. Ambos haces han sido propagados desde $z = 0$ hasta $z = 200\text{mm}$ por el mismo método de propagación que emplea difracción de Fresnel.

⁶Las figuras constan de simulaciones realizadas en un programa, elaborado como parte fundamental de este trabajo, que emplea la difracción de Fresnel para propagar en campo cercano. Sobre este programa elaboraremos a detalle en el siguiente capítulo.

2.2.2. Espectro de Fourier de los BBs: Cálculo de parámetros experimentales en función de los parámetros del sistema óptico

Como ya hemos visto, tanto los LG como los BB tienen una estructura radial bastante interesante, y que debe de ser tomada en cuenta para poder decir algo sobre la circulación de energía en vórtices ópticos, como se puede apreciar en los términos dependientes de ρ en la Ec. (2.44) que muestra el flujo de energía transversal de los LG. Por lo tanto, para estudiar la dependencia del flujo de energía únicamente como función de la carga topológica debemos deshacernos de la estructura radial de los haces, pero sin perder la información que esta trae.

De las Figs. 2.6 y 2.3 podemos ver que tanto los LG como los BB cambian su distribución espacial de intensidad conforme cambia la carga topológica, es por esto que no podemos cuantificar la circulación de energía como función únicamente de la carga topológica sin tomar en cuenta estos cambios en la distribución radial.

Si consideramos un haz Bessel de la forma descrita en la Ec. (2.13), podemos obtener su transformada de Fourier por medio de una transformación de fase empleando una lente delgada y propagando por difracción de Fresnel, Ec. (1.33). Pasando esta expresión a coordenadas cilíndricas circulares con las transformaciones siguientes

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ u &= \rho' \cos \varphi', \\ v &= \rho' \sin \varphi', \end{aligned} \tag{2.14}$$

obtenemos que el campo en el plano focal de la lente será

$$\begin{aligned} U_f(\rho', \varphi') &= \frac{\exp\left[i\frac{k}{2f}\rho'^2\right]}{i\lambda f} \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho U_L(\rho, \varphi) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}\rho\rho'(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')\right]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ahora, como $\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi' = \cos(\varphi - \varphi')$, al sustituir el haz Bessel de la Ec. (2.13) en la expresión del campo en el plano focal (2.15) tenemos

$$\begin{aligned}
 U_f(\rho', \varphi') &= \frac{\exp\left[i\frac{k}{2f}\rho'^2\right]}{i\lambda f} e^{ik_z z} \\
 &\times \int_0^\infty d\rho \rho J_l(k_t \rho) \int_0^{2\pi} d\phi e^{il\phi} \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}\rho\rho' \cos(\phi - \varphi')\right].
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Haciendo $\beta \equiv -(2\pi/\lambda f)\rho'$ y $\phi - \varphi' \equiv \phi$ podemos reescribir la expresión anterior como

$$U_f(\rho', \varphi') = \frac{\exp\left[i\frac{k}{2f}\rho'^2\right]}{i\lambda f} e^{ik_z z} \int_0^\infty d\rho \rho J_l(k_t \rho) \int_0^{2\pi} d\phi e^{il\phi} e^{i\beta\rho \cos\phi}. \tag{2.17}$$

Pero podemos escribir la función Bessel de primera especie de orden l como [52]

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{il\phi} e^{i\beta\rho \cos\phi} = 2\pi i^l J_l(\beta\rho), \tag{2.18}$$

entonces la Ec. (2.17) pasa a ser

$$U_f(\rho', \varphi') = \frac{\exp\left[i\frac{k}{2f}\rho'^2\right]}{i\lambda f} e^{ik_z z} 2\pi i^l e^{il\varphi'} \int_0^\infty d\rho \rho J_l(k_t \rho) J_l\left(\rho' \rho \frac{2\pi}{\lambda f}\right). \tag{2.19}$$

Dado que las funciones de Bessel forman una base ortogonal, la integración de dos funciones de Bessel nos dará [46]

$$\int_0^\infty \rho d\rho J_l(k_1 \rho) J_l(k_2 \rho) = \frac{1}{k_1} \delta(k_1 - k_2). \tag{2.20}$$

Por lo tanto, el campo en el plano focal de la lente, Ec. (2.19), pasa a ser simplemente

$$U_f(\rho', \varphi') = \frac{\exp\left[i\frac{k}{2f}\rho'^2\right]}{i\lambda f} e^{ik_z z} 2\pi i^l e^{il\varphi'} \frac{\delta\left(k_t - \frac{2\pi}{\lambda f}\rho'\right)}{k_t}. \tag{2.21}$$

La Ec. (2.21) nos dice que todos los haces Bessel, sin importar su carga topológica, tienen como transformada de Fourier un anillo de radio ρ' ,

$$\rho' = \frac{1}{k} f k_t, \quad (2.22)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda. Recordando que podemos escribir $k_t = k \sin \theta_0$, entonces el anillo quedará expresado como

$$\rho' = f \sin \theta_0, \quad (2.23)$$

siendo esta θ_0 , la inclinación de los frentes de onda, la cantidad que podemos asociar con los parámetros experimentales del haz.

De esta manera podemos ajustar el radio del anillo conociendo la longitud de onda del láser, la inclinación de los frentes de onda descritos por k_t y el valor de la distancia focal f de la lente empleada para pasar al espacio de Fourier, y así obtener un anillo de un radio lo suficientemente grande para ser percibido por los instrumentos de medición, que en nuestro caso es una cámara CCD⁷.

Este fenómeno de que todos los BB que comparten la misma k y k_t se enfocan en el mismo anillo se puede ver en la Fig. 2.5 donde se ha simulado el paso de varios BB con las mismas propiedades, pero variando l , por una lente con una distancia focal f fija.

Esta propiedad nos resultará de gran utilidad al estudiar la circulación de energía en vórtices ópticos, y haremos énfasis en eso más adelante.

⁷CCD son las siglas en inglés para charge-coupled device, o dispositivo de carga acoplada que es empleado en cámaras digitales.

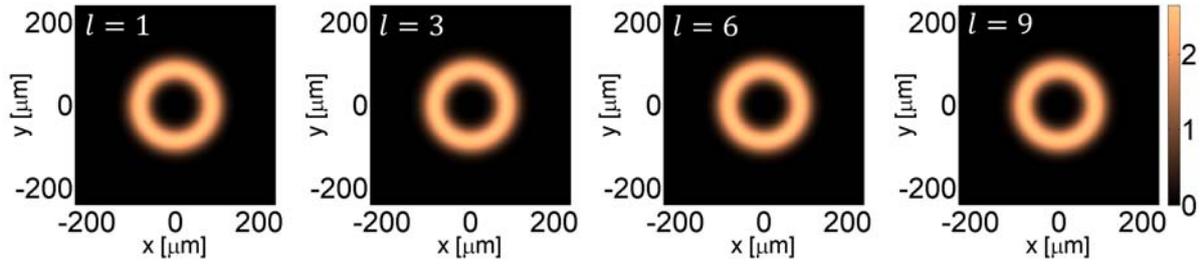


Figura 2.5: Haces Bessel con la misma k y k_r enfocados usando una lente delgada positiva con distancia focal $f = 50mm$ para diferentes valores de l . Todos los haces caen en anillos del mismo radio y ancho.

2.3. Carga topológica y frentes de onda helicoidales

Llamemos $\phi(\vec{r})$ a la función de fase, de esta forma podemos representar una onda de la forma más general como

$$u(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp \{i\phi(\vec{r})\}, \quad (2.24)$$

con $A(\vec{r})$ la amplitud de la onda y $\phi(\vec{r})$ su fase, donde ambos pueden depender de las coordenadas espaciales, pero no de la temporal en este caso pues el análisis lo hemos realizado a partir de la ecuación de Helmholtz que considera ondas monocromáticas.

Previamente hemos mostrado una solución para la ecuación paraxial de Helmholtz, los haces LG, Ec. (2.1), y una solución escalar invariante en propagación para la ecuación de onda, los BB, (2.13). A grandes rasgos podemos ver que consisten en una amplitud modulada por funciones dependientes de la coordenadas radial, un factor de fase dependiente de z , y en el caso de los LG factores de fase adicionales que dependen de ρ , pero sólo un factor de fase dependiente de la coordenada azimutal φ , i.e. haces de la forma

$$u(\rho, \varphi, z) = A(\rho, z) \exp \{i\phi'(\rho, z)\} \exp \{il\varphi\}. \quad (2.25)$$

El término $\phi = l\varphi$ genera una dislocación de fase de tipo tornillo, o dicho de otro modo, los haces de este tipo poseen una estructura de fase helicoidal caracterizada por el índice entero l , conocido como carga topológica [2, 8, 9, 53]. Los haces con la estructura presentada en la Ec. (2.25) cumplen que $A(\rho, z)$ cae lo suficientemente rápido conforme $\rho \rightarrow \infty$. Además, notemos que si en la Ec. (2.25) $l \neq 0$ la continuidad del campo eléctrico requiere que $A(0, z) = 0$, i.e., en una pequeña vecindad alrededor del eje la función $A(\rho, z)$ tiene que caer a cero [8]. Esto es lo

que genera una región de intensidad cero alrededor del eje de propagación del haz.

En la Fig. 2.6 podemos ver la estructura de fase y su perfil de intensidad para el vórtice más simple, es decir, un haz de la forma:

$$u(\rho, \varphi) = A(\rho) \exp \{il\varphi\}, \quad (2.26)$$

con $A(\rho)$ una función gaussiana que modula la intensidad.

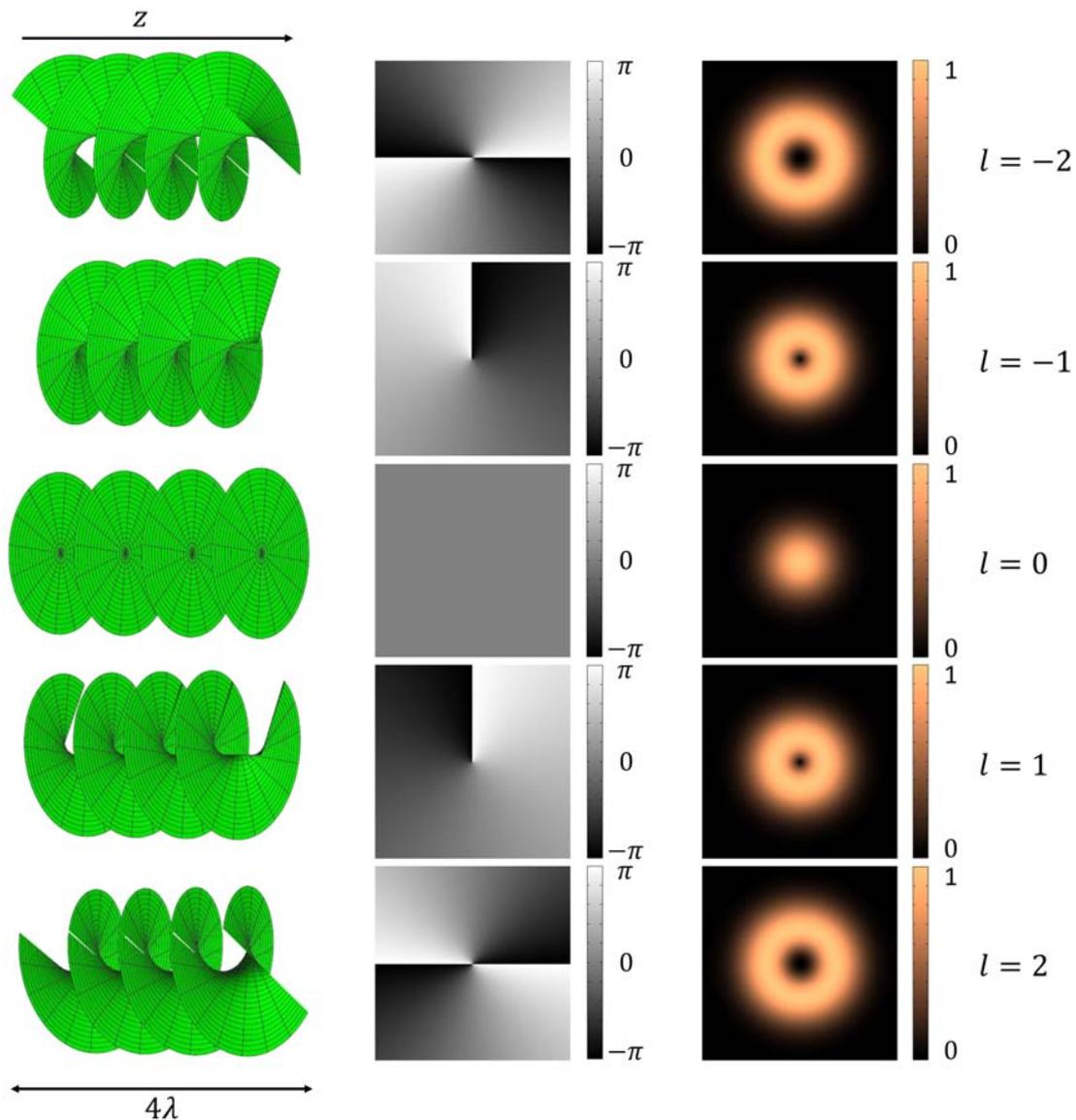


Figura 2.6: Dependencia de la estructura del haz con la carga topológica l . Columnas. Izquierda: Estructura helicoidal de la fase en un intervalo de 4λ propagándose en dirección z . Central: Valores de la fase en una longitud de onda; cuando pasa de color negro a blanco la fase ha cambiado en 2π . Derecha: Perfil de intensidad en el plano $z = 0$, (la intensidad está normalizada a 1). De arriba a abajo se va incrementando el valor de la carga topológica en uno desde $l = -2$ a $l = 2$.

De la Fig. 2.6 podemos ver que para $l = 0$ recuperamos el haz gaussiano, no tenemos vórtice óptico. Aún más, podemos apreciar que conforme aumenta el valor absoluto de la carga topológica, i.e., cuando aumenta $|l|$, la región de nula intensidad incrementa, esto debido a que cerca del origen para cumplir con la continuidad del campo eléctrico la amplitud se comporta como $A(\rho) \propto \rho^l$. Así, al aumentar $|l|$ la región de nula intensidad debe de aumentar como potencia de l , aunque estrictamente hablando la intensidad cero se encuentra únicamente en el punto donde cruza el eje óptico al plano transversal de observación.

Además podemos apreciar que la carga topológica es un índice que mide cuántas veces la fase gira 2π en una longitud de onda y el número de ondas que se intercalan para formar la estructura completa del vórtice.

Por lo anterior, consideramos que la carga topológica es el número principal para caracterizar los vórtices ópticos, pero aún no nos podemos deshacer de los otros índices y coordenadas que brindan estructura radial a los vórtices cuando realizamos un estudio detallado de dichos haces.

2.4. Circulación de energía

La energía es una de las propiedades fundamentales de cualquier sistema físico, y la luz no es ninguna excepción. La fuerza de Lorentz nos dice que la fuerza ejercida por un campo electromagnético sobre una partícula cargada es [34, 35, 44]:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (2.27)$$

donde se asume una carga puntual q moviéndose con una velocidad \vec{v} . Reescribiendo esta expresión en sus componentes cartesianas, y usando la notación con índices⁸ por brevedad tenemos

$$F_i = q \left(E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k \right), \quad (2.28)$$

donde se ha usado el símbolo de Levi-Civita⁹, ϵ_{ijk} , para escribir el producto cruz en sus com-

⁸En esta notación el vector \vec{a} será escrito como a_i , donde $i = 1, 2, 3$ representa la componente x, y, z respectivamente

⁹El símbolo de Levi-Civita es igual a 1 si la combinación de índices ijk es una permutación par de 123 y es igual a -1 para permutaciones impares, cualquier otra permutación fuera de éstas es cero.

ponentes.

Para simplificar aún más la notación, emplearemos la convención de Einstein para índices repetidos que indican implícitamente una suma sobre estos índices.

El trabajo ejercido sobre la carga puntual entre dos tiempos arbitrarios t_0 y t_1 es entonces [34, 35, 44]:

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt v_i F_i = \int_{t_0}^{t_1} dt q v_i E_i. \quad (2.29)$$

El campo magnético no contribuye al trabajo por ser el producto $\vec{v} \times \vec{B}$ perpendicular a \vec{v} . Para una distribución continua de cargas¹⁰ d en un campo de velocidades \vec{v} , la densidad de energía U de los campos electromagnéticos puede ser expresada como [35, 37, 44]:

$$U = -\vec{J} \cdot \vec{E}, \quad (2.30)$$

donde $\vec{J} = d\vec{v}$.

Empleando las ecuaciones de Maxwell, al sustituir la Ec. (1.4) en la Ec. (2.30) y usando la Ec. (1.2) obtenemos

$$-\vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right). \quad (2.31)$$

Esta expresión tiene la forma de una ecuación de continuidad para la energía [35, 37]

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial d}{\partial t}. \quad (2.32)$$

Esto nos permite identificar en la Ec. (2.31)

$$d = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2, \quad (2.33)$$

¹⁰Se ha cambiado la notación tradicional en donde se emplea ρ para referirse a la distribución de cargas puesto que hemos empleado ρ previamente para referirnos a la coordenada radial en coordenadas cilíndricas circulares. A falta de una mejor letra se ha escogido d para referirnos a esta distribución

como la densidad de energía electromagnética y

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}, \quad (2.34)$$

como la densidad de flujo de energía. S es llamado el vector de Poynting [34–38, 40, 44].

Cuando trabajamos con una onda electromagnética sin fuentes, como las que hemos estado tratando durante todo este trabajo, no podemos hablar de una densidad de energía electromagnética, únicamente del flujo de energía dado por \vec{S} .

Al tratar con vórtices ópticos, esperamos también una circulación de energía alrededor de la singularidad de fase [2, 7–9, 54].

Puesto que la densidad de flujo de energía \vec{S} está dada en términos de los campos complejos \vec{E} y \vec{B} , la densidad de flujo de energía será también un campo complejo.

La densidad de flujo de energía viene dada por la estructura del haz, principalmente por el estado de polarización¹¹, y la contribución que contiene la información de la inhomogeneidad espacial del haz [7]. En particular, el flujo de energía que de ahora en adelante trataremos como el vector de Poynting promediado sobre el periodo de la oscilación de la onda, para un haz monocromático puede ser separado como [7]:

$$\vec{S} = \vec{S}_C + \vec{S}_O, \quad (2.35)$$

donde S_C y S_O son llamados flujos de densidad de espín y orbital respectivamente, el primero asociado a la polarización y el segundo a las mencionadas inhomogeneidades.

Considerando ondas monocromáticas podemos escribir el vector de Poynting (tomado como el promedio temporal en un ciclo) como [54]:

$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(\vec{E}^* \times \vec{B} \right). \quad (2.36)$$

Al usar las ecuaciones de Maxwell se puede llegar a la expresión [54]:

¹¹El estado de polarización de un haz óptico describe la dirección de vibración del campo eléctrico de dicho haz [36–38].

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c^2}{2\omega} \epsilon_0 \text{Im} \left(\vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E}) \right) \\ &= \frac{c^2}{2\omega} \epsilon_0 \left[\frac{1}{2} \nabla \times \text{Im} \left(\vec{E}^* \times \vec{E} \right) + \text{Im} \left(\vec{E}^* \cdot (\nabla) \vec{E} \right) \right],\end{aligned}\quad (2.37)$$

con $\omega = ck$. De esta forma podemos escribir el vector de Poynting únicamente en términos del campo eléctrico. Se ha añadido la notación invariante de Berry para una operación vectorial que en coordenadas cartesianas se lee como [7]:

$$\left[\vec{E}^* \cdot (\nabla) \vec{E} \right]_j = E_x^* \frac{\partial E_x}{\partial j} + E_y^* \frac{\partial E_y}{\partial j} + E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial j}, \quad (2.38)$$

con $j = x, y, z$.

Para describir la polarización tomemos un haz cuyo campo eléctrico posee un estado de polarización transversal que puede ser descrito por un vector de Jones de polarización \hat{e} , i.e. un haz de la forma,

$$\vec{E} = u \hat{e}_\sigma, \quad (2.39)$$

con

$$\hat{e}_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_x + i\sigma \hat{e}_y), \quad (2.40)$$

en la base de polarización circular, donde $\sigma = \pm 1$ es el espín, o helicidad, del fotón.

Usando la polarización descrita en la Ec. (2.39), el primer sumando de la Ec. (2.37) se puede ver como una mezcla de las componentes del estado de polarización, debido al producto cruz, por lo que depende esencialmente del carácter vectorial de la luz. Este término contribuye de manera puramente transversal al flujo de energía [6]. Es por esto que este termino se asocia a la contribución de espín en la Ec. (2.35) [6, 7, 54].

Por otro lado, el segundo sumando de la Ec. (2.37) contiene contribuciones separadas, por el producto punto, de las componentes ortogonales de polarización del haz, incluida una componente longitudinal a lo largo de z . El flujo transversal de este termino está compuesto por la suma de cada componente lineal de polarización y se asocia con un flujo orbital de energía [6]

puesto que estas componentes nos dan la información de inhomogeneidad del haz mencionado en la Ec. (2.35) [6, 7, 54].

Por lo discutido anteriormente tenemos que los sumandos de (2.37) corresponden a los términos de la Ec. (2.35):

$$\vec{S}_C = \frac{c^2}{4\omega} \epsilon_0 \text{Im} \left(\nabla \times \left(\vec{E}^* \times \vec{E} \right) \right), \quad \vec{S}_O = \frac{c^2}{2\omega} \epsilon_0 \text{Im} \left(\vec{E}^* \cdot (\nabla) \vec{E} \right). \quad (2.41)$$

Asumamos ahora un haz que tenga un campo eléctrico de la forma propuesta en la Ec. (2.24). Usando la Ec. (2.39) podemos pasar a una expresión escalar en términos de la intensidad del campo u ,

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} |u|^2, \quad (2.42)$$

por lo que podemos tomar las expresiones de la Ec. (2.41) y reescribirlas como [6, 7]:

$$\begin{aligned} \vec{S}_C &= -\frac{\sigma}{2k} \left(-\hat{e}_\rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial r} \right) I, \\ \vec{S}_O &= \frac{1}{k} I \nabla_\perp \phi = \frac{1}{k} I \left(\hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \phi. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Si tomamos nuestro haz LG, Ec. (2.1) y lo sustituimos en las expresiones (2.43) para el flujo orbital obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{S}_C &= -\hat{e}_\varphi \sigma I \frac{1}{|l|!} \frac{1}{kw_z} \left(\frac{\rho}{w_0} \right)^{2|l|-1} \left(|l| - \frac{\rho^2}{w_0^2} \right) \exp \left\{ \frac{\rho^2}{w_0^2} \right\}, \\ \vec{S}_O &= \hat{e}_\varphi I \frac{1}{|l|!} \frac{1}{kw_z} \left(\frac{\rho}{w_0} \right)^{2|l|-1} l \exp \left\{ \frac{\rho^2}{w_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Notemos que \vec{S}_C y \vec{S}_O están relacionadas para $l \neq 0$ como

$$\vec{S}_C = -\frac{\sigma}{l} \left(|l| - \frac{\rho^2}{w_0^2} \right) \vec{S}_O, \quad (2.45)$$

por lo que el espín contribuye de manera importante a la circulación de energía dependiendo de la posición radial ρ que se esté observando, siendo dominante para regiones lejanas al origen, si este se fija en el eje óptico, siempre que $\sigma \neq 0$.

Si tomamos un haz linealmente polarizado, $\sigma = 0$, podemos apreciar que el flujo solo está compuesto por \vec{S}_O , por lo que finalmente hemos obtenido una circulación de energía alrededor del eje óptico, eje z , por lo que podemos afirmar que un vórtice óptico siempre va acompañado de una circulación de energía transversal alrededor de la singularidad de fase. En la Fig. 2.7 podemos ver de forma esquemática la circulación de energía en un LG.

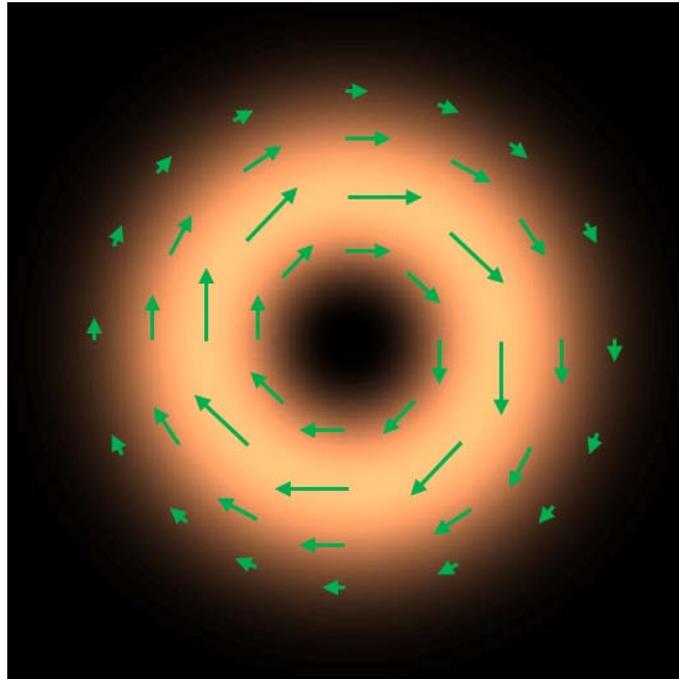


Figura 2.7: Circulación transversal de energía en un haz LG con $l = 3$. Las flechas indican el vector de Poynting en cada punto donde las flechas inician.

La separación del flujo de energía en una componente de espín y otra orbital fue con el objetivo de mostrar la circulación transversal de energía, pero no hay duda alguna que las ecuaciones desarrolladas para separar el vector de Poynting son de más complicadas. A continuación desarrollaremos brevemente, con el objetivo de relacionarlo con el momento angular orbital, que trataremos en la siguiente sección, el vector de Poynting completo, sin separarlo en las componentes previamente mencionadas.

Considerando polarización lineal, tal como la entrega el láser que se emplea en el laboratorio, podemos escribir de forma general los campos \vec{E} y \vec{B} de la forma [10]:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= ik \left[u\hat{x} + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial x} \hat{z} \right] e^{ikz}, \\ \vec{B} &= ik \left[u\hat{y} + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \hat{z} \right] e^{ikz},\end{aligned}\quad (2.46)$$

esto nos permite evaluar el vector de Poynting completo promediado en el tiempo obteniendo

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= c^2 \epsilon_0 \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle = c^2 \frac{\epsilon_0}{2} \left[\langle \vec{E}^* \times \vec{B} \rangle + \langle \vec{E} \times \vec{B}^* \rangle \right] \\ &= i\omega c^2 \frac{\epsilon_0}{2} (u\nabla u^* - u^*\nabla u) + \omega k \epsilon_0 |u|^2 \hat{z}.\end{aligned}\quad (2.47)$$

Por no dejar cabos sueltos, si permitimos polarización circular o lineal, caracterizada por $\sigma = -1, 1$ para circular derecha e izquierda respectivamente, y $\sigma = 0$ para polarización lineal, el vector de Poynting en simetría circular cilíndrica estará dado como [2, 51, 55]:

$$\langle \vec{S} \rangle = c\omega^2 \frac{\epsilon_0}{2} |u|^2 \left[\langle S_\rho \rangle \hat{\rho} + \left(\frac{l}{k\rho} - \frac{\sigma}{2k} \frac{1}{|u|^2} \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \hat{z} \right], \quad (2.48)$$

donde $\langle S_\rho \rangle$ es la componente radial del vector de Poyntig.

2.5. Momento angular orbital

Para los sistemas físicos clásicos, la densidad de momento angular está definido como [44, 56]:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{p}(\vec{r}), \quad (2.49)$$

donde \vec{p} es la densidad de momento lineal. Luego el momento angular total será simplemente

$$\vec{J} = \int \vec{j} d\vec{r}. \quad (2.50)$$

El momento angular \vec{J} se suele descomponer como

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}', \quad (2.51)$$

donde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$, con \vec{r} la posición del centro de masa, y \vec{P} el momento lineal total. \vec{L} se conoce como momento angular orbital puesto que está asociado a la rotación del sistema respecto a un punto de observación, en este caso el origen, por lo que tiene carácter extrínseco. \vec{S}' está asociado a la rotación del objeto respecto a su centro de masa por lo que es un momento angular intrínseco.

En la teoría electromagnética la densidad de momento \vec{p} está dado como [8, 10, 34–38, 44, 56]:

$$\vec{p} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\vec{S}}{c^2}. \quad (2.52)$$

El momento lineal se presenta en términos del flujo de energía, puesto que la luz no es un objeto material sino una onda electromagnética que porta energía.

De esta forma la densidad de momento angular de una onda electromagnética será

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (2.53)$$

Para la luz la densidad de momento angular orbital \vec{l} está asociado con la rotación del flujo de energía alrededor del origen, mientras que la densidad de momento \vec{s} está asociada a la propiedad intrínseca de polarización.

Es importante mencionar que los vórtices ópticos no portan momento angular por sí solos, el termino de fase $\exp\{il\varphi\}$ no puede generar un momento angular orbital. Es la estructura completa del haz que acompaña a este término vortical el que genera el momento angular orbital [1, 54].

Si consideramos un vórtice óptico de la forma

$$u(\rho, \varphi, z) = u_0(\rho, z)e^{il\varphi}, \quad (2.54)$$

al sustituirlo en la Ec. (2.47) obtenemos que la densidad de momento en la dirección φ es

$$\epsilon_0 \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle_\phi = \frac{\epsilon_0 \omega l |u|^2}{\rho}. \quad (2.55)$$

Por otro lado, el producto cruz con \vec{r} nos dará la densidad de momento angular, en la dirección z ,

$$j_z = \vec{r} \times \epsilon_0 \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle_\phi = \epsilon_0 \omega l |u|^2. \quad (2.56)$$

Notemos que el momento j_z ha resultado ser una función lineal de la carga topológica.

Además la densidad de energía del mismo haz es [10]:

$$w = c \epsilon_0 \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle_z = c \epsilon_0 \omega k |u|^2 = \epsilon_0 \omega^2 |u|^2, \quad (2.57)$$

por lo que la relación energía-momento angular resulta ser

$$\frac{j_z}{w} = \frac{l}{\omega}. \quad (2.58)$$

Finalmente, al integrar sobre el plano transversal xy la razón momento angular a energía por unidad de longitud del haz será simplemente

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\iint \rho d\rho d\phi \left(\vec{r} \times \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle \right)_z}{c \iint \rho d\rho d\phi \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle_z} = \frac{l}{\omega} \quad (2.59)$$

La relación energía a momento angular de la Ec. (2.59) nos indica que el momento angular por unidad de energía, por unidad de longitud del haz, por fotón, depende únicamente de la carga topológica y la frecuencia de la luz. Sin embargo esta cantidad no se traduce en un cambio lineal de las propiedades mecánicas del haz respecto a l . A un nivel clásico, la cantidad determinante en la interacción con materia es la densidad de momento angular, como se ha mostrado en el caso de objetos macroscópicos [57].

Una forma de medir esta interacción materia-energía es por medio de pinzas ópticas, que consiste en atrapar partículas y manipularlas modificando las propiedades del haz, desde su posición para un desplazamiento, hasta la carga topológica para cambiar la velocidad de rotación de las partículas confinadas [2, 9, 20–23, 51, 58, 59].

Considerando todo lo expuesto en este capítulo, el hecho de que todos los BB tengan la misma distribución de intensidad en el plano de Fourier nos permitirá estudiar la circulación de energía únicamente como función de la carga topológica a un nivel clásico, y no solo la relación por fotón descrita por la teoría previa. Dado que la distribución de intensidad se mantendrá fija conforme varía l , los efectos percibidos al cambiar dicho valor de la carga topológica de los BB, como el momento angular orbital y la circulación transversal de energía dependerán solo de l y no de la redistribución de intensidad en la dirección radial como sería el caso de tomar los haces sin enfocar [55].

Capítulo 3

Metodología teórica y experimental para el estudio de la circulación de energía

En esta parte del trabajo se trata la generación teórica y experimental los haces Bessel de tal forma que podamos variar la carga topológica de forma sencilla. Se describe el método de simulación numérica de la propagación de los BB, y su análisis por difracción al ser obstaculizados por una rendija vertical en el plano de Fourier al enfocar los BB. Se desarrolla la expresión teórica de la razón entre la componente transversal y longitudinal del vector de Poynting en la rendija, y así relacionarla con el desplazamiento lateral de los lóbulos difractados por la rendija. Finalmente se describe a detalle el montaje experimental usado, incluida la generación de los haces por medio de holografía, empleando un modulador espacial de luz, para poder comparar así teoría, simulación numérica y experimento.

3.1. Métodos de generación de haces Bessel

Ahora abordaremos el tema de cómo lograr que se cumplan las condiciones necesarias de los campos eléctricos y magnéticos para que se satisfaga la ecuación de Helmholtz y obtener la solución descrita en la Ec. (2.13).

Como hemos visto, es posible describir el paso de la luz por diferentes medios a través de las transformaciones de fase que ocurren al pasar por dichos medios, Ec. (1.21). Utilizando esta técnica estudiaremos la propagación de la luz al cruzar sistemas ópticos más complejos.

Para generar los haces Bessel de interés nos centraremos en dos métodos principales, los refractivos que emplean sistemas ópticos que funcionan a base de refracción, como lo hacen las

lentes delgadas y demás sistemas de lentes con diferente estructura, de tal forma que el retraso total de fase a través de la lente transforme la luz en lo que se busca. Y los métodos difractivos que se basan en sistemas ópticos que en vez de aprovechar la refracción de la luz emplean la difracción, como las placas zonales de Fresnel¹ [38]. De esta forma podremos comparar que método es el mejor para trasladarlo de la teoría y las simulaciones numéricas al experimento.

3.1.1. Métodos refractivos

Una de las formas más sencillas de generar un haz Bessel empleando métodos refractivos es por medio de un axicón [11–14]. Un axicón es una lente cónica caracterizada por tener un determinado radio R_0 y un ángulo del prisma α , con simetría de rotación alrededor del eje z , como se muestra en la Fig. 3.1.

En la misma figura podemos ver la acción del axicón sobre una onda plana que incide de izquierda a derecha en la lente. Los frentes de onda ubicados en la mitad superior del eje óptico, que coincide con el eje del axicón, son refractados por la lente hacia abajo un cierto ángulo, dado por la ley de Snell, que calcularemos en seguida, mientras que los frentes que se encuentran debajo del eje óptico son refractados hacia arriba creando un conjunto de ondas cónicas convergentes y divergentes cuya interferencia es la que genera el haz Bessel.

La intensidad producida por un axicón al ser iluminado por una onda plana puede ser escrita como [11, 12]

$$I \propto |J_0(k_t \rho)|^2, \quad (3.1)$$

por lo que el axicón es ideal para generar haces Bessel de orden 0, pero para generar ordenes más altos es necesario modificar la luz que entra al axicón, tema que trataremos más adelante.

¹Las placas zonales de Fresnel son placas formadas por anillos concéntricos que se alternan en opacos y transparentes de tal forma que la luz que llega a la placa se difractará alrededor de las zonas opacas. Dependiendo del espaciamiento de los anillos se pueden conseguir diferentes patrones de interferencia constructiva y destructiva. [38]

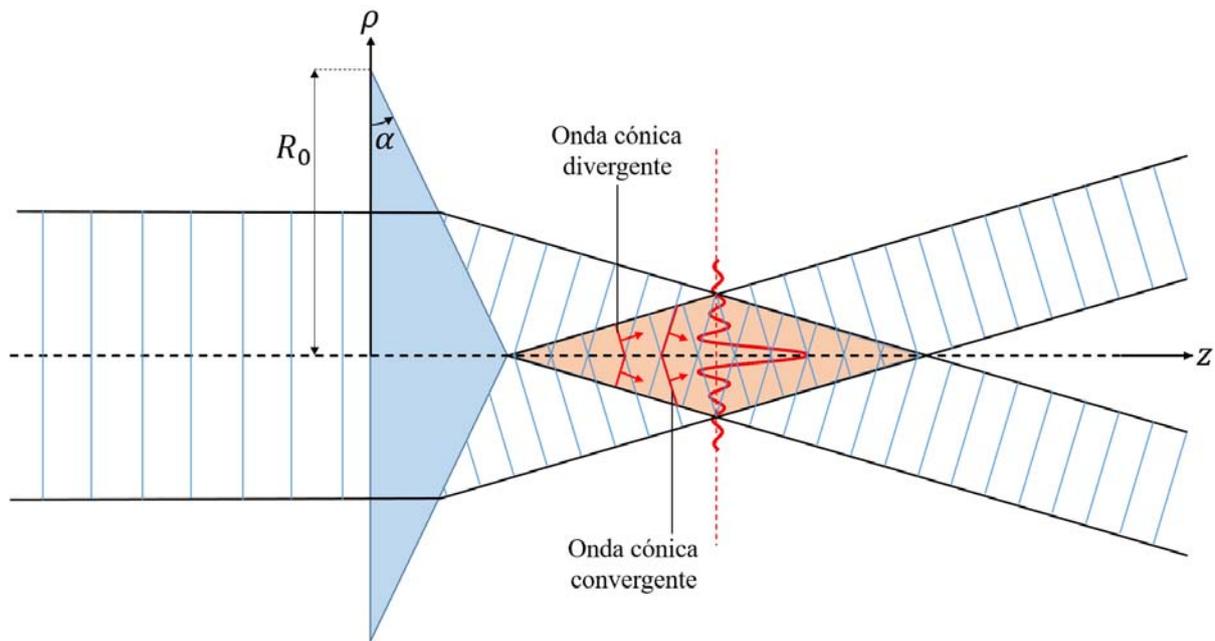


Figura 3.1: Diagrama de un axicón de radio R_0 y ángulo α . En la región naranja se forma el haz Bessel por la interferencia de ondas convergentes y divergentes generadas debido a la desviación de la luz al cruzar el axicón.

Si analizamos la refracción de la luz por óptica geométrica podemos determinar la distancia máxima a la que se puede generar el haz Bessel, esta distancia z_{max} comprende toda la región donde se intersectan las ondas convergentes y divergentes como se muestra en la Fig. 3.2.

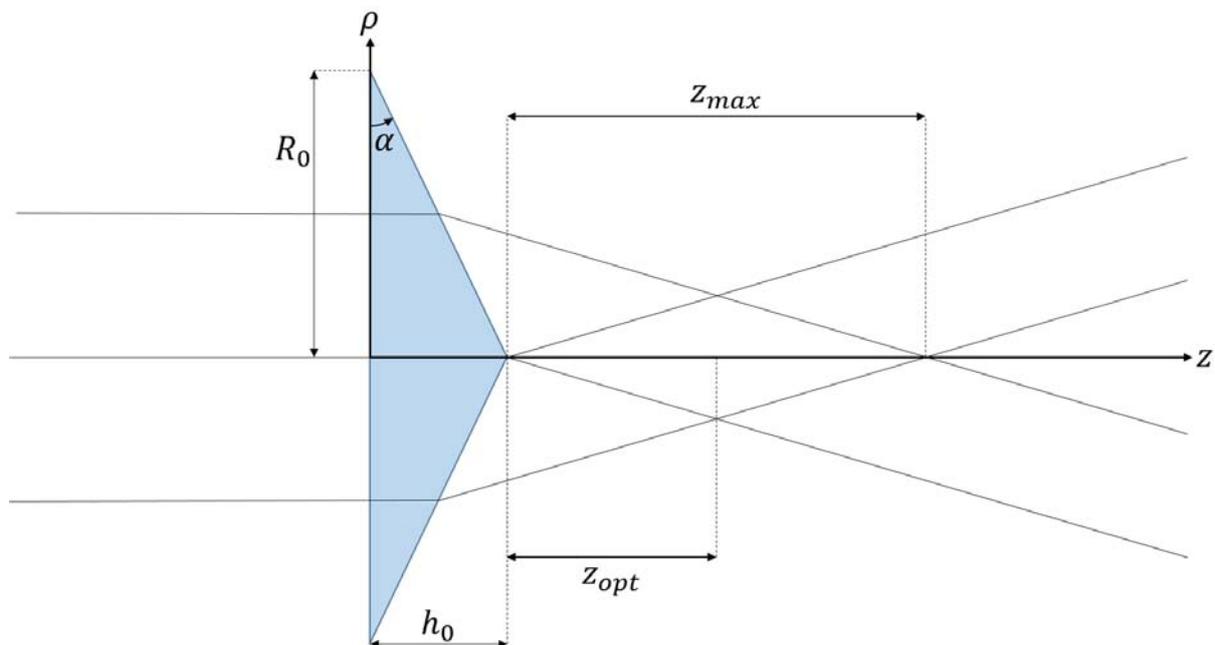


Figura 3.2: En un axicón la región donde se forma el haz Bessel invariante en propagación alcanza una distancia z_{max} medida desde el ápice de la lente hasta donde termina la intersección de las ondas convergentes y divergentes. La distancia a la que se tiene en la práctica el mejor haz Bessel se conoce como distancia óptima de observación z_{opt} .

Teóricamente el haz generado es invariante en propagación en toda esta región, en la práctica el mejor punto de observación es donde el ancho de la región es mayor, esta distancia óptima de observación z_{opt} está dada por la expresión (3.2). Conocer esta distancia es fundamental para poder ubicar el plano de observación en la mejor posición durante la ejecución del experimento.

$$z_{opt} \approx \frac{z_{max}}{2} \tag{3.2}$$

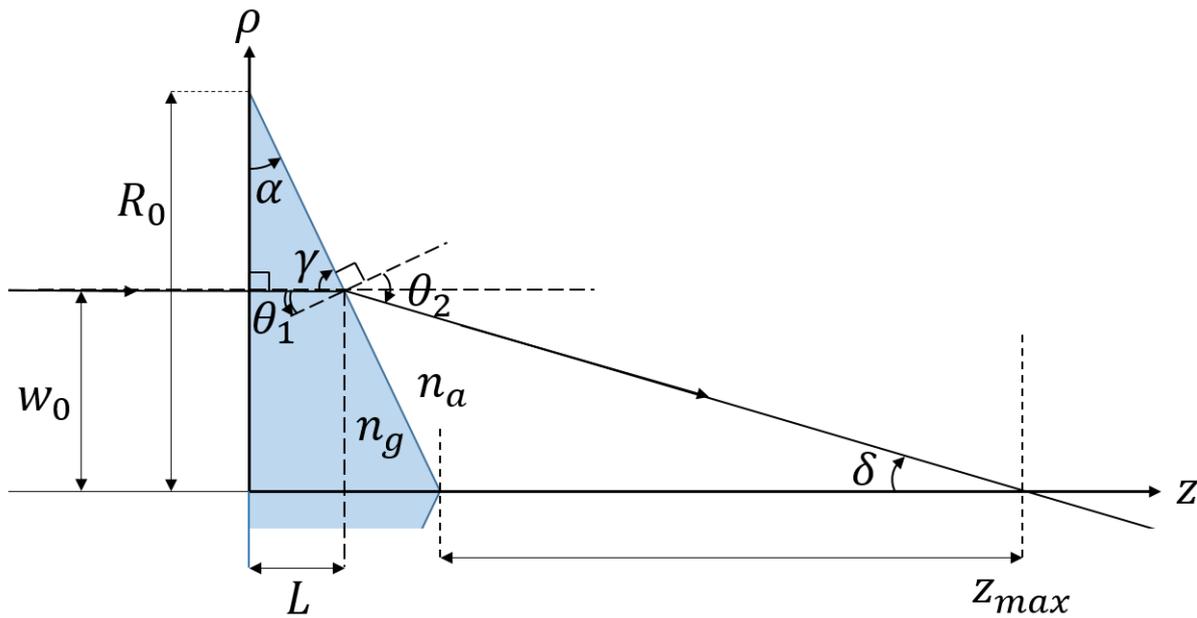


Figura 3.3: Diagrama de los ángulos importantes para un axicón iluminado por luz que tiene un radio medido desde el eje óptico w_0 .

Para ubicar el punto z_{max} tomemos el rayo más lejano al eje óptico, aquel ubicado a un radio w_0 y usemos la ley de Snell para ver la refracción de dicho rayo al cruzar el prisma. Cuando éste pasa del aire al axicón la interfaz es perpendicular al rayo por lo que no se refracta, pero al cruzar la segunda interfaz se refracta un ángulo θ_2 respecto a la normal,

$$n_g \sin \theta_1 = n_a \sin \theta_2. \tag{3.3}$$

De la Fig. 3.3 podemos ver que se cumple

$$\theta_1 = \alpha. \quad (3.4)$$

Aún más, fijándonos en el ángulo δ , ángulo entre el rayo más externo refractado y el eje óptico tenemos que

$$\delta = \theta_2 - \alpha. \quad (3.5)$$

Considerando el índice de refracción del aire como $n_a = 1$ y usando las expresiones para los ángulos θ_1 y θ_2 en términos del ángulo α , que caracteriza al axicón en la ley de Snell (3.3), obtenemos

$$\delta = \arcsin(n_g \sin \alpha) - \alpha. \quad (3.6)$$

Tomando la recta que inicia en $z = L$, $\rho = w_0$ con pendiente $m = \tan \delta$, que representa al rayo más externo refractado por el axicón, y usando la aproximación de lente delgada $L \rightarrow 0$, al calcular su intersección con el eje óptico obtenemos la distancia máxima de propagación, z_{max} , del haz Bessel, Ec. (3.7)

$$\rho = mz + w_0 \Rightarrow z_{max} \approx \frac{w_0}{\tan \delta}. \quad (3.7)$$

Por lo que al emplear la expresión encontrada para el ángulo δ , Ec. (3.6), en la Ec. (3.7) obtenemos la distancia máxima de propagación como función de las propiedades físicas del axicón (n_g, α) y el radio w_0 de la luz con la que es iluminada la lente

$$z_{max} \approx \frac{w_0}{\tan [\arcsin(n_g \sin \alpha) - \alpha]}. \quad (3.8)$$

Ahora, para saber como transformará la fase un axicón realicemos el mismo análisis que el hecho para una lente delgada con el cual obtuvimos la transformación de fase de dicho instrumento óptico por medio de su función de espesor que contribuye en un retraso de fase, Ecs. (1.20) y (1.30).

Fijándonos en la Fig. 3.2 podemos ver que el espesor va variando como

$$\Delta(\rho, z) = h_0 - \rho \sin \alpha, \quad (3.9)$$

al utilizar la aproximación de lente delgada para despreciar la dependencia en z . Sustituyendo el espesor (3.9) en la Ec. (1.21) para la transformación de fase, e ignorando la fase global constante dada por h_0 , conseguimos la expresión para la acción del axicón

$$t_A(\rho, z) = \exp\{-ik(n-1)\rho \sin \alpha\}. \quad (3.10)$$

Como hemos mencionado, el axicón refractivo sólo genera BB de orden cero. Para poder estudiar vórtices ópticos requerimos de BB de órdenes superiores, esto se puede lograr manteniendo el axicón, pero la luz de entrada debe de ser modificada.

Existen varios métodos para lograr esto, el más directo es codificar la luz que entra al axicón con una fase $\exp\{il\varphi\}$ lo que generará un BB de orden l [15]. Mientras que un segundo método consiste en iluminar el axicón con un haz Laguerre-Gauss que porta la misma fase azimutal $\exp\{il\varphi\}$, como hemos visto en la Ec. (2.1), lo que generará un BB de orden l de manera más eficiente [17].

Ambos métodos generan una intensidad que está aproximadamente descrita, en la región $0 < z \leq z_{max}$, por [15, 17]

$$I \propto |J_l(k_t \rho)|^2, \quad (3.11)$$

portando ambos haces la fase azimutal que genera los vórtices ópticos que nos interesan.

Si bien en los dos métodos es posible usar axicones refractivos o lentes cónicas, la necesidad de dotar a la luz con la fase azimutal, o con un LG, para generar los BB de orden mayor a cero es conveniente usar métodos difractivos que permitan codificar la condición previa y el axicón

a la vez en un solo elemento por medio de holografía.

3.1.2. Métodos difractivos

La holografía consiste en crear hologramas digitales por medio de una computadora que modifiquen la fase de un haz. Por lo general, se usa un haz gaussiano como el que emiten los láseres más comunes y el holograma es una transformación de fase multiplicativa, al igual que el método empleado para describir el cambio de fase de una lente y del axicón refractivo que hemos usado en este trabajo.

La forma más versátil de trabajar la holografía es por medio de los moduladores espaciales de luz (SLM por sus siglas en inglés) que consisten en pantallas de cristal líquido nemático que cambian localmente, en cada pixel, la fase de la luz que cruza por la pantalla sin alterar la intensidad o la polarización [60]. De esta forma es posible crear hologramas con la forma deseada modificando la orientación de los cristales en cada pixel por medio de variaciones de voltaje controlados por el programa del modulador.

Nuestro SLM, un Hamamatsu LCOS-SLM (Optical Phase Modulator) X10468-04, tiene una pantalla de cristal líquido de 600×800 pixeles, por lo que nuestra resolución del holograma no puede ser arbitrariamente grande puesto que estamos limitados por los pixeles del equipo. El modulador trabaja una escala de grises que va de cero a 255. En estos 256 tonos de grises es donde se codifican los valores de fase que van de 0 a 2π . El modulador está optimizado para una longitud de onda de $510 \pm 50nm$, por lo que idealmente podríamos utilizar los 256 tonos de gris para codificar la fase. Sin embargo hemos medido cuantos tonos son necesarios para un giro de 2π , y con 205 se completa el giro, por lo que el holograma generado debe usar los 205 tonos, de lo contrario, si usamos los 256 tonos la fase no regresaría exactamente a 0 sino que se pasaría por un poco.

Para generar el holograma digital se calcula una función Bessel, Ec. (3.14) en una malla de 600×800 . Para la generación del holograma no requerimos de la función de pupila $P(x,y)$ ni la modulación gaussiana puesto que esos elementos ya los porta el haz que proviene del láser y que pasa por pupilas circulares, el montaje detallado lo describiremos en la sección de experimento. Los parámetros de la función Bessel se han escogido de manera tal que se obtenga la imagen más pequeña posible del BB en el plano conjugado del modulador sin perder calidad en el haz para conseguir un BB enfocado lo suficientemente grande. De esta forma aseguramos que la sensibilidad de la cámara CCD con la que se tomarán las imágenes no sea un problema como

lo sería al tratar con un Bessel enfocado demasiado pequeño.

Dado que sólo estamos codificando fase, se toma la fase de la función Bessel únicamente. A la par se crea una rejilla *blaze* [40], una rejilla que va de 0 a 2π en un periodo determinado de pixeles. Modificando el periodo se amplía o reduce la separación de los órdenes de difracción generados por la rejilla. Entre más pequeño sea el periodo mayor será la separación y más fácil se podrá filtrar espacialmente el haz de interés, que corresponde al orden 1 de difracción, pero con menos pixeles la calidad del BB se verá reducida [40]. Tras varios ensayos se determinó que el periodo ideal es de 6 pixeles para la rejilla.

Se suman la rejilla blaze y la fase del Bessel y se toma el modulo 2π de dicha suma para mantener la fase en este rango. Con esta información podríamos generar un holograma que generará un haz Bessel fácil de filtrar [61], pero para mejorar aún más la calidad del BB se agregan dos elementos más. Se incorpora una corrección de aberraciones que se obtiene de ver la diferencia entre lo que genera el modulador con lo esperado [18], luego, a esta máscara se le suma el holograma para corregir las aberraciones. Además, se modula la amplitud, no por medio del modulador directamente, que sólo modula fase, sino que se alteran localmente los parámetros de eficiencia de difracción de la rejilla para así cambiar la energía difractada localmente al primer orden de difracción [16]. De esta manera se obtiene un holograma que modula amplitud y fase en el plano conjugado del modulador, generando así el BB de interés al hacerle incidir el TEM_{00} del láser.

En la Fig. 3.4 se muestra un ejemplo de un holograma, generado por el método descrito en la sección de métodos difractivos, que generará, en el plano conjugado del SLM, un BB con $l = 10$. En dicha figura se puede apreciar la forma del Bessel, como se vio en la Fig. 2.3, y además se puede ver la rejilla blaze sobre todo el holograma.

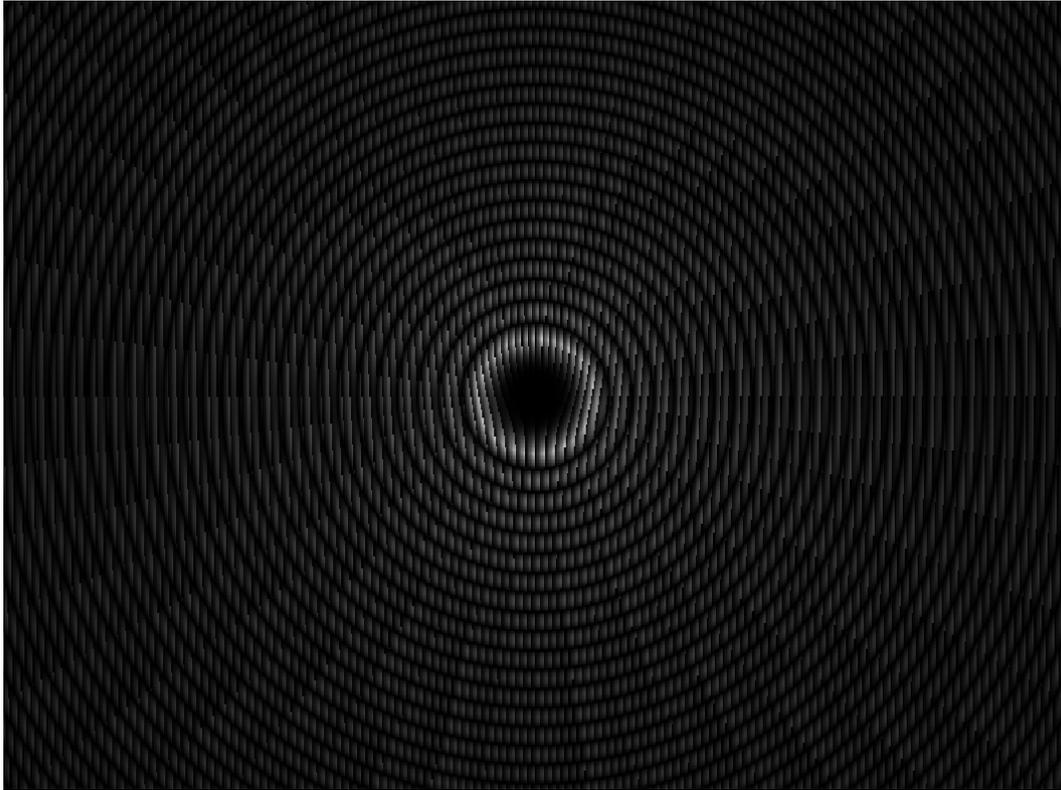


Figura 3.4: Holograma para generar un BB, con $l = 10$, que se proyecta en toda la pantalla del SLM.

En el apéndice B.1. se presenta el programa con el que se generaron los hologramas en lenguaje MATLAB. En el mismo programa se llama al SLM y se proyecta el holograma, lo que permite variar casi al instante, teniendo en cuenta el tiempo de respuesta del modulador, el holograma y por tanto el haz que se está obteniendo en el plano conjugado.

Hemos insistido en la rejilla y el filtraje espacial, que explicaremos a continuación, por razones prácticas. El SLM viene recubierto con una película antirreflejante a la entrada, lo que asegura que la mayor parte de la luz, que incide normal a la pantalla, entre al modulador y no se refleje antes de haber cruzado a través de él, pero la luz que no entra y se refleja en la primera superficie del equipo no es modulada, por lo que sobre el eje óptico no solo tendríamos la luz modulada sino contaminación lumínica importante de luz del TEM_{00} .

En la Fig. 3.5 se muestra el diagrama de un filtro $4f$, el cual consiste de dos lentes positivas con la misma distancia focal f . La entrada al filtro es el plano F que se encuentra a una distancia focal de la primera lente. A una distancia f de la lente, donde se enfoca la luz de entrada, se coloca un filtro, por lo general una apertura que sólo permita pasar la luz que proviene de una dirección determinada, como por ejemplo la que proviene de un primer orden de difracción. Luego a otra distancia f se coloca la segunda lente que recolectará la luz que proviene del foco de la primera para generar la imagen filtrada de la luz de entrada en el plano conjugado de F , el

plano F' .

Para filtrar la luz en eje se necesitaría un filtro anular que sólo permita el paso de la luz del anillo en el plano de Fourier del sistema $4f$ para obtener un BB limpio en el plano conjugado del modulador, pero crear un filtro anular no es tarea sencilla. Es por eso que se agrega la rejilla blaze y se manda la mayoría de la energía al primer orden de difracción, que está fuera de eje, así con una simple apertura circular se puede bloquear la luz en eje, y la de los otros órdenes de difracción, permitiendo únicamente el paso del primer orden para obtener un BB lo más limpio posible [61].

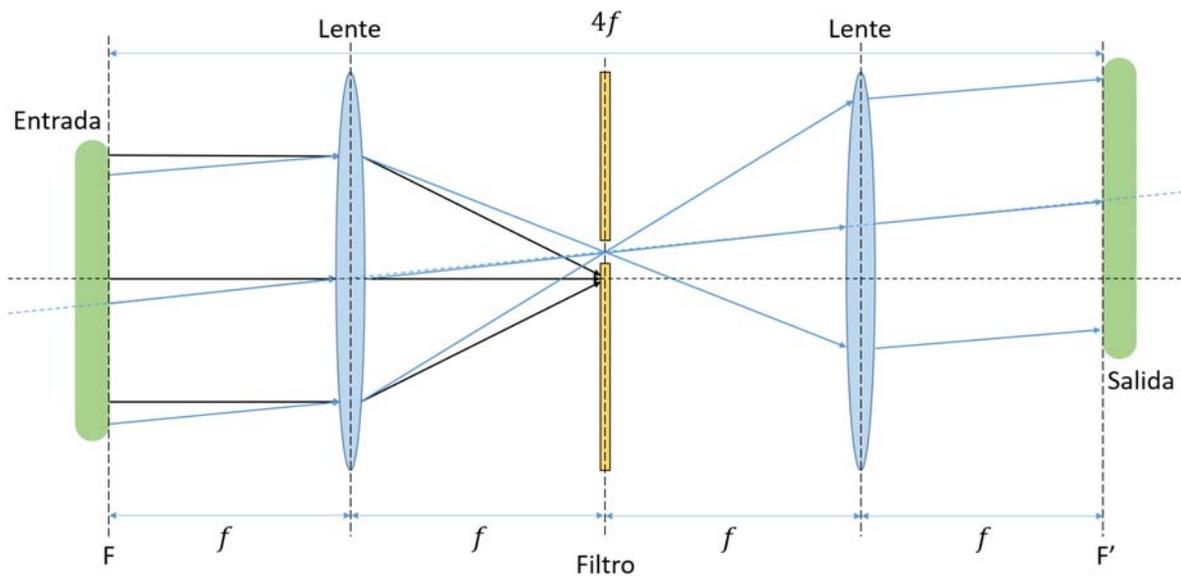


Figura 3.5: Diagrama de un sistema de filtrado $4f$. Consiste de dos lentes de la misma distancia focal. La luz que entra en un plano F a una distancia f de la primera lente es enfocada y filtrada por una apertura que bloquea toda la luz que no se desee dejando pasar solo la luz que porta la información de interés. La segunda lente forma la imagen filtrada en el plano conjugado F' .

3.2. Análisis de difracción de campo cercano para un vórtice Bessel-Fourier a través de una rendija: Simulación

Como hemos visto en el capítulo anterior, los vórtices ópticos, tanto los LG como los BB, poseen una rica estructura tanto radial como azimutal, Ecs. (2.1) y (2.13), que se puede ver a la vez en su distribución de intensidad como en su estructura de fase, Figs. 2.3 y 2.6. Dicho lo anterior, una caracterización directa del flujo de energía de estos haces dependerá no sólo de la carga topológica sino también de la distribución radial del haz que se esté trabajando.

Sin embargo, hemos estudiado una propiedad muy conveniente de los BB; como se ha hecho notar, todos los BB que posean el mismo vector de onda, \vec{k} , tendrán como transformada de Fourier una misma distribución de intensidad en forma de anillo, Ec. (2.21). Aún más, esta distribución tiene un radio determinado por dicho vector de onda y el foco de la lente positiva con la que se esté formando el espectro de Fourier, Ec. (2.22).

Al emplear la transformada de Fourier, a pesar de que la distribución de intensidad de los BB varía con la carga topológica, l , en el espacio de Fourier la distribución se mantiene en el anillo mencionado. Así, al variar l , el cambio en el flujo de energía, generado al realizar esta variación, estará asociado únicamente a l y no a la redistribución de intensidad en ρ .

Es posible realizar mediciones locales de la distribución del vector de Poynting de un haz empleando dispositivos diseñados para este fin, como los sensores de frentes de onda Shack-Hartmann que emplean un arreglo de lentes enfocados a una rejilla de sensores CCD o CMOS. Por la acción de las lentes, la inclinación local de los frentes de onda puede ser calculada por la posición de la imagen enfocada en el sensor lo que permite reconstruir el frente de onda [62–64]. Se han reportado investigaciones en las que se emplean estos sensores para medir el ángulo de inclinación del vector de Poynting en haces LG [65], pero dichos instrumentos requieren que el haz a analizar sea del orden de milímetros de diámetro, lo que consideramos bastante grande, además estos instrumentos tienen un elevado costo.

En la presente obra se presenta un método para medir de forma indirecta el flujo transversal de energía en haces Bessel variando su carga topológica con el objetivo de determinar una dependencia únicamente en l de dicho flujo por medio de un sistema completamente clásico, sencillo y con una resolución más alta que los sistemas Shack-Hartmann. Para desarrollar este método nos hemos basado en un trabajo previo donde se estudia el flujo de energía de vórtices ópticos, pero en el cual no se pudo llegar a determinar dicho flujo como función únicamente de la carga topológica [55].

Para esto se utiliza la transformada de Fourier de los BB, que llamaremos BF. Al BF se le rompe la simetría cilíndrica circular al hacerlo incidir sobre una rendija vertical y por medio de propagación de Fresnel se caracteriza la distribución de intensidad difractada por la rendija.

Estudiar la difracción de un BF resulta complicado desde el enfoque analítico, pero es posible realizar los cálculos de forma numérica dejando los detalles de operar la propagación de Fresnel a una computadora. Con este fin se ha diseñado un programa en lenguaje de programación MATLAB que puede ser consultado en el apéndice B.2. Las Figs. 3.6 y 3.7 muestran el

diagrama de flujo del programa creado.

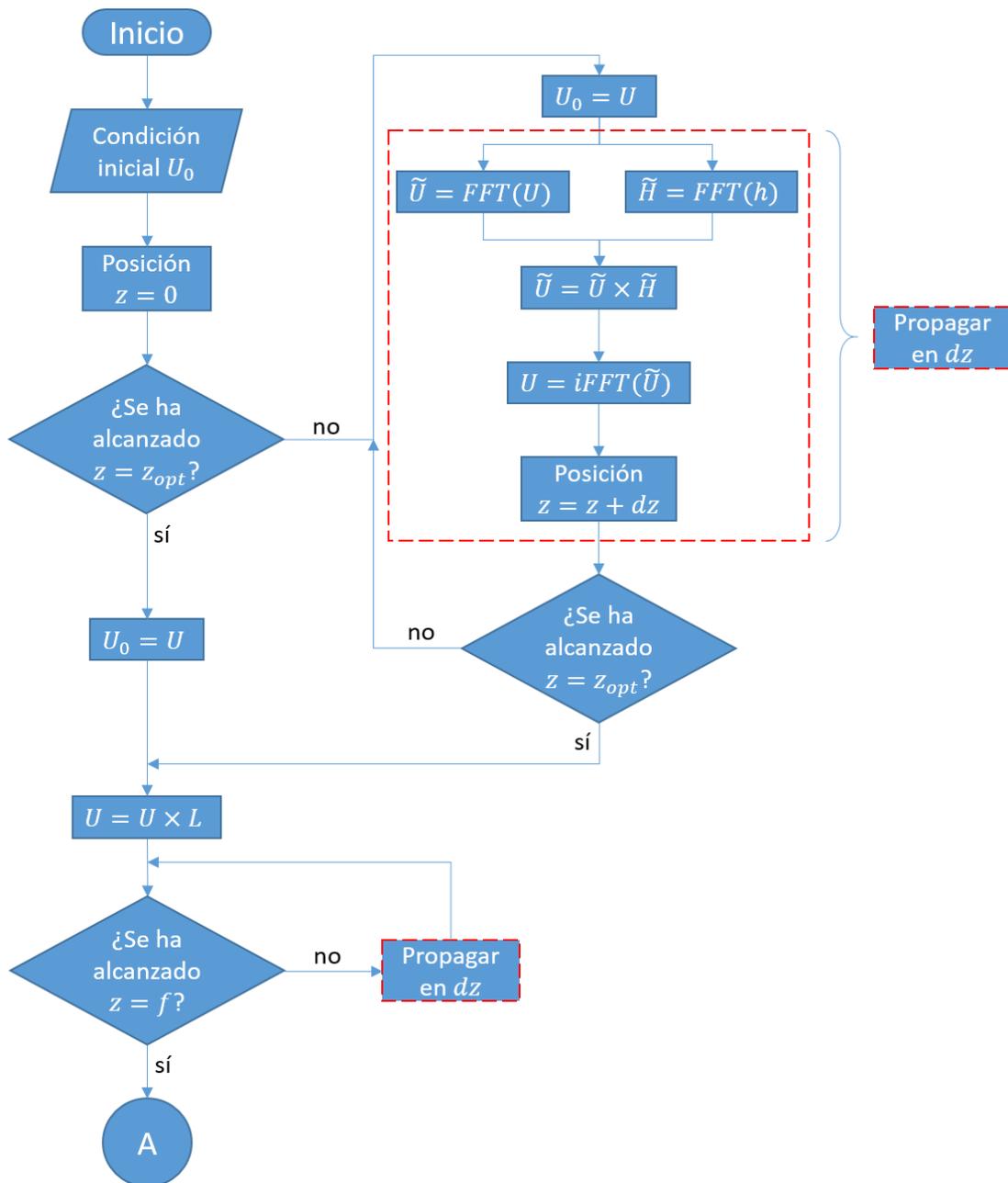


Figura 3.6: Diagrama de flujo de la simulación numérica para propagación de Fresnel de un BF.

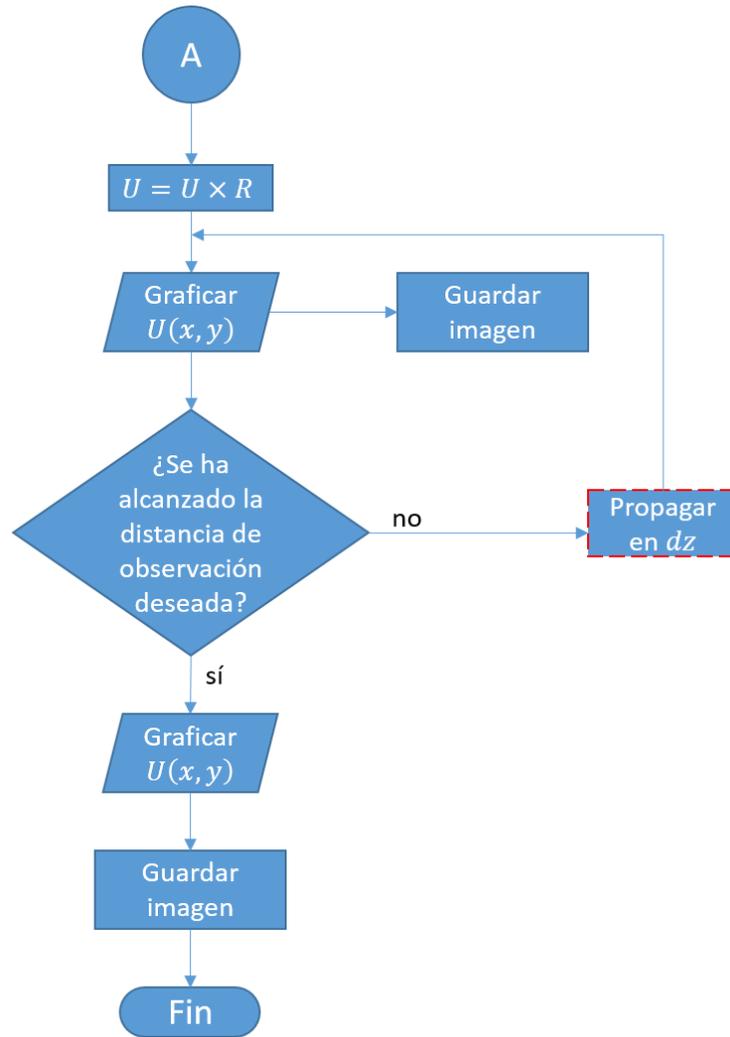


Figura 3.7: Continuación de la Fig. 3.6.

El programa crea una malla de $n \times n$ elementos tal que $n = 2^m$, con m un entero positivo, con el fin de poder emplear el algoritmo FFT² de manera más eficiente. Sobre esta malla, cada elemento corresponderá a un pixel de los planos transversales al eje z . Entre mayor sea en número de elementos la malla será más fina a costo de un mayor tiempo de computo.

Para dar inicio a la simulación numérica se requiere una condición inicial, U_0 , que se refiere al campo inicial que se propagará. En nuestro caso la condición inicial será un BB descrito como una fase azimutal multiplicada por la fase de un axicón, Ec. (3.10), lo que nos lleva una condición inicial de la forma

$$U_0 = P(x,y) \exp\left\{\frac{-\rho^2}{w_0}\right\} \exp\{-ik(n-1)\rho \sin \alpha\} \exp\{il\varphi\}, \quad (3.12)$$

²FFT son las siglas en inglés para transformada rápida de Fourier que calcula la transformada discreta de Fourier.

donde $P(x,y)$ es una función de pupila que limita el campo a una región finita y nos permitirá ajustar la simulación al experimento. De ser necesario $P(x,y)$ puede tomar la forma de una apertura circular como la que limita a las lentes en el caso de que el diámetro del haz sea comparable al de la apertura. Además se ha utilizado el hecho de que el haz generado por el láser es un TEM_{00} por lo que nuestro BB está modulado por una gaussiana.

También podemos generar el BB con un LG, Ec. (2.1), sobre el axicón, lo que da la condición inicial

$$\begin{aligned}
 U_0 = & P(x,y) \sqrt{\frac{2p!}{\pi(l+p)!}} \frac{\exp\{i(2p+l+1)\Phi(z)\}}{w(z)} \exp\{\pm il\varphi\} \\
 & \times \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right)^{l/2} L_p^l\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right) \exp\left\{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right\} \exp\left\{\frac{ik\rho^2}{2R(z)}\right\} \\
 & \times \exp\{-ik(n-1)\rho \sin\alpha\}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

En este caso la modulación gaussiana ya está incluida en la forma de los LG.

Otra forma de crear los BB es usando directamente la función Bessel que describe al haz, Ec. (2.13), de tal modo que la condición inicial tendría la forma

$$U_0 = P(x,y) \exp\left\{\frac{-\rho^2}{w_0}\right\} J_l(k_t\rho) \exp\{il\varphi\}. \tag{3.14}$$

Para que la condición inicial descrita por la Ec. (3.14) sea equivalente a las descritas por las ecs. (3.12) y (3.13) es necesario relacionar el ángulo α del axicón de las primeras dos ecuaciones con la k_t que caracteriza a la función Bessel en la última ecuación. Esto es sencillo si observamos la Fig. 3.3.

El vector de onda está dado por una componente transversal y una longitudinal, de la forma

$$\vec{k} = k_t\hat{\rho} + k_z\hat{z}, \tag{3.15}$$

que describe la dirección de propagación del haz. Observando la figura podemos ver que el haz se desvía con un ángulo δ , por lo que de la Ec. (3.6) tenemos que la componente transversal de

\vec{k} es

$$\begin{aligned} k_t &= k \sin \delta \\ &= k \sin [\arcsin (n_g \sin \alpha) - \alpha] . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Así, al emplear esta expresión para k_t en términos del ángulo α del axicón, los haces BB generados por los tres métodos serán aproximadamente equivalentes siempre que se mantenga el mismo valor de k y de w_0 .

Volviendo a la descripción del programa, una vez seleccionada la condición inicial se propagará el haz por medio de difracción de Fresnel hasta alcanzar la distancia óptima, z_{opt} , descrita por la Ec. (3.2).

Para propagar por medio de la difracción de Fresnel se usa la propiedad de que una convolución de funciones, en el espacio de Fourier, se traduce a una multiplicación de sus transformadas, como se mencionó en el capítulo 1, Ec. (1.14).

Así, tanto la condición inicial U_0 como el kernel de la convolución asociado a la difracción de Fresnel, Ec. (1.15), son llevadas al espacio de Fourier por medio del algoritmo FFT donde se multiplican. Posteriormente el resultado es regresado del espacio de Fourier usando la transformación inversa, iFFT, esto dará como resultado el campo propagado una distancia infinitesimal, dz . Dependiendo del detalle que se requiera, esta distancia puede ser reducida o aumentada a discreción. A este proceso le llamaremos “propagar en dz ” tal como se señala en la Fig. 3.6.

El programa sigue propagando en dz hasta que alcanza $z = z_{opt}$. En la distancia óptima tenemos el BB de mejor calidad, por lo que en esta posición es donde se coloca una lente positiva para obtener el BF. Para esto se emplea la función de transformación de fase de una lente positiva, Ec. (1.30), llamada L en el diagrama. En este caso el campo propagado U y L son multiplicados en el espacio de coordenadas puesto que la acción no está descrita por una convolución.

A continuación se propaga en dz el campo resultante hasta alcanzar el plano focal, $z = f$. En dicho plano se agrega la rendija vertical que consiste en una matriz de $n \times n$ elementos, la mayoría cero, a excepción de la región en que la rendija deja pasar la luz donde los elementos valen uno. Aumentando o reduciendo la región de elementos con valor 1 se puede variar el ancho de la rendija. De igual forma que con la función de la lente, el campo propagado U y la matriz de la rendija, R , se multiplican en el espacio de coordenadas.

El campo resultante es graficado en el plano xy y se guarda la imagen. Luego se continua

propagando en dz . Es en esta región donde ocurre la difracción por acción de la rendija, por lo que en cada intervalo de distancias en z que se considere de interés el programa grafica el campo propagado, $U(x,y)$, y guarda la imagen para su posterior análisis. La propagación sigue hasta que se alcance una distancia en z que sea suficiente para un buen análisis, o que iguale las condiciones de observación experimentales.

Las imágenes guardadas son analizadas ubicando un punto de interés del patrón de difracción generado por la rendija en cada imagen. Este punto de interés es el máximo de intensidad del patrón, mismo que se va rastreando en cada imagen conforme se avanza en z . Esto tiene el fin de relacionar el desplazamiento del máximo de intensidad con el flujo transversal de energía por medio de la Ec. (3.29).

3.3. Descripción teórica del flujo transversal de energía en vórtices Bessel-Fourier

Para caracterizar el flujo transversal de energía, desde un punto de vista teórico, es necesario conocer el vector de Poynting del campo que estemos utilizando. La Ec. (2.48) nos da una expresión general para el vector de Poynting de un haz en coordenadas cilíndricas circulares, pero no nos es de utilidad puesto que nos interesa un haz enfocado, BF.

Necesitamos calcular el vector de Poynting a partir de la expresión que hemos encontrado para el BF, Ec. (2.21). $U_f(\rho, \varphi)$ nos da el campo escalar en el plano de Fourier, transversal a la dirección de propagación.

Si consideramos un haz de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\hat{x} + E_z(\vec{r})\hat{z}, \quad (3.17)$$

con $\hat{x} = \cos \varphi \hat{\rho} + \sin \varphi \hat{\phi}$, tomando $U_f(\rho, \varphi) = E_x(\vec{r})$, la parte transversal del campo obtenida por medio de la aproximación paraxial, y $E_z(\vec{r})\hat{z}$ una corrección no paraxial del haz, obtenemos

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = U_f(\rho, \varphi) \cos \varphi \hat{\rho} + U_f(\rho, \varphi) \sin \varphi \hat{\phi} + E_z(\rho, \varphi, z)\hat{z}. \quad (3.18)$$

Para calcular el vector de Poynting, Ec. (2.34), necesitamos conocer tanto \vec{E} como \vec{B} . A partir de la Ec. (3.18) podemos obtener $E_z(\rho, \varphi, z)\hat{z}$ por medio de las ecuaciones de Maxwell,

en particular la Ec. (1.1) en el vacío,

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (3.19)$$

En coordenadas cilíndricas circulares la podemos escribir como [46]

$$\nabla \cdot \vec{E}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho U_f \cos \varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (U_f \sin \varphi) + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (3.20)$$

luego

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho U_f \cos \varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (U_f \sin \varphi). \quad (3.21)$$

Al calcular las derivadas requeridas llegamos a que la expresión para la derivada en z de la componente z del campo eléctrico, Ec. (3.21), es

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial z} = & -\frac{C_0}{\rho} e^{ik_z z} e^{il\varphi} \left[\left(\frac{ik}{f} \rho^2 + 1 \right) e^{i\frac{k}{2f} \rho^2} \delta \left(k_t - \frac{2\pi}{\lambda f} \rho \right) - \frac{2\pi}{\lambda f} \rho e^{i\frac{k}{2f} \rho^2} \delta' \left(k_t - \frac{2\pi}{\lambda f} \rho \right) \right] \cos \varphi \\ & - \frac{C_0}{\rho} e^{i\frac{k}{2f} \rho^2} e^{ik_z z} \delta \left(k_t - \frac{2\pi}{\lambda f} \rho \right) e^{il\varphi} (\cos \varphi + il \sin \varphi). \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde se ha definido $C_0 \equiv \frac{2\pi i^{l-1}}{\lambda k_t}$ y $\delta'(x)$ indica la derivada respecto a x de la delta de Dirac.

Integrando la Ec. (3.22) respecto a z y simplificando la expresión obtenemos que la componente E_z del campo eléctrico es

$$\begin{aligned} E_z(\rho, \phi, z) = & \frac{C_0}{\rho} e^{il\varphi} e^{i\frac{k}{2f} \rho^2} \delta \left(k_t - \frac{2\pi}{\lambda f} \rho \right) \left(\frac{ie^{ik_z z}}{k_z} \right) \\ & \times \left\{ \cos \varphi \left[\frac{ik}{f} \rho + 1 - \frac{2\pi}{\lambda f} \rho \frac{\delta' \left(k_t - \frac{2\pi}{\lambda f} \rho \right)}{\delta \left(k_t - \frac{2\pi}{\lambda f} \rho \right)} \right] - \cos \varphi - il \sin \varphi \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

La expresión (3.23) resulta un tanto complicada de manipular puesto aparece la delta de Dirac y su derivada en coordenadas cilíndricas circulares, por esta razón los cálculos siguientes fueron realizados en el programa de cálculo simbólico Mathematica.

Para calcular \vec{B} , necesario para obtener el vector de Poynting, utilizamos la Ec. (1.2) de Maxwell proponiendo un campo magnético similar a nuestro campo eléctrico del cual derivamos la ecuación de Helmholtz en el primer capítulo, i.e.,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (3.24)$$

por lo que su derivada temporal será simplemente

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -i\omega B_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -i\omega \vec{B}. \quad (3.25)$$

Así, de la Ec. (1.2) tenemos que

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (3.26)$$

donde \vec{E} es el vector descrito por la Ec. (3.18), con E_z la componente calculada en la Ec. (3.23).

La forma explícita de \vec{B} es larga y poco ilustrativa, al igual que el vector de Poynting completo, calculado por medio de la Ec. (2.34). Dado que nuestro interés recae en estudiar el flujo de energía por medio de la difracción ocasionada por una rendija vertical, la cantidad que nos interesa no es $\langle \vec{S} \rangle$, sino la razón entre la componente longitudinal y la transversal del vector de Poynting. Además, para haces helicoidales, como los BB o los BF, el ángulo de inclinación de los frentes de onda está relacionado con el flujo transversal del energía [55] como:

$$\tan \alpha_\varphi = \frac{\langle S_\varphi \rangle}{\langle S_z \rangle}. \quad (3.27)$$

Donde α_φ es el ángulo de inclinación de los frentes de onda respecto a la normal al plano de la rendija.

Si consideramos la propagación de una onda plana sobre una rendija que incide con un ángulo α_φ respecto a la normal de la rendija, si el ángulo es lo suficientemente pequeño entonces el patrón de difracción generado por la rendija será el mismo que en el caso de incidencia normal pero estará desplazado lateralmente respecto al eje de la rendija una cantidad $\tan \alpha_\varphi$ [66]. Así, para una región lo suficientemente pequeña del BF, acotada por la rendija, tenemos en esencia una onda plana, con ángulo de inclinación local correspondiente a la inclinación de los frentes de onda del vórtice en ese punto, por lo que su patrón de difracción se desplazará lateralmente. De esta forma, si medimos el ángulo de inclinación de los frentes de onda podemos obtener la relación entre el flujo de energía transversal y longitudinal siguiendo la Ec. (3.27) [55].

Notemos que si tomamos el vector eléctrico completo, \vec{E} , entonces $\text{Im} \left(\nabla \times \left(\vec{E}^* \times \vec{E} \right) \right) = 0$, por lo que $\vec{S}_C = 0$, resultado seguido de la Ec. (2.41). Es decir, al haber considerado polarización lineal, la componente de espín del flujo de energía efectivamente no contribuye, por lo que el vector de Poynting para nuestro BF será únicamente un flujo orbital de energía, de la misma forma que un LG con polarización lineal pierde su componente de espín del vector del Poynting.

Considerando la rendija vertical centrada en el origen se tiene que $S_\varphi = S_x$, por lo que el desplazamiento en x de los máximos de intensidad tendrán como pendiente [55]

$$\tan \alpha_\varphi = \frac{\langle S_x \rangle}{\langle S_z \rangle} \Big|_{x=0, y=\pm y_0}, \quad (3.28)$$

donde y_0 es la coordenada y del máximo de intensidad.

Tomando las componentes S_φ y S_z del vector de Poynting calculado en Mathematica, al aplicar la condición de la rendija vertical, la razón de la componente transversal y longitudinal del vector de Poynting se reduce a

$$\tan \alpha_\varphi = K_0 l, \quad (3.29)$$

donde

$$K_0 = \frac{C_0^2}{\omega} F(k_z^2, 1/f) \quad (3.30)$$

es una constante cuya forma explícita contiene demasiados factores como para ser escrita en

este trabajo (sin embargo puede ser consultada en el apéndice A) pero que se puede evaluar fácilmente introduciendo los valores del foco de la lente, f , el número de onda, k , y el ángulo de inclinación, δ , de la Ec. (3.16).

La Ec. (3.29) nos indica que también en el caso de un BF el desplazamiento del máximo de intensidad será proporcional a l , similar al caso de los vórtices ópticos no enfocados que ya han sido estudiados previamente por este método [55], pero donde no fue posible obtener una relación del tipo (3.29) por la interdependencia entre l y la distribución de intensidad.

3.4. Experimento

El pensar en un método que sólo emplea el SLM y una rendija como elementos difractivos nos brinda la ventaja de que su montaje es bastante sencillo. En el SLM es donde se proyecta el holograma que modificará la fase del TEM_{00} que emite el láser que se encuentra en el Laboratorio de Micromanipulación Óptica.

Por complicaciones prácticas que mencionaremos en el siguiente capítulo, en la parte experimental solo se generaron los BB por el método de codificar directamente la función Bessel y no se emplearon los métodos de axición con LG, ni axición con fase azimutal.

El montaje explicado en la Fig. 3.8, consiste de un láser Coherent Verdi V-6 que emite un TEM_{00} a $532nm$, seguido por un telescopio formado por un objetivo de microscopio $5\times$ Newport (elemento 2), con distancia focal $25.4mm$, y una lente positiva de distancia focal $200mm$ (elemento 4), por lo que la magnificación transversal del telescopio es aproximadamente $40\times$. Como se puede ver en la Fig. 3.9 hay un diafragma en el telescopio (elemento 3), esto es para controlar el tamaño del spot que llega a la pantalla del SLM. Además podemos observar una placa de $\lambda/2$ con un polarizador lineal (elemento 1), cuya función es controlar (reducir) la intensidad del haz, que se encuentra linealmente polarizado, rotando esta placa, ya que a pesar de colocar el control de la unidad del láser en su mínima potencia indicada sigue emitiendo un haz muy intenso que satura la cámara CCD de detección.

Empleando este montaje se logra incrementar el tamaño del spot lo suficiente para que la región limitada por el diafragma, y que llega al SLM, sea sólo la región cercana alrededor del máximo de la distribución Gaussiana, aproximando el haz por modular a una onda plana.

El filtro $4f$ fue formado con dos lentes positivas de distancia focal $200mm$ usando como barrera un diafragma circular posicionado de tal forma que sólo permite pasar el primer orden

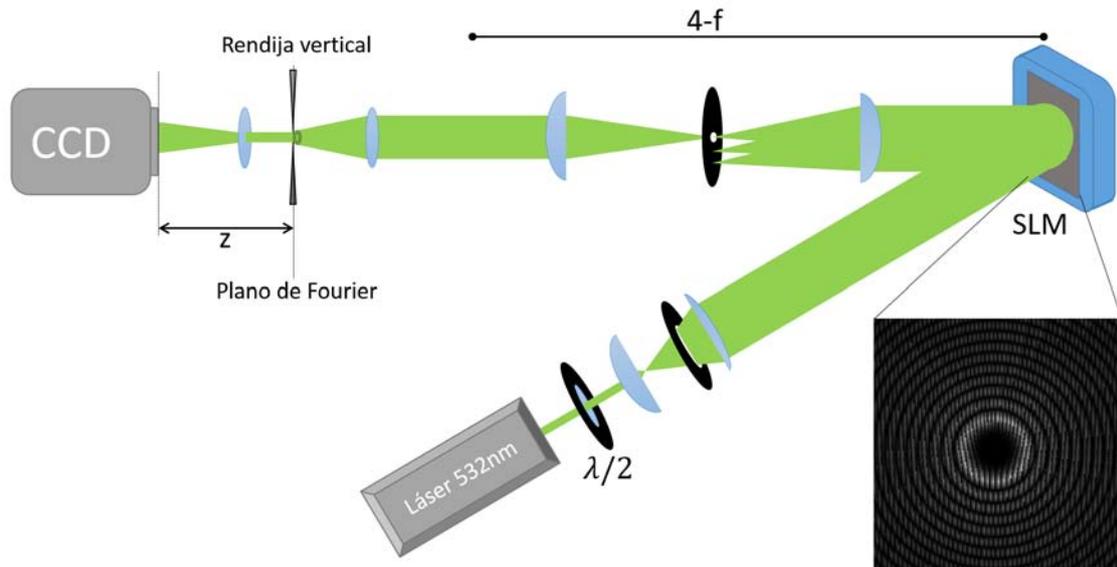


Figura 3.8: Montaje experimental. Se usa un telescopio para incrementar el área del TEM_{00} . Se refleja en el SLM con el holograma de fase del BB y se filtra con un sistema $4f$. El BB es enfocado sobre la rendija y se observa del otro lado con una CCD que se desplaza en z para capturar distintos planos de observación.

de difracción.

Finalmente, se enfoca el haz con una lente de 50mm sobre dos navajas cuya separación se controla con un tornillo micrométrico. Detrás de las navajas se coloca una lente positiva de 15mm para incrementar el tamaño de la imagen recibida en la cámara CCD, como se muestra en la Fig. 3.10. Tanto la cámara como dicha lente se montan sobre una platina con un tornillo micrométrico que permite desplazar el plano de observación hasta 20mm atrás del plano de Fourier formado por las navajas.

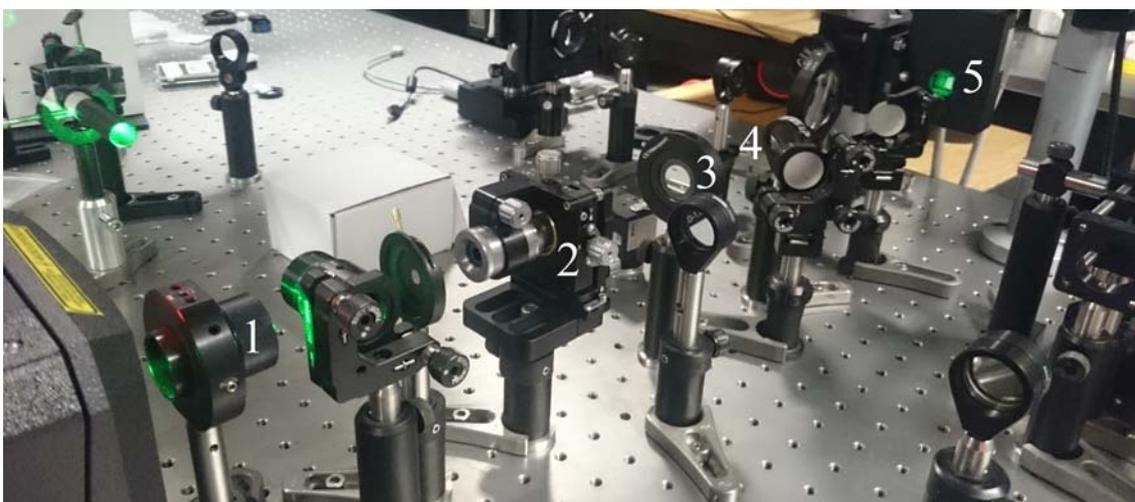


Figura 3.9: Fotografía del montaje experimental. Expansión del haz. 1: Placa de $\lambda/2$. 2: Objetivo de microscopio $5\times$. 3: Diafragma circular. 4: Lente de 200mm . 5: Pantalla del SLM completamente iluminada por el haz expandido.

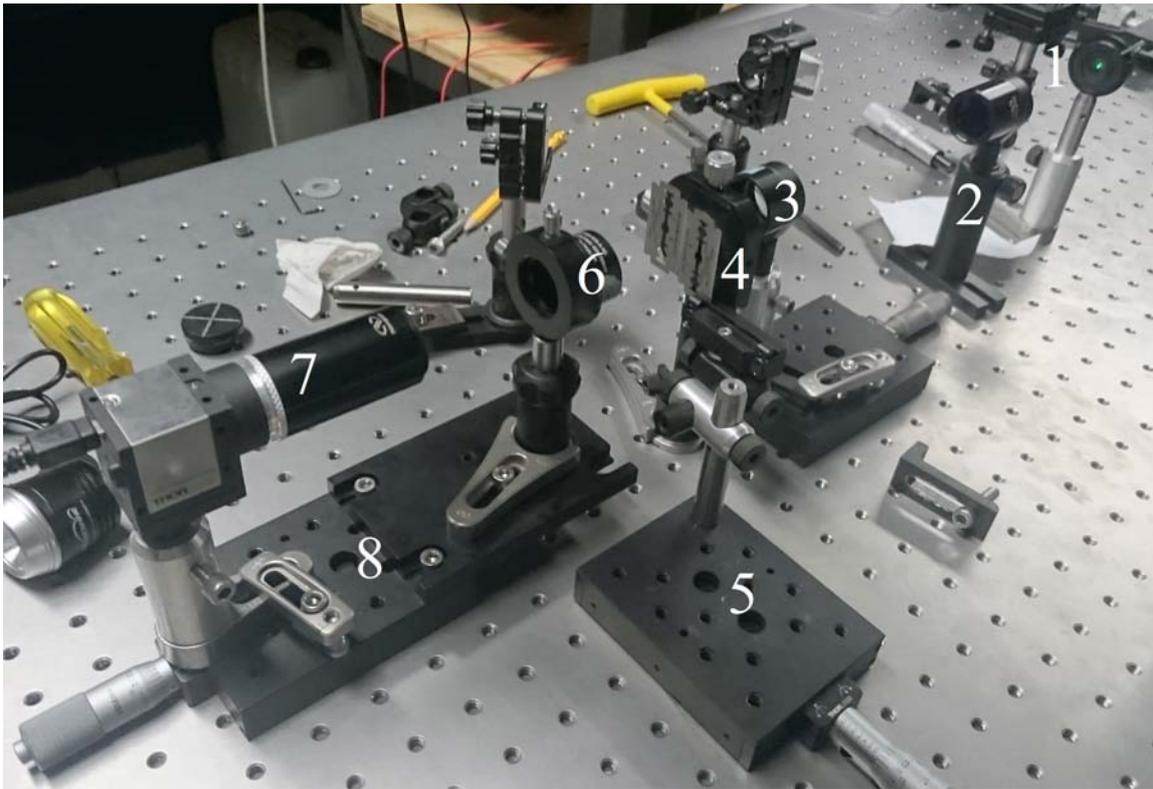


Figura 3.10: Fotografía del montaje experimental. Zona de observación. 1: Diafragma circular del filtro $4f$. 2: Lente $200mm$ para formar la imagen que proviene del filtro. 3: Lente positiva de $50mm$. 4: Plano de Fourier en donde se colocan las dos navajas para formar la rendija. 5: Plataforma que sujeta una de las navajas para controlar la separación de éstas con un tornillo micrométrico. 6: Lente positiva $15mm$ para incrementar el tamaño de la imagen. 7: Cámara CCD. 8: Plataforma que desplaza la CCD, y la lente de magnificación, lejos de las navajas para adquirir diferentes planos a lo largo de z .

Para adquirir las imágenes, se han generado BB con cargas topológicas de $l = 0$ hasta $l = 20$ y se ha tomado una fotografía de cada haz en el plano $z = 0$, que corresponde al plano de las navajas. Luego se desplaza la cámara $1mm$ hacia adelante, transfiriendo el plano de observación a $z = 1mm$ y se generan nuevamente los 21 BB, adquiriendo una fotografía de cada uno. Este proceso se repite hasta alcanzar el plano de observación $z = 20mm$. Estas fotografías se procesan de la misma manera que las imágenes adquiridas por la simulación, ubicando el máximo de intensidad en cada una de ellas.

Capítulo 4

Caracterización del flujo transversal de energía en vórtices ópticos por medio de difracción: resultados y análisis

Ahora presentaremos los resultados conseguidos con las simulaciones, los cálculos teóricos y los datos experimentales obtenidos por los medios explicados en el capítulo anterior. Se muestra la caracterización de los campos ópticos Bessel-Fourier, variando por medio de la simulación numérica diferentes parámetros experimentales fáciles de controlar en el laboratorio y se comparan con los resultados esperados teóricamente. De igual manera se realiza el análisis del desplazamiento de los máximos de intensidad difractados por acción de la rendija vertical. Se presentan los haces generados experimentalmente y su respectivo análisis de los lóbulos difractados. A su vez, se explica el proceso para empatar los haces simulados con los experimentales y se comparan los resultados de ambos métodos para obtener una caracterización del flujo transversal de energía en estos vórtices ópticos.

4.1. Resultados de las simulaciones

La mejor forma de cerciorarnos que la simulación numérica está produciendo resultados correctos es comparar lo que esta da con algunos resultados teóricos que conocemos de antemano, así nuestra confianza en la simulación estará justificada. Para ello haremos una caracterización de la distancia máxima de propagación, Ec. (3.8), la distancia óptima de observación, de los haces Bessel generados por un axicón, dada por la Ec. (3.2) y del espectro de Fourier de dichos

haces, en particular su radio, que está descrito por la Ec. (2.22).

De la tabla 4.1 podemos observar que la simulación da una aproximación razonable a lo esperado teóricamente, teniendo en cuenta que el resultado teórico supone que el axicón es iluminado por una onda plana, mientras que la simulación emplea un haz gaussiano como fuente de iluminación del axicón. Sin embargo podemos apreciar que la distancia óptima de observación se mantiene por debajo del 10% de error relativo, lo que nos permite ubicar la posición de la lente para enfocar los BB con un error no mayor a 0.5mm empleando los resultados de las simulaciones.

$w_0(\mu m)$	$\alpha(^{\circ})$	$z_{max}(mm)$ simulación	$z_{max}(mm)$ teórico	$z_{max}(\%)$ error relativo	$z_{opt}(mm)$ simulación	$z_{opt}(mm)$ teórico	$z_{opt}(mm)$ error relativo
100	0.5	23.0	22.9	0.4	11.8	11.5	3.1
100	1.0	10.0	11.5	12.7	6.2	5.7	8.4
100	2.0	5.8	5.7	1.4	2.7	2.9	5.6
200	0.5	41.0	45.8	10.5	23.0	22.9	0.4
200	1.0	19.5	22.9	14.9	11.0	11.5	3.9
200	2.0	10.5	11.4	8.2	5.5	5.7	3.8
300	0.5	56.0	68.8	18.5	33.0	34.4	4.0
300	1.0	30.0	34.4	12.7	17.0	17.2	1.0
300	2.0	14.0	17.2	18.5	9.0	8.6	4.9

Tabla 4.1: Distancia máxima de propagación, z_{max} , y distancia óptima de observación, z_{opt} , para distintos BB generados por un axicón con del ángulo α , modulados por una gaussiana con un radio w_0 . Comparación entre simulación numérica y predicción teórica.

Comparemos ahora el resultado del radio descrito por la Ec. (2.22), tabla 4.2, usando el valor de k_t obtenido en la Ec. (3.16). El radio del anillo fue medido desde el origen hasta el punto donde la intensidad es máxima, i.e. $I_{\rho_0} = I_{max}$, como se muestra en la Fig 4.1. Los resultados de la tabla nos muestra que la simulación y la teoría son congruentes, y que la modulación gaussiana no influye en el radio de los BF.

Además, igual de la tabla 4.2, podemos observar que el error relativo aumenta conforme la distancia focal disminuye. Esto se debe a que el haz es enfocado en una distancia cada vez menor, alejándolo del régimen paraxial, que es condición indispensable para nuestra teoría. Pero incluso al tratar con una lente de distancia focal $f = 10mm$, la diferencia no es mayor al 3% y va disminuyendo notablemente conforme f aumenta, siendo casi despreciable el error relativo para la lente de $f = 30mm$.

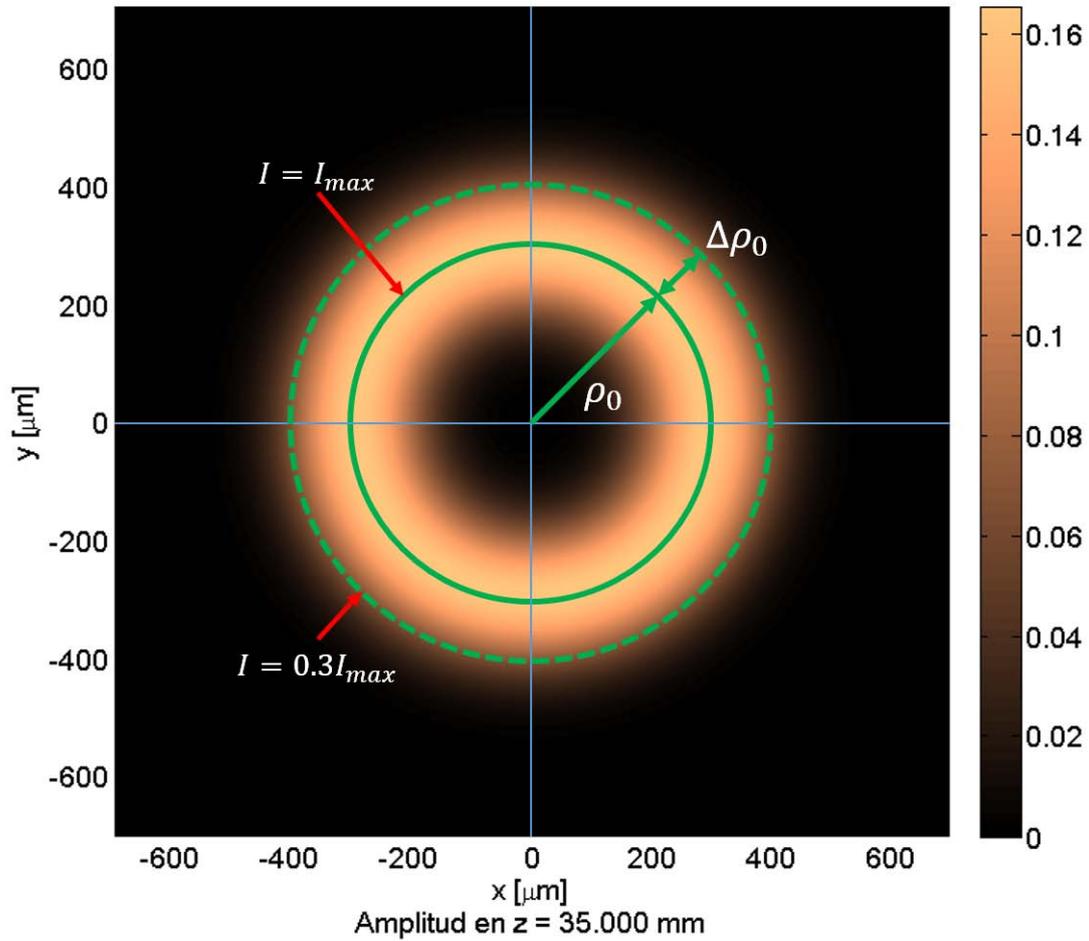


Figura 4.1: Simulación de un BF con $w_0 = 100\mu\text{m}$, $f = 30\text{mm}$, $\alpha = 1^\circ$. El círculo continuo marca el radio de máxima intensidad, ρ_0 , mientras que el círculo punteado marca el radio donde la intensidad es $0.3I_{max}$, valor que hemos escogido para definir el ancho de los BF, $\Delta\rho_0$, el cual se mide desde ρ_0 hasta dicho radio.

De la misma tabla podemos observar que conforme aumentan la distancia focal y el ángulo del axicón, α , el radio del anillo aumenta, tal como lo establece la Ec. (2.22), por lo que variando alguno de estos dos parámetros podemos obtener un anillo lo suficientemente grande para ser captado a detalle por la cámara CCD, como mostraremos en la siguiente sección.

Ahora tratemos un parámetro fundamental que nos permitirá empatar simulación y experimento, el ancho del anillo de los BF. La expresión que describe el espectro de Fourier de los BB, Ec. (2.21), define un anillo infinitesimal, dado por la delta de Dirac, con un radio descrito por la Ec. (2.22), sin embargo, como se puede observar claramente en las Figs. 2.5 y 4.1, el anillo no es infinitesimal en lo absoluto, sino que tiene un ancho determinado.

Como ya mencionamos previamente, la Ec. (2.21) se obtuvo a partir de considerar un Bessel ideal, de extensión infinita, pero es de hecho imposible producir un Bessel ideal en el laborato-

$\alpha(^{\circ})$	$f(mm)$	$\rho_0(\mu m)$ simulación	$\rho_0(\mu m)$ teórico	$\rho_0(\%)$ error relativo
0.5	10	44.9	43.6	2.93
0.5	20	87.9	87.3	0.71
0.5	30	130.9	130.9	0.00
1.0	10	89.8	87.3	2.93
1.0	20	175.8	174.6	0.69
1.0	30	261.7	261.8	0.04
2.0	10	177.7	174.7	1.72
2.0	20	351.6	349.3	0.66
2.0	30	524.4	524.0	0.08

Tabla 4.2: Radio, ρ_0 , de los BF generados por un axicón de ángulo α modulados por una gaussiana de radio $w_0 = 300\mu m$, enfocados por una lente de distancia focal f . Comparación entre simulación numérica y predicción teórica.

rio. El ancho del anillo de los BF se debe al método de generación del BB. Si fuéramos capaces de iluminar con una onda plana, otro haz que sólo existe idealmente, un axicón de extensión infinita, entonces el anillo sí sería infinitesimal, pero al momento de agregar una modulación gaussiana, o una apertura, las dimensiones del BB se reducen a un espacio finito. Entre más se aleje el BB generado del ideal mayor será su ancho.

En la tabla 4.3 podemos ver el comportamiento del radio y el ancho de los BF. El ancho, $\Delta\rho_0$, se midió desde el máximo de intensidad hasta $I(\rho) = 0.3I_{max}$, en dirección radial, valor que se escogió arbitrariamente como criterio para medir de la misma manera el ancho de todos los BF.

En dicha tabla podemos observar que conforme w_0 aumenta, $\Delta\rho_0$ disminuye, por lo que si $w_0 \rightarrow \infty$, esperamos que $\Delta\rho_0 \rightarrow 0$, que sería el caso ideal. Además, podemos notar f influye notablemente en $\Delta\rho_0$, pero como un efecto de magnificación. Tanto el radio como el ancho de los haces aumentan de la misma manera, ambos parámetros de los BF para $f = 10mm$ son 3 veces más pequeños comparados a los BF con $f = 30mm$, y dos veces más pequeños que los casos con $f = 20mm$, para cada valor fijo de α y w_0 .

$w_0(\mu m)$	$\alpha(^{\circ})$	$f(mm)$	$\rho_0(\mu m)$	$\Delta\rho_0(\mu m)$
100	0.5	10	39.1	31.3
100	0.5	20	76.2	61.5
100	0.5	30	113.3	93.7
100	1.0	10	85.9	31.3
100	1.0	20	169.9	62.5
100	1.0	30	253.9	91.8
100	2.0	10	175.8	31.2
100	2.0	20	347.7	62.5
100	2.0	30	521.5	93.7
200	0.5	10	44.9	13.7
200	0.5	20	85.9	29.3
200	0.5	30	127.0	46.5
200	1.0	10	87.9	15.6
200	1.0	20	173.8	31.3
200	1.0	30	261.7	46.9
200	2.0	10	177.7	13.7
200	2.0	20	351.6	29.3
200	2.0	30	524.4	46.9
300	0.5	10	44.9	11.7
300	0.5	20	87.9	19.5
300	0.5	30	130.9	29.3
300	1.0	10	89.8	9.8
300	1.0	20	175.8	19.5
300	1.0	30	261.7	31.3
300	2.0	10	177.7	9.8
300	2.0	20	351.6	19.5
300	2.0	30	524.4	32.2

Tabla 4.3: Radio, ρ_0 , y ancho del anillo, $\Delta\rho_0$, de diferentes BF variando w_0 de la gaussiana que modula, α del axicón que los genera, y f de la lente que los enfoca.

Empleando el programa descrito anteriormente para simular la propagación de un haz se han obtenido las Figs. 4.2 y 4.3. En ambas figuras se generaron los BB empleando la función Bessel, Ec. (2.13), directamente y se han modulado con una gaussiana de radio $w_0 = 300\mu m$ para la Fig. 4.2 y $w_0 = 1500\mu m$ para la Fig. 4.3. En ambos casos se tratan BB con los mismos parámetros, en particular k_t , que sigue siendo calculada por medio de la Ec. (3.16) dado un ángulo $\alpha = 0.45^{\circ}$ para no perder la noción de esta inclinación que brinda el axicón.

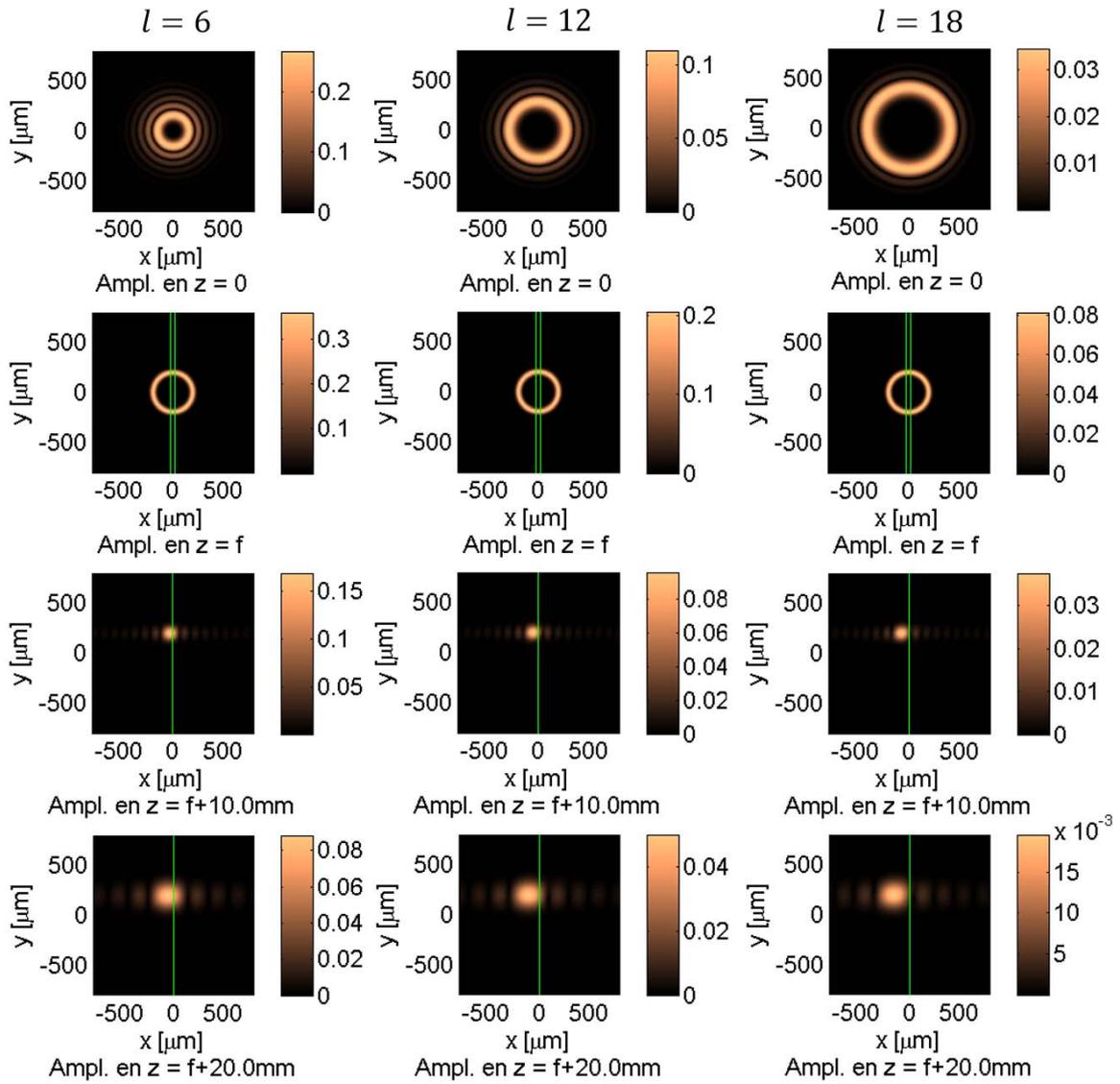


Figura 4.2: Simulación de la propagación de tres BB con diferentes valores de l , modulados por una gaussiana de radio $w_0 = 300\mu\text{m}$. Se han enfocado con una lente de $f = 50\text{mm}$ para crear los BF. Filas de arriba hacia abajo: Condición inicial; BF en el plano $z = f$, las líneas verdes indican la rendija, de $50\mu\text{m}$ de ancho (todo lo que está fuera de la rendija es bloqueado); patrón de difracción a 10mm en z de la rendija; patrón a 20mm (en estas últimas dos columnas la línea verde indica $x = 0$ como guía para apreciar el desplazamiento lateral).

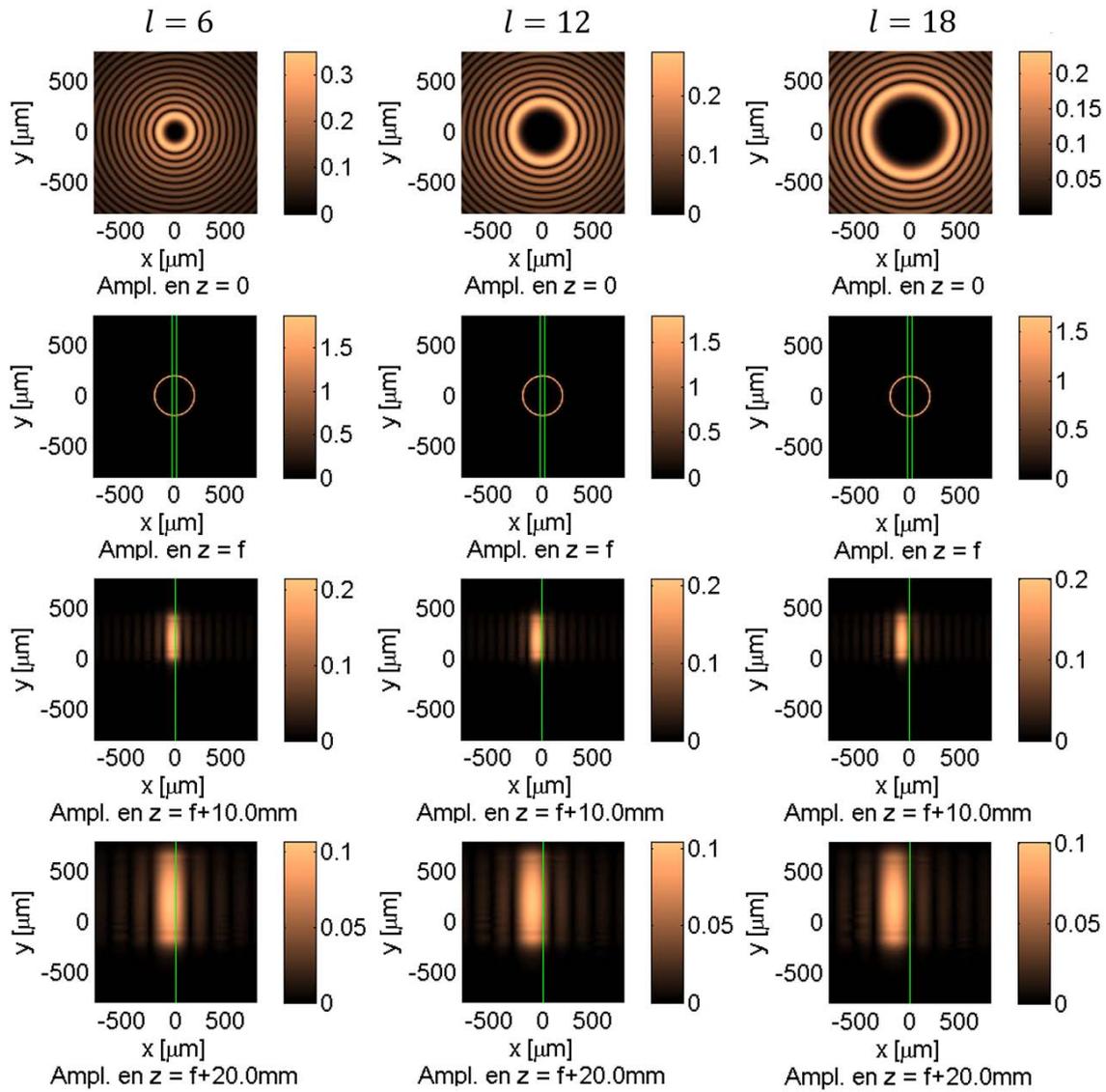


Figura 4.3: Simulación de la propagación de varios BB. Misma situación que en la Fig. 4.2, pero en esta ocasión la gaussiana que modula tiene radio $w_0 = 1500\mu\text{m}$.

En las dos figuras se puede apreciar que al pasar el BB por la rendija, con un ancho de $50\mu\text{m}$, el patrón de difracción resultante, un lóbulo muy intenso de luz acompañado por otros menos intensos, se desplaza en dirección $-x$, siendo mayor el desplazamiento conforme aumenta la distancia de propagación y el valor de la carga topológica. En cuanto a la forma de los lóbulos, podemos apreciar que entre menor es w_0 al anillo es más ancho, como ya hemos mostrado, generando un patrón de difracción más angosto a lo largo de la dirección y , en cambio si w_0 es grande el anillo se vuelve más delgado creando un patrón de difracción notoriamente más ancho.

Ahora compararemos el desplazamiento del máximo en ambos casos. Para ello requerimos de un ajuste que ubique confiablemente la posición del máximo. Dado que estamos tratando con

un rendija vertical, sabemos que su patrón de difracción estará dado por una función $\text{sinc}^2(\cdot)$, donde el argumento depende de x [36–38], por esta razón realizamos un ajuste a una función $\text{sinc}^2(\cdot)$ a nuestros patrones de difracción y ubicamos la posición del máximo de dicha función.

En la Fig. 4.4 podemos ver la intensidad promediada sobre todo el eje y y su respectivo ajuste a una función sinc^2 . Se ha decidido tomar el promedio de intensidad en y puesto que nos interesa toda la energía que pudo pasar por la rendija, que proviene de un elemento casi infinitesimal del anillo del BF.

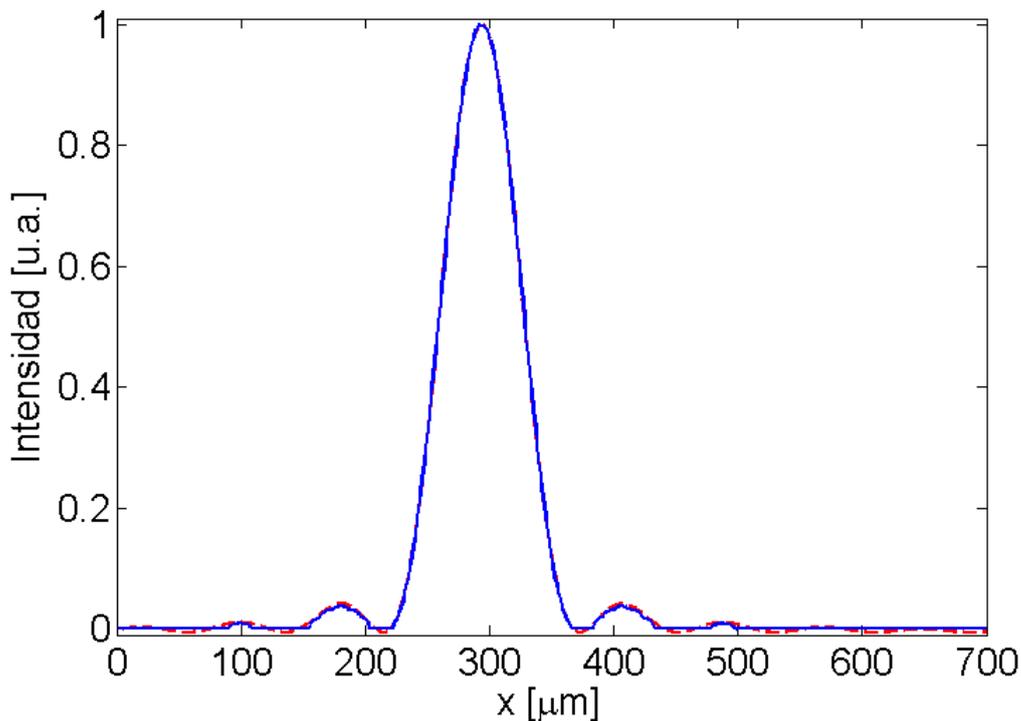


Figura 4.4: Intensidad promediada (azul) y ajuste de la función $\text{sinc}^2(\cdot)$ (roja punteada) para un haz con $w_0 = 300\mu\text{m}$ con $l = 20$ en el plano $z = 20\text{mm}$.

En el caso numérico todo está perfectamente alineado, pero en el experimental es posible que algún elemento del montaje esté ligeramente fuera de eje ocasionando que haya un desplazamiento adicional que no se debe a la circulación de energía, pero que desplazará a todos los haces por igual, por dicha razón se usa el BB de orden $l = 0$ como referencia, si este está ligeramente desviado será por acción del sistema óptico, por lo que el resto de los haces seguirán esa desviación adicional, de tal forma que el máximo de intensidad del BB de orden cero es nuestro punto de referencia para tomar el origen y medir el desplazamiento en cada plano de observación a lo largo de la propagación.

Realizando estos ajustes para localizar el máximo para todas las cargas topológicas estu-

diadas, de 0 a 20, obtenemos los resultados como los presentados en la Fig. 4.5, donde sólo se muestran 5 cargas topológicas para no saturar de información las gráficas. Se estudia el desplazamiento lateral en x de los máximos de intensidad para BB modulados por dos gaussianas diferentes, una con $w_0 = 300\mu m$, mientras que la otra con $w_0 = 1500\mu m$. Las imágenes de las Figs. 4.2 y 4.3 se obtuvieron al simular la propagación para cada uno de los dos radios de las gaussianas que modulan respectivamente. Podemos observar que el desplazamiento del máximo de intensidad, para cada carga topológica, es lineal. Además no se nota diferencia alguna entre ambos casos, lo que confirma que el radio de la gaussiana que modula no influye en flujo transversal de energía.

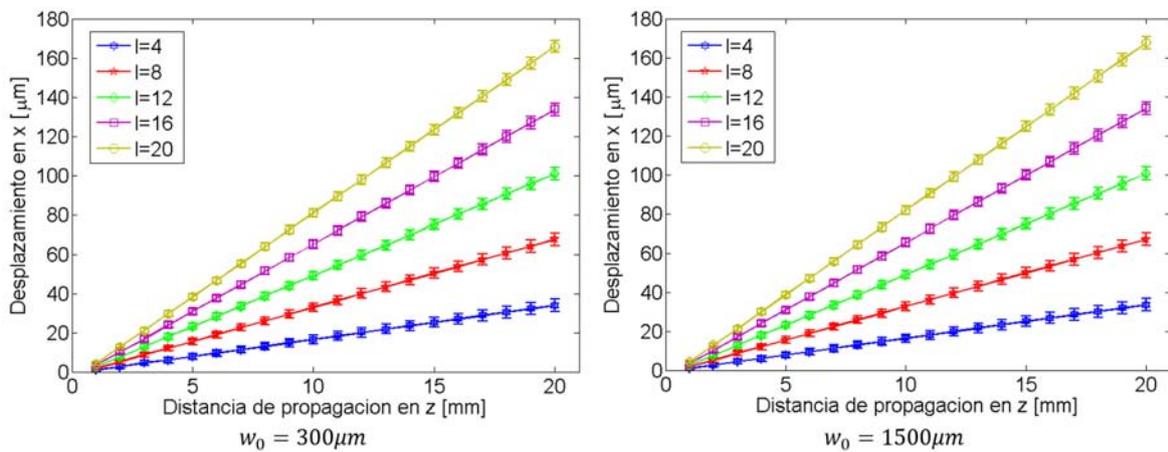


Figura 4.5: Desplazamiento en x del máximo de intensidad para 5 valores de l representativos. A la izquierda podemos ver los resultados para los haces modulados por una gaussiana de con radio $w_0 = 300\mu m$, mientras que a la derecha es con $w_0 = 1500\mu m$.

Si hacemos un ajuste lineal a cada una de las rectas obtenidas para el desplazamiento del máximo, y tomamos la pendiente de dicho ajuste y se grafica contra l observamos el comportamiento descrito por la Ec. (3.29). Con dicho resultado podemos afirmar que el flujo transversal de energía es una función lineal de la carga topológica.

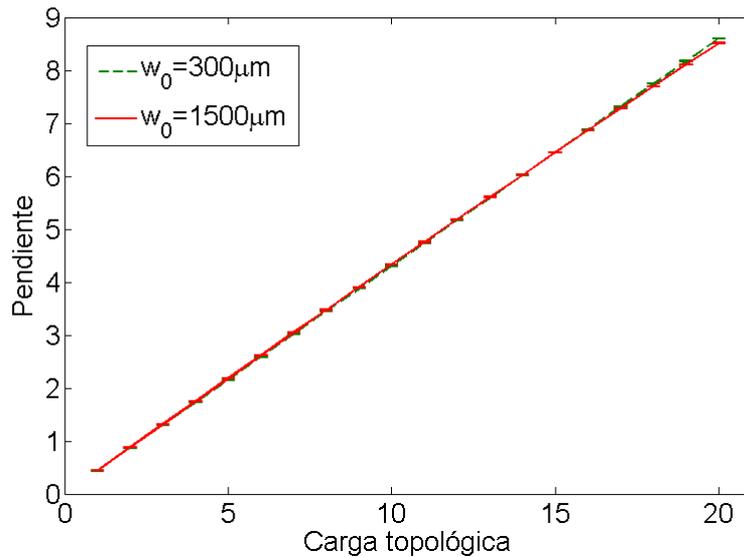


Figura 4.6: Gráfica de la pendiente vs l de cada uno de los desplazamientos generados por distintas cargas topológicas, que van de 1 a 20. Se comparan las pendientes obtenidas para los dos radios de la Fig. 4.5.

4.2. Resultados experimentales

Los resultados anteriores confirman que tanto la teoría como la simulación por medio de difracción de Fresnel predicen el mismo resultado, una relación lineal del flujo transversal de energía con la carga topológica. Sin embargo, toda teoría y simulación debe de describir la realidad para ser considerada completamente válida.

Con dicho propósito en mente se ha realizado la propagación de los haces experimentales generados por el método de codificar la fase del Bessel directamente en el holograma. Los otros métodos fueron descartados por razones prácticas. Por ejemplo, usando el axicón, como hemos mostrado, desplaza la distancia óptima de observación considerablemente, ver Eq. (3.8). Lo mismo ocurre con los haces generados por un LG, en que dicha distancia cambia aún más teniendo que transcurrir cierto intervalo de propagación antes de que siquiera empiece a formarse el BB. Esto implica que para cada BB generado hay que desplazar la posición de la lente a su nueva posición óptima, volviendo el proceso más tardado.

En la Fig. 4.7 podemos observar un BB con $l = 10$ y su espectro de Fourier generado al ser enfocado por una lente de $f = 50\text{mm}$, tal como se describe en el montaje experimental. Los parámetros de dicho haz se escogieron arbitrariamente para obtener el BF de mejor calidad y de mayor tamaño posible.

En dicha figura podemos observar la aparición de anillos adicionales en el BF además del

esperado, esto es debido a que el sistema está aperturado con una apertura circular, lo que agrega a la imagen del BF el espectro de la apertura misma.

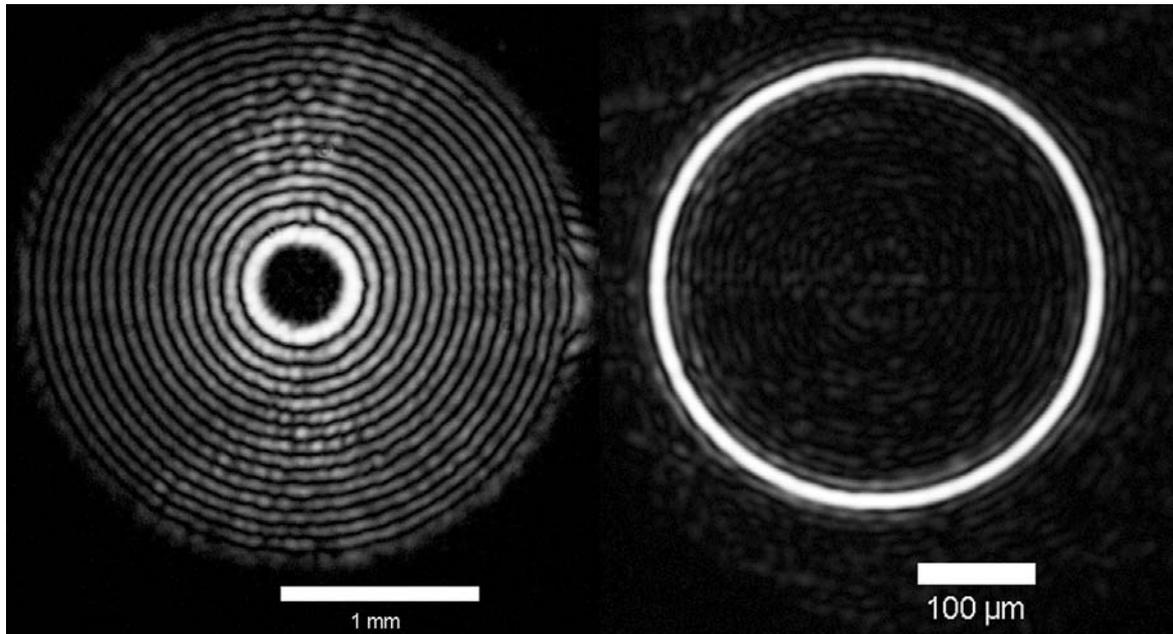


Figura 4.7: Fotografías de un BB con $l = 10$. Izquierda: plano conjugado del SLM; derecha: haz en el plano de Fourier enfocado por una lente de $f = 50\text{mm}$.

Al propagar este BB podemos observar que el patrón de difracción, generado al pasar por una rendija de $38\mu\text{m}$, es diferente en cuanto a la aparición de franjas horizontales en él, como se puede ver en la Fig. 4.8. Sin embargo, el ajuste por medio de la función $\text{sinc}^2(\cdot)$ sigue siendo adecuado para localizar el máximo, como podemos ver en la Fig. 4.9.

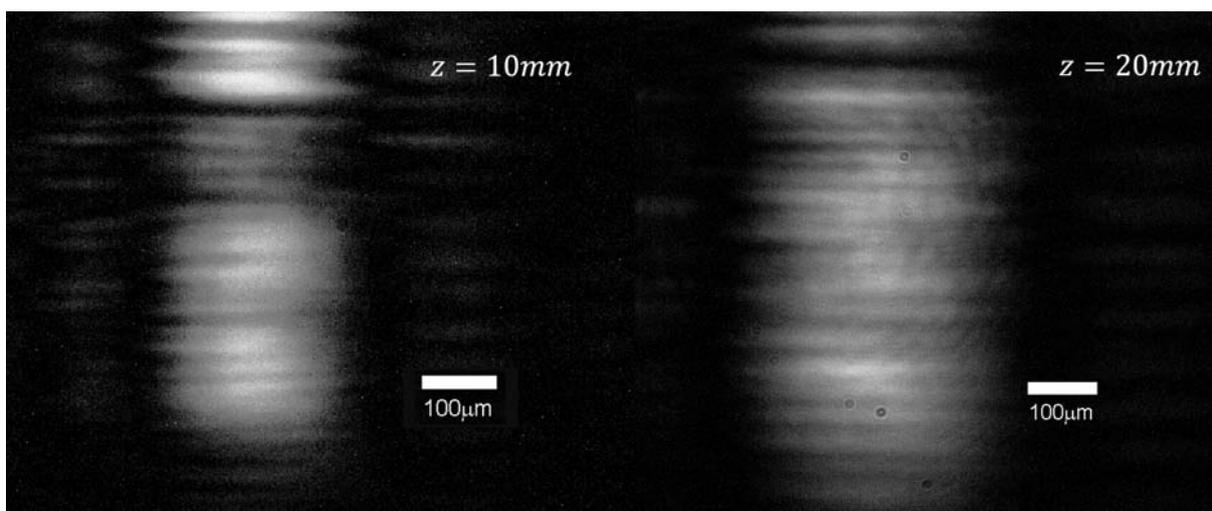


Figura 4.8: Fotografías de la difracción del BB de la Fig 4.7 a $z = 10\text{mm}$ (izquierda) y $z = 20\text{mm}$ (derecha).

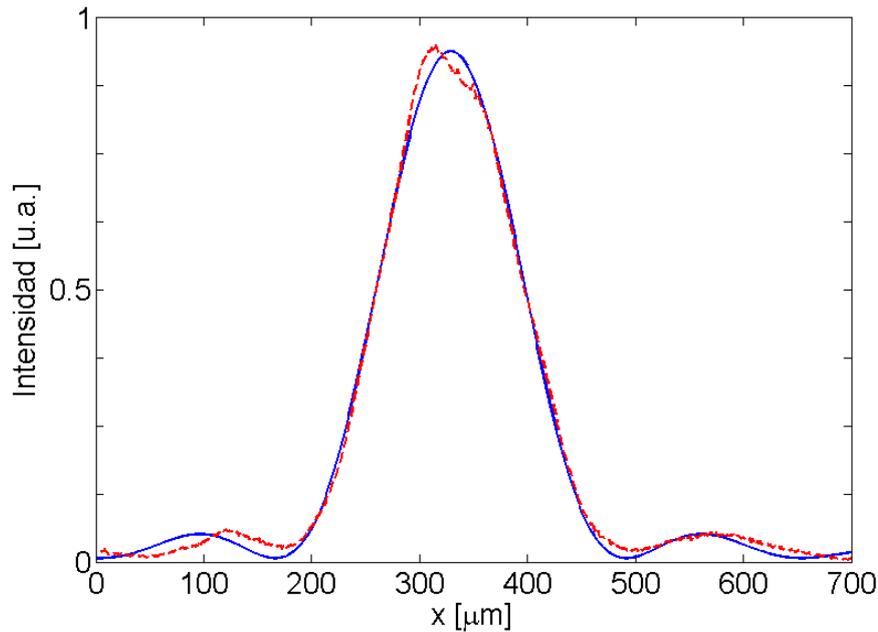


Figura 4.9: Intensidad promediada (azul) y ajuste de la función $\text{sinc}^2(\cdot)$ (roja punteada) para el haz experimental con $l = 20$ en el plano $z = 20\text{mm}$.

Realizando el mismo procedimiento de rastrear el máximo de intensidad por medio de este ajuste para haces con diferentes cargas topológicas, de 0 a 20 (donde se toma el orden cero como referencia del desplazamiento), obtenemos los resultados presentados, para 5 valores de l , en la Fig. 4.10.

A pesar de que no son precisamente rectas como en el caso de la simulación, sí se puede apreciar que tienen un comportamiento lineal. Haciendo un ajuste lineal para cada una de las rectas obtenidas para cargas topológicas de 1 a 20, graficamos las pendientes obtenidas contra l obteniendo la Fig. 4.11. Se puede observar que el resultado obtenido también tiene un comportamiento aproximadamente lineal, y que las discrepancias seguramente se deben a que el Bessel generado tiene algunas aberraciones, como se puede observar en la Fig. 4.7, en donde los anillos no son perfectamente circulares, sino que tienen bultos.

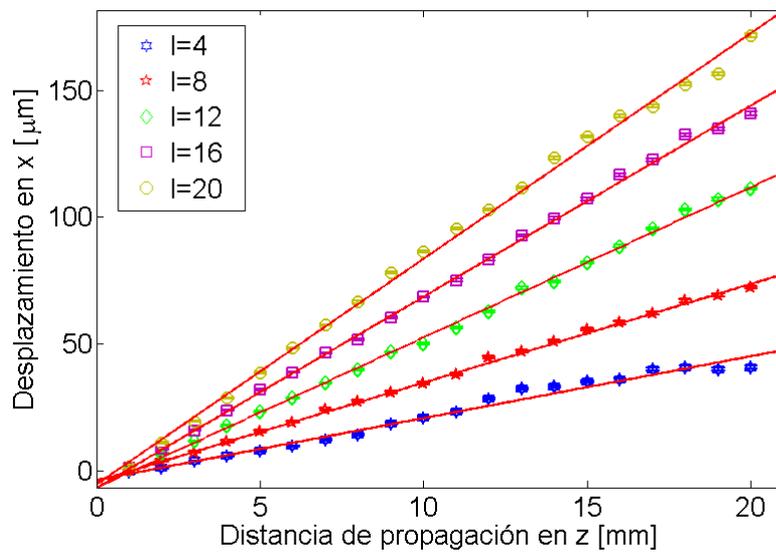


Figura 4.10: Desplazamiento en x del máximo de intensidad para 5 valores de l representativos de los haces generados experimentalmente. Las rectas rojas representan los ajustes lineales correspondientes a cada uno de los valores de l .

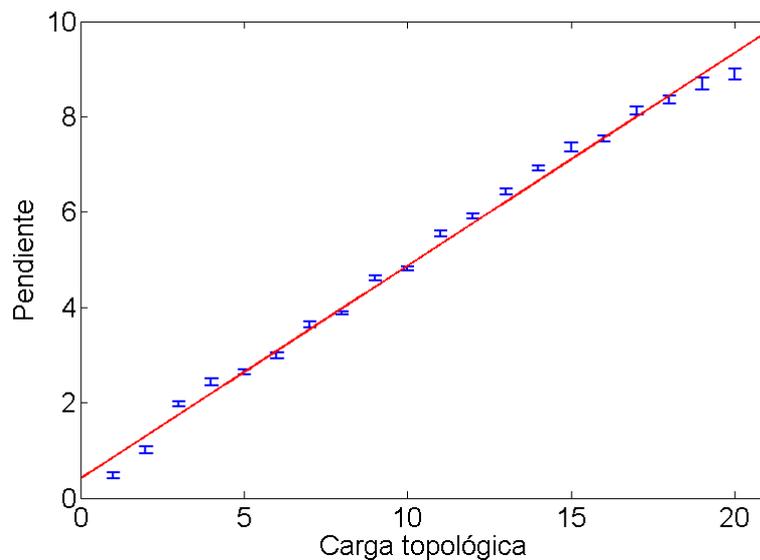


Figura 4.11: Gráfica de la pendiente vs l de cada uno de los desplazamientos experimentales generados por distintas cargas topológicas, que van de 1 a 20.

4.3. Comparación teórica-experimental

Para hacer una comparación minuciosa entre los resultados teóricos, numéricos y experimentales necesitamos realizar una simulación que se aproxime lo más posible a los que se está observando en el experimento.

Para ello se midió la apertura circular que limita a los BB en el experimento, obteniendo un radio de $r = 1472\mu m$. Además se contó el número de anillos contenidos en dicho espacio para el BB de orden cero, que se muestra en la Fig. 4.12, teniendo 20 anillos brillantes dentro de la apertura. Luego se midió el radio y ancho del espectro de Fourier para dicho haz obteniendo $\rho_0 = 194\mu m$ y $\Delta\rho_0 = 15\mu m$, usando los mismos criterios con los que se caracterizaron los BF en la sección referente a los resultados de la simulación.

Con esta información simulamos un Bessel limitado con una apertura circular de radio $r = 1472\mu m$ y se varió el parámetro α , que modifica el valor de k_t , hasta obtener un BB con el mismo número de anillos dentro de la apertura que el haz experimental. Además nos cercioramos que el anillo en el plano de Fourier tuviera el mismo ρ_0 y $\Delta\rho_0$ que los medidos. Finalmente se igualó el ancho de la rendija, que en el experimento mide $38\mu m$. De esta forma aseguramos que los BB simulados corresponderán a los BB experimentales.

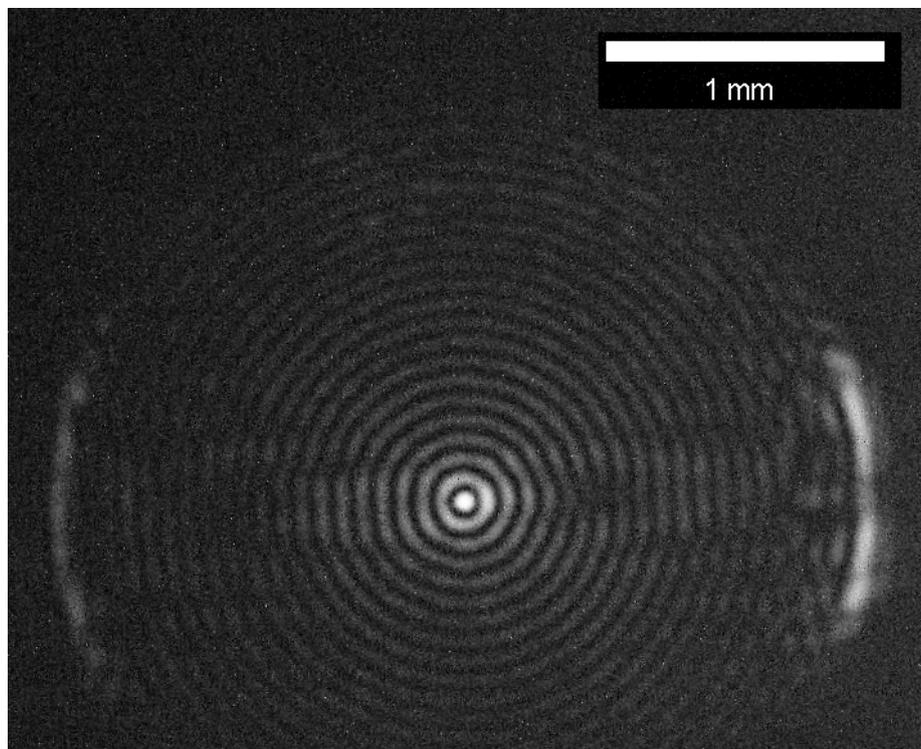


Figura 4.12: Fotografías de un BB con $l = 10$. Izquierda: plano conjugado del SLM; derecha: haz en el plano de Fourier enfocado por una lente de $f = 50mm$.

De esta nueva simulación de propagación se obtuvieron resultados muy similares a los presentados en las Figs. 4.5 y 4.6. En la Fig. 4.13 se muestra el desplazamiento lateral del máximo de intensidad tanto para la simulación como el experimento.

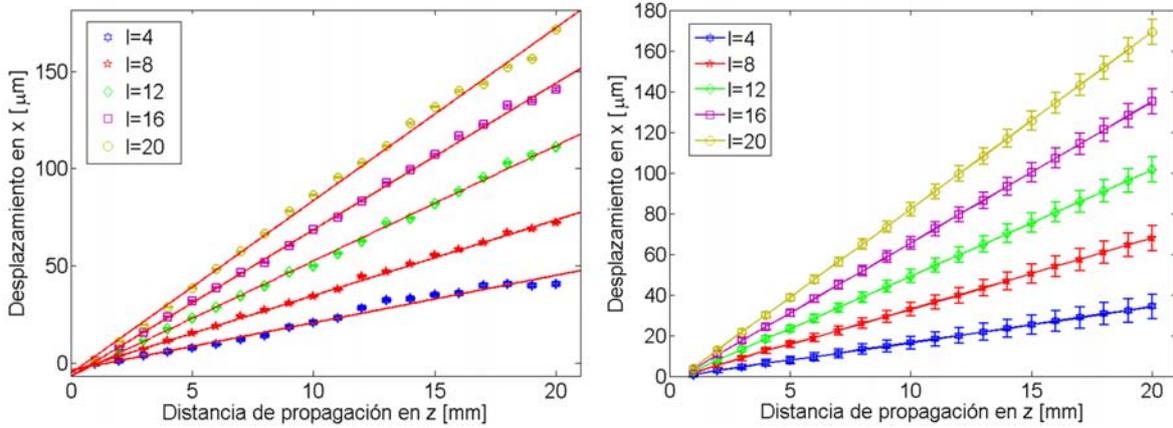


Figura 4.13: Desplazamiento en x del máximo de intensidad para 5 valores de l representativos de los haces generados experimentalmente (izquierda) y la simulación (derecha). Las rectas representan los ajustes lineales para cada l en ambos casos.

Tomando un ajuste lineal de cada una de las curvas que describen los desplazamientos de los máximos de intensidad, como ya hemos hecho, obtenemos las pendientes contra la carga topológica de la simulación y el experimento presentadas en la Fig. 4.14.

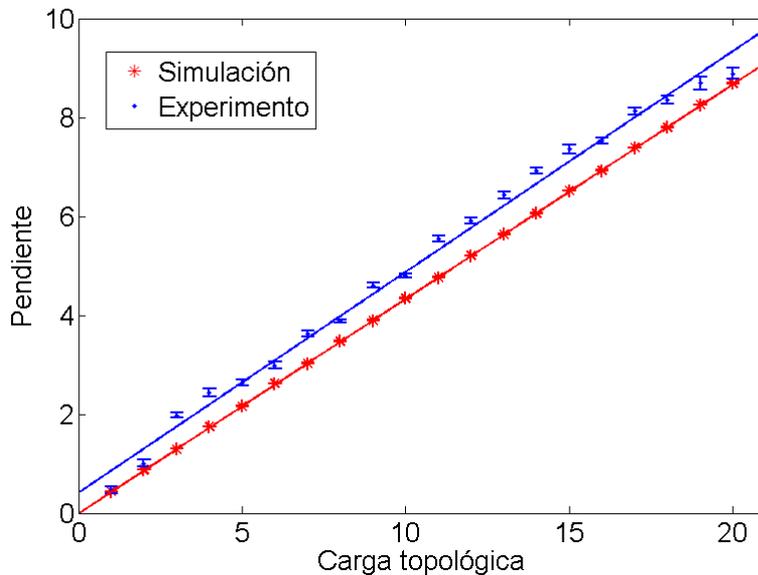


Figura 4.14: Desplazamiento en x del máximo de intensidad para 5 valores de l representativos de los haces generados experimentalmente. Las rectas representan los ajustes lineales para los datos experimentales y los de simulados respectivamente.

De dicha figura podemos observar que el comportamiento de ambas curvas es muy simi-

lar, esto nos indica que tanto la simulación como el experimento están describiendo el mismo fenómeno, es decir, la simulación modela la realidad con bastante precisión.

Si hacemos un ajuste lineal de estas últimas dos curvas para obtener el valor de K_0 de la Ec. (3.29) que describe el flujo transversal de energía podemos comparar y verificar que tanto teoría y simulación describen el experimento apropiadamente.

En la Fig. 4.14 tenemos pendientes en la forma $\mu m/mm$, por lo que es necesario dividir el valor de dichas pendientes entre mil para tener $\mu m/\mu m$ y poder comparar con el valor calculado teóricamente de K_0 , usando los valores de f , k , y α del experimento. En la tabla 4.4 se presentan los resultados de K_0 para el caso experimental, la simulación y la teoría.

Es notable ver como los tres métodos, esencialmente diferentes, arrojan resultados muy parecidos, esto confirma que los dos métodos teóricos, la simulación y el cálculo teórico, están describiendo en una muy buena aproximación el comportamiento de la difracción de nuestro vórtice óptico, mostrando un desplazamiento lateral del lóbulo difractado repetible y caracterizable. Este desplazamiento lateral depende linealmente de la distancia de propagación y su pendiente crece linealmente con la carga topológica.

	Experimento	Simulación	Teoría
K_0	$4.4648 \times 10^{-4} \pm 8.82 \times 10^{-6}$	$4.3382 \times 10^{-4} \pm 3.77 \times 10^{-7}$	4.3121×10^{-4}

Tabla 4.4: Valores de K_0 calculados por medio del ajuste lineal de las gráficas de pendiente contra carga topológica tanto para el experimento como la simulación, además del calculo teórico directamente de la Ec. (3.28).

Las barras de error presentadas en las figuras correspondientes a los desplazamientos, Figs. 4.5, 4.10 y 4.13, se obtuvieron calculando el intervalo del 95 % de confianza de los mínimos cuadrados del ajuste no lineal realizado, i.e., el intervalo del 95 % de confianza en la posición del máximo del ajuste de la función $\text{sinc}^2(\cdot)$. Dado que se tomaron fotografías en el experimento, y para igualar esta forma de medición, se generaron imágenes en la simulación, las barras de error están asociadas con la resolución de la imagen.

El intervalo obtenido por medio del ajuste no lineal está en pixeles por lo que hay que multiplicarlo por la resolución, $\mu m/pixel$, para obtener el error en μm . Para el experimento, con la lente de aumento colocada antes de la cámara, se obtuvo una resolución de $1.1476 \mu m/pixel$. En la simulación, las mallas generadas fueron de $1024 \times 1024 \text{ pixels}^2$, con una ventana de observación de $4000 \times 4000 \mu m^2$, lo que nos daría una resolución de $3.9063 \mu m/pixel$. Sin embargo, la resolución con la que MATLAB guarda las imágenes es menor a la resolución generada, por

lo que al analizar las imágenes la resolución resultó ser $5.46\mu m/pixel$, es por eso que las barras de error de las simulaciones son mucho más grandes que las de los experimentos.

En las figuras 4.6, 4.11 y 4.14 se muestra la tasa de cambio de los desplazamientos contra la carga topológica. En este caso las barras de error presentadas es la desviación estándar de las pendientes obtenidas al realizar un ajuste lineal a cada uno de los desplazamientos laterales contra la distancia de propagación.

Podemos notar que las barras para el caso de las simulaciones son casi indistinguibles, esto se debe a que a pesar de tener menor resolución, la simulación sí describe un comportamiento prácticamente lineal. En el caso de las mediciones del experimento, al tratarse de curvas que se alejan un poco más de una recta, la desviación estándar de las pendientes ajustadas es notablemente mayor a las de las simulaciones. Sin embargo el tamaño de estas barras no es lo suficientemente grande como para decir que las pendientes tienen un comportamiento perfectamente lineal, pero al analizar el valor del error del ajuste lineal obtenido para K_0 podemos decir que se aproximan satisfactoriamente.

Capítulo 5

Discusión y conclusiones generales

En el capítulo anterior hemos obtenido los resultados de nuestros tres métodos para estudiar el fenómeno de la propagación de un vórtice óptico a través de una rendija vertical. Dichos métodos son esencialmente diferentes pues a pesar de describir el mismo modelo, cada uno lo hace desde una perspectiva distinta.

El primer método utilizado, la simulación numérica, emplea una aproximación muy fuerte, el haz debe de ser paraxial para poder emplear la teoría escalar de difracción. A pesar de haber enfocado el haz, como el foco de la lente cumple que $f \gg \lambda$, entonces, de cierta forma, no nos alejamos mucho de la aproximación paraxial. Los resultados obtenidos muestran que la descripción de la propagación y difracción de un BB enfocado, BF, por medio de la difracción de Fresnel sigue siendo válida puesto que el haz no está fuertemente enfocado.

El segundo método, el cálculo directo de $\tan \alpha_\phi$, parte igualmente de la aproximación paraxial para el cálculo de la componente transversal del haz. Se supone la existencia de una componente longitudinal, a partir de esta suposición se calculó el vector de campo eléctrico a partir de la ley de Gauss eléctrica. Se asumió un campo magnético armónico y por medio de la ley de Faraday se calculó dicho campo. Finalmente se obtuvo la razón de la componente transversal y longitudinal del vector de Poynting, lo que nos llevó a la Ec. (3.29). Los resultados obtenidos por este método nos indican que también es una buena descripción del fenómeno a través del cálculo de la energía, y que forma parte del objetivo principal de este trabajo.

El último método es el experimento, la conexión con la realidad del fenómeno. Si la teoría no describe el experimento entonces hay algo mal con ella, teniendo en cuenta que el experimento también puede presentar errores sistemáticos o aleatorios al realizarse. En nuestro caso el experimento tiene un montaje bastante sencillo que permite ver de forma transparente lo que su-

cede en cada etapa de la propagación sin tener que confiar ciegamente en complicados equipos de medición, sino simplemente estudiar con una cámara los desplazamientos del haz difractado que ha sido previamente modulado en fase para crear nuestro vórtice óptico. Los resultados de la mediciones son acordes con las predicciones teóricas, indicando que éstas últimas están describiendo el fenómeno correctamente y que las podemos emplear para explicar detrás de este.

Los resultados que podemos observar en las Figs. 4.5, 4.10 y 4.13 nos muestran que el lóbulo difractado se desplaza lateralmente de manera lineal respecto al BB de orden cero conforme la distancia de propagación aumenta. Tanto la simulación, como el experimento muestran este comportamiento lineal con casi los mismos valores para las diferentes cargas topológicas, esto confirma que el desplazamiento lateral del lóbulo difractado, Δx , es una función lineal de la distancia de propagación, i.e.,

$$\Delta x \propto z. \quad (5.1)$$

Como mencionamos previamente, y que se puede observar en las Figs. 4.12 y 4.7, los haces generados no son BB perfectos. Están limitados por una apertura circular finita, lo que los aleja de mucho de ser BB ideales, pero como mostramos en el capítulo anterior, el tamaño de la apertura no influye en el desplazamiento del lóbulo difractado. Creemos que la razón por la que los resultados experimentales se desvían un poco del comportamiento lineal es debido a la estructura del haz dentro de la apertura. En las figuras mencionadas podemos apreciar que los BB no están formados por anillos perfectamente circulares, sino que tienen deformaciones apreciables en varias secciones de los anillos. Estas deformaciones se ocultan en el haz enfocado, pero su influencia sigue estando presente, lo que creemos genera alteraciones locales, en las regiones del espectro de Fourier de dichas deformaciones, donde el anillo deja de ser uniforme.

Al propagar el haz a través de la rendija vertical, estas inhomogeneidades son difractadas generando probablemente las variaciones en el desplazamiento lateral del lóbulo que podemos observar en la Fig. 4.10 y que aleja ligeramente el comportamiento del sistema como una función lineal de la distancia de propagación. Es decir, suponemos que el método de generación de los BB influyen más en el hecho de que los desplazamientos no sean precisamente rectas que al análisis de la difracción resultante.

Esta desviación del comportamiento lineal, igual se puede deber a la generación de los haces, indicándonos en este caso que los BB portan diferentes inhomogeneidades conforme

cambia l . En las Figs. 4.12 y 4.7 podemos ver que las deformaciones de los anillos en el BB de orden 0, $l = 0$, son diferentes a las del BB con $l = 10$ (por ejemplo, la rugosidad que aparece en los anillos es diferente en cada caso), por eso, a pesar de tomar como referencia el BB con $l = 0$, los desplazamientos Δx contra z presentan desviaciones ligeramente diferentes, al igual que las pendientes contra l . Nuevamente creemos que el método de generación es la causa de mayor peso en cuanto a la desviación del comportamiento lineal esperado y no el análisis de los resultados.

A pesar de esto, al realizar nuevamente un ajuste lineal de las pendientes de los desplazamientos contra l podemos ver que el ajuste presenta un error bastante pequeño, ver tabla 4.4. Para el experimento, la desviación estándar de la pendiente ajustada presenta un error relativo de 1.98%, mientras que la desviación estándar de la pendiente ajustada de la simulación presenta un error de 0.09% respecto a los valores calculados, lo que nos indica que el ajuste lineal es bastante bueno.

Esto nos dice que tanto teoría como experimento concuerdan con que la tasa de cambio de los desplazamientos laterales del lóbulo difractado son una función lineal de la carga topológica, i.e.,

$$\frac{dx}{dz} \propto l, \quad (5.2)$$

pero en nuestro caso de la rendija vertical tenemos que

$$\frac{dx}{dz} = \tan \alpha_{\phi}. \quad (5.3)$$

Así, por la Ec. (3.29) confirmamos que

$$\frac{dx}{dz} = K_0 l, \quad (5.4)$$

lo que nos permite comparar el valor teórico K_0 calculado por medio de la Ec. (3.28), tal como se presenta en la tabla 4.4. Comparando los valores obtenidos para el experimento y la simulación con el valor de la teoría vemos que presentan un error relativo de 3.54% y 0.61% respectivamente. Los errores son lo suficientemente pequeños como para considerar este análisis una muy

buena aproximación para describir el fenómeno.

Así, afirmamos que el desplazamiento lateral del lóbulo difractado es una función lineal de la carga topológica, lo que implica que la razón entre el flujo de energía transversal y longitudinal es una función lineal de la carga topológica.

Un resultado muy similar surgió cuando estudiamos la relación energía-momento por fotón (2.59) en el capítulo 2. La relación energía momento para un vórtice óptico resultó ser l/ω , pero este resultado es semiclásico puesto que se refiere a que cada fotón porta dicha relación de momento a energía.

Sin embargo, al tratar con distribuciones de intensidad que involucran una cantidad incontable de fotones obtenemos una distribución de energía que varía dependiendo de la estructura del haz. Tal como vimos en la Ec. (2.43), el flujo de energía depende de la estructura tanto radial como azimutal del haz, encontrando las formas explícitas para el flujo orbital y de espín (polarización) de los LG, Ec. (2.44). Por dicha razón no podemos trasladar el resultado semiclásico a la estructura completa de los vórtices ópticos.

Como ya mencionamos en el capítulo 2, un vórtice definido simplemente como una fase azimutal $\exp(il\varphi)$ es incapaz de portar momento por si mismo y necesita la estructura completa, como los LG y BB, para tener momento y flujo de energía. Empleando los BF hemos codificado toda la información radial en una serie de anillos idénticos de tal forma que la estructura radial que varía con l para los BB se mantienen constante para los BF permitiéndonos evaluar el efecto solo de l sobre el flujo de energía.

Lo que hemos logrado en este trabajo es probar con un sistema completamente clásico, y en cuya sencillez recae su elegancia, que para un vórtice óptico enfocado, en nuestro caso haces Bessel linealmente polarizados, el flujo transversal de energía, como función únicamente de la carga topológica del vórtice, es una función lineal de l .

La constante de proporcionalidad del haz depende de las propiedades del BB incidente, como su longitud de onda, el ángulo de inclinación de los frentes de onda descritos por el vector de onda (con componentes transversal, k_t , y longitudinal, k_z) y el foco de la lente con la cual se están enfocando los BB.

Es importante mencionar que el diseño experimental fue bastante bueno, hecho que se confirma al tener un error relativo de sólo 3.54% entre experimento y teoría, a pesar de que la rendija fue construida a mano empleando dos navajas.

Este método, al emplear solamente una rendija y una cámara CCD, puede estudiar vórtices

de tamaños muy pequeños, como nuestros BF cuyo diámetro no supera los $400\mu m$, y que otros métodos, como los sensores Shack-Hartmann, no pueden resolver. Además hemos visto que nuestra técnica es sensible al desplazamiento de los lóbulos difractados, a pesar de no ser uniformes en intensidad, hasta casi $1\mu m$. Esto gracias al proceso de análisis por medio del ajuste no lineal de una función $\text{sinc}^2(\cdot)$, que describe la difracción por una rendija.

Bibliografía

- [1] J. F. Nye and M. V. Berry, “Dislocations in wave trains,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 336, pp. 165–190, 1974.
- [2] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, “Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes,” *Phys. Rev. A*, vol. 45, pp. 8185–8189, 1992.
- [3] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly, “Diffraction-free beams,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, no. 15, pp. 1499–1501, 1987.
- [4] J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbe-Castillo, and S. Chávez-Cerda, “Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams,” *Opt. Lett.*, vol. 25, no. 20, pp. 1493–1495, 2000.
- [5] M. A. Bandres, J. C. Gutiérrez-Vega, and S. Chávez-Cerda, “Parabolic nondiffracting optical wave fields,” *Opt. Lett.*, vol. 29, no. 1, pp. 44–46, 2004.
- [6] A. Y. Bekshaev and M. S. Soskin, “Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities,” *Opt. Commun.*, vol. 271, pp. 332–348, 2007.
- [7] A. Bekshaev and M. Vasnetsov, *Vortex Flow of Light: “Spin” and “Orbital” Flows in a Circularly Polarized Paraxial Beam*, pp. 13–24. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, 2011.
- [8] A. Bekshaev, M. Soskin, and M. Vasnetsov, *Paraxial light beams with angular momentum*. NY: Nova Science, 2008.
- [9] L. Allen, M. J. Padgett, and M. Babiker, “The orbital angular momentum of light,” *Progress in Optics*, vol. 39, pp. 291–372, 1999b.

- [10] L. Allen and M. Padgett, *The Orbital Angular Momentum of Light: An Introduction*, pp. 1–12. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, 2011.
- [11] S. Fujiwara, “Optical properties of conic surfaces. i. reflecting cone,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 52, no. 3, pp. 287–292, 1962.
- [12] R. Arimoto, C. Saloma, T. Tanaka, and S. Kawata, “Imaging properties of axicon in a scanning optical system,” *Appl. Opt.*, vol. 31, no. 31, pp. 6653–6657, 1992.
- [13] A. Burvall, *Axicon imaging by scalar diffraction theory*. PhD thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, April 2004.
- [14] T. Du, T. Wang, and F. Wu, “Generation of three-dimensional optical bottle beams via focused non-diffracting bessel beam using an axicon,” *Opt. Commun.*, vol. 317, pp. 24–28, 2014.
- [15] C. Paterson and R. Smith, “Higher-order bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms,” *Opt. Commun.*, vol. 124, pp. 121–130, 1996.
- [16] J. A. Davis, D. M. Cottrell, J. Campos, M. J. Yzuel, and I. Moreno, “Encoding amplitude information onto phase-only filters,” *Appl. Opt.*, vol. 38, no. 23, pp. 5004–5013, 1999.
- [17] J. Arlt and K. Dholakia, “Generation of high-order bessel beams by use of an axicon,” *Opt. Commun.*, vol. 177, pp. 297–301, 2000.
- [18] T. Čižmár, M. Mazilu, and K. Dholakia, “In situ wavefront correction and its application to micromanipulation,” *Nat. Photonics*, vol. 4, no. 6, pp. 388–394, 2010.
- [19] K. P. Volke-Sepúlveda, *Light Beams with Angular Momentum and Applications in Optical Tweezers*. PhD thesis, Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica, Sta. María Tonantzintla, Puebla, México, February 2003.
- [20] M. Mazilu and K. Dholakia, *Trapping and Rotation of Particles in Light Fields with Embedded Optical Vortices*, pp. 37–65. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, 2011.
- [21] V. Garcés-Chávez, K. Volke-Sepúlveda, S. Chávez-Cerda, W. Sibbet, and K. Dholakia, “Transfer of orbital angular momentum to an optically trapped low-index particle,” *Phys. Rev. A.*, vol. 66, no. 063402, 2002.

- [22] N. B. Simpson, L. Allen, and M. J. Padgett, “Optical tweezers and optical spanners with laguerre-gaussian modes,” *J. Mod. Opt.*, vol. 43, no. 12, pp. 2485–2491, 1996.
- [23] S. Parkin, G. Knoner, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, “Measurement of the total optical angular momentum transfer in optical tweezers,” *Opt. Express*, vol. 14, no. 15, pp. 6963–6970, 2006.
- [24] P. Galajda and P. Ormos, “Complex micromachines produced and driven by light,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 78, pp. 249–251, 2001.
- [25] L. V. Loke, T. Asavei, S. Parkin, N. R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, and T. A. Nieminen, *Driving Optical Micromachines with Orbital Angular Momentum*, pp. 93–115. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, 2011.
- [26] T. A. Nieminen, T. Asavei, V. L. Y. Loke, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, “Symmetry and the generation and measurement of optical torque,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, vol. 110, no. 14-16, pp. 1472–1482, 2009.
- [27] T. Asavei, V. L. Y. Loke, M. Barbieri, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, “Optical angular momentum transfer to microrotors fabricated by two-photon photopolymerization,” *New J. Phys.*, vol. 11, no. 093021, 2009.
- [28] L. Marrucci and D. P. C. Manzo and, “Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, no. 163905, 2009.
- [29] E. Karimi, B. Piccirillo, F. Nagali, L. Marrucci, and E. Santamato, “Efficient generation and sorting of orbital angular momentum eigenmodes of light by thermally tuned q-plates,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 94, no. 231124, 2009.
- [30] E. Nagali, F. Sciarrino, F. D. Martini, L. Marrucci, B. Piccirillo, E. Karimi, and E. Santamato, “Quantum information transfer from spin to orbital angular momentum of photons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, no. 013601, 2009.
- [31] C. Maurer, A. Jesacher, S. Bernet, and M. Ritsch-Marte, “Phase contrast microscopy with full numerical aperture illumination,” *Opt. Express*, vol. 16, no. 24, pp. 19821–19829, 2009.

- [32] S. Fürhapter, A. Jesacher, S. Bernet, and M. Ritsch-Marte, “Spiral phase contrast imaging in microscopy,” *Opt. Express*, vol. 13, no. 3, pp. 1689–694, 2005.
- [33] C. Maurer, S. Bernet, and M. Ritsch-Marte, *Spiral Phase Contrast Microscopy*, pp. 143–154. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, 2011.
- [34] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. USA: Jhon Wiley and Sons, 3 ed., 1999.
- [35] D. J. Griffiths and R. College, *Introduction to Electrodynamics*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 3 ed., 1999.
- [36] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*. UK: Pergamon Press, 6 ed., 1980.
- [37] F. A. Jenkins and H. E. White, *Fundamentals of Optics*. USA: McGraw-Hill, 4 ed., 2001.
- [38] E. Hecht, *Optics*. San Francisco, CA: Addison Wesley, 4 ed., 2002.
- [39] A. Sommerfeld, “Optics,” in *Lectures on Theoretical Physics*, vol. IV, New York, NY: Academic Press, 1954.
- [40] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. USA: McGraw-Hill, 2 ed., 1996.
- [41] B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*. USA: John Wiley and Sons, 1991.
- [42] A. E. Siegman, *Lasers*. Mill Valley, CA: University Science Books, 1986.
- [43] S. M. Barnett and L. Allen, “Orbital angular momentum and nonparaxial light beams,” *Opt. Commun.*, vol. 110, pp. 670–678, 1994.
- [44] J. B. Gotte and S. M. Barnett, *Light beams carrying orbital angular momentum*, pp. 1–30. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2013.
- [45] F. S. Roux, *Optical Waves*, pp. 3–40. Boca Raton, FL: CRC Press, 2014.
- [46] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*. Waltham, MA: Academic Press, 7 ed., 2013.
- [47] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams. i. the scalar theory,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, no. 4, pp. 651–654, 1987.

- [48] I. N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*. Edinburgh, Holanda: Oliver and Boyd, 2 ed., 1956.
- [49] N. H. Asmar, *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2 ed., 2005.
- [50] K. Volke-Sepulveda and E. Ley-Koo, “General construction and connections of vector propagation invariant optical fields: Te and tm modes and polarization states,” *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, vol. 8, pp. 867–877, 2006.
- [51] K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chavéz, S. Chávez-Cerda, J. Arlt, and K. Dholakia, “Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam,” *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, vol. 4, pp. S82–S89, 2002.
- [52] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*. USA: Academic Press, 7 ed., 2007.
- [53] M. Gecevicius, R. Drevinskas, M. Beresna, and P. G. Kazansky, “Single beam optical vortex tweezers with tunable orbital angular momentum,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 104, no. 231110(2014), 2014.
- [54] M. V. Berry, “Optical currents,” *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, vol. 11, no. (2009)094001, 2009.
- [55] R. A. Terborg and K. Volke-Sepúlveda, “Quantitative characterization of the energy circulation in helical beams by means of near-field diffraction,” *Opt. Express*, vol. 21, no. 3, pp. 3379–3387, 2013.
- [56] G. Nienhuis, *Angular Momentum and Vortices in Optics*, pp. 19–62. London, UK: Academic Press, 2008.
- [57] A. O. Santillán and K. Volke-Sepúlveda, “A demonstration of rotating sound waves in free space and the transfer of their angular momentum to matter,” *Am. J. Phys.*, vol. 77, no. 3, pp. 209–215, 2009.
- [58] M. Friese, J. Enger, and H. Rubinsztein-Dunlop, “Optical angular-momentum transfer to trapped absorbing particles,” *Phys. Rev. A.*, vol. 54, no. 2, pp. 1593–1596, 1996.

- [59] N. B. Simpson, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett, “Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner,” *Opt. Lett.*, vol. 22, no. 1, pp. 52–54, 1997.
- [60] J. M. Maxson, A. C. Bartnik, and I. V. Bazarov, “Efficient and accurate laser shaping with liquid crystal spatial light modulators,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 105, no. 171109(2014), 2014.
- [61] V. Arrizón, U. Ruiz, R. Carrada, and L. A. González, “Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 24, no. 11, pp. 3500–3507, 2007.
- [62] P. A. Bakut, V. E. Kirakosyants, and V. A. Loginov, “Optimal wavefront reconstruction from a shack-hartmann sensor by use of a bayesian algorithm,” *Opt. Commun.*, vol. 109, pp. 10–15, 1994.
- [63] C. Schulze, D. Naidoo, D. Flamm, O. A. Schmidt, A. Forbes, and M. Duparré, “Wavefront reconstruction by a modal decomposition,” *Opt. Express*, vol. 20, no. 18, pp. 19714–19725, 2012.
- [64] C. E. Campbell, “The range of local wavefront curvatures measurable with shack-hartmann wavefront sensors,” *Clin. Exp. Optom*, vol. 92, no. 3, pp. 187–193, 2009.
- [65] J. Leach, S. Keen, M. J. Padgett, C. Saunter, and G. D. Love, “Direct measurement of the skew angle of the poynting vector in a helically phased beam,” *Opt. Express*, vol. 14, no. 25, pp. 11920–11924, 2006.
- [66] D. P. Ghai, P. Senthilkumaran, and R. S. Sirohi, “Single-slit diffraction of an optical beam with phase singularity,” *Opt. Express*, vol. 13, no. 3, pp. 1689–694, 2005.

Apéndice A

Expresión completa de $\tan \alpha_\varphi$

A continuación presentamos la forma explícita calculada por medio de Mathematica de $\tan \alpha_\varphi$ dada por la Ec. (3.27):

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha_\varphi = & \frac{C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin^2(\varphi) l^3}{k_z^2 \rho^3 \omega} \\
 & + \frac{2C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin(\varphi) l^2}{fk_z^2 \rho \omega} \\
 & - \frac{5iC_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin(\varphi) l^2}{k_z^2 \rho^3 \omega} \\
 & + \frac{2iC_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} K_0 \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho) \sin(\varphi) \delta'(k_t - K_0\rho) l^2}{k_z^2 \rho^2 \omega} \\
 & + \frac{C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k^2 \rho \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 l}{f^2 k_z^2 \omega} \\
 & + \frac{C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 l}{\rho \omega} \\
 & - \frac{5iC_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 l}{fk_z^2 \rho \omega} \\
 & - \frac{6C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 l}{k_z^2 \rho^3 \omega} \\
 & + \frac{C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin^2(\varphi) l}{\rho \omega} \\
 & + \frac{iC_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin^2(\varphi) l}{fk_z^2 \rho \omega}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin^2(\varphi) l}{k_z^2 \rho^3 \omega} \\
 & - \frac{C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} K_0^2 \cos^2(\varphi) \delta'(k_t - K_0\rho)^2 l}{k_z^2 \rho \omega} \\
 & - \frac{C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} K_0 \delta(k_t - K_0\rho) \sin^2(\varphi) \delta'(k_t - K_0\rho) l}{k_z^2 \rho^2 \omega} \\
 & + \frac{2iC_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k K_0 \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho) \delta'(k_t - K_0\rho) l}{f k_z^2 \omega} \\
 & + \frac{5C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} K_0 \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho) \delta'(k_t - K_0\rho) l}{k_z^2 \rho^2 \omega} \\
 & - \frac{iC_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} K_0^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \delta'(k_t - K_0\rho)^2}{k_z^2 \rho \omega} \\
 & + \frac{iC_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k^2 \rho \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin(\varphi)}{f^2 k_z^2 \omega} \\
 & + \frac{4C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin(\varphi)}{f k_z^2 \rho \omega} \\
 & - \frac{4iC_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin(\varphi)}{k_z^2 \rho^3 \omega} \\
 & - \frac{2C_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k K_0 \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho) \sin(\varphi) \delta'(k_t - K_0\rho)}{f k_z^2 \omega} \\
 & + \frac{4iC_0^2 e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} K_0 \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho) \sin(\varphi) \delta'(k_t - K_0\rho)}{k_z^2 \rho^2 \omega} \\
 & \div \frac{e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k^2 \rho^2 \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 C_0^2}{f^2 k_z \omega} \\
 & + \frac{e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k_z \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 C_0^2}{\omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3ie^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 C_0^2}{fk_z \omega} \\
 & + \frac{2e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 C_0^2}{k_z \rho^2 \omega} \\
 & + \frac{e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k_z \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin^2(\varphi) C_0^2}{\omega} \\
 & + \frac{ie^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin^2(\varphi) C_0^2}{fk_z \omega} \\
 & + \frac{e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} l^2 \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin^2(\varphi) C_0^2}{k_z \rho^2 \omega} \\
 & + \frac{2e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin^2(\varphi) C_0^2}{k_z \rho^2 \omega} \\
 & + \frac{2e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} kl \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin(\varphi) C_0^2}{fk_z \omega} \\
 & - \frac{2ie^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} l \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho)^2 \sin(\varphi) C_0^2}{k_z \rho^2 \omega} \\
 & - \frac{e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} K_0 \delta(k_t - K_0\rho) \sin^2(\varphi) \delta'(k_t - K_0\rho) C_0^2}{k_z \rho \omega} \\
 & + \frac{2ie^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} k K_0 \rho \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho) \delta'(k_t - K_0\rho) C_0^2}{fk_z \omega} \\
 & + \frac{2e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} K_0 \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho) \delta'(k_t - K_0\rho) C_0^2}{k_z \rho \omega} \\
 & + \frac{2ie^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} K_0 l \cos(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho) \sin(\varphi) \delta'(k_t - K_0\rho) C_0^2}{k_z \rho \omega} \\
 & - \frac{e^{\frac{ik\rho^2}{f} + 2ik_z z + 2il\varphi} K_0^2 \cos^2(\varphi) \delta(k_t - K_0\rho) \delta''(k_t - K_0\rho) C_0^2}{k_z \omega}.
 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores de $C_0 = 2\pi i^{l-1} / \lambda k_t$, $K_0 = 2\pi / \lambda f$, f , $k_t = k \sin \delta$, $k_z = k \cos \delta$, k y ω , y además al tomar las condiciones de la Ec. (3.28), la expresión anterior se simplifica a la relación lineal con l reportada en el trabajo:

$$\tan \alpha_\varphi = 0.00043121l. \quad (\text{A.2})$$

Apéndice B

Programas desarrollados

En esta sección se incluyen los programas diseñados y escritos en lenguaje MATLAB con los cuales se realizaron las simulaciones numéricas de propagación de Fresnel y se analizaron las imágenes obtenidas tanto de la simulación como de las fotografías experimentales.

Para ubicar el máximo de intensidad apareció la necesidad de realizar un ajuste de una función *sinc*, que describe la difracción por una rendija, para cada imagen, de tal forma que la ubicación del máximo fuera estadísticamente confiable.

Además se incluye el programa para crear el holograma que fue proyectado en el SLM y así generar por modulación de fase los BB que se estudiaron en esta investigación. El holograma incluye una fase de rejilla blaze para mandar el haz al primer orden de difracción de tal forma que el filtraje espacial fuera sencillo de realizar.

B.1. Programa de generación del holograma BB

```
%% Holograma. Haz bessel con rejilla blaze
n=2;
l=n;
w=16;
th=0; %grados
Lb=10;
gray2pi=205;
gray0=0;
D=600;
```

```

XXX=ones(600,800);

%Funcion Bessel de orden j
U=@(n,l,w,X,Y) besselj(n,sqrt((X.^2+Y.^2)/w^2)).*exp(1*1i*atan2(Y,X));
[X,Y]=meshgrid(-399:1:400,-299:1:300);
Xp=cos(th*pi/180)*X-sin(th*pi/180)*Y;
Yp=sin(th*pi/180)*X+cos(th*pi/180)*Y;

Un=U(n,l,w,X,Y);
%Nueva asociación garantiza que la rejilla caiga hasta el cero
Xr=2*pi/Lb*mod(X,Lb);

%Creacion rejilla blaze
blaze=angle(Un);
blaze=mod(blaze+2*pi,2*pi);
blaze=mod(blaze+Xr,2*pi);

In=abs(Un); %Amplitud del haz
Inn=In/max(max(In)); % Intensidad normalizada a 1.

xk=linspace(0,1,100);
fase=zeros(600,800);

%Generando fase con modulación de amplitud del BB
for i=1:600
    for j=1:800
        [~,ind]=min(abs(Inn(i,j)-sinc(1-xk)));
        fase(i,j)=xk(ind);
    end
end
fase=fase.*blaze; %Agregando rejilla a la fase

%Apertura circular en caso de que el TEM tenga radio menor que la ...
    pantalla del SLM
circle=ones(size(X));
rr=sqrt(X.^2+Y.^2);
circle=double(rr<=round(D/2));

%Ajustando holograma a escala de grises del SLM

```

```

fasen=fase;
grayp=uint8(((fasen-gray0)*gray2pi/(2*pi)+gray0));
graypc=mod(double(grayp)+double(XXX),gray2pi);
graypc=uint8(graypc.*circle);

%Proyectando en el SLM
imshow(grayp);colormap gray;
fullscreen(graypc,2)

```

B.2. Propagación de Fresnel

```

% --Programa para propagar en campo cercano en 2D --
clear all;
g = gpuDevice;
for l=0:20
close all;

%Escoger la condicion inicial F0
op=5; %1)axicon con LG; 2)axicon con vortice; 3)Bessel Gaussiana;
      %4) fase Bessel; 5) Bessel con apertura circular.
pot=10;%input('Potencia de 2 del numero de puntos en la malla: ');
lamb=0.532; %longitud de onda (micras)
x0=4000;
lx=2*x0;
nx=2^(pot); %x-sampling
dx=lx/nx; %micrones por pixel
dz = 500; %pasos en z
w0 = 1472; %ancho del haz
w00 = 100; %radio apertura circular
Lx=100; %ancho apertura rectangular
Ly=x0; %alutra apertura rectangular
D=38/2; %ancho de la rendija
k=2*pi/lamb; %numero de onda
n=1.5; %indice de refraccion del axicon
alpha=0.45*pi/180; %angulo del axicon

%l y p del haz LG

```

```

%l=1;
P=0;

%----- Calculo de la distancia maxima de propagacion (optica geo)
kap=tan(asin(n*sin(alpha))-alpha);
zmaxprop=(w0/kap);
zopt=(zmaxprop/2);
zopt=roundn(zopt,2);

%%% ----- Parametros observacion ----- %%%
%zopt=50*1000; Al usar LG no usar zopt de optica geometrica
f=50*1000; %foco de la lente (en mm)
zextra=20; % distancia extra de observacion (en mm)
zmax=zopt+f+zextra*1e3; %distancia maxima de observacion (en mm)
zsteps=zmax/dz;
zrec=1.0*1e3; %Intervalo en el que se guardaran los datos
Zextra=20;

%---- Vectores en el espacio de coordenadas y frecuencias
xx=-x0:dx:x0-dx; %vector en espacio de coordenadas
xx=gpuArray(xx);
[x,y]=meshgrid(xx);

pp=(-nx/2:(nx/2)-1)/lx; %vector en espacio de frecuencias
pp=gpuArray(pp);
[p,q]=meshgrid(pp);
[th,r]=cart2pol(x,y);

%----- Lente
Flen=exp(-1i*k*(r.^2)/(2*f)); %funcion lente
Flen=fftshift(Flen);

%----- Rendija
Fren=zeros(size(x),'gpuArray');
Mx=find(abs(xx) <= D);
%My=find(abs(xx) <= lx/2);
My=(xx > 0); %tapando lobulo superior
Fren(My,Mx)=1;
Fren=fftshift(Fren);

```

```

%----- Haz Laguerre-Gaussiano
if op==1
zR=k*(w0^2)/2;      %distancia de Rayleigh para el haz LG
Gouy=zeros(length(l),'gpuArray');
Norm=Gouy;
Llp=zeros(length(r),length(r),'gpuArray');
Ampl=Llp;
LG0=Llp;
z=0;
w=w0*sqrt(1 + (z./zR).^2); %tamano del spot w(z)
Gouy=exp(-1i*(2*P + abs(l) +1)*atan(z./zR)); %fase de Guoy
Curv=exp(-1i*(r.^2).*z/((w.^2)*zR)); %fase radial (curvatura del frente ...
    de onda)
arg=2*(r.^2)/(w.^2); %argumento de los pol. Laguerre
Llp(:, :)=feval('Fun_laguerrekn',abs(l),P,arg); %Polinomio asociado de ...
    Laguerre
Ampl(:, :)=(exp(-(r.^2)/w.^2)).*((sqrt(arg)).^(abs(l)))./w; ...
    %modulacion de amplitud
Norm= sqrt(2*gamma(P+1)/(pi*gamma(P+abs(l)+1)));

LG0(:, :)=Norm*Ampl(:, :).*Llp(:, :).*Gouy.*Curv.*exp(1i*l*(th)).*exp(1i*k*z); ...
    %haz LG
end

%----- Condicion inicial
if op==1
    %axicon con LG
    F0=LG0(:, :).*exp(-1i*k*(n-1)*r.*sin(alpha));

elseif op==2
    %axicon con vortice
    F0=exp(-(r/w0).^2).*exp(-1i*k*(n-1)*r.*sin(alpha)).*exp(1i*l*th);

elseif op==3
    %Bessel Gaussiana
    kr=k*sin(asin(n*sin(alpha))-alpha);
    F0=exp(-(r/w0).^2).*besselj(l,kr.*r).*exp(1i*l*th);

```

```

elseif op==4
    %Fase Bessel
    kr=k*sin(asin(n*sin(alpha))-alpha);
    F0=exp(-(r/w0).^2).*sign(besselj(l,kr.*r)).*exp(1i*l*th);

elseif op==5
    %Bessel con apertura circular
    kr=k*sin(asin(n*sin(alpha))-alpha);
    F0=exp(-(r/w0).^100).*besselj(l,kr.*r).*exp(1i*l*th);
end

%----- Liberando memoria
clear Ampl; clear arg; clear Curv; clear Llp

%----- Grafica de la condicion inicial
figure(1) %graficar amplitud condicion inicial
surf(x,y,(abs(F0).^2/(max(max(abs(F0).^2)))));
shading interp; %rotate3d on
xlim([-0.5*x0 0.5*x0])
ylim([-0.5*x0 0.5*x0])
view(0,90); colormap copper
set(gcf,'Renderer','zbuffer')
axis square;
xlabel('x [\mum]');
ylabel('y [\mum]');

figure(2) %graficar fase condicion inicial
surf(x,y,(angle(F0)/pi));
shading interp; %rotate3d on
xlim([-0.5*x0 0.5*x0])
ylim([-0.5*x0 0.5*x0])
view(0,90); colormap HSV%copper
colorbar; axis square;
set(gcf,'Renderer','zbuffer')
colormap(gray(256))

%----- Potencia inicial -----
Poti=trapz(trapz(abs(F0).^2));

```

```

%----- Apodizador y propagador -----
Aps = exp(-(x.^50 + y.^50)/(0.9*x0)^50); %Apodizador
Aps = fftshift(Aps); %TF desplazada del apodizador

Prop = exp(-1i*pi*lamb*dz*(q.^2+p.^2)); %Propagador campo cercano
Prop = fftshift(Prop); %Desplazamiento del propagador

F=fftshift(F0); %Desplazamiento para la transformada de Fourier
j=1;

%----- Ciclo de propagacion -----
for z=dz:dz:zsteps*dz;

%colocar lente
    if z==zopt %distancia de la lente
        F=F.*Flen;
    end

%colocar rednija(Fren)
    if z==zopt+f %distancia de la lente
        F=F.*Fren;
    end

%Propagacion en dz
    F=fft2(F);
    F=F.*Prop;
    F=ifft2(F);
    F=F.*Aps;
    FF=(fftshift(F)); %desplazamiento para la transformada de Fourier

%----- Potencia final -----
    Potf=trapz(trapz(abs(FF).^2));
    Pot=Potf/Poti;

%----- Guardar datos despues de la rendija -----
    figure (3) %graficar campo propagado en zfinal
    set(gcf,'Visible','off')
    surf(x,y,abs(FF).^2);
    shading interp; %rotate3d on

```

```

xlim([-0.5*x0 0.5*x0]);
ylim([-0.5*x0 0.5*x0]);
set(gcf, 'Renderer', 'zbuffer')%, 'Visible','off')
view(0,90); colormap copper
axis square;
xlabel({'x [\mum]', sprintf('abs(F) en z = %5.3f mm', z*1e-3)});
ylabel({'y [\mum]', sprintf('Potencia = %5.3f', Pot)});
colorbar;
saveas(gcf, sprintf('BB_circw0-%d_D%d_l%d_f%d_zopt%d ...
    _propfield.z %d.png', w0, D*2, l, f*1e-3, zopt*1e-3, (z-(zopt+f))*1e-3))

end

%----- Grafica amplitud del campo propagado final -----
figure (3) %graficar campo propagado en dz
surf(x,y,abs(FF).^2);
shading interp; %rotate3d on
xlim([-0.5*x0 0.5*x0]);
ylim([-0.5*x0 0.5*x0]);
set(gcf, 'Renderer', 'zbuffer')%, 'Visible','off')
view(0,90); colormap copper
axis square;
xlabel({'x [\mum]', sprintf('abs(F) en z = %5.3f mm', z*1e-3)});
ylabel({'y [\mum]', sprintf('Potencia = %5.3f', Pot)});
colorbar;

%Liberando más memoria para acelerar el ciclo for
clear Aps; clear Mx; clear My; clear F; clear Fren; clear Flen; clear x;
clear y; clear xx; clear p; clear q; clear pp; clear r; clear th; clear ...
    prop;

end

```

B.3. Ubicación del máximo por ajuste de función sinc

```

nmax=20;
zmax=20;
magnif=5.46; %mic/pix

```

```

options = statset('nlinfit'); options.MaxIter = 1000;
modelFun=@(p,x) (p(3)).* (sinc((x-p(2))./ p(1))).^2 +p(4);
punto=struct('z',cell(1),'n',cell(1),'x',cell(1),'sigma',cell ...
    (1),'R',cell(1));
punto= repmat(punto,20,21);
Scl=1;
f=50;

for j=0:nmax
    for i=0:zmax
        a=zeros(1,701);
        punto(i+1,j+1).n=j;
        punto(i+1,j+1).z=i;
        z=i;
        n=j;

        Imag=imread(sprintf('BB_circw0-1472_D38_1%d-f%d-zopt50 ...
            _propfield.z%d.png',n,f,z));
        Im_sc=Imag(:, :, 2);
        Im_sc=double(Im_sc);
        m=size(Im_sc);
        xx=1:m(2);
        yy=1:m(1);
        [u,v]=meshgrid(xx,yy);

        Nx1=211;
        Nx2=911;
        Ny1=85;
        Ny2=780;

        %-----
        dn=1;
        X=Nx1:dn:Nx2;
        Y=Ny1:Ny2;

        G1=Im_sc(Y,X);

        xp=u(Y,X)/Scl;
        yp=v(Y,X)/Scl;

```

```

y=sum(transpose(G1));
for k=1:696;
    if y(k)>=max(y)/2;
        a=a + G1(k, :);
    end
end
p0(1)=20;
[p0(3), p0(2)]=max(a);
p0(4)=min(a);
[pa,R,J,cov,mse]=nlinfit(1:701,a,modelFun,p0,options);
p1=pa;
ci=nlparci(pa,R,'Jacobian',J);
if j==0
    punto(i+1,j+1).x=p1(2);
    punto(i+1,j+1).sigma=max(p1(2)-ci(2,1),-p1(2)+ ...
        ci(2,2));
else
    punto(i+1,j+1).x=p1(2)-punto(i+1,1).x;
    punto(i+1,j+1).sigma=max(p1(2)-ci(2,1),-p1(2)+ ...
        ci(2,2))+punto(i+1,1).sigma;
end

punto(i+1,j+1).R=R;

end
end
%ahora graficamos z contra x para distinta n
z=1:zmax;
m=zeros(1,nmax);
figure()
hold on
x=zeros(size(z));
sigma=x;

for n=1:nmax
    for i=1:zmax;
        x(i)=abs(punto(i,n+1).x*magnif);
    end
end

```

```
        sigma(i)=punto(i,n+1).sigma*magnif;
    end
    errorbar (z,x,sigma);
    xlabel('mm en z')
    ylabel('desplazamiento en x (micras)')
    hold on

    [fit,s]=polyfit(z,x,1);
    ste = sqrt(diag(inv(s.R)*inv(s.R'))).*s.normr.^2./s.df);
    m(n)=abs(fit(1));
    ms(n)=ste(1);
end

savefig(sprintf('disp_xteo_f%d',f))
%no se grafica n=0 pues el desplazamiento es relativo a ese
figure()
hold on
errorbar (1:nmax,m,ms,'b')
xlabel ('orden')
ylabel ('pendiente')
savefig(sprintf('slopesteo_f%d',f))

L=1:20;
Kapa=[L',m'];
csvwrite(sprintf('slopesteo_f%d.csv',f),Kapa)
```