



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Conexidad Tropical en Gráficas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
SANTIAGO GUZMÁN PRO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



2016

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno	
Apellido paterno	Guzmán
Apellido materno	Pro
Nombre(s)	Santiago
Teléfono	55 35 67 8155
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	30954420-7
2. Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz
4. Datos del sinodal 1	
Grado	Mat.
Nombre(s)	Jesús
Apellido paterno	Alva
Apellido materno	Samos
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Rita Esther
Apellido paterno	Zuazua
Apellido materno	Vega
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Natalia
Apellido paterno	Jonard
Apellido materno	Pérez
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Amanda
Apellido paterno	Montejano
Apellido materno	Cantoral
7. Datos del trabajo escrito.	
Título	Conexidad tropical en gráficas
Número de páginas	62
Año	2016

Índice general

AGRADECIMIENTOS	VII
INTRODUCCIÓN	IX
1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRÁFICAS	1
1.1. CONCEPTOS BÁSICOS Y NOTACIÓN	1
1.2. SUBGRÁFICAS	4
1.3. PRODUCTOS DE GRÁFICAS	5
1.4. FAMILIAS DE GRÁFICAS	6
1.5. COLORACIONES	10
1.6. ALGUNOS PARÁMETROS	11
2. CONEXIDAD	13
2.1. CONEXIDAD POR VÉRTICES	14
2.2. BLOQUES	15
2.3. EL TEOREMA DE MENGER	18
2.4. EL LEMA DEL ABANICO	20
3. CONEXIDAD TROPICAL	23
3.1. PRIMERAS OBSERVACIONES	24
3.2. FAMILIAS DE GRÁFICAS	27
3.3. OTROS PARÁMETROS	46
CONCLUSIONES	57
ÍNDICE ALFABÉTICO	60

AGRADECIMIENTOS

INTRODUCCIÓN

Un tema que genera gran interés en la teoría de gráficas son las coloraciones. Hay una gran variedad de tipos de coloraciones en gráficas. De las más estudiadas son aquellas que, al colorear por vértices a la gráfica, se pide que no haya vértices adyacentes con el mismo color. Por otro lado, podemos colorear por aristas a nuestra gráfica de modo que entre cualquier par de vértices exista una trayectoria heterocromática, o al contrario, pedir que exista una trayectoria monocromática. Además de éstas, existen varios tipos de coloraciones más.

Otro tema de estudio en la teoría de gráficas es la conexidad de una gráfica. En pocas palabras la conexidad nos dice qué tantos vértices le podemos quitar a una gráfica de modo que siga siendo conexa. También resulta interesante encontrar conjuntos dominantes, es decir, un subconjunto de vértices S tal que, para cualquier vértice x se cumple que x pertenece a S o x tiene un vecino en S . En [3] combinan coloraciones y conjuntos dominantes; buscan coloraciones tales que exista un conjunto dominante el cual contenga un vértice de cada color. A este concepto se le denomina dominación tropical.

Nosotros estudiaremos la conexidad tropical de las gráficas. El objetivo será ver si es posible colorear a una gráfica de tal modo que entre cualquier par de vértices exista una trayectoria en la cual esté representado cada uno de los colores. De ser esto posible, querremos entonces ver hasta cuantos colores podremos usar de tal modo que nuestra gráfica siga siendo tropicalmente conexa. A este parámetro lo denominamos el número cromático por conexidad tropical y su estudio es el principal propósito de la presente tesis.

La tesis consta de tres capítulos. En el primero introduciremos los conceptos básicos de la teoría de gráficas que necesitaremos más adelante. En el segundo, daremos una breve introducción a la conexidad en gráficas. En este capítulo desarrollaremos herramientas que nos serán de gran provecho al analizar nuestro parámetro. Por último, en el tercer capítulo, analizaremos el

número cromático por conexidad tropical para varias familias de gráficas y lo relacionaremos con otros parámetros ya estudiados en la teoría de gráficas.

Posterior a los capítulos mencionados se da una breve conclusión del trabajo realizado, con lo que se cierra la presente tesis.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRÁFICAS

A través de este capítulo estableceremos los conceptos básicos de la teoría de gráficas que utilizamos para nuestro trabajo. Éstos son tomados de [2] y adaptados a nuestras necesidades.

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS Y NOTACIÓN

Una *gráfica* es un terna ordenada $G = (V, E, \phi)$, donde V es un conjunto no vacío a cuyos elementos llamamos *vértices*, E es un conjunto que a sus elementos solemos llamar *aristas* y el tercer elemento de la terna es una función, $\phi : E \rightarrow H$ donde H es el conjunto de parejas no ordenadas de V , y la llamamos *función de incidencia*.

A una arista e la llamaremos un *lazo* cuando $\phi(e) = (v, v)$ para algún vértice $v \in V$. Si existen dos aristas $f \neq e$ tales que $\phi(e) = \phi(f)$ las llamaremos *aristas múltiples*.

Una gráfica que no contenga más de una arista entre dos mismos vértices ni aristas de un vértice en sí mismo, es decir,

$$\phi : E \rightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$$
 es una función inyectiva,

la llamaremos *gráfica simple*. Nosotros trabajaremos únicamente con este tipo de gráficas.

Debido a que $\phi : E \rightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ es una función inyectiva, un elemento $e \in E$ queda completamente identificado por $\phi(e) = \{u, v\}$. A

e la llamaremos una uv -arista y, en lugar de escribir $\{u, v\}$ para referirnos a e , la denotaremos como uv . A estos dos vértices, u y v , los llamaremos **vecinos** y a dos aristas que comparten un extremo en común las llamaremos **adyacentes**. Al conjunto de todos los vecinos de un vértice v lo llamamos la **vecindad** de v en G y lo denotamos por $N(v)$. Generalizando este concepto, para U un subconjunto no vacío de V , los vecinos de vértices de U son los vecinos de U , y la vecindad de U es el conjunto

$$N(U) := \{v \in V \setminus U : vu \in E \text{ para algún } u \in U\}.$$

Hay veces que nos referiremos a $N(U)$ como la **vecindad abierta** de U y al conjunto $N[U] := N(U) \cup U$ como la **vecindad cerrada** de U .

Para evitar posibles confusiones y ambigüedades al trabajar con más de una gráfica, utilizaremos una notación más específica para representar a sus elementos y parámetros. Por ejemplo, si consideramos dos gráficas, G y H , utilizaremos $V(G)$, $E(G)$ y $V(H)$, $E(H)$ para denotar a sus correspondientes conjuntos de vértices y aristas.

Para una gráfica dada $G = (V, E)$, denotaremos por $v(G)$ a la cardinalidad del conjunto V y la llamaremos el **orden** de G mientras que la de E será su **tamaño**. Cuando no haya ambigüedad sobre cuál sea la gráfica de la que estemos hablando usaremos n para denotar el orden y m para denotar al tamaño de la gráfica.

A diferencia de otras ramas de las matemáticas, el objeto de estudio principal de la teoría de gráficas podemos visualizarlo de una manera muy sencilla; representando cada vértice por un punto o un pequeño círculo, y cada arista por una línea que une a los puntos que representan a sus extremos.

Por ejemplo, la gráfica $G = (V, E)$ donde

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\} \text{ y}$$

$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1, v_6v_8, v_8v_{10}, v_{10}v_7, v_7v_9, v_9v_6, v_1v_6, v_2v_7, v_3v_8, v_4v_9, v_5v_{10}\},$$

se puede representar como se muestra en la figura 1.1

Es importante mencionar que hay ciertas convenciones para representar gráficas mediante diagramas: no se permite que una arista se interseque a sí misma, ni que pase por un vértice que no sea uno de sus extremos; es claro que siempre podremos representar a cualquier gráfica de modo que se cumplan las convenciones. Sin embargo, dos aristas se podrán intersecar en

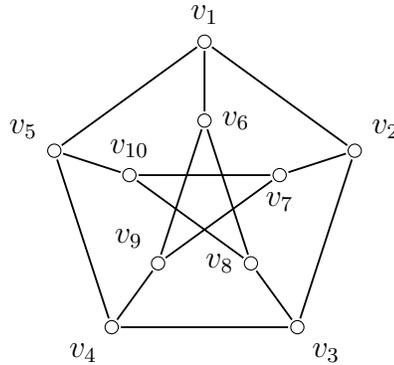


Figura 1.1: Un posible diagrama de la gráfica G .

algún punto que no sea un vértice como en la figura 1.1. Cuando podamos dibujar a una gráfica en el plano de modo que las aristas solo se intersequen en los vértices que tengan en común la llamaremos una gráfica **plana**, y a su dibujo **inmersión plana** de la gráfica.

Notemos que la representación de una gráfica por medio de un diagrama no es única, ya que cada dibujo depende de la posición específica de los puntos que representan a los vértices y el trazo con el que se dibuje cada línea que una estos puntos.

De cualquier manera, dado cualquier diagrama de una gráfica, nos referiremos a él como a la gráfica misma; llamaremos a sus puntos “vértices” y a sus líneas “aristas”.

Habrán veces que, a pesar de tener dos gráficas definidas de distinta forma, al dibujar diagramas que las representen veremos que tienen una representación muy similar. Éste es un fenómeno de gran interés y lo definiremos de manera formal a continuación. Las gráficas G y H se dicen **isomorfas**, denotado por $G \cong H$, si existe una función biyectiva $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ si y sólo si $f(u)f(v) \in E(H)$; bajo estas condiciones f es llamada un **isomorfismo** entre G y H . Un **automorfismo** será un isomorfismo en una gráfica en sí misma.

Para ejemplificar el concepto de isomorfismo, presentaremos en la figura 1.2 una gráfica isomorfa a la gráfica de la figura 1.1. Un posible isomorfismo entre ellas es la función que envía a v_i en w_i para $1 \leq i \leq 10$.

De aquí en adelante, al referirnos a que *existe una única gráfica con la propiedad P* , la unicidad de dicha gráfica se concebirá salvo isomorfismos.

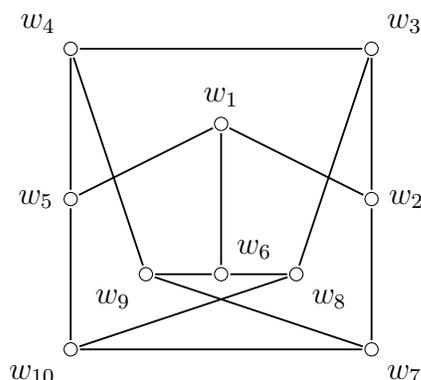


Figura 1.2: Una gráfica isomorfa a la gráfica de la figura 1.1.

1.2. SUBGRÁFICAS

Una gráfica H es una **subgráfica** de la gráfica G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Denotaremos que H es una subgráfica de G simplemente por $H \subseteq G$. Una **subgráfica generadora** de G es una subgráfica H de G donde $V(H) = V(G)$.

Consideremos ahora a S un subconjunto no vacío de V . Definimos a la **subgráfica inducida** de $G(V, E)$ por S , como a la subgráfica $H = (S, P)$ donde $P = \{xy \in E: x, y \in S\}$ y la denotamos por $G[S]$. A la subgráfica inducida $G[V \setminus S]$ se le denota por $G - S$ y cuando $s = \{v\}$, por comodidad, escribiremos $G - v$, en lugar de $G - \{v\}$.

Análogamente, si P es un subconjunto no vacío de E , definimos la **subgráfica inducida** de G por las aristas de P como $G[P] = (S, P)$ donde P es el subconjunto de V que contiene a únicamente a los extremos de las aristas de P . A diferencia del caso en el que removemos vértices, la subgráfica obtenida de G al borrar las aristas en P es la subgráfica generadora de G con conjunto de aristas $E \setminus P$ y se denota por $G - P$; si $P = \{uv\}$, escribimos $G - uv$ en vez de $G - \{uv\}$.

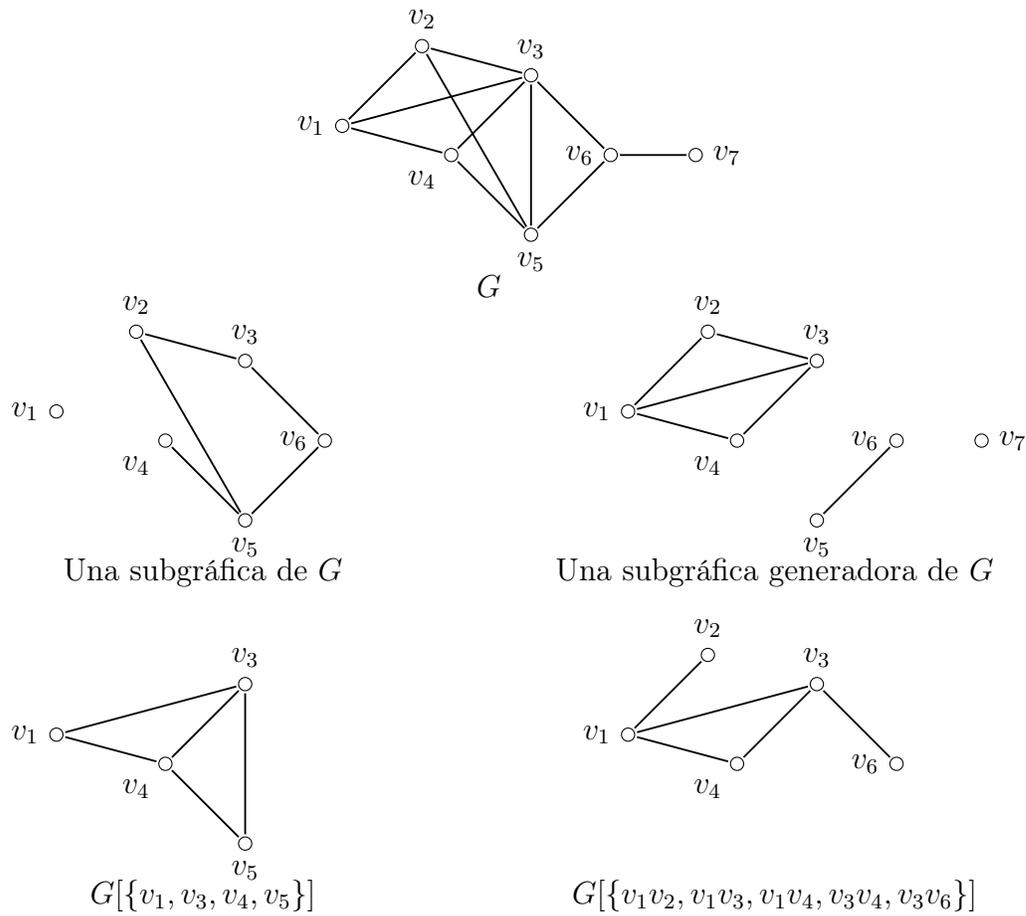


Figura 1.3: Ejemplos de subgráficas, subgráficas generadoras y subgráficas inducidas por vértices y por aristas.

1.3. PRODUCTOS DE GRÁFICAS

Así como en distintas estructuras matemáticas, en la clase de las gráficas existen operaciones que asocian a dos gráficas G y H una nueva gráfica F . Al igual que en los conjuntos, una de las operaciones más elementales en

gráficas es la **unión ajena** y la denotamos como en conjuntos: $F = G \cup H$. Los vértices de F es el conjunto $V(G) \cup V(H)$ y sus aristas $E(G) \cup E(H)$.

De manera similar podemos definir a la operación **supremo**; $F = G \vee H$. En este caso pediremos que G y H no tengan vértices en común y definimos a $F = (V_F, E_F)$ donde, $V_F = V(G) \cup V(H)$, $E_F = E(G) \cup E(H) \cup E'$ y $E' = \{(u, v) : u \in V(G), v \in V(H)\}$.

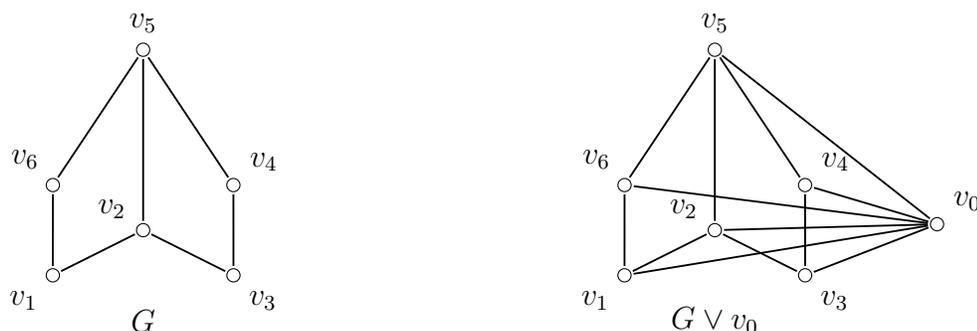


Figura 1.4: Un ejemplo de la operación supremo

Por último, introduciremos un producto más que usaremos en nuestro trabajo. El **producto cartesiano** de dos gráficas simples G y H , es la gráfica $G \square H$ con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ y conjunto de aristas el conjunto de todas las parejas $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ donde $u_1u_2 \in E(G)$ y $v_1 = v_2$, o $v_1v_2 \in E(H)$ y $u_1 = u_2$.

Por ejemplo, para $n \geq 3$, el producto cartesiano $C_n \square K_2$, donde K_2 es la gráfica con dos vértices y una arista entre ellos, se conoce como el **n -prisma**; el 3-prisma y 4-prisma son mejor conocidos como el prisma triangular y el cubo de dimensión 3. Al 5-prisma se le conoce como el prisma pentagonal. En la figura 1.5 vemos dos ejemplos de prismas.

1.4. FAMILIAS DE GRÁFICAS

Así como la colección de n -prismas, existen otras colecciones de gráficas que cumplen condiciones específicas y que resultan de gran importancia por sus diversas propiedades, o porque en ellas es relativamente sencillo verificar algunas proposiciones. Veamos ahora algunas de estas familias.

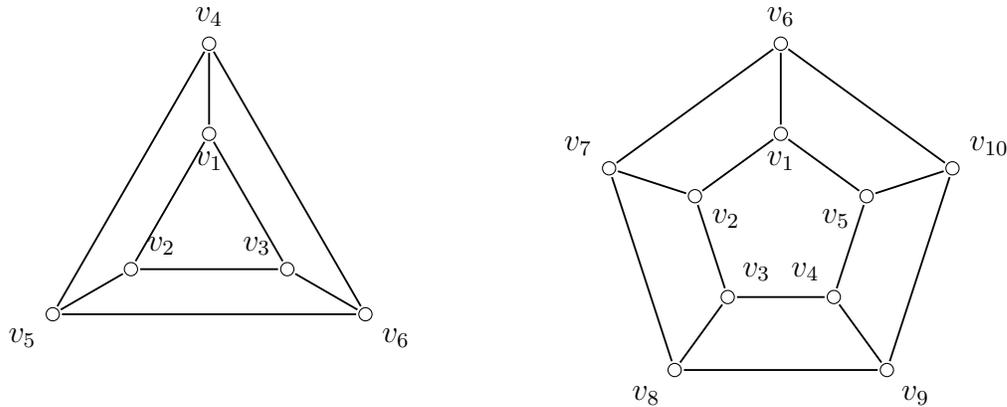


Figura 1.5: El prisma triangular y el prisma pentagonal

Llamamos a una gráfica con un único vértice una **gráfica trivial**, y decimos que cualquier otra gráfica es no trivial. Al hablar de una **gráfica vacía** nos referiremos a una gráfica cuyo conjunto de aristas es vacío. Por otro lado, a la gráfica de n vértices en la cual cada par de vértices distintos son adyacentes la llamaremos una **gráfica completa** y la denotaremos por K_n .

Dada una gráfica G , llamaremos a un subconjunto no vacío S de $V(G)$ un **clan** si $G[S]$ es una gráfica completa, y diremos que es **independiente** si $G[S]$ es una gráfica vacía.

Para cada gráfica G definiremos a la gráfica \overline{G} , llamada la **gráfica complemento** de G , como la gráfica con conjunto de vértices $V(G)$ y conjunto de aristas $\{uv \in E(K_G) : uv \notin E(G)\}$, donde K_G es la gráfica completa con conjunto de vértices $V(G)$. Claramente, una gráfica vacía tiene como complemento una gráfica completa y éstas son fáciles de imaginar, así que veamos la figura 1.6 para un ejemplo de gráficas complementarias distintas de la completa y la vacía.

Definimos a una **gráfica bipartita** como una gráfica cuyo conjunto de vértices se puede expresar como la unión ajena de dos subconjuntos no vacíos X y Y tales que cada arista de la gráfica tenga un extremo en X y otro en Y ; a esta partición de los vértices la llamamos una **bipartición** de la gráfica y la notación $G = (X, Y)$ es normalmente utilizada para referir que G es una gráfica bipartita con conjuntos independientes X y Y .

Denotaremos por $K_{m,a}$ a la **gráfica bipartita completa**, la cual es una



Figura 1.6: Un ejemplo de gráficas complementarias

gráfica bipartita $G(X, Y)$ donde $E(G) = \{xy: x \in X, y \in Y\}$ y las cardinalidades de X y Y son m y n respectivamente.

En la figura 1.7 mostramos una gráfica bipartita con conjuntos independientes $X = \{v_1, v_3, v_6, v_8\}$ y $Y = \{v_2, v_4, v_5, v_7\}$.

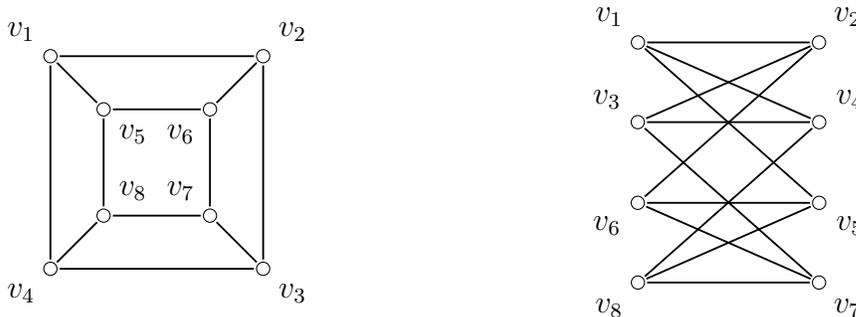


Figura 1.7: Las gráficas son la misma, sin embargo, normalmente representamos a las gráficas bipartitas como en el diagrama de la derecha, separando los vértices de cada conjunto independiente en columnas distintas.

El **grado** de un vértice v , denotado $d(v)$, es la cardinalidad de $N(v)$, es decir, $d(v)$ es la cantidad de vecinos del vértice v . Denotamos por δ y Δ el grado mínimo y el grado máximo, respectivamente, de los vértices de G . Diremos que una gráfica G es **k -regular** si $\delta = k = \Delta$. En general, diremos que G es una **gráfica regular** si es k -regular para alguna $k \in \mathbb{N}$.

Si observamos la figura 1.7 nos daremos cuenta que es una gráfica 3-

regular, mientras que la gráfica completa K_n es una gráfica $(n - 1)$ -regular para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.

A la gráfica que denotaremos por C_n la llamaremos un **ciclo** de n vértices. El ciclo satisface que $V(C_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ y $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : 0 \leq i < n - 1\} \cup \{v_{n-1} v_0\}$.

Consideremos a una gráfica $G = (V, E)$. Un **camino** P de G es una sucesión $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ donde $v_i \in V$ y $e_j \in E$, además $e_j = v_{j-1} v_j$ y esto se cumple para cualesquiera $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Además diremos que P es un **xy -camino** si el primer vértice de P es x y el último es y .

Decimos que una gráfica G es **conexa** si para cualquier par de vértices $x, y \in V(G)$ existe un xy -camino.

A una gráfica conexa que no contenga ciclos como subgráficas la llamaremos un **árbol**. Ésta es una subfamilia de las gráficas bipartitas [2].

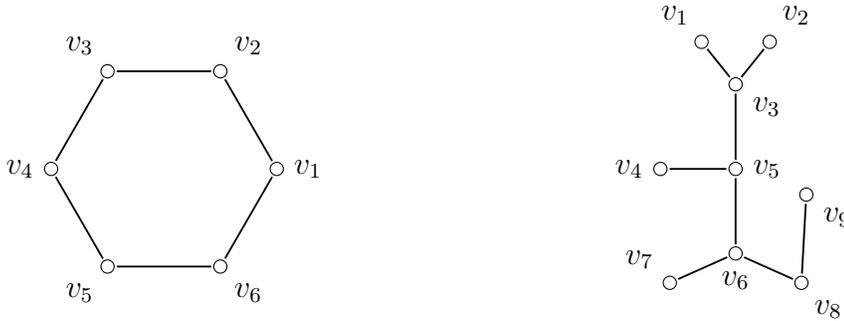


Figura 1.8: Ejemplo de un ciclo de longitud 6 y un árbol de 9 vértices

Utilizando la operación supremo, definida anteriormente, definiremos a la **rueda** de n **rayos** como $C_n \vee v_n$ y la denotamos por W_n . Al fijarnos en la figura 1.9 queda claro el motivo de llamarle “rueda de n rayos”.

De manera similar a las gráficas bipartitas, definiremos a una gráfica **escindible** $G(K, I)$ con conjunto de vértices $K \cup I$ donde el conjunto K induce una gráfica completa, mientras que I es un conjunto independiente y $K \cap I = \emptyset$. En la figura 1.9 vemos a una gráfica escindible con $K = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $I = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Las escindibles son una subfamilia de las **gráficas cordales**, las cuales se definen como sigue. Una gráfica G se dice que es **cordal** si no tiene ciclos

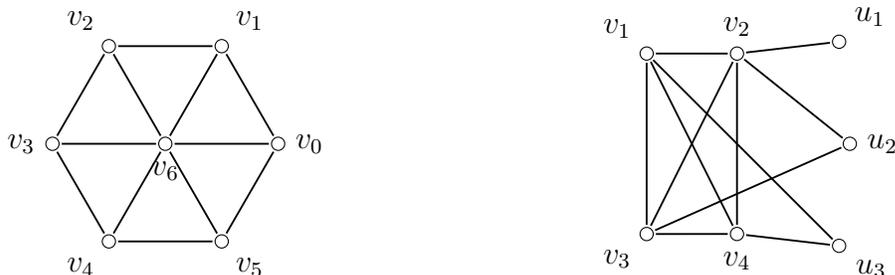


Figura 1.9: La rueda W_n y una gráfica escindible

de longitud mayor a 3 como subgráficas inducidas. Por ejemplo, como los árboles son gráficas acíclicas, por consecuencia, son gráficas cordales.

Otra subfamilia de las gráficas cordales son las **gráficas de intervalos**. Esta la definimos como una gráfica $G(V, E)$ donde cada elemento x de V es un subconjunto de la recta real y $xy \in E$ si y sólo si $x \cap y \neq \emptyset$.

Por último, generalicemos al cubo introducido en la sección anterior. Denotaremos por Q_n al **n -cubo**, al cual definiremos de forma recursiva tal que $Q_1 = K_2$ y $Q_n = K_2 \square Q_{n-1}$ para $n > 1$. Lo llamamos n -cubo ya que lo podemos imaginar como el cubo de dimensión n . La gráfica representada en la figura 1.7 vemos al cubo de dimensión 3.

1.5. COLORACIONES

Dada una gráfica G y cualquier número natural k , diremos que una función $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ es una **coloración** de G y llamaremos a los conjuntos $c^{-1}(1), c^{-1}(2), \dots, c^{-1}(k)$ las clases cromáticas de G bajo c .

Notemos que las clases cromáticas de una gráfica bajo cualquier coloración satisfacen que cualesquiera dos clases cromáticas son ajenas y la unión de todas las clases cromáticas es $V(G)$, ya que c es una función.

Al conjunto de los colores representados en subconjunto de vértices $S \subseteq V$, es decir la imagen de S bajo c , lo denotaremos $c[S]$.

Dada la correspondencia antes mostrada, cuando nos refiramos a una coloración de una gráfica, utilizaremos de estas dos equivalencias la que nos sea más conveniente.

Diremos que una coloración de G es **propia** si y sólo si las subgráficas

de G inducidas por cada clase cromática son vacías. Y definimos al **número cromático** de G , denotado por $\chi(G)$, como el mínimo número natural n tal que existe una coloración propia de G con n elementos.

Si consideramos a las clases cromáticas de una gráfica G bajo una k -coloración propia c , obtendremos una k -partición de los vértices de G de tal manera que cada elemento de la partición induce una gráfica vacía. Definimos a una **gráfica k -partita** como una gráfica $G(X_1, X_2, \dots, X_k)$ donde $\{X_i\}_{i=1}^k$ son una partición de $V(G)$ y las aristas tienen extremos en distintos elementos de la partición. Las gráficas bipartitas equivalen a las gráficas 2-partitas.

1.6. ALGUNOS PARÁMETROS

Así como definimos el número cromático de una gráfica, existen otros parámetros que miden distintas propiedades de una gráfica. Por ejemplo, denotamos el **número de clan** de una gráfica G por $\omega(G)$ donde $\omega(G) = \max\{|S| : S \text{ clan de } G\}$. Una gráfica escindible $G(K, I)$ cumple que $|K| \leq \omega(G) \leq |K| + 1$, mientras que $\omega(T) = 2$ cuando T es un árbol. De manera similar, $\max\{|S| : S \text{ independiente de } G\}$, es el **número de independencia** de G y lo denotamos por $\alpha(G)$.

Denotamos por $\text{circ}(G)$ a la **circunferencia** de una gráfica G donde $\text{circ}(G) = \max\{n \in \mathbb{N} : C_n \text{ es subgráfica de } G\}$. Por ejemplo en un árbol T $\text{circ}(T) = 0$ mientras que en un ciclo C_n $\text{circ}(C_n) = n$.

Para terminar este capítulo introduciremos el concepto de **vértice transitividad**. Decimos que una gráfica G es **vértice transitiva** si para cualquier par de vértices x, y , existe un automorfismo ϕ tal que, $\phi(x) = y$. En este punto ya tenemos varios ejemplos de gráficas vértice transitivas por ejemplo, las completas, las vacías, los ciclos y los cubos de cualquier dimensión.

Capítulo 2

CONEXIDAD

A lo largo de este capítulo mostraremos resultados clásicos tomados también de [2] que nos servirán para demostrar el teorema de Menger. Algunas de las consecuencias de éste nos serán muy útiles en nuestro trabajo. Por ahora, empecemos con algunas definiciones básicas.

En el capítulo anterior definimos lo que es un camino y una gráfica conexa. Ahora trabajaremos un poco más con estos conceptos.

Consideremos a una gráfica $G = (V, E)$ y un camino $P = v_0e_1v_1e_2 \cdots v_{k-1}e_kv_k$. En este caso diremos que el camino P tiene longitud k . Denotaremos por $V(P)$ a los vértices de la sucesión y de manera análoga, $E(P)$ representará a las aristas de la sucesión. Denotaremos por v_jPv_l al camino definido por la subsucesión $v_je_jv_{j+1}e_{j+1} \cdots v_{l-1}e_{l-1}v_l$. Consideremos ahora a un xy -camino P_{xy} , un wz -camino P_{wz} y supongamos que existe en G la arista $f = yw$, al escribir $xP_{xy}ywP_{wz}z$ nos referiremos al camino $xe_x \cdots yfwe_w \cdots z$.

Al trabajar en gráficas simples los caminos quedan completamente determinados por los vértices de la sucesión, por esta razón, al escribir la sucesión de algún camino nos limitaremos a escribir únicamente a los vértices.

Cuando un camino no repita ningún vértice lo llamaremos **trayectoria**. En el primer capítulo ya habíamos definido lo que es un ciclo, notemos ahora que un ciclo es un camino que sólo repite el primer y último vértice.

Consideremos a una gráfica G . Una **trayectoria hamiltoniana** de G es una trayectoria que contiene a todos los vértices de G . Análogamente, un **ciclo hamiltoniano** de G es un ciclo que contiene a todos los vértices de G . Si G contiene un ciclo hamiltoniano diremos que G es una **gráfica hamiltoniana**. Diremos que una gráfica es **hamiltonianamente conexa** si y sólo si, para cualquier par de vértices x, y , existe un xy -trayectoria hamiltoniana.

Es claro que si una gráfica es hamiltonianamente conexa entonces es hamiltoniana, sin embargo no basta que la gráfica contenga un ciclo hamiltoniano para que sea hamiltonianamente conexa. Por ejemplo, los ciclos son ejemplos de gráficas hamiltonianas pero no hamiltonianamente conexas.

2.1. CONEXIDAD POR VÉRTICES

Empezaremos discutiendo la conexidad por vértices o simplemente, conexidad. Sea S un subconjunto de los vértices de G , decimos que S es un **conjunto de corte** si $G - S$ es inconexa. Además, si $|S| = k$ diremos que S es un k -corte de G . Nos referiremos a G como una gráfica **k -conexa** si ningún subconjunto de vértices de cardinalidad menor o igual a k es conjunto de corte.

En la figura 2.1 vemos que el conjunto $S = \{s_1, s_2\}$ es un conjunto de corte de G y las subgráficas inducidas por los conjuntos $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ son las componentes de $G - S$.

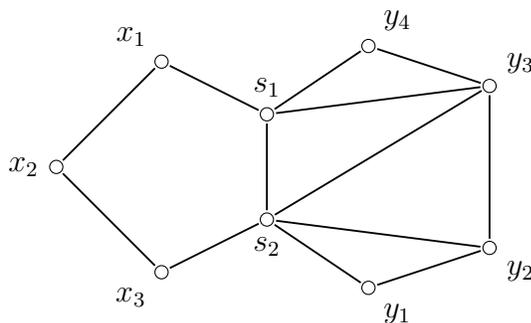


Figura 2.1: Una gráfica G donde los vértices s_1 y s_2 forman un conjunto de corte

La **conexidad** de una gráfica conexa G , $\kappa(G)$, se define como el mínimo entero k tal que G no es k -conexa. Por convención si G es completa $\kappa(K_n) = n - 1$. Observemos ahora que si G es inconexa entonces \emptyset es conjunto de corte entonces $\kappa(G) = 0$ y si $G = K_1$ por la convención antes mencionada $\kappa(G) = 0$ y éstos son los únicos dos casos en los que $\kappa(G) = 0$.

Dos xy -trayectorias P_1 y P_2 de G son **internamente ajenas** si $V(P_1) \cap V(P_2) = \{x, y\}$. La **conexidad local** entre dos vértices distintos x, y es la

mayor cantidad de xy -trayectorias internamente ajenas y la denotaremos por $p(x, y)$.

Teorema 2.1.1. *Una gráfica conexa G de al menos tres vértices no tiene un vértice de corte si y sólo si para cualesquiera dos vértices u, v existen dos uv -trayectorias internamente ajenas.*

Demostración. Sean $G = (V, E)$ una gráfica conexa y $u \in V$. Si cualesquiera dos vértices están conectados por dos trayectorias internamente ajenas, cualesquiera dos vértices en $G - u$ están conectados por al menos una trayectoria, por lo que $G - u$ es conexa. Al ser ésto cierto para cualquier vértice se cumple que G no tiene ningún vértice de corte.

Consideremos ahora que G tiene al menos tres vértices sin vértices de corte. Tomemos dos vértices $u, v \in V$. Procederemos por inducción sobre las distancia entre u y v .

Supongamos primero que $uv \in E$. Como $G - u \subseteq G - \{uv\}$ y $G - u$ es conexa entonces, $G - \{uv\}$ es conexa por lo que la arista uv no desconecta a G . Entonces, existe T una uv -trayectoria que no contiene a uv por lo tanto esta arista y T son dos uv -trayectorias internamente ajenas

Supongamos ahora que $d(u, v) = k \geq 2$. Consideremos una uv -trayectoria de longitud k y sea v' al vértice anterior a v en esta trayectoria. Es claro que $d(u, v') = k - 1$ entonces, por hipótesis de inducción existen dos trayectorias internamente ajenas P' y Q' entre u y v' . Como G no tiene vértices de corte, entonces existe una uv -trayectoria R' que no contiene a v' . Debido a que $u \in V(R') \cap (V(P') \cup V(Q'))$, podemos entonces tomar a x como el último vértice de R' que también lo sea de Q' o P' ; sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in V(P')$. Tomando las trayectorias $uP'xR'v$ y $uQ'v'v$ obtenemos nuestras dos uv -trayectorias internamente ajenas. ■

Más adelante veremos el teorema de Menger que es una versión más general del teorema 2.1.1.

2.2. BLOQUES

Consideremos a una gráfica conexa G . Una **descomposición** de G es una familia de \mathbb{F} de subgráficas ajenas por aristas de G tal que

$$\cup_{F \in \mathbb{F}} E(F) = E(G).$$

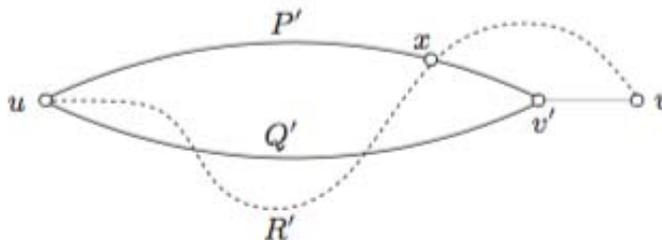


Figura 2.2: Demostración del teorema 2.1.1

Una **separación** de G es una descomposición de la gráfica en dos subgráficas conexas no vacías con exactamente un vértice en común. A este vértice en común se le llama **vértice separador** de G . Claramente, un vértice de corte es un separador pero la implicación opuesta no es necesariamente cierta si nuestra gráfica tiene lazos. Sin embargo, como estamos trabajando con gráficas simples, entonces un vértice separador de G sí es un vértice de corte.

Una gráfica es **no separable** si G es conexas y no tiene vértices separadores, en el caso contrario, G es **separable**.

Proposición 2.2.1. *Si una gráfica conexas es no separable entonces cualesquiera dos aristas pertenecen a un ciclo.*

Demostración. Supongamos que G es una gráfica no separable. Sean $e_1, e_2 \in E(G)$ subdividamos ambas aristas con nuevos vértices v_1 y v_2 respectivamente. Claramente ni v_1 ni v_2 separan a la gráfica resultante H y si cualquier otro vértice separara a H entonces, también separaría a G . Por el teorema 2.1.1 existe un ciclo en H que contiene a v_1 y v_2 , por lo tanto existe un ciclo en G que pasa por e_1 y e_2 . ■

Definimos ahora a un **bloque** de G como una subgráfica de G no separable y máxima por contención con esta propiedad. Los bloques de un árbol son las copias de K_2 inducidas por cada arista. Cuando una arista e induzca un bloque la llamaremos un **punto** de G . Por ejemplo, todas las aristas de un árbol son puentes.

Antes de enunciar nuestra primera proposición sobre los bloques recordemos que ningún bloque B contiene lazos vv con $v \in V(B)$; ya que estamos trabajando con gráficas simples.

Proposición 2.2.2. *Sea G una gráfica, entonces:*

1. *cualesquiera dos bloques de G tienen a lo más un vértice en común,*
2. *los bloques de G forman una descomposición de G ,*
3. *cada ciclo de G está contenido en un bloque de G .*

Demostración. (1) Demostremoslo por contradicción. Supongamos entonces que existen dos bloques distintos B_1 y B_2 con al menos dos vértices en común. Si definimos a $B = B_1 \cup B_2$, como los bloques son máximos por contención entonces ninguno de los dos está contenido en el otro por lo que B contiene a ambos propiamente. Tomemos ahora un vértice $v \in V(B)$, entonces $B - v$ es conexa ya que $B_1 - v$ y $B_2 - v$ son conexas con al menos un vértice en común. Entonces B no tiene vértices de corte y, al ser G una gráfica simple, B tampoco tiene lazos, por lo que B es un bloque. Pero esto contradice que B_1 y B_2 son máximos por contención.

(2) Cada arista de G induce una subgráfica no separable, entonces está contenida en algún bloque de G . Pero, por (1), ninguna arista pertenece a dos bloques. Por lo tanto los bloques forman una descomposición de G .

(3) Un ciclo C es una subgráfica no separable de G entonces, C pertenece a algún bloque. ■

El siguiente teorema nos da distintas caracterizaciones de un bloque.

Teorema 2.2.3. *Sea G una gráfica conexa, con al menos tres vértices. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *G es bloque.*
2. *Para cualquier par de vértices $x, y \in V(G)$ existe un ciclo C que contiene a ambos vértices.*
3. *Para cualquier vértice $x \in V(G)$ y una arista $e \in E(G)$ existe un ciclo C que contiene al vértice y la arista.*
4. *Para cualquier par de aristas $e, f \in E(G)$ existe un ciclo C que contiene a ambas.*
5. *Para cualquier par de vértices $x, y \in V(G)$ y una arista e , existe una xy -trayectoria que contiene a e .*

6. Para cualesquiera tres vértices $x, y, z \in V(G)$ existe una xy -trayectoria que contiene a z .
7. Para cualesquiera tres vértices $x, y, z \in V(G)$ existe una xy -trayectoria que no contiene a z .

Demostración. Es claro que (2) es un caso particular de (3) que a su vez es un caso particular de (4). Por el teorema 2.1.1 (2) implica (1) y por la proposición 2.2.1 (1) implica (4). Por esto, tenemos la equivalencia entre los primeros cuatro enunciados.

Veamos ahora que (2) implica (7) (esto es bastante claro), que a su vez, implica (1) ya que si se cumple (7) entonces ningún vértice de G es de corte por lo que G , al ser simple, es un bloque. Por lo que sólo falta demostrar la equivalencia entre (5) y (6) con el resto de los enunciados.

Nuevamente tenemos que (6) es un caso particular de (5). Veamos que (1) implica (5). Consideremos un bloque G y sean $e = rs \in E(G)$ y $x, y \in V(B)$. Por (3), existe un ciclo $C = x \cdots rs \cdots x$. Además, como G es conexa, entonces existe una trayectoria T que inicia en y y termina en algún vértice $z_T \in V(C)$. Si $z_T = x$ para cualquier trayectoria con vértice inicial y , entonces x es un vértice de corte de G , pero esto es una contradicción por lo que existe $z_T \neq x$. Sin pérdida de generalidad, z_T se encuentra en la sección xCr del ciclo por lo que, yTz_TCrscx es una xy trayectoria que contiene a e .

Por último, veamos que (6) implica (1). Consideremos tres vértices $x, y, z \in V(G)$ y supongamos que (6) es cierto. Entonces, existe una xy -trayectoria Q que pasa por z , pero también existe una zx -trayectoria P que pasa por y . Por lo que la trayectoria yPx está contenida en $G - z$ entonces, z no es un xy -separador. Pero esto es cierto para cualesquiera tres vértices por lo que G no tiene vértices de corte por lo que concluimos que G es bloque. ■

2.3. EL TEOREMA DE MENGER

Existen varias versiones de este teorema. Para enunciar la versión que nosotros utilizaremos necesitamos una definición más.

Consideremos una gráfica G con dos vértices no adyacentes de G , x y y . Diremos que $S \in V$ es un xy -separador si x y y pertenecen a distintas componentes de $G - S$. La cardinalidad de un xy -separador de tamaño mínimo la denotaremos por $c(x, y)$. A esta función, $c : H \rightarrow \mathbb{N}$, la llamaremos

la **función corte local** de G . Notemos que cuando $x = y$ o $xy \in E$, c no está definida por lo que $H = VxV \setminus \{(v, v) : v \in V\}$.

Antes de enunciar el teorema introduciremos una operación que nos será útil en la demostración. Sea X un subconjunto propio de V . La **contracción** de X es la gráfica denotada por G/X que resulta de remover al conjunto X y agregar un nuevo vértice x tal que $N_{G/X}(x) = N_G(X)$.

Teorema 2.3.1. [Menger,1927] *Para cualquier gráfica $G(x, y)$ con $xy \notin E(G)$. Se cumple que*

$$c(x, y) = p(x, y).$$

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre la cantidad de aristas. Fijemos al entero $k = c_G(x, y)$. Notemos que $p_G(x, y) \leq k$ ya que cualquier familia \mathbb{F} de xy -trayectorias internamente ajenas interseca a un xy -separador en al menos $|\mathbb{F}|$ vértices. Por lo que basta demostrar que $p_G(x, y) \geq k$. Supongamos que existe al menos una arista $e = uv$ que no incide en x ni en y ; de lo contrario, cualquier xy -trayectoria sería de longitud 2 y ya habríamos terminado.

Fijemos $H = G/\{u, v\}$. Claramente $p_G(x, y) \geq p_H(x, y)$. También, por hipótesis de inducción, $p_H(x, y) = c_H(x, y)$. Más aun, $c_G(x, y) \leq c_H(x, y) + 1$ ya que cualquier xy -separador en H , junto con algún extremos de e , es un xy -separador en G . Por lo que:

$$p_G(x, y) \geq p_H(x, y) = c_H(x, y) \geq c_G(x, y) - 1 = k - 1.$$

Podemos asumir que la igualdad se cumple, es decir $p_G(x, y) = k - 1$; de lo contrario, $p_G(x, y) = k$ y ya habríamos terminado. Entonces, $c_H(x, y) = k - 1$. Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ un xy -separador mínimo en H . Sean X y Y los conjuntos de vértices de las componentes a las que pertenecen x y y en $H - S$ respectivamente. Como $|S| = k - 1$, entonces S no es un corte en G , entonces existe una xy -trayectoria en $G - S$. Esta trayectoria necesariamente contiene a e . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $u \in X$ y $v \in Y$.

Consideremos ahora a G/Y , la gráfica que resulta al contraer Y a un sólo vértice. Cada xy -separador T en G/Y es, necesariamente, un xy -separador en G . Por lo que $c_{G/Y}(x, y) \geq k$. Por otro lado, $c_{G/Y}(x, y) \leq k$ debido a que $S \cup \{u\}$ es un xy -separador en G/Y . Por esto, $S \cup \{u\}$ es un xy -separador mínimo en G/Y . Por hipótesis de inducción, existen k xy -trayectorias internamente ajenas P_1, P_2, \dots, P_k en G/Y , además, cada vértice de $S \cup \{u\}$

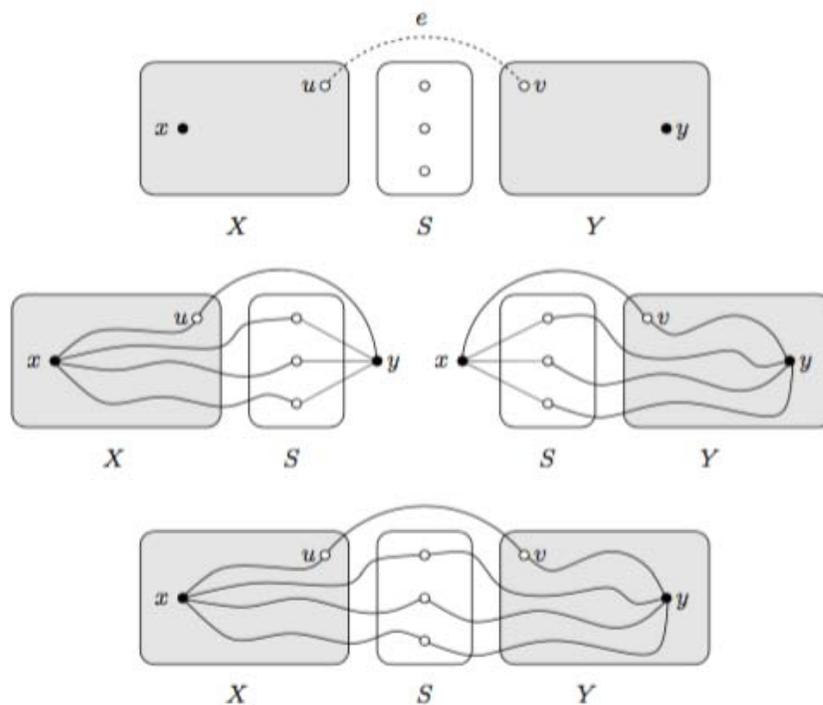


Figura 2.3: Demostración del teorema de Menger

pertenece a una de éstas. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_i \in V(P_i), i \in \{1, \dots, k-1\}$ y $u \in V(P_k)$. Análogamente, existen k xy -trayectorias internamente ajenas Q_1, \dots, Q_k en $G \setminus X$, con $v_i \in V(Q_i), i \in \{1, \dots, k-1\}$ y $v \in Q_k$. De esto vemos que las trayectorias $xP_iv_iQ_iy, i \in \{1, \dots, k-1\}$ y xP_kuvP_y son k xy -trayectorias internamente ajenas. ■

2.4. EL LEMA DEL ABANICO

En esta sección demostraremos algunas consecuencias del teorema de Menger que nos serán de utilidad más adelante.

Lema 2.4.1. *Si G es k -conexa y H se obtiene de G al añadir un nuevo vértice x y hacerlo adyacente al menos a k vértices en G . Entonces, H es k -conexa.*

Demostración. Tomemos a S un conjunto de $k - 1$ vértices de H . Veamos que si $x \in S$ entonces $S \setminus \{x\}$ es un conjunto de $k - 2$ vértices de G por lo que $S \setminus \{x\}$ no desconecta a G . Como $H = G + x$ entonces $H - S = G - (S \setminus \{x\})$ por lo tanto, $H - S$ es conexa. Supongamos ahora que $x \notin S$. Como $d(x) \geq k$ y $|S| = k - 1$ entonces x tiene al menos un vecino en $V(G) \setminus S$. Pero S no desconecta a G , entonces S no desconecta a H . ■

Este lema nos es útil para que, junto con el teorema de Menger, podamos probar la siguiente proposición que será una gran herramienta para varias demostraciones del siguiente capítulo.

Proposición 2.4.2. *Sea G un gráfica k -conexa, tomemos dos subconjuntos $X, Y \subseteq V(G)$ tales que $|Y| \geq |X| \geq k$. Entonces, hay al menos k XY -trayectorias ajenas.*

Demostración. Obtengamos una nueva gráfica H que resulte de añadir dos nuevos vértices, x, y y hacerlos adyacentes a k vértices de X y Y respectivamente. Por el lema 2.4.1 H es k -conexa. Entonces, por el teorema de Menger (teorema 2.3.1), existen k xy -trayectorias internamente ajenas en H . Al borrar a x y y de cada una de estas trayectorias obtenemos k trayectorias ajenas Q_1, Q_2, \dots, Q_k con vértice inicial en X y vértice final en Y . Cada una de estas trayectorias Q_i contiene una subtrayectoria P_i que inicia en X , termina en Y y no tiene vértices internos en $X \cup Y$. Por lo tanto, las trayectorias P_1, P_2, \dots, P_k son k XY -trayectorias ajenas. ■

Con esta proposición podemos demostrar el lema del abanico. Un k -**abanico** de x a Y es un conjunto de xY -trayectorias que sólo tienen en común a x .

Lema 2.4.3. *[Lema del abanico] Si G es k -conexa y $Y \subseteq V \setminus \{x\}$ tal que $|Y| \geq k$. Entonces, existe un xY -abanico en G .*

Demostración. Tomemos a $x \in V(G)$ y $Y \subseteq V \setminus \{x\}$ tal que $|Y| \geq k$. Al ser G k -conexa, por el lema 2.4.1, podemos agregar un vértice nuevo y con $N(y) = Y$, y la gráfica resultante H es k -conexa. Por el teorema de Menger, existen k xy -trayectorias internamente ajenas en H . Al quitarle el vértice y a las trayectorias, obtenemos nuestro xY -abanico en G . ■

Una de las implicaciones más importantes del lema del abanico es el teorema de Dirac. Antes de enunciarlo recordemos que si tenemos m objetos por guardar en n lugares con $m > n$, entonces el **principio del palomar** nos dice que habrá al menos un lugar que guarda 2 objetos.

Teorema 2.4.4. [Dirac] Sea S un conjunto de k -vértices de un gráfica k -conexa G , con $k \geq 2$. Entonces, existe un ciclo C que contiene a todos los vértices de S .

Demostración. Procederemos por inducción sobre k . Por el teorema 2.2.3 ya tenemos nuestra base demostrada. Sea entonces $k \geq 3$. Tomemos a $x \in S$ y definamos $T = S \setminus \{x\}$. Como G es k -conexa, en particular es $(k - 1)$ -conexa. Por nuestra hipótesis de inducción existe un ciclo C' que contiene a $S \setminus \{x\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \notin V(C')$. Supongamos también que $v(C') = k - 1$, por el lema del abanico (lema 2.4.3) existen $(k - 1)$ - xC' trayectorias con único vértice en común x . Sea $\alpha_i = V(P_i) \cap V(C')$ y fijémonos en el ciclo $C = \alpha_1 P_1 x P_2 \alpha_2 C \alpha_1$ el cual contiene a todos los vértices de S . Supongamos ahora que $v(C') \geq k$, entonces, por el lema del abanico (lema 2.4.3), existe un k -abanico de x a $V(C')$. Como $|T| = k - 1$, entonces T divide a C' en $k - 1$ segmentos ajenos por aristas. Por el principio del palomar, dos trayectorias del abanico P y Q terminan en el mismo segmento. Supongamos que P y Q terminan en los vértices del ciclo p y q respectivamente. Al fijarnos en el ciclo C definido como $C = pPxQqCp$ obtenemos nuestro ciclo que contiene a S .

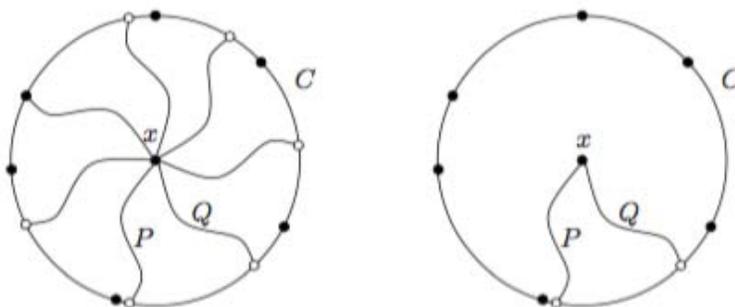


Figura 2.4: Uso del lema del abanico y el principio del palomar en la demostración del teorema de Dirac

■

Capítulo 3

CONEXIDAD TROPICAL

Hemos llegado al capítulo principal de esta tesis. En este capítulo exhibiremos los primeros resultados de un nuevo parámetro que introduciremos a continuación.

Consideremos a una gráfica conexa G y a una coloración por vértices c de G . Decimos que c hace a G *tropicalmente conexa* si y sólo si, para cualquier par de vértices $x, y \in V(G)$ existe una xy -trayectoria T que contenga a al menos un vértice de cada clase cromática de G bajo c , es decir $c[V(T)] = c[V(G)]$. A una trayectoria T que tenga representados cada uno de los colores de c , la llamaremos *trayectoria tropical*. Por simplicidad, nosotros escribiremos $c[T]$ en lugar de $c[V(T)]$ y t -conexa en vez de tropicalmente conexa. En la figura 3.1 vemos que la trayectoria $T = v_0v_1v_3v_5v_6$ es una trayectoria tropical.

Si coloreamos a todos los vértices de una gráfica conexa G con el mismo color, G será t -conexa con esta coloración. Por esta razón, no buscaremos la mínima cantidad de colores para la cual exista una coloración tropical si no la máxima.

Nosotros definimos al *número de conexidad tropical* como el mayor entero k tal que existe una k -coloración c de los vértices de G que haga a G tropicalmente conexa. A este número lo denotaremos por $\kappa_t(G)$

$$\kappa_t(G) = \text{máx}\{k \in \mathbb{N} : \text{existe una } k\text{-coloración que haga a } G \text{ } t\text{-conexa}\}.$$

Por ejemplo $\kappa_t(K_n) = n$ ya que entre cualquier par de vértices x, y existe una xy -trayectoria que pase por todos los demás.

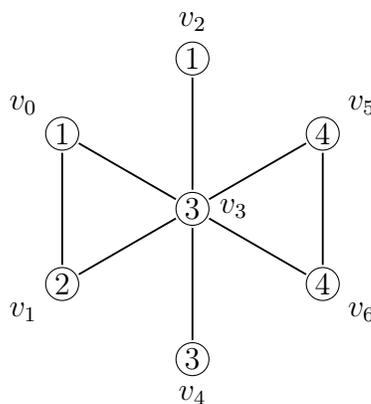


Figura 3.1: Una gráfica G con al menos una trayectoria tropical bajo una coloración c .

3.1. PRIMERAS OBSERVACIONES

Comencemos con las cotas más sencillas que podemos encontrar.

Observación 3.1.1. Para toda gráfica G y para cualesquiera $x, y \in V(G)$

$$\kappa_t(G) \leq \max\{v(T) : T \text{ es una } xy\text{-trayectoria en } G\}.$$

Esta observación es bastante clara ya que si tuviéramos una coloración que usa más colores que la trayectoria más larga entre algún par de vértices, entonces no habría una trayectoria entre éstos que usara todos los colores de la coloración.

Algo que es común en la teoría de gráficas es describir el comportamiento de un parámetro en una gráfica por el comportamiento de dicho parámetro en sus bloques.

La **gráfica de bloques y cortes** de una gráfica G se define como la gráfica bipartita $B(X, Y)$ donde X es el conjunto de vértices de corte de G y Y es el conjunto de bloques de G . Además dados dos vértices $x \in X$, $y \in Y$ existe la arista xy si y sólo si $x \in V(y)$. En [2] muestran que $B(X, Y)$ es un árbol.

Proposición 3.1.2. Para cualquier gráfica G se cumple que:

$$\kappa_t(G) = \min\{\kappa_t(B) : B \text{ es bloque de } G\}.$$

Demostración. Supongamos que $\kappa_t(G) = l > \min\{\kappa_t(B) : B \text{ es bloque de } G\}$. Entonces existe una coloración $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$ que hace a G t -conexa. Sea B un bloque de G tal que $\kappa_t(B) = k = \min\{\kappa_t(B) : B \text{ es bloque de } G\}$, tomemos ahora a $u, v \in V(B)$, sabemos que si T es una uv -trayectoria en G , entonces $T \subseteq B$. Sea T_c la uv -trayectoria tal que $|c[T_c]| = l$. Podemos ver ahora que $c \upharpoonright_B$ hace a B t -conexa, entonces $\kappa_t(B) \geq l > k$ y ésto es una contradicción. Entonces $\kappa_t(G) \leq \min\{\kappa_t(B) : B \text{ es bloque de } G\}$.

Sea $k = \min\{\kappa_t(B) : B \text{ es bloque de } G\}$, entonces para cada bloque $B \subseteq G$ existe $c_B : V(B) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que hace a B t -conexa. Definamos la coloración $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ donde $c \upharpoonright_B = c_B$ para cada bloque $B \subseteq G$. Para ver que esta coloración está bien definida hay que fijarnos en los vértices de corte ya que estos son los únicos contenidos en más de un bloque. Si un vértice v pertenece a dos bloques B y D de G y $c \upharpoonright_B(v) \neq c \upharpoonright_D(v)$ entonces, podemos permutar los colores $c \upharpoonright_D(v)$ y $c \upharpoonright_B(v)$ de modo que ahora a v se le asigna el mismo color bajo $c \upharpoonright_B$ y $c \upharpoonright_D$. Estas permutaciones las haremos un cantidad finita de veces debido a que la gráfica de bloques y cortes de G es un árbol.

Veamos ahora que c hace a G t -conexa. Si $u, v \in V(G)$ pertenecen al mismo bloque B , es claro que existe una uv trayectoria T tal que $|c \upharpoonright_B[T]| = k$. Sea $u \in V(B_i)$ y $v \in V(B_j)$ con B_i, B_j distintos bloques de G , entonces existe una uv -trayectoria T en G . Tomemos a x el primer vértice de corte de G en T distinto de u . Entonces u, x pertenecen a un mismo bloque C . Sea R la ux -trayectoria en C que cumple que $|c[R]| = k$ y hagamos ahora a $S = uTx_1Rx_2Tv$, claramente S es una uv -trayectoria en G y $|c[S]| = |c[R]| = k$. Por lo tanto $\kappa_t(G) = \min\{\kappa_t(B) : B \text{ es bloque de } G\}$. ■

Ya que sabemos que podemos analizar a una gráfica por su bloques podemos ahora fijarnos en gráficas 2-conexas.

Proposición 3.1.3. *Sea G una gráfica 2-conexa y $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ una coloración de G . Si existe $H \subseteq G$ tal que c hace a H tropicalmente conexa, entonces c hace a G tropicalmente conexa.*

Demostración. Tomemos G una gráfica 2-conexa y $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ una coloración de G . Sea $H \subseteq G$ tal que c hace a H tropicalmente conexa.

Ahora veamos que para cualquier par de vértices $u, v \in V(G)$ existe una uv -trayectoria T en G tal que todos los colores de c están representados en T .

1. Si u y v están en los vértices de H tomamos la trayectoria en H en la que están representados todos los colores de c .
2. Si u no está en los vértices de H y $v \in V(H)$, como G es 2-conexa, existen dos uH -trayectorias P_1 y P_2 ajenas salvo por u . Tomemos $a_1 = P_1 \cap H$ y $a_2 = P_2 \cap H$. Sin pérdida de generalidad $a_1 \neq v$. Sea S la a_1v -trayectoria en H que usa todos los colores de c . Hagamos ahora $T = uP_1a_1Sv$, esta es una uv -trayectoria en la cual están representados todos los colores de c .
3. El último caso es cuando u, v no están en los vertices de H . Por el teorema de Menger, sabemos que existen Q_1 , una uH -trayectoria y Q_2 una vH -trayectoria, ajenas entre sí. De nuevo tomemos $a_1 = Q_1 \cap H$ y $a_2 = Q_2 \cap H$. Sea R la a_1a_2 -trayectoria en H que usa todos los colores de c . Hagamos $T = uQ_1a_1Ra_2Q_2v$, esta es una uv -trayectoria en G en la cual están representados todos los colores de c .

■

Este lema nos da de inmediato la posibilidad de relacionar la conexidad tropical con otros parámetros.

Corolario 3.1.4. *Para toda gráfica G , 2-conexa, se cumple que,*

$$\omega(G) \leq \kappa_t(G).$$

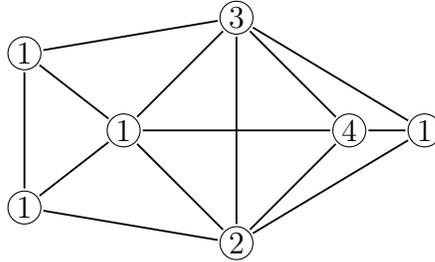


Figura 3.2: Una gráfica G con una $\omega(G)$ -coloración que la hace t -conexa

Más adelante estudiaremos con mayor profundidad la relación entre el número de clan y la conexidad tropical. Por ahora hagamos una observación más que nos ayudará para calcular el número de conexidad tropical de algunas familias de gráficas.

Proposición 3.1.5. *Sea G una gráfica e $I \subseteq V(G)$ un conjunto independiente con $|I| = r$. Entonces,*

$$\kappa_t(G) \leq 2(n - r) - 1.$$

Demostración. Sea I un conjunto independiente de G con cardinalidad r y tomemos $x, y \in V \setminus I$. Notemos que ninguna xy -trayectoria puede contener dos vértices contiguos de I . Por lo que la xy -trayectoria más larga T contendrá a lo más un vértice de I entre cada dos de $V \setminus I$. Es decir, $v(T) \leq 2(n - r) - 1$. Por la observación 3.1.1 tenemos que $\kappa_t(G) \leq \max\{v(T) : T \text{ es una } xy\text{-trayectoria en } G\} \leq 2(n - r) - 1$. ■

Es importante remarcar que esta cota sólo nos es útil cuando $\alpha(G) \geq \frac{n}{2}$ ya que de otra manera $2(n - \alpha(G)) - 1 \geq n$ y esto no nos da información nueva.

3.2. FAMILIAS DE GRÁFICAS

Empecemos analizando a una de las primeras familias que se estudian en la teoría de gráficas.

Observación 3.2.1. Si T es un árbol con al menos dos vértices, entonces

$$\kappa_t(T) = 2.$$

Demostración. Basta usar la proposición 3.1.2 y observar que todos los bloques de T son isomorfos a K_2 . Si coloreamos a K_2 con dos colores, entonces es t -conexa. Entonces $\kappa_t(T) = \kappa_t(K_2) = 2$. ■

Corolario 3.2.2. *Para toda gráfica no trivial G , $\kappa_t(G) \geq 2$.*

Demostración. Recordemos que estamos trabajando únicamente con gráficas conexas, entonces G tiene un árbol generador T . Por la proposición 3.1.3 y la observación 3.2.1, $\kappa_t(G) \geq \kappa_t(T) \geq 2$. ■

Ya vimos qué pasa con las gráficas acíclicas. Veamos ahora qué pasa con los ciclos.

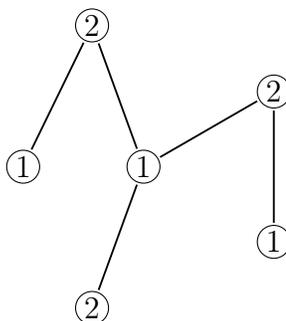


Figura 3.3: Un árbol T 2-coloreado y t -conexo

Proposición 3.2.3. Sea $C_n = v_0v_1 \cdots v_{n-1}v_0$ el ciclo de n vértices entonces,

$$\kappa_t(C_n) = \begin{cases} 3 & n \leq 5; \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & n > 5. \end{cases}$$

Demostración. Primero veremos que se cumple para $n = 4$ o $n = 5$, ya que el caso en el que $n = 3$ es bastante claro.

Ver que $\kappa_t(C_4) \geq 3$ y $\kappa_t(C_5) \geq 3$ es claro con las coloraciones de la figura 3.4



Figura 3.4: C_4 y C_5 con una 3-coloración que los hace t -conexos

Ahora veamos que, por la observación 3.1.1, al fijarnos en dos vértices antipodales implica que $\kappa_t(C_4) \leq 3$. Para $n = 5$, basta observar que si coloreamos con 4 colores, sin pérdida de generalidad la coloración se verá como en la figura 3.5.

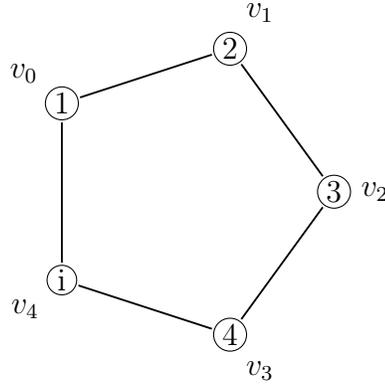


Figura 3.5: 4-coloración de C_5 con una trayectoria tropical entre v_0 y v_3 , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Veamos que para que exista una trayectoria que use todos los colores entre los vértices con color 1 y 3 necesitamos que el quinto vértice tenga color 2. Pero entonces fijémonos en los dos vértices con color 2. Es claro que no existe una trayectoria que use todos los colores de la coloración entre estos dos.

Para el caso en el que $n > 5$ veamos primero que $\kappa_t(C_n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Coloquemos a C_n con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ colores. Observemos que habrá al menos una clase cromática singular. Llamemos x al vértice de esta clase e i a su color. Fijémonos ahora en los dos vecinos de x : x_1 y x_2 . Entre estos dos existen únicamente dos trayectorias distintas T y x_1x_2 . Vemos claramente que en T no está representado el color i y en x_1x_2 hay a lo más 3 colores representados, pero $n \geq 6$ entonces $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \geq 4$, por lo que entre x_1 y x_2 no existe trayectoria que use todos los colores de la coloración.

Exhibamos ahora una coloración que use $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ colores y haga a C_n tropicalmente conexo. Definamos ahora a nuestra coloración $c(v_i) \equiv i \pmod{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Observemos que para cualquier par de vértices en el ciclo existe una trayectoria con al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ para el caso donde n es par e impar respectivamente. Con este argumento en mente, basta entonces demostrar que cualquier trayectoria de longitud $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ o $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$, dependiendo de la paridad de n , es tropical. Veamos primero el caso par, tomemos a v_i y v_j donde $j = i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Tomemos a $T_{ij} = v_i v_{i+1} \cdots v_j$ y notemos que cualquier trayectoria de longitud $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ es de esta forma. Por como definimos a c y, suponiendo sin pérdida de generalidad que $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, los colores representados

en T_{ij} son $c[T_{ij}] = \{i, i + 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 0, 1, \dots, i - 1, i\}$. Con esto terminamos la demostración para el caso par. Fijémonos ahora en el caso impar y análogamente consideremos a T_{ij} pero ahora $j = i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. En esta ocasión tendremos dos casos:

1. El vértice v_n no pertenece a T_{ij} . En este caso vemos que $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y de manera similar al caso par vemos que $c[T_{ij}] = \{i, i + 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 0, 1, \dots, i - 1, i\}$.
2. En este caso v_n sí pertenece a T_{ij} por lo que $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Veamos ahora cómo está coloreada esta trayectoria: $c[T] = \{j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, j + 1 - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \dots, n - 2 - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 0, 0, 1, \dots, j + 1\} \pmod{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. El color 0 está repetido dos veces ya que a los vértices v_{n-1} y v_0 se les asigna el mismo color.

Con estos último dos casos concluimos nuestra demostración.

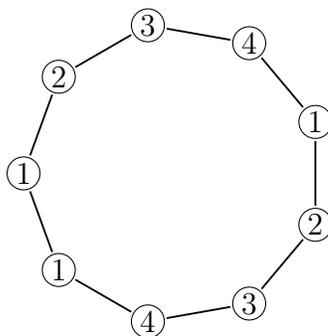


Figura 3.6: C_9 coloreado tropicalmente con 4 colores

■

Como corolario directo de la proposición 3.1.3 y de esta proposición obtenemos los dos siguientes corolarios.

Corolario 3.2.4. *Para toda gráfica 2-conexa G , se cumple que:*

$$\left\lfloor \frac{\text{circ}(G)}{2} \right\rfloor \leq \kappa_t(G).$$

Corolario 3.2.5. *Si G es una gráfica 2-conexa y tiene al menos tres vértices, entonces $\kappa_t(G) \geq 3$*

Demostración. Si G es una gráfica 2-conexa con $n \geq 3$. Sea $xy \in E(G)$ y $z \in V(G)$ distinto a x y y . Como G es 2-conexa, entonces existe un ciclo C que contiene a xy y a z . Entonces $\kappa_t(G) \geq \kappa_t(C) \geq 3$. ■

Este último corolario parece sólo mejorar un poco la cota obtenida en el corolario 3.2.2, sin embargo nos sirve para la siguiente caracterización.

Proposición 3.2.6. *Sea G una gráfica, entonces*

$$\kappa_t(G) = 2 \text{ si y sólo si } G \text{ tiene al menos un puente.}$$

Demostración. Una de las dos implicaciones es bastante clara ya que si G tiene un puente entonces $\kappa_t(G) = \kappa_t(K_2)$.

Supongamos ahora que $\kappa_t(G) = 2$ y sea $H \subseteq G$ un bloque de G tal que $\kappa_t(H) = \min\{\kappa_t(B) : B \text{ es bloque de } G\}$. Por la proposición 3.1.2 $\kappa_t(H) = \kappa_t(G) = 2$. Por el corolario 3.2.5, al ser H 2-conexa, $|V(H)| = 2$, por lo que $H \cong K_2$. ■

Debido a las proposición 3.2.6 y 3.1.2, de aquí en adelante trabajaremos con gráficas 2-conexas a menos de que se indique lo contrario.

Por la proposición 3.2.6, tenemos una caracterización de las gráficas que alcanzan la cota inferior mostrada en el corolario 3.2.2. Es claro que n es una cota superior de $\kappa_t(G)$ para cualquier gráfica G . Ahora expondremos una caracterización de las gráficas que alcanzan ésta cota.

Proposición 3.2.7. *Una gráfica G con $v(G) = n$ satisface que $\kappa_t(G) = n$ si y sólo si G es hamiltonianamente-conexa.*

Demostración. Sea G con $v(G) = n$. Supongamos que $\kappa_t(G) = n$, entonces existe una coloración $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ y para cada par de vértices u, v existe una uv -trayectoria T tal que $|c[T]| = n$ entonces $v(T) \geq n$. Por lo que T es una uv -trayectoria hamiltoniana.

Supongamos ahora que G es hamiltonianamente conexa. Sean $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ con $c(v_i) = i$. Entonces para cada $u, v \in V(G)$ tomamos la uv -trayectoria hamiltoniana y en ésta tendremos a los n colores representados. ■

Como implicación inmediata obtenemos que la conexidad tropical de la gráfica completa de n vértices es n . Para obtener el siguiente corolario que nos será útil más adelante, basta recordar que las ruedas son hamiltonianamente conexas.

Corolario 3.2.8. *Sea W_n la rueda de n rayos. Entonces, $\kappa_t(W_n) = n + 1$.*

En las familias que hemos estudiado hasta ahora pudimos encontrar su número de conexidad tropical exacto. Sin embargo, hay otras familias en las que puede variar el número de conexidad tropical por ejemplo, las bipartitas.

Corolario 3.2.9. *Sea $G(X, Y)$ una gráfica bipartita. Entonces,*

$$3 \leq \kappa_t(G) \leq 2(\text{mín}\{|X|, |Y|\}) - 1.$$

Y estas cotas son justas.

Demostración. La cota superior es implicación directa de la proposición 3.1.5 y las gráficas que la alcanzan son las bipartitas completas $K_{r,s}$.

Ya sabemos que para cualquier gráfica 2-conexa G , $\kappa_t(G) \geq 3$. Pero además, para cualquier $n \geq 4$, existe una gráfica bipartita 2-conexa con conexidad tropical 3, a saber, $K_{2,n-2}$. ■

Corolario 3.2.10. *Sea $K(M_1, M_2, \dots, M_k)$ una gráfica multipartita completa tal que $|M_1| \geq |M_2| \geq \dots \geq |M_k|$. Entonces,*

$$\kappa_t(K) = \begin{cases} n & \text{si } |M_1| < \sum_{i=2}^k |M_i|; \\ 2 \cdot \sum_{i=2}^k |M_i| - 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Veamos que M_1 es el independiente máximo de K y por la proposición 3.1.5 $\kappa_t(K) \leq 2 \cdot \sum_{i=2}^k |M_i| - 1$. Si además, $|M_1| \geq \sum_{i=2}^k |M_i|$, y consideramos a $Y = \cup_{i=2}^k M_i$ entonces, K tiene como subgráfica a la bipartita completa $G(M_1, Y)$. Usando el corolario 3.2.9 $\kappa_t(G) = 2(\text{mín}\{|M_1|, |Y|\}) - 1$ entonces, $\kappa_t(K) \geq 2 \cdot \sum_{i=2}^k |M_i| - 1$, demostrando el segundo caso.

Supongamos ahora que $|M_1| < \sum_{i=2}^k |M_i|$, en este caso K es hamiltonianamente conexa y por la proposición 3.2.7 $\kappa_t(K) = n$. ■

Al inicio de esta capítulo vimos cómo se relaciona $\alpha(G)$ con $\kappa_t(G)$. Ahora usaremos este resultado.

Corolario 3.2.11. *Sea G una gráfica escindible. Entonces*

$$\omega(G) \leq \kappa_t(G) \leq 2\omega(G) - 1.$$

Demostración. La cota inferior es implicación del corolario 3.1.4, mientras que la cota superior es una implicación de la proposición 3.1.5.

Para ver que la cota inferior es justa basta fijarnos en una gráfica completa. Mientras que para la cota superior podemos pensar en $G(K, I)$ donde $K = \omega(G) - 1$, $|I| \geq \omega(G) + 1$ y además de todas las aristas inducidas por K tenemos todas las posibles KI -aristas. G tendrá como subgráfica generadora a $K_{\omega(G)-1, |I|}$ y más adelante mostraremos que $\kappa_t(K_{\omega(G)-1, |I|}) = 2\omega(G) - 1$. ■

Las gráficas escindibles son parte de las gráficas cordales, que a su vez, pertenecen a la familia de las perfectas. Ahora analizaremos una subfamilia más de esta familia. Con esta subfamilia será suficiente acotar nuestro parámetro en las gráficas perfectas.

Proposición 3.2.12. *Sea G una gráfica de intervalos entonces,*

$$3 \leq \kappa_t(G) \leq n.$$

Y estas cotas son justas.

Demostración. Sabemos que para cualquier gráfica 2-conexa G , se cumple que $3 \leq \kappa_t(G) \leq n$, veamos ahora que estas cotas son justas para las gráficas de intervalos.

Para ver la cota superior sólo hace falta ver que K_n es una gráfica de intervalos. Para la cota inferior haremos una construcción de una gráfica G tal que $\kappa_t(G) = 3$ para cualquier $n \geq 3$.

Sea $n \geq 3$ y hagamos $x_{n-1} = (0, 1)$, $x_{n-2} = [0, 1]$ y $x_i = (\frac{i}{n-2}, \frac{i+1}{n-2})$ para $i = 0, 1, \dots, n-3$. Hagamos a G la gráfica de intersección de los intervalos $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. En la figura 3.7 vemos un ejemplo cuando $n = 6$. No es difícil ver que G es 2-conexa por lo que $3 \leq \kappa_t(G)$. Fijémonos ahora en x_{n-1} y x_{n-2} y veamos que la trayectoria más larga entre estos dos es de 3 vértices por lo que $3 \geq \kappa_t(G)$. Esto implica que 3 es una cota justa para cualquier n arbitrariamente grande. ■

Esta proposición también nos dice que la cota obtenidas en el corolario 3.2.5 es lo mejor que podemos encontrar para las gráficas 2-conexas en general. Sin embargo, sí hay familias en las que se pueden mejorar bastante las cotas.

Recordemos que en el capítulo 1 definimos lo que es una gráfica plana y notemos que cualquier imersión plana de una gráfica G parte al resto del

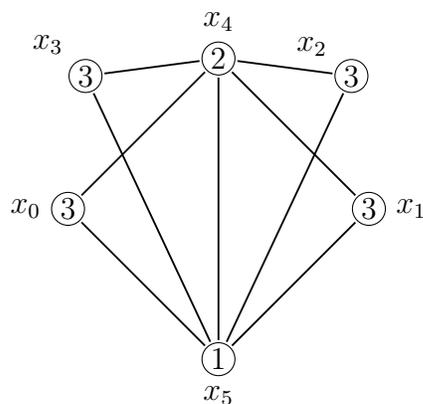


Figura 3.7: Gráfica de intervalos G de 6 vértices con $\kappa_t(G) = 3$

plano en distintas regiones. A estas regiones las llamamos *caras* de G . En la figura 3.8 vemos una gráfica plana con cinco caras, f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 . Cada imersión plana de una gráfica contiene exactamente una cara no acotada, a ésta la llamaremos *cara exterior*. En la figura 3.8 la cara exterior es f_1 .

Diremos que una gráfica es exteriormente plana cuando tenga una imersión plana en la cual encontremos a todos sus vértices en la cara exterior. Los ciclos son un ejemplo de una gráfica exteriormente plana.

Debido a que estamos trabajando con gráficas 2-conexas pensaremos únicamente en gráficas exteriormente planas 2-conexas. En [4] muestran un resultado sobre éstas que nos será útil: una gráfica exteriormente plana 2-conexa contiene un único ciclo hamiltoniano.

Observación 3.2.13. Si G es una gráfica exteriormente plana 2-conexa no maximal, tal que existe un par de vértices no adyacentes x, y entonces, se pueden añadir aristas a G de modo que la gráfica resultante, H , sea exteriormente plana máxima por contención y $xy \notin E(H)$.

Demostración. Sea G es una gráfica exteriormente plana 2-conexa con ciclo hamiltoniano $C = v_0v_1 \cdots v_{n-1}v_0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $v_0v_i \notin E(G)$ y que G no es máxima por contención. Veamos que, si no existe un arista $v_jv_k \in E(G)$ donde $0 < j < i < k$ entonces la podemos añadir de manera que $G + \{v_jv_k\}$ sea exteriormente plana. Ya que de lo contrario querría decir que $v_0v_i \in E(G)$. Podemos ahora añadir aristas a $G + \{xy\}$

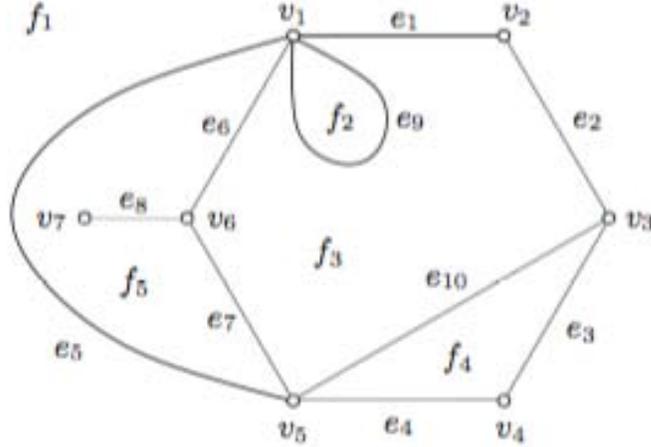


Figura 3.8: Una gráfica plana con cinco caras.

de modo que la volvamos una gráfica H exteriormente plana máxima por contención y tenemos garantizado que $v_0v_i \notin E(H)$. ■

Lema 3.2.14. *Si G es una gráfica exteriormente plana 2-conexa y tomamos $x, y \in V(G)$ que no sean adyacentes, entonces existe un 2-corte xy -separador.*

Demostración. Supongamos que G es exteriormente plana máxima por contención. Procederemos por inducción sobre la cantidad de vértices. La base será $C_4 = v_1v_2v_3v_4$ con la diagonal v_1v_3 . Claramente los únicos vértices no adyacentes son v_2 y v_4 y no es difícil ver que v_1, v_3 separa v_2 y v_4 . Consideremos ahora a una gráfica G con n vértices exteriormente plana máxima por contención y sean $x, y \in V(G)$ no adyacentes. Como G es máxima entonces, existen $u, v, w \in V(G)$ consecutivos en la cara exterior y que inducen un triángulo, es decir, una oreja de tres vértices. Si $x = v$ o $y = v$ entonces, $\{u, w\}$ es el corte que buscamos. Fijémonos en $G - \{v\}$, aplicando hipótesis de inducción tomemos a los vértices v_1, v_2 que separan a x y y en $G - \{v\}$. Como $N_G(v) = \{u, w\}$ y $uw \in E(G)$ entonces, v_1, v_2 son un corte en G que separa a x y y .

Para terminar la demostración basta recordar que, por la observación 3.2.13, si G es una gráfica exteriormente plana 2-conexa, para cualquier par

de vértices x, y no adyacentes en G , podemos maximizar a G de tal manera que preserve la no adyacencia de x y y . ■

Proposición 3.2.15. *Si G es una gráfica exteriormente plana, entonces*

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \kappa_t(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1.$$

Demostración. Para verificar la cota inferior basta recordar que las gráficas exteriormente planas 2-conexas son hamiltonianas y ya tenemos la cota inferior por el corolario 3.2.4.

Para la cota superior observemos que si existen dos clases cromáticas singulares cuyos vértices son u y v respectivamente, entonces debe de haber una arista entre ellos. De lo contrario, por el lema 3.2.14 existen $x, y \in V$ que separan a u y v , por lo que no existe una xy -trayectoria que contenga a u y a v . De esto obtenemos que no puede haber cuatro clases cromáticas singulares ya que obtendríamos a K_4 como subgráfica y ésta es una subgráfica prohibida de las gráficas exteriormente planas. Ahora sabemos que a lo más tendremos 3 clases cromáticas singulares, entonces la mayor cantidad de colores que podemos usar para el resto de los vértices son $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$. Observemos que si n es par entonces, $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor = \frac{n}{2} - 2$ y si n es impar entonces, $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor = \frac{n}{2} - 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$. En ambos casos, al sumarle los 3 colores únicos que ya teníamos, concluimos que $\kappa_t(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. ■

Consideremos una gráfica G exteriormente plana 2-conexa con ciclo hamiltoniano $C = v_0v_1 \cdots v_{n-1}v_0$. Supongamos que existen tres vértices v_i, v_j y v_k que inducen un triángulo y $i < j < k$. Llamaremos C_{ij} al conjunto de vértices en el ciclo hamiltoniano que se encuentran entre v_i y v_j , es decir $C_{ij} = \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}\}$ (los subíndices de los vértices de C_{ij} los consideramos módulo n). Análogamente consideremos a C_{jk} y a C_{ki} . Diremos que una gráfica exteriormente plana cumple la propiedad Q_1 si existen tres vértices v_i, v_j y v_k que inducen un triángulo y $|C_{ij}| \leq |C_{jk}| \leq |C_{ki}| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Lema 3.2.16. *Sea G una gráfica exteriormente plana que cumple la propiedad Q_1 , entonces*

$$\kappa_t(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1.$$

Demostración. Durante esta prueba consideraremos a los subíndices de los vértices módulo n . Tomemos a los vértices v_i, v_j y v_k que cumplen que

$|C_{ij}| \leq |C_{jk}| \leq |C_{ki}| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Sean $a = |C_{ij}|$, $b = |C_{jk}|$ y $c = |C_{ki}|$. Empecemos ahora a colorear a la gráfica y llamemos a esta coloración t . Coloreemos primero a v_i, v_j y a v_k : $t(v_i) = 1$, $t(v_j) = 2$ y $t(v_k) = 3$. Tomemos ahora un vértice $v_{i+l} \in C_{ij}$ y asignémosle el color $3 + l$. Recordemos que $a \leq b \leq c$ y consideremos a $d = c - b \geq 0$. Definamos ahora a $t(v_{i-l}) = 3 + l$ donde $l \in \{1, 2, \dots, d + \lfloor \frac{a-d}{2} \rfloor\}$ y observemos que todos estos colores son repetidos. Terminemos de repetir los colores de C_{ij} en C_{jk} , es decir $t(v_{j+l}) = a - l + 1$ donde $l \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{a-d}{2} \rfloor\}$. Para terminar la coloración definamos $t(v_{k-l}) = t(v_{k+l}) = a + l$ con $l \in \{1, 2, \dots, b - \lfloor \frac{a-d}{2} \rfloor\}$. Dependiendo de la paridad de n nos podría faltar colorear el vértice v_{k+l} donde $l = \lfloor \frac{a-d}{2} \rfloor + 1$, en este caso podemos repetir cualquier color.

No es difícil ver que hemos usado $a + b - \lfloor \frac{a-d}{2} \rfloor + 3$ colores. Pero $d = c - b$, entonces tenemos $a + b - \lfloor \frac{a-c+b}{2} \rfloor + 3$ colores distintos. Como $a + b + c = n - 3$ entonces, si n es par $a - c + b$ es impar y viceversa. Supongamos que n es par, entonces

$$a + b - \left\lfloor \frac{a - c + b}{2} \right\rfloor + 3 = \frac{2a + 2b}{2} - \frac{a - c + b + 1}{2} + 3 = \frac{n - 4}{2} + 3 = \frac{n}{2} + 1.$$

Ahora, si n es impar entonces

$$a + b - \left\lfloor \frac{a - c + b}{2} \right\rfloor + 3 = \frac{2a + 2b - a + c - b}{2} + 3 = \left\lfloor \frac{n - 3}{2} \right\rfloor + 3 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Con esto ya tenemos una coloración con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ colores, ahora únicamente basta demostrar que t hace a G tropicalmente conexa y por la proposición 3.2.15 tendríamos que $\kappa_t(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Antes de demostrar la conexidad tropical de G con t , observemos que para que la coloración esté bien definida, necesitamos que $d + \lfloor \frac{a-d}{2} \rfloor \leq a$. Esto es cierto si y sólo si $c - b + \lfloor \frac{a-c+b}{2} \rfloor \leq a$ que a su vez es cierto si $\lfloor \frac{a-c+b}{2} \rfloor \leq a + b - c$ y esto sólo es cierto si $a + b - c \geq 0$. Pero $a + b = n - 3 - c$ por lo que necesitamos que $n - 3 - 2c \geq 0$ entonces c debe ser menor o igual a $\frac{n-3}{2}$ pero como G cumple la propiedad Q entonces $c < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y como c sólo toma valores enteros, entonces $c \leq \frac{n-3}{2}$.

Para terminar la demostración veamos que la coloración t hace a G tropicalmente conexa. Para esto, dividamos a C_{jk} en dos subconjuntos J', K de tal manera que los vértices en J' tienen algún color de C_{ij} y K tienen color repetido en C_{jk} . Por como definimos la coloración, $J' \cup K = C_{jk}$. De la misma manera dividamos a C_{ki} en K', I' y dividamos a C_{ij} en I y J . Vale la pena

notar que el caso en el que $|C_{ij}| = 0$ tendríamos que $I = I' = J = J' = \emptyset$ y la prueba se sigue igual. En la figura 3.9 una ejemplo particular de una gráfica exteriormente plana de 21 vértices.

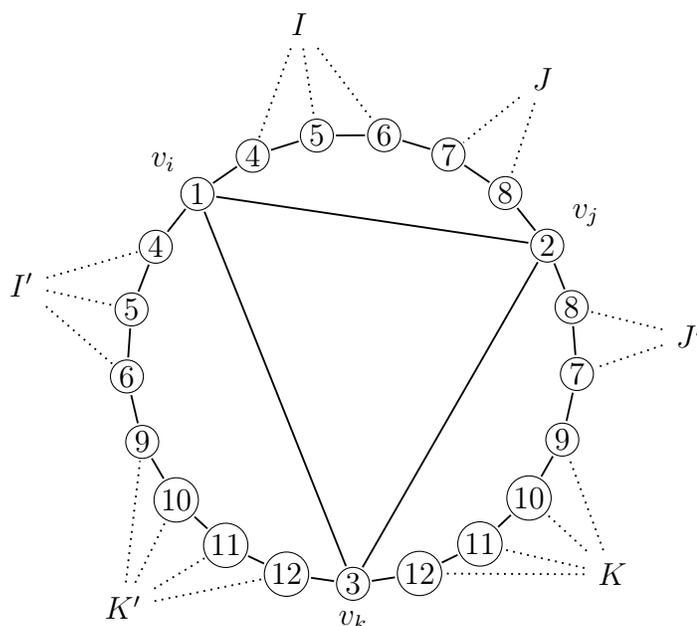


Figura 3.9: Una gráfica exteriormente plana de 21 vértices con una 12 coloración que la hace t -conexa. La línea punteada entre un vértice de G y una letra L , representa que el vértice pertenece al conjunto L .

Notemos que $t[L] = t[L']$ con $L \in \{I, J, K\}$ y $t[I] \cup t[J] \cup t[K] \cup \{1, 2, 3\} = t[V]$. Con esto en mente y gracias a la manera en la que dividimos a los vértices, encontrar una trayectoria tropical para cualesquiera dos vértices x, y tales que si $x \in L$ entonces $y \notin L'$ ($L \in \{I, J, K\}$), se reduce a encontrar una trayectoria que contenga a M o M' para cada $M \in \{I, J, K\}$ y a $\{v_i, v_j, v_k\}$. Pero esto último ya es muy sencillo. Por lo que sólo nos queda el caso cuando $x \in I$ y $y \in I'$, la demostración para cuando $x \in J$ y $y \in J'$ o $x \in K$ y $y \in K'$ es análoga. Sin pérdida de generalidad $t(x) \leq t(y)$, tomemos entonces a la trayectoria $T = xCv_kv_iCy$. Claramente $J' \cup K \cup \{v_i, v_j, v_k\} \subseteq V(T)$, por esto, sólo hace falta ver que los colores de los vértices de I están en los colores de los vértices de T . Observemos que $t[I \cap V(T)] = \{z \in t[I] | z \geq t(x)\}$ y $t[I' \cap V(T)] = \{z \in t[I'] | z \leq t(y)\}$. Pero $t(x) \leq t(y)$ y $t[I] = t[I']$ por lo que

$t[(I \cup I') \cap V(T)] = t[I]$. Por lo tanto $t[T] = t[V]$.

Con esto terminamos la demostración y vemos que $\kappa_t(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. ■

Lema 3.2.17. *Si G es una gráfica exteriormente plana no cumple Q_1 entonces,*

$$\kappa_t(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1.$$

Demostración. Si n es par no hay nada por demostrar. Supongamos entonces que n es impar y G no cumple Q_1 . Si G no tiene ningún triángulo inducido, entonces $\kappa_t(G) < \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ ya que ninguna coloración puede contener tres clases cromáticas singulares. Podemos pensar ahora que para todo triángulo inducido de G $v_i v_j v_k$ se cumple que $|C_{ij}| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Recordemos que todos los colores de $G - \{v_i, v_j, v_k\}$ deben de estar repetidos al menos una vez, además, cada uno de estos colores debe estar representado en al menos dos C_{pq} distintas. Por esta razón la mayor cantidad de colores que podemos usar si $|C_{ij}| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ es $|C_{jk}| + |C_{ki}| + 3$. Pero

$$|C_{jk}| + |C_{ki}| + 3 = n - 3 - |C_{ij}| + 3 = n - |C_{ij}| \leq n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Por lo tanto $\kappa_t(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. ■

Teorema 3.2.18. *Si G es una gráfica exteriormente plana 2-conexa con n impar entonces,*

$$\kappa_t(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \text{ si y sólo si } G \text{ satisface } Q_1.$$

Demostración. Este teorema es una implicación directa de el lema 3.2.16 y el lema 3.2.17. ■

Volvamos a considerar a una gráfica exteriormente plana 2-conexa. Diremos que G cumple la propiedad Q_2 si existe una arista $xy \in E(G)$ tal que sus extremos x, y son un dos corte de G y las dos componentes conexas de $G - \{x, y\}$ tienen al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices. Diremos que estas dos componentes están balanceadas. Es equivalente a pedir que x sea el vértice más alejado de y sobre C el ciclo hamiltoniano de G . Nótese que si n es par entonces, x y y son antipodales.

Lema 3.2.19. Si G es una gráfica exteriormente plana y cumple Q_2 pero no Q_1 entonces,

$$\kappa_t(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1.$$

Demostración. Primero veamos que si G cumple Q_2 entonces $\kappa_t(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Sea $v_i v_j \in E(G)$ tal que v_i, v_j parten a G en dos componentes balanceadas. Sin pérdida de generalidad $i = 0$ y $j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, donde los vértices de G los numeramos con respecto al orden de su ciclo hamiltoniano. Definamos ahora a la coloración c que hará a G t -conexa: $c(v_i) = i = c(v_{n-i})$ con $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $c(v_0) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Tomemos ahora dos vértices $v_k, v_l \in V(G)$, es claro que si $k = 0$ o $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ existe una trayectoria tropical, también si $0 < k < l < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < k < l \leq n - 1$. Veamos ahora cuando $0 < k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < l \leq n - 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k \leq l$ y fijémonos en la trayectoria $T = v_k C v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} v_0 C v_l$ y ahora ya es claro que existe una $v_k v_l$ -trayectoria tropical para cualquier par de vértices en G . Al colorear con c usamos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 + 2$ colores. Con esto demostramos que $\kappa_t(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Por el lema 3.2.17 concluimos que $\kappa_t(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

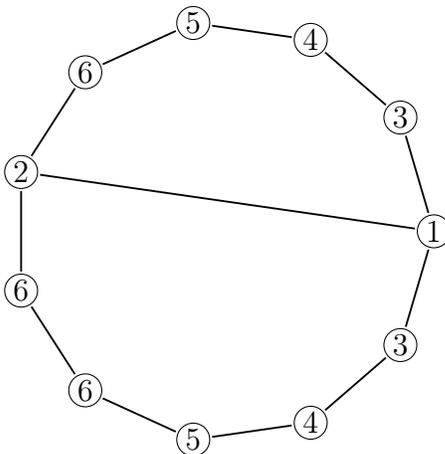


Figura 3.10: Una gráfica G exteriormente plana de 11 vértices, que satisface Q_2 pero no Q_1 , con una 6 coloración que la hace t -conexa

■

Observación 3.2.20. Sea $n \geq 4$, para cada $k \in \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\}$ existe una gráfica exteriormente plana G tal que $|V(G)| = n$ y $\kappa_t(G) = k$.

Demostración. Sea $n \geq 4$. El caso más sencillo es cuando $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ya que la gráfica C_n es una gráfica exteriormente plana con n vértices y $\kappa_t(C_n) = k$. Supongamos ahora que n es par, en este caso sólo queda demostrar que existe una gráfica exteriormente plana G con n vértices y $\kappa_t(C_n) = \frac{n}{2} + 1$. Sea G tal que $V(G) = V(C_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ y $E(G) = E(C_n) \cup \{v_0 v_{\frac{n}{2}}\}$. Entonces, por el lema 3.2.19, $\kappa_t(G) = \frac{n}{2}$.

Pensemos ahora que n es impar y $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. La gráfica que buscamos es muy similar a la encontrada en el caso anterior: sea G tal que $V(G) = V(C_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ y $E(G) = E(C_n) \cup \{v_0 v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}$. Entonces, por el lema 3.2.19, $\kappa_t(G) = \frac{n}{2}$.

Por último supongamos nuevamente que n es impar y $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Sea G tal que $V(G) = V(C_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ y $E(G) = E(C_n) \cup \{v_0 v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, v_1 v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\}$. Entonces, por el lema 3.2.16, $\kappa_t(G) = k$. ■

Recordemos que en el capítulo 1 definimos al m -prisma como $C_m \square K_2$.

Lema 3.2.21. *Sea $H = C_m \square K_2$ el m -prisma donde m es par, entonces*

$$\kappa_t(H) = 2m - 1.$$

Demostración. Sea $V(C_m) = \{v_0, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ y $V(H) = \{v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v'_0, v'_1, \dots, v'_{m-1}\}$. Los conjuntos $X = \{v_0, v_2, \dots, v_m, v'_1, v'_3, \dots, v'_{m-1}\}$ y $Y = \{v_1, v_3, \dots, v_{m-1}, v'_0, v'_2, \dots, v'_m\}$ son independientes y forman una partición de $V(H)$. Por el corolario 3.2.9 $\kappa_t(H) \leq 2m - 1$.

Ahora agregaremos cierta notación para auxiliarnos a lo largo de la presente demostración. Dados $v_i, y \in V(H)$, definamos la siguiente trayectoria, $R_{v_i y} = v_i v_{i+1} v'_{i+1} v'_{i+2} v_{i+2} \dots y$. Definamos también $R'_{v_i y} = v_i v'_i v'_{i+1} v_{i+1} R_{v_{i+1} y}$. De manera análoga se definen $R_{v'_i y}$ y $R'_{v'_i y}$. Consideremos a $C = u_0 u_1 \dots u_l u_0$ un ciclo, a la trayectoria $u_l u_{l-1} \dots u_k$ con $k \geq 0$, la denotaremos por $u_l C^{-1} u_k$. Definamos ahora a la trayectoria $S_{lk} = v'_l C'_m v'_{k-1} v_{k-1} C_m^{-1} v_l$ donde $v_k, v_l \in V(C_m)$. En la figura 3.11 veamos un ejemplo de estas trayectorias.

Definamos ahora la coloración $c : V(H) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2m - 1\}$, donde $c(v_i) = i + 1$ y $c(v'_i) = m + i$.

Tomemos dos vértices v_i y v'_j con $i \neq 0 \neq j$. Sin pérdida de generalidad $i < j$. Veamos que ahora tenemos dos casos:

- El primer caso es cuando $j - i$ es impar y j par. Consideremos entonces la trayectoria $T = v'_j R'_{v'_j v_0} v_0 R_{v_0 v'_i} v'_i S_{ij} v_i$ y ésta contiene a todos los vértices excepto a v'_0 , por lo tanto T es tropical.

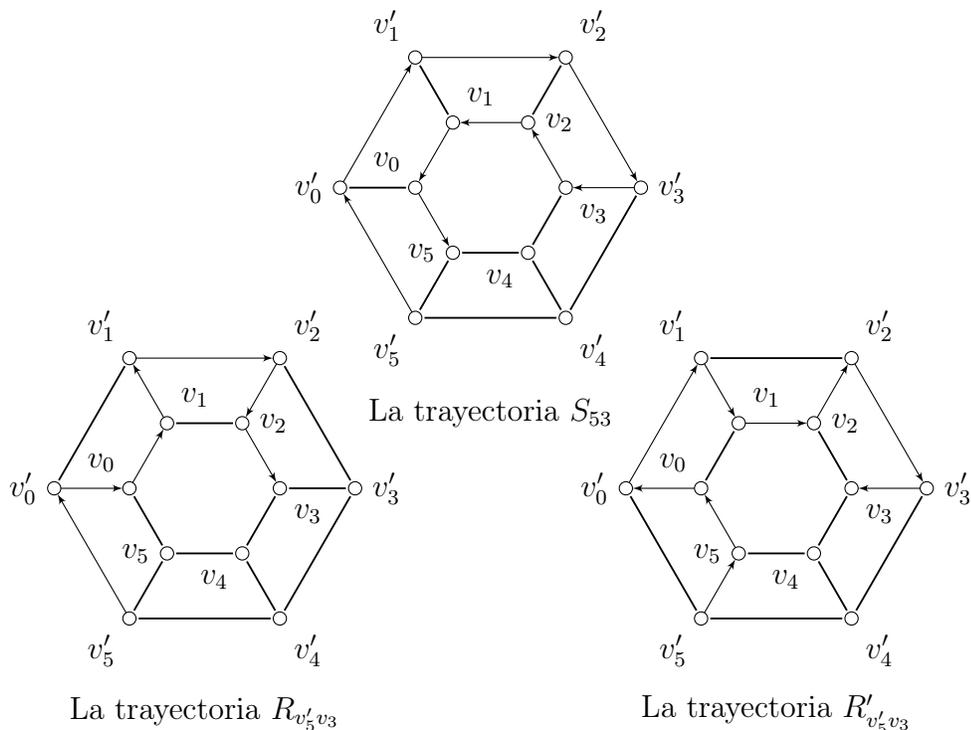


Figura 3.11: Las flechas indican la trayectoria representada en el diagrama

- En el segundo caso volvamos a ver cuando $j - i$ es impar pero ahora j es impar. En este caso tomemos a la trayectoria $T = v'_j R'_{v'_j v'_0} v'_0 R_{v'_0 v'_i} v'_i S_{ij} v_i$, ahora T contiene a todos los vértices de H excepto a v'_0 y nuevamente, T es tropical.
- Ahora supongamos que $j - i$ es par. En esta caso la trayectoria $T = v'_j R'_{v'_j v'_i} v'_i S_{ij} v_i$ es hamiltoniana y por lo tanto es tropical.

El caso en el que $i = j$ es fácil ya que la trayectoria $v_i C_m v_{i-1} v_{i-1} C_m^{-1} v_i$ es hamiltoniana.

Nos quedan todavía un par de casos. Primero tomemos a dos vértices, pero en esta ocasión en la misma copia de C_m , es decir consideremos a los vértices v_i, v_j con $i < j$. Las trayectorias a tomar serán similares al caso anterior. Si $j - i$ es impar, la trayectoria $T = v_j R'_{v_j v_i} v'_i S_{ij} v_i$ es hamiltoniana y por lo tanto es tropical. Para el caso cuando $j - i$ es par hay dos subcasos.

- El primer caso es cuando j es par. Consideremos entonces la trayectoria $T = v_j R'_{v'_j v'_0} v'_0 R_{v'_0 v'_i} v'_i S_{ij} v_i$ y la cual contiene a todos los vértices excepto a v_0 , por lo tanto T es tropical.
- En el segundo caso j es impar. Tomemos entonces a la trayectoria $T = v_j R'_{v_j v_0} v_0 R_{v_0 v'_i} v'_i S_{ij} v_i$, ahora T contiene a todos los vértices de H excepto a v_0 y nuevamente, T es tropical.

Por último nos queda encontrar una trayectoria tropical entre v_0 y v_j y una entre v_0 y v'_j . Otra vez tendremos más de un caso.

- Primero veamos cuando j es par. Las trayectorias $v_0 R_{v_0 v'_j} v'_j S_{j0} v_j$ y $v_0 R'_{v_0 v_j} v_j S_{j0} v'_j$ son $v_0 v_j$ y $v_0 v'_j$ trayectorias tropicales.
- Ahora, si j es impar, $v_0 R'_{v_0 v'_j} v'_j S_{j0} v_j$ y $v_0 R_{v_0 v_j} v_j S_{j0} v'_j$ son $v_0 v_j$ y $v_0 v'_j$ trayectorias tropicales.

Con esto la prueba queda concluida. ■

Diremos que una gráfica G es **arista-hamiltoniana** si para cualquier arista de G existe un ciclo hamiltoniano que la contenga.

Lema 3.2.22. *Sea G una arista-hamiltoniana entonces,*

$$\kappa_t(G \square K_2) \geq v(G) + \kappa_t(G).$$

Demostración. Consideremos a una gráfica $G = (V, E)$ arista-hamiltoniana con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ en el orden de algún ciclo hamiltoniano. Sean $k = \kappa_t(G)$ y $H = G \square K_2$. La gráfica H está formada por G y una copia de ésta, G' ; $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$. Sea c una coloración que hace a G t -conexa y definamos a b , una coloración de H como $b(v_i) = c(v_i)$ y $b(v'_i) = k + i$. Es decir, coloreamos a G en H de tal manera que G sea t -conexa y a su copia con nuevos colores. Demostremos ahora que b hace a $G \square K_2$ t -conexa.

1. Para el primer caso tomemos a v'_i, v'_j en $V(G')$, sin pérdida de generalidad $i = 1$. Sea $T_1 = v'_1 v'_2 \cdots v'_{j-1}$. Tomemos ahora a T_2 la $v_{j-1} v_n$ -trayectoria tropical en G y a $T_3 = v'_n v'_{n-1} \cdots v'_j$. Si ahora consideramos a $T = v'_1 T_1 v'_{j-1} v_{j-1} T_2 v_n v'_n T_3 v'_j$ vemos que para cualquier par de vértices en G' existe una trayectoria tropical.

2. Consideremos ahora el caso cuando tomamos a v'_i y v_j . Como G es hamiltoniana entonces, v_i tiene al menos un vecino v_k distinto de v_j . Como G es arista-hamiltoniana podemos considerar a C' un ciclo hamiltoniano que inicia en v'_i y tiene como penúltimo vértice a v'_k . Tomemos también a T_1 una $v_k v_j$ -trayectoria tropical en G . Análogamente al caso anterior, nos fijamos en $v'_i C' v'_k v_k T_1 v_j$ y concluimos que para cualesquiera v'_i, v_j existe una trayectoria que usa todos los colores de b .
3. Por último fijémonos en dos vértices de G : v_i, v_j . Sea T_1 una $v_i v_j$ -trayectoria tropical en G y v_k, v_l el segundo y tercer vértice en T_1 . Consideremos a C' un ciclo hamiltoniano que inicia en v'_k y tiene como penúltimo vértice a v'_l . De manera similar a los dos casos anteriores tomemos $T = v_i v_k v'_k C' v'_l v_l T_1 v_j$ y observemos que es una trayectoria tropical en G .

Esto muestra que b hace a H tropicalmente conexa con $n + k$ colores. Por lo que $\kappa_t(H) \geq n + k$. ■

Así como definimos el cubo de dimensión n recursivamente, definamos ahora al m -prisma de dimensión n de la misma manera y denotémoslo por C_m^n .

$$C_m^n = C_m^{n-1} \square K_2 \text{ y } C_m^2 = C_m$$

Lema 3.2.23. *El m -prisma C_m^n de dimensión $n \geq 3$ es arista-hamiltoniano.*

Demostración. Sea $m \geq 3$. Ahora procederemos por inducción sobre la dimensión del m -prisma donde el caso base es claro ya que $C_m^2 = C_m$. Supongamos ahora que el enunciado es cierto para la dimensión k . Consideremos a $C_m^{k+1} = C_m^k \square K_2$ con $V(C_m^{k+1}) = X \cup X'$ donde $C_m^{k+1}[X] \cong C_m^k \cong C_m^{k+1}[X']$ y $X \cap X' = \emptyset$. Si $x \in X$ denotaremos por x' al vértice de X' adyacente a x .

Tomemos ahora una arista $e \in E(C_m^{k+1})$. Tenemos tres casos: $e = xy$ donde $x, y \in X$, $e = x'y'$ donde $x', y' \in X'$ y $e = xx'$ donde $x \in X$ y $x' \in X'$. Es claro que los primeros dos casos son análogos por lo que para demostrar ambos demostraremos cuando $e = xy$ y $x, y \in X$. Por hipótesis de inducción existe $C \subseteq C_m^{k+1}[X]$ un ciclo hamiltoniano en $C_m^{k+1}[X]$ que contiene a xy . Sea z el vértice anterior a x en C . Por hipótesis de inducción existe $C' \subseteq C_m^{k+1}[X']$ un ciclo hamiltoniano en $C_m^{k+1}[X']$ que contiene a $x'z'$ por lo que el ciclo $xCzz'Cx'$ es hamiltoniano en C_m^{k+1} que contiene a xy .

Supongamos ahora que $e = xx'$. Por hipótesis de inducción existen $C \subseteq C_m^{k+1}[X]$ un ciclo hamiltoniano en $C_m^{k+1}[X]$ y $C' \subseteq C_m^{k+1}[X']$ un ciclo hamiltoniano en $C_m^{k+1}[X']$ que contiene a $x'y'$ donde $xy \in C$. Fijándonos ahora en el ciclo $xCyy'C'x'x$ encontramos el ciclo hamiltoniano en C_m^{k+1} que contiene a e . ■

Teorema 3.2.24. *Sea C_m^n el m prisma de dimensión $n \geq 3$. Entonces,*

$$\kappa_t(C_m^n) = \begin{cases} 2^{n-1}m - 1 & \text{si } m \text{ es par;} \\ 2^{n-1}m & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Recordemos primero que, si m es par, C_m^n es bipartito con $2^{n-2}m$ vértices en cada parte. Entonces, por el corolario 3.2.9, $\kappa_t(C_m^n) \leq 2 \cdot 2^{n-2}m - 1 = 2^{n-1}m - 1$.

Demostremos ahora por inducción sobre n que, si m es par entonces, $\kappa_t(C_m^n) \geq 2^{n-1}m - 1$. El caso base es cuando $n = 3$, es decir $C_m \square K_2$, por el corolario 3.2.21 $\kappa_t(C_m \square K_2) = 2m - 1 = 2^{2-1}m - 1$. Entonces, por el lema 3.2.22 y el lema 3.2.23 si $\kappa_t(C_m^n) \geq 2^{n-1}m - 1$ implica que $\kappa_t(C_m^{n+1}) \geq \kappa_t(C_m^n) + v(C_m^n) = 2^{n-1}m - 1 + 2^{n-1}m = 2^n m - 1$.

Para el caso en el que m es impar basta recordar que, en este caso, $H = C_m \square K_2$ es hamiltonianamente conexo y, claramente si H es hamiltonianamente conexa $H \square K_2$ también lo es. Por la proposición 3.2.7 vemos que $\kappa_t(C_m^n) = 2^{n-1}m$ cuando m es impar. ■

La **gráfica de Rado** denotada por $R(\mathbb{N}, p)$, se define como la gráfica con conjunto de vértices $V(R) = \mathbb{N}$ y, para cualquier pareja de vértices existe una arista entre ellos con probabilidad p , donde $p \in (0, 1)$.

En la teoría de la probabilidad se dice que un evento se cumplirá casi seguramente cuando la probabilidad de que éste suceda es 1.

Observación 3.2.25. La gráfica $R(\mathbb{N}, p)$ es conexa casi seguramente.

Demostración. Si R no fuera conexa entonces, podríamos partir a $V(R)$ en dos conjuntos X, Y de manera que no exista una XY arista. Por el principio del palomar X o Y tendrían una cantidad infinita de vértices, supongamos sin pérdida de generalidad que $|Y| = \aleph_0$. Si tomamos cualquier vértice $x \in X$, la probabilidad de que no exista una xY arista es $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p)^n$. Como $0 < p < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p)^n = 0$ pero esto es una contradicción. Por lo tanto $R(\mathbb{N}, p)$ es conexa con probabilidad 1. ■

En [5] muestran que $R(\mathbb{N}, p) \cong R(\mathbb{N}, q)$ para cualesquiera $p, q \in (0, 1)$. Por esta razón, de ahora en adelante simplemente denotaremos la gráfica de Rado por R .

Proposición 3.2.26. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe una n -coloración que hace a la gráfica de Rado t -conexa con probabilidad 1*

Demostración. En [5] demuestran que $R - x \cong R$ para cualquier $x \in V(R)$. Además, por la observación 3.2.25 R es conexa con probabilidad 1, por lo tanto $R - x$ es conexa para cualquier vértice de R entonces, R es 2-conexa. Por otro lado, en [6] demuestran que el teorema de Menger es válido para gráfica infinitas lo que hace que la proposición 3.1.3 sea válida para la gráfica de Rado.

También se demuestra en [5] que R tiene como gráfica inducida a cualquier gráfica finita, en particular $K_n \subseteq R$ para todo n natural. Consideremos entonces al conjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que $R[S] \cong K_n$ y definamos a $c(x) = x$ si $x \in S$ y $c(y) = \min\{x \in S\}$ si $y \notin S$. Ya sabemos que c hace a $R[S]$ t -conexa y, al ser R 2-conexa, por la proposición 3.1.3 concluimos que c hace a R tropicalmente conexa con probabilidad 1. ■

Corolario 3.2.27. *Sea R la gráfica de Rado, entonces*

$$\kappa_t(R) = \aleph_0 \text{ casi seguramente}$$

Demostración. Sabemos que $\kappa_t(R) \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$. Veamos que si existe $x \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ tal que $x \geq n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ entonces $x = \aleph_0$. Supongamos que $x \neq \aleph_0$ entonces, $x \in \mathbb{N}$ por lo que $x+1 \in \mathbb{N}$ pero esto es una contradicción ya que $x < x+1$. Por la proposición 3.2.26 $\kappa_t(R) \geq n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. ■

3.3. OTROS PARÁMETROS

Al inicio del capítulo ya habíamos acotado a la conexidad tropical con otros parámetros, como el número de independencia y el número de clan. Ahora queremos ver qué tanto podemos alejar estas cotas de nuestro parámetro. Estudiemos primero a la relación con la circunferencia.

Observación 3.3.1. Sea G una gráfica 2-conexa entonces,

$$\left\lfloor \frac{\text{circ}(G)}{2} \right\rfloor \leq \kappa_t(G) \leq \text{circ}(G)$$

Demostración. Por el corolario 3.2.4 solo nos queda demostrar la cota superior. Consideremos a una gráfica G , 2-conexa y con $\kappa_t(G) = n$. Supongamos además que $n \geq 4$, ya que si $n = 3$ encontrar un ciclo de longitud al menos 3 en una gráfica 2-conexa es muy sencillo.

Tomemos ahora una arista $xy \in E(G)$ y una xy -trayectoria tropical T . Claramente T tiene al menos n vértices, por lo que el ciclo $C = xTyx$ tiene longitud n por lo que $\kappa_t(G) \leq \text{circ}(G)$. ■

Nos gustaría ahora ver que, para cualquier pareja de enteros c y m , que satisfacen $c \leq m \leq 2c$ existe una gráfica con circunferencia c y conexidad tropical m . Para llegar a esto, definamos primero la **subdivisión** de aristas. Sea G una gráfica y $e = xy \in E(G)$. La gráfica H , que resulta de subdividir a e , tendrá como conjunto de vértices a $V(G) \cup \{v_0\}$ y como aristas a $E(G) \setminus \{e\} \cup \{xv_0, yv_0\}$.

Proposición 3.3.2. Sea G una gráfica 2-conexa y H el resultado de subdividir aristas de G . Entonces,

$$\kappa_t(G) \leq \kappa_t(H).$$

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica 2-conexa y $xy \in E$. Consideremos ahora a $V' = V \cup \{z\}$ y $E' = E \setminus \{xy\} \cup \{xz, yz\}$ donde z no pertenece a V . Entonces, la gráfica $H = (V', E')$ es el resultado de subdividir la arista de G . Sea $k = \kappa_t(G)$ y una coloración $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que haga a G t -conexa. Construyamos ahora una coloración $c' : V' \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que haga a H t -conexa. Propongamos $c' : V' \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $c'|_V = c$ y $c'(z) = c(x)$. Tomemos dos vértices $u, v \in V'$.

1. Tomemos $u, v \in V$. Sea $T = uv_1v_2 \cdots v_{n-1}v$ la uv -trayectoria en G que usa todos los colores de c . Si T no contiene a xy , entonces T es una uv -trayectoria en H que usa los k colores. Si T sí contiene a xy entonces T es de la forma $T = uv_1 \cdots xy \cdots v_{n-1}v$. Hagamos $T' = uv_1 \cdots xzy \cdots v_{n-1}v$. Vemos que los vértices de T están contenidos en T' y como T está contenido en G entonces los colores de T están contenidos en los de T' , concluyendo así que T' es una uv -trayectoria que usa todos los colores de c' .

2. Consideremos ahora el caso donde $u = z$ y $x \neq v \neq y$. Como c hace a G t -conexa entonces, existe T una xv -trayectoria que contiene a los k colores. Si T no contiene a xy usamos la trayectoria $uxTv$ y es claro que ésta usa todos los colores. Si T contiene a xy observemos primero que ésta debe ser la primera arista de la xv -trayectoria. Pensemos ahora en la trayectoria $T' = uyTv$. Vemos que T' y T sólo difieren en el primer vértice, pero $c'(u) = c(x)$ por lo que $c[T'] = c[T]$.
3. Por último veamos el caso donde $u = z$ y, sin pérdida de generalidad $v = x$. Sabemos que existe T una yx -trayectoria en G que contiene a todos los colores de c . Como G es 2-conexa, por el corolario 3.2.5, sabemos que $k \geq 3$ por lo que T es distinta de la arista xy , más aun, no la contiene. Usemos entonces $T' = uyTv$, con los mismos argumentos que hemos usado ya en esta demostración, vemos que T' usa los k colores.

Con estos casos vimos ya que al subdividir una arista $\kappa_t(G)$ no decrece. Inductivamente podemos subdividir tantas aristas como queramos, terminando así nuestra demostración. ■

Proposición 3.3.3. *Sean dos enteros $c \leq n \leq 2c$, entonces existe una gráfica G que cumple*

$$\text{circ}(G) = 2c \text{ y } \kappa_t(G) = n.$$

Demostración. Sea $n = 2c - k$ donde $1 \leq k \leq c$ y $W_{2c} = v_0 \vee C_{2c-1}$ la rueda de $2c-1$ rayos donde $C_{2c-1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{2c-1}\}$. Llamemos r_i al rayo que incide en v_i y consideremos a $K = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ e $I = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Sea $H = W_{2c-1} - K$. Claramente H es el resultado de subdividir una arista de $W_{2c-(k+1)}$ k veces, por lo que, por la proposición 3.3.2 $\kappa_t(H) \geq \kappa_t(W_{2c-(k+1)}) = c - k$. En la figura 3.12 vemos una gráfica de este tipo.

Finalmente veamos que, si queremos colorear a H tropicalmente, no podemos asignar colores únicos a vértices de ambas componentes de $H - \{v_{k+1}, v_n\}$, ya que de lo contrario no habría una trayectoria tropical entre v_{k+1} y v_n . Como $|I| \leq |V \setminus I|$, nos conviene entonces repetir colores en los los vértices de I , por lo que $\kappa_t(G) \leq 2c - |I| = 2c - k$.

Solo nos queda ver el caso cuando $n = 2c$, pero en este caso la rueda de n rayos es una de las muchas gráficas que cumplen $\kappa_t(G) = \text{circ}(G)$. ■

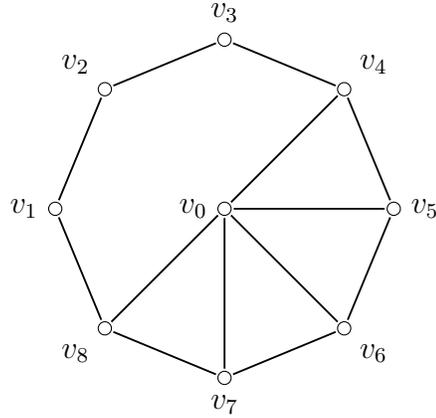


Figura 3.12: La gráfica H resultante de quitarle a W_8 tres rayos contiguos.

Veamos ahora otro resultado para el cual usamos la subdivisión de aristas y relaciona a la k -conexidad con la conexidad tropical.

Proposición 3.3.4. *Sea G una gráfica k -conexa, entonces $\kappa_t(G) > k$.*

Demostración. Sea G un gráfica k -conexa. Sabemos que tiene al menos $k + 1$ vértices. Afirmamos que existe un ciclo D con al menos k vértices no hamiltoniano. Por el teorema de Dirac (teorema 2.4.4) existe un ciclo C de al menos k vértices, de aquí obtenemos dos casos:

1. Si C no es hamiltoniano entonces éste es nuestro ciclo D .
2. El segundo caso es cuando C sí es hamiltoniano. Tomemos a $v_1 \in V(G)$ y numeremos a los vértices de G en el orden de C a partir de v_1 . Como G es k -conexa y $V(C) = V(G)$ entonces v_1 tiene al menos k vecinos en C . Hagamos a $S = N(v_1) \setminus \{v_2, v_n\}$. Veamos que $|S| \geq k - 2$ y tomemos a $r = \max\{i \in \mathbb{N} | v_i \in S\}$ y observemos que el ciclo $D = v_1 C v_r v_1$ tiene al menos k vértices y v_n no pertenece a este ciclo.

Consideremos al ciclo D con al menos k vértices y a un vértice v_0 que no pertenezca a D . Por el lema del abanico (lema 2.4.3) existen k $v_0 D$ -trayectorias cuya intersección contiene únicamente a v_0 . No es difícil ver que si nos fijamos en estas trayectorias junto con D y llamamos a esta gráfica H , entonces H es una subdivisión de la rueda de k rayos. Por el lema 3.3.2 y el

corolario 3.2.8 la conexidad tropical de H es mayor o igual a $k + 1$. Usando ahora la proposición 3.1.3 concluimos que $\kappa_t(G) \geq k + 1$. ■

Lema 3.3.5. *Sea G una gráfica con $\kappa(G) = k$ y $H = v_0 \vee G$. Entonces H cumple que $\kappa(H) = k + 1$. Además, si G es hamiltonianamente conexa entonces H también lo es.*

Demostración. Consideremos G y H como en la hipótesis.

Sea $S \subseteq V(H)$ con a lo más k vértices. Si S no contiene a v_0 , como v_0 es un vértice universal entonces $H \setminus S$ sigue siendo conexa. Si S contiene a v_0 y S es de corte, entonces $S \setminus \{v_0\}$ es conjunto de corte en G pero $|S \setminus \{v_0\}| < k$ llegando a una contradicción. Por lo tanto H es $(k + 1)$ -conexa. Consideremos ahora a S_0 un conjunto de k vértices de G y hagamos $S_1 = S_0 \cup \{v_0\}$. Claramente éste es un conjunto de corte con $k + 1$ vértices por lo que $\kappa(H) = k + 1$.

Supongamos ahora que G es hamiltonianamente conexa. Sean $x, y \in V(H)$, si ambos son distintos de v_0 entonces existe en G una trayectoria hamiltoniana $T = xv_1v_2 \cdots v_{n-1}y$. Ya que, en H , v_0 es adyacente a cualquier vértice entonces xv_0v_1Ty es una xy -trayectoria hamiltoniana en H . Ahora bien, si $x = v_0$ consideremos entonces la trayectoria xv_1Ty , donde v_1 es cualquier vértice en $V(G)$ distinto de y y T es una v_1y -trayectoria hamiltoniana en G . ■

Ya demostramos que $\kappa_t(G) > k$ y $\kappa_t(G) \geq \omega(G)$. Veamos ahora qué tan alejadas pueden estar estas cotas.

Teorema 3.3.6. *Para cualquier pareja de naturales $k < n$ existe una gráfica G con $\kappa(G) = k$ y $\kappa_t(G) = n$.*

Demostración. Si $k = 1$ consideremos dos copias de C_{2n} unidas en un vértice. Por la observación 3.1.2, la conexidad tropical de esta gráfica será $\kappa_t(C_{2n})$ que ya sabemos que es n . Si $k = 2$ consideremos a C_{2n} y tenemos que $\kappa_t(C_{2n}) = n$.

Sea $k \geq 3$. Consideremos a la rueda W_r de r rayos. Por la proposición 3.3.5 es claro que $\kappa(W_r) = 3$ ya que $W_r = C_n \vee v_0$ y $\kappa(C_n) = 2$. Consideremos ahora a la familia W_r^m definida con la recursión:

$$W_r^m = v_{r+m+1} \vee W_r^{m-1} \text{ y } W_r^0 = W_r.$$

Por el lema 3.3.5 estas gráficas cumplen que $\kappa(W_r^m) = 3 + m$ y son hamiltonianamente conexas. Podemos ver fácilmente que W_r^m tiene $r + m + 1$ vértices por lo que $\kappa_t(W_r^m) = r + m + 1$.

En la figura 3.13 tenemos un diagrama de W_6^3 .

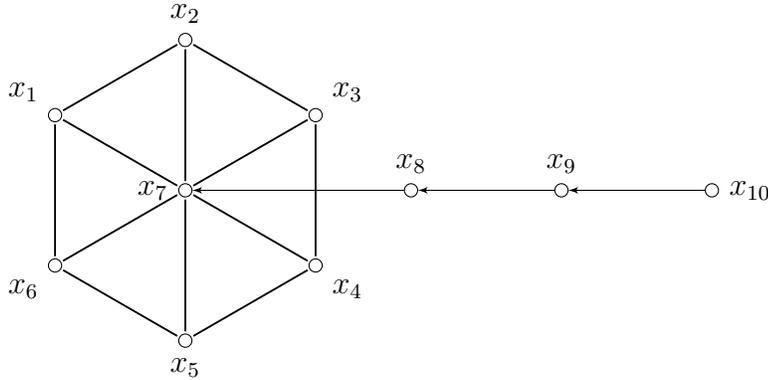


Figura 3.13: La gráfica W_6^3 . En este caso si hay una flecha de v_i a v_j representa que v_i es adyacente a v_k si $k \leq j$

Sean $k < n$ una pareja de naturales. Consideremos a W_{n-k+2}^{k-3} y con las cuentas que hicimos previamente:

$$\kappa(W_{n-k+2}^{k-3}) = 3 + (k - 3) = k,$$

$$\kappa_t(W_{n-k+2}^{k-3}) = (n - k + 2) + (k - 3) + 1 = n.$$

Veamos que $m = k - 3$ y $r = n - k + 2 > k - k + 2 > 2$. Por la última ecuación vemos que si $k \geq n$ entonces esta construcción no está bien definida, pero, por la proposición 3.3.4, ya sabemos que no existen gráficas con $\kappa(G) = k$ y $\kappa_t(G) = n$ si $n \leq k$. De esta misma ecuación podemos observar que si $k = n + 1$ la rueda inicial será K_4 entonces, la familia W_{n-k+2}^{k-3} son las completas de n vértices. ■

Ya vimos que podemos alejar a la k -conexidad del número tropical tanto como queramos. Veamos ahora que podemos hacer lo mismo para el número de clan de una gráfica.

Para ésto necesitaremos definir a una operación. Sea $G = (V, E)$, y $x, y, z \in V$ tales que la subgráfica inducida por estos tres vértices es un

triángulo, definimos $G^{xyz} = (V^*, E^*)$ donde $V^* = V \cup \{v^*\}$ y $E^* = E \cup \{xv^*, yv^*, zv^*\}$.

Consideremos una gráfica G . Diremos que la terna de vértices (x, y, z) cumple la propiedad P si:

1. Los vértices x, y, z inducen un triángulo.
2. Para cualquier par de vértices $u, v \in V(G)$ existen dos trayectorias hamiltonianas que contienen al menos dos aristas distintas del triángulo (vale la pena notar que estas dos trayectorias hamiltonianas pueden ser la misma si ésta ya contiene dos aristas del triángulo).

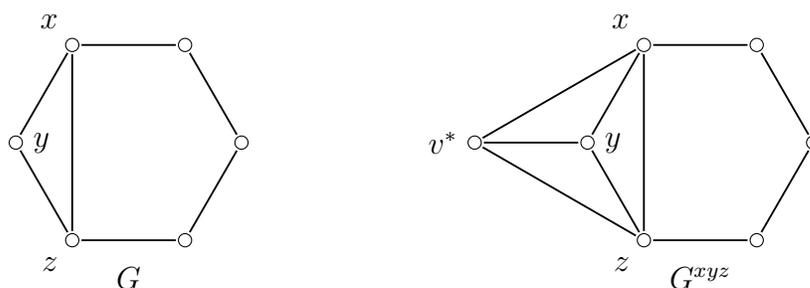


Figura 3.14: Un ejemplo de una gráfica G y G^{xyz}

Esta parece una propiedad algo rebuscada, pero nos será útil para alejar al número de clan y la conexidad tropical tanto como queramos.

Lema 3.3.7. Sean G una gráfica y $x, y, z \in V(G)$ tales que cumplan la propiedad P . Entonces G^{xyz} es hamiltonianamente conexa y las ternas (x, y, v^*) , (x, z, v^*) y (y, z, v^*) satisfacen la propiedad P .

Demostración. Sean G una gráfica y $x, y, z \in V(G)$ tales que cumplan la propiedad P . Consideremos a G^{xyz} . Demostremos ahora que las ternas (x, y, v^*) , (x, z, v^*) y (y, z, v^*) cumplen la propiedad P . Por simetría basta demostrarlo para la terna (x, y, v^*) .

1. Ya que xv^* y yv^* son aristas de G^{xyz} y x, y, z inducen un triángulo, entonces la terna (x, y, v^*) induce un triángulo.
2. Sean $u, v \in V(G^{xyz})$.

- a) Supongamos que $u \neq v^* \neq v$. Recordemos que (x, y, z) satisfacen la propiedad P en G por lo que tenemos dos opciones:
- 1) Existe T_{xy} una uv -trayectoria hamiltoniana en G que contienen a la arista xy . Para este caso consideremos $T_{xv^*} = T_{yv^*} = uT_{xy}xv^*yT_{xy}v$.
 - 2) Existen T_{xz} y T_{yz} uv -trayectorias hamiltonianas en G que contienen a las aristas xz y yz respectivamente. Consideremos ahora a $T_{xv^*} = uT_{xz}xv^*zT_{xz}v$ y $T_{yv^*} = uT_{yz}yv^*zT_{yz}v$.

En ambos casos T_{xv^*} y T_{yv^*} son dos trayectorias hamiltonianas que contienen al menos dos aristas del triángulo xyv^*

- b) Supongamos ahora que $u = v^*$. En esta ocasión volvemos a tener dos subcasos:
- 1) El primer caso será cuando $v = y$. Como z y y son adyacentes entonces existe T_{xy} una yz -trayectoria hamiltoniana en G que contiene a x . Hagamos $T'_{xy} = v^*xT_{xy}y$. Ahora veamos que existe al menos una xy -trayectoria hamiltoniana en G , T . Tomemos $T_{xv^*} = v^*xTy$. Éstas dos serán nuestras dos trayectorias hamiltonianas que contiene a dos aristas del triángulo (x, y, v^*) .
 - 2) Por último de todos los casos y subcasos veamos cuando $u = v^*$ y $x \neq v \neq y$. Es claro que existen T_x y T_y trayectorias hamiltonianas en G de x a v y de y a v respectivamente. Consideramos v^*xT_xv y v^*yT_yv y ya terminamos.

■

Consideremos ahora a la familia de gráficas construida de la siguiente manera:

$$Q_{r,m} = Q_{r,m-1}^{v_{m-1}xy} \text{ y } Q_{r,0} = K_r.$$

Donde K_r es la gráfica completa de r vértices $x, y, v_0 \in V(K_r)$. Además pediremos que $k \geq 4$.

En la figura 3.15 podemos ver un dibujo de la gráfica Q_5^2 .

Lema 3.3.8. *La gráfica $Q_{r,m}$ cumple que $\omega(Q_{r,m}) = r$ y es hamiltonianamente conexa.*

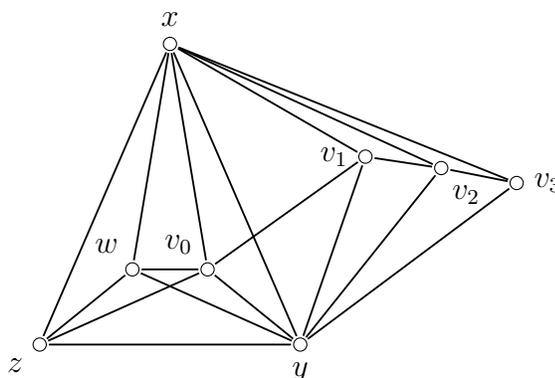


Figura 3.15: La gráfica Q_5^2 .

Demostración. Recordemos que pedimos que $r \geq 4$. De aquí se sigue directo que $\omega(Q_{r,m}) = r$ ya que cada vez que agregamos un nuevo vértice v^* , lo hacemos adyacente a sólo tres vértices por lo que v^* pertenece a una subgráfica completa de 4 vértices, por lo que el número de clan no aumenta. Como $Q_r \subseteq Q_{r,m}$ el número de clan no disminuye entonces, $\omega(Q_{r,m}) = r$.

Para demostrar que $Q_{r,m}$ es hamiltonianamente conexa veamos primero que pasa con $Q_{r,0}$. Consideremos a K_r y $x, y, v_0 \in V(K_r)$, estos vértices claramente forman un triángulo. Al ser K_r completa, para cualquier par de vértices existe una trayectoria hamiltoniana que recorre a los demás vértices de la gráfica en el orden que queramos. De esta manera podemos encontrar dos trayectorias hamiltonianas que usan dos aristas del triángulo xyv_0 para cualquier par de vértices. Por la proposición 3.3.7 $Q_{r,1}$ cumple P por lo que es hamiltonianamente conexa. Inductivamente vemos que $Q_{r,m}$ es hamiltonianamente conexa. ■

Ya contamos ahora con las herramientas para encontrar construir gráficas en las cuales el número de clan y el número de conexidad tropical estén tan alejados como queramos.

Teorema 3.3.9. *Para cualquier pareja de naturales, $2 \leq w \leq n$, existe una gráfica G tal que $\omega(G) = w$ y $\kappa_t(G) = n$.*

Demostración. Si $w = 2$ consideremos el ciclo de $2n$ vértices. Sabemos que los ciclos de longitud al menos 4 tienen número de clan igual a 2. Al tener

el ciclo de $2n$ vértices con $n \geq 2$ entonces ya tenemos nuestra gráfica con número tropical n y de clan 2.

Si $w = 3$ y $n = 3$ la completa de 3 vértices satisface lo que queremos. Si $n = 4$ pensemos en la siguiente gráfica dibujada en la figura 3.16 y en el teorema 3.2.18

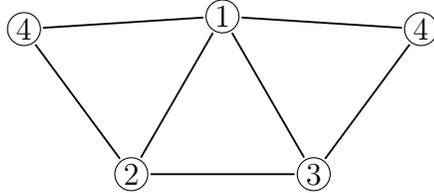


Figura 3.16: Una gráfica exteriormente plana G con $\omega(G) = 3$ y $\kappa_t(G) = 4$

Y para cualquier n mayor o igual a 5 consideremos la rueda de $n - 1$ rayos. Éstas cumplen que $\omega(G) = 3$ y $\kappa_t(G) = n$.

Por último, si $w \geq 4$, consideremos a la gráfica $Q_{w,n-w}$. Por el lema 3.3.8 esta gráfica es hamiltonianamente conexa con número de clan w . Haciendo una cuenta sencilla vemos que tiene n vértices. Como $n \geq w \geq 4$ la gráfica propuesta está bien definida. Con esto terminamos la demostración. ■

CONCLUSIONES

Este fue un trabajo en el que introdujimos el número por conexidad tropical. Logramos encontrar cotas justas de este parámetro en las gráficas bipartitas, escindibles y las gráficas de intervalos. En otras como los ciclos, las gráficas completas, las ruedas, los prismas de distintas dimensiones y la gráfica de Rado, exhibimos el número de conexidad tropical exacto.

El trabajo realizado con las gráficas exteriormente planas fue particularmente interesante ya que, además de acotar a esta familia, para cada posible valor de conexidad tropical encontramos una familia que alcanza éste.

Por otra parte, relacionamos al número de conexidad tropical con la circunferencia, el número de independencia, el número de clan y la k -conexidad de una gráfica. Además pudimos encontrar gráficas en las cuales el número de clan esté tan alejado del parámetro introducido en este trabajo. Lo mismo hicimos para la k -conexidad.

Al ser éste un trabajo de introducción, queda mucho por hacer relacionado con este tema. Dentro de las cosas que quedan por hacer se encuentra el análisis de complejidad computacional del problema de decisión asociado. También falta verificar si existe una relación entre el número de conexidad tropical y el número cromático en las gráficas 2-conexas entre otros parámetros.

Sería bastante interesante extender los resultados obtenidos en las gráficas exteriormente planas para caracterizar exactamente cuándo una de éstas toma qué valor de conexidad tropical. Y más aún, hacer lo mismo para otras familias de gráficas.

Además de lo ya mencionado quedan varias cosas por hacer; investigar cómo se comporta el parámetro bajo operaciones de gráficas, por mencionar alguna. Sin embargo, dentro de la lista de pendientes, en lo personal me resultaría de gran interés encontrar alguna aplicación de las coloraciones tropicales.

Bibliografía

- [1] Berge, C.. *Theory of Graphs and its Applications*. London, UK: Methuen. 1962
- [2] Bondy, J., Murty, U. (1982). *Graph Theory with Applications*. NY, USA: North-Holland. 1982
- [3] J.-A. Angles d'Auriac, Cs. Bujtas, A. El Maftouhi, M. Karpinski, Y. Manoussakis, L. Montero, N. Narayanan, L. Rosaz, J. Thapper, Zs. Tuza. *Tropical dominating sets in vertex-coloured graphs*. arXiv:1503.01008
- [4] Syslo, M. *Characterizations of outerplanar graphs*. Discrete Mathematics, 1979, Volumen 26(1), pp 47-53, doi:10.1016/0012-365X(79)90060-8
- [5] Cameron, P. *The random graph*. arXiv:1301.7544
- [6] Aharoni, R., Berger, E. *Menger's theorem for infinite graphs*. Inventiones Mathematicae, Abril 2009, Volumen 176, Issue 1, pp 1-62

Índice alfabético

- árbol, 9
- número
 - de independencia, 11
- subgráfica
 - inducida, 4
- abanico, 21
- adyacencia, 2
- arista, 1
- arista-hamiltoniana, 43
- aristas múltiples, 1
- automorfismo, 3
- bipartición, 7
- bloque, 16
- camino, 9
- cara, 34
- ciclo, 9
 - hamiltoniano, 13
- circunferencia, 11
- clan, 7
- coloración, 10
 - propia, 10
- conexa, 9
- conexidad, 14
- conexidad local, 14
- conjunto
 - independiente, 7
- conjuntos de corte, 14
- contracción, 19
- cubo, 10
- descomposición, 15
- función de corte local, 19
- función de incidencia, 1
- gráfica, 1
 - hamiltoniana, 13
 - isomorfa, 3
 - bipartita, 7
 - bipartita completa, 7
 - complemento, 7
 - completa, 7
 - cordal, 9
 - de intervalos, 10
 - escindible, 9
 - k-partita, 11
 - plana, 3
 - Rado, 45
 - regular, 8
 - trivial, 7
 - vacía, 7
- gráficas
 - supremo, 6
 - unión ajena, 6

- grado de un vértice, 8
- hamiltonianamente conexa, 13
- inmersión plana, 3
- internamente ajenas, 14
- isomorfismo, 3
- lazo, 1
- número
 - cromático, 11
 - de conexidad tropical, 23
 - de clan, 11
- orden de una gráfica, 2
- principio del palomar, 22
- prisma, 6
- producto cartesiano, 6
- puente, 16
- rayo, 9
- rueda, 9
- separable, 16
- separación, 16
- separador, 18
- simple, 1
- subdivisión, 47
- subgráfica, 4
 - inducida por aristas, 4
 - generadora, 4
- tamaño de una gráfica, 2
- trayectoria, 13
 - hamiltoniana, 13
- trayectoria tropical, 23
- tropicalmente conexa, 23
- vértice, 1
- vértice separador, 16
- vértice transitiva, 11
- vecindad, 2
 - abierta, 2
 - cerrada, 2
- vecino, 2