



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL LÍMITE DE LA RAPIDEZ DE LAS
MASAS: UNA VISIÓN CUÁNTICA.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

LEONARDO LÓPEZ HERNÁNDEZ.

DIRECTOR DE TESIS:

DR. VICTOR MANUEL VELÁZQUEZ AGUILAR.



MÉXICO D.F.

MAYO

2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

HOJA DE DATOS

1. Datos del alumno:

Apellido paterno: López
Apellido materno: Hernández
Nombre(s): Leonardo
Teléfono: 045 55 29 45 12 84
Universidad Nacional Autónoma
de México
Facultad de Ciencias
Carrera: Física
Número de cuenta: 409066212

2. Datos del tutor:

Grado: Dr.
Nombre(s): Víctor Manuel
Apellido paterno: Velázquez
Apellido materno: Aguilar

3. Datos del sinodal 1:

Grado: Dr.
Nombre(s): Enriqueta
Apellido paterno: Hernández
Apellido materno: Saldaña

4. Datos del sinodal 2:

Grado: Dr.
Nombre(s): Mirna
Apellido paterno: Villavicencio
Apellido materno: Torres

5. Datos del sinodal 3:

Grado: Dr.
Nombre(s): Román
Apellido paterno: Linares
Apellido materno: Romero

6. Datos del sinodal 4:

Grado: Dr.
Nombre(s): Enrique
Apellido paterno: Martínez
Apellido materno: Quiroz

7. Datos del trabajo escrito:

Título: El límite de la rapidez de las masas:
una visión cuántica.
Número de páginas: 105 p
Año: 2016

“Todos somos muy ignorantes, lo que ocurre es que no todos ignoramos las mismas cosas.”

Albert Einstein.

Índice

Índice	iii
Introducción	iii
1 El artículo que cambió la historia:	
“Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimientos”	3
1.1 “Asimetrías” del modelo clásico.	3
1.2 Postulados de la teoría especial de la relatividad.	4
1.3 Definición de simultaneidad y sincronización de relojes.	4
1.4 Sobre la relatividad de la longitud y del tiempo.	5
1.5 Teoría sobre la transformación de coordenadas y del tiempo de un sistema en reposo a otro sistema que se encuentra en movimiento traslacional uniforme con respecto al primero.	7
1.6 Significado físico de las ecuaciones de transformación.	14
1.7 Teorema de adición de velocidades.	15
1.8 Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío. Sobre la naturaleza de las fuerzas electromotrices que aparecen en el movimiento de un campo magnético.	16
1.9 Teoría del principio Doppler y de la aberración.	19
1.10 Transformación de la energía de rayos de luz. Teoría de la presión de radiación ejercida sobre un espejo perfecto.	23
1.11 Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz considerando las corrientes de convección.	27
1.12 Dinámica de un electrón (acelerado lentamente).	28
2 Efecto Compton y absorción de fotones.	33
2.1 Planck y la cuantización del campo de la radiación.	34
2.2 A. Einstein y el efecto Fotoeléctrico.	36
2.2.1 Consideraciones teóricas del efecto fotoeléctrico.	36
2.3 Efecto Compton, propiedades de partícula para el fotón.	38
2.4 Absorción y emisión de fotones.	41

3	El límite de la rapidez de las masas: una visión cuántica.	45
3.1	Absorción de fotones por un electrón inicialmente en reposo.	45
3.2	Solución numérica al límite de la rapidez de las masas.	53
3.2.1	Gráficas correspondientes al caso $a=2$	54
3.2.2	Gráficas correspondientes al caso $a=1$	60
3.3	Análisis de la solución numérica al límite de la rapidez de las masas. . . .	64
4	Solución a la aparente inconsistencia del límite de la rapidez de las masas con el segundo postulado de relatividad.	65
4.1	El juego de la energía de los fotones sobre la velocidad del electrón medida desde el sistema de referencia S	65
4.2	El exponente a en la regla estilo Doppler para la transformación de la frecuencia observada por el electrón en su sistema de referencia propio. .	73
4.3	Solución a la aparente inconsistencia del límite de la rapidez de las masas.	75
	Conclusiones	79
A	La velocidad de la luz como un límite para la velocidad de los cuerpos.	81
B	Dilatación temporal para el tiempo de absorción de los fotones.	85
	Agradecimientos	89
	Bibliografía	91

*A mi familia que me ha apoyado en todo momento desde que inicié
el viaje por los senderos desconocidos de la ciencia.*

Introducción

La teoría de la relatividad de Einstein (especial y general) resultó en una revolución de la física contemporánea. Esta revolución implica de entrada conceptos contraintuitivos y sorprendentes. La relatividad ha sido probada una y otra vez en los laboratorios más avanzados sin dejar lugar a dudas acerca de sus fundamentos. Después de cien años de su creación, la relatividad sigue siendo una teoría sorprendente, al grado de que los estudiantes de cualquier nivel no dejan de preguntarse acerca de su funcionamiento.

Muchos libros se han escrito para divulgar los conceptos básicos de la teoría, sin embargo, cuántos de ellos en el área de divulgación son necesarios para dejar claro que el tiempo y el espacio se entretujan para explicar los límites de cantidades que desde el marco de las teorías clásicas serían infinitas, entre ellas la rapidez de la luz.

Los estudiantes suelen entender que debería existir un límite para la rapidez de la luz, luego cuestionan el por qué ese límite coincide con el límite de rapidez para cualquier objeto en el universo. Después de tomar algunos cursos (de relatividad por su puesto) esas dudas desaparecen, pues luego de esto, se puede apreciar que la teoría es impecable. Sin embargo, esta teoría está basada en dos postulados. Uno de ellos es, que la rapidez de la luz es un invariante en cualquier sistema de referencia inercial.

Esto no debería ser un problema, dado que existen postulados tanto en física como en las matemáticas, que normalmente no se cuestionan, pues en ellos se basan las teorías que se conocen hasta ahora.

Por lo regular, la mayoría de los autores introducen al lector al mundo de la relatividad sin cuestionar ni explicar los mecanismos por los cuales funciona. Sin embargo, algunos autores como A. Beiser[1] tratan de explicar como se puede entender por ejemplo la famosa ecuación de Einstein $E = mc^2$ proponiendo una situación ideal (sugerida por el propio Einstein) en la sección llamada: “Masa y Energía: Derivación Alternativa”, que consiste en una caja cerrada en la cual en uno de sus extremos se emite un pulso electromagnético.

Son pocos los ejemplos (pero no nulos) de los estudios a cerca de como puede enten-

derse el funcionamiento de la teoría de Einstein. Otro ejemplo se tiene en el trabajo de L. C. Baird[2] en el cual plantea una deducción breve y pedagógica de la masa relativista. Otro ejemplo se tiene con T. R. Sandin en “In defense of relativistic mass” [3] y en “Relativistic momentum and kinetic energy, and $E = mc^2$ ” de Ben Yu-Kuang Hu[4].

Los trabajos anteriores proponen situaciones en las cuales se trata de entender el mecanismo de acción a través de situaciones ideales, de las cuales se logra obtener una herramienta pedagógica que ayuda a explicar y entender parte de la teoría de Einstein. Por ejemplo en “The quantum vacuum as the origin of the speed of light” [5] de M. Urban et al., proponen un modelo para explicar el origen de la velocidad de la luz considerando al vacío cuántico continuamente lleno de apariciones y desapariciones de pares de partículas cargadas, en este caso fermiones (pares pasajeros de partícula-antipartícula), asumiendo que un par pasajero es el producto de la fusión de dos fotones virtuales, y derivan la velocidad del fotón en el vacío modelando su propagación como una serie de interacciones con esos pares.

Por todo lo anterior y en aras de la didáctica se ha propuesto un ejercicio para tratar de entender lo que sucede a nivel cuántico acerca del límite de la rapidez de las masas.

Está de más decir que este límite es obtenido de forma natural del postulado mencionado. Cuando se acelera una masa, su velocidad crecerá de forma casi lineal para energías pequeñas, sin embargo para energías grandes su rapidez seguirá otra ley que ya no es lineal, describiendo su límite final. El ejercicio mencionado consta de hacer a un lado el postulado de la rapidez y proceder de forma inocente en lo que sucedería si se considera la aceleración de una partícula cargada por el simple hecho de su interacción con campo eléctrico.

Lo anterior implica que se debería considerar que una partícula cargada se acelera por la absorción de fotones del mencionado campo. Haciendo uso del efecto Doppler clásico o una variante del mismo se investiga la rapidez adquirida por la partícula cargada.

Para este ejercicio, esta tesis está organizada de la siguiente forma: En el capítulo inicial se da una completa descripción del artículo de Einstein de 1905, de forma que el lector quedará enterado de los detalles del origen de la relatividad especial. Este capítulo evidentemente puede ser dado por visto si el lector conoce la teoría; al mismo tiempo el lector daría por entendido que el autor conoce la teoría y no pretende otra cosa que un ejercicio didáctico sobre los mecanismos que la naturaleza utiliza para mantener las leyes. El segundo capítulo trata sobre el Efecto Compton, muy útil si se quiere saber acerca de la absorción de energía de fotones por parte de partículas cargadas. De entrada se dice que ya que este ejercicio es teórico, sólo se tomará en cuenta interacciones Compton en las cuales se aproxima a la máxima energía de absorción. En los siguientes

capítulos se establece el ejercicio, discusión y conclusiones.

Al final, se pregunta si el límite se genera por la velocidad de los portadores de la interacción, en este caso los fotones. Si los fotones tuvieran otra velocidad, entonces el límite sería esa otra velocidad, por lo que el ejercicio tiene sentido.

Capítulo 1

El artículo que cambió la historia: “Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimientos”

La teoría de la relatividad de A. Einstein ha tenido mucho éxito, brindando una explicación de muchos fenómenos, uno de ellos, del cual se es testigo todo aquel que posee un celular con navegación, es el GPS.

Sin embargo, hay fenómenos que no son observados tan de cerca, por ejemplo, la desintegración retardada de las partículas, es decir, una partícula que llega del espacio, viaja durante un tiempo mayor al que parecería ser su tiempo de vida media en reposo

Dada la importancia de esta teoría, a continuación se hace una revisión a fondo sobre las ideas de Einstein publicadas en su artículo de 1905: “Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimientos” [6].

1.1 “Asimetrías” del modelo clásico.

La experiencia ha enseñado que no existen sistemas de referencia privilegiados cuando se trata de cuerpos en movimiento. Por ejemplo, nadie puede identificar al estar encerrado en una caja si se está en el espacio en ausencia de gravedad o si se está en caída libre, no hay forma de saber en cuál de los dos sistemas se encuentra.

Las leyes de la física Newtoniana y más aún la definición de espacio y tiempo absolutos dados por Newton deben ser modificadas de alguna manera al encontrarse fenómenos en la naturaleza no explicables y en discordancia con tal definición. Uno de los fenómenos de esta clase, como es bien sabido, es la interacción electromagnética entre un campo

magnético y una varilla conductora en movimiento[7], misma que depende claramente del sistema de referencia donde se mida, pues un observador en reposo observará que las cargas dentro de la varilla se mueven, por tanto en el interior de la varilla se crea un campo eléctrico que ejerce una fuerza que tiende a equilibrar a la fuerza que de otro modo haría mover cualquier carga a lo largo de la varilla; mientras que para un observador que se mueve con la varilla, observará que en el interior de la varilla no hay campo eléctrico, y a pesar de haber un campo magnético uniforme, este no produce ninguna fuerza porque no hay cargas en movimiento.

Éstas “asimetrías” no explicadas por la teoría clásica imponen la modificación de la misma o el adiconamiento de “entes” con propiedades extrañas pero suficientes para dar sentido a una explicación de los fenómenos antes no explicados. En este rubro, se encuentra la introducción del éter, extraño medio de propagación de la luz, el cual debería permear todo el espacio y ser extremadamente ligero. Sin embargo, la experiencia demostrada por Michelson y Morley[8], revela que tal “éter” no existe.

1.2 Postulados de la teoría especial de la relatividad.

En medio del colapso de las teorías físicas, en 1905, un joven físico dió solución al dilema: cambiar toda la física hasta entonces desarrollada o introducir modificaciones cuyo objetivo fuera corregir aquellas partes que no arrojaban los resultados esperados. Albert Einstein, propuso en uno de sus famosos artículos “Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento”, modificar el concepto de espacio y tiempo absolutos, y ponderar la existencia de marcos privilegiados de referencia. Einstein postuló en esencia dos cosas:

- Para todos los sistemas de referencia inerciales, las leyes físicas toman la misma forma (Principio de relatividad).
- En todo sistema de referencia, la velocidad de la luz c , es siempre una constante, sin importar el movimiento de la fuente (Invariancia de la velocidad de la luz).

1.3 Definición de simultaneidad y sincronización de relojes.

Dada los postulados anteriores, Einstein tuvo que cambiar y desarrollar nuevos conceptos, tales como simultaneidad, espacio y tiempo.

Dados dos observadores colocados en A y en B, ambos con relojes de la misma naturaleza, cada uno podrá evaluar eventos cronológicamente en sus vecindades, pero sin

alguna hipótesis adicional, es imposible comparar cronológicamente los eventos del observador en A con los eventos del observador en B.

Falta definir un tiempo en común para ambos observadores, esto puede hacerse si se toma un rayo de luz emitido desde A y reflejado en B por algún espejo de tal forma que regresa al punto A, denotando el tiempo como t_A al momento justo en el cual el rayo de luz es emitido, sea t_B el tiempo en el cual el rayo llega a B y además t_A^* el tiempo en el cual el rayo regresa al punto A, dados A y B en reposo, si se define que el tiempo de viaje de la luz de ir de A a B es igual al de B a A, se tiene que los relojes colocados en A y en B estarán sincronizados si:

$$t_B - t_A = t_A^* - t_B \quad (1.1)$$

Suponiendo que lo anterior se puede hacer sin contrariedades para una cantidad arbitraria de puntos, y además que las siguientes afirmaciones son válidas:

- 1 Dados dos relojes A y B, tal que A está sincronizado con B, entonces B está sincronizado con A.
- 2 Dados tres relojes A, B y C, tales que A está sincronizado con B, y A está sincronizado con C, entonces los relojes B y C estarán también sincronizados.

De esta manera, se obtuvo una definición de “simultáneo” y de “tiempo”, todos los tiempos están definidos por medio de relojes estacionarios en el marco de referencia. La sincronización de los relojes ocurre porque estos están separados en lugares distantes uno del otro.

La definición de “tiempo de un evento” dado por Einstein, se refiere al dato de un reloj que se encuentra en reposo en el mismo lugar y en el mismo momento del evento, sincronizado con un reloj en reposo. Apelando a los hechos experimentales, la magnitud:

$$\frac{2\overline{AB}}{t_A^* - t_A} = c \quad (1.2)$$

Es una constante universal.

1.4 Sobre la relatividad de la longitud y del tiempo.

Supóngase dos sistemas de referencia S y S' , de tal forma que el sistema S' se mueve a una velocidad uniforme v en la dirección de los ejes $x - x'$, mientras que los demás ejes

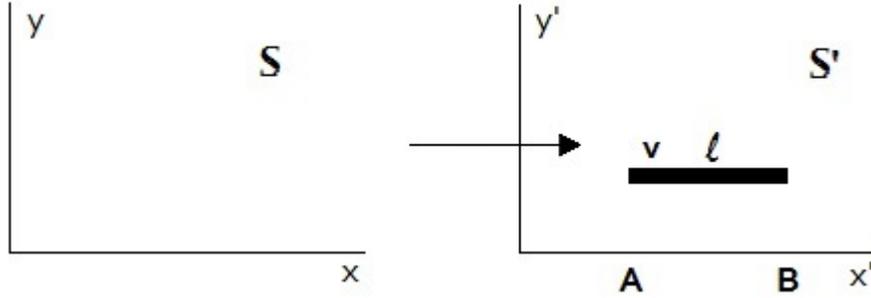


Figura 1.1: Dos sistemas de referencia. S está en reposo y S' se mueve a velocidad v respecto de S en la dirección $x - x'$. En S' hay una varilla de longitud l en reposo, iniciando en el punto A y terminando en B .

son paralelos. Considérese una varilla de longitud l medida en el sistema S que viaja a una velocidad v relativa a S , es decir en reposo con respecto al sistema S' , en la cual se han colocado relojes en los extremos sincronizados con un reloj en S en reposo. La longitud de la varilla medida en S' es evidentemente l , sin embargo, la longitud de la varilla medida desde S será diferente de l .

Considérese un rayo de luz emitido desde el extremo A de la varilla en el tiempo t_A , llega al extremo B en el tiempo t_B y se refleja hacia A llegando en el tiempo t_A^* . Considérese el fenómeno observado desde el sistema S , la velocidad del rayo al aproximarse a B será $c - v$, considerando la longitud de la varilla vista desde S como r_{AB} , el tiempo que le toma al rayo llegar desde A hasta B es:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v} \quad (1.3)$$

Cuando el rayo es reflejado en B hacia A , se aproxima con una velocidad $c + v$ medida desde S , por tanto la diferencia temporal estará dada por:

$$t_A^* - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v} \quad (1.4)$$

De lo anterior se observa que el tiempo de ir de A hasta B es distinto del tiempo que toma en volver de B hasta A . Es decir, dados dos observadores colocados en los extremos de la varilla cada uno con sus respectivos relojes, verán que los relojes no están sincronizados entre sí, mientras que los observadores en S los verán como sincronizados. De aquí que dado dos eventos simultáneos desde el punto de vista de un sistema coordinado ya no se puede interpretar como simultáneo desde el punto de vista de un sistema que se mueva con velocidad relativa al primero. El concepto de simultaneidad deja de ser absoluto.

1.5 Teoría sobre la transformación de coordenadas y del tiempo de un sistema en reposo a otro sistema que se encuentra en movimiento traslacional uniforme con respecto al primero.

Considérese nuevamente dos marcos de referencia S y S' , con sus ejes coincidentes en $t = 0$, S permanece en reposo con respecto a S' que se mueve con una velocidad relativa v en la dirección $x - x'$ con respecto a S . Considérese un punto P en el sistema S , que se mueve a una velocidad v , nótese que P está en reposo desde la perspectiva de un observador situado en el origen de S' , es decir, dada x' la coordenada de P en S' , x' mantiene un valor fijo. Sea X la posición del punto P , tal que medida desde S , $X = x - vt$.

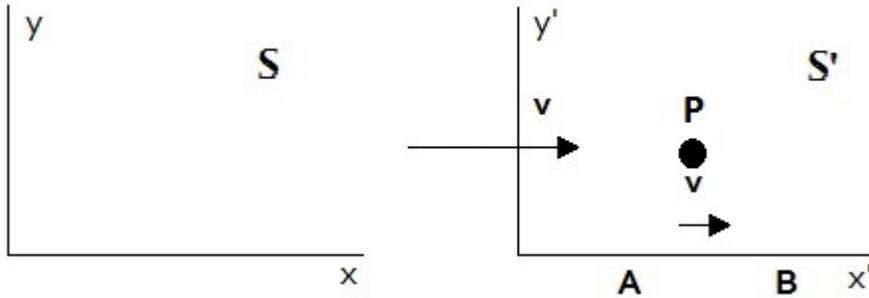


Figura 1.2: Dos sistemas de referencia. S está en reposo y S' se mueve a velocidad v respecto de S en la dirección $x - x'$. Un punto en S' permanece en reposo, el mismo punto medido en S se mueve a la misma velocidad v que S' .

Desde el origen del sistema S' , se emite un rayo de luz en el instante t'_0 , llega a P en t'_1 , y regresa hacia el origen de S' en el tiempo t'_2 . Supóngase que los relojes están sincronizados, entonces utilizando (1.1) se debe cumplir que:

$$\frac{1}{2}(t'_0 + t'_2) = t'_1 \quad (1.5)$$

Nótese que los tiempos t'_0 , t'_1 y t'_2 pueden ser expresados como función de (X, y, z, t) , donde t es el tiempo medido desde el sistema S en el que llega el rayo de luz a P . De esta manera se puede escribir cada tiempo como $t'_i = t'_i(X, y, z, t)$, donde i se refiere a los valores 0, 1, 2, tomando lo anterior, los instantes de tiempo en que el rayo es emitido,

recibido y reflejado pueden escribirse expresamente como:

$$t'_0 = t'(0, 0, 0, t) \quad (1.6)$$

$$t'_1 = t'(X, 0, 0, t + \frac{X}{c-v}) \quad (1.7)$$

$$t'_2 = t'(0, 0, 0, t + \frac{X}{c-v} + \frac{X}{c+v}) \quad (1.8)$$

Se puede reescribir (1.5) al introducir las ecuaciones anteriores, esto queda como:

$$\frac{1}{2}[t'(0, 0, 0, t) + t'(0, 0, 0, t + \frac{X}{c-v} + \frac{X}{c+v})] = t'(X, 0, 0, t + \frac{X}{c-v}) \quad (1.9)$$

Nótese que si X es infinitesimalmente pequeño (1.7) y (1.8) se transforman como:

$$t'(X, 0, 0, t + \frac{X}{c-v}) \rightarrow t'(0, 0, 0, t) + \frac{\partial t'}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial t'}{\partial X} \Delta X \quad (1.10)$$

$$t'(0, 0, 0, t + \frac{X}{c-v} + \frac{X}{c+v}) \rightarrow t'(0, 0, 0, t) + \frac{\partial t'}{\partial t} \Delta t \quad (1.11)$$

Donde $\Delta t = \frac{X}{c-v}$ para (1.10) mientras que para (1.11) $\Delta t = (\frac{X}{c-v} + \frac{X}{c+v})$, obsérvese que esto depende del camino que sigue el rayo de luz si es hacia P o hacia el origen de S' . Por lo que al sustituir en 1.5 y hacer un poco de álgebra se obtiene:

$$\frac{1}{2}[(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}) \frac{\partial t'}{\partial t}] = \frac{\partial t'}{\partial X} + \frac{1}{c-v} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (1.12)$$

Después de arreglar términos queda:

$$\frac{\partial t'}{\partial X} + (\frac{v}{c^2 - v^2}) \frac{\partial t'}{\partial t} = 0 \quad (1.13)$$

Si ahora, se envía un rayo de luz en la dirección y' desde el origen de S' , a un punto Y fijo. Vista la señal desde el sistema S , el rayo viaja a una velocidad c haciendo un ángulo, con velocidad v en el eje x y velocidad $\sqrt{c^2 - v^2}$ en el eje y .

Análogo al caso anterior, sean t'_0 , t'_1 y t'_2 los tiempos en los cuales el rayo es emitido, llega a Y y regresa al mismo lugar de su emisión, respectivamente.

Nótese que visto desde el sistema S , t'_0, t'_1 y t'_2 son funciones de las coordenadas de

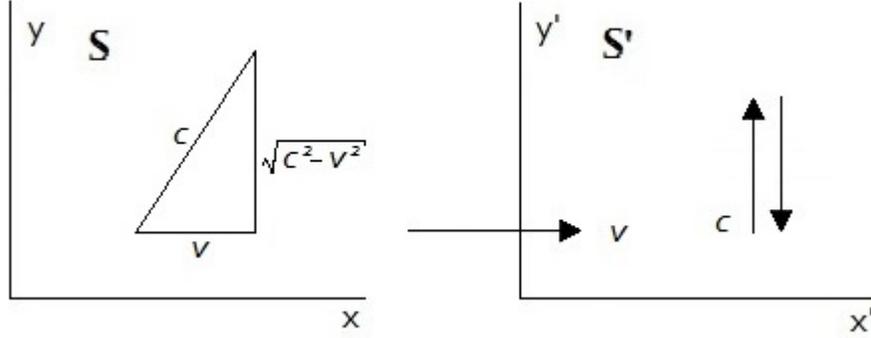


Figura 1.3: Un rayo de luz es emitido desde S' a un punto Y fijo, la velocidad del rayo es c . Desde el sistema S , el rayo lleva una trayectoria con un ángulo y su velocidad también es c , en el eje y de S , se tiene una velocidad distinta.

S , de la forma:

$$t'_0 = t'(0, 0, 0, t) \quad (1.14)$$

$$t'_1 = t'(0, Y, 0, t + \frac{Y}{\sqrt{c^2 - v^2}}) \quad (1.15)$$

$$t'_2 = t'(0, 0, 0, t + \frac{Y}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{Y}{\sqrt{c^2 - v^2}}) \quad (1.16)$$

$$(1.17)$$

Utilizando el hecho que de los relojes están sincronizados se tiene que:

$$\frac{1}{2} [t'(0, 0, 0, t, \frac{Y}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{Y}{\sqrt{c^2 - v^2}})] = t'(0, Y, 0, t + \frac{Y}{\sqrt{c^2 - v^2}}) \quad (1.18)$$

Empleando el mismo argumento de hacer Y infinitesimalmente pequeño se puede ver que después de la sustitución correcta se tiene:

$$\frac{1}{2} [(\frac{2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \frac{\partial t'}{\partial t})] = \frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (1.19)$$

De donde finalmente:

$$\frac{\partial t'}{\partial y} = 0 \quad (1.20)$$

Haciendo un desarrollo análogo para un rayo en moviéndose en dirección z se tiene:

$$\frac{\partial t'}{\partial z} = 0 \quad (1.21)$$

Debido a las propiedades de homogeneidad e isotropía del tiempo, las soluciones para t' deben ser lineales[6] [9], es decir, debe cumplirse que tales soluciones tengan la forma:

$$t' = at + bX + cy + dz \quad (1.22)$$

Debido a (1.20) y (1.21), se tiene que $c = d = 0$, de tal forma que:

$$t' = at + bX \quad (1.23)$$

Utilizando (1.13) se puede verificar que $b = -\frac{av}{c^2 - v^2}$, por tanto:

$$t' = a\left[t - \frac{v}{c^2 - v^2}X\right] \quad (1.24)$$

Donde a no depende de las coordenadas x , y o z , pero si depende de v .

Supóngase ahora que desde el origen de S' se lanza un rayo de luz en la dirección de crecimiento de x' . En S' el rayo se mueve a velocidad c , sin embargo, visto desde S tiene una velocidad relativa $c - v$. En S' , después de un tiempo t , viaja una distancia dada por x' , de tal forma que:

$$x' = ct' = ca\left[t - \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}}X\right] \quad (1.25)$$

Dado que desde el sistema S , el rayo se propaga a una velocidad relativa $c - v$ en un tiempo t se tiene:

$$t = \frac{X}{c - v} \quad (1.26)$$

Sustituyendo en (1.25) y después de hacer algunos cálculos simples se puede demostrar la relación siguiente:

$$x' = \frac{c^2}{c^2 - v^2}a(x - vt) \quad (1.27)$$

Si ahora, se lanza un rayo en la dirección y' se tiene:

$$y' = ct' = ca\left[t - \frac{v}{c^2 - v^2}\right] = cat \quad (1.28)$$

Puesto que el rayo fue lanzado solamente en la dirección y' . Desde el sistema S , el tiempo estará dado por:

$$t = \frac{y'}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (1.29)$$

Sustituyendo (1.29) en (1.28) se tiene que:

$$y' = \frac{ca}{\sqrt{c^2 - v^2}}y = a \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) y \quad (1.30)$$

De la misma manera lanzando un rayo en la dirección z se obtiene la transformación entre las coordenadas z' y z dada por:

$$z' = a \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) z \quad (1.31)$$

Tomando (1.24) y sustituyendo la forma explícita de X se tiene:

$$t' = a \left[t - \frac{v}{c^2 - v^2}X \right] = a \left[t - \frac{v}{c^2 - v^2}(x - vt) \right] = \frac{a}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[t - \frac{v}{c^2}x \right] \quad (1.32)$$

Nótese que el factor $\left[\frac{a}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right]$ es una combinación de un único factor al ser a dependiente de la velocidad. Puede denotarse tal factor como $\phi(v)$. Reescribiendo (1.27), (1.30) y (1.31) en términos del factor $\phi(v)$, es fácil demostrar que:

$$x' = \phi(v)\gamma(x - vt) \quad (1.33)$$

$$y' = \phi(v)y \quad (1.34)$$

$$z' = \phi(v)y \quad (1.35)$$

Donde $\gamma = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Falta determinar la forma de $\phi(v)$, para ello considérese otro sistema S'' moviéndose a una velocidad $-v$ con respecto a S . Supóngase además que los orígenes

de S , S' y S'' son coincidentes en $t = t' = t'' = 0$. Al transformar las coordenadas del sistema S'' , primero en las coordenadas de S' y luego a las coordenadas de S se tiene que:

$$t'' = \phi(-v)\gamma(-v) \left\{ t' + \frac{v}{c^2}x' \right\} \quad (1.36)$$

Por tanto:

$$t'' = \phi(-v)\gamma(-v) \left\{ \left[\phi(v)\gamma(v)(t - \frac{v}{c^2}x) \right] + \frac{v}{c^2} [\phi(v)\gamma(v)(x - vt)] \right\} \quad (1.37)$$

Es fácil ver que:

$$t'' = \phi(-v)\phi(v)t \quad (1.38)$$

Haciendo algo similar se encuentra también que:

$$x'' = \phi(-v)\phi(v)x \quad (1.39)$$

$$y'' = \phi(-v)\phi(v)y \quad (1.40)$$

$$z'' = \phi(-v)\phi(v)z \quad (1.41)$$

De las ecuaciones (1.38), (1.39) y (1.40) se ve que las transformaciones entre $[x'', y'', z'']$ y $[x, y, z]$ no contienen al tiempo, los sistemas S'' y S están en reposo relativo uno con respecto del otro, las transformaciones de S'' en S son transformaciones de identidad, tal que $\phi(-v)\phi(v) = 1$.

Ya se sabe algo acerca de la función $\phi(v)$, falta determinar su forma precisa. Para ello considérese una barra de longitud l en reposo en el sistema de referencia S' . La barra está alineada con el eje y' , con uno de sus extremos en el origen de S' y otro en $x' = 0$, $y' = l$, $z' = 0$, tal como en la imagen.

Se quiere ver las coordenadas de los extremos de la barra desde la perspectiva de un observador en S . Para ello considérese que visto desde S , los puntos A y B (inicio y fin de la barra), están localizados en:

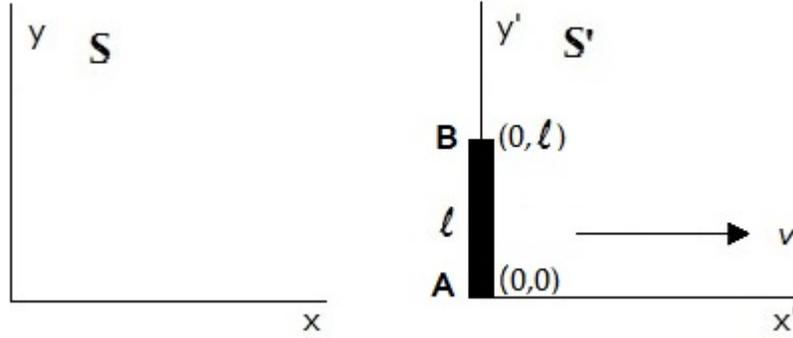


Figura 1.4: Una barra de longitud l , se mantiene en reposo en el sistema S' que se mueve a una velocidad v con respecto al sistema S . La barra es alineada con el eje y' .

$$\begin{array}{lll}
 x_A = vt & z_A = 0 & y_B = \frac{l}{\phi(v)} \\
 y_A = 0 & x_B = vt & z_B = 0
 \end{array}$$

Por lo que la longitud de la barra medida en S es $\frac{l}{\phi(v)}$. Debido a razones de simetría, la longitud de la barra medida en el sistema en reposo, que se mueve perpendicularmente a su eje depende solamente de la velocidad y no de la dirección y el sentido del movimiento. Por lo que la longitud de la barra no varía si se cambia v por $-v$, hecho esto se tiene que:

$$\frac{l}{\phi(v)} = \frac{l}{\phi(-v)} \quad (1.42)$$

Por tanto:

$$\phi(v) = \phi(-v) \quad (1.43)$$

Combinado con el hecho de que el producto de $\phi(v)\phi(-v) = 1$, se tiene finalmente que $\phi(v) = 1$. Por tanto las transformaciones entre las coordenadas del sistema S' y las coordenadas del sistema S , pueden finalmente escribirse como:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \quad (1.44)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1.45)$$

$$y' = y \quad (1.46)$$

$$z' = z \quad (1.47)$$

Donde $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Estas relaciones de transformación son conocidas en la

literatura actual como transformaciones de Lorentz, en honor a Hendrik Anton Lorentz (1853-1928) quien fue el primero en darse cuenta que las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell permanecían invariantes ante este tipo de transformaciones de coordenadas.

1.6 Significado físico de las ecuaciones de transformación.

Einstein analizó dos ejemplos de cuerpos en movimiento. Considérese primero una esfera de radio R , moviéndose con una velocidad v , es decir, se encuentra en reposo en un sistema S' que se mueve a la derecha de otro sistema S con la misma velocidad de la esfera.

En S' , la esfera se encuentra en reposo, por tanto tendrá por ecuación:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2 \quad (1.48)$$

Utilizando las transformaciones encontradas, es fácil ver de una simple sustitución en la ecuación del cuerpo visto desde S , toma la forma:

$$\frac{x^2}{1 - \beta^2} + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1.49)$$

Que es la ecuación de un elipsoide, dado lo anterior un cuerpo esférico moviéndose, se verá como un elipsoide desde un sistema en reposo. La coordenada x aparece contraída por el factor $\frac{1}{1 - \beta^2}$.

Para el siguiente caso, considérese dos sistemas de referencia inerciales S y S' , tal que S' se mueve a una velocidad v a la derecha de S y además, en el instante $t = t' = 0$, sus orígenes son coincidentes. Supóngase que a bordo de cada sistema (en el origen) hay un reloj capaz de medir el tiempo, sean t el tiempo del sistema S y t' el tiempo del sistema S' ; se quiere ver como es la medición del tiempo del sistema S' pero medido desde S .

Para ello considérese lo siguiente: después de un tiempo t , el origen de S' visto desde S se encuentra en $x = vt$, tomando la transformación temporal se tiene que:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right) = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} vt \right) = t \sqrt{1 - \beta^2} \quad (1.50)$$

Por tanto, sumando y restando un uno, se puede ver que:

$$t' = t - \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right) t \quad (1.51)$$

Lo cual dicta que el reloj en S mide el tiempo de S' pero retardado por el factor $1 - \sqrt{1 - \beta^2}$.

1.7 Teorema de adición de velocidades.

Una pregunta interesante se plantea cuando hay una partícula que se mueve a velocidad u constante con respecto al sistema S' ¿Cómo se mide la velocidad de la partícula desde el sistema S ?

Supóngase pues que una partícula parte del origen de S' en $t' = 0$ con una velocidad constante w , después de un tiempo $t' = 0$ las ecuaciones de la partícula son de la forma:

$$x' = w_x t' \quad (1.52)$$

$$y' = w_y t' \quad (1.53)$$

De las transformaciones de coordenadas se tiene que:

$$\gamma(x - vt) = \gamma w_x \left(t - \frac{\beta}{c} x \right) \quad (1.54)$$

Despejando de tal forma se tiene que:

$$x = \frac{(w_x + v)}{\left(1 + \frac{\beta}{c} w_x\right)} t \quad (1.55)$$

Considérese ahora que desde el sistema de referencia S , la partícula tiene coordenadas dadas por:

$$x = u_x t \quad (1.56)$$

Donde u_x es la componente de la velocidad de la partícula en la dirección x , vista desde S . Sustituyendo el resultado para x se tiene que:

$$u_x = \frac{(w_x + v)}{\left(1 + \frac{\beta}{c} w_x\right)} \quad (1.57)$$

Para la coordenada y , vista desde S se cumple que:

$$y = \gamma w_y \left(t - \frac{\beta}{c} x \right) == w_y t \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{vw_x}{c^2}} \quad (1.58)$$

Vista desde el sistema S , la partícula tiene coordenadas en: $y = u_x t$, igualando se tiene finalmente que:

$$u_y = w_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{vw_x}{c^2}} \quad (1.59)$$

A (157) y (159) se le conoce como el teorema de adición de velocidades.

1.8 Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío. Sobre la naturaleza de las fuerzas electromotrices que aparecen en el movimiento de un campo magnético.

Una de las causas de que Albert Einstein descubriera su teoría de la relatividad fue la aparente elección de un marco privilegiado de referencia hecha por los fenómenos electromagnéticos. Al emplear las ecuaciones de transformación de Galileo y transformar las ecuaciones de Maxwell a “sistemas en movimiento”, las ecuaciones de Maxwell transformadas parecían tomar la misma forma, excepto por términos adicionales proporcionales a la velocidad relativa entre los dos sistemas de referencia.

Si se es capaz de medir esos términos adicionales a las ecuaciones de Maxwell en el sistema de referencia que se mueve, se podría determinar la velocidad relativa v al éter estacionario, el cual se supone en reposo respecto al espacio absoluto de Newton.

Medir tales términos en la práctica es demasiado complicado, puesto que van como $(\frac{v}{c})$ a primer y segundo orden, ante esta imposibilidad, H. A. Lorentz, introdujo un tiempo local y definió a los campos eléctrico y magnético en un marco de referencia S' , en términos de combinaciones lineales apropiadas de los campos en S . Esto produjo que ya no se encontraran términos de $(\frac{v}{c})$ a primer orden, pero si los hubo a segundo orden.

La relación entre los campos magnético y eléctrico entre los sistemas S y S' , se obtuvieron de tal manera que las ecuaciones de Maxwell fueran consistentes con el principio

de relatividad de Newton. Einstein revisó este procedimiento e inició con el principio de relatividad y obtuvo las ecuaciones de transformación de Lorentz. Para obtener las ecuaciones de transformación de los campos eléctrico y magnético en los sistemas S y S' , considérese primero las ecuaciones de Maxwell-Hertz en el espacio vacío, es decir, sin fuentes para los campos:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (1.60) \qquad \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (1.63)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (1.61) \qquad \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (1.64)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (1.62) \qquad \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (1.65)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (1.66)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (1.67)$$

El conjunto de ecuaciones (1.60) a (1.67), es válido en el sistema de referencia S fijo. Si ahora, se quiere ver como se transforman estas ecuaciones a un sistema de referencia S' , moviéndose a una velocidad v con respecto a S en la dirección de crecimiento de x , se tendrían que aplicar las ecuaciones de transformación de Lorentz encontradas anteriormente. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} \\ &= -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial E_x}{\partial x'} \end{aligned} \quad (1.68)$$

Haciendo algo análogo para la componente y y z del campo \vec{E} se tiene:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y'} \quad (1.69) \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial z'} \quad (1.70)$$

Utilizando las relaciones anteriores, se puede reescribir (1.66) en las coordenadas primadas como:

$$\nabla' \cdot \vec{E} = -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} = 0 \quad (1.71)$$

De una forma similar, también se puede escribir (1.67) como:

$$\nabla' \cdot \vec{B} = -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 \quad (1.72)$$

De la misma forma al aplicar las ecuaciones de transformación al conjunto de ecuaciones (1.60) a (1.65), es posible obtener la forma de éstas mismas ecuaciones en S' :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial [\gamma (B_z - \beta E_y)]}{\partial y'} - \frac{\partial [\gamma (B_y - \beta E_z)]}{\partial z'} \quad (1.73)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial [\gamma (E_y - \beta B_z)]}{\partial t'} = \frac{\partial B_x}{\partial z'} - \frac{\partial [\gamma (B_z - \beta E_y)]}{\partial x'} \quad (1.74)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial [\gamma (E_z - \beta B_y)]}{\partial t'} = \frac{\partial [\gamma (B_y - \beta E_z)]}{\partial x'} - \frac{\partial B_x}{y'} \quad (1.75)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t'} = \frac{\partial [\gamma (E_y - \beta B_z)]}{\partial z'} - \frac{\partial [\gamma (E_z - \beta B_y)]}{\partial y'} \quad (1.76)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial [\gamma (B_y - \beta E_z)]}{\partial t'} = \frac{\partial [\gamma (E_z - \beta B_y)]}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{y'} \quad (1.77)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial [\gamma (B_z - \beta E_y)]}{\partial t'} = \frac{\partial E_x}{\partial y'} - \frac{\partial [\gamma (E_y - \beta B_z)]}{\partial x'} \quad (1.78)$$

De acuerdo con el principio de relatividad, las ecuaciones de Maxwell deben tener la misma forma en el sistema S' , de tal forma debe cumplirse que:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} = \frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \quad (1.79)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = \frac{\partial E'_y}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial y'} \quad (1.82)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} = \frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} \quad (1.80)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B'_y}{\partial t'} = \frac{\partial E'_z}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial z'} \quad (1.83)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} = \frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} \quad (1.81)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B'_z}{\partial t'} = \frac{\partial E'_x}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial x'} \quad (1.84)$$

Ahora, debe hacerse notar que, las ecuaciones (1.73) a (1.78) y (1.79) a (1.84) derivados para S' son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell para el sistema S , además las ecuaciones de ambos sistemas coinciden, por tanto se puede encontrar por inspección las equivalencias de las transformaciones de los campos en S y S' . Éstas equivalencias a lo más difieren en un factor que depende de la velocidad, análogo al caso en el cual las ecuaciones de transformación cambiaban por un factor dependiente de v .

Para este caso, imponiendo argumentos de simetría y paridad de tal factor, se puede ver que este factor tiene que ser forzosamente la identidad, por lo que al igualar las componentes de las ecuaciones se encuentran las ecuaciones de transformación para las componentes de los campos eléctrico y magnético:

$$E'_x = E_x \quad (1.85) \qquad B'_x = B_x \quad (1.88)$$

$$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \quad (1.86) \qquad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \quad (1.89)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \quad (1.87) \qquad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \quad (1.90)$$

1.9 Teoría del principio Doppler y de la aberración.

Cuando se tiene una fuente de luz, la cual es emitida en forma de ondas electromagnéticas a una frecuencia dada, tiene lugar el llamado efecto Doppler, el cual es la disminución o aumento de la frecuencia en función del movimiento del observador hacia la fuente de luz. Para explicar este fenómeno considérese lo siguiente:

Tómese una fuente de ondas electromagnéticas muy lejos del sistema inercial de referencia S , de tal forma que en un entorno del origen de S , el frente de ondas se puede representar en una región del origen por ondas planas de la forma:

$$E_x = E_{x0} \text{sen}(\phi) \quad (1.91) \qquad B_x = B_{x0} \text{sen}(\phi) \quad (1.94)$$

$$E_y = E_{y0} \text{sen}(\phi) \quad (1.92) \qquad B_y = B_{y0} \text{sen}(\phi) \quad (1.95)$$

$$E_z = E_{z0} \text{sen}(\phi) \quad (1.93) \qquad B_z = B_{z0} \text{sen}(\phi) \quad (1.96)$$

Donde ϕ está dada por:

$$\phi = \omega \left(t - \frac{a_x x + a_y y + a_z z}{c} \right) \quad (1.97)$$

Donde a_x , a_y y a_z son las direcciones de los cosenos directores de las normales a la onda.

Se quiere ver como son las componentes del campo electromagnético vistos desde la perspectiva de un observador colocado en el sistema de referencia S' que se mueve a una velocidad v en la dirección $x - x'$.

Si se aplican las ecuaciones de transformación para cada una de las componentes de los campos, de tal forma que:

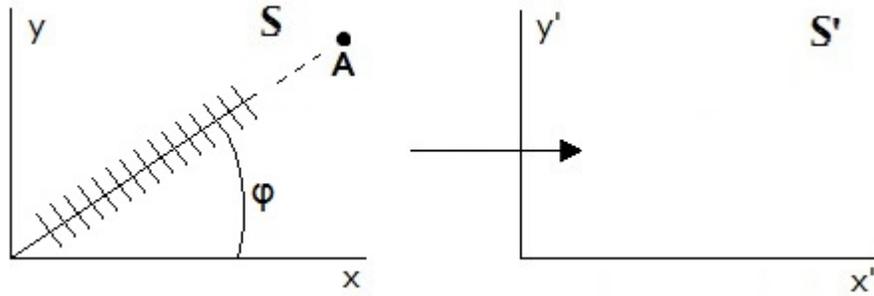


Figura 1.5: Ondas electromagnéticas aproximadas por ondas planas en una región del origen de S , se quiere ver como se ven las componentes del campo electromagnético en un sistema S' que se mueve a velocidad v .

$$E'_x = E'_{x0} \text{sen}(\phi') = E_{x0} \text{sen}(\phi') \quad (1.98) \quad B'_x = B'_{x0} \text{sen}(\phi') = B_{x0} \text{sen}(\phi') \quad (1.101)$$

$$E'_y = E'_{y0} \text{sen}(\phi') = \gamma (E_{y0} - \beta B_{z0}) \text{sen}(\phi') \quad (1.99) \quad B'_y = B'_{y0} \text{sen}(\phi') = \gamma (B_{y0} + \beta E_{z0}) \text{sen}(\phi') \quad (1.102)$$

$$E'_z = E'_{z0} \text{sen}(\phi') = \gamma (E_{z0} + \beta B_{y0}) \text{sen}(\phi') \quad (1.100) \quad B'_z = B'_{z0} \text{sen}(\phi') = \gamma (B_{z0} + \beta E_{y0}) \text{sen}(\phi') \quad (1.103)$$

Mientras que ϕ' es la fase vista desde un observador en S' , tal que:

$$\begin{aligned}
\phi &= \omega \left(t - \frac{a_x x + a_y y + a_z z}{c} \right) \\
&= \omega t - \frac{\omega}{c} a_x x - \frac{\omega}{c} a_y y - \frac{\omega}{c} a_z z \\
&= \omega \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right) \gamma - \frac{\omega}{c} a_x \gamma (x' + vt') - \frac{\omega}{c} a_y y - \frac{\omega}{c} a_z z \\
&= \omega \gamma \left(1 - \frac{1}{c} a_x v \right) t' - \omega \gamma \left(\frac{1}{c} a_x - \frac{\beta}{c} \right) x' - \frac{\omega}{c} a_y y - \frac{\omega}{c} a_z z
\end{aligned} \tag{1.104}$$

De acuerdo con el principio de relatividad, la fase desde S' debe ser de la forma:

$$\phi' = \omega' \left(t' - \frac{a'_x x' + a'_y y' + a'_z z'}{c} \right) \tag{1.105}$$

Por tanto, al comparar (1.104) y (1.105), se tiene que:

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c} a_x v \right)} \tag{1.106}$$

Sustituyendo la relación anterior en la parte con término en x' de la ecuación (1.104), después de algunos sencillos pasos se llega a que:

$$a'_x = \frac{a_x - \beta}{1 - a_x \beta} \tag{1.107}$$

Haciendo algo semejante se encuentran también las transformaciones de los cosenos directores en las coordenadas y' y z' :

$$a'_y = \frac{a_y}{\gamma (1 - a_x \beta)} \tag{1.108}$$

$$a'_z = \frac{a_z}{\gamma (1 - a_x \beta)} \tag{1.109}$$

De (1.106), considerando como en la figura, que el frente de ondas tiene un ángulo con respecto al eje x de S , de tal forma que se puede expresar $a_x = \cos(\phi)$, considerando además la relación entre ω y ν se puede escribir la relación existentes entre las frecuencias observadas en los dos marcos de referencia:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \beta \cos(\phi)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{1.110}$$

Si el ángulo $\phi = 0$, la ecuación para el principio de Doppler para velocidades arbitrarias se reduce a su forma:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (1.111)$$

Si ϕ' es el ángulo entre la dirección del rayo y la línea de observación que va del origen de S a un observador en S' , entonces (1.107) toma la forma:

$$\cos(\phi') = \frac{\cos(\phi) - \beta}{1 - \beta \cos(\phi)} \quad (1.112)$$

La relación anterior, es la fórmula de la aberración. Si ahora $\phi = \frac{\pi}{2}$, la fórmula se reduce a:

$$\cos(\phi') = -\frac{v}{c} \quad (1.113)$$

Si ahora se considera que el campo eléctrico del frente de ondas es paralelo al eje z , las componentes del campo eléctrico para un observador colocado en el sistema de referencia S toman la forma:

$$E_{x0} = 0 \quad (1.114) \quad E_{y0} = 0 \quad (1.115) \quad E_{z0} = A \quad (1.116)$$

Debido a que el campo magnético es perpendicular al campo eléctrico, la componente en z debe ser nula, mientras que en la dirección de x , la componente estará dada por la amplitud A multiplicada por $\text{sen}(\phi)$, y en la dirección y , sucede lo mismo pero con signo negativo, de tal forma que:

$$B_{x0} = A \text{sen}(\phi) \quad (1.117) \quad B_{y0} = -A \text{sen}(\phi) \quad (1.118) \quad B_{z0} = 0 \quad (1.119)$$

Aplicando la transformación de coordenadas a las componentes del campo eléctrico y magnético, y tomando que $E_x = E_{x0} \text{sen}(\phi)$ se tiene las componentes de los campos para el sistema S' :

$$E'_x = 0 \quad (1.120) \quad E'_z = \gamma (1 - \beta \cos(\phi)) A \text{sen}(\phi') \quad (1.122)$$

$$E'_y = 0 \quad (1.121) \quad B'_x = A \text{sen}(\phi) \text{sen}(\phi') \quad (1.123)$$

$$B'_y = \gamma (\beta - \cos(\phi)) A \quad (1.124) \qquad B'_z = 0 \quad (1.125)$$

Del principio de relatividad, las ecuaciones de los campos deben tener la misma forma en S' , (1.120) se puede escribir como:

$$A' = \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos(\phi)\right) A = A \frac{1 - \frac{v}{c} \cos(\phi)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.126)$$

Para $\phi = 0$ se obtiene una relación similar a (1.112), dada para la transformación de amplitudes:

$$A' = A \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (1.127)$$

La ecuación (1.128) significa en palabras que: Dado un observador que se aproxima con velocidad cercana a c , hacia una fuente de luz, dicha fuente de luz debería mostrar una intensidad infinita” [6].

1.10 Transformación de la energía de rayos de luz. Teoría de la presión de radiación ejercida sobre un espejo perfecto.

Se quiere ahora ver la relación existente entre la energía de un objeto medida desde S y S' . Para ello, tómesese una esfera de radio R , que viaja paralelamente al frente de ondas, con velocidad c vista desde el sistema S . Dados a_x , a_y y a_z los cosenos directores de la normal de la onda, los elementos de superficie de la superficie esférica, desde el punto de vista de un observador fijo en S estarán dadas por:

$$(x - cta_x)^2 + (y - cta_y)^2 + (z - cta_z)^2 = R^2 \quad (1.128)$$

Dado que la esfera viaja con el frente de ondas a la velocidad de la luz, la energía de radiación, ni entra ni sale de ella, es decir, la cantidad de radiación dentro de la superficie esférica permanece constante.

Para un observador en el sistema S' , los elementos de superficie del cuerpo, tomarán la forma de un elipsoide, esto puede verse al emplear las ecuaciones de transformación en

(1.128), de tal forma que para el observador en S' al tiempo $t' = 0$, se tiene:

$$\gamma^2 x'^2 \left(1 - \frac{v}{c} a_x\right)^2 + (y'^2 - \gamma \frac{v}{c} a_y x')^2 + (z'^2 - \gamma \frac{v}{c} a_z x')^2 = R^2 \quad (1.129)$$

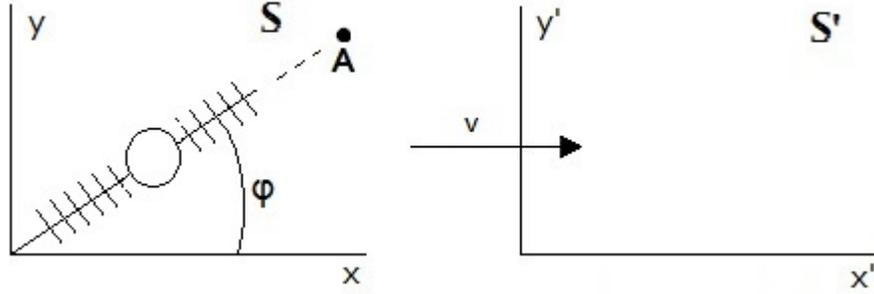


Figura 1.6: Superficies esférica viajando a velocidad c , medida desde S , en la misma dirección que las ondas del frente de ondas.

La cual es la ecuación de un elipsoide con centro y semiejes en:

$$x' = 0 \quad (1.130) \quad y' = \gamma \frac{v}{c} a_y x' \quad (1.132) \quad z' = \gamma \frac{v}{c} a_z x' \quad (1.134)$$

$$X' = \frac{R}{\gamma(1 - \frac{v}{c} a_x)} \quad (1.131) \quad Y' = R \quad (1.133) \quad Z' = R \quad (1.135)$$

Se quiere ver la razón de las energías de luz medidas en S y en S' , para ello considérese que la energía por unidad de volumen está dado por $A^2/8\pi$ para un observador en S , y dado el principio de relatividad, la medida de la energía de luz para un observador en S' debe tener la forma $A'^2/8\pi$, sea E y E' las energías de luz medidas desde S y S' respectivamente, la razón entre ellas está dada por:

$$\frac{E'}{E} = \frac{V' A'^2/8\pi}{V A^2/8\pi} = \frac{A'^2}{A^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos(\phi)} \quad (1.136)$$

Empleando (1.126), se tiene que:

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos(\phi)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.137)$$

Esta ecuación dicta que si una fuente de energía se acerca hacia un observador en el origen de S , a muy alta velocidad, la energía que se recibe y se mide con algún aparato de medición, se acumula de manera creciente, hasta que la fuente pasa por el origen de S y se aleja, de tal forma que cada vez se percibirá menos energía para los aparatos de medición del observador de S .

Si $\phi = 0$, (1.137) se reduce a:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (1.138)$$

Que tiene la misma forma que (1.111), es decir, la razón entre las energías es igual a la razón entre las frecuencias, por tanto se comprueba que la energía de una onda es proporcional a su frecuencia, éste resultado resulta de vital importancia para secciones subsecuentes, tiene implícito el efecto Doppler empleado más adelante, el cual resulta ser la forma de relacionar la frecuencia en dos sistemas de referencia que se mueven uno respecto del otro.

Considérese ahora una superficie perfectamente reflectante, colocada en el plano $x = 0$, en el sistema de referencia S , y un frente de ondas como en la situación anterior. Es claro que el frente de onda estará caracterizado por medio de tres cantidades, a saber: A , $\cos(\phi)$ y ν , medidas desde S ; mientras que, para un observador en S' , el frente de onda se caracterizará por: A' , $\cos(\phi')$ y ν' , dadas por: (1.126), (1.112) y (1.110), respectivamente.

Si ahora se considera que el frente de ondas choca con la superficie reflectante, y se reflejan de tal manera que no hay absorción de energía, las cantidades que describen a las ondas reflejadas, para un observador en S' , se cumple que:

$$A'' = A \quad (1.139)$$

$$\cos(\phi'') = -\cos(\phi) \quad (1.140)$$

$$\nu'' = \nu \quad (1.141)$$

Al transformar éstas cantidades al sistema S , se puede ver que:

$$A'' = A' \quad (1.142)$$

$$\cos(\phi'') = \cos(\phi') \quad (1.143)$$

$$\nu'' = \nu' \quad (1.144)$$

Se quiere saber como son las ecuaciones para el sistema S de la luz reflejada, para ello hay que considerar la transformación inversa de las coordenadas, por lo cual:

$$\begin{aligned} A''' &= A'' \frac{1 + \frac{v}{c} \cos(\phi)}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = A' \frac{1 - \frac{v}{c} \cos(\phi')}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \\ &= A \frac{1 - \frac{v}{c} \cos(\phi)}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \left\{ 1 - \frac{v}{c} \left(\frac{\cos(\phi) - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos(\phi)} \right) \right\} \\ &= A \frac{1 - \frac{v}{c} \cos(\phi)}{1 - (\frac{v}{c})^2} \left\{ 1 - \frac{v}{c} \cos(\phi) - \frac{v}{c} \cos(\phi) + \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right\} \\ &= A \frac{1 - 2\frac{v}{c} \cos(\phi) + \left(\frac{v}{c} \right)^2}{1 - (\frac{v}{c})^2} \end{aligned} \quad (1.145)$$

Un cálculo sencillo y análogo al anterior permite dar las relaciones entre las variables de la onda reflejada vistas desde el sistema de referencia S :

$$\cos(\phi''') = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \cos(\phi) - 2\frac{v}{c}}{1 - 2\frac{v}{c} \cos(\phi) + \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (1.146)$$

$$\nu''' = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{c} \cos(\phi) + \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (1.147)$$

Ahora, hay que considerar que la energía medida en S , que incide sobre el espejo por unidad de área y por unidad de tiempo está dada por $A^2(c \cdot \cos(\phi) - v)/8\pi$, por lo cual la energía que sale del espejo tendrá una forma similar, solo que con el signo de v y c opuesto (el frente de ondas se aleja): $A'''^2(-c \cdot \cos(\phi''') + v)/8\pi$. La diferencia entre las dos expresiones anteriores es igual al trabajo ejercido por la presión de la luz por unidad de tiempo, e igual a Pv , de tal forma se obtiene la expresión para P :

$$P = 2 \frac{A}{8\pi} \frac{\left(\cos(\phi) - \frac{v}{c}\right)^2}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (1.148)$$

Para el caso en el que $v \ll c$, se reduce a una ecuación que está de acuerdo con el

experimento y otras teorías:

$$P = 2 \frac{A}{8\pi} \cos^2(\phi) \quad (1.149)$$

1.11 Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz considerando las corrientes de convección.

Considérese ahora una de las ecuaciones de Maxwell incluyendo el término de la densidad de corriente, la cual en este caso, corresponde al movimiento de cargas en el vacío:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \quad (1.150)$$

Donde \vec{J} es la densidad de corriente, la cual esta dada como $\vec{J} = \rho \vec{u}$, donde \vec{u} es el campo de velocidades de las cargas eléctricas; ρ es la densidad de carga dada por $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$.

Sólo por cuestiones de notación, sea $\rho_* = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, de esta manera, se puede escribir la ecuación anterior como:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \rho_* \vec{u} \right) \quad (1.151)$$

Expícitamente ρ_* queda determinada por:

$$\rho_* = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (1.152)$$

Escritas explícitamente, para cada coordenada se obtiene:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \left\{ \rho_* u_x + \frac{\partial E_x}{\partial t} \right\} \quad (1.153)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \left\{ \rho_* u_y + \frac{\partial E_y}{\partial t} \right\} \quad (1.154)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \left\{ \rho_* u_z + \frac{\partial E_z}{\partial t} \right\} \quad (1.155)$$

Éstas ecuaciones son válidas en el sistema S , por lo que se pueden utilizar las ecuaciones de transformación de Lorentz y la transformación de coordenadas para los campos, lo

cual da:

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} - \frac{\partial B'_y}{\partial y'} = \frac{1}{c} \left\{ \rho'_* u'_y + \frac{\partial E'_y}{\partial t'} \right\} \quad (1.156)$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \frac{1}{c} \left\{ \rho'_* u'_y + \frac{\partial E'_y}{\partial t'} \right\} \quad (1.157)$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} = \frac{1}{c} \left\{ \rho'_* u'_z + \frac{\partial E'_z}{\partial t'} \right\} \quad (1.158)$$

Donde las componentes de la velocidad \vec{u}' y ρ'_* son:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (1.159)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\beta(1 - \frac{u_x v}{c^2})} \quad (1.160)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\beta(1 - \frac{u_x v}{c^2})} \quad (1.161)$$

$$\rho'_* = \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} = \beta \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right) \quad (1.162)$$

Nótese que el vector \vec{u}' es la velocidad de las cargas eléctricas en el sistema S' ; por tanto, el fundamento electrodinámico de la teoría de Lorentz para la electrodinámica de los cuerpos en movimiento está de acuerdo con el principio de relatividad.

1.12 Dinámica de un electrón (acelerado lentamente).

Supóngase de nuevo, los dos sistemas S y S' , tal que S' se mueve con velocidad v en la dirección $x - x'$. Supóngase además que un electrón inmerso en un campo electromagnético, se encuentra en reposo en el origen de S' , desde el punto de vista de un observador en fijo S , el electrón se mueve con velocidad v . Es fácil ver que desde el sistema de referencia S' la fuerza electromagnética es puramente eléctrica, esto resulta de la expresión de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.163)$$

Dado de que, el electrón se encuentra en reposo en S' , $v' = 0$, entonces:

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}') = q\vec{E}' = m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} \quad (1.164)$$

La relación anterior se expresa en término de las coordenadas como:

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = qE'_x \quad (1.165)$$

$$m \frac{d^2 y'}{dt'^2} = qE'_y \quad (1.166)$$

$$m \frac{d^2 z'}{dt'^2} = qE'_z \quad (1.167)$$

Dadas las condiciones impuestas, son válidas las ecuaciones de transformación para las coordenadas y los campos:

$$t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \quad (1.44)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1.45)$$

$$y' = y \quad (1.46)$$

$$z' = z \quad (1.47)$$

$$E'_x = E_x \quad (1.86) \quad B'_x = B_x \quad (1.89)$$

$$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \quad (1.87) \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \quad (1.90)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \quad (1.88) \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \quad (1.91)$$

Se quiere ver como se ven las leyes del movimiento del electrón, vistas desde el sistema de referencia S , para ello nótese lo siguiente:

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{dx'}{dt'} \right) \quad (1.168)$$

Considérese que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \left(\frac{dx'}{dt'} \right) &= \left(\frac{dx'}{dt} \right) \left(\frac{dt}{dt'} \right) = \frac{dx'/dt}{dt'/dt} = \frac{d(\gamma(x - vt))/dt}{d(\gamma(t - \frac{\beta}{c}x))/dt} \\ &= \frac{\gamma(\dot{x} - v)}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}\dot{x})} = \frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{\beta}{c}\dot{x}} \end{aligned} \quad (1.169)$$

Al sustituir (1.169) en (1.168) se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x'}{dt'^2} &= \frac{d}{dt'} \left(\frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{\beta}{c}\dot{x}} \right) = \frac{d \left(\frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{\beta}{c}\dot{x}} \right) / dt}{dt' / dt} \\
&= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta}{c}\dot{x}\right)} \left\{ \frac{\ddot{x}}{\left(1 - \frac{\beta}{c}\dot{x}\right)} - \frac{(\dot{x} - v)\left(-\frac{\beta}{c}\ddot{x}\right)}{\left(1 - \frac{\beta}{c}\dot{x}\right)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta}{c}\dot{x}\right)^3} \left\{ \ddot{x} \left(1 - \frac{\beta}{c}\dot{x}\right) + (\dot{x} - v)\frac{\beta}{c}\ddot{x} \right\}
\end{aligned} \tag{1.170}$$

Nótese que para S , $\dot{x} = v$, por tanto:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{(1 - \beta^2)^3} \{ \ddot{x}(1 - \beta^2) \} = \gamma^3 \ddot{x} \tag{1.171}$$

Haciendo algo análogo para la coordenada y' y z' se tiene que:

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \gamma^2 \ddot{y} \tag{1.172}$$

$$\frac{d^2z'}{dt'^2} = \gamma^2 \ddot{z} \tag{1.173}$$

Si ahora se sustituye cada una de las componentes en la ley de Newton, se obtienen las ecuaciones del movimiento referenciadas al sistema S :

$$m\gamma^3 \frac{d^2x}{dt^2} = qE_x \tag{1.174}$$

$$m\gamma \frac{d^2y}{dt^2} = q(E_y - \beta B_z) \tag{1.175}$$

$$m\gamma \frac{d^2z}{dt^2} = q(E_z + \beta B_y) \tag{1.176}$$

El término $m\gamma^3$ es llamado masa longitudinal, mientras que $m\gamma$ es la masa transversal y m es la masa en reposo. Cuando el electrón acelera desde el reposo por la acción de un campo electromagnético a lo largo del eje x , la energía cinética E_k del electrón es igual al trabajo hecho por el campo eléctrico:

$$W = \int_0^v F dx \tag{1.177}$$

Donde $F = qE_x$. De la segunda ley de Newton para el electrón se tiene:

$$E_x = \frac{m\gamma^3}{q} \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.178)$$

Por lo que sustituyendo en (1.177) se tiene:

$$\begin{aligned} E_k = W &= \int_0^v F dx = \int_0^v qE_x dx = \int q \frac{m\gamma^3}{q} \frac{dv}{dt} dx \\ &= m \int_0^v (\gamma)^3 dv \frac{dx}{dt} = m \int_0^v \left(\frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \right) v dv \\ &= mc^2(\gamma - 1) = \gamma mc^2 - mc^2 \end{aligned} \quad (1.179)$$

De donde es claro que si $v = c$, entonces el trabajo es infinitamente grande por lo que la velocidad de la luz es un límite, es decir, si se pudiera acelerar un electrón a la velocidad de la luz c , entonces, se requeriría de una energía infinita para lograrlo.

Capítulo 2

Efecto Compton y absorción de fotones.

Los logros de la relatividad especial de A. Einstein han sido muchos, entre ellos explicar fenómenos en los cuales la mecánica clásica de Newton es insuficiente, sin embargo, todos estos resultados han sido obtenidos al postular sólo dos cosas, dos hechos que hasta ahora tienen fundamento en las mediciones hechas sobre la velocidad de la luz en diferentes marcos de referencia[8] y de la covarianza de las ecuaciones de Maxwell, éstos son los dos postulados de Einstein de la relatividad especial.

¿Qué pasaría si al menos en una situación muy ideal, pudiera mostrarse el mecanismo por el cual funciona el segundo postulado de la relatividad especial? Pues bien, he aquí el propósito de este trabajo, plantear una situación ideal empleando los fundamentos de la mecánica cuántica primitiva¹ entre ellos el concepto de cuantización de la luz y el conocido efecto Compton, a partir de éstos llegar a que la velocidad de una partícula tiene un límite superior y es justamente la velocidad de los cuantos de luz, es decir, la velocidad de la luz.²

¹Aquí se considera como los fundamentos de la mecánica cuántica primitiva a los siguientes fenómenos:

- Teoría del cuerpo negro.
- Efecto fotoeléctrico.
- El modelo de Bohr del átomo de Hidrógeno.
- Teoría del efecto Compton.

Considerados en [16] .

²Si los cuantos de luz tuvieran una velocidad v , entonces el límite de velocidad para para partícula tendría que ser v . Véase el apéndice A.

Antes de llegar a considerar la situación de la que se habló en el párrafo anterior, es preciso recordar algunas cosas referente a la mecánica cuántica primitiva, explorar el cómo surgió la idea de los paquetes de energía mínima llamados quantum o fotones y llegar a la teoría del efecto Compton.

2.1 Planck y la cuantización del campo de la radiación.

Uno de los problemas que agobiaba a la física clásica era el problema de la radiación de cuerpo negro. En general, un cuerpo emite y absorbe radiación simultáneamente[17], un cuerpo negro tiene la propiedad de absorber toda la radiación que sobre el incide y no dejar escapar fracción alguna de ella.

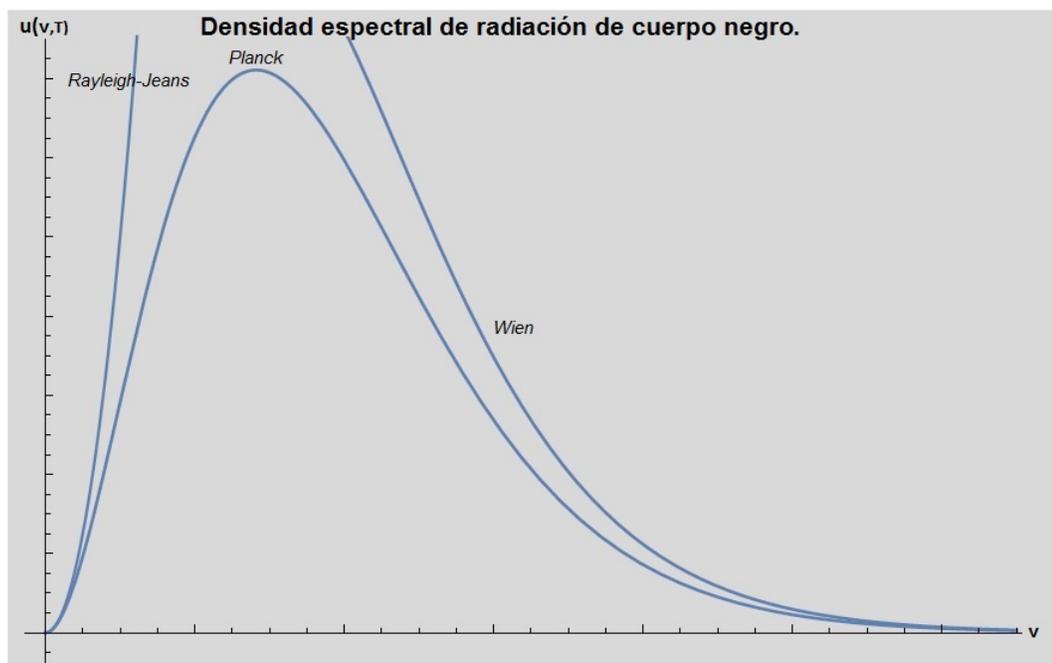


Figura 2.1: Densidad espectral de radiación de un cuerpo negro, aproximación por la distribución de Rayleigh-Jeans y distribución de Wien.

Los intentos de la física clásica por modelar y explicar este fenómeno dieron frutos poco convincentes, pues fueron en 1900 Lord Rayleigh y James Jeans quienes predijeron que

para la radiación dentro de una cavidad, la densidad de energía tiene la forma:

$$\rho(\omega, T) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2 \quad (2.1)$$

Llamada distribución de Rayleigh-Jeans, donde k_B es la constante de Boltzmann, T la temperatura y c la velocidad de propagación de la luz en el vacío. Se puede ver en la imagen, que esta distribución da buena aproximación en las regiones del espectro que están con frecuencias bajas. Por otra parte, la física clásica daba también la distribución de Wien:

$$\rho_W = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar \omega / k_B T} \quad (2.2)$$

Obtenida por Wilhelm Wien en 1893, se puede notar que ésta aproximación da muy buenos resultados para frecuencias altas. Sin embargo faltaba entender lo que pasaba en la región comprendida entre las dos distribuciones, a este fenómeno se le llamó “catástrofe ultravioleta”.

Fue Max Planck, en 1900 quien resolvió el problema al asumir que la absorción y emisión de radiación de las paredes de la cavidad puede ser modelada por osciladores atómicos en las paredes de la cavidad y que la energía de cada oscilador puede estar limitada a “paquetes” de energía (valores discretos) múltiplo entero de un cierto valor mínimo:

$$E = \hbar \omega \quad (2.3)$$

A este paquete de energía mínima, Planck lo llamó “Cuanto”, el cual depende de la frecuencia pero no de la temperatura. Este resultado obtenido por Planck fue en contradicción directa con las ideas de la continuidad de la física clásica. De este resultado se deduce la distribución de Planck³:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \quad (2.4)$$

La distribución de Planck modela los resultados experimentales con exactitud, y es fácil obtener en el límite de ω tendiendo a cero a la distribución de Rayleigh-Jeans. La suposición de la cuantización de energía del intercambio de paredes supuso el primer avistamiento del concepto de “fotón”, el cual más adelante fue empleado por A. Einstein.

³Para la deducción de la fórmula de distribución de Planck se puede consultar [16], [18] y [19].

2.2 A. Einstein y el efecto Fotoeléctrico.

Otro de los fenómenos que no encontraba una solución satisfactoria dentro del marco de la física clásica fue el observado por Heinrich Hertz en 1887, el cual consiste de la emisión de electrones por una placa de algún material al ser expuesta a radiación en forma de luz, estos electrones emitidos son llamados “fotoclectrones”.

Hasta 1905, se conocían las siguientes características del efecto fotoclectrico:

- Cuando la luz se incide sobre un metal, los electrones a veces se emiten y a veces no.
- Luz más intensa expulsa un mayor número de electrones.
- El brillo de la luz no afecta la energía cinética de los electrones emitidos.
- Dado un metal iluminado por una fuente de luz concreta, la energía cinética de los electrones expulsados nunca superó un máximo determinado.

Estas características del efecto fotoclectrico, son incompatibles con la teoría ondulatoria de la luz, misma que predice la no dependencia de la frecuencia para el efecto fotoclectrico, si no de la intensidad; es decir, una luz más intensa, proporcionaría más energía a los electrones.

La evidencia experimental, corroboró que una luz más intensa de la misma frecuencia daba lugar a más electrones emitidos pero de la misma energía.

2.2.1 Consideraciones teóricas del efecto fotoclectrico.

En 1905, Albert Einstein explica en su artículo “On a Heuristic Point of View Concerning the Production and Transformation of Light” la física detrás del efecto fotoclectrico con una explicación simple[20]:

- Para que un electrón se emita desde el metal, es necesario que adquiriera una cierta cantidad de energía.
- Para una cantidad de energía igual o mayor a la función de trabajo ϕ , el electrón se emite.

- Si la luz está empaquetada en bloques de energía $h\nu = E$, y uno de éstos bloques golpea un electrón, éste adquiere una energía suficiente para ser emitido a través de la superficie del metal.
- Cada paquete de energía (quantum o fotón) tendría que dar la misma energía para un electrón $E = h\nu$, y todos tendrán la misma energía máxima, siempre y cuando la frecuencia de la luz absorbida sea la misma.

Considérese ahora un solo cuanto de luz que transfiere su energía total a un solo electrón, este pierde una parte de la energía en su recorrido a la superficie de la placa y otra porción al escapar de la misma, esta última pérdida debe ser igual a la función de trabajo del material. Por tanto, la energía máxima de un electrón que deja el metal está dada por:

$$E_{m\acute{a}x} = h\nu - \phi \quad (2.5)$$

Nótese que si ϕ_0 es la energía mínima de arranque, entonces:

$$E_{m\acute{a}x} = h\nu_0 - \phi_0 = 0 \quad (2.6)$$

De donde se obtiene que la frecuencia mínima para arrancar electrones del metal es:

$$\nu_0 = \frac{\phi_0}{h} \quad (2.7)$$

A los cuantos de luz se les denominó “fotones”, después de que en 1926, Gilbert Newton Lewis sugiriera este nombre: “I therefore take the liberty of proposing for this hypothetical new atom, which is not light but plays an essential part in every process of radiation, the name photon”. [21] Con la explicación satisfactoria del fenómeno de emisión de electrones por una placa al ser expuesta a radiación, se pone de manifiesto la discretización de la energía y con ello el concepto emergente en aquellos años de cuanto de luz y posteriormente llamado fotón.

2.3 Efecto Compton, propiedades de partícula para el fotón.

La explicación de los fenómenos anteriores supuso el desarrollo de un concepto nuevo en la física de ese entonces, la introducción de la discretización de la energía habría de marcar los inicios de la naciente teoría cuántica.

El hecho de que la energía (radiación) estaba cuantizada en paquetes de energía mínima llamados fotones, implicaba que la luz tenía un comportamiento de corpúsculo, esta dualidad en el comportamiento de la radiación permitió a L. de Broglie proponer en su tesis doctoral una analogía entre partículas y onda, si una onda se puede comportar como partícula nada impide que una partícula se pueda comportar como una onda e incluso tener asociada una longitud de onda, la cual de Broglie propuso como:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2.8)$$

Donde p es el momento de la partícula en movimiento. Dada esta similitud entre partículas y ondas fue lógico preguntarse ¿qué pasa si un fotón choca o impacta a un electrón en reposo? Este fenómeno es conocido como el efecto Compton en honor a Arthur Compton quien lo estudio y explicó en 1923 empleando la dualidad onda partícula y algunas nociones de la relatividad especial.

En el efecto Compton sucede lo siguiente: un fotón de energía $E = h\nu$ impacta a un electrón inicialmente en reposo, el impacto hace que el fotón cambie su dirección y más aún que pierda parte de su energía, misma que se transfiere al electrón que después de la colisión se moverá con una energía igual a la fracción de energía perdida por el fotón.

Al fotón se le puede asignar un momento, para ello considérese lo siguiente:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = pc \quad (2.9)$$

Donde se ha empleado (2.8)⁴. Por tanto para el fotón se tiene:

⁴En los textos se emplea comúnmente la energía relativista dada por:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Y el hecho de que el fotón no tiene masa en reposo, por lo que $p = E/c$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (2.10)$$

Para análisis del efecto Compton considérese la figura de abajo:

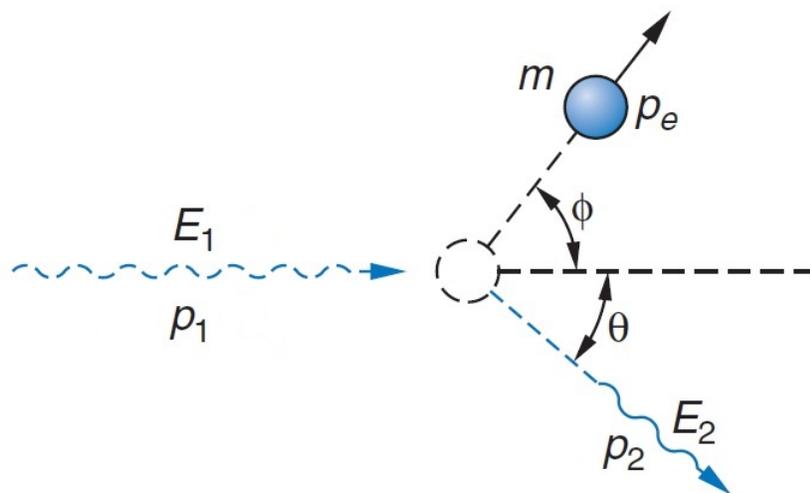


Figura 2.2: Colisión de un fotón de energía $E = h\nu$ con un electrón inicialmente en reposo, como producto de éste choque el fotón cede una parte de su energía al electrón que después de la colisión empieza a moverse.

Dado que se considera que la energía perdida por el fotón en el choque, debe ser la energía que gana el electrón en forma de energía cinética. Supóngase que la energía del fotón incidente es $E_1 = h\nu$, mientras que la energía del fotón dispersado es $E_2 = h\nu'$, empleando (2.10) se puede escribir el momento para cada fotón como:

$$p_1 = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda_1} \quad (2.11)$$

$$p_2 = \frac{h\nu'}{c} = \frac{h}{\lambda'} \quad (2.12)$$

En este fenómeno se debe conservar la energía, de donde se tiene:

$$h\nu + E_0 = h\nu' + E_e \quad (2.13)$$

Donde la energía E_e es la energía del electrón en movimiento, la cual está dada por (2.66):

$$E_e = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (2.14)$$

Mientras que:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (2.15)$$

Sustituyendo (2.14) y (2.15) en (2.13) se tiene:

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (2.16)$$

Por otra parte, se debe conservar el momento, es decir se debe cumplir que:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e \quad (2.17)$$

Se tiene entonces que la conservación del momento para la coordenada x y y da que:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi \quad (2.18)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta + p_e \sin \phi \quad (2.19)$$

Multiplicando las dos últimas ecuaciones por c y elevando al cuadrado y sumarlas se obtiene:

$$p_e^2 c^2 = h^2 \nu^2 + 2h\nu h\nu' \cos \theta + h^2 \nu'^2 \quad (2.20)$$

De (2.13) se tiene la expresión para E_e , la cual queda como:

$$E_e = h(\nu - \nu') + m_0 c^2 \quad (2.21)$$

Se puede sustituir (2.20) y (2.21) en el cuadrado de (2.14):

$$[h(\nu - \nu') + m_0c^2]^2 = m_0^2c^4 + h^2\nu^2 + 2h\nu h\nu' \cos \theta + h^2\nu'^2 \quad (2.22)$$

Después de cancelar términos se llega a la relación:

$$m_0c^2(\nu - \nu') = h\nu\nu'(1 - \cos \theta) \quad (2.23)$$

Recordando la relación entre ν y λ se tiene:

$$\frac{h}{m_0c^2}(1 - \cos \theta) = \frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{1}{c}(\lambda' - \lambda) \quad (2.24)$$

Por lo que finalmente se obtiene:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \theta) \quad (2.25)$$

Donde:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0c} \quad (2.26)$$

Esta λ_C es llamada longitud de onda de Compton. A. Compton comprobó la validez de su resultado teórico al realizar un experimento en el que dispersó rayos x de longitud de onda de 0.071 nm por electrones de carbón, encontró que la longitud de onda modificada se ajustaba a su predicción[22].

2.4 Absorción y emisión de fotones.

Antes de 1913 no se entendía como podría ser la estructura atómica, solo se contaba con el modelo del átomo debido a Rutherford, el cual tenía muchas inconsistencias, una de ellas era la inestabilidad de un átomo explicado por este modelo, es decir, dado que el electrón está cargado y giraba aceleradamente entorno al núcleo, entonces, tenía que

perder energía en forma de radiación[23], por tanto en algún momento el electrón tendría que decaer al núcleo, esto último implicaba la no existencia de átomos estables.

Fue el físico danés Niels Bhor quien en 1913 pudo explicar la constitución del átomo al proponer su modelo en el cual aceptaba basado en los resultados experimentales, los siguientes postulados:

- El átomo posee “estados estacionarios” (órbitas circulares) que corresponden a valores discretos de la energía.
- Los valores de energía de estados estacionarios, están determinados por la condición de que el momento angular debe estar cuantizado:

$$L = m_e v r = n \hbar \quad (2.27)$$

- La emisión o absorción de radiación electromagética ocurre sólo cuando hay una transición entre dos estados estacionarios. La frecuencia de radiación emitida o absorbida es proporcional a la diferencia en la energía de los dos estados estacionarios:

$$E_1 - E_2 = h\nu = \hbar\omega \quad (2.28)$$

- El equilibrio dinámico del sistema en el estado estacionario está gobernado por las leyes de la física clásica, pero estas leyes no aplican a las transiciones entre estados estacionarios.

La teoría del átomo de Bohr fue aplicada al caso más sencillo, el átomo de hidrógeno y con ella se pudo explicar el espectro de emisión del hidrógeno y se pudo cuantificar el tamaño del radio atómico; además, estipuló el concepto de absorción y emisión de fotones, pues se absorbe un fotón cuando un electrón puede pasar de un estado de una energía a otro estado de una energía mayor.

Sin embargo, este concepto de absorción de fotones no se puede aplicar al caso de una partícula libre, es decir, en el espacio vacío y sin estar sujeta a potencial alguno.

Si se considerara esta situación, se tendría que no es posible debido a que no se puede conservar la energía, el momento y el spin, es decir, supóngase el caso de una partícula en reposo (electrón) y un fotón que incide sobre ella (situación inicial análoga a la figura 2.2), la energía íntegra es absorbida por el electrón y éste empieza a moverse. Dada esta situación antes y después se tiene que no se conserva la energía ni el momento simultáneamente, por lo cual esta situación no es físicamente posible.

Hay algo más que no se conserva en el sistema, esto es el “spin”, el spin del fotón es $s_f = 1$ mientras que el spin del electrón es $s_e = 1/2$, por lo tanto en el instante antes de la colisión del fotón-electrón se tiene un spin total de $3/2$ y después de la colisión el spin será de $1/2$ que es el correspondiente al spin del electrón, lo cual hace que no se haya conservado el spin del sistema.

Sin embargo, puede entenderse el concepto de absorción de fotones en el espacio libre de una forma ligeramente diferente (empleando la teoría del efecto Compton), es decir, entiéndase de aquí en adelante que una partícula en el espacio libre absorbe un fotón cuando en la colisión entre el fotón y una partícula, la partícula adquiere la mayor energía posible del fotón pero sin absorberla toda, de tal manera que existe un fotón después de la colisión con una energía menor que el inicial, lo cual hace que quede resuelto los conflictos dados en la conservación de la energía y momento, además de la conservación del spin.

El concepto de absorción aquí expuesto será de vital importancia para el propósito general del trabajo desarrollado posteriormente en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

El límite de la rapidez de las masas: una visión cuántica.

Los dos postulados de la relatividad especial hacen posible el desarrollo de una teoría en la cual el espacio y el tiempo forman una sola entidad llamada espacio-tiempo. El segundo postulado de la relatividad puede entenderse en términos de una situación que tiene sus bases en conceptos fundamentales de la mecánica cuántica, para ello, es necesario establecer las condiciones de una situación ideal en términos de la absorción de fotones.

En este rubro, se tendrá que la velocidad de una partícula que absorbe energía (fotones), tiene un límite superior que viene siendo justamente c la velocidad de la luz.

3.1 Absorción de fotones por un electrón inicialmente en reposo.

Considérese la siguiente situación ideal: Se tiene un electrón en una posición determinada (la cual no tiene importancia significativa) inicialmente en reposo¹ se tiene además una fuente estacionaria (en reposo) de fotones, monocromática capaz de lanzar un solo

¹Se sabe ya que si se supone un electrón en reposo, no se podría determinar el lugar en el espacio que ocupa éste debido al principio de incertidumbre de Heisenberg que enuncia:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Por tanto la indeterminación en la posición del electrón sería infinita. Sin embargo para los fines expuestos aquí no se tome en consideración la indeterminación de la posición del electrón.

fotón por instante. El fotón impacta al electrón y éste lo absorbe², como resultado de la absorción, el electrón adquiere cierta energía cinética y empieza a moverse.

Sea $E_{fot} = \hbar\omega_0$ La energía de los fotones que provienen de la fuente. Dada (2.25) se tiene que cuando el electrón absorbe una energía máxima del fotón, debe haber un cambio mínimo en la diferencia de frecuencias, para que ésto sea posible, $\Delta\lambda$ en (2.25) debe ser un máximo, lo cual se logra para cuando el ángulo de dispersión es igual a $\theta = \pi$, es decir, tiene que haber un fotón que regresa.

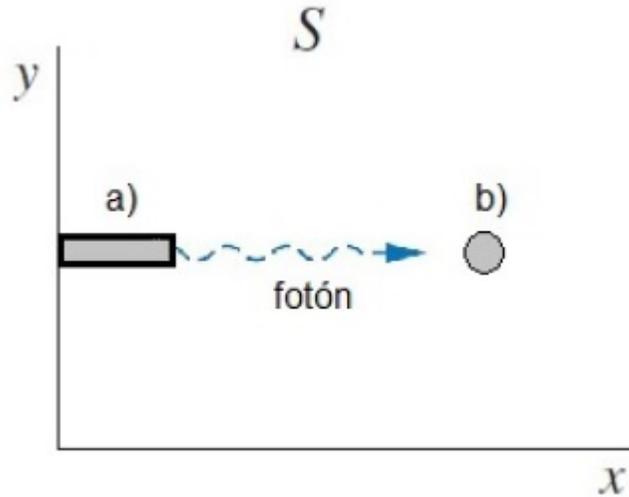


Figura 3.1: Absorción de fotones por un electrón en reposo. a) Fuente monocromática de fotones con $E_{fot} = \hbar\omega_0$. b) Electrón en reposo.

Es claro que debido a la colisión entre el fotón y el electrón, debe haber un fotón que regresa hacia la fuente monocromática, entonces la energía que se transfiere al electrón debe ser menor que E_{fot} , suponiendo que toda esa energía transferida el electrón se convierte íntegramente en energía cinética, no hay pérdidas de tipo alguno, entonces se puede escribir:

$$T_{elec} < \hbar\omega_0 \quad (3.1)$$

²Absorción en el sentido definido en el capítulo anterior, es decir, el electrón absorbe la mayor cantidad de energía posible, dado que se tiene que cumplir la conservación de la energía, momento y spin, un fotón tendría que regresar en la dirección contraria al fotón incidente pero con un mínimo de energía posible.

La ecuación anterior implica que siempre la energía transferida al electrón después de la colisión con el fotón es menor que la energía inicial de éste último, sin embargo, considérese la igualdad $T_{elec} = E_{fot}$ en el sentido de que la energía inicial de los fotones puede estar dada por $\hbar\omega'$ con $\omega' > \omega_0$, mientras que la energía que absorbe el electrón es $\hbar\omega_0$.

Recordando la expresión clásica de la energía cinética de una partícula $T = mv^2/2$, se puede resolver para v una relación dada por:

$$v = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}} \quad (3.2)$$

Aplicada al electrón se tiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m_e}} \quad (3.3)$$

Donde m_e es la masa del electrón. Considérese ahora, que un segundo fotón (proveniente de la misma fuente estacionaria en el sistema de referencia S , de la cual provino el primer fotón³), impacta con el electrón que ahora lleva una velocidad v_0 .

Dado que el electrón ahora se mueve, la frecuencia del fotón vista desde su sistema de referencia propio⁴ es menor y estará dada por una regla estilo efecto Doppler, considérese entonces que la frecuencia del fotón vista por el electrón en su sistema de referencia propio está dada por la igualdad:

$$\omega' = \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^a \omega \quad (3.4)$$

Donde $a \in \mathbb{R}^+$, aplicándose a éste caso y considerando primero $a=2$ ⁵, se tiene:

$$\omega_1 = \left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)^2 \omega_0 \quad (3.5)$$

³Por convención, utilícese al primer fotón como fotón inicial o fotón cero, es decir, la cuenta de los fotones se inicia cuando el electrón está en movimiento.

⁴El sistema de referencia propio ó del electrón es aquel en el cual el electrón se encuentra en reposo.

⁵Esto es el caso simple, puesto que la raíz y el cuadrado en la fórmula de la velocidad se cancelan.

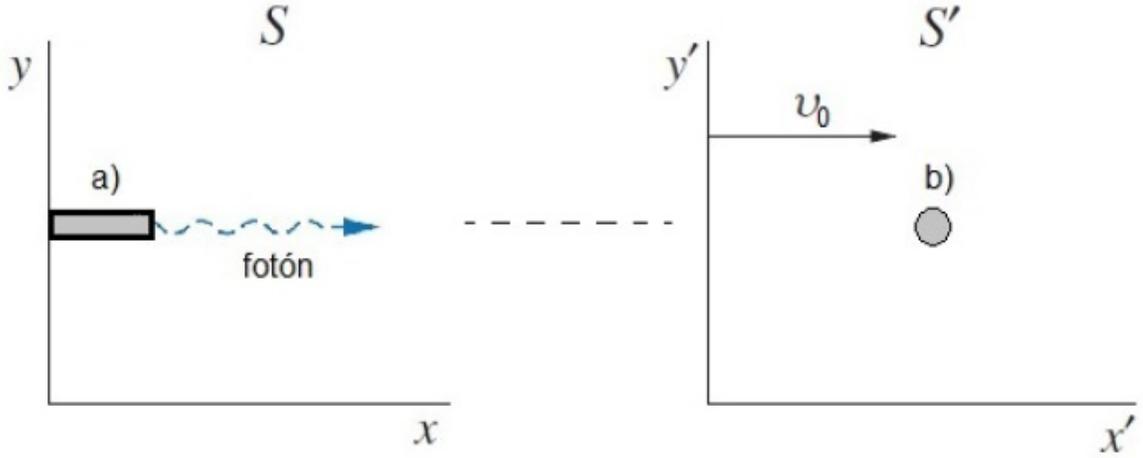


Figura 3.2: Absorción de fotones por un electrón en movimiento. a) Fuente monocromática de fotones con $E_{fot} = \hbar\omega_0$. b) Electrón con una velocidad v_0 dada por la transferencia de energía en una primera colisión con un primer fotón.

La expresión anterior para ω_1 se puede sustituir en (3.2) dando como resultado que la velocidad v_1 adquirida por el electrón debido a la colisión con el segundo fotón, medida desde su sistema de referencia estará dada por:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \sqrt{\frac{2\hbar\omega_1}{m_e}} \\
 &= \sqrt{\frac{2\hbar\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)^2\omega_0}{m_e}} \\
 &= \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{m_e}}\sqrt{\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)^2} \\
 &= v_0\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

La cual es la velocidad que adquiere el electrón debido a la colisión con el segundo fotón en el sistema S'^6 . Nótese que $v_1 < v_0$ puesto que $(c-v_0)/(c+v_0) < 1$.

⁶De aquí en adelante se denotará al sistema de referencia S' como el sistema de referencia que se mueve con velocidad v respecto del sistema S .

¿Cómo se ve la velocidad de la partícula desde el sistema de referencia S ?, la respuesta a ésta cuestión es muy interesante, para llegar a ella, téngase en cuenta que para un observador en S , hasta justo antes de que el electrón colisionara con el fotón 1, el electrón se movía con velocidad v_0 , y justo después de la colisión, la velocidad del electrón visto desde S , deberá ser la suma de la nueva velocidad adquirida por el electrón y la que llevaba anteriormente, por tanto, la velocidad del electrón vista por un observador en S será:

$$\begin{aligned} v_{elec}(1) &= v_0 + v_1 \\ &= v_0 + v_0 \left(\frac{c - v_0}{c + v_0} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

La cual es la misma velocidad con la que el electrón se aleja de la fuente, pues la fuente siempre se mantiene fija en S .

Si ahora se considera un tercer fotón que colisiona con el electrón que ahora lleva una velocidad dada por $v_{elec}(1)$ (la anterior que adquirió con la colisión con el segundo fotón), se tendrá entonces que desde el sistema de referencia del electrón, la frecuencia del fotón tiene que ser menor a la frecuencia original de los fotones emitidos por la fuente.

Supóngase válida nuevamente la relación (3.5) con la diferencia de que ahora, la partícula tiene una velocidad $v_{elec}(1)$ en lugar de v_0 , por lo que la relación entre la frecuencia del fotón que sale de la fuente vista desde el sistema de referencia del electrón con velocidad $v_{elec}(1)$ estará dada por:

$$\omega_2 = \left(\frac{c - v_{elec}(1)}{c + v_{elec}(1)} \right)^2 \omega_0 \quad (3.8)$$

Sustituyendo la relación encontrada para v_1 dada por (3.6) se tiene entonces la frecuencia del tercer fotón en términos de v_0 y ω_0 :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \left(\frac{c - v_{elec}(1)}{c + v_{elec}(1)} \right)^2 \omega_0 \\ &= \left(\frac{c - v_0 - v_0 \left(\frac{c - v_0}{c + v_0} \right)}{c + v_0 + v_0 \left(\frac{c - v_0}{c + v_0} \right)} \right)^2 \omega_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por lo tanto, la velocidad que adquiere el electrón medida en su sistema de referencia debido a la colisión con el tercer fotón estará dada por:

$$\begin{aligned}
v_2 &= \sqrt{\frac{2\hbar\omega_2}{m_e}} \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar\left(\frac{c-v_{elec}(1)}{c+v_{elec}(1)}\right)^2\omega_0}{m_e}} \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar\left(\frac{c-v_0-v_0\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)}{c+v_0+v_0\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)}\right)^2\omega_0}{m_e}} \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{m_e}} \sqrt{\left(\frac{c-v_0-v_0\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)}{c+v_0+v_0\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)}\right)^2} \\
&= v_0 \left(\frac{c-v_0-v_0\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)}{c+v_0+v_0\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)}\right) \\
&= v_0 \left(\frac{c-v_{elec}(1)}{c+v_{elec}(1)}\right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Si ahora se considera un observador en S , éste medirá la velocidad del electrón como la velocidad justo antes de la tercera colisión más la velocidad dada por el tercer fotón v_2 :

$$\begin{aligned}
v_{elec}(2) &= v_{elec}(1) + v_2 \\
&= v_{elec}(1) + v_0 \left(\frac{c-v_{elec}(1)}{c+v_{elec}(1)}\right) \\
&= v_0 + v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right) + v_0 \left(\frac{c-v_0-v_0\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)}{c+v_0+v_0\left(\frac{c-v_0}{c+v_0}\right)}\right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Con lo anterior, ya se tiene una fórmula de recurrencia tanto para la velocidad adquirida por el electrón después de absorber el fotón como para la frecuencia observada del siguiente fotón; sin embargo, para que ésto sea evidente, considérese un cuarto fotón que colisiona con el electrón que ahora lleva una velocidad $v_{elec}(2)$.

Desde el sistema de referencia del electrón, la frecuencia medida para el fotón debe

ser menor que su frecuencia original, por lo que si se supone válida (3.5) se cumple que:

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \left(\frac{c - v_{elec}(2)}{c + v_{elec}(2)} \right)^2 \omega_0 \\ &= \left(\frac{c - v_0 - v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right) - v_0 \left(\frac{c-v_0-v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right)}{c+v_0+v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right)} \right)}{c + v_0 + v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right) + v_0 \left(\frac{c-v_0-v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right)}{c+v_0+v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right)} \right)} \right)^2 \omega_0\end{aligned}\quad (3.12)$$

Por lo que la velocidad que adquiere el electrón en su cuarta colisión con un fotón desde su sistema de referencia S' se encuentra como:

$$\begin{aligned}v_3 &= v_0 \left(\frac{c - v_{elec}(2)}{c + v_{elec}(2)} \right) \\ &= v_0 \left(\frac{c - v_0 - v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right) - v_0 \left(\frac{c-v_0-v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right)}{c+v_0+v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right)} \right)}{c + v_0 + v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right) + v_0 \left(\frac{c-v_0-v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right)}{c+v_0+v_0 \left(\frac{c-v_0}{c+v_0} \right)} \right)} \right)\end{aligned}\quad (3.13)$$

Ésta es la velocidad que el electrón o partícula adquiere después de la cuarta colisión con un fotón. La velocidad del electrón medida desde el sistema de referencia S debe estar dada como la velocidad que el electrón llevaba justo antes de la colisión más la velocidad que éste obtuvo después de la colisión, esto queda expresado como:

$$\begin{aligned}v_{elec}(3) &= v_{elec}(2) + v_3 \\ &= v_{elec}(2) + v_0 \left(\frac{c - v_{elec}(2)}{c + v_{elec}(2)} \right)\end{aligned}\quad (3.14)$$

Ahora se puede ver con claridad que las fórmulas de recurrencia para el $(n + 1)$ fotón, la frecuencia medida en el sistema de referencia del electrón en movimiento estará dada por:

$$\omega_n = \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right)^2 \omega_0 \quad (3.15)$$

Mientras que la velocidad que obtiene el electrón después del $(n + 1)$ fotón medido en S' estará dada por:

$$v_n = v_0 \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right) \quad (3.16)$$

Finalmente, la velocidad del electrón después de la $(n+1)$ colisión con fotones tendrá que ser la suma de la velocidad que llevaba antes de la colisión y la que obtuvo después de ésta, por tanto se tiene:

$$v_{elec}(n) = v_{elec}(n-1) + v_0 \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right) \quad (3.17)$$

Cabe preguntarse ahora: ¿la velocidad de la partícula medida desde el sistema de referencia S tiene un límite o crece sin tener una cota superior? La respuesta a ésta cuestión se tendrá al tomar el límite cuando el número de fotones crece mucho, es decir, el número de fotones tiende a infinito. Se puede además considerar el caso en el cual para la expresión (3.4) $a = 1^7$, haciendo algo similar a todo lo anterior se pueden encontrar las fórmulas de recurrencia para la frecuencia de los fotones y la velocidad que imprime cada uno al electrón vista desde el sistema de referencia de éste último, se encuentra que para las frecuencias y las velocidades la regla es:

$$\omega_n = \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right) \omega_0 \quad (3.18)$$

$$v_n = v_0 \sqrt{\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)}} \quad (3.19)$$

Así la velocidad del electrón medida en el sistema de referencia S tendrá la forma:

$$v_{elec}(n) = v_{elec}(n-1) + v_0 \sqrt{\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)}} \quad (3.20)$$

La expresión anterior es similar a (3.17), pero con la diferencia de la presencia de la raíz cuadrada⁸.

⁷El valor de $a = 1$ corresponde al efecto Doppler clásico.

⁸En realidad se trata de una serie de términos con raíz cuadrada dentro de otra raíz cuadrada, es decir, ésta expresión contiene raíces cuadradas anidadas.

3.2 Solución numérica al límite de la rapidez de las masas.

Dado que se quiere saber si la velocidad que adquiere el electrón debido a la absorción de fotones emitidos por una fuente en S , es necesario investigar qué sucede cuando el número de fotones que colisionan o que absorbe el electrón es muy grande, es decir, se requiere saber lo que sucede cuando el número de fotones tiende a infinito.

Para ello, se investigarán las fórmulas dadas por (3.16) y (3.17) para el caso $a = 2$, y tanto (3.19) como (3.20) para el caso $a = 1$. Estas fórmulas son en sí fórmulas de recurrencia, misma que permiten obtener el término siguiente a partir del anterior; su programación es sencilla, ésta se realizó en tres lenguajes de programación diferentes, a saber, Wolfram Mathematica[®], MapleTM y Fortran, siendo éste último el ideal debido a que no presentó problemas a la hora de evaluar las fórmulas de recurrencia para n muy grandes. El programa en fortran se presenta a continuación:

```
double precision c,v0,h,masa,lambda,f0,l,v(0:100000)
open(unit=21,file='500.dat',status='replace')
write(*,*) 'Escribe el numero de fotones'
read(*,*) n
c write(*,*) 'Da la longitud de onda de los fotones en nm'
c read(*,*) l
l=500.
c=299792458
h=6.6260693e-34
masa=9.10938291e-31
lambda=l*1e-9
f0=c/lambda
v(0)=((2.*h*f0)/(masa))**.5
v(1)=v(0)+v(0)*((c-v(0))/(c+v(0)))
write(21,*) 0,v(0)
write(21,*) 1,v(1)

do i=2,n
v(i)= v(i-1)+v(0)*((c-v(i-1))/(c+v(i-1)))
write(21,*) i,v(i)
end do

call system ('gnuplot_velocidad1.gp')

end
```

Donde velocidad1.gp es un scrip de gnuplot que contiene instrucciones correspondientes a la edición de las gráficas que se obtendrán de los datos arrojados por el programa.

En las fórmulas mencionadas al inicio de ésta sección, se encuentran en realidad dos variables en juego, éstas son evidentemente el número de fotones y la energía con que se emiten de la fuente, como una primera aproximación a la solución del problema considérese tanto para el caso $a = 1$ como para $a = 2$, que los fotones tienen una energía dada por una frecuencia correspondiente a la longitud de onda de 500 nm .

Para el caso $a = 2$ se pueden obtener las gráficas que evidencian el comportamiento acotado de $v_{elec}(n)$ cuando n es muy grande, sin embargo, lo más importante es que ¡dicha cota viene a ser precisamente c , la velocidad de la luz!

Sin embargo, sucede algo interesante para el caso $a = 1$, es decir el correspondiente al efecto Doppler clásico, en algún momento v_{elec} supera el límite de la velocidad de la luz!, ¿Esto indica que todo lo expuesto anteriormente no tiene sentido puesto que al parecer viola una de las consecuencias del segundo postulado de la relatividad especial Einstein⁹?

Se adelanta la respuesta, tiene que haber una explicación para que la situación ideal aquí planteada concuerde con el segundo postulado de la relatividad, ésta explicación razonable se dará en el próximo capítulo, puesto que requiere del análisis de otra variable en juego en las fórmulas de recurrencia¹⁰.

A continuación se presentan las gráficas obtenidas, primero para el caso $a = 2$ y luego para el caso $a = 1$, en las cuales lo único que cambia es el número de fotones, puesto que la energía de éstos se mantiene fija en un valor de 500 nm escogido arbitrariamente¹¹.

3.2.1 Gráficas correspondientes al caso $a=2$.

El interés de la solución numérica del límite de $v_{elec}(n)$ cuando n el número de fotones tiende a infinito reside en saber si tal velocidad tiene una cota superior o crece indefinidamente, para ello solo se considerarán valores grandes de n . Las siguientes imágenes muestran las gráficas para seis valores diferentes de n , ellos son $n = 500$,

⁹Se hace referencia al hecho de que nada puede viajar más rápido que la luz, esto se hace evidente al aplicar las ecuaciones dadas por el teorema de adición de velocidades a una partícula que se mueve con velocidad c respecto de un sistema de referencia inercial S fijo y de otro sistema S' que se mueve con velocidad v respecto de S .

¹⁰Ésta variable viene a ser el exponente a , el cual puede ser cualquier real positivo mayor que cero, ésta variable no está en sí formando parte de las fórmulas de recurrencia pero si está inmiscuido en la situación planteada, es decir, los casos considerados son casos particulares para dos valores específicos del exponente a .

¹¹La elección se hace de ésta manera con el fin de poder llevar a cabo los cálculos numéricos dentro del programa, sin embargo, se pudo dar a los fotones cualquier energía incluso una tremendamente grande, sin embargo esto último trae complicaciones que se verán más adelante.

$n = 1,000$, $n = 5,000$, $n = 10,000$, $n = 50,000$ y $n = 100,000$.

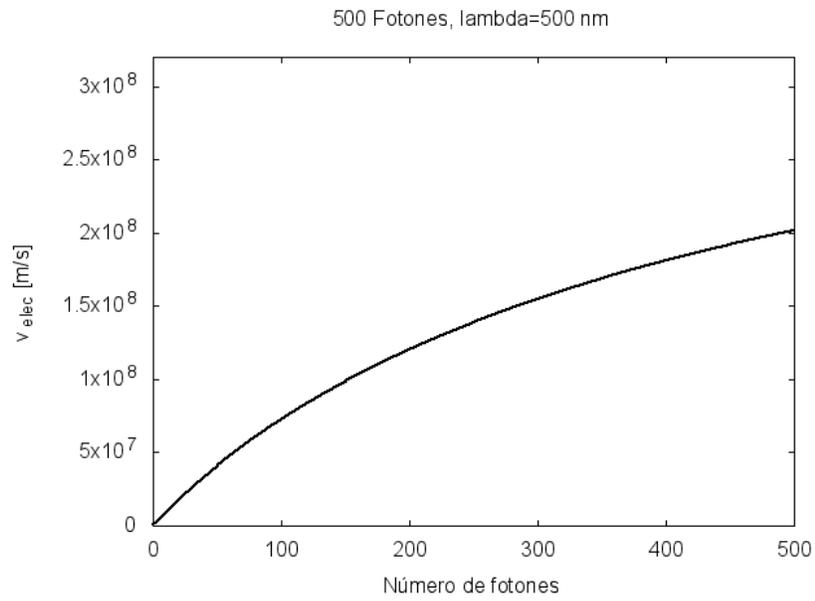


Figura 3.3: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=500$ fotones con una longitud de onda de 500 nm.

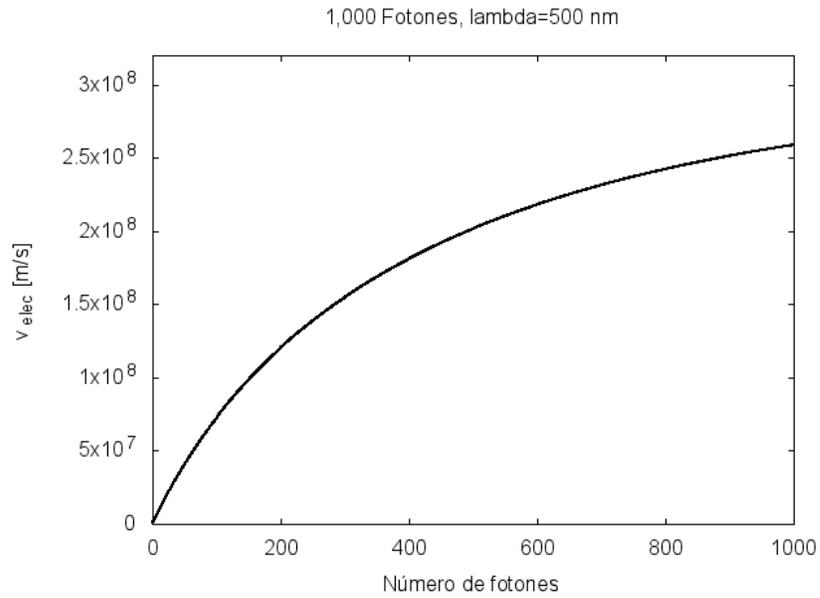


Figura 3.4: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=1000$ fotones con una longitud de onda de 500 nm.

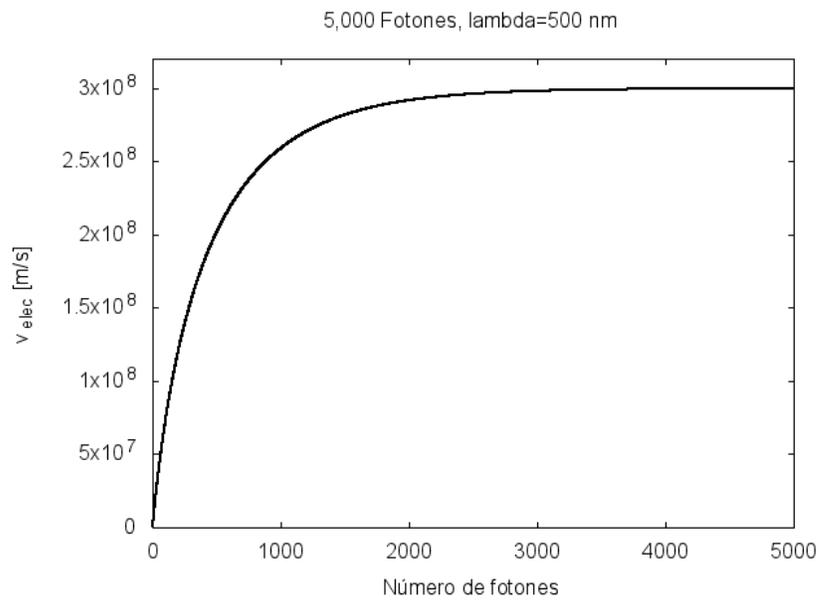


Figura 3.5: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=5,000$ fotones con una longitud de onda de 500 nm.

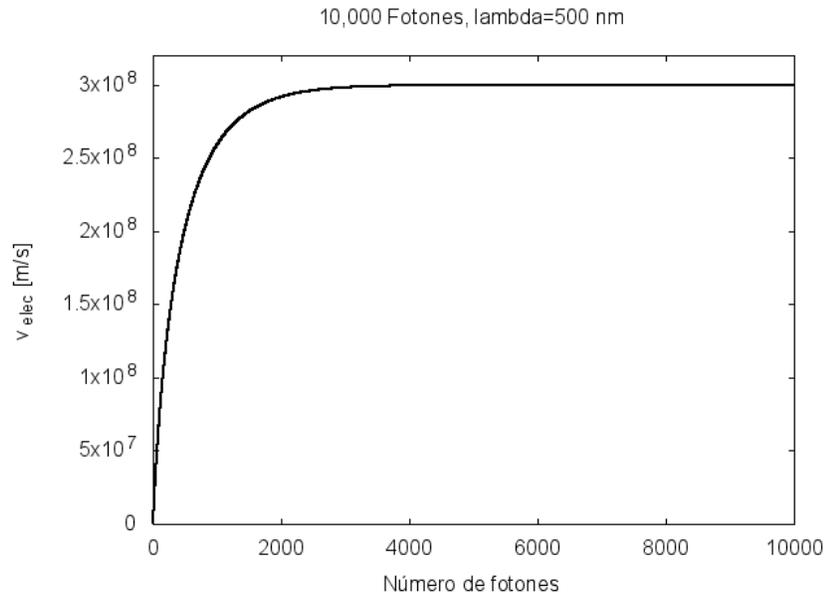


Figura 3.6: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=10,000$ fotones con una longitud de onda de 500 nm.

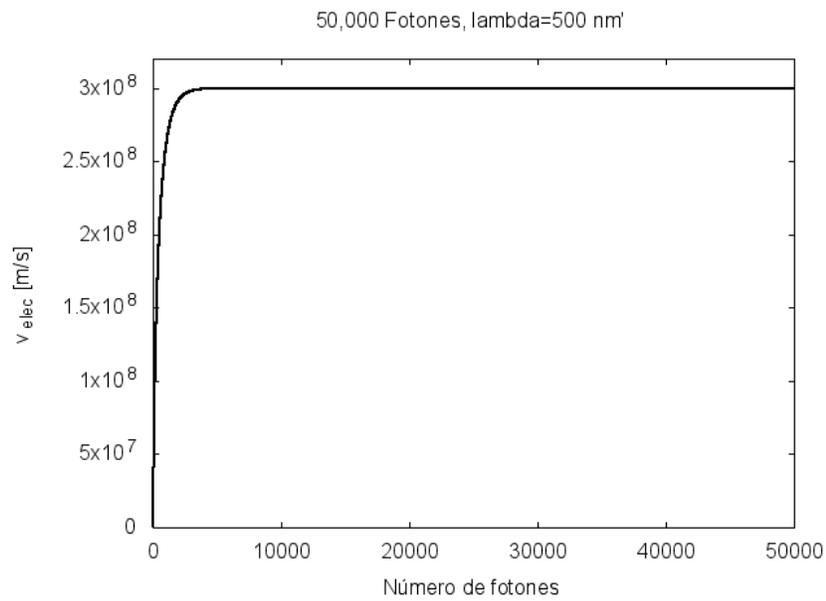


Figura 3.7: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=50,000$ fotones con una longitud de onda de 500 nm.

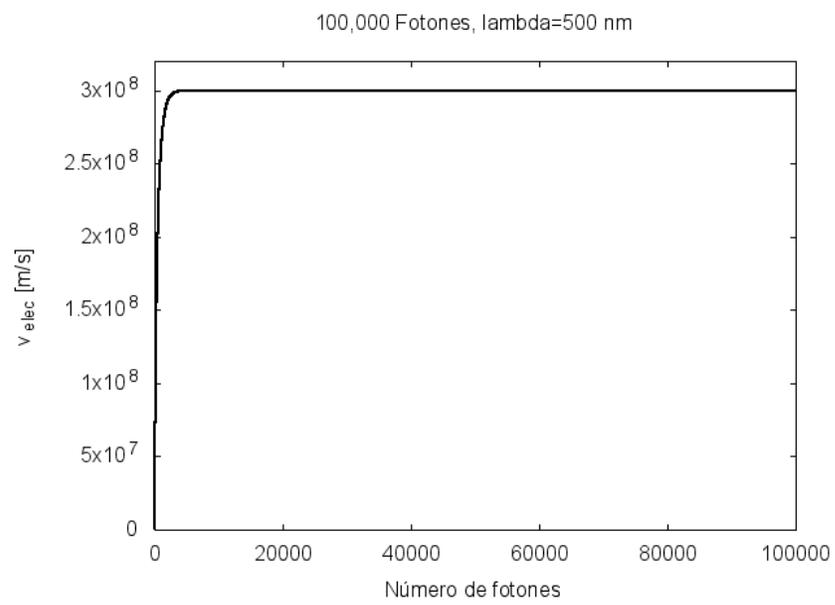


Figura 3.8: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=100,000$ fotones con una longitud de onda de 500 nm.

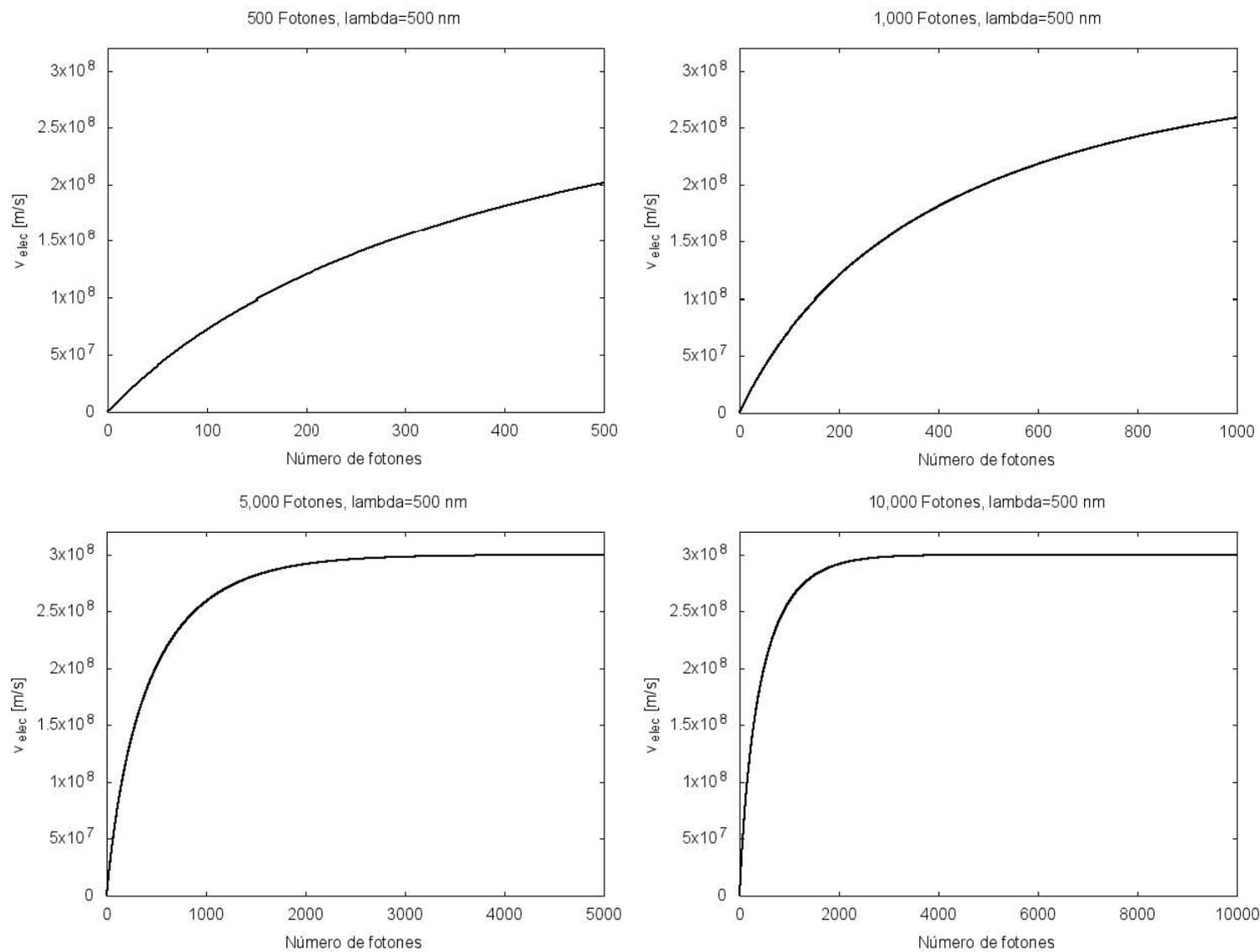


Figura 3.9: Gráfica de comparación de la velocidad $v_{elec}(n)$ para cuatro valores de n con una longitud de onda de 500 nm.

La última de las gráficas se incluyó con el fin de que se pueda apreciar mejor la comparación entre las gráficas correspondientes a los cuatro primeros valores de n .

3.2.2 Gráficas correspondientes al caso $a=1$.

Para éste caso sucede algo peculiar, para ello obsérvese las cuatro gráficas siguientes las cuales son solo para valores pequeños de n puesto que carece de sentido tomar valores de n mayores.

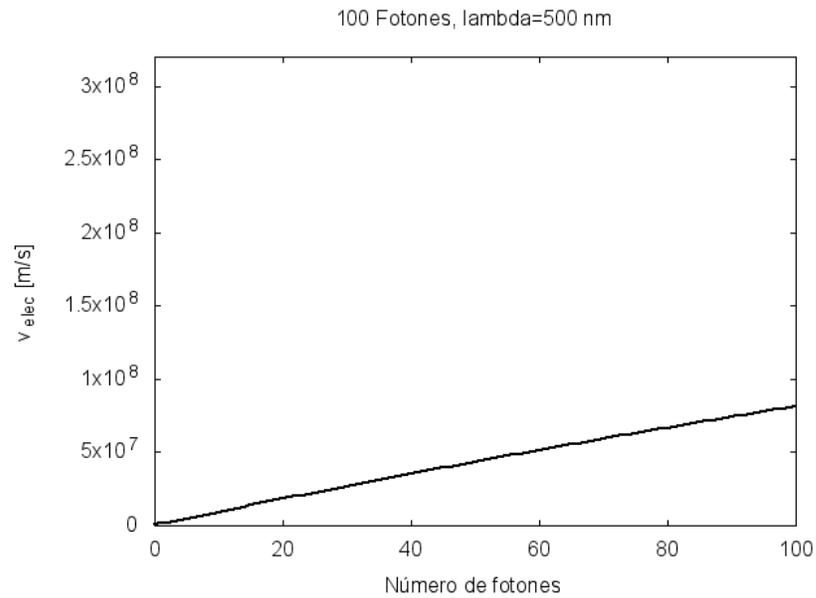


Figura 3.10: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=100$ fotones con una longitud de onda de 500 nm, para el caso $a=1$.

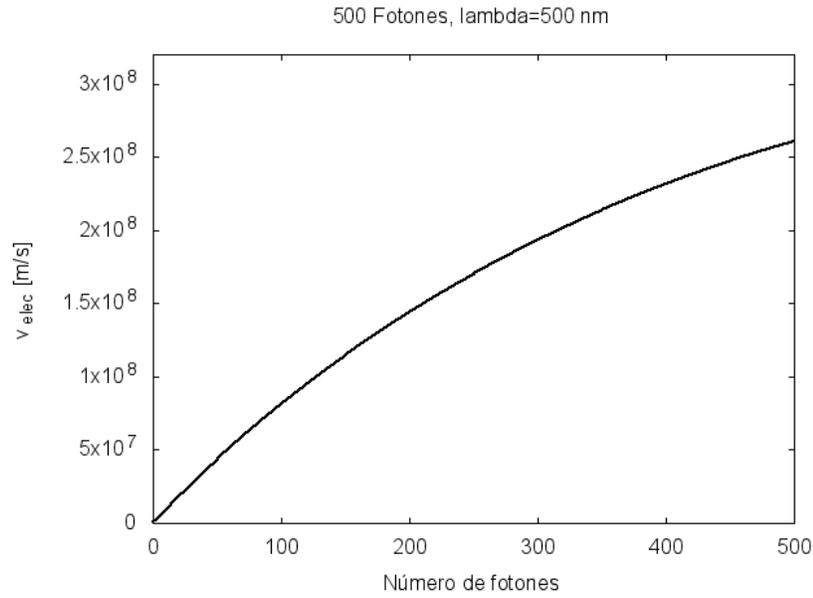


Figura 3.11: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=500$ fotones con una longitud de onda de 500 nm, para el caso $a=1$.

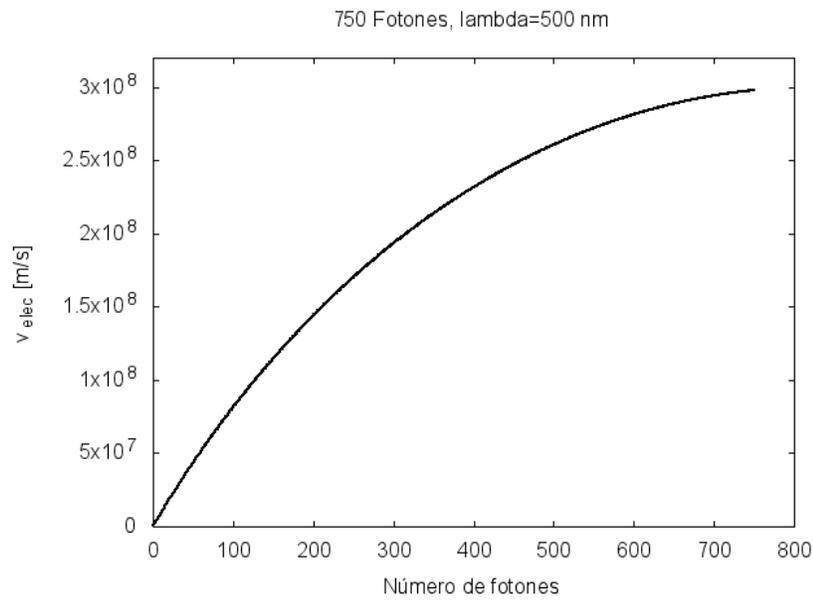


Figura 3.12: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=750$ fotones con una longitud de onda de 500 nm, para el caso $a=1$.

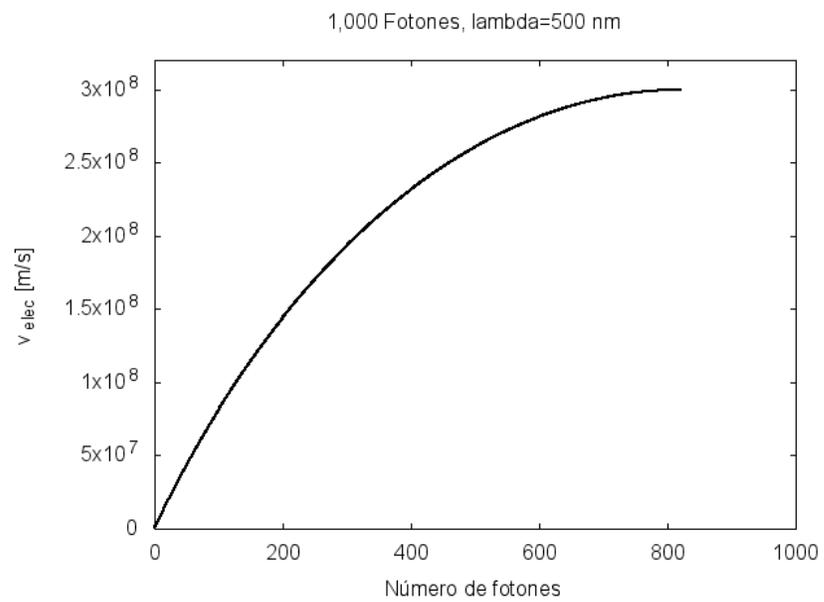


Figura 3.13: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=1000$ fotones con una longitud de onda de 500 nm, para el caso $a=1$.

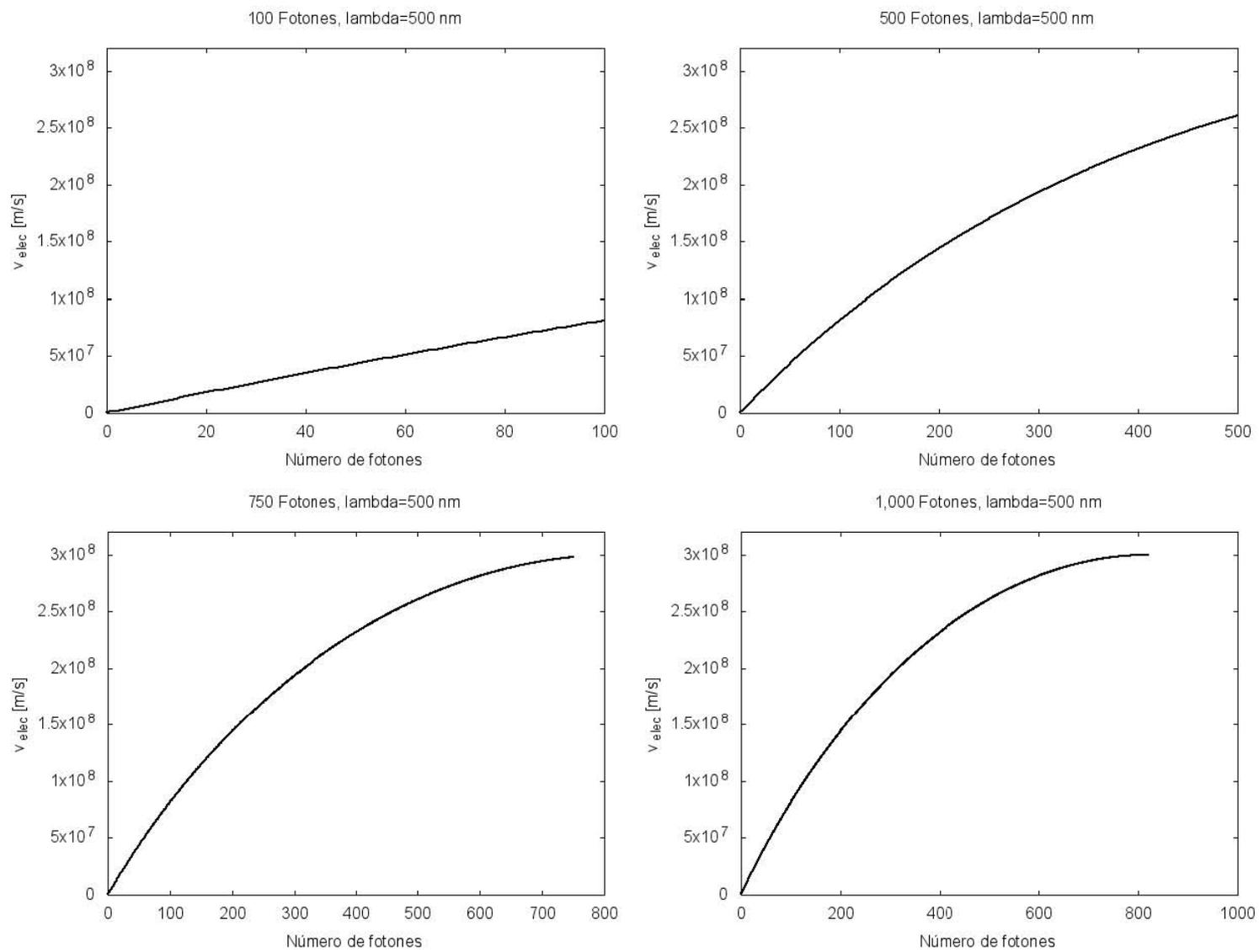


Figura 3.14: Gráfica de comparación de la velocidad $v_{elec}(n)$ para cuatro valores de n con una longitud de onda de 500 nm, para el caso $a=1$.

3.3 Análisis de la solución numérica al límite de la rapidez de las masas.

Ahora solo falta interpretar los resultados obtenidos anteriormente, para ello tómesese primero el caso $a = 2$, el cual no presenta inconsistencias con el segundo postulado de Einstein.

De las seis gráficas presentadas, se puede ver que la velocidad del electrón medida desde el sistema de referencia S es una función creciente y acotada por un límite que resulta ser la velocidad de la luz c , puesto que ésta función se pega asintóticamente a este valor, así que sin importar cuantos fotones impacten con el electrón, éste siempre absorberá una energía menor a la que absorbió en la colisión anterior, la cual hace que la velocidad de la luz no se alcance, esto está en completa concordancia con el segundo postulado de Einstein, es decir, con el hecho de que no importa el sistema de referencia inercial desde el cual se mida, nada viajará más rápido que la luz, a lo más tenderá a alcanzar la velocidad de la luz.

Éste resultado es muy interesante, puesto que partiendo de suposiciones clásicas, se puede dar una interpretación al segundo postulado de Einstein en términos de la absorción de fotones, es decir, en términos de una visión cuántica. Lo más importante de esto es que no solo resulta que la velocidad de un cuerpo tiene un límite, si no que además tal límite resulta ser c la velocidad de la luz.

No queda más por decir sobre el caso en el cual $a = 2$, sin embargo, el caso que corresponde al efecto Doppler clásico $a = 1$ es mucho más intrigante, puesto que para un valor mayor de $n = 821$ la curva de la velocidad se corta. Éste hecho se debe a que justo después de que el fotón número 821 alcanza al electrón éste último adquiere una energía que le permite alcanzar y superar la velocidad de la luz.

Éste hecho aparentemente está en contradicción con el segundo postulado de la relatividad de Einstein, sin embargo falta considerar otra variable de la que hasta ahora no se ha dicho ni una sola palabra, esta variable que entra en juego en aras de explicar tal paradoja es el tiempo y en este caso deberá ser el tiempo de absorción de los fotones, el cual tiene que ser cada vez mayor conforme el número de fotones crezca, explicando así tal contradicción con el segundo postulado de Einstein.

Dado que sobre éste tema hay algunos puntos que aclarar, merece ser tratado en un capítulo adicional.

Capítulo 4

Solución a la aparente inconsistencia del límite de la rapidez de las masas con el segundo postulado de relatividad.

Tratar de explicar lo que sucedió con la velocidad que adquiere el electrón después de ser alcanzado por un número mayor de fotones a 821 resulta ser una ardua tarea en la cual hay que empezar por dejar en claro algunas cosas referentes a las variables que entran en juego, las cuales en primera instancia son la energía de los fotones y el número de éstos.

Sin embargo, se puede considerar también que el exponente a puede ser libre, es decir, se puede considerar como un parámetro perteneciente a los reales positivos y determinar a partir de que valor de a la velocidad de electrón medido desde el sistema S converge al límite de la velocidad de la luz.

4.1 El juego de la energía de los fotones sobre la velocidad del electrón medida desde el sistema de referencia S .

Puede retomarse el caso $a = 2$ tratado en el capítulo anterior y hacerse una pregunta fundamental a cerca de la energía de los fotones que se emiten desde la fuente estacionaria: ¿Qué pasa si la energía de los fotones emitidos por la fuente es muy grande? La respuesta a esta pregunta se encuentra al evaluar directamente la ecuación (3.17)

ahora para una energía correspondiente a una longitud de onda del orden de 0.001 nm , es decir una energía dada por $E = 1.24 \text{ MeV}$.

Si éste es el caso, resulta que la velocidad de luz se ve superada incluso desde el primer fotón, es decir el fotón inicial, llegando la velocidad del electrón a un valor dado de $v_{elec}(0) = 6.609 \times 10^8$ el cual es mayor que la velocidad de la luz.

Si se es persistente sobre ésta situación y se continúa con la inspección de la velocidad del electrón para valores de n mayor que cero se verá que tal velocidad también converge a la velocidad de la luz c pero por arriba, esta situación se puede apreciar mejor en las siguientes tres gráficas:

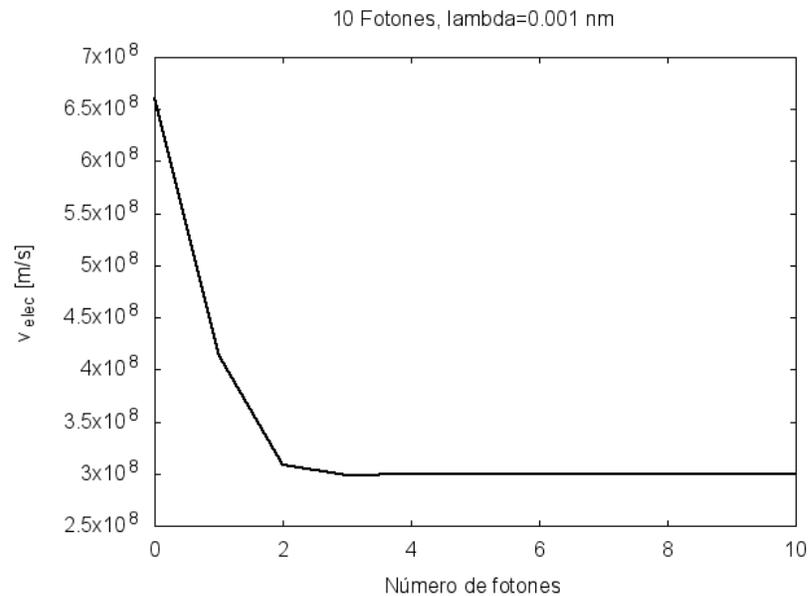


Figura 4.1: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=10$ fotones con una longitud de onda de 0.001 nm , $a = 2$.

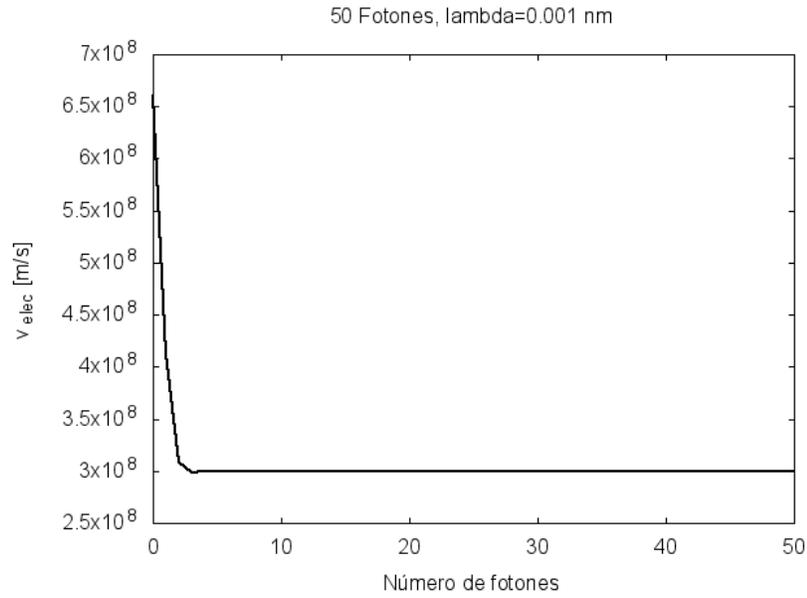


Figura 4.2: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=50$ fotones con una longitud de onda de 0.001 nm, $a = 2$.

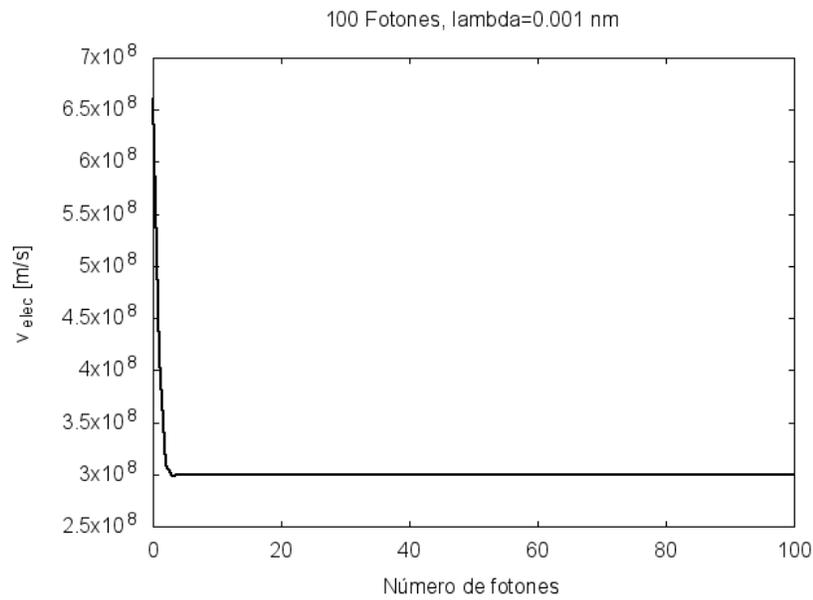


Figura 4.3: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=100$ fotones con una longitud de onda de 0.001 nm, $a = 2$.

En las figuras anteriores se exhibe el comportamiento antes mencionado sobre la velocidad que adquiere el electrón; además, esto pone de manifiesto el importante papel que juega la energía de los fotones que emite la fuente¹.

Tal parece que ahora todo sale mal, pues ya se tenía que para este caso $a = 2$ la velocidad tenía un límite superior y ese límite superior era precisamente c . De igual forma se puede hacer hincapié ahora sobre el papel que juega la energía en el caso $a = 1$.

Para ésta situación, ya se sabe del capítulo anterior que para un cierto número de fotones, la velocidad del electrón medida desde S supera a la velocidad de la luz. Sin embargo, la energía también modifica las cosas en este caso.

Por ejemplo, para una energía de los fotones correspondiente a 500 nm se sabe ya que después de 821 fotones la velocidad del electrón supera a la velocidad de la luz, pero si ahora se tienen fotones con una energía correspondiente a una longitud de onda de $10,000 \text{ nm}$, el número de fotones a partir del cual la velocidad del electrón supera a la velocidad de luz cambia, para este caso, el número de los fotones incrementa hasta 3686.

También se puede examinar otros casos, por ejemplo, cuando se tienen fotones de energía correspondientes a longitudes de onda dadas por $5,000 \text{ nm}$, $1,000 \text{ nm}$, 100 nm , 10 nm , 1 nm , 0.1 nm y 0.01 nm ; para los cuales el valor del número de fotones para cuando la velocidad del electrón supera la velocidad de la luz está dado como: 2605, 1163, 366, 114, 35, 10 y 2 respectivamente².

A continuación se incluyen las figuras que muestran el comportamiento de la velocidad del electrón para fotones de diferentes longitudes de onda.

¹Obsérvese que el valor de la energía correspondiente a tal longitud de onda es muy pequeño en comparación a las energías empleadas en los terrenos de la física nuclear.

²Algo análogo se pudo hacer con el caso $a = 2$, pero éste carece de sentido puesto que para todo el rango de energías correspondientes a longitudes de onda del orden de 0.001 nm no se supera la velocidad de la luz, excepto en el caso ya mencionado de fotones con energías correspondientes a longitudes de onda del orden de 0.001 nm .

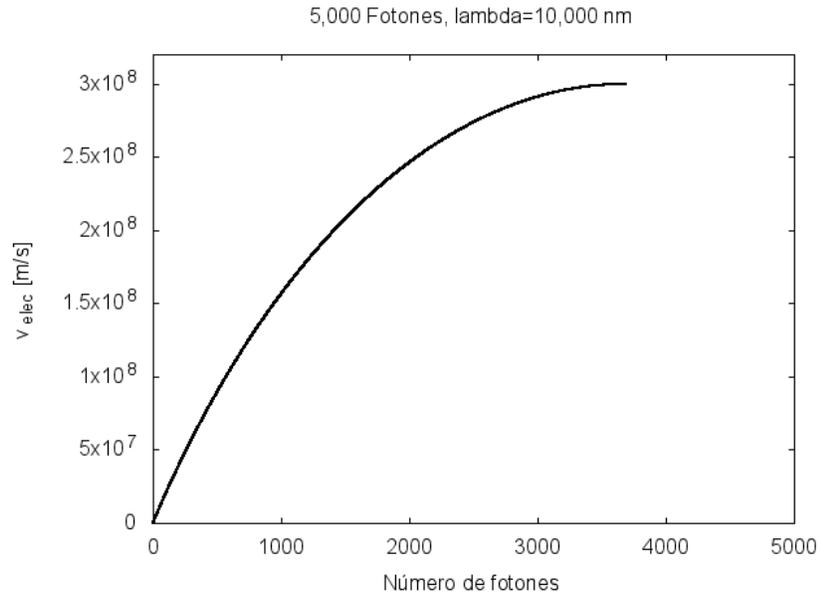


Figura 4.4: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=5000$ fotones con una longitud de onda de 10,000 nm, $a = 1$.

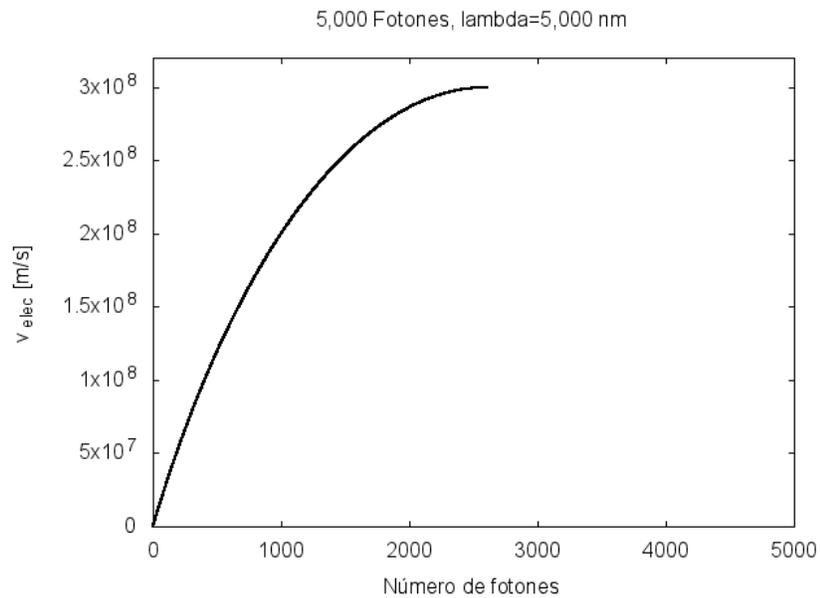


Figura 4.5: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=5000$ fotones con una longitud de onda de 5,000 nm, $a = 1$.

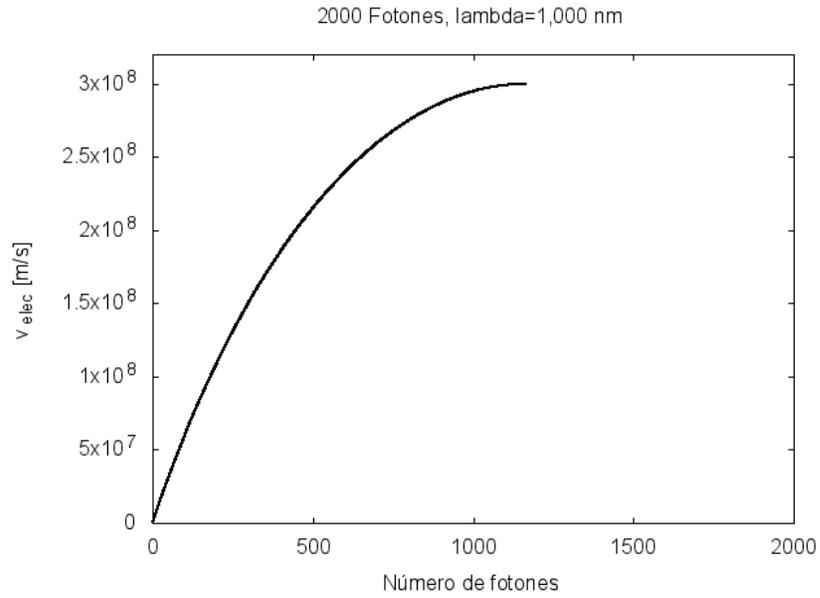


Figura 4.6: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=2000$ fotones con una longitud de onda de 1,000 nm, $a = 1$.

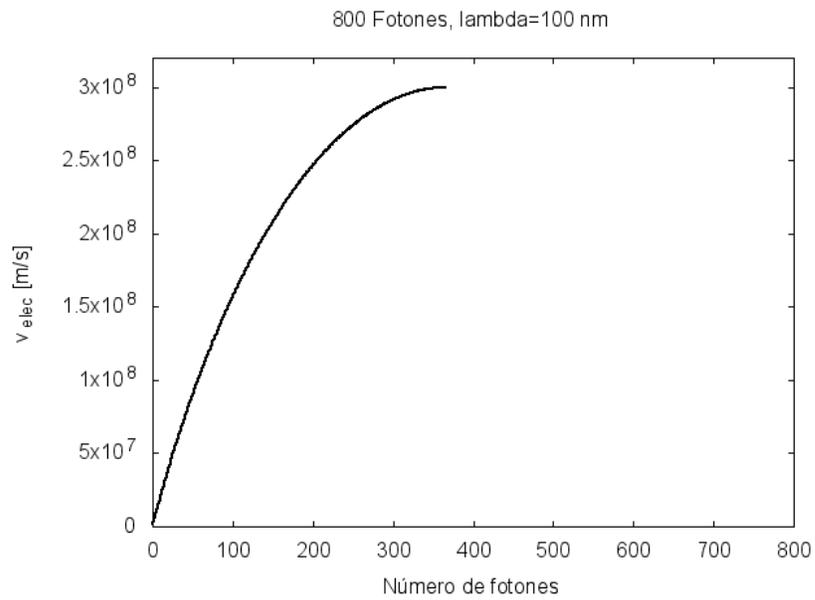


Figura 4.7: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=800$ fotones con una longitud de onda de 100 nm, $a = 1$.

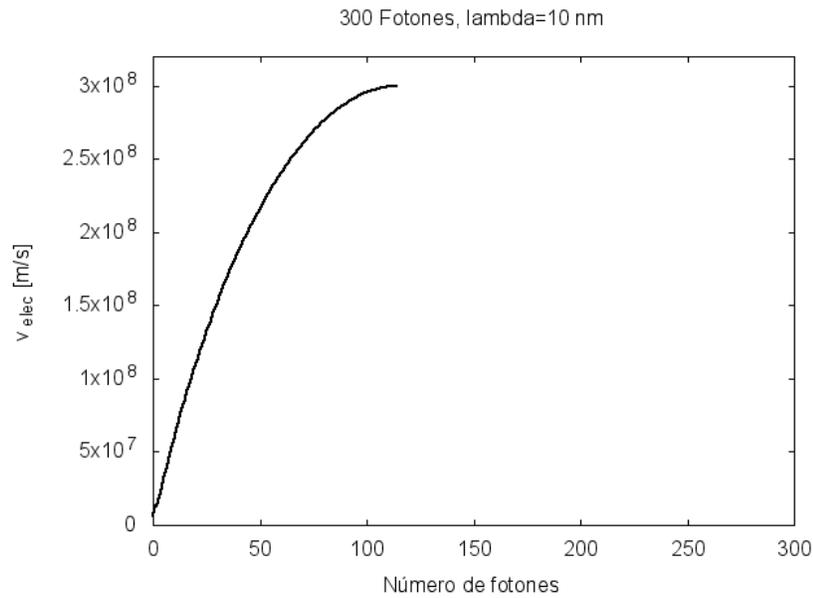


Figura 4.8: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=300$ fotones con una longitud de onda de 10 nm, $a = 1$.

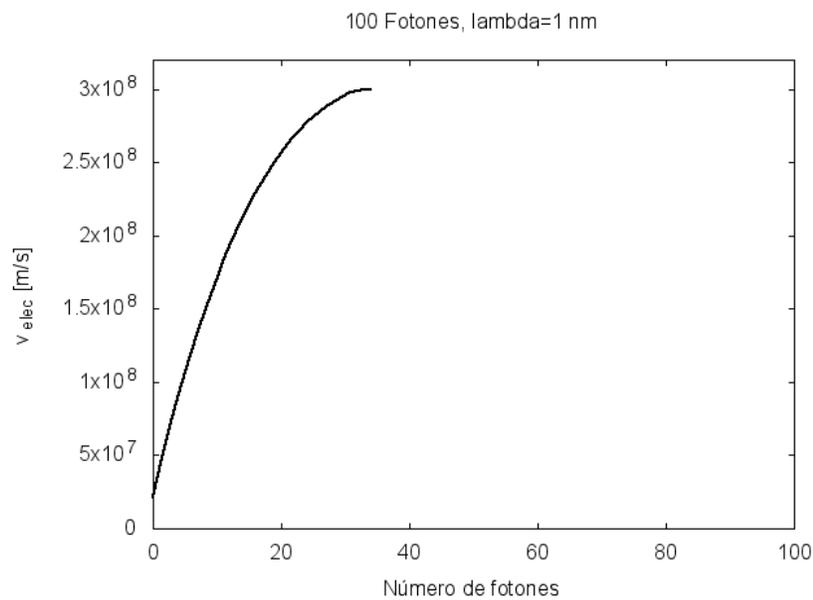


Figura 4.9: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=100$ fotones con una longitud de onda de 1 nm, $a = 1$.

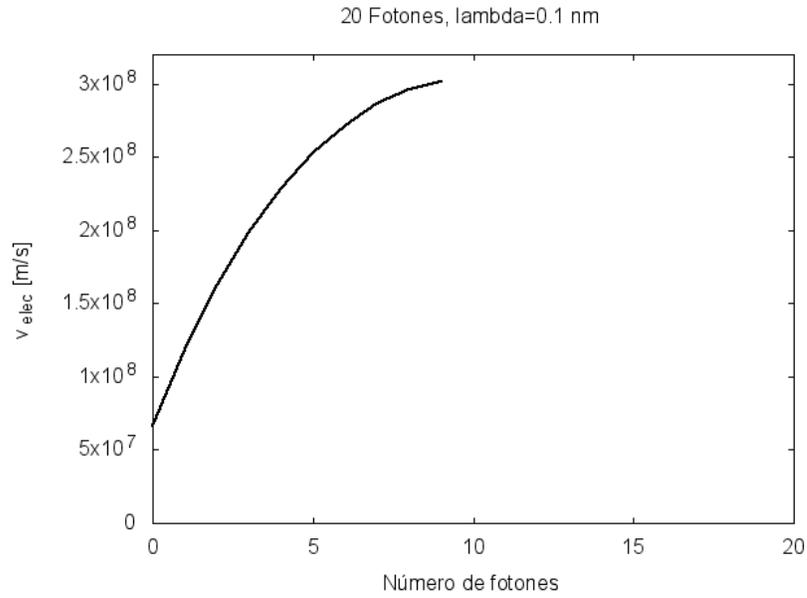


Figura 4.10: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=20$ fotones con una longitud de onda de 0.1 nm, $a = 1$.

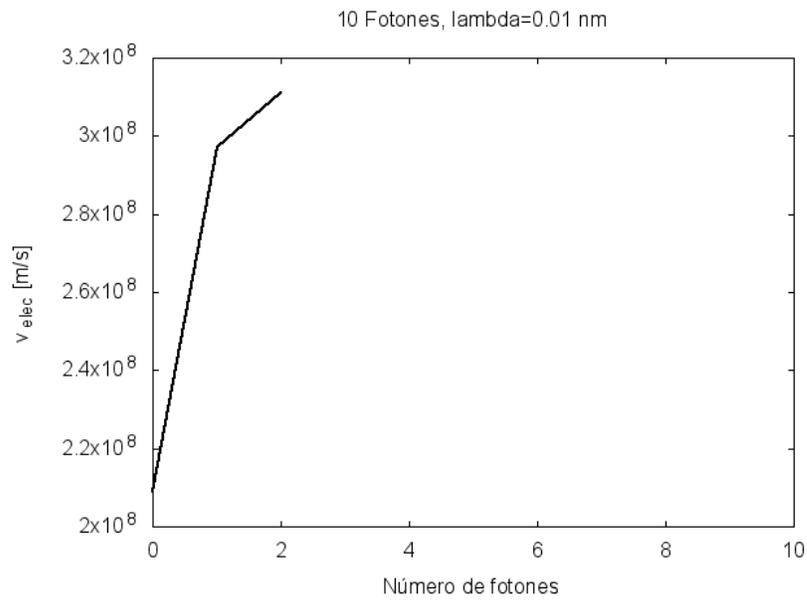


Figura 4.11: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=10$ fotones con una longitud de onda de 0.01 nm, $a = 1$.

4.2 El exponente a en la regla estilo Doppler para la transformación de la frecuencia observada por el electrón en su sistema de referencia propio.

Recuérdese la regla estilo Doppler para la frecuencia observada por el electrón en su sistema de referencia propio, la cual es la ecuación (3.4), si ahora, se lleva a cabo un procedimiento similar al efectuado en el capítulo anterior, sección 4.1, se puede encontrar la regla de correspondencia que rige el cambio de la frecuencia observada en el sistema de referencia S' , la cual es fácil de obtener y está dada como:

$$\omega_n = \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right)^a \omega_0 \quad (4.1)$$

De esta ecuación también es fácil encontrar que la velocidad que adquiere el electrón debida a la absorción del n -ésimo fotón está dada por:

$$v_n = v_0 \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right)^{a/2} \quad (4.2)$$

Y por tanto, la velocidad del electrón medida por un observador en S se encuentra como:

$$v_{elec}(n) = v_{elec}(n-1) + v_0 \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right)^{a/2} \quad (4.3)$$

¿De qué forma el exponente a entra en juego y afecta al comportamiento asintótico de $v_{elec}(n)$ para una energía y un número de fotones fijo?, la respuesta es sencilla, mientras más pequeño sea el valor de a la velocidad del electrón medida desde S se acercará y eventualmente superará la velocidad de la luz. Por ejemplo, si se deja fijo el número de fotones en $n = 1,000$ y con una energía tal que la longitud de onda sea de 500 nm , se puede ver como dependiendo del cambio del valor de a la curva de $v_{elec}(n)$ cambia su pendiente y se hace cada vez más inclinada, esto se aprecia fácilmente en la figura siguiente:

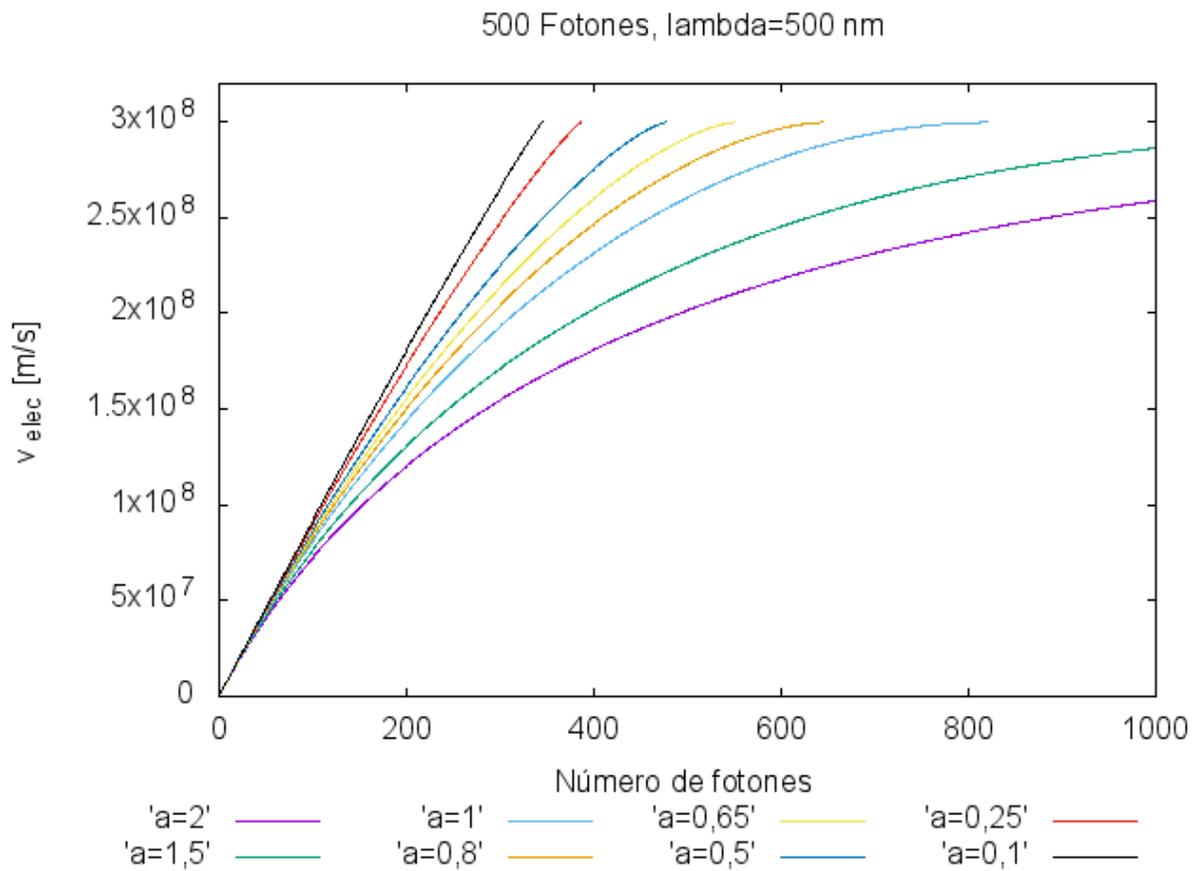


Figura 4.12: Gráfica de la velocidad $v_{elec}(n)$ cuando $n=1000$ fotones con una longitud de onda de 500 nm, en este caso se muestran las curvas correspondientes a diferentes valores de a .

Entonces, el exponente a también modifica la forma de la pendiente de la curva de $v_{elec}(n)^3$, para el caso anterior se determinó que para valores de $a > 1.139173$ la velocidad del electrón está acotada por arriba por c , mientras que si $a \leq 1.139173$ se tiene entonces que la velocidad del electrón medida desde S en algún momento supera la velocidad de la luz.

Recuérdese que cuando a toma el valor de 0.5 se tiene el caso del efecto Doppler relativista, por tanto para ese caso, la velocidad del electrón superaría la velocidad c , esto es nuevamente inconsistente con el segundo postulado de Einstein.

4.3 Solución a la aparente inconsistencia del límite de la rapidez de las masas.

En secciones anteriores se ha dicho mucho acerca de las inconsistencias que presenta el experimento ideal presentado en el capítulo anterior, véase el problema por donde se quiera esta situación es clásicamente posible pero relativísticamente improbable, con ello se quiere decir que solo existe una solución a este dilema, a saber:

- Falta considerar la variable temporal, en este caso será el tiempo de absorción de los fotones la variable faltante.

Es cierto que hasta ahora no se ha dicho nada a cerca del tiempo de absorción de los fotones, sin embargo dicho tiempo debe de existir puesto que si el fotón fuera absorbido por el electrón instantáneamente la velocidad de absorción tendría que ser infinita superando a c y estaría en contradicción del segundo postulado.

Ahora, se tendrá oportunidad de encontrar un expresión para el tiempo de absorción de un fotón cuando se tiene fijo el número de fotones en $n = n_0$, para ello considérese que dado un observador en S éste tendría que medir la velocidad del electrón empleando la fórmula clásica:

$$E = \frac{1}{2}m_e v_{elec}^2(n_0) \tag{4.4}$$

³Sin embargo, solo tiene importancia física el caso en el que $a=1/2$ y $a=1$, que corresponden al efecto Doppler relativista y clásico, respectivamente, los otros casos son casos matemáticos con cierta relevancia.

Ecuación que se puede resolver para la velocidad, dando como resultado:

$$v_{elec}(n_0) = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} \quad (4.5)$$

Recuérdese ahora que la velocidad de un móvil es la primera derivada de la posición con respecto del tiempo, quedando (4.5) como:

$$\dot{x}_{elec}(n_0) = \frac{dx_{elec}(n_0)}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} \quad (4.6)$$

Una forma de relacionar el tiempo que transcurre en S con el tiempo transcurrido en S' es hacerlo de la siguiente manera:

$$\frac{dx_{elec}(n_0)}{dt} = \frac{dx_{elec}(n_0)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \quad (4.7)$$

Nótese ahora que se puede hacer una suposición clásica a cerca del espacio en los dos sistemas de referencia, ésta suposición viene a ser: “El espacio en dos sistemas inerciales que se mueven uno con respecto del otro, es el mismo”; tomándo esto como cierto se puede escribir:

$$x_{elec}(n_0) = x'_{elec}(n_0) \quad (4.8)$$

Dónde $x'_{elec}(n_0)$ representa la coordenada espacial en el sistema de referencia S' . Sustituyendo (4.8) en (4.7) se tiene:

$$\frac{dx_{elec}(n_0)}{dt} = \frac{dx_{elec}(n_0)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx'_{elec}(n_0)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \quad (4.9)$$

Combinando (4.9) y (4.6) se puede obtener:

$$\frac{dx'_{elec}(n_0)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} \quad (4.10)$$

Nótese ahora que la primera diferencial no es más que la velocidad que adquiere el

electrón medida en su sistema de referencia propio conforme absorbe la máxima energía del fotón n_0 , por tanto se puede sustituir en (4.10) y resolver para la segunda diferencial que se tiene, de tal forma que:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{v_{n_0}} \sqrt{\frac{2E}{m_e}} \quad (4.11)$$

De la ecuación anterior se puede ya encontrar la expresión para el tiempo τ en términos de una integral en dt dada por:

$$\int_0^\tau d\tau = \int_0^t \frac{1}{v_{n_0}} \sqrt{\frac{2E}{m_e}} dt \quad (4.12)$$

Por tanto la expresión final para el tiempo τ en función de n_0 queda como:

$$\tau(n_0) = \int_0^t \frac{1}{v_{n_0}} \sqrt{\frac{2E}{m_e}} dt \quad (4.13)$$

Nótese que en general, debido a que n_0 es arbitraria se puede generalizar (4.13) para cualquier n , de tal forma que:

$$\tau(n) = \int_0^t \frac{1}{v_n} \sqrt{\frac{2E}{m_e}} dt \quad (4.14)$$

El tiempo τ no es más que el tiempo de absorción del fotón n medido desde el sistema de referencia S , el cual es distinto para cada n . Sin resolver ésta integral ya se puede decir algo a cerca de las inconsistencias presentadas a lo largo de todo este capítulo.

Para ello obsérvese detenidamente (4.13) y considérese primero que n_0 es muy grande pero no suficiente para que la velocidad del electrón medida en S alcance a c , de la evaluación de $v_{elec}(n_0)$ se infiere que cuando n_0 es grande la velocidad que adquiere el electrón también grande y por tanto su energía en este sistema también es muy grande, lo que pasa con la velocidad que va adquiriendo el electrón desde su sistema de referencia S' basándose en (4.2) es que debido a que el fotón n_0 no brinda la energía suficiente para llegar a c , ésta velocidad tendría que ser muy pequeña, sin embargo va incluida en (4.13) con el exponente -1 lo cual hace que sea muy grande.

Por tanto dentro del integrando en (4.13) se tiene algo muy grande por algo muy grande, lo cual deberá ser una cantidad aún más grande, por lo que si n_0 es suficientemente grande para que la velocidad del electrón esté cerca de alcanzar a c , el tiempo de absorción de éste fotón tendrá que ser muy grande.

Considérese ahora una situación extrema, clásicamente se tiene que n_0 acelera al electrón a una velocidad mayor que c , para este caso todo dentro de la integral tiende a ser muy grande por tanto el tiempo de absorción tiende a ser infinito lo cual hace que tal fotón en realidad nunca termine de absorberse y el electrón nunca superaría la velocidad de la luz.

Esto soluciona todas las inconsistencias puestas anteriormente sobre la mesa, además se obtiene un resultado que ya no es del todo clásico, puesto que (4.14) está diciendo que el tiempo medido por un observador en S es diferente y mucho mayor al que mide un observador en S' que se desplaza a una velocidad próxima a la de la luz, por tanto se ha obtenido una fórmula para la dilatación del tiempo⁴.

Falta agregar que lo mismo sucede para todos los casos, si por ejemplo de entrada la energía es muy grande, el tiempo de absorción del fotón correspondiente será demasiado grande. Ahora, todos los resultados son compatibles con el segundo postulado de la relatividad de Einstein.

⁴Es posible demostrar a partir de (4.11) la dilatación temporal para el tiempo de absorción de los fotones, para ello véase el apéndice B.

Conclusiones

La situación ideal expuesta en páginas anteriores representa un ejercicio didáctico propuesto para tener una idea de como funciona el mecanismo de la naturaleza al forzar a que el límite de velocidad de una partícula con masa exista y sea justamente la velocidad de los fotones del campo de radiación.

Éste ejercicio didáctico permite entender de mejor manera como es que el límite de la velocidad de la luz nunca es superado, y más aún permite entender el por qué es justamente el valor de c , es decir, si los fotones del campo de radiación tuvieran cualquier otra velocidad entonces el límite de la velocidad de una partícula que se mueve debido a la acción de este campo deberá ser la velocidad de los cuantos de radiación⁵.

Si bien es cierto que se encontraron dificultades a cerca de la convergencia de la velocidad de la partícula en algunos casos, éstas fueron diluidas al considerar que existe un tiempo para que la partícula adquiera la mayor energía posible del fotón, siendo este mucho mayor cuando el número de fotones aumenta o la energía es muy grande.

Lo anterior queda en claro si se considera que cuando la partícula está a punto de alcanzar el límite c , para otro fotón, después de un tiempo muy grande logra alcanzar este límite, lo que queda del fotón sigue siendo un fotón de menor energía pero sigue moviéndose a velocidad c entonces ambos fotón y partícula se mueven como en una instantánea para un observador montado en el sistema de referencia de la partícula el cual es el mismo que el sistema de referencia del fotón por llevar ambos la misma velocidad c , por tanto el tiempo de absorción es infinito puesto que nunca se termina de absorber completamente la mayor energía del último fotón.

Si el fotón tuviera una velocidad mayor que c , entonces lo anterior se cumple y nuevamente se tendría que la partícula alcanza a esa nueva velocidad pero lo que queda del último fotón nunca se termina de absorber puesto que ambos se van moviendo uno con respecto del otro con la misma velocidad, visto desde el sistema de referencia S' están estáticos, no se mueven se ven como en una instantánea.

⁵Véase el apéndice incluido.

La inclusión del tiempo de absorción de los fotones implica de entrada que el tiempo medido por un observador en reposo es diferente que el tiempo que mide un observador en movimiento pues para éste último el tiempo transcurre muy lentamente si su velocidad es próxima a c , este resultado concuerda con lo predicho por la relatividad especial, es decir, la dilatación del tiempo.

Éste modelo es pues un buen ejemplo para entender el segundo postulado de la relatividad especial que de entrada es contraintuitivo y que sin embargo ha sido corroborado por experimentos como el realizado por Michelson y Morley. Éste modelo en sí permite entender la esencia del segundo postulado en términos cuánticos y esto se debe al hecho de considerar el campo de interacción (en este caso la luz obtenida de una fuente capaz de emitir un cuanto por instante) cuantizado, es decir, compuesto por fotones de una cierta energía constante, fotones monocromáticos y considerar sólo el efecto Compton.

Apéndice A

La velocidad de la luz como un límite para la velocidad de los cuerpos.

Considérese aquí una situación en la cual se tiene una partícula con masa, la cual se acelera desde el reposo por la acción de un campo eléctrico, todo lo anterior es unidimensionalmente. Dado que la partícula cambia su estado de reposo por otro en movimiento debe de haber un incremento o ganancia en su energía cinética, la cual se puede encontrar empleando la ecuaciones de la mecánica básica.

Considérese que la energía cinética será igual al trabajo necesario para mover la partícula desde su posición inicial hasta una posición arbitraria; esto permite igualar la energía cinética con la expresión del trabajo:

$$E_c = \int F dx \tag{A.1}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza es equivalente a la derivada temporal del momento lineal, por lo que se puede sustituir en (A.1) quedando como:

$$E_c = \int \frac{dp}{dt} dx = \int dp \frac{dx}{dt} = \int v dp \tag{A.2}$$

Ahora, el momento está dado como:

$$p = mv \tag{A.3}$$

Sustituyendo (A.3) en (A.2) se tiene:

$$E_c = \int v d(mv) \quad (\text{A.4})$$

Todo lo anterior sirve de nada si se considera que la masa se mantiene constante pues se recuperan el conocido resultado $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, pero en este caso, la masa tendrá que variar debido a que ahora la partícula se encuentra en movimiento, ésto es totalmente consistente con las ecuaciones de Lorentz, las cuales predicen una variación de la masa debido al movimiento de la partícula. Haciendo uso de lo anterior se tiene una expresión sencilla de integrar:

$$\begin{aligned} E_c &= \int v [m dv + v dm] \\ &= \int m v dv + \int v^2 dm \\ &= m_0 \int_0^v v dv + v^2 \int_{m_0}^m dm \\ &= \frac{1}{2}m_0v^2 + v^2(m - m_0) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Dónde m_0 es la masa en reposo de la partícula. Dado que hay una variación en la masa, ésta solo puede deberse a la cantidad de energía total que la partícula pueda obtener debido al campo, es decir, tal variación en la masa se debe a una fracción en la energía cinética que obtuvo la partícula, lo cual puede expresarse como:

$$(m - m_0) = KE_c \quad (\text{A.6})$$

De (A.5) se puede obtener una relación para la velocidad de la partícula en término de la energía cinética y de la variación de la masa:

$$v = \sqrt{\frac{E_c}{(m - m_0) - \frac{1}{2}m_0}} \quad (\text{A.7})$$

Si ahora, se introduce (A.6) es facil obtener una relación para la velocidad de la partícula en términos de K y de la masa en reposo:

$$v = \sqrt{\frac{1}{K - \frac{1}{2E_c}m_0}} \quad (\text{A.8})$$

Considérese ahora, que la energía que brinda el campo puede ser demasiado grande, es decir, tiende a ser infinita, la parte en el denominador de la raíz que va como $\frac{1}{2E_c}m_0$ se anula en ese límite, mientras que el otro término del denominador persiste debido a que mientras mayor sea la energía que se brinda a la partícula, la diferencia de masa es mayor. Por tanto se tiene:

$$\lim_{E_c \rightarrow \infty} v = \sqrt{\frac{1}{K}} \quad (\text{A.9})$$

Esto implica que K debería ser el inverso de la velocidad límite al cuadrado de la partícula, es decir, de acuerdo al segundo postulado de Einstein se debe cumplir que:

$$K = \frac{1}{c^2} \quad (\text{A.10})$$

Apéndice B

Dilatación temporal para el tiempo de absorción de los fotones.

Todos los errores encontrados acerca del hecho de que la velocidad del electrón supera a la velocidad de la luz en algún momento desaparecen al considerar que los fotones no son absorbidos instantáneamente por parte de electrón. Esta suposición arroja un resultado muy importante que está en perfecta sintonía con uno de los resultados de la teoría de Einstein, a saber, la dilatación temporal.

Antes de pasar a la obtención de dicho resultado, recuérdese cuál es la esencia del mismo, esto es, que dado un observador que se mueve a velocidades cercanas a la de la luz, su tiempo comparado con el tiempo de un observador en reposo es diferente, en esencia, el tiempo transcurre más lentamente en el sistema de referencia del observador en movimiento a velocidad cercana a c .

Ahora considérese la ecuación (4.11) y escríbase ligeramente diferente, de tal forma que de un lado de la ecuación aparezca solamente la diferencial $d\tau$:

$$d\tau = \frac{1}{v_{n_0}} \sqrt{\frac{2E}{m_e}} dt \quad (\text{B.1})$$

Esta ecuación se puede reescribir de tal forma que el término v_{n_0} quede dentro de la raíz, siendo de esta manera la ecuación queda como:

$$d\tau = \sqrt{\frac{2E}{m_e v_{n_0}^2}} dt \quad (\text{B.2})$$

Divídase todo ahora arriba y abajo de la fracción por $2E$, por lo que la ecuación toma la forma:

$$d\tau = \sqrt{\frac{1}{\frac{m_e v_{n_0}^2}{2E}}} dt \quad (\text{B.3})$$

Ahora, obsérvese que la energía E es la energía que mide el observador en reposo para el electrón que se mueve a una velocidad anterior a $v_{elec}(n_0)$, es decir, que el electrón se mueve a $v_{elec}(n_0 - 1)$, esta energía se puede obtener considerando que la energía que mide un observador en reposo para el electrón en movimiento está dada como la suma de la energía que cada fotón proporciona al electrón. Para obtener esto considérese que se mide la energía que el fotón n le brinda al electrón¹ en su sistema de referencia, tal energía debe estar dada como:

$$E_n = \hbar\omega_n \quad (\text{B.4})$$

Y ω_n es la frecuencia del fotón observada en el sistema de referencia del electrón, dada por (3.18), así que la energía que cada fotón le brinda a un electrón en movimiento va a estar dada como:

$$E_n = \hbar \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right) \omega_0 = \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right) E_0 \quad (\text{B.5})$$

donde $E_0 = \hbar\omega_0$. Ahora, para un observador en reposo en el sistema de la fuente de emisión de fotones, se tendrá que la energía debe ser la suma de las energías que cada fotón puede llegar a proporcionarle al electrón por tanto se debe tener:

$$\begin{aligned} E_{elec}(n) &= E_0 + E_1 + \dots + E_n = E_0 + E_0 \frac{c - v_0}{c + v_0} + \dots + E_0 \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right) \\ &= \left(1 + \frac{c - v_0}{c + v_0} + \dots + \left(\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \right) \right) E_0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Ahora, la energía considerada en (B.1) es justamente esta energía medida por un observador en reposo para el electrón que se mueve, es decir, $E = E_{elec}(n_0)$ por lo cual se puede sustituir directamente en (B.3), sin embargo, por cuestiones de espacio y notación

¹Recuérdese en realidad que la energía que le puede brindar el fotón al electrón es en realidad menor.

reescribese (B.3) de la siguiente manera:

$$d\tau = d\tau = \sqrt{\frac{1}{\frac{m_e v_{n_0}^2}{2E}}} dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_e v_{n_0}^2}{2E}}} dt = \alpha dt \quad (\text{B.7})$$

donde se ha tomado

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_e v_{n_0}^2}{2E}}} = \frac{1}{\alpha'} \quad (\text{B.8})$$

$$\alpha' = \sqrt{\frac{m_e v_{n_0}^2}{2E}} \quad (\text{B.9})$$

Se puede sustituir $E = E_{elec}(n_0)$ en (B.8). Nótese que v_{n_0} está dada por (3.19), por lo que:

$$v_{n_0}^2 = v_0^2 \frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)} \quad (\text{B.10})$$

Se puede ahora sustituir todo en la expresión para α' , quedando:

$$\alpha' = \sqrt{\frac{m_e v_{n_0}^2}{2E}} = \sqrt{\frac{m_e v_0^2 \left(\frac{c - v_{elec}(n_0-1)}{c + v_{elec}(n_0-1)} \right)}{2E_0 \left[1 + \frac{c-v_0}{c+v_0} + \dots + \frac{c - v_{elec}(n_0-1)}{c + v_{elec}(n_0-1)} \right]}} \quad (\text{B.11})$$

Nótese que:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m_e}} \quad (\text{B.12})$$

Además si se multiplica dentro de la raíz arriba y abajo por $\frac{c - v_{elec}(n-1)}{c + v_{elec}(n-1)}$ se tiene:

$$\alpha' = \sqrt{\frac{m_e \frac{2E_0}{m_e}}{2E_0}} \sqrt{\frac{c - v_{elec}(n_0 - 1)}{(c + v_{elec}(n_0)) \left[1 + \frac{c-v_0}{c+v_0} + \dots + \frac{c - v_{elec}(n_0-1)}{c + v_{elec}(n_0-1)} \right]}} \quad (\text{B.13})$$

Nótese que la primer raíz es igual a 1. Para el término que queda se puede desarrollar directamente el término del denominador quedando finalmente la expresión:

$$\alpha' = \sqrt{\frac{c - v_{elec}(n_0 - 1)}{c + v_{elec}(n_0 - 1) + \frac{c-v_0}{c+v_0}(c + v_{elec}(n_0 - 1)) + \dots + c - v_{elec}(n_0 - 1)}} \quad (\text{B.14})$$

Donde se cancela el término $v_{elec}(n_0 - 1)$, nótese además que hay dos c las cuales se suman y se obtiene una expresión más simplificada:

$$\alpha' = \sqrt{\frac{c - v_{elec}(n_0 - 1)}{2c + \frac{c-v_0}{c+v_0}(c + v_{elec}(n_0 - 1)) + \dots}} \quad (\text{B.15})$$

De entrada nótese que dado que en el numerador está el término $c - v_{elec}(n_0 - 1)$ y es claramente menor que c , mientras que en el denominador se tiene una cantidad evidentemente mayor que c , por lo que se puede concluir de esta relación para α' que esta cantidad es menor que uno. Tomando esto e insertándolo en (B.8) se puede ver que α es mayor que uno, por lo tanto se puede concluir que:

$$d\tau > dt \quad (\text{B.16})$$

Es decir, el tiempo de absorción de los fotones medido en el sistema de referencia del electrón que se mueve es mayor que el tiempo de absorción medido por un observador en reposo, lo cual refuerza la idea de que el electrón no absorbe al fotón (o parte de él) de una forma instantánea.

Si ahora se toma una situación extrema, en la cual $v_{elec}(n_0 - 1)$ tiende a c , se tiene que α' tiende a 0, por lo que α tiende a infinito, por lo tanto se tiene que cuando la velocidad del electrón es próxima a la velocidad de la luz el tiempo de absorción de los fotones medido en el sistema de referencia del electrón tiende a infinito, es decir:

$$\lim_{v_{elec} \rightarrow c} d\tau = \infty \quad (\text{B.17})$$

Esto está de acuerdo con la idea de que cuando el electrón tiene una velocidad muy próxima a c , ésta nunca termina por absorber al fotón y por tanto nunca supera la velocidad de la luz. Este resultado confirma también que el tiempo para un observador en movimiento transcurre más lentamente para un observador en movimiento, esto es lo que se conoce como “dilatación temporal”.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por permitir aún a costa de sacrificios el que yo pudiera iniciar mis estudios de licenciatura, por instigarme a finalizarlos y por todo el cariño que me han dado pues sin ellos este trabajo no hubiera sido posible.

Al Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar por aceptarme como su estudiante y brindarme con paciencia los conocimientos claves para este trabajo.

Bibliografía

- [1] Conceptos de Física Moderna; Arthur Beiser; 2a. Edición; McGraw-Hill; México, Marzo de 1981.
- [2] Relativistic Mass; L. C. Baird; Am. J. Phys. 48(9), Sept. 1980.
- [3] In defense of relativistic mass; T. R. Sandin; Am. J. Phys. 59(11), November 1991.
- [4] Relativistic momentum and kinetic energy, and $E = mc^2$; Ben Yu-Kuang Hu; European Journal of Physics, Volume 30, Number 2; 2009.
- [5] The quantum vacuum as the origin of the speed of light; Marcel Urban, François Couchot, Xavier Sarazin, and Arache Djannati-Atai; The European Physical Journal D 67:58; 2013.
- [6] On the Electrodynamics of Moving Bodies; Albert Einstein; *Annalen der Physik*; 17 (1905), pp. 891-921.
- [7] Electricidad y Magnetismo; Edward M. Purcell; Editorial Reverté; Segunda Edición; 4ta. Reimpresión; España 2001.
- [8] On the Relative Motion of Earth and the Luminiferous Ether; Albert A. Michelson and Edward W. Morley; *American Journal Science*; No. 203 Vol. XXXIV, 1887, pp. 333-345.
- [9] Electrodinámica clásica; M. Bredov, V. Rumiántsev, L. Toptiguin; Edicion En Español, Editorial Mir Moscú; URSS, 1986.
- [10] Introduction to Electrodynamics; David J. Griffiths; 3rd ed; Editorial Prentice Hall; United States of America, 1999.
- [11] A Student's Guide to Eintein's Major Papers; Robert E. Kennedy; First Published, OXFORD University Press, New York, 2012.
- [12] Curso Abreviado de Física Teórica, Libro I, Mecánica y Electrodinámica; L. Landau, E. Lifshitz; Traducción al español, Cuarta Edición; Editorial Mir Moscú; URSS, 1979.

- [13] Special Relativity; Valerio Faraoni; Springer; Switzerland, 2013.
- [14] Introducing Special Relativity; W. S. C. Williams; Taylor Francis Inc.; First Published; New York, 2002.
- [15] Optics; Eugene Hecht; Addison Wesley; Fourth Edition; United States of America, 2002.
- [16] Introducción A La Mecánica Cuántica; Luis de la Peña; Fondo de Cultura Económica; Tercera Edición corregida y aumentada; México, D. F., 2006.
- [17] Modern Physics; P. A. Tipler, L. A. Llewellyn; W. H. Freeman and Company; Fifth Edition; New York, 2008.
- [18] Física Vol. III Fundamentos Cuánticos y Estadísticos; M. Alonso, E. J. Finn; Fondo Educativo Interamericano; Versión en español; España 1971.
- [19] Concepts of Modern Physics; Arthur Beiser; Mc Graw Hill; Sixth Edition; New York, 2003.
- [20] On a Heuristic Point of View Concerning the Production and Transformation of Light; Albert Einstein; Annalen der Physik; 1905.
- [21] Gilbert N. Lewis, Nature, vol. 118, Part 2, December 18, 1926, pp. 874-875. What Lewis meant by the term photon was quite different from our usage.
- [22] Modern Physics for Scientist and Engineers; S. T. Thornton, A. Rex; Cengage Learning; Fourth Edition; United States of America, 2013.
- [23] Introduction to Electrodynamics; David J. Griffiths; Prentice Hall; Third Edition; United States of America, 1999.
- [24] Quantum Mechanics; Bruce Cameron Reed; Jones and Bartlett Publishers; 1st. ed.; United States of America, 2008.
- [25] Modern Physics for Scientist and Engineers; John C. Morrison; Academic Press; Second Edition; USA, 2010.
- [26] Physics for Scientist and Engineers with Modern Physics; R. A. Serway, J. W. Jewett, Jr.; Brooks/Cole Cengage Learning; Ninth Edition; United States of America, 2014.
- [27] Physics for Scientist and Engineers with Modern Physics; P. M. Fishbane, S. G. Gasiorowicz, S. T. Thornton; Pearson Prentice Hall; Third Edition; United States of America, 2005.

[28] Fundamentos de Física Moderna; Robert M. Eisberg; Limusa Noriega Editores;
Versión en español, Octava reimpresión; México, 2000.