



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

EL TEOREMA DE JORDAN-SCHOENFLIES PARA SUPERFICIES NO
MÉTRICAS Y APLICACIONES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
MARÍA EUGENIA MONTOYA NAVA

DIRECTOR
DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D. F. FEBRERO DE 2016.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Teorema de Jordan-Schoenflies para \mathbb{R}^2	1
1.1. Algunos resultados topológicos.	1
1.2. Algunos resultados básicos de gráficas.	2
1.3. Resultados sobre curvas poligonales.	4
1.4. Teorema de la curva de Jordan.	9
1.5. El Teorema de Jordan-Schoenflies.	14
2. Teorema de Schoenflies para superficies no métricas.	19
2.1. Aproximación geométrica.	19
2.2. Teorema de Jordan para superficies no métricas.	24
2.3. Generalización del teorema de Schoenflies para superficies no métricas .	28
2.4. El recíproco del Teorema de Schoenflies para espacios no métricos . . .	32
3. Aplicaciones a sistemas dinámicos.	39
3.1. Breve introducción a los sistemas dinámicos.	39
3.2. Estructura de las superficies ω -acotadas.	43
Referencia Bibliográfica	52

Introducción

El propósito de esta tesis es probar el Teorema de Jordan-Schoenflies en superficies no métricas. En el capítulo 1 nos centramos en abordar la demostración del teorema de Jordan-Schoenflies para \mathbb{R}^2 tomada del artículo [16], para ello hacemos preliminares donde se muestran conceptos y resultados básicos de topología, teoría de gráficas y resultados sobre curvas poligonales, herramientas fundamentales que se usan en las pruebas del Teorema de Jordan, un caso particular del Teorema de Jordan-Schoenflies en el plano. En el capítulo dos centrado en el artículo [2] damos la demostración del teorema de Jordan-Schoenflies para superficies no métricas. Y en el capítulo 3 se dan algunas aplicaciones a sistemas dinámicos del teorema de Jordan-Schoenflies para superficies no métricas centrado en el mismo artículo [2].

Capítulo 1

Teorema de Jordan-Schoenflies para \mathbb{R}^2

1.1. Algunos resultados topológicos.

Iniciamos con algunas definiciones topológicas:

Definición 1.1 Un *arco simple* en un espacio topológico X es la imagen de una función continua $f : [0, 1] \rightarrow \Omega \subseteq X$ inyectiva en $(0, 1)$. Decimos que $f(0)$ y $f(1)$ son los *extremos* del arco y que el arco *une* a $f(0)$ con $f(1)$. Si $f(0) = f(1)$ se denomina *curva cerrada simple*.

Definición 1.2 Decimos que X es *arco-conexo* si cualesquiera dos elementos de X son unidos por un arco simple.

A continuación relacionamos la propiedad de conexidad de un espacio topológico con curvas poligonales.

Lema 1.1 Si Ω es un conjunto abierto conexo en el plano entonces cualesquiera dos puntos en Ω son unidos por un arco poligonal simple en Ω .

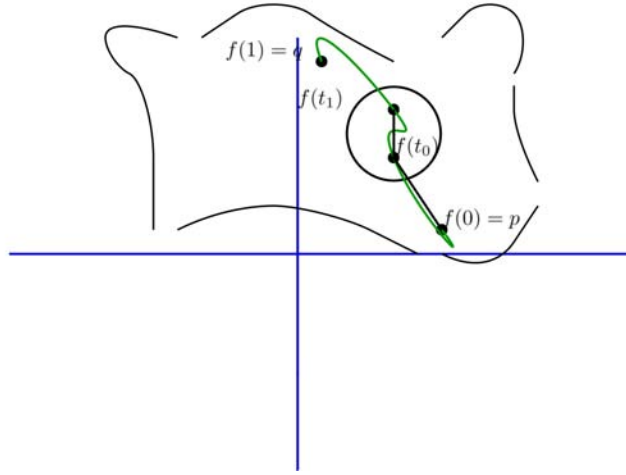
Demostración. Como un conjunto abierto y conexo en \mathbb{R}^2 es arco-conexo, podemos escoger cualesquiera p, q en Ω con $p \neq q$, de donde por hipótesis existe una función $f : [0, 1] \rightarrow \Omega$ continua e inyectiva tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$. Sea

$$A := \{t \in [0, 1] : \text{existe } g : [0, 1] \rightarrow \Omega \text{ arco poligonal tal que } g(0) = p \text{ y } g(1) = f(t)\}.$$

Tenemos que $A \neq \emptyset$ pues para $f(0)$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(f(0))$ está en Ω y puesto que $B_\delta(f(0))$ es convexo la función $g : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dada por $g(t) = f(0)(1 - t) + f(\tilde{t})t$ para algún $\tilde{t} \in [0, 1]$ con $f(\tilde{t}) \in B_\delta(f(0))$, es un segmento lineal de donde g es arco poligonal simple.

Luego como $A \neq \emptyset$, acotado y $A \subset \mathbb{R}$ entonces $\sup A$ existe el cual llamaremos t_0 , si $t_0 = 1$ la prueba finaliza, pero si $t_0 < 1$ entonces existe la función arco poligonal simple $g_{t_0} : [0, 1] \rightarrow \Omega$ tal que $g_{t_0}(0) = p$ y $g_{t_0}(1) = f(t_0)$, luego como Ω es abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(t_0)) \subset \Omega$ y como $B_\epsilon(f(t_0))$ es convexa existe $t_1 > t_0$ tal que $f(t_0)(t-1) + f(t_1)t \in B_\epsilon(f(t_0))$ para todo $t \in [0, 1]$, así $f(t_0)(t-1) + f(t_1)t \in \Omega$, si ahora consideramos

$$g_{t_1}(s) = \begin{cases} g_{t_0}(2s), & \text{si } 0 \leq s < \frac{1}{2}, \\ f(t_0)(2-2s) + f(t_1)(2s-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$



y observamos que claramente g_{t_1} es un arco poligonal simple en Ω tal que $g_{t_1}(0) = g_{t_0}(0) = p$, $g_{t_1}(1) = f(t_0)(0) + f(t_1)(1) = f(t_1)(1) = f(t_1)$, lo que contradice el hecho de que $t_0 = \sup A$. \square

1.2. Algunos resultados básicos de gráficas.

A continuación introducimos el concepto de gráfica, que será una herramienta fundamental para la prueba del Teorema de Jordan y el Teorema de Jordan-Schoenflies.

Definición 1.3 Una **gráfica** G es la unión de dos conjuntos finitos ajenos $V(G)$ y $E(G)$ llamados los **vértices** y las **aristas** respectivamente tal que a cada arista se le asocian dos vértices distintos x y y y llamados los **extremos** de la arista. Denotamos tal arista por xy y decimos que x está **unido** a y . Si más de una arista une a x con y hablamos de **aristas múltiples**.

En este trabajo las gráficas no son de aristas múltiples. Seguimos con definiciones sobre gráficas.

Definición 1.4 Una **trayectoria** es una gráfica con distintos vértices v_1, v_2, \dots, v_n y aristas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$.

Definición 1.5 Un **ciclo** es una trayectoria Γ con número de vértices $n \geq 2$ y adicionando una arista $v_n v_1$.

Denotamos trayectorias y ciclos por $v_1 v_2 \dots v_n$ y será claro en el contexto que los utilizaremos.

Definición 1.6 Si G es una gráfica y $A \subseteq V(G) \cup E(G)$, entonces $G - A$ es la gráfica obtenida desde G eliminando todos los vértices de A y todas las aristas que están en A o **inciden** en un vértice de A .

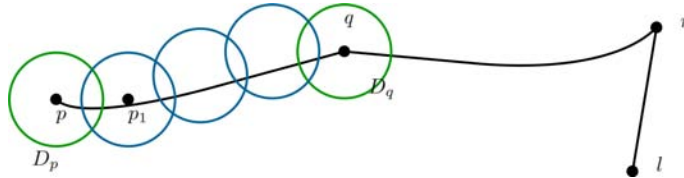
Definición 1.7 Decimos que una gráfica G es **conexa** si para cada par de vértices en G , éstos son unidos por una trayectoria.

Definición 1.8 G es **2-conexa** si G es conexa y para cada vértice v , $G - v$, es decir, $G - \{v\}$ es conexa.

Definición 1.9 Una gráfica G puede ser **encajada** en un espacio topológico X si los vértices de G pueden ser representados por distintos elementos en X y cada arista de G puede ser reemplazada por un arco simple el cual une los dos extremos de tal manera que dos aristas tienen a lo más un extremo en común. Si X es el plano euclidiano \mathbb{R}^2 entonces una gráfica representada en X es una **gráfica plana** y una gráfica abstracta la cual puede ser encajada en \mathbb{R}^2 es una gráfica **aplanable**.

Lema 1.2 Si G es una gráfica aplanable entonces G puede ser encajada en el plano de modo que las aristas sean arcos poligonales simples.

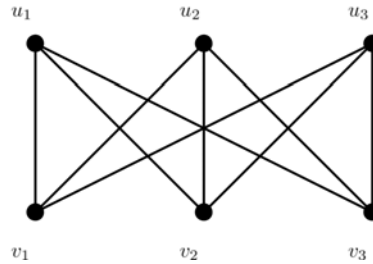
Demostración. Sean Γ una gráfica plana isomorfa a G y pq una arista de Γ .



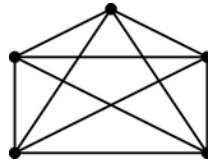
Consideremos los discos D_p y D_q tales que $D_p \cap D_q = \emptyset$, cuya existencia está dada porque \mathbb{R}^2 es un espacio de Hausdorff. Luego, construimos un disco con centro p_1 en $D_p \cap (\Gamma - \{p\})$ tal que $D_p \cap D_{p_1} \neq \emptyset$, repetimos el proceso para D_{p_1} , así sucesivamente construimos un camino de discos hasta intersectar a D_q , cada uno de los cuales tiene radio menor que el radio de D_p y D_q . Ahora sea $\Omega := D_p \cup (\bigcup_{i=1}^n D_{p_i}) \cup D_q$ el cual es abierto; además cada disco es arco-conexo y como la intersección de dos discos seguidos es no vacía, su unión de nuevo es arco-conexo. Aplicando el Lema 1.1 tenemos la existencia de un arco poligonal que une a p y q . \square

Definición 1.10 Una **subdivisión** de una gráfica G es una gráfica obtenida por inserción de vértices sobre las aristas. Más precisamente algunas o todas las aristas de G son reemplazadas por trayectorias con los mismos extremos.

En este trabajo hacemos uso sin demostrar del teorema de Kuratowski el cual dice que una gráfica no es aplanable si y sólo si contiene una subdivisión de una gráfica de Kuratowski $K_{3,3}$ o K_5 . En este trabajo sólo usamos el resultado para $K_{3,3}$ la cual es la gráfica con 6 vértices $v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3$ y las 9 aristas $v_i u_j$ con $1 \leq i \leq 3$ y $1 \leq j \leq 3$. Su gráfica es:



Y la gráfica de K_5 es:

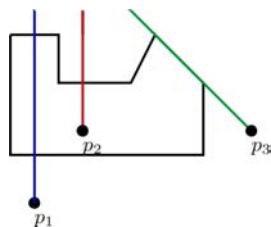


1.3. Resultados sobre curvas poligonales.

Una definición importante para la prueba de algunos resultados sobre curvas poligonales es la de paridad de un punto respecto a una curva, que se da a continuación.

Definición 1.11 Sea C una curva poligonal cerrada y simple en el plano con un número finito de aristas y p un punto en $\mathbb{R}^2 - C$. Sea L una semirrecta que inicia en p , la intersección $L \cap C$ es un número finito de intervalos algunos de los cuales pueden ser puntos. Consideremos Q como uno de los intervalos. Si C entra y sale de Q sobre un mismo segmento de la semirrecta L decimos que C toca a L en Q , en otro caso decimos que C cruza a L en Q . Definimos la **paridad** de p con respecto a L como el número de veces que C cruza a L en Q módulo 2.

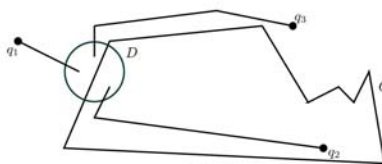
Un ejemplo de la anterior definición es la siguiente gráfica, donde p_1 tiene paridad cero, p_2 tiene paridad uno y p_3 tiene paridad cero.



Definición 1.12 Una *región* de un conjunto abierto en el plano es un subconjunto conexo máximo.

Lema 1.3 Si C es una curva poligonal cerrada simple en el plano, entonces $\mathbb{R}^2 - C$ tiene precisamente dos regiones cada una de las cuales tiene a C como frontera.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{R}^2 - C$ tuviera más de dos regiones, por lo que existirían puntos q_1, q_2 y q_3 de \mathbb{R}^2 en regiones distintas de $\mathbb{R}^2 - C$. Sea D un disco tal que $D \cap C$ es un segmento lineal de recta (digamos, es diámetro) y el radio de D sea lo suficientemente pequeño tal que D sólo interseca a una arista abierta de C . Para cada uno de los puntos q_1, q_2 y q_3 trazamos arcos poligonales paralelos a la curva C hasta intersectar a una de las dos regiones geométricas de D , determinadas por su diámetro. Ahora como el disco D es convexo, podemos unir los extremos de esos dos arcos poligonales simples. Así tenemos que q_1 y q_2 están unidos por un arco poligonal en, digamos, $\mathbb{R}^2 - C$, lo que contradice la suposición.



Ahora miremos que $\mathbb{R}^2 - C$ es inconexo. En efecto, para ello consideremos un círculo que contenga a C , que existe ya que C es acotado. Ahora tomemos un punto q fuera del círculo y una semirrecta L que parte de q y no intersecta al círculo, por lo cual tampoco intersecta a C de este modo tenemos que la paridad de q es cero.

Por otro lado tomemos un punto p arbitrario que no esté en C , sea q un vértice de C cuya distancia a p es máxima y sea L la semirrecta a partir de p que pasa por q . Si q es un punto aislado de la intersección $L \cap C$, esto es, $L \cap C = q$ tomamos un punto r sobre la semirrecta L de tal manera que si tomamos un $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño y $r \in B_\delta(q)$ tal que no hay más puntos de C en $L \cap B_\delta(q) - \{q\}$ entonces la semirrecta que tiene origen en r y que pasa por q intersecta la curva C en un sólo punto (q). Por lo tanto r tiene paridad uno. Ver figura 1.1.

En el caso que el punto q no sea aislado entonces contiene a una arista de C . Luego tomamos $\theta' = \min\{\theta(v, L) : v \notin L, v \in V(C)\}$ donde $\theta(v, L)$ es el ángulo medido desde L hasta la recta que tiene origen en el punto inicial de L y que pasa por v . Trazamos la

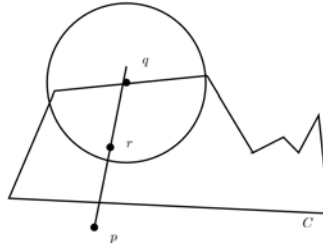
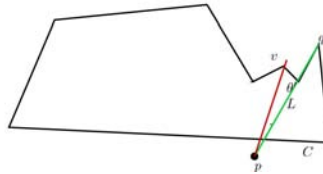


Figura 1.1:

semirrecta L' con punto inicial p y con ángulo θ' y que pasa por el vértice v con el que se obtiene θ' .



Entonces trazamos la bisectriz y aseguramos que su punto máximo con C es aislado pues no es vértice esto debido a la elección de L' . \square

Lema 1.4 *Dos puntos con distinta paridad están en distintas regiones.*

Demostración. Supongamos que hay dos puntos p_1 y p_2 en $\mathbb{R}^2 - C$ tales que p_1 tiene paridad cero y p_2 tiene paridad uno, si los dos puntos están sobre una misma región existe un arco poligonal P que los une, pero entonces tendríamos que existe un p tal que los puntos predecesores de p tendrían paridad cero y los sucesores tendrían paridad uno pero esto significa que p está sobre C contradiciendo que P esté en una región de $\mathbb{R}^2 - C$. \square

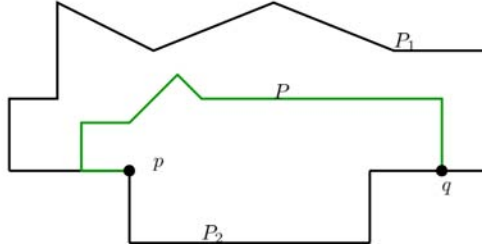
Así tenemos que hay dos regiones, una es formada por los puntos que tienen paridad cero y la otra formada por los puntos de paridad uno. Esto lo aclara la siguiente definición.

Definición 1.13 *La región no acotada del complemento de una curva cerrada C es llamada el exterior de C y es denotado por $\text{ext}(C)$. La unión de todas las otras regiones es el interior de C y es denotado por $\text{int}(C)$. Además escribimos $\overline{\text{int}}(C) = C \cup \text{int}(C)$ y $\overline{\text{ext}}(C) = C \cup \text{ext}(C)$.*

Lema 1.5 *Sea C una curva poligonal cerrada, simple y P un arco poligonal simple en $\overline{\text{int}}(C)$ tal que P une a p y q sobre C y no tiene otro punto en común con C . Sean P_1*

y P_2 los dos arcos sobre C desde p a q . Entonces $\mathbb{R}^2 - (C \cup P)$ tiene precisamente tres regiones cuyas fronteras son C , $P_1 \cup P$, $P_2 \cup P$, respectivamente.

Demostración. Para mayor claridad consideremos la gráfica



Por el Lema 1.3 $ext(C)$ es una región y para comprobar que $int(C) - P$ tiene dos regiones demostraremos que la pareja $(int(P \cup P_1), int(P \cup P_2))$ es una desconexión de $U = int(C) - P$.

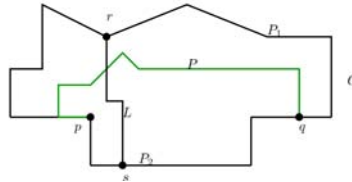
En primer lugar $U \subset int(P \cup P_1) \cup int(P \cup P_2)$. En efecto, sea $x \in U$ entonces $x \in int(C)$ y $x \notin P$ luego existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset int(C)$ y $x \notin P$. Sea $\delta' = \frac{\min\{\delta, d(x, P)\}}{2}$ entonces $B_{\delta'}(x) \subset int(P \cup P_1)$ o $B_{\delta'}(x) \subset int(P \cup P_2)$. Así $x \in int(P \cup P_1)$ o $x \in int(P \cup P_2)$.

En segundo lugar $int(P \cup P_1) \cap U \neq \emptyset$ e $int(P \cup P_2) \cap U \neq \emptyset$. Como $P - \{p, q\} \subset int(C)$ entonces si $x \in P - \{p, q\}$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset C$. Ahora sean L_1 y L_2 dos segmentos lineales que se cruzan tales que L_1 es un segmento de P , $L_1 \subset B_\delta(x)$, $L_2 \subset B_\delta(x)$ y $L_1 \cap L_2 = L_2 \cap (C \cup P)$, entonces por la construcción de L_2 tenemos que sus extremos están en $int(C)$ y por la prueba del Lema 1.3 estos tienen paridad distinta, esto es, en regiones distintas de $\mathbb{R}^2 - (P \cup P_1)$ así tenemos que cada extremo hace parte de $int(P \cup P_1) \cap U \neq \emptyset$ o $int(P \cup P_2) \cap U \neq \emptyset$, respectivamente.

En tercer lugar $int(P \cup P_1) \cap int(P \cup P_2) \cap U = \emptyset$. Desarrollando las intersecciones tenemos $P \cap (int(C) - P)$ pero esto es vacío. \square

Corolario 1.1 Si r y s son puntos en $P_1 - \{p, q\}$ y $P_2 - \{p, q\}$, respectivamente, entonces no es posible unir r y s por un arco poligonal simple en $int(C)$ sin cortar a P .

Demostración.



Si existe la poligonal L que une a r y s en $int(C)$ tenemos que todos los puntos de L respecto a C tienen la misma paridad como se hizo en la prueba del Lema 1.3, pero

respecto a $P \cup P_2$ hay distintos puntos con paridad distinta porque r está en $\text{ext}(P \cup P_2)$ y s está en $\overline{\text{int}}(P \cup P_2)$ de donde L está incluida en dos regiones distintas de $P \cup P_2$ por tanto corta a P porque $L \subset \overline{\text{int}}(C)$. \square

Lema 1.6 *Sea C una curva poligonal cerrada, simple y P un arco poligonal simple en $\overline{\text{ext}}(C)$ tal que P une a p y q sobre C y no tiene otro punto en común con C . Sean P_1 y P_2 los dos arcos sobre C desde p a q . Entonces $\mathbb{R}^2 - (C \cup P)$ tiene precisamente tres regiones cuyas fronteras son C , $P_1 \cup P$, $P_2 \cup P$, respectivamente.*

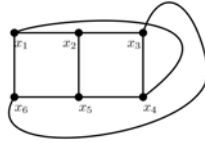
Demostración. Si intercambiamos P con P_1 ó P_2 (el que esté en $\text{int}(P \cup P_1)$ ó $\text{int}(P \cup P_2)$ respectivamente) entonces podemos hacer la misma prueba que para el Lema 1.5. \square

Corolario 1.2 *Si r y s son puntos en $P_1 - \{p, q\}$ y $P_2 - \{p, q\}$ respectivamente entonces no es posible unir r y s por un arco poligonal simple en $\overline{\text{ext}}(C)$ sin cortar a P .*

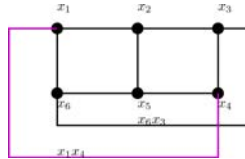
Demostración. De manera análoga a la prueba del Corolario 1.1. \square

Lema 1.7 $K_{3,3}$ no es aplanable.

Demostración. Mediante un isomorfismo $K_{3,3}$ puede verse como un ciclo $c : x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ con tres cuerdas x_1x_4 , x_2x_5 y x_3x_6 .



Supongamos que $K_{3,3}$ es aplanable entonces por Lema 1.2 tenemos un dibujo plano tal que todas las aristas son arcos poligonales simples, de donde C puede ser una curva



poligonal cerrada luego por Lema 1.3 tenemos que C divide al plano con dos regiones: $\text{ext}(C)$ e $\text{int}(C)$ así dos de las cuerdas x_1x_4 , x_2x_5 o x_3x_6 pueden estar en $\overline{\text{int}}(C)$ o $\overline{\text{ext}}(C)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que x_1x_4 y x_3x_6 están en $\overline{\text{ext}}(C)$ luego por el Corolario 1.2 haciendo $P = x_3x_6$, $P_1 = x_3x_2x_1x_6$ y $P_2 = x_6x_5x_4x_3$ tenemos que x_1 está en $P_1 - \{x_3, x_6\}$ y x_4 está en $P_2 - \{x_3, x_6\}$, x_1x_4 en $\overline{\text{ext}}(C)$ y como supusimos a $K_{3,3}$ aplanable tenemos que $x_1x_4 \cap x_6x_3 = \emptyset$ lo cual es una contradicción con el Corolario 1.2. De igual manera si dos de los lados están en $\overline{\text{int}}(C)$ llegamos a una contradicción con el Corolario 1.1. \square

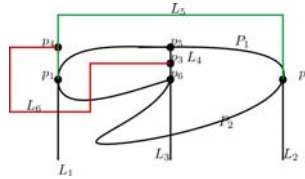
1.4. Teorema de la curva de Jordan.

En esta sección generalizamos los resultados vistos de curvas poligonales simples a curvas cerradas simples y demostramos el Teorema de la curva de Jordan.

Proposición 1.1 *Si C es una curva cerrada simple en el plano, entonces $\mathbb{R}^2 - C$ es inconexo.*

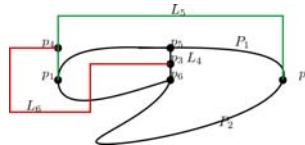
Demostración. Demostraremos que $\mathbb{R}^2 - C = ext(C) \cup int(C)$, es decir, es una unión ajena de conjuntos abiertos. Veamos que $ext(C) \neq \emptyset$. Esto lo tenemos porque C lo podemos acotar con un disco, D , de radio r y centro a . Si $x \in \mathbb{R}^2$ es tal que $d(x, a) > r$, entonces $x \in \mathbb{R}^2 - D \subset ext(C)$ por lo que $ext(C) \neq \emptyset$.

Ahora miremos que $int(C) \neq \emptyset$. Supongamos que L_1 y L_2 son dos rectas verticales en el plano tales que se intersecan con C , y C está en medio de estas rectas, como lo muestra la figura:



Puesto que C es compacto y tanto L_1 como L_2 son cerrados entonces $L_1 \cap C \neq \emptyset$ y $L_2 \cap C \neq \emptyset$ son compactos no vacíos, por lo que existen puntos p_1 en $L_1 \cap C$ y p_2 en $L_2 \cap C$ con ordenada máxima. Denotemos con P_1 una de las porciones de la curva C que une a p_1 con p_2 y con P_2 la otra. Escogemos L_3 como una recta vertical entre L_1 y L_2 . Luego $P_1 \cap L_3$ es compacta distinta de vacío y $P_2 \cap C$ es compacto, además como $P_1 \cap L_3 \cap P_2 \cap L_3 = \emptyset$ entonces L_3 contiene un intervalo L_4 que une a P_1 con P_2 y sólo tiene extremos en común con C . Sea L_5 un arco poligonal que une a p_1 con p_2 . Si L_4 está en $\overline{ext}(C)$ entonces existe un arco poligonal L_6 que une a L_4 con L_5 porque dado cualquier dos puntos en $\overline{ext}(C)$ siempre se pueden comunicar por un arco poligonal pero entonces $C \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6$ es una gráfica aplanable isomorfa a $K_{3,3}$ puesto que p_1 se une con p_5 mediante una porción de la curva de P_1 , luego p_1 con p_6 mediante una porción de la curva de P_2 , y p_1 se une con p_4 mediante un segmento de L_5 . Ahora observemos que p_2 se une con p_5, p_4 y p_6 mediante las aristas: una porción de curva de P_1 , una porción de la curva de L_5 y una porción de la curva de P_2 respectivamente. Por último el punto p_3 se une con los puntos p_4 mediante L_6 , se une con p_6 mediante un segmento de L_4 y p_5 mediante un segmento de L_4 contradiciendo el Lema 1.7. Por tanto el punto medio de L_4 está en $int(C)$, así $int(C) \neq \emptyset$.

Observemos la figura:



□

Deseamos usar la no aplanabilidad de $K_{3,3}$ para mostrar que $\text{int}(C)$ es una sola región, para esto necesitamos algunos resultados de la teoría de gráficas y la siguiente definición.

Definición 1.14 Si S es un conjunto, entonces $|S|$ denotará su **cardinalidad**.

Lema 1.8 Si G es una gráfica 2-conexa y H es una subgráfica 2-conexa de G , entonces G puede ser obtenida desde H adicionando trayectorias tales que cada una de ellas une vértices en H y tiene los otros vértices fuera de H .

Demostración. La prueba la realizamos por inducción sobre el número de aristas en $E(G) - E(H)$. Si el número es cero, esto es, $G = H$, no hay nada que probar. Supongamos que $G \neq H$. Por hipótesis de inducción, el Lema 1.8 se tiene cuando la pareja G, H es reemplazada por otra pareja G', H' tal que $E(G') - E(H')$ tiene menos aristas que $E(G) - E(H)$. Ahora sea H' una subgráfica propia máxima 2-conexa de G que contiene a H . Si $H' \neq H$ aplicamos la hipótesis de inducción a H, H' y a G, H' . Supongamos que $H = H'$. Puesto que G es conexa, hay una arista x_1x_2 en $E(G) - E(H)$ tal que x_1 está en H . Puesto que $G - x_1$ es conexo, tenemos una trayectoria $P : x_2x_3 \cdots x_k$ tal que x_k está en H y todo $x_i, 2 \leq i < k$, no están en H . Posiblemente $k = 2$. Puesto que $H \cup P \cup \{x_1, x_2\}$ es 2-conexa, tenemos que $H \cup P \cup \{x_1, x_2\} = G$ y completamos la prueba. □

Lema 1.9 Si Γ es una gráfica aplanable 2-conexa con al menos tres vértices cuyas aristas son arcos poligonales simples, entonces $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ tiene $|E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 2$ regiones cada una de las cuales tiene un ciclo de Γ como frontera.

Demostración. Como Γ es 2-conexa existe al menos un ciclo C en Γ , si $\Gamma = C$ entonces Γ es una curva poligonal cerrada y simple de donde por el Lema 1.3 y la Proposición 1.1 se tiene que $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ tiene dos regiones, una acotada por Γ y al ser Γ un ciclo implica que $|E(\Gamma)| = |V(\Gamma)|$ así $2 = |E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 2$.

En otro caso, si $\Gamma \neq C$ y como C es una subgráfica 2-conexa de Γ entonces por el Lema 1.8 tenemos que Γ puede ser obtenida de C adicionando trayectorias tales que cada una de estas trayectorias une vértices distintos en C con vértices fuera C .

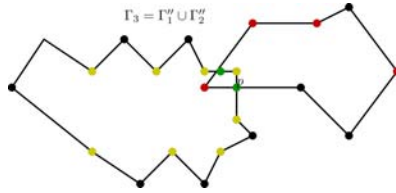
Ahora miremos un vértice adyacente a x_0 en $G - x_0$ llamémoslo x_1 , hacemos una trayectoria desde x_1 hasta otro vértice adyacente a x_0 llamémoslo x_2 el cual existe porque G tiene al menos tres vértices, luego al ser $G - x_0$ conexo trazamos una trayectoria simple de lo contrario eliminamos el ciclo que se va formando ignorando las aristas que no necesitamos. Cada trayectoria es adicionada en una región. La región es acotada por un ciclo y ahora aplicamos el Lema 1.5 el cual nos muestra que el número de regiones es creciente por 1 cuando una región es subdividida. □

Definición 1.15 Para una gráfica plana Γ , las regiones de $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ serán llamadas **caras** de Γ . La cara no acotada es la **cara externa** y si Γ es 2-conexa entonces la frontera de la cara externa es el **ciclo externo**.

Definición 1.16 Sean G_1 y G_2 gráficas abstractas que tienen por conjuntos de vértices ajenos a $V(G_1)$ y $V(G_2)$, respectivamente, y por conjuntos de aristas a $E(G_1)$ y $E(G_2)$ respectivamente. La **unión** $G = G_1 \cup G_2$ tiene por conjunto de vértices $V = V(G_1) \cup V(G_2)$ y por conjunto de aristas a $E = E(G_1) \cup E(G_2)$. Para gráficas planas usaremos un tipo diferente de unión.

Lema 1.10 Si Γ_1 y Γ_2 son dos gráficas aplanables tales que cada arista es un arco poligonal simple, entonces la unión de Γ_1 y Γ_2 es una gráfica Γ_3 .

Demostración. Consideremos las subdivisiones de Γ_i denotadas por Γ'_i para $i = 1, 2$. las cuales son gráficas aplanables y cada arista de Γ'_i es un segmento lineal.

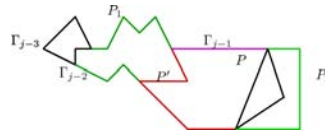


Sea Γ''_i la subdivisión de Γ'_i tal que un punto p sobre una arista a de Γ'_i es un vértice de Γ''_i , si p es un vértice de $\Gamma_{3-i} = \begin{cases} \Gamma'_1, & \text{si } i = 2, \\ \Gamma'_2, & \text{si } i = 1 \end{cases}$ o p es una arista de $\Gamma'_{3-i} = \begin{cases} \Gamma'_1, & \text{si } i = 2, \\ \Gamma'_2, & \text{si } i = 1 \end{cases}$ que cruza a a entonces la unión usual de las gráficas Γ''_1 y Γ''_2 juega el papel de Γ_3 . □

Lema 1.11 Sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ gráficas aplanables 2-conexas cuyas aristas son arcos poligonales simples tales que Γ_i tiene al menos dos puntos en común con cada Γ_{i-1} y Γ_{i+1} y no tiene otro punto en común con ninguna otra Γ_j ($i = 2, 3, \dots, k-1$). Suponga también que $\Gamma_1 \cap \Gamma_k = \emptyset$. Entonces cualquier punto el cual está en la cara externa de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \dots, \Gamma_{k-1} \cup \Gamma_k$ está también en la cara externa de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$.

Demostración. Supongamos por el contrario, que p es un punto en una cara acotada de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$ y como la gráfica es 2-conexa se sigue del Lema 1.9 que hay un ciclo C en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$ tal que p está en $int(C)$.

Escojamos C tal que C esté en $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1} \cup \dots \cup \Gamma_j$ y tal que $j - i$ es mínimo, deseamos mostrar que $j - i \leq 1$, supongamos que $j - i \geq 2$.



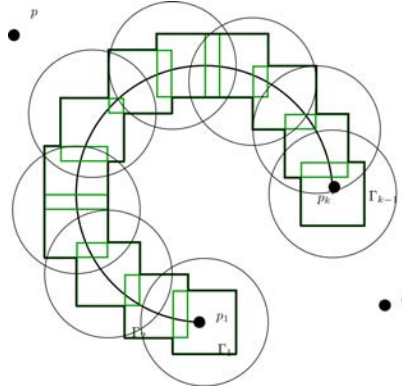
Entre todos los ciclos en $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1} \cup \dots \cup \Gamma_j$ que tienen a p en el interior. Supongamos que C es escogida tal que el número de aristas en C y no en Γ_{j-1} es mínimo.

Puesto que C interseca a Γ_j y Γ_{j-2} entonces C tiene al menos dos segmentos máximos en Γ_{j-1} . Sea P uno de estos; sea P' la trayectoria más corta en Γ_{j-1} desde P hasta

$C - V(P)$ también tenemos que $P' \not\subseteq C$, P' existe de lo contrario $C = \Gamma_{j-1}$ o C no sería ciclo. Los extremos de P' dividen a C en arcos P_1 y P_2 cada uno de los cuales no contiene segmentos en Γ_{j-1} . $P \subset C$ puesto que $P' \cup P_1$ es un ciclo P_1, P_2 son descomposiciones del ciclo. Uno de los ciclos $P' \cup P_1$ y $P' \cup P_2$ contiene a p en su interior tiene menos aristas que no están en Γ_{j-1} , esto contradice la minimalidad de C así un mínimo C no vive en una unión mínima $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1} \cup \dots \cup \Gamma_j$ con $i \leq j - 2$. \square

Proposición 1.2 *Si P es un arco simple en el plano, entonces $\mathbb{R}^2 - P$ es conexo.*

Demostración. Sean p, q dos puntos en $\mathbb{R}^2 - P$. Si el segmento que une a p y q no corta a P ya tendríamos el arco poligonal que los une, en caso contrario consideremos un número positivo d tal que cada p, q tiene distancia mayor a $3d$ desde P . Puesto que P es la imagen de una función continua sobre un compacto, esto es uniformemente continua podemos particionar P en segmentos P_1, P_2, \dots, P_k tal que P_i une p_i con p_{i+1} para $i = 1, 2, \dots, k$ y tal que cada punto sobre P_i tiene distancia menor que d a p_i ($i = 1, 2, \dots, k - 1$). Sea d' la mínima distancia entre P_i y P_j $1 \leq i \leq j - 2 \leq k - 2$. Note que $d' \leq d$. Para cada $i = 1, 2, \dots, k$. Luego, particionamos P_i en segmentos $P_{i,1}, P_{i,2}, \dots, P_{i,k_i}$ tal que $P_{i,j}$ une $p_{i,j}$ con $p_{i,j+1}$ para $j = 1, 2, \dots, k_i - 1$ y tal que cada punto sobre $P_{i,j}$ tiene distancia menor que $\frac{d'}{4}$ a $p_{i,j}$ y sea Γ_i la gráfica que es unión de las fronteras de los cuadrados consistentes de segmentos lineales horizontales y verticales de longitud $\frac{d'}{2}$ y tienen los puntos $p_{i,j}$ como puntos medios. Entonces las graficas $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$ satisfacen la hipótesis del Lema 1.11.



Podemos ver que p y q están por fuera de todas las circunferencias de radio; $3d$ y centro p_i mientras $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}$ esta totalmente contenida en el disco entonces p y q están en la cara externa de $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}$ por Lema 1.11 tenemos que p y q están en la cara externa y como P no interseca la cara, tenemos que p y q pueden ser unidos por un arco poligonal simple ajeno de P . \square

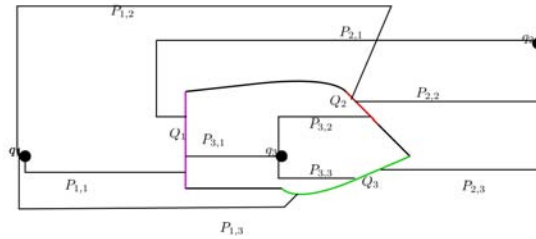
Definición 1.17 *Si C es un subconjunto cerrado del plano y Ω es una región de $\mathbb{R}^2 - C$, entonces un punto p en C es **accesible** desde Ω si para algún (y por tanto para todo) punto q en Ω , existe un arco poligonal simple desde q hasta p que tienen sólo p en común con C .*

Observación 1.1 Si C es una curva cerrada simple, entonces p no necesariamente es accesible desde Ω .

Observación 1.2 Si C es una curva cerrada simple y P es cualquier arco de C conteniendo a p , entonces la Proposición 1.2 implica que $\mathbb{R}^2 - (C - P)$ es conexo y por tanto contiene un arco poligonal simple P' desde p a una región de $\mathbb{R}^2 - C$ distinta desde Ω . Entonces P' interseca a C en un punto sobre P puesto que p puede ser escogido arbitrariamente concluimos que los puntos sobre C accesibles desde Ω son densos sobre C .

Teorema 1.1 (El teorema de la curva de Jordan.) Si C es una curva cerrada simple en el plano, entonces $\mathbb{R}^2 - C$ tiene precisamente dos regiones, cada una de las cuales tiene a C como frontera.

Demostración. Supongamos que q_1, q_2 y q_3 son puntos en distintas regiones Ω_1, Ω_2 y Ω_3 de \mathbb{R}^2 . Sean Q_1, Q_2 y Q_3 segmentos de C ajenos por pares por la Observación 1.2 tenemos que Ω_i tiene un arco poligonal $P_{i,j}$ desde q_i a Q_j para $i, j = 1, 2, 3$. Podemos suponer que $P_{i,j} \cap P_{i,j'} = \{q_i\}$ para $j \neq j'$.



Claramente $P_{i,j} \cap P_{i',j'} = \emptyset$ cuando $i \neq i'$ pues se supone que son tres regiones distintas; si su intersección fuera distinta de vacío habría una contradicción pues podría conectar dos puntos distintos en distintas regiones por medio de un arco poligonal. Entonces se genera una subgráfica que es isomorfa a $K_{3,3}$ esto contradice la no planaridad de $K_{3,3}$. Así $\mathbb{R}^2 - C$ tiene precisamente dos regiones $int(C)$ y $ext(C)$. La Proposición 1.2 implica que cada punto de C es un punto frontera de $ext(C)$ e $int(C)$. \square

El Teorema de la curva de Jordan es un caso especial del Teorema de Jordan-Schoenflies el cual probaremos en la próxima sección, para esto generalizamos algunos de los resultados anteriores.

Lema 1.12 Sea C una curva cerrada simple y P un arco poligonal simple en $int(C)$ tal que P une a p y q sobre C y no tiene otro punto en común con C . Sean P_1 y P_2 los arcos sobre C desde p a q . Entonces $\mathbb{R}^2 - (C \cup P)$ tiene precisamente tres regiones cuyas fronteras son $C, P_1 \cup P$ y $P \cup P_2$ respectivamente.

Demostración. De manera análoga que en la prueba del Lema 1.5, la parte no trivial es probar que $\overline{int(C)}$ es particionado en al menos dos regiones. Si los extremos de L_2 (definida como en la prueba del Lema 1.5) están en la misma región de $\mathbb{R}^2 - (P \cup C)$ entonces la región contiene un arco poligonal P_3 tal que $P_3 \cup L_2$ es una curva poligonal cerrada y simple.

Por la prueba del Lema 1.3, los extremos de L_1 están en distintas regiones de $\mathbb{R}^2 - (P_3 \cup L_2)$. Pero ellos también están en la misma región $\mathbb{R}^2 - (P_3 \cup L_2)$ porque son unidos por un arco simple en PUC que no interseca $P_3 \cup L_2$, esta contradicción prueba el lema. \square

Lema 1.13 *Si Γ es una gráfica plana 2-conexa que contiene un ciclo C (el cual es una curva cerrada simple) tal que todas las aristas en $\Gamma - C$ son arcos poligonales simples en $\overline{int}(C)$ entonces $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ tiene $|E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 2$ regiones cada una de las cuales tiene un ciclo de Γ como frontera.*

Demostración. Se puede demostrar de igual manera que en el Lema 1.9 solamente reemplazamos el Lema 1.5 por el Lema 1.12. \square

1.5. El Teorema de Jordan-Schoenflies.

Definición 1.18 *Si C y C' son curvas cerradas simples y Γ y Γ' son gráficas 2-conexas que consisten en C (ó en C') y son un arco poligonal simple en $\overline{int}(C)$ (ó en $\overline{int}(C')$) entonces Γ y Γ' son llamadas **plano-isomorfas** si existe un isomorfismo de Γ a Γ' tal que un ciclo en Γ delimita una región acotada de Γ si y sólo si la imagen del ciclo delimita una región acotada de Γ' y es tal que el ciclo externo de Γ es aplicado en el ciclo externo de Γ' .*

Teorema 1.2 (Teorema de Jordan-Schoenflies.) *Si f es un homeomorfismo de una curva cerrada simple C en \mathbb{R}^2 sobre otra curva cerrada simple C' en \mathbb{R}^2 entonces f puede extenderse a un homeomorfismo del plano.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que C' es un polígono convexo (dividimos por la curva en partes iguales, cada una de las divisiones se linealiza, para hacerse homeomorfa a un polígono). La prueba la realizamos en los siguientes casos:

- (I) f puede ser extendida a un homeomorfismo de $\overline{int}(C)$ a $\overline{int}(C')$. Para verificar esta afirmación consideremos. Sea $A \subseteq C$ un subconjunto denso, numerable de puntos accesibles desde $int(C)$ digamos $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ y sea $B \subseteq int(C)$ denso numerable (por ejemplo, los puntos en $int(C)$ de coordenadas racionales) notemos $B = \{b_1, b_2, \dots\}$. Consideremos la sucesión de puntos $p_1 = a_1, p_2 = b_1, p_3 = a_1, p_4 = a_2, p_5 = b_1, p_6 = b_2, p_7 = a_1, p_8 = a_2, p_9 = a_3, p_{10} = b_1, p_{11} = b_2, p_{12} = b_3, \dots$ en $A \cup B$ donde cada punto se repite infinitamente en la sucesión. Sea Γ_0 la gráfica 2-conexa que consta de C y arcos poligonales simples definidos como sigue: Sean a_1, a_2 puntos de A entonces existen puntos q_1 y q_2 en $int(C)$ tal que hay un arco poligonal simple de q_1 a a_1 y otra arco poligonal simple de q_2 a a_2 , luego trazamos en $int(C)$ un arco poligonal de q_1 a q_2 esta no necesariamente es simple y lo que hacemos es contraer los ciclos a un punto para que la arco poligonal sea simple. Ahora sea Γ'_0 una gráfica 2-conexa que consta de C y de un segmento de $f(a_1)$ a

un punto r en el $\text{int}(C)$ y otro segmento de r a $f(a_2)$ y enviamos el arco poligonal de $a_1q_1q_2a_2$ a $f(a_1)rf(a_2)$, así Γ_0 y Γ'_0 son plano isomorfas por construcción.

Supongamos que ya hemos definido las gráficas 2-conexas $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}, \Gamma'_0, \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{n-1}$ plano isomorfas con isomorfismo g_0, g_1, \dots, g_{n-1} , donde Γ_i es una extensión de una subdivisión de Γ_{i-1} (respectivamente Γ'_i es una extensión de una subdivisión de Γ'_{i-1}), g_i coincidiendo con g_{i-1} sobre $V(\Gamma_{i-1})$. Además $\Gamma_i - C$ conexa (resp. $\Gamma'_i - C'$ conexa) Entonces definimos Γ_n, Γ'_n y g_n como sigue:

- (i) Si p_n está en A , entonces sea P un arco poligonal simple desde p_n a un punto q_n de $\Gamma_{n-1} - C$ tal que $\Gamma_{n-1} \cap P = \{p_n, q_n\}$; puede ser un segmento de p_n a q_n . Supongamos que Γ_n es la gráfica $\Gamma_{n-1} \cup P$ por el Lema 1.13 tenemos que P es dibujado en una región de Γ_{n-1} y es acotado por un ciclo S . Adicionamos a Γ'_{n-1} un arco poligonal simple P' en la región acotada por $g_{n-1}(S)$; tal que P' une $f(p_n)$ con $g_{n-1}(q_n)$ (si q_n es un vértice de Γ_{n-1}) o un punto sobre $g_{n-1}(a)$ (si a es una arista de Γ_{n-1} que contiene a q_n .) Entonces definimos $\Gamma'_n := \Gamma'_{n-1} \cup P'$ y el isomorfismo plano g_n de Γ_n a Γ'_n de manera obvia, se envía P en P' y $f(q_n) = g_{n-1}(q_n) = g_n(q_n)$.
- (ii) Si p_n está en B , entonces consideramos el cuadrado más grande en $\text{int}(C)$ con lados paralelos a los ejes y el cual tiene a p_n como centro. Eliminamos los lados porque pueden contener infinitos puntos de C , dibujamos un nuevo cuadrado con lados verticales y horizontales cada uno de los cuales tiene distancia $< \frac{1}{n}$ a los lados del primer cuadrado y dentro del nuevo cuadrado dibujamos otros segmentos verticales y horizontales tales que p_n está en un segmento horizontal y el otro vertical y tales que todas las regiones del cuadrado tengan diámetro menor que $\frac{1}{n}$. Sea H_n la unión de Γ_{n-1} y los nuevos segmentos lineales horizontal y vertical posiblemente junto con un arco poligonal en $\text{int}(C')$ para que H_n y $H_n - C$ sean 2-conexas.

Por el Lema 1.8, H_n puede ser obtenida desde Γ_{n-1} por adiciones de trayectorias poligonales en las regiones. De manera similar adicionamos trayectorias correspondientes a Γ'_{n-1} y obtenemos una gráfica H'_n la cual es plano-isomorfa a H_n .

Ahora adicionamos líneas horizontales y verticales en $\text{int}(C')$ a H'_n tal modo que resulte una gráfica que no tiene regiones de diámetro mayor o igual a $\frac{1}{2n}$. Si es necesario, desplazamos algunas de las líneas tales que ellas intersecan a C' sólo en $f(A)$, las regiones acotadas tienen diámetro menor que $\frac{1}{n}$ y cada una de las nuevas líneas tiene sólo una intersección finita con H'_n . Así extendemos H'_n a una gráfica que denotamos por Γ'_n . Adicionando arcos poligonales a H_n obtenemos una gráfica Γ_n plano-isomorfa a Γ'_n . Entonces extendemos f de modo que esté definida sobre $C \cup V(\Gamma_n)$ y coincide sobre el isomorfismo plano g_n sobre $V(\Gamma_n)$. Luego cuando extendemos H'_n a Γ'_n y H_n a Γ_n adicionamos suficientes aristas. Por el Lema 1.8 podemos mirarla como la extensión de H'_n a Γ'_n que resulta de una sucesión de extensiones simples, cada una de ellas consistente en la adición de una trayectoria (la

cual en este caso es un segmento lineal recto en una región). Entonces realizamos sucesivamente las correspondientes adiciones en H_n . Notemos que f sólo está definido para el conjunto de vértices, las imágenes de los puntos sobre las aristas adicionadas no se han definido aún; de esta manera extendemos f uno a uno definido sobre $F = C \cup V(\Gamma_0) \cup V(\Gamma_1) \cdots$ y con imagen $F' = C' \cup V(\Gamma'_0) \cup V(\Gamma'_1) \cdots$ estos conjuntos son densos en $\overline{\text{int}}(C)$ e $\overline{\text{int}}(C')$ respectivamente.

Si p es un punto en $\text{int}(C)$ sobre el cual f aún no está definida, entonces consideremos una sucesión q_1, q_2, \dots que converja a p y conste de puntos en $V(\Gamma_0) \cup V(\Gamma_1) \cup \dots$. Deseamos mostrar que la sucesión $f(q_1), f(q_2), \dots$ converge y definir $f(p)$ como su límite. Sea d la distancia de p a C y sea p_n un punto de B de distancia menor a $\frac{d}{3}$ desde p . Entonces p yace dentro del cuadrado más grande en el $\overline{\text{int}}(C)$ y tiene a p_n como punto medio y también yace en el que llamamos nuevo cuadrado si n es suficientemente grande. Por la construcción de Γ_n y Γ'_n , son estas gráficas 2-conexas de donde Γ_n tiene un ciclo S tal que p está en $\text{int}(S)$ y tal que tanto S como $g_n(S)$ están en discos de radio $\frac{1}{n}$. Puesto que f aplica $F \cap \text{int}(S)$ en $\text{int}(g_n(S))$ y $F \cap \overline{\text{ext}}(S)$ en $\overline{\text{ext}}(g_n(S))$ por definición, se sigue, en particular, que la sucesión $f(q_m), f(q_{m+1}), \dots$ yace en $\text{int}(g_n(S))$ para algún m . Dado que n puede ser escogida lo suficientemente grande, $f(q_1), f(q_2), \dots$ es una sucesión de Cauchy por lo tanto convergente, se sigue que f está bien definida. Además usando la notación de arriba, f aplica $\text{int}(S)$ en $\text{int}(g_n(S))$. Por lo tanto f es continua en $\text{int}(C)$.

Puesto que $V(\Gamma'_0) \cup V(\Gamma'_1) \cup \dots$ es denso en $\text{int}(C')$, repitiendo el argumento anterior mostramos que f es suprayectiva, inyectiva y f^{-1} es continua en $\text{int}(C')$.

- (II) f es continua sobre C . Como damos una definición de f en el $\text{int}(C)$, necesitamos demostrar que f aun con la definición de esta extensión es continua. Entonces también f^{-1} es continua puesto que $\overline{\text{int}}(C)$ es compacta. Al ser f continua sobre $\text{int}(C)$ e inyectiva ya podemos decir que f es continua sobre $\overline{\text{int}}(C)$, inyectiva y suprayectiva. En efecto, consideremos la sucesión q_1, q_2, \dots de puntos en $\text{int}(C)$ que converge a q sobre C ; entonces mostremos que $f(q_1), f(q_2), \dots$ converge a $f(q)$. Supongamos que éste no es el caso. Puesto que el $\overline{\text{int}}(C')$ es compacto podemos suponer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = q' \neq f(q).$$

Puesto que f^{-1} es continua sobre $\text{int}(C')$ tenemos que q' debe estar en C' . Puesto que A es denso en C , $f(A)$ es denso en C' dado que f es suprayectiva. Por lo tanto, cada uno de los arcos sobre C' desde q' a $f(q)$ contiene un punto $f(x)$ y $f(y)$, respectivamente, en $f(A)$. Para algún n , tenemos que Γ_n tiene una trayectoria P de x a y teniendo sólo a x y y en común con C (por ser Γ_n 2-conexa por construcción). Por Lema 1.13 P separa $\text{int}(C)$ en dos regiones, que son aplicadas sobre dos distintas regiones en $\text{int}(C') - g_n(P)$. Una de éstas contiene toda la sucesión q_n a partir de un cierto n mientras que la otra

tiene a $f(q)$ en su frontera, pero no hay una frontera en común con ambas regiones (por cómo se contruyen los Γ_n), por tanto no podemos tener que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = q'.$$

Esta contradicción muestra que f se extiende apropiadamente a $\text{int}(C)$.

- (III) f puede extenderse a $\text{ext}(C)$. Consideremos dos planos donde se encuentran C y C' respectivamente sin pérdida de generalidad supongamos que C y C' se encuentran en el interior del cuadrado con vértices $(\pm 1, \pm 1)$; llamémoslo T . Sean L_1, L_2 y L_3 segmentos de rectas que atraviesan el origen desde $(1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$, respectivamente, a C , que no tocan a C' en ningún otro punto. Sea p_i el punto de L_i sobre C para $i = 1, 2, 3$. Sean L'_1 y L'_2 arcos poligonales desde $f(p_1)$ a $(1, 1)$ y desde $f(p_2)$ a $(-1, -1)$, respectivamente, tales que $L'_1 \cap L'_2 = \emptyset$ y L'_i sólo tiene a sus extremos en C' y T para $i = 1, 2$. Es fácil mirar que podemos encontrar un arco poligonal L'_3 desde $f(p_3)$ a $(1, -1)$ o $(-1, 1)$ tal que L'_3 es ajeno a $L'_1 \cup L'_2$ y tiene extremos en común con C' y T . Si es necesario después tomando una reflexión sobre C' , respecto a la línea diagonal de $(1, 1)$ y $(-1, -1)$, podemos suponer que L'_3 va a $(1, -1)$. Definiendo linealmente los homeomorfismos $L_1 \approx L'_1$, $L_2 \approx L'_2$ y $L_3 \approx L'_3$ de modo que apliquemos $(-1, -1)$ en $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ en $(-1, 1)$ y la identidad sobre T , la porción de la curva de p_1 a p_2 en la porción de la curva de $f(p_1)$ a $f(p_2)$ usamos el método de la primera parte para tener el homeomorfismo de $\text{int}(C)$ a $\text{int}(C')$ y de una porción del $\text{int}(T)$ en $\text{int}(T)$ de manera análoga aplicamos el resultado de la primera parte a las otras porciones del $\text{int}(T)$ así extendemos f a un homeomorfismo de $\overline{\text{int}(T)}$ tal que f es la identidad sobre T . Entonces f se extiende a un homeomorfismo del plano tal que f es la identidad sobre $\text{ext}(T)$.

□

Capítulo 2

Teorema de Schoenflies para superficies no métricas.

Tenemos el teorema de metrización de Urysohn que dice:

Teorema 2.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un espacio T_1 X*

1. X es regular y 2-numerable,
2. X es separable y metrizable,
3. X puede ser encajado como un subespacio del cubo de Hilbert I^{\aleph_0} .

Así un espacio no métrico es un espacio que no satisface las condiciones equivalentes del teorema anterior. Ahora para abordar el teorema de Schoenflies para superficies no métricas dividimos este capítulo en cinco secciones. Iniciamos con la aproximación geométrica.

2.1. Aproximación geométrica.

Para los resultados de esta sección necesitamos las siguientes definiciones [[10], XV.3.7, pág.494]

Definición 2.1 *Un espacio X es **semilocalmente simplemente conexo** si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U , tal que cada lazo en U es nulhomotópico en X .*

Definición 2.2 *Un espacio X es **suficientemente conexo** si X es conectable por trayectorias, localmente conectable por trayectorias y semilocalmente simplemente conexo.*

La siguiente definición puede ser vista en [[10],XV.1.2,pág.468].

Definición 2.3 Sea X un espacio topológico. Una **aplicación cubriente sobre X** es una aplicación $p : \tilde{X} \rightarrow X$, $\tilde{X} \neq \emptyset$, tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U en X que satisface:

- (I) La imagen inversa de U , $p^{-1}(U)$ es unión de abiertos ajenos $\tilde{U}_j \subset \tilde{X}$, $j \in J$, donde J es algún conjunto no vacío de índices.
- (II) Para cada $j \in J$, la restricción $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

La siguiente definición es sacada de [[10],XV.3,pág.492]

Definición 2.4 Se dice que una aplicación cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es **universal** si el espacio total \tilde{X} es simplemente conexo. Al espacio total \tilde{X} lo llamamos **espacio cubriente universal**.

El siguiente teorema se enuncia sin demostración, la que puede ser vista en [[10],XV.3.9 pág.495].

Teorema 2.2 Todo espacio M suficientemente conexo admite una aplicación cubriente universal $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$.

Definición 2.5 Una **superficie** es un espacio topológico de Hausdorff el cual es localmente homeomorfo a un disco (esto es, al interior del círculo en el plano.)

Teorema 2.3 (Teorema de Poincaré-Volterra.) Sea Y un espacio localmente compacto, localmente conexo y cuya topología tiene una base numerable. Sea X un espacio conexo de Hausdorff y sea $p : X \rightarrow Y$ una aplicación continua la cual tiene la siguiente propiedad: para cada $x \in X$ y toda vecindad U de x se tiene que la restricción de p a U es un homeomorfismo de U sobre un espacio abierto de Y . Entonces X es localmente compacta, localmente conexa y la topología de X tiene una base numerable.

El siguiente resultado está en [[11], Pág.101-121].

Lema 2.1 (i) (Teorema de triangulación, o teorema de Radó, relativo a superficies.) Dada una pareja (M, Γ) que consiste en una gráfica Γ (complejo simplicial localmente finito de dimensión 1) encajada como un subconjunto cerrado en una superficie M métrica, se puede construir una triangulación de M tal que Γ ocurre como un subcomplejo.

(ii) (Vecindad tubular de gráficas.) Se puede construir directamente una vecindad tubular de la gráfica Γ .

Lema 2.2 Una superficie métrica simplemente conexa M es homeomorfa a \mathbb{R}^2 o \mathbb{S}^2 .

Demostración. Por el Lema 2.1 (i) podemos triangular a M y por [6] podemos introducir una estructura \mathbb{C} -analítica a M . Entonces utilizamos el teorema de uniformización de superficies de Riemann (Klein Poincaré-Koebe 1982-1907) para obtener que M es conformemente equivalente a los tres dominios siguientes: al disco unitario abierto, al

plano complejo o a la esfera de Riemann, pero como M es una superficie sin frontera entonces $M \approx \mathbb{R}^2$ o $M \approx \mathbb{S}^2$. \square

La siguiente observación se enuncia de forma más general en [[8], pág 637.]

Observación 2.1 *Una superficie es metrizable si, y sólo si, es Lindelöf.*

Lema 2.3 *(Teorema de Schoenflies homotópico.) Sea M una superficie métrica y C una curva de Jordan (un encaje del círculo en M) nulhomotópica sobre M . Entonces C acota un 2-disco en M .*

Demostración. En primer lugar veamos que existe el espacio cubriente universal de M . En efecto, como M es una superficie entonces es localmente conectable por trayectorias y semilocalmente simplemente conexa, también es conectable por trayectorias. Luego por el Teorema 2.2 de existencia de la aplicación cubriente, M posee un espacio cubriente universal \widetilde{M} .

En segundo lugar mostremos que cualquier levantamiento de la curva de Jordan C en \widetilde{M} acota un 2-disco en \widetilde{M} . Entonces sea C' en \widetilde{M} un levantamiento de C en M , puesto que C es nulhomotópica tenemos que C' es también nulhomotópica lo que implica que es una curva de Jordan en \widetilde{M} . Entonces veamos que tenemos las hipótesis del teorema de Poincaré-Volterra; al tener la aplicación cubriente (universal) $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ ésta es localmente homeomorfa, además por ser M una superficie es localmente conexa, localmente compacta e implica que \widetilde{M} es una superficie, por otro lado, al ser M métrico tiene una base numerable y como \widetilde{M} es simplemente conexo es conexo, entonces utilizando el teorema de Poincaré-Volterra tenemos que \widetilde{M} tiene una base numerable. Y por la Observación 2.1 el espacio \widetilde{M} es métrico, de donde utilizando el Lema 2.2 tenemos que $\widetilde{M} \approx \mathbb{R}^2$ o $\widetilde{M} \approx \mathbb{S}^2$. Luego aplicamos el Teorema 1.2 (y que por la proyección estereográfica se puede aplicar a \mathbb{S}^2) obteniendo que C' acota un 2-disco Δ en \widetilde{M} .

En tercer lugar miremos que $\pi | \Delta$ es biyectiva, esto probará que $\pi(\Delta) = D$ es el 2-disco que será acotado por C . Observemos que sólo es necesario probar la inyectividad, la cual se reduce a tres casos los cuales se demostrarán por contradicción:

- (1) Dos puntos de la frontera de Δ son equivalentes (bajo una transformación cubriente $\gamma : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ que es un homeomorfismo tal que $\pi\gamma = \pi$, la cual existe porque envía un punto de la fibra en otro punto de la fibra.) Sean p_1 y p_2 en C' tales que $\gamma(p_1) = p_2$ es equivalente a que $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ en C contradiciendo que C sea una curva simple.
- (2) Supongamos que un punto interior a Δ y otro en su frontera son equivalentes. Entonces γ es un homeomorfismo que envía un punto interior a un punto frontera, además $\gamma : C' \rightarrow C'$. Por el Teorema 1.2 se extiende a un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 pero esto contradice el teorema de invariancia del dominio (debería mandar el interior en el interior).
- (3) Dos puntos interiores de Δ son equivalentes. Sean p_1, p_2 en $int(\Delta)$ tales que existe una transformación cubriente $\gamma(p_1) = p_2$. Vamos a reducir este caso al caso (2).

En efecto, escogemos un arco A en el $\text{int}(\Delta)$ con extremos p_1 y p_2 . Luego la proyección del arco entre p_1 y p_2 es un lazo K puesto que por hipótesis $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, además no es nulhomotópico de lo cual por el criterio de levantamientos de homotopía tendríamos que A es nulhomotópico en contradicción con que sea arco. Consideremos los siguientes levantamientos $A = A_1, A_2, \dots$ de K donde A_i inicia en el punto final del predecesor A_{i-1} . Entonces tenemos los siguientes casos en esta cadena de levantamientos:

- (i) La cadena de levantamientos se queda contenida en Δ . Podemos extraer de esta cadena de levantamientos una sucesión (supongamos infinitos puntos distintos) de puntos en la fibra $\pi^{-1}(\pi(p_1))$ (puntos inicial y final de cada levantamiento (trayectoria)). Como esta sucesión de puntos está dentro de un compacto quiere decir que tiene una subsucesión convergente digamos $\{r_{i_k}\}$ tal que $r_{i_k} \rightarrow r$ con $r \in \Delta$. Observemos que por la continuidad de la función cubriente tenemos

$$\pi(r) = \pi(\lim_{i_k \rightarrow \infty} (r_{i_k})) = \lim_{i_k \rightarrow \infty} \pi(r_{i_k}) = \lim_{i_k \rightarrow \infty} \pi(p_1) = \pi(p_1)$$

de donde podemos decir que r está en la fibra y es punto de acumulación de elementos de la fibra. Pero esto contradice la propiedad de ser discreta la fibra. La siguiente posibilidad en este caso es que a partir de un cierto punto la subsucesión se repita y así origine un lazo digamos $J : A_1 \cup \dots \cup A_k$. Podemos reorganizar los arcos para que nos quede una curva de Jordan, si no habría el doble de puntos cuando se proyecta hacia abajo (tendríamos el doble de puntos múltiples). Aun cuando no tenemos asegurado que K sea simple y cerrado, sin embargo un truco fácil es recorrer el arco A y tan pronto haya un autocruce parar y a este subarco llamarlo $A_0 \subset A$. Entonces $\pi(A_0)$ es un círculo encajado en M . Entonces un punto fijo para γ , la transformación traslación inducida por el lazo K , es creado en el interior de la curva de Jordan J por el teorema del punto fijo de Brouwer. Pero ninguna transformación cubriente distinta de la identidad tiene punto fijo, contradicción, esto justifica la ausencia de periodicidad. Por tanto el extremo de A_n no se puede dar.

- (ii) Un extremo de A_n interseca a C' . Esto origina que la cadena de levantamientos de trayectorias se sale de Δ . Como ($\widetilde{M} \approx \mathbb{R}^2$ o $\widetilde{M} \approx \mathbb{S}^2$), entonces por el teorema de la curva de Jordan la trayectoria $A_1 \cup \dots \cup A_n$ permanecerá en C' . Puesto que A no permanece en C' el punto de intersección $p \in A_i \cap C'$ ocurre cuando A_i satisface que $i \geq 2$. Entonces el par consistente en p y la transformación traslación llega a A satisfaciendo el caso (2). Luego $\pi(p) = \pi(a)$, con a en Δ , $p \in C'$.

□

Definición 2.6 Dada una superficie V una **subsuperficie** W es un subespacio de V dotado de una estructura de superficie con la topología relativa.

Definición 2.7 Una superficie W (topológica) con frontera es un espacio topológico de tipo Hausdorff en que cada punto tiene una vecindad abierta V para la que existe un

homeomorfismo φ con un conjunto abierto del semiplano superior del plano euclídeo \mathbb{R}^2 . Denotamos la frontera de W por $fr(W)$.

Definición 2.8 Una carta de dimensión 2 en un espacio topológico V es una pareja (U, φ) , donde U es un abierto de V y $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$ es un homeomorfismo de U en un abierto \hat{U} de \mathbb{R}^2 .

Definición 2.9 Un espacio de Hausdorff Y es **paracompacto** si cada cubierta abierta de Y tiene un refinamiento abierto localmente finito.

El siguiente resultado lo enunciamos sin demostración, dicha prueba se encuentra en [[17], pág.174,ejer.23G]. Para nuestros fines utilizamos el caso particular de las superficies.

Proposición 2.1 Cada superficie paracompacta es metrizable.

Ahora daremos el teorema de Schoenflies homotópico para superficies no metrizables.

Proposición 2.2 Sea M una superficie (no necesariamente metrizable) y C una curva de Jordan nulhomotópica sobre M . Entonces C acota un 2-disco en M . En particular si M es simplemente conexa, cada curva de Jordan acota un 2-disco.

Demostración. Por compacidad podemos cubrir la imagen de la homotopía que contrae a C a un punto por un número finito de cartas. Así $C \subset \bigcup_{i=1}^m U_i = M_*$ donde M_* es una subsuperficie la cual es metrizable por Proposición 2.1. Entonces por el Lema 2.3 se sigue que C acota un 2-disco en M_* , el cual puede considerarse como encajado en M . \square

Para la próxima proposición necesitamos el siguiente lema dado en [[15],pág 2].

Lema 2.4 (Cruce de frontera). Sea Y un subespacio de un espacio X , si un conjunto conexo U en X contiene puntos de Y y de $X - Y$. Entonces U también contiene puntos de la frontera de Y en X .

Proposición 2.3 Sea C una curva de Jordan nulhomotópica sobre una superficie de M (metrizable o no). Entonces C divide a M , esto es $M - C$ es inconexo.

Demostración. Por la proposición 2.2 tenemos que C acota un 2-disco D en M . Sea $U = int(D) \subset M - C$, que es conexa. Ahora veamos que es el conexo más grande así contenido, hecho que se demostrará por contradicción. Si ampliamos U en $M - C$ tenemos que si $Y = ext(D)$ entonces $U \cap int(D) \neq \emptyset$ y $U \cap ext(D) \neq \emptyset$. Entonces podemos aplicar el lema del cruce de frontera que asegura que $U \cap C \neq \emptyset$ lo que contradiría el hecho de que $U = int(D)$. Se sigue que U es una componente conexa de $M - C$, pero no el único, en otro caso $U = M - C$, de donde $D = \bar{U} = \overline{M - C} = M$, contradiciendo que M por ser una superficie no tenga frontera. \square

2.2. Teorema de Jordan para superficies no métricas.

Vimos el teorema de Jordan para \mathbb{R}^2 en el capítulo 1 y que por el homeomorfismo de $\mathbb{S}^2 - \{*\}$ a \mathbb{R}^2 (proyección estereográfica) se puede aplicar a \mathbb{S}^2 , en esta sección enunciaremos y demostraremos el teorema de Jordan para superficies no métricas. Iniciamos con definiciones y resultados de geometría diferencial, ecuaciones diferenciales y de topología general.

Definición 2.10 Un **haz** es una terna (E, p, B) donde E y B son espacios topológicos y $p : E \rightarrow B$ es una aplicación continua: E es llamado **el espacio total**, B **el espacio base** y p **la proyección**.

Definición 2.11 Sea R un espacio topológico y $f : R \times \mathbb{R} \rightarrow R$ una aplicación continua. Para cualquier conjunto $E \subset R$ llamaremos al conjunto

$$\Phi = f(E \times [-T, +T]) = \cup_{|t| \leq T} f(E \times \{t\}), T > 0$$

un tubo finito de tiempo de longitud $2T$. Cuando $T = \infty$ se llamará **tubo**.

Definición 2.12 Llamaremos a un conjunto $F \subset \Phi$, cerrado en Φ , **una sección local del tubo finito Φ** si para cada punto $q \in \Phi$ le corresponde un único número t_q tal que $f(q, t_q) \in F$, y $|t_q| < 2T$.

Definición 2.13 **La banda de Möbius** es un haz torcido.

Definición 2.14 Una superficie M es **no orientable** si contiene una banda de Möbius. Es **orientable** si no es no orientable.

Definición 2.15 Sea M una superficie lisa y $S \subset M$ una subvariedad. **Una vecindad tubular de S en M** es un haz vectorial $\pi : E \rightarrow S$ junto con una aplicación lisa $J : E \rightarrow M$ tal que:

1. $J(0_E) = i(S)$ donde i es el encaje $S \hookrightarrow M$ y 0_E la sección cero.
2. $\exists U \subseteq E, V \subseteq M$ con $0_E \subseteq U$ y $S \subseteq V$ tales que $J|_U : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo.

Lema 2.5 (Vecindad tubular de círculos.) Sea C una curva de Jordan en una superficie orientable M . Entonces existe un conjunto abierto T en M que contiene a C y un homeomorfismo de parejas $(T, C) \approx (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^1 \times \{0\})$.

Demostración. De manera análoga como en la prueba de la Proposición 2.2 $C \subset M_*$ donde M_* es metrizable. Luego por el Lema 2.1 (i) toda superficie metrizable es triangulable.

Sea T la vecindad tubular la cual es un haz sobre \mathbb{S}^1 de donde por ser de dimensión 1 sólo hay dos tipos de haces, uno de ellos es la banda de Möbius pero esto no puede ser porque la superficie es orientable, por lo tanto T debe ser el \mathbb{R} -haz trivial, esto es, $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

De hecho, la subvariedad métrica M_* cubre la curva de Jordan C , pero debemos asegurar que la triangulación de M_* pueda ser organizada de tal manera que C sea un subcomplejo. Ahora, el teorema de Schoenflies garantiza que cualquiera que sea la complejidad de una curva de Jordan C en \mathbb{R}^2 hay un homeomorfismo global del plano que aplica a C en el círculo unitario \mathbb{S}^1 (o el triángulo). En particular, existe una triangulación del plano \mathbb{R}^2 tal que para cualquier C un tubo alrededor de C podría ser simplemente tomando un anillo alrededor de \mathbb{S}^1 . En nuestra situación nada asegura que M_* sea homeomorfo a \mathbb{R}^2 , sin embargo, el teorema clásico de Schoenflies permite hacer lo mismo en general para superficies métricas, así nuestra vecindad tubular es $T \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en M la cual contiene a C . Luego tenemos el siguiente homeomorfismo de parejas $(T, C) \approx (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^1 \times \{0\})$. \square

Ahora daremos algunas definiciones del álgebra homológica que serán usadas en la demostración del teorema de la curva de Jordan para superficies no métricas.

Definición 2.16 *Un complejo de cadenas consta de una familia $C_p, p = 0, 1, 2, \dots$ de R -módulos y de operadores frontera $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ que son homomorfismos tales que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Entonces tenemos una sucesión*

$$\dots \rightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \xrightarrow{\partial_{p-2}} \dots$$

Los elementos de C_p se llaman p -cadenas. Por lo tanto, el grupo $Z_p = \ker \partial_p \supset B_p = \text{im} \partial_{p+1}$ (Z_p consta de los p -ciclos y B_p de las p -fronteras). Entonces el R -módulo $H_p(C) = Z_p(C)/B_p(C)$ se llama **grupo de homología de dimensión p de C** o p grupo de homología de C .

Para lo que sigue, necesitamos por razones técnicas definir unos grupos de homología más específicos:

Definición 2.17 *Sea $\Delta^p = \langle e_0, e_1, \dots, e_p \rangle$, (el conjunto de todas las combinaciones lineales $S = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p$, donde $\alpha_i \geq 0$, para todo i y $\sum_{i=0}^p \alpha_i = 1$.)*

Consideremos $\Delta^{p-1} \xrightarrow{f_i} \Delta^p$ tal que

$$f_i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j < i, \\ e_{j+1} & \text{si } j > i. \end{cases}$$

f_i es llamada la i -ésima cara, decimos que una aplicación continua $\Delta^p \xrightarrow{\sigma} X$ es un p -simplejo en un espacio X . Sea R un anillo conmutativo con 1; definimos $S_p(X)$ como el R -módulo libre con base el conjunto de los p -simplejos en X . Los elementos en $S_p(X)$, llamados p -cadenas, son sumas formales finitas $\sum_{\sigma} p_{\sigma} \sigma$ con $p_{\sigma} \in R$ y $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$ un p -simplejo. El operador frontera $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ está definido por la fórmula:

$$\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X) \text{ tal que } \partial_p(\sigma) = \sum (-1)^i \sigma_i \text{ con } \sigma_i = \sigma \circ f_i.$$

Se tiene que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ por lo que $\text{im}(\partial_{p+1}) \subset \ker(\partial_p)$. Si llamamos $Z_p(x) = \ker(\partial_p)$ y $B_p(x) = \text{im}(\partial_{p+1})$ definimos el p -ésimo **grupo de homología singular** con coeficientes en R como $H_p(X; R) = Z_p(X)/B_p(X)$.

Necesitamos una definición algebraica para el desarrollo de varias pruebas que se darán en adelante.

Definición 2.18 Una sucesión de homomorfismos

$$\cdots A_{p+1} \xrightarrow{\alpha_{p+1}} A_p \xrightarrow{\alpha_p} A_{p-1} \rightarrow \cdots$$

es **exacta** si $\text{Ker } \alpha_p = \text{Im } \alpha_{p+1}$ para cada p . Las inclusiones $\text{Im } \alpha_{p+1} \subset \text{Ker } \alpha_p$ son equivalentes a afirmar que $\alpha_p \alpha_{p+1} = 0$; así la sucesión es un complejo de cadenas, y si se tienen las inclusiones opuestas, equivale a decir que los grupos de homología de este complejo de cadenas son triviales.

Definición 2.19 Los **grupos de homología relativa** son definidos de la siguiente manera. Dado un espacio X y un subespacio $A \subset X$, sea $S_p(X, A) = S_p(X)/S_p(A)$. Así las p -cadenas en A son triviales en $S_p(X, A)$. Puesto que la aplicación frontera $\partial : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ aplica $S_p(A)$ en $S_{p-1}(A)$, ∂ induce un operador frontera cociente $\partial : S_p(X, A) \rightarrow S_{p-1}(X, A)$. Siendo p variable, tenemos una sucesión de operadores frontera

$$\cdots \rightarrow S_p(X, A) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X, A) \cdots$$

Es sencillo demostrar que en este caso, también $\partial^2 = 0$ para estos operadores frontera. Así tenemos un complejo de cadenas, cuyos grupos de homología son por definición el **grupo de homología relativa** $H_p(X, A; R)$ con coeficientes en R . En adelante tomaremos $R = \mathbb{Z}$ y la omiteremos de la notación.

Observación 2.2 Los grupos de homología relativa $H_p(X, A)$ para cualquier pareja (X, A) encajan en una sucesión exacta larga. Dada una pareja (X, A) se tiene un homomorfismo $\partial : H_p(X, A) \rightarrow H_{p-1}(A)$ de tal modo que la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow 0$$

es exacta, donde i es la inclusión $A \hookrightarrow X$ y j es la inclusión $X = (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$, así los homomorfismos i_* y j_* están dados por las inclusiones. A esta propiedad se le llama **axioma de exactitud**.

Observemos que $H_p(X) = H_p(X, \emptyset)$, con lo que la homología relativa generaliza a la absoluta.

El siguiente resultado es importante para la prueba del teorema de Jordan para superficies no métricas.

Teorema 2.4 (Teorema de escisión.) Sean $U \subset A \subset X$ tales que $\overline{U} \subset \text{int}(A)$. Entonces $j : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo en homología:

$$j_* : H_p(X - U, A - U; R) \rightarrow H_p(X, A; R), \forall p.$$

Definición 2.20 Todas las bases de un R -módulo libre L tienen una misma cardinalidad, que se llamará **rango**.

Ahora el resultado principal de la sección:

Proposición 2.4 (*Teorema de la curva de Jordan para superficies no métricas.*) Sea M una superficie de Hausdorff, simplemente conexa. Entonces cada círculo C encajado en M divide la superficie en exactamente dos componentes. Mas aún la frontera topológica de cada componente de $M - C$ es C .

Demostración. Por el lema 2.5 existe un tubo T alrededor de C , la prueba la reducimos a rutinas homológicas. En efecto, escogeremos una parte de la sucesión exacta larga de homología de la pareja $(M, M - C)$ (con coeficientes en \mathbb{Z}), denotaremos el rango del grupo de homología cuya finitud es evidente con subíndices de dicha sucesión

$$\cdots \rightarrow H_1(M) \rightarrow H_1(M, M - C)_s \rightarrow H_0(M - C)_r \rightarrow H_0(M)_1 \rightarrow H_0(M, M - C).$$

Luego, abelianizando el grupo fundamental se tiene el isomorfismo de Hurewicz $H_1(M) \cong \pi_1(M)^{ab}$ y dado que M es simplemente conexa tenemos que $H_1(M) = 0$. Por resultado de topología algebraica al ser M conectable por trayectorias y $M - C \neq \emptyset$ entonces $H_0(M, M - C) = 0$. Por tanto obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow H_1(M, M - C)_s \rightarrow H_0(M - C, \emptyset)_r \rightarrow H_0(M, \emptyset)_1 \rightarrow 0.$$

Luego, por la propiedad de aditividad del rango para sucesiones exactas cortas de grupos abelianos tenemos que $r = s + 1$. Para calcular s utilizamos el teorema de escisión. En efecto, escindiendo el complemento del tubo T de la pareja $(M, M - C)$, obtenemos el isomorfismo $H_1(T, T - C) \cong H_1(M, M - C)$ y al escindir los dos polos de una 2-esfera (\mathbb{S}^2, J) donde J es el encaje estándar del ecuador, entonces se produce un isomorfismo $H_1(T, T - C) \cong H_1(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 - J)$ donde $T = \mathbb{S} \times \mathbb{R}$. Ahora escribimos la sucesión de la pareja $(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 - J)$ como:

$$0 = H_1(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 - J)_s \rightarrow H_0(\mathbb{S}^2 - J)_2 \rightarrow H_0(\mathbb{S}^2)_1 \rightarrow H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 - J) = 0.$$

Entonces por la propiedad de aditividad del rango en sucesiones exactas cortas tenemos que $s = 1$. Por tanto $r = 2$, completando la prueba de que C encajado en M divide la superficie en exactamente dos componentes.

□

Consideremos la siguiente definición.

Definición 2.21 *La recta larga* \mathbb{L} , es un espacio topológico análogo a la recta real, pero es mucho más larga. Ya que localmente se comporta igual que la recta real, pero tiene propiedades diferentes a gran escala, constituye un gran contraejemplo en topología. Para construirla tómesese el primer ordinal no numerable ω_1 y su producto con el intervalo semicerrado $[0, 1)$ y elimínese el elemento mínimo. Después désele a este producto la topología del orden que se obtiene con el orden lexicográfico (considerando la relación de orden usual en $[0, 1)$, que define la topología usual). Esta recta larga \mathbb{L} puede describirse intuitivamente como una infinidad no numerable de copias de $[0, 1)$ una tras de la otra de acuerdo con el orden del primer ordinal no numerable. La recta larga es localmente

lo mismo que \mathbb{R} , pues las vecindades de un punto en \mathbb{L} son esencialmente intervalos comunes y corrientes de la forma (a, b) , justo como en \mathbb{R} . Sin embargo, una base para esta topología debe ser unión de bases en cada copia de $[0, 1)$. Dado que hay una infinidad no numerable de copias de $[0, 1)$ es imposible elegir una base numerable para la topología de \mathbb{L} . En pocas palabras \mathbb{L} es un espacio 1-numerable que no es 2-numerable. Como consecuencia \mathbb{L} no puede encajarse como subespacio de \mathbb{R}^n para ningún n , pues de poderse, sería 2-numerable.

Entonces ejemplos donde se cumple el teorema de la curva de Jordan para superficies no métricas son: $\mathbb{L} \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{L}^+ \times \mathbb{R}$

2.3. Generalización del teorema de Schoenflies para superficies no métricas

En esta sección daremos sin demostración algunos conceptos y resultados generales de la teoría de homología, referimos dichas demostraciones a algunos libros de topología algebraica como [5], [10], entre otros. Además de sacar algunos resultados de [14] para abordar la prueba del teorema de Schoenflies para espacios no métricos.

Iniciamos con una definición [[7],pág 95]

Definición 2.22 Una teoría de homología ordinaria H es una teoría con **soporte compacto**; si para cada clase de homología $x \in H_n(X)$ hay un subespacio compacto $K \subset X$ y $\beta \in H_n(K)$ tal que $x = j_*(\beta)$, donde $j : K \hookrightarrow X$ es la inclusión, y si para cada compacto $K \subset X$ y $x \in H_n(K)$ tal que $j_*(x) = 0$ en $H_n(X)$, hay un espacio compacto K' con $K \subset K' \subset X$ tal que $i_*(x) = 0$, donde $i : K \hookrightarrow K'$ es la inclusión.

Definición 2.23 Sea (X, A, B) una terna **escisiva**, es decir, X un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ subespacios tales que X es la unión del interior de A y el interior de B . Definimos los siguientes homomorfismos

- (a) $\varphi : H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B)$ dada por $\varphi(c) = i_*(c) \oplus j_*(c)$, donde $i : A \cap B \hookrightarrow A$, $j : A \cap B \hookrightarrow B$ son las inclusiones.
- (b) $\psi : H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(X)$ dada por $\psi(a \oplus b) = i'_*(a) - j'_*(b)$, donde $i' : A \hookrightarrow X$, $j' : B \hookrightarrow X$.
- (c) $\partial_* : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$ definida como sigue dado un elemento en $H_n(X)$ es la clase de homología de un n -ciclo x el cual, por la subdivisión baricéntrica, por ejemplo, podemos reescribirlo como la suma de dos n -cadenas u y v cuyas imágenes viven en A y B respectivamente. Así $\partial(x) = \partial(u - v) = 0$ así que $\partial u = -\partial v$ lo que implica que las imágenes de ambos $n - 1$ -ciclos están contenidas en $A \cap B$. Entonces definimos $\partial_*(x)$ como la clase de ∂u en $H_{n-1}(A \cap B)$.

A continuación enunciaremos una herramienta muy útil de la topología algebraica.

2.3. GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE SCHOENFLIES PARA SUPERFICIES NO MÉTRICAS

Teorema 2.5 Sea X un espacio topológico. Para una pareja de subespacios $A, B \subset X$ tal que X es la unión del interior de A y el interior de B . Entonces la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X) \rightarrow 0$$

es exacta. La sucesión se llama **sucesión Mayer-Vietoris de (X, A, B)** .

Hay una versión relativa de la sucesión de Mayer Vietoris.

Proposición 2.5 Sea X un espacio, si $Y \subset X$ y es la unión de $C \subset A$ y $D \subset B$, entonces **la forma relativa de la sucesión Mayer-Vietoris** es:

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{k_* - l_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B, C \cap D) \cdots$$

y ésta es exacta.

Los siguientes resultados son del artículo [14]. Sea M una n -variedad conexa, denotaremos por T_p el grupo de homología relativa $H_n(M, M - \{p\})$ para cada $p \in M$. Nótese que este grupo es isomorfo a \mathbb{Z} .

Lema 2.6 (a) El grupo de homología $H_r(U)$ de un subconjunto U abierto de \mathbb{R}^n se anula para $r \geq n$.

(b) Los grupos de homología de una n -variedad $H_r(M)$ se anulan para $r > n$.

El siguiente resultado lo particularizamos para $n = 2$.

Lema 2.7 Sea U un abierto en \mathbb{R}^n con $n \geq 2$, y sea α un elemento de $H_n(\mathbb{R}^n, U)$. Sea j_p la inclusión $(\mathbb{R}^n, U) \subset (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{p\})$ donde $p \in \mathbb{R}^n - U$. Si $j_{p*}(\alpha) = 0$ en $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{p\})$ para cada $p \in \mathbb{R}^n - U$, entonces $\alpha = 0$.

Demostración. Consideremos la siguiente porción de la sucesión exacta larga de homología de la pareja (\mathbb{R}^n, U)

$$0 = H_n(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, U) \rightarrow H_{n-1}(U) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}^n) = 0.$$

Por lo tanto, tenemos un isomorfismo $H_n(\mathbb{R}^n, U) \cong H_{n-1}(U)$ que denotaremos con d_* . Por lo tanto, existe un único $\eta \in H_{n-1}(U)$ tal que $d_*(\alpha) = \eta$ de donde probar que $\alpha = 0$ es equivalente a probar que $\eta = 0$.

Existe V abierto, cuya cerradura \bar{V} es compacta y contenida en U y un elemento $\eta' \in H_{n-1}(V)$ con $i_*(\eta') = \eta$, $i : V \hookrightarrow U$. Sea $Q = \{t = (t_1, \dots, t_n) : \max |t_i| < R\}$ un cubo abierto que contiene a V , y sea $K = Q - Q \cap U$. Por la hipótesis sobre α , para cada $p \in K$ encontramos un cubo cerrado P que contiene a p , tal que $P \cap V = \emptyset$ y la imagen de $\eta' \in H_{n-1}(\mathbb{R}^n - P) \cong \mathbb{R}^n - \{p\}$ es cero. Un número finito de cubos P_1, \dots, P_N cubren a K por ser compacto. Sea $Q_k = Q - (P_1 \cup \dots \cup P_k)$, probaremos por inducción finita que la imagen de η' en $H_n(Q_N)$ es 0. En efecto, para $k = 0$ tenemos

que la imagen de η' en $H_{n-1}(Q)$ es 0, puesto que Q es contraíble. Ahora supongamos que la imagen de $\eta' \in H_{n-1}(Q - (P_1 \cup \dots \cup P_k))$ es 0 y probaremos que la imagen de $\eta' \in H_{n-1}(Q_{k+1})$ es 0. Para ello utilizamos una parte de la sucesión de Mayer-Vietoris para $Q_k = Q - (P_1 \cup \dots \cup P_k)$ y $\mathbb{R}^n - P_{k+1}$:

$$0 = H_n(Q_k \cup (\mathbb{R}^n - P_{k+1})) \rightarrow H_{n-1}(Q_{k+1}) \rightarrow H_{n-1}(Q_k) \oplus H_{n-1}(\mathbb{R}^n - P_{k+1}).$$

La imagen de η' en los dos grupos de lado derecho son 0, y así la imagen de $\eta' \in H_{n-1}(Q_{k+1})$ es 0; y así entonces la imagen de η' en $H_{n-1}(Q_N)$ y en $H_{n-1}(Q \cap U)$ y finalmente en $H_{n-1}(U)$, esto es, $\eta = 0$. Esto implica que $\alpha = 0$.

□

El siguiente resultado dado en el artículo [14], lo particularizamos para la dimensión 2 de una variedad.

Lema 2.8 *Si M es una superficie conexa, no compacta entonces $H_2(M) = 0$.*

Demostración. Puesto que las cadenas singulares tienen soporte compacto tenemos que para cualquier $\zeta \in H_2(M)$ existe un número finito de cartas U_1, \dots, U_k y $\zeta' \in H_2(\bigcup_{j=1}^k U_j)$ con $\zeta = i_*(\zeta')$ y también para cualquier $\zeta \in H_2(M)$ todas las imágenes $i_{p*}(\zeta) \in T_p$ son 0. Consideremos $V_i = \bigcup_{j=1}^i U_j$. Procedemos por inducción finita sobre j . Por el Lema 2.6 (a) tenemos que $H_2(U_i) = 0$ para $i = 1, \dots, k$, porque cada carta es homeomorfa a un abierto en \mathbb{R}^2 . Supongamos que $H_2(V_j) = 0$ para algún j y veamos que $H_2(V_{j+1}) = 0$. Para esto, utilizamos una sección de la sucesión de Mayer-Vietoris de la pareja V_j y U_{j+1}

$$0 = H_2(V_j) \oplus H_2(U_{j+1}) \rightarrow H_2(V_{j+1}) \rightarrow H_1(V_j \cap U_{j+1}) \rightarrow H_1(V_j) \oplus H_1(U_{j+1}).$$

Ahora, probar que $H_2(V_{j+1}) = 0$ es equivalente a probar que $H_1(V_j \cap U_{j+1}) \rightarrow H_1(V_j)$ es inyectiva. Supongamos que $\beta \in H_1(V_j \cap U_{j+1})$ va a dar a $0 \in H_1(V_j)$ y miremos que $\beta = 0$. Entonces utilizamos parte de la forma relativa de la sucesión de Mayer-Vietoris para $U_{j+1} \cap V_j \subset V_{j+1}$

$$\begin{aligned} H_2(U_{j+1}, U_{j+1} \cap V_j) \oplus H_2(V_j, U_{j+1} \cap V_j) &\rightarrow H_2(V_{j+1}, U_{j+1} \cap V_j) \rightarrow H_1(U_{j+1} \cap V_j, U_{j+1} \cap V_j) \rightarrow \\ &\rightarrow H_1(U_{j+1}, U_{j+1} \cap V_j) \oplus H_1(V_j, U_{j+1} \cap V_j). \end{aligned}$$

Como $\beta \in H_1(V_j \cap U_{j+1})$ va a 0 en $H_1(V_j)$ y en $H_1(U_{j+1})$, resulta que $i_*(\beta) = 0$. Entonces tenemos que $\beta = \partial_*(\beta') = \partial_*(\beta'')$, con $\beta' \in H_2(U_{j+1}, U_{j+1} \cap V_j)$, $\beta'' \in H_2(V_j, U_{j+1} \cap V_j)$. Consideremos la siguiente porción de la sucesión Mayer-Vietoris relativa

$$\begin{aligned} H_2(U_{j+1}, U_{j+1} \cap V_j) \oplus H_2(V_j, U_{j+1} \cap V_j) &\rightarrow H_2(V_{j+1}, U_{j+1} \cap V_j) \rightarrow 0 \rightarrow \\ &\rightarrow H_1(U_{j+1}, U_{j+1} \cap V_j) \oplus H_1(V_j, U_{j+1} \cap V_j). \end{aligned}$$

Escribiendo $\bar{\beta}$ como la diferencia de las imágenes de β' y β'' en $H_2(V_{j+1}, V_j \cap U_{j+1})$, tenemos entonces, por la sucesión exacta de la pareja $(V_{j+1}, U_{j+1} \cap V_j)$

2.3. GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE SCHOENFLIES PARA SUPERFICIES NO MÉTRICAS:

$$H_2(V_{j+1}) \rightarrow H_2(V_{j+1}, V_j \cap U_{j+1}) \xrightarrow{\partial_*} H_1(V_j \cap U_{j+1})$$

que $\partial_*(\bar{\beta}) = 0$, y así $\bar{\beta} = j_*(\alpha)$ para algún $\alpha \in H_2(V_{j+1})$. Por la no compacidad de M tenemos $i_{p^*}(\alpha) = 0$ en todo $T_p = H_2(M, M - \{p\})$. Se sigue que $j_{p^*}(\beta)' = 0$ para todo $p \in U_{j+1} - U_{j+1} \cap V_j$. Por Lema 2.7 tenemos $\beta' = 0$; y así $\beta = 0$ y $H_2(V_{j+1}) = 0$. Por inducción finita tenemos que $H_2(V_k) = 0$, y se sigue el resultado. \square

Ahora siguiendo con resultados para superficies tenemos que:

Lema 2.9 *Una superficie W conexa de Hausdorff con frontera, $fr(W) \approx S^1$, y tal que $H_1(W) = 0$, es compacta.*

Demostración. Consideremos el doble $M = W_1 \cup_{fr(W)} W_2$ el espacio que resulta de pegar dos copias W_1 y W_2 de W a lo largo de su frontera. Una parte de la sucesión de Mayer-Vietoris aplicada a W_1 y W_2 es:

$$H_2(W_1) \oplus H_2(W_2) \rightarrow H_2(M) \rightarrow H_1(fr(W)) \rightarrow H_1(W_1) \oplus H_1(W_2).$$

Por hipótesis tenemos que el último grupo es cero, luego como la sucesión es exacta $H_2(M)$ se aplica de manera suprayectiva sobre el grupo no trivial $H_1(fr(W)) = H_1(S^1) = \mathbb{Z}$, por lo que $H_2(M)$ es no nulo. Luego el lema anterior nos garantiza que M es compacta. Así, como W es cerrado en M pues $fr(W) \subset W$, entonces tenemos que W es compacta. \square

Daremos un resultado de metrización para la prueba del teorema de Jordan para espacios no métricos.

Proposición 2.6 *(Teorema de metrización de Smirnov.) Sea X un espacio topológico. Entonces X es metrizable si y sólo si X es paracompacto, localmente metrizable y Hausdorff.*

Ahora enunciemos el resultado principal de esta sección, el teorema de Jordan para espacios no métricos.

Proposición 2.7 *(Generalización del teorema de Schoenflies para superficies no métricas.) Sea M una superficie de Hausdorff y simplemente conexa. Entonces cada círculo C encajado en M acota un 2-disco en M .*

Demostración. La prueba la dividimos en dos partes. En la primera suponemos que la superficie es metrizable, de donde, por el Lema 2.2, $M \approx \mathbb{R}^2$ ó $M \approx S^2$. Luego podemos aplicar el teorema clásico de Jordan-Schoenflies.

Ahora en la segunda parte suponemos que M es no métrica. Por el teorema de Jordan para espacios no métricos $M - C$ tiene dos componentes A y B , al menos una de las cuales debe ser no métrica. De lo contrario M sería metrizable ya que $M = A \cup B \cup C$. Pero si A, B son metrizable tenemos que son paracompactos, C al ser imagen continua de un compacto es compacto de donde C es paracompacto y unión finita de paracompactos es

paracompacto, así M es paracompacto, entonces por la Proposición 2.6 M es metrizable lo que es contradicción con lo que hemos supuesto.

Luego escogemos la componente no métrizable de M , la llamamos el exterior de C denotada por C_{ext} . A la otra componente la llamamos interior de C y la denotamos por C_{int} . Definimos $W_{ext} = C_{ext} \cup C$ y $W_{int} = C_{int} \cup C$. Tenemos claramente que W_{ext} es una subvariedad con frontera de M .

Ahora puesto que W_{ext} es no compacto el Lema 2.9 asegura que $H_1(W_{ext}) \neq 0$. Consideremos la sucesión de Mayer-Vietoris de la descomposición $M = W_{int} \cup W_{ext}$ y sean $U = W_{int}$ y $V = W_{ext}$ para simplificar la notación.

$$\cdots \rightarrow H_2(U \cup V) \rightarrow H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(U \cup V) \rightarrow \cdots$$

por el Lema 2.8, tenemos que $H_2(U \cup V) = 0$ puesto que $U \cup V = M$ es no métrico por tanto no compacto. Más aún, ya que M es 1-conexo $H_1(U \cup V) = H_1(M) = 0$. Además la exactitud de la sucesión da un isomorfismo

$$\mathbb{Z} \cong H_1(S^1) \cong H_1(U \cap V) \cong H_1(U) \oplus H_1(V)$$

y dado que por el teorema de descomposición primaria de un grupo abeliano finitamente generado, \mathbb{Z} no puede descomponerse como una suma de dos grupos no triviales, y $H_1(V) \neq 0$, se sigue que $H_1(U) = 0$. Una segunda aplicación del Lema 2.9 implica que $U = W_{int}$ es compacta. Puesto que U es una superficie conexa con frontera y tenemos que como $H_1(U) = 0 = H_2(U)$, la característica de Euler es $\chi(U) = 1$. Además dado que la superficie es orientable necesariamente $U \approx \mathbb{R}^2$ o $U \approx D^2$. Ya que U tiene frontera $U \approx D^2$. \square

Ejemplos para la Proposición anterior son $\mathbb{L} \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{L}^+ \times \mathbb{R}$.

2.4. El recíproco del Teorema de Schoenflies para espacios no métricos

En esta sección trabajamos con algunos resultados de la categoría de poliedros como lo son la triangulación sobre superficies metrizables, el teorema de posición general y definiciones que son estudiadas con más detalle por ejemplo, en los libros [4] y [13].

A continuación enunciaremos una serie de definiciones básicas de combinatoria necesarias para la demostración del recíproco del Teorema de Schoenflies.

Definición 2.24 *Un complejo simplicial K consta de un conjunto $V(K)$, cuyos elementos se llaman **vértices** y de una familia $S(K)$ de subconjuntos finitos no vacíos de $V(K)$ llamados **simplejos** que satisface:*

1. Si $v \in V(K)$, $\{v\} \in S(K)$.
2. Si $\sigma \in S(K)$ y $\tau \subset \sigma$ entonces $\tau \in S(K)$ ($\tau \neq \emptyset$).

Definición 2.25 Si $|L|$ denota la cardinalidad de un conjunto L definimos la **dimensión** de un simplejo $\sigma \in S(K)$ con $\dim(\sigma) = |\sigma| - 1$.

Definición 2.26 Un complejo K es llamado k -dimensional (o un k -complejo) si k es la dimensión máxima de los simplejos de K . Si el máximo no existe, entonces $\dim(\sigma) = \infty$.

Definición 2.27 La **realización geométrica** de un complejo simplicial K es el espacio

$$|K| = \left\{ t : V(K) \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{v \in V(K)} t(v) = 1 \text{ y } \{v \in V(K) \mid t(v) > 0\} \in S(K) \right\}.$$

con la topología relativa inducida por la topología de la unión en $[0, 1]^{V(K)}$, con respecto a los productos finitos $[0, 1]^A$, donde $A \subset V(K)$ es finito. Un homeomorfismo $|K| \rightarrow X$ es una triangulación de X . (En particular, la identidad es una triangulación de $-K-$ mínima.)

Definición 2.28 Sean K, L complejos simpliciales. Una **aplicación lineal a pedazos (PL)** $f : K \rightarrow L$ es una aplicación tal que hay una subdivisión K' de K para la cual la aplicación de f a cada simplejo es lineal.

Definición 2.29 Una n -bola lineal a pedazos **PL** es un poliedro el cual es (PL)-homeomorfo al n -simplejo estándar y es una n -esfera lineal a pedazos, si es un poliedro el cual es PL-homeomorfo a la frontera de un $(n + 1)$ -simplejo estándar.

Definición 2.30 Si σ es un simplejo de un complejo simplicial K , entonces la **estrella** de σ en K , denotada con

$$St(\sigma, K) = \{ \tau \in K \mid \text{para alguna } \gamma \in K, \sigma < \gamma \text{ y } \tau < \gamma \},$$

donde $\tau < \sigma$ denota que τ es una cara de σ .

Definición 2.31 La **aureola** σ en K , denotada por $lk(\sigma, K)$ es definido como

$$lk = \{ \tau \in St(\sigma, K) \mid \tau \cap \sigma = \emptyset \}.$$

Definición 2.32 Un complejo K es llamado una n -variedad combinatoria si la aureola de cada uno de sus vértices es una $(n - 1)$ -esfera lineal a pedazos o una $(n - 1)$ -bola lineal a pedazos.

A continuación daremos dos definiciones equivalentes.

Definición 2.33 Una n -variedad $M \subset \mathbb{R}^m$ es llamada una n -variedad lineal a pedazos si puede ser triangulada como una n -variedad combinatoria.

Definición 2.34 Un poliedro $M \subset \mathbb{R}^m$ es llamado una n -variedad PL si cada punto de M tiene una vecindad cerrada la cual es PL-homeomorfa a un n -simplejo.

De ahora en adelante abreviamos las palabras lineal a pedazos por PL.

Definición 2.35 Dos simplejos ajenos σ y τ en \mathbb{R}^n son llamados **ensamblables** si existe un simplejo γ el cual es generado por los vértices de σ y τ . Si este es el caso σ y τ son llamados **opuestos por las caras de γ** , y γ es llamado el **ensamble** de σ y τ denotado por $\sigma * \tau$.

Definición 2.36 Si L es un subcomplejo de un complejo simplicial K , entonces decimos que hay un **colapsamiento elemental simplicial de K a L** si $K - L$ consta de dos simplejos A y B si $A = a * B$ con a vértice de A . Entonces $|K| = |L| \cup A$ y $|L| \cap A = a * (fr(B))$. Si el complejo simplicial K colapsa simplicialmente al subcomplejo L entonces escribimos $K \searrow^s L$.

Definición 2.37 Sean X y Y poliedros con $Y \subset X$. Decimos que hay un **colapsamiento elemental de X a Y** si hay una n -bola B^n PL y una $(n - 1)$ -bola B^{n-1} PL tales que $B^{n-1} \subset B^n$ y tales que $X = Y \cup B^n$ y $Y \cap B^n = B^{n-1}$, se denota este hecho con $X \searrow Y$.

Definición 2.38 Sea P un subpoliedro en una variedad M lineal a pedazos. Entonces una **vecindad regular de P en M** es un poliedro N tal que

- N es una vecindad cerrada de P en M .
- N es una n -variedad PL.
- $N \searrow P$.

Definición 2.39 Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ está en **posición general** si no hay $r + 2$ puntos de X que yazcan sobre un hiperplano afín r -dimensional $r = 1, 2, \dots, n - 1$. Esto es cada subconjunto de X con menos de $n + 2$ puntos es tal que si $X = \{x_0, x_1, \dots, x_r\}$ entonces los vectores $\overrightarrow{x_0 x_i}$ con $i = 1, \dots, r$ son linealmente independientes.

Definición 2.40 El complejo simplicial L es llamado una **subdivisión** del complejo K si $|K| = |L|$ y cada simplejo de L está contenido en un simplejo de K

Definición 2.41 El **baricentro** $\hat{\sigma}$ de un p -simplejo σ es el punto cuyas coordenadas baricéntricas son todas iguales a $\frac{1}{p+1}$ donde $\sigma = \langle \sigma_0, \dots, \sigma_p \rangle$. Así $\hat{\sigma} = (\frac{1}{p+1}\sigma_0 + \dots + \frac{1}{p+1}\sigma_p)$.

Definición 2.42 La **primera subdivisión baricéntrica** de un complejo K con simplejos $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ es el complejo

$$K' = \{ \langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_s} \rangle \mid \sigma_{i_0} < \dots < \sigma_{i_s} \}.$$

La n -ésima **subdivisión baricéntrica** K^n está definida inductivamente por $K^n = (K^{n-1})'$. Las **subdivisiones derivadas** son definidas de la misma manera, excepto que el baricentro del simplejo σ_i es reemplazado por un punto interior arbitrario.

Definición 2.43 Si J es un complejo y $X \subset |J|$ entonces la **vecindad simplicial** $N(X, J)$ de X en J es el subcomplejo simplicial mínimo de J que contiene todos los simplejos de J que intersecan a X .

Definición 2.44 Suponga que P es un poliedro en una n -variedad M PL. Sea M_0 un poliedro en M el cual contiene una vecindad topológica en M de P . Si M es compacta escogemos $M = M_0$. Sea (J, K) una triangulación de la pareja (M_0, P) tal que K es **completo** en J , esto es, no hay simplejos en $J - K$ cuyos vértices estén en K . Si J' es la primera subdivisión derivada de J entonces el poliedro $|N(P, J')|$ es llamado una **vecindad derivada** de P en N , de igual manera es llamado el poliedro $|N(P, J^{(2)})|$.

El siguiente resultado es claro y omitimos su demostración la cual se puede ver en [[13], pág 18].

Lema 2.10 Si X y Y son poliedros tales que $X \searrow Y$, entonces Y es un retracto por deformación PL de X .

Teorema 2.6 \mathbb{R}^n contiene un subconjunto denso de puntos en posición general.

Demostración. Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ un subconjunto denso numerable de \mathbb{R}^n . Sea $y_1 = x_1$. Inductivamente escogemos puntos y_1, \dots, y_{k-1} en posición general tales que $d(x_i, y_i) < \frac{1}{i}$ para $i < k$, ahora escogemos un punto y_k con $d(x_k, y_k) < \frac{1}{k}$ tal que y_k no yace en ninguno del número finito de los hiperplanos de \mathbb{R}^n determinados por subconjuntos que contienen a lo más n de los puntos y_1, \dots, y_{k-1} . La sucesión $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ definida inductivamente de esta manera es entonces un conjunto denso de puntos en posición general en \mathbb{R}^n . \square

El siguiente resultado se enuncia sin demostración la cual puede ser vista en [[13], pág 26].

Teorema 2.7 Si K es un k -complejo, entonces existe un homeomorfismo $s : |K| \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ el cual es lineal sobre cada simplejo de K .

A continuación enunciamos parte del teorema de la vecindad regular enunciado en [[13], pág20], más explícitamente muestra la existencia de una vecindad regular.

Teorema 2.8 (Teorema de la vecindad regular.) Si P es un poliedro en una variedad M PL, entonces cualquier vecindad derivada de P en M es una vecindad regular de P en M .

Teorema 2.9 (Aproximación simplicial relativa.) Sean P, Q y R poliedros con $Q \subset P$ y sea $f : P \rightarrow R$ una aplicación continua tal que $f|_Q$ es PL. Entonces dado $\epsilon > 0$ hay una aplicación PL $g : P \rightarrow R$ tal que:

1. $f|_Q = g|_Q$
2. $d(f, g) < \epsilon$
3. f y g son homotópicas relativamente a Q .

Demostración. Podemos suponer por el Teorema 2.7 que $R \subset \mathbb{R}^n$ para algún n . Sea N una vecindad poliédrica de R en \mathbb{R}^n para la cual hay una retracción $r : N \rightarrow R$, tal vecindad existe por el Teorema 2.8 y el Lema 2.10. Sea $\varepsilon \leq \varepsilon'$ suficientemente pequeño tal que la ε' vecindad de R yazca en N . Por la continuidad uniforme de r hay un $\delta > 0$ tal que para cada $x \in R$ la δ vecindad $N_\delta(x) \subset N$ y $\text{diam}(r(N_\delta(x))) < \varepsilon'$. Por la continuidad uniforme de f , escogemos $\eta > 0$ tal que cada subconjunto de P de diámetro menor que η es aplicado por f sobre un conjunto de diámetro menor que $\frac{\delta}{2}$. Sea (K, L) una triangulación de (P, Q) tal que K tiene medida menor que η . Si $f^1 : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal de K la cual coincide con f sobre los vértices de K , entonces $d(f, f^1) < \delta$, $f^1|_Q = f|_Q$ y $f^1(P) \subset N$. Sea $g = rf^1 : P \rightarrow R$. Ciertamente, $d(f, g) < \varepsilon' \leq \varepsilon$ y $g|_Q = f|_Q$. Sea $h : P \times I \rightarrow N$ tal que $h(x, t) = f(x)t + (1-t)g(x)$. Entonces $H = rh : P \times I \rightarrow R$ es la homotopía requerida entre f y g . \square

El siguiente concepto es importante para entender la demostración del recíproco del teorema de Schoenflies para espacios no métricos.

Definición 2.45 Si $g : |K| \rightarrow |M|$ es una aplicación entonces

$$S(g) = \overline{\{x \in |K| : g^{-1}(g(x)) \neq \{x\}\}}.$$

$S(g)$ es llamado *el conjunto singular de g* .

EL siguiente resultado puede ser vista en [[13], pág 29]

Teorema 2.10 *Teorema común de posición general.* Sea L un subcomplejo p -dimensional del k -complejo K tal que $\dim(|K| - |L|) = q$. Sea $f : K \rightarrow M$ una aplicación PL en una n -variedad combinatoria no acotada tal que $f|_{|L|}$ es un homeomorfismo PL. Entonces dado $\varepsilon > 0$, hay una aplicación $g : K \rightarrow M$ PL tal que

1. $f|_L = g|_L$
2. $d(f, g) < \varepsilon$
3. $\dim S(g) \leq k + q - n$.

Enunciamos y probamos a continuación nuestro resultado principal de la sección, el recíproco del teorema de Schoenflies para espacios no métricos.

Proposición 2.8 *Supongamos que M es una superficie de Hausdorff. Si cada circunferencia J encajado en M acota un 2-disco en M entonces M es simplemente conexa.*

Demostración. Debemos probar que para cualquier lazo $\lambda : [0, 1] \rightarrow M$ no constante en M tenemos que λ es homotópico relativamente a $\{0, 1\}$ a una circunferencia encajada. Ahora bien, notemos que $\lambda([0, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Entonces haciendo $M_* = \bigcup_{i=1}^n U_i$ por la Proposición 2.1 tenemos que M_* es metrizable. Luego podemos aplicar el Teorema 2.1 (i) que dice que toda superficie metrizable es triangulable, por lo que $M_* = |K|$ donde K es un complejo simplicial. Podemos suponer que $\lambda(0) = \lambda(1)$ es un vértice de K . Por el Teorema 2.9 tenemos que existe una función simplicial $\mu : [0, 1] \rightarrow |K|$, tal que λ es ε -homotópica relativa a $\{0, 1\}$ a μ donde ε está relacionado con la cubierta finita de

cartas para $\lambda([0, 1])$, esto es la imagen de μ esta contenida en $\lambda([0, 1])$. Además podemos tomar $\mu(0) = \mu(1) = \lambda(1)$. Por el Teorema de posición general podemos suponer que μ está en posición general así que el conjunto singular es discreto. Así hay una partición $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ de $[0, 1]$ consistente sólo de puntos singulares de μ .

Para cada $i = 1, \dots, n$ tenemos que $\mu|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es un encaje o $\mu(t_{i-1}) = \mu(t_i)$ y $\mu|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es un encaje. En el caso en el que $\mu|_{[t_{i-1}, t_i]}$ sea un círculo encajado por hipótesis tenemos que acota un 2-disco y como este es contraíble existe una homotopía $H : M_* \times I \rightarrow M_*$ tal que $H(x, 0) = \mu|_{[t_{i-1}, t_i]}$ y $H(x, 1) = cte$. Ahora modificamos nuestro lazo μ de tal manera que el nuevo lazo coincida con $\mu|_{[0, t_{i-1}] \cup [t_i, 1]}$ y sea constante sobre $[t_{i-1}, t_i]$. Ahora si $\mu|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es un encaje (no un lazo), entonces no modificamos μ y seguimos con el intervalo $[t_{i-2}, t_{i+1}]$ repitiendo el proceso anterior. Así obtenemos un lazo ν el cual es homotópico a μ , y por tanto a λ , relativo a $\{0, 1\}$ y es tal que $\nu([0, 1])$ es un círculo encajado, como queríamos. Ya que, por hipótesis, todo círculo encajado acota un disco, tenemos que el lazo μ , y por lo tanto también el lazo λ , son contraíbles. \square

Por tanto obtenemos el resultado

Teorema 2.11 *Una superficie M de Hausdorff, es simplemente conexa si, y sólo si, cada curva de Jordan en M acota un 2-disco en M .*

Capítulo 3

Aplicaciones a sistemas dinámicos.

En [[3], pág.9] se tiene que una variedad con un flujo mínimo es métrica. Particularizando para superficies tenemos que superficies no métricas no soportan flujos mínimos. En este capítulo basado en el artículo [2], veremos que superficies no métricas en las que se cumple el teorema de Jordan no soportan un flujo transitivo y que superficies no métricas que son ω -acotadas y se cumple el teorema de Schoenflies soportan flujos con un punto fijo.

3.1. Breve introducción a los sistemas dinámicos.

Iniciamos este capítulo con algunas definiciones de sistemas dinámicos extraídas del libro [9].

Definición 3.1 Un **flujo** sobre un espacio X es una **familia monoparamétrica** $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de homeomorfismos de X tales que $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}$ para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$, y tales que la aplicación $\Phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por $\Phi(x, t) = \Phi^t(x)$, es continua.

Definición 3.2 La **órbita de un punto** $x \in X$ bajo un flujo $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es el conjunto $O_x = \{\Phi^t(x) : t \in \mathbb{R}\} \subset X$, donde $\Phi^t(x) = \Phi(t, x)$.

Definición 3.3 La **semi órbita de un punto** $x \in X$ bajo un flujo $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es $\gamma^+(x) = \{\Phi^t(x) : t \in \mathbb{R}^+\}$.

Definición 3.4 Dados $T_1 < T_2$, denotamos con $\Phi(x, T_1, T_2) = \{\Phi(x, t) | T_1 \leq t \leq T_2\}$ y lo llamamos **arco** de la órbita de x .

Definición 3.5 A $T_2 - T_1$, lo llamamos **longitud temporal** de la órbita de x .

Definición 3.6 Si x es tal que para todo t , $\Phi(x, t) = x$, llamamos a x **punto fijo** o **punto singular**.

Definición 3.7 Para cualquier conjunto $E \subset X$ y $T > 0$ llamamos al conjunto

$$\Psi = \Phi(E; -T, +T) = \{\Phi(x, t) | x \in E, |t| \leq T\}$$

un *tubo finito* de longitud temporal $2T$.

Definición 3.8 Un flujo sobre un espacio X es **topológicamente transitivo** si hay un punto $x \in X$ cuya órbita bajo el flujo es densa en X .

Definición 3.9 Un flujo se denomina **no singular** si no tiene puntos fijos.

Definición 3.10 Dada una superficie M , decimos que M soporta un **flujo mínimo** si para cada $x \in M$ la órbita es densa bajo el flujo Φ .

Enunciamos algunas definiciones y resultados de sistemas dinámicos para espacios métricos los cuales serán de gran ayuda para el entendimiento de los resultados de esta sección, los cuales se extrajeron del libro [[9], parte II capitulo V].

Definición 3.11 Un **sistema dinámico** es un grupo uno paramétrico $\Phi(p, t)$ con $t \in \mathbb{R}$ de transformaciones del espacio R ($p \in R$) en sí mismo ($\Phi(p, t) \in R$) satisfaciendo las condiciones:

1. La condición inicial: $\Phi^0(x) = \Phi(x, 0) = x$ para todo $x \in X$.
2. La condición de grupo $\Phi(\Phi(x, t_1), t_2) = \Phi(x, t_1 + t_2)$ para cualquier $x \in X$ y cualesquiera $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. La variable t es el parámetro de grupo.
3. La continuidad de $\Phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ respecto al conjunto de variables x y t .

Definición 3.12 Dado un sistema dinámico $\Phi(x, t)$, si fijamos x , llamamos a la función $t \rightarrow \Phi(x, t)$ la **trayectoria** de x dada por el sistema dinámico.

Definición 3.13 Sean X un espacio métrico y $\Phi(p, t)$ un sistema dinámico. Consideremos la semi-trayectoria $\gamma^+(x)$ y sea una sucesión decreciente, acotada de valores de t :

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty;$$

si la sucesión de puntos

$$\Phi(p, t_1), \Phi(p, t_2), \dots, \Phi(p, t_n), \dots$$

tiene un punto límite q entonces llamamos a este punto **ω -límite** del flujo $\Phi(p, t)$.

Definición 3.14 Un conjunto $F \subset \Psi$, cerrado en Ψ , será **una sección local** del tubo finito Ψ si a cada punto $p \in \Phi(E; -T, +T)$ le corresponde un único número t_p tal que $\Phi(p, t) \in F$, y $|t_p| < 2T$.

El siguiente resultado nos garantiza la existencia de secciones locales de un flujo en un espacio métrico.

Teorema 3.1 (Bebutov.) *Si p no es un punto crítico de un sistema dinámico (flujo), entonces para $\tau_0 > 0$ suficientemente pequeño podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que el tubo construido sobre $\text{int}(D_\delta(p))$ de longitud temporal $2\tau_0$ tiene una sección local.*

Demostración. Puesto que p no es punto crítico existe un $\theta_0 > 0$ tal que $d(p, \Phi(p, \theta_0)) > 0$. Definamos la función continua de q y t :

$$\varphi(q, t) = \int_t^{t+\theta_0} d[\Phi(q, \tau), p] d\tau.$$

A partir de la propiedad de grupo para Φ tenemos que se cumple para φ que:

$$\begin{aligned} (1) \quad \varphi(q, t_1 + t_2) &= \int_{t_1+t_2}^{t_1+t_2+\theta_0} d[\Phi(q, \tau), p] d\tau \\ &= \int_{t_2}^{t_2+\theta_0} d[\Phi(q, t_1 + \tau), p] d\tau \\ &= \int_{t_2}^{t_2+\theta_0} [d[\Phi(\Phi(q, t_1), \tau), p]] d\tau \\ &= \varphi(\Phi(q, t_1), t_2). \end{aligned}$$

Ahora por el teorema fundamental del cálculo podemos ver que la función $\varphi(q, t)$ tiene derivada parcial

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(q, t) = d[\Phi(q, t + \theta_0), p] - d[\Phi(q, t), p]$$

lo que garantiza la continuidad en $(q, t) \in M \times \mathbb{R}$.

Puesto que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(p, 0) = d[\Phi(p, \theta_0), p] > 0$, por continuidad de φ respecto a p , podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(q, 0) > 0$ para $q \in \text{int}(D_\varepsilon(p))$.

Por la continuidad de Φ podemos definir τ_0 con la condición que para $|t| \leq 3\tau_0$ tenemos que $\Phi(p, t) \in \text{int}(D_\varepsilon(p))$. Deseamos probar que

$$\varphi(p, \tau_0) > \varphi(p, 0) > \varphi(p, -\tau_0).$$

En efecto, por ser $\text{int}(D_\varepsilon(p))$ abierto podemos escoger $\eta > 0$ tal que $D_\eta(\Phi(p, \tau_0)) \subset D_\varepsilon(p)$, $D_\eta(\Phi(p, -\tau_0)) \subset \text{int}(D_\varepsilon(p))$ y tal que para $q \in \text{int}(D_\eta(\Phi(p, \tau_0)))$, como $\varphi(q, 0) = \varphi(\Phi(q, 0), 0)$ y $d[\Phi(p, \tau_0), f(q, 0)] < \eta$ entonces por continuidad de φ respecto a q tenemos que $\varphi(\Phi(q, 0), 0) \approx \varphi(\Phi(p, \tau_0), 0)$ y por (1) tenemos que $\varphi(\Phi(p, \tau_0), 0) = \varphi(p, \tau_0)$. Luego, como $\varphi(p, \tau_0) > \varphi(p, 0)$ tenemos que $\varphi(q, 0) > \varphi(p, 0)$. Análogamente al caso anterior para $q \in \text{int}(D_\eta(\Phi(p, -\tau_0)))$ tenemos que $\varphi(q, 0) < \varphi(p, 0)$.

Finalmente, por la continuidad de Φ determinamos $\delta > 0$ tal que $\Phi(D_{\tau_0}(p)) \subset \text{int}(D_\varepsilon(\Phi(p, \varepsilon)))$, $(D_{-\tau}(\Phi(p, -\tau_0))) \subset \text{int}(D_\eta(\Phi(p, -\tau)))$ y tal que para $|t| \leq 3\tau_0$ tenemos $\Phi(\text{int}(D_\delta(p), t) \subset \text{int}(D_\varepsilon(p))$. Deseamos mostrar que si $q \in D_\delta(p)$ existe uno y sólo un valor de t_q , $|t_q| < \tau_0$, tal que $\varphi(q, t_q) = \varphi(p, 0)$. Esto se sigue del hecho que $\varphi(q, t)$ dentro de

$D_\varepsilon(p)$ es una función continua creciente de t y $\varphi(q, \tau_0) > \varphi(p, 0) > \varphi(q, \tau_0)$ puesto que $\Phi(q, \tau_0) \in D_\eta(\Phi(p, \tau_0))$ y $\Phi(q, -\tau) \in D_\eta(\Phi(p, -\tau_0))$.

La sección deseada F para el tubo $\Psi = \Phi[D_\delta(p); -\tau_0, \tau_0]$ es el conjunto Q de puntos $q \in \Phi$ para los cuales $\varphi(q, 0) = \varphi(p, 0)$. En efecto en primer lugar veamos que F es cerrado. Si $q_n \rightarrow q$ entonces utilizando la definición de Φ y el hecho que φ es continua tenemos que $\varphi(q, 0) = \varphi(\lim q_n, 0) = \lim \varphi(q_n, 0) = \lim \varphi(p, 0)$ así $q \in \Psi$.

Ahora probaremos que para cada $q \in \Psi$ existe un número t_q , $|t_q| \leq 2\tau_0$, tal que $\varphi(q, t_q) \in F$. Para un punto dado $q \in \Psi$ podemos encontrar, por virtud de la definición de Φ , un cierto t' , $|t'| \leq \tau_0$ tal que $q' = \Phi(q, t') \in D_\delta(p)$, y para q' podemos encontrar de acuerdo a lo que hemos probado, un t'' $|t''| \leq \tau_0$, tal que $\Phi(q', t'') \in F$, esto es, por la propiedad de grupo de Φ , tenemos que $\Phi(q, t' + t'') = \Phi(q, t_q) \in F$, donde t_q , donde $t_q = t' + t''$, $|t_q| \leq 2\tau_0$.

Para finalizar la prueba demostraremos la unicidad de t_q . En efecto sean t'_q y t''_q $|t'_q| \leq 2\tau_0$, $|t''_q| \leq 2\tau_0$ tales que $\varphi(q, t'_q) \in F$, $\varphi(q, t''_q) \in F$; de nuevo sea $q' = \Phi(q, t') \in D_\delta(p)$ $|t'| \leq 2\tau_0$.

Entonces por (1), por definición de q , por la propiedad de grupo de φ respecto a t , tenemos

$$\varphi(q', t'_q - t') = \varphi(\Phi(q', -t'), t'_q) = \varphi(\Phi(\Phi(q, t'), -t'), t'_q) = \varphi(\Phi(q, t' - t'), t'_q) = \varphi(\Phi(q, 0), t'_q) = \varphi(q, t'_q) = \varphi(\Phi(q, t'_q), 0) = \varphi(p, 0).$$

De manera análoga $\varphi(q', t''_q - t') = \varphi(\Phi(q', -t'), t''_q) = \varphi(\Phi(\Phi(q, t'), -t'), t''_q) = \varphi(\Phi(q, t' - t'), t''_q) = \varphi(\Phi(q, t'_q), 0)$ entonces $\varphi(q', t'_q - t') = \varphi(q', t''_q - t')$. Pero, puesto que $|t'_q - t''_q| \leq 3\tau_0$, $|t'_q - t''_q| \leq 3\tau_0$, y para t en $t'_q - t'$ y $t''_q - t'$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(q', t) > 0$, entonces $t'_q - t' = t''_q - t'$ de donde $t'_q = t''_q$. Por tanto hemos probado que F es una sección local del tubo Ψ . □

La siguiente proposición más que una implicación es una equivalencia pero para nuestros fines será suficiente verla como una implicación.

Proposición 3.1 *Dado un espacio X si L es denso en X entonces para cualquier abierto $S \neq \emptyset$ en X , tenemos que $S \cap L \neq \emptyset$.*

Definición 3.15 *Un flujo-caja en un sistema dinámico Φ es el conjunto*

$$\Phi(\Sigma_x \times [-\varepsilon, \varepsilon]),$$

donde Σ_x denota una sección local.

Proposición 3.2 *Una superficie dicotómica (esto es, dividido por cualquier circunferencia encajada) M no soporta un flujo transitivo.*

Demostración. Supongamos que la superficie M tiene un punto x cuya órbita es densa bajo un flujo Φ . Podemos tomar una sección transversal Σ_x a través de x cuya existencia está garantizada por el teorema 3.1 y consideremos un flujo-caja $\Phi(\Sigma_x \times [-\varepsilon, \varepsilon])$. Note

que la teoría clásica de Whitney-Bebutov se establece bajo una hipótesis de metricidad, más generalmente, puesto que la órbita $\Phi(\mathbb{R} \times V)$ de una carta V es lindelöf. Ahora bien, puesto que la órbita es densa, el punto x debe retornar a Σ_x . El primer punto de retorno lo llamamos x_1 . La porción de trayectoria desde x a x_1 unida con el arco A en Σ_x que une x con x_1 define una curva de Jordan J en M . La componente de $M - J$ que contiene a $\Phi(x_1, \frac{\varepsilon}{2})$ contiene el futuro de x_1 ($\varepsilon > 0$) ya que el espacio es dicotómico. Luego, el pasado corto del arco A , o sea $\Phi(\text{int}A \times (-\varepsilon, 0))$ es un subrectángulo abierto que no interseca la órbita de x . Esto contradice que la órbita sea densa. \square

Observación 3.1 *Ahora bien, una superficie simplemente conexa es intransitiva. Ejemplos de superficie intransitivas puesto que son simplemente conexas:*

- (I) *La superficie de Moore dada como sigue: supongamos que Γ denota el semiplano superior cerrado $\{(x, y) | y \geq 0\}$ en \mathbb{R}^2 . Para cada punto en el semiplano superior abierto, las vecindades básicas serán los discos abiertos usuales (con la restricción, por supuesto, de ser tomadas suficientemente pequeñas como para estar en Γ). En los puntos z sobre el eje x , las vecindades básicas serán los conjuntos $\{z\} \cup A$, donde A es un disco abierto en el semiplano superior, tangente en el eje x en z .*
- (II) *La superficie de Prüfer la cual puede ser construida de la siguiente manera: tomando una copia, X_a del plano, para cada número real a , y tomar una copia H del semiplano superior (de parejas (x, y) con $y > 0$), después pegar cada plano X_a con el semiplano superior H de \mathbb{R}^2 mediante la identificación de $(x, y) \in X_a$ con el punto $(a + yx, y) \in H$.*

Una superficie que no es simplemente conexa pero sí es intransitiva es la superficie doble de Prüfer $2P$.

Lema 3.1 *Un flujo sobre una superficie Schoenflies con una órbita periódica tiene un punto fijo.*

Demostración. La órbita periódica es una circunferencia topológica, así acota un 2-disco, el cual es invariante bajo el flujo Φ . Aplicando el teorema del punto fijo de Brouwer a las funciones $\Phi_n = \Phi(X, \frac{1}{2^n})$ obtenemos una sucesión anidada de conjuntos de puntos fijos no vacíos $K_n = \text{Fix}(\Phi_n)$ cuya intersección comun $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ es no vacío por la compacidad del disco. Por continuidad, un punto en este conjunto es fijo bajo el flujo. \square

3.2. Estructura de las superficies ω -acotadas.

En esta sección veremos que superficies ω -acotadas que satisfacen el teorema de Jordan-Schoenflies soportan un flujo no singular.

Es bien conocido que las superficies cerradas (compactas sin frontera) están completamente clasificadas como sumas conexas de toros o sumas conexas de planos proyectivos.

Pero para nuestros intereses extendemos esta noción a superficies ω -acotadas con frontera.

Definición 3.16 *Un número ordinal, o simplemente un ordinal, es un representante del tipo de orden de un conjunto bien ordenado. Los ordinales finitos son los números naturales $0, 1, 2, \dots$. Al primer ordinal infinito se le denota ω . En el caso infinito, se corresponde con distintas maneras de ordenar el conjunto de los ordinales, a saber,*

$$\omega, \omega + 1, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega^2, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \epsilon_0, \dots$$

Los ordinales se clasifican en

1. Un ordinal sucesor α es un ordinal que es el siguiente de algún otro, $\alpha = \beta + 1$.
2. Un ordinal λ no nulo es límite si no es el ordinal siguiente a ningún otro ordinal.

Definición 3.17 *El cardinal de un conjunto es el número de elementos que contiene. Se dice que dos conjuntos tienen el mismo cardinal si existe una biyección entre ellos. Contrariamente a los ordinales, esta biyección no tiene que respetar el orden (además los conjuntos no tienen que ser ordenados).*

Observación 3.2 *Como ya tenemos el conjunto de "los ordinales" veamos sus tamaños (o sea sus cardinales) respectivos. Los ordinales finitos también son cardinales: entre dos conjuntos con n y m elementos, m y n distintos, no puede haber biyección, por lo tanto tienen cardinales distintos. Pero no es el caso con los ordinales infinitos: Por ejemplo, ω y $\omega + 1$ están en biyección por la función: $\omega + 1 \rightarrow \omega$, $x \rightarrow x + 1$ y $\omega \rightarrow 0$, tal biyección no respeta el orden, por eso dos ordinales distintos pueden corresponder a un mismo cardinal. Se suele denotar $|A|$ el cardinal de A . Se llama \aleph_0 (alef 0) el cardinal de ω , o sea del conjunto de los naturales (donde alef es la primera letra del alfabeto hebreo). Se llama \aleph_1 al cardinal de ω_1 o sea el primer ordinal límite que no es equivalente a los naturales.*

A continuación damos algunas definiciones y resultados de la estructura de las superficies ω -acotadas, tomadas de [8].

Definición 3.18 *Un espacio es un tubo largo si es la unión de una cadena $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subespacios abiertos U_α homeomorfos a $S^1 \times \mathbb{R}$, tal que $\bar{U}_\alpha \subset U_\beta$ y tal que la frontera de U_α en U_β es homeomorfa a S^1 cuando $\alpha < \beta$.*

Definición 3.19 *Un espacio topológico es ω -acotado si cada subconjunto numerable tiene cerradura compacta.*

Es fácil ver que un tubo largo se obtiene removiendo un punto de la superficie ω -acotada, la cual es la unión de una sucesión decreciente de subespacios homeomorfos a \mathbb{R}^2 . No importa que punto se remueva. Dos ejemplos topológicos de tubos largos son $S^1 \times \mathbb{L}^+$ y el espacio obtenido de remover un punto de $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$.

Definición 3.20 Un espacio X es de **tipo I** si es la unión de una ω_1 -sucesión $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subespacios abiertos tal que si $\beta < \alpha$ entonces $\bar{U}_\alpha \subset U_\beta$ y tal que \bar{U}_α es de Lindelöf para todo α .

Lema 3.2 Un espacio localmente separable y de tipo I es ω -acotado si y sólo si es numerablemente compacto.

Corolario 3.1 Una superficie es ω -acotada si, y sólo si, es numerablemente compacta y de tipo I.

Definición 3.21 Una colección de parejas ajenas de conjuntos abiertos no vacíos en X es llamada una **familia celular**. La **celularidad** de X está definida como:

$$C(X) = \sup\{|v| : v \text{ una familia celular en } X\} + \omega.$$

Definición 3.22 Sea X de tipo I. Una **sucesión canónica** para X es una sucesión $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ de subespacios abiertos de X tal que \bar{X}_α es de Lindelöf para toda α , $\bar{X}_\alpha \subset X_{\alpha+1}$ para toda α , $X_\lambda = \cup_{\beta < \lambda} X_\beta$ para cualquier ordinal límite λ , y $X = \cup_{\alpha < \omega_1} X_\alpha$.

Lema 3.3 Sea X una superficie de tipo I y sea $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ canónica para X . Entonces $X - \bar{X}_\alpha$ tiene a lo más numerables componentes. Más aún, si X es numerablemente compacta, entonces $X - \bar{X}_\alpha$ tiene a lo más finitas componentes no metrizables.

Demostración. Puesto que X es localmente conexo, las componentes de $X - \bar{X}_\alpha$ son abiertos en X . Puesto que X es conexo cada componente se encuentra en $X - \bar{X}_\alpha$. Pero X_α tiene celularidad numerable; así sólo podemos tener componentes numerables. De éstas sólo finitas componentes pueden encontrarse en $X - \bar{X}_\alpha$ si X es numerablemente compacta. Si fueran infinitas, el conjunto sería $\{M_n : n \in \omega\}$; entonces $X_{\alpha+1} \cup \{M_n : n \in \omega\}$ sería una cubierta abierta infinita de X , la cual no tiene una subcubierta propia. Sin embargo $X_{\alpha+1}$ es metrizable y así no contiene componente no metrizable. Por tanto son sólo un número finito. \square

Definición 3.23 Sea X una superficie de tipo I, y sea $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ la forma canónica para X . El **árbol** de las componentes acotadas no metrizables asociadas con $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, lo denotamos por $\Upsilon(\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle)$, y es la colección de todos los conjuntos de la forma $fr(C)$ tal que C es una componente no metrizable de $X - \bar{X}_\alpha$ para algún α , con el siguiente orden: si $A, B \in \Upsilon(\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle)$, entonces $A \leq B$ si, y sólo si, B es un subconjunto de una componente cuya frontera es A .

Notemos que Υ puede ser dividido por niveles. En general el α -nivel es la frontera de las componentes de $X - \bar{X}_\alpha$. Un importante hecho en Υ es que cada elemento tiene sucesores en todos los niveles.

Definición 3.24 Un espacio localmente conexo X es un **troncoide**, si dado cualquier subconjunto cerrado C de Lindelöf, $X - C$ tiene a lo más una componente no de Lindelöf.

Lema 3.4 Sea X una superficie de tipo I y Υ un árbol asociado. Son equivalentes

1. X es un troncoide.
2. Υ es una cadena (posiblemente vacía) para alguna $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$.
3. Υ es una cadena (posiblemente vacía) para toda $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$.

Demostración. Es fácil ver que $3 \Rightarrow 2$ y probaremos que $2 \Rightarrow 3$ de las implicaciones $1 \Rightarrow 3$ y $2 \Rightarrow 1$. En efecto $1 \Rightarrow 3$, puesto que $\overline{X_\alpha}$ es de Lindelöf y cada componente de $X - X_\alpha$ es una superficie y así es metrizable si, y sólo si, es Lindelöf. Ahora miremos que $2 \Rightarrow 1$, por contradicción. Si $X - C$ tiene dos componentes no de Lindelöf K_1 y K_2 para algún subconjunto cerrado no de Lindelöf, escogamos $X_\beta \in \langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $C \subset X_\beta$, entonces los conjuntos $K_1 - \overline{X_\beta}$ y $K_2 - \overline{X_\beta}$ son ambos no metrizables (porque no son de Lindelöf) ajenos y abiertos en X . Así cada uno tiene una componente no metrizable la cual también es una componente de $X - \overline{X_\beta}$. Pero las fronteras de estas componentes son distintas del vacío; así ellos son miembros incomparables de Υ , lo cual es una contradicción. \square

El siguiente resultado se tiene para variedades de cualquier dimensión, pero para nuestros fines lo hacemos de manera particular para superficies.

Teorema 3.2 (El lema de la Gaita.) *Cada superficie M que es ω -acotada tiene un subconjunto abierto de Lindelöf U tal que $M - \overline{U}$ es la unión de finitas superficies troncoides.*

Demostración. Escogemos una sucesión canónica $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ y sea η_α la cardinalidad del α -nivel de $\Upsilon(\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle)$. Luego por Lema 3.3 la cardinalidad del α -nivel, n_α , de Υ es finito, y la sucesión n_α es no decreciente puesto que cada elemento tiene sucesores en todos los niveles. Por tanto hay un $\alpha < \omega_1$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $n_\beta = n$ para toda $\beta \geq \alpha$. En otras palabras, la porción de Υ arriba del α -nivel es la unión de n cadenas ajenas. Sea $\{M_1, \dots, M_n\}$ el conjunto de componentes no metrizables de $M - X_{\alpha+1}$. La traza de $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ sobre M_i es una sucesión canónica y el resultado es un árbol Υ_i que es una cadena. El Lema 3.4 implica que cada M_i es un troncoide, y $U = M - \bigcup_{i=1}^n M_i$ es el conjunto deseado. \square

El siguiente resultado se encuentra en [[13],pág.20].

Teorema 3.3 *En una variedad lineal a pedazos con frontera, cada subconjunto compacto tiene una vecindad local poliédrica la cual es una variedad con frontera.*

Corolario 3.2 *Si M es una superficie ω -acotada, entonces existe una sucesión canónica $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ para M tal que $\overline{M_{\alpha+1}}$ es una superficie compacta para cada α .*

Demostración. Sea M_0 un disco abierto en la superficie M . Con M_α definido en la sucesión canónica, escogemos un espacio N conexo, metrizable y abierto de M que contiene a $\overline{M_\alpha}$. Esto puede hacerse porque M_α es de Lindelöf y por tanto compacto. Dentro de esta elección escogemos una superficie compacta cuyo interior (en N , por tanto en M) contiene a $\overline{M_\alpha}$. Llamamos $M_{\alpha+1}$ este interior, notemos que si es el interior de una superficie poliédrica, es conexo. Por supuesto, $M_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} M_\alpha$ para cualquier ordinal límite λ . Entonces M_λ es separable y por tanto $\overline{M_\lambda}$ es compacto. \square

Definición 3.25 Si M es una variedad con frontera y A y B son subconjuntos cerrados de M , entonces A y B son **cobordantes** en M si $A \cup B$ es la frontera en M de un subvariedad abierta de M .

Lema 3.5 Si M es una superficie ω -acotada, entonces M no contiene un conjunto infinito de parejas ajenas de círculos no-cobordantes.

Demostración. Primero supongamos que M es compacta. Para cualquier conjunto finito \mathbf{A} de círculos ajenos en M , hay una triangulación de M tal así que cada círculo en \mathbf{A} es la unión de aristas de la triangulación. Entonces cada $A \in \mathbf{A}$ es representado por 1-ciclo en el grupo de cadenas simpliciales 1-dimensionales con coeficientes en \mathbb{Z}_2 . Dos miembros de \mathbf{A} son cobordantes, si y sólo si, la suma de los correspondientes ciclos *mod*2 es una frontera; en otras palabras, los ciclos tendrían la misma imagen en el grupo de homología 1-dimensional. Pero este grupo es un invariante topológico y M tiene una triangulación finita, así el grupo es finito, y su cardinalidad es una cota sobre la cardinalidad del conjunto de parejas de círculos no-cobordantes.

En el caso que M no sea compacta, usamos el corolario 3.2. Supongamos que \mathbf{A} es un conjunto infinito numerable de círculos en M . Sea α tal que $\overline{M}_{\alpha+1}$ es una superficie compacta cuyo interior contiene cada elemento de \mathbf{A} . Sumando finitas componentes metrizables de $X - \overline{M}_{\alpha+1}$ a M_α , podemos suponer que cada componente de $X - \overline{M}_{\alpha+1}$ es no metrizable. Reemplazamos cada una de estas componentes no metrizables M_i por una metrizable de la siguiente manera. La frontera de M_i es la unión de k_i ($< \omega$) círculos; cortamos K_i discos abiertos ajenos de una esfera, y asignamos el resultado de la frontera de estos círculos en $1 - 1$ a estos K_i círculos resultado de la eliminación de M_i . Es fácil mirar que dos círculos en $\overline{M}_{\alpha+1}$ son cobordantes en M si, y sólo si, ellos son cobordantes en el nuevo espacio; la clave es que $A \cup B$ (donde A y B son círculos en $\overline{M}_{\alpha+1}$) es la frontera de algún conjunto abierto U que se encuentra en M_i , entonces U debe contener todo M_i ; lo mismo pasa en el nuevo espacio. Pero el nuevo espacio es una superficie compacta, y esto contradice que \mathbf{A} sea infinita. \square

Teorema 3.4 (El Teorema de la Gaita.) Cada superficie ω -acotada M tiene una subvariedad compacta K tal que $M - K$ es la unión finita de tubos largos abiertos.

Demostración. Por el Teorema 3.2 existe un compacto $V = \overline{U}$ tal que $M - V$ es una subvariedad de troncoides no metrizables. Sea $\langle M_\alpha : \alpha < \omega \rangle$ una sucesión canónica para M entonces $\Upsilon(\langle M_\alpha : \alpha < \omega \rangle) = \Upsilon$ es una cadena y cada elemento de Υ es unión finita de círculos ajenos. Deseamos mostrar que hay miembros no numerables de círculos unitarios. Sea C la colección de todas las componentes de elementos sucesores de Υ . Usaremos la relación de partición $\omega_1 \rightarrow (\omega_1, \omega)^2$. (El teorema de Erdős ver [[12],pág 8]. Esta relación establece que si E es un conjunto de cardinalidad ω_1 y $[E]^2 = P_1 \cup P_2$ y se tiene $A \subset E$, entonces $[A]^2 \subset P_1$ y $|A| = \omega_1$, o si se tiene $B \subset E$ entonces $[B]^2 \subset P_2$ y $|B| = \omega$. Puesto que C es no numerable y contiene una cantidad no infinita de parejas de subconjuntos, esta relación implica que C contiene una subcolección C' no numerable tales que cualesquiera 2 son cobordantes. Podemos suponer que dos miembros diferentes de C' están en subconjuntos de elementos diferentes de Υ .

Sean $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}$ y C_{α_3} elementos de C' con C_{α_i} parte de la frontera de $M - \overline{M}_{\alpha_i+1}$, etc. Y supongamos que $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Puesto que $\overline{M}_{\alpha+1}$ es conexo es fácil mirar que se debe tener una pareja $i < j$ tal que $C_{\alpha_i} \cup C_{\alpha_j}$ es la frontera de un subconjunto de $\overline{M}_{\alpha_j+1} - M_{\alpha_i+1}$.

Otra aplicación de la relación $\omega_1 \rightarrow (\omega_1, \omega)^2$ muestra que C' tiene una subcolección no numerable D tal que cualesquiera dos elementos de C_α, C_β con $\alpha < \beta$ forman la frontera de un subconjunto $\overline{M}_{\beta+1} - M_{\alpha+1}$. La unión de los elementos de D y los subconjuntos que ellos acotan es una subsuperficie cerrada, no metrizable de M cuya frontera en M es el "elemento más bajo" de D , llamémoslo C_α . Eliminar C_α desconecta a M , C_α es todo el elemento $\alpha + 1$ de Υ . Similarmente, cada elemento de D es un elemento de Υ . Ahora supongamos que la porción $\overline{M}_{\beta+1} - M_{\alpha+1}$ acotada por dos miembros C_α, C_β de D no es homeomorfa a $S^1 \times [0, 1]$. Entonces el espacio obtenido al identificar C_α y C_β cada uno a un punto no es una 2-esfera. Así por el recíproco del teorema de la curva de Jordan, hay un círculo C el cual no lo separa, y este círculo no es cobordante en M con C_α o C_β , ni con cualquier círculo en $M - \overline{M}_\beta$ o en $\overline{M}_{\alpha+1}$. Ciertamente, si C fuera cobordante con un círculo arriba C_β , entonces el subconjunto que ellos acotan tendría que contener a C que es inconexo y así es cobordante con C en M , contradicción. Similarmente para un círculo abajo C_α . Así no puede haber en D una sucesión infinita de círculos, por lo que la porción acotada por cualquier pareja sucesiva no es homeomorfa a $S^1 \times [0, 1]$. Por tanto debe haber un α tal que $\overline{M}_\beta - M_{\alpha+1}$ es homeomorfo a $S^1 \times [0, 1]$ para todo $\beta > \alpha$, $C_\beta \in D$ y así $M - \overline{M}_{\alpha+1}$ es un tubo largo. \square

Como consecuencia de lo anterior tenemos el siguiente resultado de clasificación.

Corolario 3.3 *Cada superficie M que es ω -acotada es la suma conexa de una esfera con finitos toros, planos proyectivos y tubos largos.*

Corolario 3.4 *Cada superficie M que es ω -acotada con frontera compacta tiene una subsuperficie compacta K tal que $M - K$ es la unión finita de tubos largos.*

Ahora, miramos una propiedad topológica intrínseca forzando la formación de una órbita periódica.

Observación 3.3 *Consideremos una superficie M ω -acotada y un flujo Φ sobre esta superficie, el conjunto $Q_x = \Phi(\{x\} \times \mathbb{Q})$ es numerable, por tanto la cerradura $\overline{Q_x}$ es compacta. Notemos que $\overline{Q_x} = \overline{O_x}$ (se sigue de la fórmula general $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$ para una función continua f).*

Lema 3.6 *Sea Φ un flujo sobre un espacio X (primero numerable y Hausdorff.) Si la órbita O_x es propia (esto es, cada conjunto abierto inherente" de la forma $\Phi(\{z\} \times (s, t))$ es también un abierto para la topología relativa sobre O_z), entonces el conjunto $\overline{O_x} - O_x$ es cerrado en X .*

Demostración. Es suficiente demostrar que O_x es abierto en $\overline{O_x}$. Sea $z \in O_x$. Escogamos cualquier $\varepsilon > 0$, entonces $\Phi(\{z\} \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ es abierto para la topología inherente sobre O_x , así hay un conjunto abierto U en X tal que $U \cap O_x = \Phi(\{z\} \times (-\varepsilon, \varepsilon))$.

Entonces $U \cap \overline{O_x}$ es abierto en $\overline{O_x}$, contiene a z y satisface que $U \cap \overline{O_x} \subset O_x$. En efecto sea $y \in U \cap \overline{O_x}$. Puesto que X es primero numerable, escogemos una sucesión $y_n \in O_x$ que converge a y . Puesto que U es abierto, existe un entero N tal que $y_n \in U$ para todo $n \geq N$. Así $y_n \in U \cap O_x$, por tanto $y_n = \Phi(z, t_n)$ con $|t_n| < \varepsilon$. Pero puesto que $\Phi(\{z\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)) =: F$ es compacto (por tanto cerrado en X Hausdorff), tenemos que $y \in F$. Puesto que $F \subset O_z = O_x$, esto completa la prueba. \square

Lema 3.7 *Sea Φ un flujo sobre un espacio X de Hausdorff. Supongamos que la cerradura de la órbita O_x es compacta y el flujo propio. Entonces hay una órbita compacta la cual es un punto fijo o una órbita periódica*

Demostración. Considere el conjunto de los subconjuntos Φ -invariantes, cerrados del compacto $\overline{O_x}$. Ordenados por la inclusión. Por el lema de Zorn, hay un conjunto K -mínimo. Mostraremos que K se reduce a una órbita. En efecto sea $y \in K$, entonces $O_y \subset \overline{O_y} \subset K$, y la última inclusión es una igualdad por ser mínimo K . Así es suficiente demostrar que O_y es cerrado. Si no lo es entonces $\overline{O_y}$ es no vacío, invariante y cerrado por el Lema anterior contradiciendo que K sea mínimo. Resumiendo K es una órbita compacta implicando que las órbitas sean una n -variedad conexa, lindelf con $n \leq 1$. Así K es el punto o la circunferencia. \square

Lema 3.8 *Cada flujo en una superficie dicotómica es propio.*

Demostración. Dado un conjunto abierto inherente $I_\varepsilon := \Phi(\{x\} \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ buscamos un conjunto abierto tal que $U \cap O_x = I_\varepsilon$. Si el punto es estacionario, U es fácil de encontrar. Si no lo es la teoría de flujos-cajas es viable. En esta teoría, la metrisabilidad juega un papel importante, haciendo un flujo con dominio una carta V alrededor de x produce el conjunto $\Phi(V \times \mathbb{R})$ el cual es Lindelf, por tanto métrico. De acuerdo a Bebutov un flujo caja puede ser encontrado para cualquier longitud de tiempo asignada previamente a la sección-cruz $x \in \Sigma_x$. En el interior del flujo caja $B := \Phi(\Sigma_x \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ un cierto subrectángulo R es sealado fuera del primer retorno de x a la sección Σ_x (tanto adelante como hacia atrás en el tiempo). La dicotomía asegura la ausencia de otras recurrencias, esto es subsecuentes retornos de x a la sección Σ_x cerca a x . La existencia del deseado U es garantizado (el interior de R es apropiado). \square

Proposición 3.3 *En una superficie de Schoenflies (esto es, simplemente conexa) ω -acotada M , cualquier flujo tiene un punto fijo.*

Demostración. Como M es simplemente conexa es dicotómica, el flujo es propio por Lema 3.8. Tome un punto $x \in M$, la órbita cerrada $\overline{O_x} = \overline{O_x}$ es compacta, por ser ω -acotada. Por Lema 3.7, el flujo tiene un punto fijo o una órbita periódica. Si se tiene una órbita periódica aplicamos el Lema 3.1. \square

Observación 3.4 *En la proposición anterior no es suficiente que la superficie sea Schoenflies para la existencia de la órbita periódica, considérese \mathbb{R}^2 o el semiplano $\mathbb{R} \times \mathbb{L}$ a lo largo del primer factor.*

También la Proposición anterior puede considerarse como una versión no métrica del teorema de "la bola peluda" (la 2-esfera no admite un campo vectorial tangente sin singularidades). La proposición se aplica por ejemplo al plano largo \mathbb{L}^2 en cuyo caso, una demostración alternativa puede también deducirse de la clasificación de foliaciones en \mathbb{L}^2 dada en [1].

Para un estudio más sistemático de los sistemas dinámicos para variedades no-métricas veáse [3].

Bibliografía

- [1] Mathieu Baillif, Alexandre Gabard y David Gauld . Foliations on non-metrisable manifolds: absorption by a Cantor black hole. *arXiv preprint arXiv:0910.1897*, 2009.
- [2] Alexandre Gabard y David Gauld. Jordan and Schoenflies in non-metrical analysis situs. *Russiann Math*, 60(1):1–14, 2010.
- [3] Alexandre Gabard y David Gauld. Dynamics of non-metric manifolds. *Russiann Math*, 60(1):1–29, 2011.
- [4] Leslie C. Glacer. *Geometrical combinatorial topology*, volume 1. 1984.
- [5] Allen Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [6] Maurice Heins. Interior mapping of an orientable surface into s^2 . *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2(6):951–952, 1951.
- [7] Matthias Kreck. *Differential algebraic topology: From stratifolds to exotic spheres*, volume 110. American Mathematical Soc., 2010.
- [8] Kenneth Kunen y Jerry Vaughan. *Handbook of set-theoretic topology*. Elsevier, 2014.
- [9] Viktor Vladimirovich Nemytskii y Vjačeslav V Stepanov. *Qualitative theory of differential equations*, volume 22. Courier Corporation, 1989.
- [10] Carlos Prieto. *Topología básica*. 2 edition, 2013.
- [11] Tibor Radó. Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 2:101–121, 1925.
- [12] Mary Ellen Rudin. *Lectures on set theoretic topology*, volume 23. American Mathematical Soc., 1975.
- [13] T Benny Rushing. *Topological embeddings*. Academic Press, 1973.
- [14] Hans Samelson. On Poincaré duality. *Journal d'Analyse Mathématique*, 14(1):323–336, 1965.
- [15] Larry Siebenmann. The Osgood-Schoenflies theorem revisited. *Russian Mathematical Surveys*, 60(4):645, 2005.

- [16] Carsten Thomassen. The Jordan-Schoenflies theorem and the classification of surfaces. *The American mathematical monthly*, 99(2):116–131, 1992.
- [17] Stephen Willard. *General topology*. Courier Corporation, 2004.