



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

*Aplicaciones del Flujo de Curvatura Media
al Reconocimiento de Imágenes*

Tesis
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
EDUARDO IVÁN VELÁZQUEZ RICHARDS

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. PABLO SUÁREZ SERRATO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, CU
UNAM

MÉXICO, D. F. Marzo, 2016.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

La realización de este trabajo fue posible gracias al apoyo del Dr. José Antonio Seade Kuri y al proyecto **Dinámica y Geometría Compleja** (CONACYT CB2011 - 164447, Junio 2015).

Índice general

Introducción	5
1. Generalidades	9
1.1. Variedades Diferenciales \diamond 1.2. Conexión y Curvatura \diamond 1.3. Variaciones de Energía.	
2. Flujo de Curvatura Media	21
2.1. Flujo de curvatura media (FCM) \diamond 2.2. Existencia y Unicidad de Soluciones del FCM \diamond 2.3. Implementación del FCM.	
3. Geometría Diferencial y Visión por Computadora	47
3.1. Flujo de curvatura media anisotrópico \diamond 3.2. Modelo Geométrico de Imagen Digital \diamond 3.3. Diferentes modelos de imagen digital \diamond 3.4. Conclusiones.	
Apéndices	67
A. FCM en Vecindad Tubular para Curvas Planas \diamond B. Demostración del Teorema 2.2.1 \diamond C. 1 ^{ra} Aproximación Numérica del FCM ($n = 1$) \diamond D. Fórmula de Representación para ec. de Poisson \diamond E. Códigos.	
Bibliografía	93

Introducción

Los flujos geométricos son un frecuente tema de estudio en geometría riemanniana, esencialmente porque a través de ellos se estudian propiedades de las variedades cuando se impone una ecuación dinámica sobre alguno de sus parámetros. En particular, el *flujo de curvatura media* (FCM) consiste en la evolución de una hipersuperficie cuando cada uno de sus puntos es desplazado en dirección normal con una velocidad igual a la curvatura media en ese punto.

Algunos autores [27, 42] refieren el origen del FCM a modelos utilizados en la descripción del crecimiento de cristales [29], y a partir de ellos muchas aplicaciones se han inspirado motivando el interés por la *evolución de interfaces*, la cual modela a través de curvas o superficies la evolución de la frontera que separa dos medios.

Desde el punto de vista matemático, el flujo de curvatura media también presenta abundante interés como herramienta y como objeto de estudio. Para el primero, uno de los resultados inmediatos que se obtienen es la caracterización de las superficies mínimas como soluciones estacionarias del FCM, de manera que algunos autores [5] proponen evolucionar una superficie por FCM junto con ciertas restricciones hasta llevarla a una solución estacionaria que se aproxime a la solución de otro problema; otro acercamiento es verlo como la generalización a dimensión superior del *flujo de acortamiento de curvas* [6]. Desde una perspectiva teórica el estudio del FCM busca principalmente describir el proceso de formación de singularidades en tiempo finito, y la generalización del FCM a superficies inmersas en variedades ambiente arbitrarias [4].

Debido a sus múltiples aplicaciones como modelo físico, es natural que se haya tratado de implementar numéricamente el FCM. Mucha de la literatura actual sobre este tema dirige a los trabajos de Sethian *et al* [5, 33, 38] en los cuales se propone ver a la solución del FCM como un conjunto de nivel ϕ para cada

tiempo, obtener una ecuación de Hamilton-Jacobi para ϕ y una ley de conservación asociada, y resolver ésta a través de métodos numéricos ya desarrollados. En este trabajo se utiliza otro método numérico para reproducir la evolución el cual fue propuesto en el trabajo de Kimura [19, 20] y consiste en agregar campos vectoriales a la evolución surgidos a partir de reparametrizaciones del conjunto evolucionado.

La característica distintiva del esquema de Kimura es que trata directamente con las posiciones de puntos que representan la curva en evolución, este tipo de modelos reciben el nombre *lagrangianos*, mientras que el método de conjuntos de nivel (métodos *eulerianos*) en lugar de seguir cada punto, trabaja con los valores en posiciones fijas y en base a estos trata de reconstruir el perfil de la curva. El método de conjuntos de nivel requiere aumentar la dimensión del problema, lo cual en principio significa almacenar un mayor número de datos y realizar un mayor número de cálculos, por el contrario el método de Kimura permite obtener la evolución con cierto grado de detalle dependiendo del número de puntos utilizados para representar el objeto inicial, sin embargo la elección del número de puntos depende de la precisión con la que se desea representar la curva inicial lo cual también repercute en la rapidez de cómputo.

La visión por computadora, es decir el procesamiento e interpretación de la información digital que ingresa a una máquina por una cámara, es un problema nuevo del cual se han propuesto soluciones motivadas más por el tipo de aplicaciones al que se destinan que por un modelo sistemático. En este trabajo se aborda en específico el reconocimiento de imágenes a través de un modelo puramente geométrico con el cual las mismas herramientas geométricas se utilizan para el análisis de imágenes.

Básicamente el problema consiste en identificar una región Ω en el plano a través de parametrizar una curva que corresponda a la frontera $\partial\Omega$. Para lograr esto, se puede hacer evolucionar por FCM una curva inicial γ simple y cerrada que acote a Ω imponiendo ciertas restricciones a su evolución. Aún no se ha encontrado una solución satisfactoria al problema de reconocer objetos en imágenes y mucha de la investigación que se realiza en este campo generalmente utiliza el método de conjuntos de nivel o variaciones de éste.

El objetivo de esta tesis es proponer un nuevo método lagrangiano para reconocer imágenes. El punto de partida que se toma para esta formulación no

es directo, ya que en lugar de partir de una serie de ecuaciones dinámicas en donde se han impuesto obstáculos (restricciones) en las regiones que representen al objeto y buscar resolverlas, se comienza por dar solución a un problema dinámico ajeno al reconocimiento de imágenes pero que representa la evolución de una curva planteada en términos de una ecuación de Poisson (un procedimiento similar también tratado en [20] pero para describir la evolución de un fluido), problema que después es adaptado para reconocer imágenes a través de imponer restricciones deducidas del modelo geométrico de imagen digital planteado por Georgiev [13]. En este modelo las imágenes se interpretan como secciones definidas en un haz fibrado y se aprovecha la maquinaria geométrica natural (transporte paralelo, conexiones, distribuciones, etc) para caracterizar las restricciones.

Si se pudiera asumir cierta simetría en las ecuaciones dinámicas provenientes del modelo de fibras entonces sería conveniente abordar directamente el problema, sin embargo como esto en general no puede suponerse, se utiliza el esquema de Kimura para reproducir un flujo de curvatura media que después se adapta para condicionarlo de manera que se vuelva controlable (tratando de promover o frenar la evolución en ciertas regiones) y por último, sobre la expresión que define las velocidades se impone la restricción.

Esta tesis se divide en tres capítulos, en el primero se describe el trasfondo geométrico necesario para definir el FCM y muchas de las herramientas que posteriormente se utilizan. El objetivo del segundo capítulo no sólo es describir el FCM y sus propiedades, también se da una prueba de la existencia y unicidad de soluciones siguiendo el trabajo de Mantegazza [27], Chou [6] y Polden [14] para $n = 1$, caso motivado por el capítulo 3 y porque en esta prueba se definen los conceptos en los que se basa el método numérico, también descrito en este capítulo. Por último, el tercer capítulo trata sobre la aplicación del FCM al reconocimiento de imágenes, se comienza por describir y motivar las implicaciones que tiene condicionar el flujo de curvatura de manera que la evolución de una curva pueda hacerse coincidir con un contorno dado. Después se plantean las ecuaciones que describen la dinámica de la curva en presencia de obstáculos puntuales en su interior con efecto de un campo potencial, los cuales limitan o promueven la evolución, también se describe el procedimiento que permite discretizar estas ecuaciones y llevarlas a un problema algebraico lineal combinado con el esquema de Kimura para el FCM. La siguiente sección de este último capítulo trata del modelo de fibras y de cómo se anexan las restricciones a este modelo y a las ecuaciones dinámicas de la segunda sección; por último se da

una comparación entre el modelo de fibras y un modelo de imagen digital más conocido que consiste en describir a las imágenes como gráfica de una función.

La reproducción numérica del FCM y el método propuesto para reconocer imágenes no requieren de software especial adicional a un intérprete de código *python* con el módulo *numpy* para trabajar con vectores, los ejemplos mostrados se realizaron utilizando un procesador *Intel core i7* de 2.0GHz.

Además de proponer un método para reconocer objetos en una imagen, otros puntos importantes en este trabajo son el tratamiento de las restricciones sobre la curva en evolución en términos del modelo de fibras para el reconocimiento de objetos, el cual no fue abordado en [13]; y también se da un nuevo uso de la ecuación de Poisson en el área de análisis de imágenes, ya que comúnmente en esta área la ecuación de Poisson se utiliza como filtro para remover ruido y para suavizar la superposición de imágenes.

Capítulo 1

Generalidades

En este capítulo se establecen las definiciones básicas necesarias (siguiendo [3], [24] y [31]) en las que se apoya el flujo de curvatura media, así como también las propiedades asociadas a este último.

1.1. Variedades Diferenciales

Se denomina variedad diferenciable M de dimensión n , a veces denotado - como M^n , a un espacio topológico de Hausdorff, segundo numerable, localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n y provisto de una estructura diferenciable. Esto quiere decir [34] que se satisface: (a) Para cada punto \mathbf{p} en M es posible dar una pareja (U, ϕ) denominada *carta*, formada por un abierto $U \subset M$ y un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre un abierto de \mathbb{R}^n . (b) Sean (U, ϕ) , (V, ψ) dos cartas de M para las que $U \cap V \neq \emptyset$, los mapeos $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son de clase C^k . (c) Para una colección \mathcal{A} de cartas (U_α, ϕ_α) se cumple

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

De acuerdo con [3], diremos que un mapeo $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es una curva diferenciable que pasa por $\mathbf{p} \in M$, si $\gamma(0) = \mathbf{p}$ y el mapeo $\phi \circ \gamma$ es diferenciable para alguna carta (U, ϕ) para la cual $\mathbf{p} \in U$. A partir de esta definición se caracteriza el espacio tangente de M en \mathbf{p} como el conjunto formado por las clases de equivalencia de las curvas diferenciales que pasan por \mathbf{p} ; siguiendo [34], dos curvas γ y β son equivalentes si $(\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$.

1.1. VARIEDADES DIFERENCIALES

El espacio tangente tiene estructura de espacio vectorial y para $\mathbf{p} = (x_1, \dots, x_n)$ un punto de M representado en coordenadas locales, el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\mathbf{p}} \mid 1 \leq i \leq n\}$ forma una base de $T_{\mathbf{p}}M$.

De manera similar al concepto de curva diferenciable en una variedad, se definen los mapeos diferenciables sobre variedades.

Definición 1.1.1. Sean M^m y N^n variedades, un mapeo $F : M^m \rightarrow N^n$ es *diferenciable*, si para la carta (U, ϕ) de M y la carta (V, ψ) de N con U vecindad de \mathbf{p} y V vecindad de $F(\mathbf{p})$, el mapeo $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es diferenciable.

Asímismo, a partir de F también se hereda un mapeo entre espacios tangentes, a saber:

$$dF : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{F(\mathbf{p})}N$$

$$dF \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\mathbf{p}} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}(\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{F(\mathbf{p})} \quad (1.1)$$

para $1 \leq j \leq m$, (y_1, \dots, y_n) coordenadas locales de N y $\frac{\partial}{\partial y^i}$ elemento de la base del espacio tangente de N en el punto imagen.

Estos mapeos entre espacios tangentes permiten distinguir a las inmersiones, cuya definición es:

Definición 1.1.2. Sea $F : M^m \rightarrow N^n$ un mapeo diferenciable entre variedades, se dice que F es una *inmersión* si dF es inyectiva.

La definición 1.1.2 permite caracterizar a los futuros objetos de estudio, las *subvariedades*.

Definición 1.1.3. Sean \bar{M} y M variedades diferenciables, se dice que M es *subvariedad* de \bar{M} si es un subespacio topológico de \bar{M} y el mapeo inclusión $i : M \rightarrow \bar{M}$ es una inmersión. En este contexto, a \bar{M} se le llama *variedad ambiente*.

Denotaremos por una tilde superior ($\bar{}$) a lo perteneciente a la variedad ambiente, por ejemplo: $T_p\bar{M}$ representa el espacio tangente en p de \bar{M} .

Sea M^n una variedad diferenciable de dimensión n , se define una métrica Riemanniana \mathbf{g} como la correspondencia entre los puntos \mathbf{p} de la variedad y

un producto interno sobre $T_p M$. Las componentes de dicho tensor en el punto $p \in M^n$ están dadas por el (0,2)-tensor

$$g_{ij} = \mathbf{g}(\partial_i, \partial_j) \quad (1.2)$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ pertenecen a una base del espacio tangente de M en p , para un sistema coordenado dado. Frecuentemente también es representado como $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$.

Si $\bar{\mathbf{g}}$ es la métrica de una variedad ambiente y F una inmersión, es posible definir una métrica \mathbf{g} sobre M a partir de $\bar{\mathbf{g}}$ llamada la *métrica inducida*.

Definición 1.1.4. Sea M subvariedad de \bar{M} y $\bar{\mathbf{g}}$ métrica de la variedad ambiente. Dada $F : M \rightarrow \bar{M}$ una inmersión, se define la *métrica inducida* sobre M como

$$\mathbf{g}(\partial_i, \partial_j) = \bar{\mathbf{g}}(dF(\partial_i), dF(\partial_j)) \quad (1.3)$$

Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto formado por todos los campos vectoriales sobre M , y por $\mathfrak{F}(M)$ el conjunto de funciones C^∞ de M en \mathbb{R} .

1.2. Conexión y Curvatura

Dados dos campos diferenciables V y W en M , es natural preguntarse cómo cambia uno respecto el otro en un punto, para esto es necesario el concepto de *conexión* y el de *derivada convariante*, definimos

Definición 1.2.1. La *conexión* ∇ de una variedad M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que

- $\nabla_V W$ es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en W .
- $\nabla_V W$ es \mathbb{R} -lineal en W .
- $\nabla_V fW = (Vf)W + f\nabla_V W$

para $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, y para $W := \sum W^i \partial_i$ se llama *derivada covariante de W respecto V* a: $\nabla_V W = \sum V(W^i) \partial_i$.

La definición de conexión permite entre otras cosas, extender a variedades algunos operadores diferenciales surgidos del cálculo en \mathbb{R}^n como el gradiente, el operador de laplace

1.2. CONEXIÓN Y CURVATURA

Definición 1.2.2. Sea f en $\mathfrak{F}(M)$, el *gradiente de f* se define en términos de un sistema coordinado como

$$\text{grad } f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j \quad (1.4)$$

Definición 1.2.3. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y g una métrica riemanniana de M , se define $\Delta_g f$ (el *laplaciano de f*) como la contracción de la derivada covariante de su diferencial, es decir

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= \mathbf{C}_{12} \nabla df(X, Y) \\ &= \mathbf{C}_{12} \nabla_Y (df(X)) \\ &= \mathbf{C}_{12} (Y(df(X)) - df(\nabla_Y X)) \\ &= \mathbf{C}_{12} (Y X f - (\nabla_Y X) f) \\ &= \sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

aquí \mathbf{C}_{12} es el factor de contracción y Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel que surgen al calcular $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$ y cuya expresión explícita es

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\} \quad (1.6)$$

Definición 1.2.4. Sea $[X, Y] = XY - YX$ para dos campos X, Y , definimos al tensor de curvatura \mathcal{R} por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ \mathcal{R}_{XY}Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \end{aligned}$$

En el caso particular de subvariedades, es decir si M es una subvariedad de \bar{M} , la conexión $\bar{\nabla}$ de la variedad ambiente induce una conexión ∇ sobre M de la siguiente manera: sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $W \in \mathfrak{X}(M)$, es decir, la extensión a \bar{M} de un campo W en M , podemos calcular la derivada covariante de W a lo largo de X en M usando la conexión $\bar{\nabla}$ si primero extendemos X a un campo sobre \bar{M} bajo la diferencial de la inclusión i (definición 1.1.3 y ec. 1.1), y posteriormente restringimos $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{W}$ a $T_p M$.

Con la métrica inducida sobre $M \subset \bar{M}$, las definiciones 1.1.2- 1.1.4 permiten reconocer a $T_{\mathbf{p}}M$ como un subespacio no degenerado de $T_{i(\mathbf{p})}\bar{M}$ y por tanto escribir

$$T_{\mathbf{p}}\bar{M} = T_{\mathbf{p}}M \oplus (T_{\mathbf{p}}M)^{\perp}$$

Los vectores en $(T_{\mathbf{p}}M)^{\perp}$ se llaman *vectores normales* a M en \mathbf{p} . Esta misma noción se puede extender a campos: se llamarán campos normales a M los campos que para todo punto \mathbf{p} tomen valores en $(T_{\mathbf{p}}M)^{\perp}$, y el conjunto de todos estos campos se representará por $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$. El símbolo $(^{\perp})$ siempre se utilizará para referirse a la proyección sobre $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ de un campo de \bar{M} y $(^{\top})$, a la proyección sobre $\mathfrak{X}(M)$.

Con esto en mente, para la conexión inducida ∇ , \mathbf{p} un punto en M ; V, W en $T_{\mathbf{p}}M$ y ν en $(T_{\mathbf{p}}M)^{\perp}$, se define la forma bilineal A_{ν}

$$\begin{aligned} A_{\nu} : T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}M &\rightarrow \mathbb{R} \\ A_{\nu}(V, W) &= \bar{g} \left(\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{W}, \nu \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

cuyas componentes en el punto \mathbf{p} son

$$A_{ij} = A_{\nu}(\partial_i|_{\mathbf{p}}, \partial_j|_{\mathbf{p}}) \quad (1.8)$$

y asociada a ésta, tenemos la forma cuadrática

Definición 1.2.5. La forma cuadrática II_{ν} asociada a (1.7)

$$II_{\nu}(W) = A_{\nu}(W, W) \quad (1.9)$$

se conoce como *2^{da} forma fundamental* en \mathbf{p} a lo largo de ν .

También asociado a A_{ν} se tiene un operador autoadjunto S_{ν}

$$\begin{aligned} S_{\nu} : T_{\mathbf{p}}M &\rightarrow T_{\mathbf{p}}M \\ S_{\nu}(w) &= -(\bar{\nabla}_w N)^{\top} \end{aligned} \quad (1.10)$$

con N extensión de ν a M y S_{ν} satisface $\bar{g}(S_{\nu}(w), u) = A_{\nu}(w, u)$.

Sea M^m una subvariedad de N^n , diremos que M^m es una *hipersuperficie* si $n = m + 1$. Si para todo punto \mathbf{p} de una hipersuperficie M existe un vector normal unitario ν tal que si $\{e_i | 1 \leq i \leq m\}$ es una base ortonormal de $T_{\mathbf{p}}M$ y $\{e_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{\nu\}$ es base de N , tales que e_1, \dots, e_m son los eigenvectores de A_{ij} , sus eigenvalores asociados $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ reciben el nombre de *curvaturas principales*.

Definición 1.2.6. La *curvatura media* H en un punto \mathbf{p} se define como la suma de las curvatura principales en ese punto.

$$H = \lambda_1 + \dots + \lambda_m \quad (1.11)$$

Lema 1.2.1. La suma $\lambda_1 + \dots + \lambda_m$ en la ec. (1.11) puede reescribirse como $\sum_{ij} g^{ij} A_{ij}$

Demostración.

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \lambda_i = \sum_i A_\nu(e_i, e_i) \\ &= \sum_{ij} g^{ij} A_\nu(e_i, e_j) \\ &= \sum_{ij} g^{ij} A_{ij} \end{aligned} \quad (1.12)$$

□

1.3. Variaciones de Energía

Sean p y q los puntos extremos de un segmento de una curva suave γ en una variedad M , un criterio de comparación entre este segmento y *variaciones* de él, consiste en definir una cantidad escalar que caracterice a las distintas curvas en la variación, por ejemplo la longitud de arco. Posteriormente en la sección 3.2 en forma más general, se utilizará otra cantidad (o funcional) para comparar a las curvas en la variación. Formalmente definimos una variación de la siguiente manera

Definición 1.3.1. Sea $\gamma(s)$ un segmento de curva en M , con $0 \leq s \leq S$, una *variación de γ* es un mapeo continuo

$$\mathbf{v} : [0, S] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$$

tal que $\mathbf{v}(s, 0) = \gamma(s)$, $\forall s \in [0, S]$. Si además $\mathbf{v}(0, t) = \gamma(0)$ y $\mathbf{v}(S, t) = \gamma(S)$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, se denomina *variación propia*. Se define también el *campo variacional de \mathbf{v}* como el campo $V(s) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(s, 0)$.

Para un segmento de curva $\overline{pq} \subset \gamma(s)$ y su variación \mathbf{v} , un primer criterio de comparación entre γ y las curvas en \mathbf{v} es la *longitud de arco*

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^S \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}(s, t) \right| ds \quad (1.13)$$

Debido a que \mathcal{L} es el parámetro de comparación, resulta indispensable estudiar cómo se modifica al variar t alrededor de la curva inicial ($t = 0$), a este resultado se le conoce como *fórmula para la primera variación* (para \mathcal{L}). Completando algunos detalles, seguimos la demostración de O'neil [31, p. 264].

Teorema 1.3.1. (*Fórmula para la primera variación*) Sea $\gamma(s)$ una curva suave por pedazos con $s \in [s_0, S]$ para una partición $s_0 < \dots < s_i < \dots < S$, y rapidez constante $c > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(0) &= \frac{1}{c} \left(\left\langle V(S), \frac{d\gamma}{ds}(S) \right\rangle - \left\langle V(s_0), \frac{d\gamma}{ds}(s_0) \right\rangle - \sum_i \left\langle V(s_i), \lim_{s \rightarrow s_i^+} \frac{d\gamma}{ds} - \lim_{s \rightarrow s_i^-} \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \int_{s_0}^S \left\langle V(s), \frac{d^2\gamma}{ds^2}(s) \right\rangle ds \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

para una variación \mathbf{v} de γ .

Demostración. Sea $\gamma_i(s) = \gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$ con $s_0 < \dots < s_i < \dots < S$ segmentos de $\gamma(s)$ tales que γ_i es suave, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(0) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{s_0}^S \left| \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, t) \right| ds \right) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left| \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, t) \right| ds \right) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_i \left(\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, t), \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, t) \right\rangle^{1/2} ds \right) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_i \left(\int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\langle \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, t), \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, t) \right\rangle^{-1/2} \left\langle \frac{d^2\mathbf{v}}{dt ds}(s, t), \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, t) \right\rangle ds \right) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_i \left(\int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\langle \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, 0), \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, 0) \right\rangle^{-1/2} \left\langle \frac{dV}{ds}(s), \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, 0) \right\rangle ds \right) \end{aligned}$$

1.3. VARIACIONES DE ENERGÍA

como la rapidez es constante y $\frac{d\mathbf{v}}{ds}(s, 0) = \frac{d\gamma_i}{ds}(s)$

$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{1}{c} \left\langle \frac{dV}{ds}(s), \frac{d\gamma_i}{ds}(s) \right\rangle ds \right) \\ &= \frac{1}{c} \sum_i \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\frac{d}{ds} \left\langle V(s), \frac{d\gamma}{ds}(s) \right\rangle - \left\langle V(s), \frac{d^2\gamma}{ds^2}(s) \right\rangle \right) ds \\ &= \frac{1}{c} \sum_i \left(\left\langle V(s), \frac{d\gamma}{ds}(s) \right\rangle \Big|_{s_{i-1}}^{s_i} - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\langle V(s), \frac{d^2\gamma}{ds^2}(s) \right\rangle ds \right) \end{aligned}$$

como la curva sólo es suave por pedazos, $\frac{d\gamma}{ds}|_{[s_{i-1}, s_i]}(s_i) \neq \frac{d\gamma}{ds}|_{[s_i, s_{i+1}]}(s_i)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c} \left(\left\langle V(S), \frac{d\gamma}{ds}(S) \right\rangle - \left\langle V(s_0), \frac{d\gamma}{ds}(s_0) \right\rangle - \sum_i \left\langle V(s_i), \lim_{s \rightarrow s_i^+} \frac{d\gamma}{ds} - \lim_{s \rightarrow s_i^-} \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \int_{s_0}^S \left\langle V(s), \frac{d^2\gamma}{ds^2}(s) \right\rangle ds \right) \end{aligned}$$

□

Algunas veces se trabaja con otra cantidad denominada energía \mathcal{E} definida por

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^S \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}(s, t) \right|^2 ds \quad (1.15)$$

Una característica importante es que los puntos críticos de \mathcal{E} y \mathcal{L} coinciden

Lema 1.3.1. Sea $\gamma : [0, S] \rightarrow M$ una curva suave

$$\mathcal{L}^2(\gamma(t)) \leq S \mathcal{E}(\gamma(t))$$

Demostración. Usando la desigualdad de Cauchy Schwartz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\gamma(t)) &= \left(\int_0^S 1 \cdot \left| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \right| ds \right)^2 \leq \left(\int_0^S 1 ds \right) \left(\int_0^S \left| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \right|^2 ds \right) \\ &= S \mathcal{E}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

la igualdad se obtiene cuando la rapidez de γ es constante. □

Teorema 1.3.2. Sea $\gamma : [0, S] \rightarrow M$ una curva parametrizada por longitud de arco, si γ minimiza \mathcal{L} entonces también minimiza \mathcal{E} y viceversa.

Demostración. Si γ minimiza \mathcal{L} entonces para cualquier otra curva $c : [0, S] \rightarrow M$, utilizando el lema 1.3.1 tenemos

$$s \mathcal{E}(\gamma) = \mathcal{L}^2(\gamma) \leq \mathcal{L}^2(c) \leq s \mathcal{E}(c)$$

es decir γ también minimiza \mathcal{E} . Por el contrario si γ minimiza \mathcal{E} veamos que también minimiza \mathcal{L} . Supongamos c está parametrizada por longitud de arco

$$\mathcal{L}(\gamma) \leq \sqrt{s \mathcal{E}(\gamma)} \leq \sqrt{s \mathcal{E}(c)} = \mathcal{L}(c)$$

□

El siguiente teorema caracteriza a las curvas geodésicas es decir, curvas con aceleración cero, como puntos críticos de \mathcal{E} .

Teorema 1.3.3. Una curva $\gamma : [0, S] \rightarrow M$ suave por pedazos definida como en el teorema 1.3.1 es geodésica si para cualquier variación propia, γ es un mínimo de \mathcal{E} .

Demostración. Supongamos γ es geodésica entonces los últimos dos términos de la ec. (1.14) con cero y para cualquier variación propia el campo variacional se anula en los extremos: $V(s_0) = V(S) = 0$, por tanto $\mathcal{L}'(\gamma) = 0$ y por el teorema 1.3.2, γ también es un mínimo de \mathcal{E} .

Por otra parte, sea γ un mínimo de \mathcal{E} y por tanto de \mathcal{L} . Consideramos el campo constante $y(s) = y$ con y un vector tangente a $\gamma(s^*)$ para alguna s^* . Construimos una variación propia $\mathbf{v}(s, t) := \exp(t y(s))$ cuyo campo variacional es $V(s) = y(s)$. Veamos que en cada intervalo (s_i, s_{i+1}) la curva es geodésica, primero notemos que los primeros dos términos de la ec. (1.14) se anulan por ser variación propia en el intervalo (s_i, s_{i+1}) y la ecuación se reduce a

$$0 = - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\langle V(s), \frac{d^2 \gamma}{ds^2}(s) \right\rangle ds$$

$\Rightarrow \frac{d^2 \gamma}{ds^2} = 0$ para s en (s_i, s_{i+1}) . Usando esto, si tomamos ahora el intervalo $(s_{i-1}, s_i] \cup [s_i, s_{i+1})$, de la ec. (1.14) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= - \left\langle V(s_i), \lim_{s \rightarrow s_i^+} \frac{d\gamma}{ds} - \lim_{s \rightarrow s_i^-} \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle \\ &= - \left\langle y, \lim_{s \rightarrow s_i^+} \frac{d\gamma}{ds} - \lim_{s \rightarrow s_i^-} \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle \end{aligned}$$

1.3. VARIACIONES DE ENERGÍA

y por tanto $\lim_{s \rightarrow s_i^+} \frac{d\gamma}{ds} = \lim_{s \rightarrow s_i^-} \frac{d\gamma}{ds}$, es decir γ , geodésica en cada subintervalo, es además continua en s_i . \square

En forma más general, en lugar de utilizar la longitud de arco o su cuadrado se puede definir el funcional

$$I(x) = \int_a^b F(x(t), x'(t), t) dt \quad (1.16)$$

para $F(\alpha, \beta, \xi)$ función de clase C^2 y $x(t)$ de clase $C^1([a, b])$, y preguntarse cuál curva en una variación minimiza $I(x)$. El siguiente teorema caracteriza estas soluciones. Este tipo de problemas son considerados problemas de optimización y el siguiente resultado será necesario para la sección 3.3.

Teorema 1.3.4. Sea $\mathbf{v}(s, t)$ variación propia de una curva $x(s)$ e $I(x)$ definida por la ec. (1.16). Si $x_0(s)$ minimiza o maximiza (1.16) entonces

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{x_0} - \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \beta} \right|_{x_0} = 0 \quad (1.17)$$

en $[a, b]$. La ec. (1.17) se llama *ecuación de Euler-Lagrange*.

Demostración. Sea $h(x)$ de clase $C^1([a, b])$ tal que $h(a) = h(b) = 0$, definimos $\hat{I}(h) := I(x_0 + h)$ y como x_0 extremiza (minimiza o maximiza) $I(x)$, $h = 0$ extremiza \hat{I} . Esta misma condición se reescribe como $D\hat{I}|_h = 0$ donde $D\hat{I}$ es la derivada de Frechet de \hat{I} , esto es el mapeo lineal y continuo tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\hat{I}(x+h) - \hat{I}(x) - hD\hat{I}(x)\|}{\|h\|} = 0$$

respecto alguna norma $\|\cdot\|$ definida sobre $C^1([a, b])$. Veamos ahora que se satisface la ec. (1.17) en $h = 0$, para lo cual calculamos $D\hat{I}(0)$. Para $\|h\|$ suficientemente pequeña, usando el teorema de Taylor, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{I}(h) - \hat{I}(0) &= \int_a^b \left(h(t) \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0, x'_0, t) + h'(t) \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) dt + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_a^b \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2hh' \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + (h')^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) F|_{x_0+\delta} dt \end{aligned} \quad (1.18)$$

para alguna δ tal que $\|x_0 + \delta - x_0\| \leq \|x_0 + h - x_0\|$ y para la cual el último término satisface

$$\left\| \frac{1}{2} \int_a^b \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2hh' \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + (h')^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) F|_{x_0+\delta} dt \right\| \leq M \|h\|^2$$

Si h extremiza \hat{I}

$$\begin{aligned} 0 &= D\hat{I}(h) = \lim_{\|h \rightarrow 0\|} \frac{\|\hat{I}(h) - \hat{I}(0) - hD\hat{I}\|}{\|h\|} \\ &= \int_a^b \left(h(t) \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0, x'_0, t) + h'(t) \frac{\partial F}{\partial \beta}(x_0, x'_0, t) \right) dt \end{aligned}$$

Sea $f(t) := \int_a^t \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0, x'_0, \tau) d\tau$, e integrando por partes el primer término:

$$\begin{aligned} &= f(t)h|_a^b - \int_a^b f(t)h'(t) dt + \int_a^b h'(t) \frac{\partial F}{\partial \beta}(x_0, x'_0, t) dt \\ &= - \int_a^b \left(f(t) - \frac{\partial F}{\partial \beta}(x_0, x'_0, t) \right) h'(t) dt \end{aligned}$$

después de una segunda integración por partes:

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0, x'_0, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \beta}(x_0, x'_0, t) \right) h(t) dt \quad (1.19)$$

por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0, x'_0, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \beta}(x_0, x'_0, t) = 0$$

□

Capítulo 2

Flujo de Curvatura Media

2.1. Flujo de curvatura media (FCM)

A grandes rasgos, el *flujo de curvatura media* consiste en deformar una superficie con desplazamientos en dirección normal, más explícitamente:

Definición 2.1.1. Sea $X : M^n \times [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión y $x \in M$. Si se satisface

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t}(x, t) &= H(x, t) \hat{\mathbf{n}}(x, t) \\ X(x, 0) &= X_0(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

para $\hat{\mathbf{n}}$ vector unitario normal y H curvatura media en x , entonces se dice que M *evoluciona bajo el flujo de curvatura media*.

La definición 2.1.1 requiere que las variedades M a evolucionar por FCM posean ciertas características que se asumirán de aquí en adelante, éstas son: $X(M^n, t)$ es subvariedad de \mathbb{R}^{n+1} , la existencia para todo tiempo t en $[0, \tau)$ de un campo vectorial suave normal a $X(M, t)$ denominado $\hat{\mathbf{n}}$; y aunque no es una condición necesaria, en este trabajo se pedirá además la compacidad de M en relación a los requerimientos de la sección 2.3.

Algunos ejemplos de flujo de curvatura media son:

Ejemplo 1. Las *superficies mínimas* se definen como superficies con curvatura media $H = 0$ por tanto éstas representan soluciones estacionarias a la ec. 2.1.

2.1. FLUJO DE CURVATURA MEDIA (FCM)

Ejemplo 2. Sea $\mathbb{S}_{\rho_0}^n$ la hipersfera de radio ρ_0 , y \mathbf{p} un punto en $\mathbb{S}_{\rho_0}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, para el mapeo $X : \mathbb{S}_{\rho_0}^n \times [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$X(\mathbf{p}, t) = \frac{r(t)}{|\mathbf{p}|} \mathbf{p} \quad (2.2)$$

con $r(0) = \rho_0$, reduce la ecuación de FCM a

$$\dot{r}(t) = -\frac{n}{r} \quad (2.3)$$

ya que la curvatura media para \mathbb{S}_R^n es $\frac{n}{r}$. La solución de (2.3) es

$$r(t) = \sqrt{\rho_0^2 - 2nt} \quad (2.4)$$

La figura 2.1 ilustra esta evolución para una esfera en \mathbb{R}^3 y pese a ser un ejemplo casi trivial, sirve como punto de partida para identificar diversos aspectos del FCM como son reconocer el intervalo máximo de existencia y la aparición de singularidades.

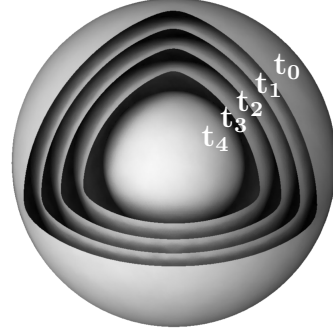


Figura 2.1: Evolución por FCM de una esfera ($0 < t_0 < \dots < t_4$).

Ejemplo 3. El *flujo de acortamiento de curvas* consiste en hacer evolucionar curvas simples γ con curvatura κ a través de la ecuación dinámica (2.5).

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma(s, t) = \kappa \hat{\mathbf{n}} \quad (2.5)$$

La ec. (2.5) se obtiene a partir de (2.1) para el caso $n = 1$, en donde pedir a X ser inmersión permite restringirse por hipótesis a curvas con vector tangente no nulo (regulares) y en consecuencia garantizar la existencia de $\hat{\mathbf{n}}$ a lo largo de toda la curva. Aquí las rectas son soluciones estacionarias y el ejemplo 2 se puede reescribir para $n = 1$, otro ejemplo son los *óvalos de Angenent* los cuales, cuando los representamos como gráfica de una función, se obtienen paramétricamente por la expresión

$$\pm y(x, t) = t - \ln \left(\cos(x) + \sqrt{\cos^2(x) - e^{2t}} \right) \quad (2.6)$$

para $t \in (-\infty, 0)$. Para el caso de gráficas escribimos la parametrización de las curvas como $\gamma(x, t) = (x, y(x, t))$, por lo que la expresión para la curvatura y el vector normal toman la forma

$$\kappa = \frac{y_{xx}}{(1 + y_x^2)^{3/2}}$$

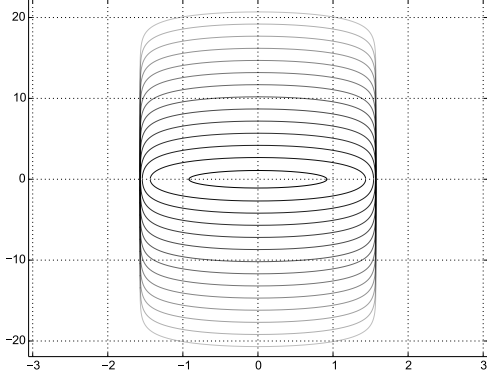


Figura 2.2: Flujo de acortamiento para los óvalos de Angenent.

La ecuación (2.7) es ahora la ecuación dinámica que debe satisfacer (2.6) para poder afirmar que $y(\cdot, 0)$ evoluciona por flujo de curvatura media (acortamiento de curvas), veamos que esto es cierto ya que

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x) - e^{2t}}}$$

y también

$$\begin{aligned} 1 + y_x^2 &= 1 - \frac{\sin^2(x)}{-\cos^2(x) + e^{2t}} \\ y_{xx} &= \frac{\cos(x) (\cos^2(x) - e^{2t} + \sin^2(x))}{(\cos^2(x) - e^{2t})^{3/2}} \\ \Rightarrow \frac{y_{xx}}{1 + y_x^2} &= \frac{(\cos^2 - e^{2t} + \sin^2(x)) \cos(x) \cdot \frac{1}{(\cos^2(x) - e^{2t})^{3/2}}}{(\cos^2 - e^{2t} + \sin^2(x)) \cdot \frac{1}{\cos^2(x) - e^{2t}}} \\ &= \frac{\cos(x)}{(\cos^2(x) - e^{2t})^{1/2}} \end{aligned}$$

En la figura 2.2 se ilustra esta evolución en donde se ha representado a través de la intensidad el incremento de t .

Otra familia de curvas que satisfacen la ecuación 2.7 es

$$y(x, t) = -\ln(\cos(x)) + t \quad (2.8)$$

2.1. FLUJO DE CURVATURA MEDIA (FCM)

para $t \in (-\infty, \infty)$, con frecuencia $y(x, t)$ es llamada “grim reaper”, de manera similar a las hiperesferas que mantienen su forma bajo el FCM, también es una solución *autosimilar*, esto significa que el trazo de $y(\cdot, t)$ coincide con aplicar una transformación rígida a $y(\cdot, 0)$ y a lo más también el producto por un escalar positivo¹.

Para la ecuación (2.8) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= 1 \\ y_{xx} &= 1 + y_x^2 = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

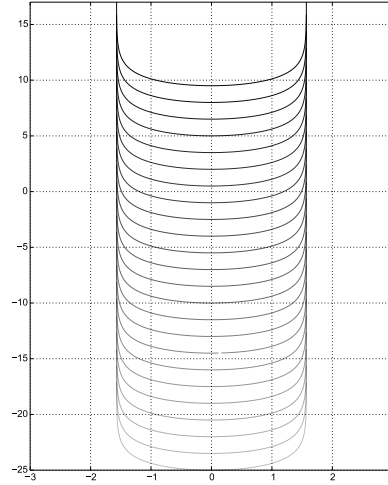


Figura 2.3: Flujo de acortamiento para la ec. (2.8)

y por tanto también satisface (2.7), esta evolución se presenta en la figura 2.3.

Antes de estudiar el FCM resulta útil primero demostrar algunos resultados.

Lema 2.1.1. La extensión de los vectores tangentes de $X(M)$ a \mathbb{R}^{n+1} permite escribirlos como $\frac{\partial X}{\partial x^i}$, además para la métrica inducida \mathbf{g}

$$\mathbf{g} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \bar{\mathbf{g}} \left(\frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right)$$

Demostración. Sea t fijo, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X(M)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $X_t : M \rightarrow \bar{M}$ inmersión definida por $X_t(p) = X(p, t)$, y sea el conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^n$ una base de $T_x X(M, t)$ y $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j} \right\}_{j=1}^{n+1}$ base de $T_y \mathbb{R}^{n+1}$. La extensión de $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x X(M, t)$ a un elemento de $T_{X(p)} \mathbb{R}^{n+1}$ es:

$$dX \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial (y_k \circ X)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} \quad (2.9)$$

¹Se conoce una clasificación de las soluciones autosimilares del flujo de acortamiento de curvas en términos del tipo de transformaciones rígidas y expansión/contracción que involucran, esta clasificación puede encontrarse en los trabajos de Halldorsson [16] y Lauret [23].

$$= \frac{\partial X}{\partial x^i} \quad (2.10)$$

mientras que para la métrica, usando la ec. (1.3)

$$\begin{aligned} g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \bar{g} \left(dX \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right), dX \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) \\ &= \bar{g} \left(\frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

□

Lema 2.1.2.

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x^i}} \frac{\partial X}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} \quad (2.12)$$

Demostración. Los campos $\frac{\partial X}{\partial x^i}$ y $\frac{\partial X}{\partial x^j}$ son la extensión a campos de \bar{M} de $\frac{\partial}{\partial x^i}$ y $\frac{\partial}{\partial x^j}$ campos en $\mathfrak{X}(M)$, usando la definición 1.2.1:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial X}{\partial x^j} &= \sum_k \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial(y^k \circ X)}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^k} + \sum_k \frac{\partial(y^k \circ X)}{\partial x^j} \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &= \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k,l} \frac{\partial(y^k \circ X)}{\partial x^j} \frac{\partial(y^l \circ X)}{\partial x^i} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^l}} \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &= \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k,l} \frac{\partial(y^k \circ X)}{\partial x^j} \frac{\partial(y^l \circ X)}{\partial x^i} \sum_{\mu} \bar{\Gamma}_{lk}^{\mu} \frac{\partial}{\partial y^{\mu}} \end{aligned}$$

el último término se omite porque la variedad ambiente es \mathbb{R}^{n+1} y los símbolos de Christoffel se anulan con la métrica euclidiana. □

Lema 2.1.3. La evolución de la métrica g_{ij} obedece

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2H A_{ij} \quad (2.13)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} &= \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial x^j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial(H\hat{\mathbf{n}})}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial(H\hat{\mathbf{n}})}{\partial x^j} \right\rangle \end{aligned}$$

2.1. FLUJO DE CURVATURA MEDIA (FCM)

$$\begin{aligned}
&= H \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle + \frac{\partial H}{\partial x^j} \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle + H \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial x^j} \right\rangle + \frac{\partial H}{\partial x^j} \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle \\
&= H \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle - \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x^j} \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^j \partial x^i}, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle \right) \\
&= -H \left(\left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^j \partial x^i}, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle \right)
\end{aligned}$$

usando el lema 2.12

$$\begin{aligned}
&= -2H \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x^i}} \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle \\
&= -2H \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x^i}} \frac{\partial X}{\partial x^j} - \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x^i}} \frac{\partial X}{\partial x^j} \right)^\top \right\rangle
\end{aligned}$$

usando (1.7) y (1.8)

$$= -2HA_{ij} \quad \square$$

Lema 2.1.4. El campo unitario $\hat{\mathbf{n}}$ evoluciona de acuerdo a

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial t} = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} \quad (2.14)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial t} &= \sum_{ij} g^{ij} \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial x^i} \right\rangle \frac{\partial X}{\partial x^j} \\
&= - \sum_{ij} g^{ij} \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial x^i} \right\rangle \frac{\partial X}{\partial x^j} \\
&= \sum_{ij} g^{ij} \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial}{\partial x^i} (H \hat{\mathbf{n}}) \right\rangle \frac{\partial X}{\partial x^j} \\
&= \sum_{ij} g^{ij} \left(H \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial x^i} \right\rangle + \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial H}{\partial x^i} \hat{\mathbf{n}} \right\rangle \right) \frac{\partial X}{\partial x^j} \\
&= \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j}
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.1. Sea M^n una hipersuperficie compacta que evoluciona de acuerdo a su FCM, el volumen es una función decreciente.

Demostración. Sea $dV = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ forma de volumen no negativa

$$\frac{\partial}{\partial t} dV = \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}} \frac{\partial}{\partial t} \det(g_{ij}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

usando la fórmula de Jacobi: $\partial_t \det(B_{ij}) = \text{Tr}(\text{adj}(B_{ij}) \partial_t B_{ij})$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\det g_{ij}} \text{Tr} \left(g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

tomando la evolución de g_{ij} de la ec. (2.13)

$$\begin{aligned} &= -\sqrt{\det g_{ij}} H \text{Tr} (g^{ij} A_{kl}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= -\sqrt{\det g_{ij}} H \sum_{i,j} g^{ij} A_{ij} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

usando (1.12)

$$= -H^2 \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (2.15)$$

de manera que si $\text{vol}(M) = \int_M dV$

$$\frac{\partial \text{Vol}}{\partial t} = - \int_M H^2 dV < 0 \quad (2.16)$$

□

2.2. Existencia y Unicidad de Soluciones del FCM

En la literatura se destacan dos maneras de probar la existencia y unicidad del FCM a tiempo pequeño, a saber: a través del *truco de DeTurck*², también utilizado para probar existencia y unicidad para el *Flujo de Ricci*³, y a través de representar la evolución de la superficie en una vecindad como una gráfica sobre la superficie inicial. En este trabajo se utiliza esta última porque requiere de argumentos más directos; sin embargo, en ambas el problema se reduce a probar

²Este procedimiento consiste esencialmente en dos pasos: (1) Proponer una ecuación diferencial parcial para la cual se puede determinar la existencia y unicidad en la solución, y (2) en su modificación para redicirla a la ecuación de flujo (ver [43], [7] y [48]).

³El Flujo de Ricci es otro flujo geométrico que consiste en la evolución de una variedad (suave y cerrada) a través de modificar la métrica (ver [43]).

2.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DEL FCM

la existencia de soluciones para una ecuación parabólica cuasilineal obtenida a partir de la composición de la inmersión con una familia de difeomorfismos, los detalles se desarrollan en esta sección.

Antes probar la existencia y unicidad, se reescribirá la ecuación de FCM en términos del laplaciano y se probarán algunos lemas siguiendo la prueba de Mantegazza [27] y Polden [14].

Lema 2.2.1. Sea $g(t)$ la métrica inducida sobre $X(M, t)$, la ecuación de flujo de curvatura media (ec. 2.1) se puede reescribir como

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \Delta_{g(t)} X \quad (2.17)$$

Demostración. Escribimos en coordenadas locales el término de la derecha en la ec. (2.1)

$$H(x, t) \hat{\mathbf{n}}(x, t) = \sum_{ij} g^{ij}(t) A_{ij}(t) \hat{\mathbf{n}}(t)$$

usando la ec. (1.7) y obviando la dependencia en t

$$\begin{aligned} &= \sum_{ij} g^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x^i}} \frac{\partial X}{\partial x^j}, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle \hat{\mathbf{n}} \\ &= \sum_{ij} g^{ij} \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x^i}} \frac{\partial X}{\partial x^j} - \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x^j}} \frac{\partial X}{\partial x^i} \right)^\top \right) \end{aligned}$$

tomando componentes

$$\begin{aligned} H \hat{\mathbf{n}}^\alpha &= \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k,l,\beta} g^{kl} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^l} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{i,j} g^{ij} \sum_{k,l,\beta} g^{kl} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^l} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \\ &= \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{i,j} g^{ij} \sum_{k,l,\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^k} g^{kl} \left(\frac{\partial X^\beta}{\partial x^l} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^i \partial x^l} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^i \partial x^l} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^j \partial x^l} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^j \partial x^l} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}{}^\alpha - \sum_{i,j} g^{ij} \sum_{k,l} \frac{\partial X}{\partial x^k}{}^\alpha g^{kl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^j}, \frac{\partial X}{\partial x^l} \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x^j} \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^l} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x^l} \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle \right) \\
&= \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}{}^\alpha - \sum_{i,j} g^{ij} \sum_k \frac{\partial X}{\partial x^k}{}^\alpha \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \\
&= \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}{}^\alpha - \sum_{i,j} g^{ij} \sum_k \frac{\partial X}{\partial x^k}{}^\alpha \Gamma_{ij}^k
\end{aligned}$$

usando la ec. (1.5) se completa la demostración. \square

El siguiente lema (lema 2.2.2) nos dice que el FCM es invariante bajo reparametrizaciones de M , es decir difeomorfismos tangenciales, y su importancia en la prueba de existencia y unicidad de soluciones consiste en asegurar que si existe solución, la composición de ésta con un difeomorfismo φ también es solución.

Lema 2.2.2. Sean M^n subvariedad compacta de \mathbb{R}^{n+1} , \mathbf{g} su métrica inducida y $\tilde{X} : M \times [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión que satisface

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}(\mathbf{p}, t) &= \Delta_{\mathbf{g}} \tilde{X}(\mathbf{p}, t) + F(\mathbf{p}, t) \\
\tilde{X}(\cdot, 0) &= \tilde{X}_0(\cdot)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

con $F(\mathbf{p}, t)$ un elemento de $dX|_{(\mathbf{p}, t)}(T_{\mathbf{p}}M)$, entonces existe φ una familia de difeomorfismos de M tal que $\tilde{X}(\varphi(\mathbf{p}, t), t)$ es solución al FCM. Y a su vez, dada una inmersión $X : M \times [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y una reparametrización φ para la cual la composición $X \circ \varphi$ satisface la ec. de FCM, entonces existe un campo $F(\mathbf{p}, t)$ en $dX|_{(\mathbf{p}, t)}(T_{\mathbf{p}}M)$ tal que se satisface (2.18)

Demostración. Siguiendo [27, p. 8], definimos $V(\mathbf{p}, t) := \left(d\tilde{X}\right)^{-1} F(\mathbf{p}, t)$ y construimos una familia de difeomorfismos φ via

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -V(\mathbf{p}, t) \\
\varphi(\cdot, 0) &= \text{id}(\cdot)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

2.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DEL FCM

como la variedad es compacta, el sistema (2.19) tiene solución única; y la métrica $\tilde{g}(t)$ asociada a la imagen de $X \circ \varphi$ es

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) &= \varphi^*(g) \\ &= g(d\varphi|_{(\mathbf{p},t)}(\cdot), d\varphi|_{(\mathbf{p},t)}(\cdot))\end{aligned}\tag{2.20}$$

como \tilde{X} es solución a (2.18), veamos que $\tilde{X} \circ \varphi = \tilde{X}(\varphi(\mathbf{p}, t), t)$ es solución al FCM:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{X} \circ \varphi)(\mathbf{p}, t) &= \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}|_{(\varphi(\mathbf{p},t),t)} + d\tilde{X}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}|_{(\varphi(\mathbf{p},t),t)} + d\tilde{X}(-V) \\ &= \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}|_{(\varphi(\mathbf{p},t),t)} - d\tilde{X}(d\tilde{X})^{-1}F(\mathbf{p}, t) \\ &= \Delta_{\tilde{g}}(\tilde{X} \circ \varphi)(\mathbf{p}, t) + \mathcal{F} - \mathcal{F}\end{aligned}$$

Por otra parte, si $\varphi(x, t)$ es una familia de difeomorfismos, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(X \circ \varphi)(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial X}{\partial t}|_{(\varphi(\mathbf{p},t),t)} + dX|_{(\varphi(\mathbf{p},t),t)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{p}, t)\right)\tag{2.21}$$

sea g la métrica asociada a φ , como $X \circ \varphi$ satisface la ecuación de FCM:

$$\frac{\partial}{\partial t}(X \circ \varphi)(\mathbf{p}, t) = \Delta_g X(\varphi(\mathbf{p}, t), t)\tag{2.22}$$

restando (2.21) de (2.22), y si $\mathbf{q} := \varphi(\mathbf{p}, t)$

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\mathbf{q}, t) = \Delta_g X(\mathbf{q}, t) - dX|_{(\mathbf{q},t)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\varphi_t^{-1}\mathbf{q}, t)\right)\tag{2.23}$$

por tanto para $F(\mathbf{q}, t) := -dX|_{(\mathbf{q},t)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\varphi_t^{-1}\mathbf{q}, t)\right)$ se satisface (2.18). \square

Observación 2.2.1. Si X satisface la ecuación de FCM y φ es un difeomorfismo que reparametriza $X(M, t)$, la ec. (2.23) del lema 2.2.2 indica que la composición de X con φ sólo tuvo efecto en la parte tangencial de la evolución ya que se produjo como término extra en la ecuación dinámica (ec. 2.23) un campo F en $dX|_{(\mathbf{p},t)}(T_{\mathbf{p}}M)$, sin embargo la componente normal de $\frac{\partial X}{\partial t}$ no sufrió cambios, es decir corresponde a la curvatura media $H(\varphi(p, t), t)\hat{\mathbf{n}}(\varphi(p, t), t)$.

Los siguientes lemas, basados en los propuestos por [27] y [40, 41], se utilizan para construir el difeomorfismo φ y analizar la evolución al acoplarlo en la ecuación (2.1). El difeomorfismo que se propone permite ver a la imagen de $X(M, \tau_\epsilon)$ como gráfica de una función Ψ para alguna τ_ϵ suficientemente pequeña. Para esto veamos que existe una vecindad de $X_0(M)$ en la cual quedan contenidas las deformaciones de M bajo el FCM durante un tiempo corto.

Lema 2.2.3. Sea M^n una variedad compacta, X_0 una inmersión de M en \mathbb{R}^{n+1} en cuya imagen $X_0(M)$ existe un campo normal suave $\hat{\mathbf{n}}$, entonces existe una vecindad \mathcal{U} de $X_0(M)$ en \mathbb{R}^{n+1} definida por

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \text{dist}(\mathbf{x}, X_0(M)) \leq \epsilon\}$$

la cual es la imagen bajo un difeomorfismo E

$$\begin{aligned} E : \mathcal{V} \subset (TM)^\perp &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ E(\mathbf{x}, \nu) &= \mathbf{x} + \nu \end{aligned}$$

definido sobre $\mathcal{V} = \{(\mathbf{x}, \nu) \in (TX_0(M))^\perp \mid \|\nu\| < \delta(x)\}$ para alguna función continua $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$. Al conjunto \mathcal{U} se le llama *vecindad tubular* de M [24].

Demostración. Sea \mathbf{p} en M , se puede encontrar $\mathcal{A}_{\mathbf{p}} \subset M$ una vecindad abierta en ese punto para la cual

$$\mathcal{U}_{\mathbf{p}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \text{dist}(\mathbf{x}, X_0(\mathcal{A}_{\mathbf{p}})) \leq \epsilon_{\mathbf{p}}\}$$

es la imagen del difeomorfismo $\Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, s\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} + s\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ con \mathbf{x} en $X_0(\mathcal{A}_{\mathbf{p}})$ y $s \in [-\epsilon_{\mathbf{p}}, \epsilon_{\mathbf{p}}]$. Como M es compacta y $M = \cup_{\mathbf{p} \in M} \mathcal{A}_{\mathbf{p}}$ podemos encontrar una subcobertura finita, es decir $M = \cup_{i=1}^k \mathcal{A}_i$ y de forma análoga encontrar los respectivos ϵ_i , \mathcal{U}_i y Φ_i .

Sea $\{\zeta_i \in \mathfrak{F}(\mathcal{A}_i) \mid i \in [1, k]\}$ una partición de la unidad [31] sobre M , es decir funciones suaves en M que satisfacen:

- $0 \leq \zeta_i \leq 1$
- $\text{supp } \zeta_i$ es localmente finito
- $\sum_{i=1}^k \zeta_i = 1$

2.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DEL FCM

Sea $\epsilon = \min\{\frac{\epsilon_i}{2} \mid i \in [1, k]\}$ entonces el conjunto \mathcal{U} es la imagen de E definido por

$$E : X_0(M) \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$E(\mathbf{x}, s) = \sum_{i=1}^k \zeta_i(\mathbf{x}) \Phi_i(\mathbf{x}, s) \quad \square$$

Sea M , X_0 y \mathcal{U} como en el lema 2.2.3, si M evoluciona por FCM a través de una inmersión X tal que $X(M, t) \subset \mathcal{U}$ para todo t en $[0, \tau_\epsilon)$ entonces las deformaciones de $X(M, t)$ pueden parametrizarse en este intervalo por

$$X(\mathbf{p}, t) = X_0(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p}, t)\hat{\mathbf{n}}_0 \quad (2.24)$$

para τ_ϵ suficientemente pequeña, $\hat{\mathbf{n}}_0$ campo normal a $X_0(M)$ y f una función suave.

Observación 2.2.2. Sean X y f como en la ec. (2.24) se tiene $f(\mathbf{p}, 0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p}, 0) = 0$ ya que $X(\cdot, 0) = X_0(\cdot)$ y $\frac{\partial X}{\partial x^i} \in T_{\mathbf{p}}X(M, t)$.

Observación 2.2.3. La dependencia temporal de X en (2.24) está determinada únicamente a través de la función f , de manera que

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}}_0$$

El siguiente lema describe de forma explícita la evolución de f .

Lema 2.2.4. Sea $\partial_i f := \frac{\partial f}{\partial x^i}$ y $A_{ij}(0)$ la segunda forma fundamental de $X_0(M)$, si M evoluciona por FCM y $X(M, t)$ se puede reparametrizar como en la ec. (2.24) entonces la evolución de f satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \Delta f + \left\langle \hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle^{-1} \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^i \partial x^j} - (\partial_j f) \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk} \frac{\partial X_0}{\partial x^k} \right. \right. \\ & \left. \left. - (\partial_i f) \sum_{r,s} A_{js}(0) g^{rs} \frac{\partial X_0}{\partial x^s} + f \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{n}}_0}{\partial x^i \partial x^j} \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Demostración. Las expresiones que toma g_{ij} , $\hat{\mathbf{n}}$ y H para la hipersuperficie propuesta (ec. 2.24) se obtienen a continuación.

Usando la ec. (2.10) del lema 2.1.1 se calculan los vectores tangentes

$$\frac{\partial X}{\partial x^i} = \frac{\partial X_0}{\partial x^i} + (\partial_i f) \hat{\mathbf{n}}_0 - f \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk}(0) \frac{\partial X_0}{\partial x^k} \quad (2.26)$$

donde $g^{lk}(0)$ son las componentes de la métrica en $X_0(M)$ además se utilizaron las ecuaciones (1.8) y (1.10). Usando la ec. 1.2 se calcula las componentes de la métrica a partir de la métrica \mathbf{g}_0 de $X_0(M)$

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathbf{g}_0 \left(\frac{\partial X_0}{\partial x^i} + (\partial_i f) \hat{\mathbf{n}}_0 - f \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk}(0) \frac{\partial X_0}{\partial x^k}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial X_0}{\partial x^j} + (\partial_j f) \hat{\mathbf{n}}_0 - f \sum_{r,s} A_{jr}(0) g^{rs}(0) \frac{\partial X_0}{\partial x^s} \right) \\ &= \mathbf{g}_0 \left(\frac{\partial X_0}{\partial x^i}, \frac{\partial X_0}{\partial x^j} \right) + (\partial_j f) \cancel{\mathbf{g}_0 \left(\frac{\partial X_0}{\partial x^i}, \hat{\mathbf{n}}_0 \right)} \\ &\quad - f \sum_{r,s} A_{jr}(0) g^{rs}(0) \mathbf{g}_0 \left(\frac{\partial X_0}{\partial x^i}, \frac{\partial X_0}{\partial x^s} \right) + (\partial_i f) \cancel{\mathbf{g}_0 \left(\hat{\mathbf{n}}_0, \frac{\partial X_0}{\partial x^j} \right)} \\ &\quad + (\partial_i f) (\partial_j f) \mathbf{g}_0 (\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{n}}_0) - f (\partial_i f) \sum_{r,s} A_{jr}(0) g^{rs}(0) \cancel{\mathbf{g}_0 \left(\hat{\mathbf{n}}_0, \frac{\partial X_0}{\partial x^s} \right)} \\ &\quad - f \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk}(0) \mathbf{g}_0 \left(\frac{\partial X_0}{\partial x^k}, \frac{\partial X_0}{\partial x^j} \right) - f (\partial_j f) \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk}(0) \cancel{\mathbf{g}_0 \left(\frac{\partial X_0}{\partial x^k}, \hat{\mathbf{n}}_0 \right)} \\ &\quad + f^2 \sum_{l,k} \sum_{r,s} A_{il}(0) A_{jr}(0) g^{lk}(0) \mathbf{g}_0 \left(\frac{\partial X_0}{\partial x^k}, \frac{\partial X_0}{\partial x^s} \right) g^{rs}(0) \\ &= g_{ij}(0) - f \sum_{r,s} A_{jr}(0) g^{rs}(0) g_{is}(0) + (\partial_i f) (\partial_j f) - f \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk}(0) g_{kj}(0) \\ &\quad + f^2 \sum_{l,k} \sum_{r,s} A_{il}(0) A_{jr}(0) g^{lk}(0) g_{ks}(0) g^{rs}(0) \\ &= g_{ij}(0) - f A_{ji}(0) + (\partial_i f) (\partial_j f) - f A_{ij}(0) + f^2 \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk}(0) A_{jk}(0) \\ &= g_{ij}(0) - 2f A_{ji}(0) + (\partial_i f) (\partial_j f) + f^2 \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk}(0) A_{jk}(0) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Se construye un vector normal a $X(M, t)$ si para cada punto \mathbf{p} en $X_0(M)$ consideramos la curva $\gamma(t) = X(\mathbf{p}, t)$ y trasladamos el vector $\hat{\mathbf{n}}_0(\mathbf{p})$ a lo largo de

2.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DEL FCM

γ ; para t suficientemente pequeño $\hat{\mathbf{n}}_0$ es linealmente independiente de la base de vectores tangentes $\frac{\partial X}{\partial x^i}$, de manera que a partir de él construimos un elemento en $(T_{\gamma(t)}X(M, t))^\perp$ restando su componente tangencial

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_0 - \sum_{ij} \left\langle \hat{\mathbf{n}}_0, \frac{\partial X}{\partial x^i} \right\rangle g^{ij} \frac{\partial X}{\partial x^j}\|} \left(\hat{\mathbf{n}}_0 - \sum_{ij} \left\langle \hat{\mathbf{n}}_0, \frac{\partial X}{\partial x^i} \right\rangle g^{ij} \frac{\partial X}{\partial x^j} \right)$$

usando la ec. (2.26)

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{n}}_0 - \sum_{i,j} (\partial_i f) g^{ij} \frac{\partial X}{\partial x^j}}{\|\hat{\mathbf{n}}_0 - \sum_{i,j} (\partial_i f) g^{ij} \frac{\partial X}{\partial x^j}\|} \quad (2.28)$$

Por otra parte para A_{ij} usamos la ec. (1.7), (2.26) y el lema (2.1.2)

$$\begin{aligned} A_{ij}(t) &= \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle = \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial X}{\partial x^j} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^i \partial x^j} + (\partial_i \partial_j f) \hat{\mathbf{n}}_0 + (\partial_j f) \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_0}{\partial x^i} + (\partial_i f) \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_0}{\partial x^j} + f \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{n}}_0}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^i \partial x^j} + (\partial_i \partial_j f) \hat{\mathbf{n}}_0 - (\partial_j f) \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk} \frac{\partial X_0}{\partial x^k} \right. \\ &\quad \left. - (\partial_i f) \sum_{r,s} A_{js}(0) g^{rs} \frac{\partial X_0}{\partial x^s} + f \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{n}}_0}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por hipótesis M evoluciona por FCM, de manera que $\frac{\partial X}{\partial t} = H \hat{\mathbf{n}} = \sum_{ij} g^{ij} A_{ij}$. También se satisface la ecuación de FCM para la reparametrización $X_0 + f(\mathbf{p}, t) \hat{\mathbf{n}}_0$ por tanto, de acuerdo con el lema 2.2.2 y el comentario 2.2.1, la componente normal de la evolución de $X_0 + f(\mathbf{p}, t) \hat{\mathbf{n}}_0$ satisface la igualdad

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (X_0 + f(\mathbf{p}, t) \hat{\mathbf{n}}_0), \hat{\mathbf{n}} \right\rangle &= \left\langle H \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} \left\langle \hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle &= \sum_{i,j} g^{ij} A_{ij} \end{aligned}$$

resolviendo para $\frac{\partial f}{\partial t}$ y sustituyendo (2.29)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left\langle \hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle^{-1} \sum_{i,j} g^{ij} A_{ij}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle^{-1} \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^i \partial x^j} + (\partial_i \partial_j f) \left\langle \hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\partial_j f) \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk} \frac{\partial X_0}{\partial x^k} - (\partial_i f) \sum_{r,s} A_{js}(0) g^{rs} \frac{\partial X_0}{\partial x^s} + f \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{n}}_0}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \right\} \\
&= \Delta f + \left\langle \hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{n}} \right\rangle^{-1} \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \left\langle \hat{\mathbf{n}}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^i \partial x^j} - (\partial_j f) \sum_{l,k} A_{il}(0) g^{lk} \frac{\partial X_0}{\partial x^k} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\partial_i f) \sum_{r,s} A_{js}(0) g^{rs} \frac{\partial X_0}{\partial x^s} + f \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{n}}_0}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \right\}
\end{aligned}$$

□

Observación 2.2.4. Por construcción, la reparametrización $X(\mathbf{p}, t) = X_0(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p}, t)\hat{\mathbf{n}}_0(\mathbf{p})$ sólo es válida para tiempo corto, a través de esta misma suposición se espera que $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_0$ no difieran demasiado ya que las deformaciones de $X_0(M)$ están contenidas en la vecindad tubular donde es válida la reparametrización, esto hace que $\langle \hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{n}} \rangle \neq 0$.

Observación 2.2.5. De acuerdo con la observación 2.2.2, $f = \partial_i f = 0$ si $t = 0$, además como el intervalo $[0, \tau_\epsilon)$ (donde es válida la reparametrización de $X(M, t)$) es pequeño, se espera que $f(\cdot, t)$ y $\partial_i f(\cdot, t)$ también tomen valores cercanos a cero y como $\frac{\partial X}{\partial x^i}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ son campos suaves, el segundo término de la ec. (2.25) pueda representarse como una función suave $F(\mathbf{p}, f, \text{grad} f) \in \mathfrak{F}(X(M, t))$. En consecuencia, la existencia y unicidad de soluciones al problema de FCM a tiempo corto requiere resolver el problema

$$(\mathbf{EDP}) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta_{g(t)} f + F(\mathbf{p}, f, \text{grad} f) \\ f(\mathbf{p}, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Un primer análisis del sistema **(EDP)** consiste en identificarlo de acuerdo a la siguiente definición [22]

Definición 2.2.1. Sea \mathcal{L} un operador diferencial de segundo orden definido en $M \times [0, \tau)$, actuando sobre una función $u \in \mathfrak{F}(M \times [0, \tau))$ y cuya expresión en coordenadas sea

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j} Q^{ij}(\mathbf{p}, t, u, \text{grad} u) \partial_i \partial_j u - b(\mathbf{p}, t, u, \text{grad} u) \quad (2.31)$$

2.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DEL FCM

se llama *parabólico cuasi-lineal*⁴ si existen constantes λ y μ positivas tales que

$$\lambda|\chi|^2 \leq \sum_{i,j}^n Q^{ij} \chi_i \chi_j \leq \mu|\chi|^2$$

para $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ vector en \mathbb{R}^n arbitrario.

Observación 2.2.6. Comparando (2.31) con (2.30) vemos que $Q^{ij} = g^{ij}(t)$. Al tratarse de una métrica $g^{ij}(t)$ es positiva definida y no degenerada, además las entradas están acotadas, como lo sugiere la ec. (2.27) ya que g^{ij} , f y $A_{ij}(0)$ (para $1 \leq i, j \leq n$) lo son, la diferenciabilidad de f respecto x^i también está garantizada porque la ec. (2.24) es un difeomorfismo. Por tanto el operador asociado al sistema **EDP** es parabólico cuasi-lineal.

Debido a las aplicaciones del FCM que motivan este trabajo (capítulo 3), el resto de la prueba de existencia y unicidad de soluciones se concentra en el caso de curvas planas cerradas y se apoya en la demostración en [6], sin embargo la prueba en general (ver [28]) consta de los mismos pasos: considerar una linealización de la ec. (2.30) y garantizar su solución, determinar que la solución existe a partir de la invertibilidad de un operador entre espacios de funciones.

Para curvas planas cerradas, se puede suponer $M = \mathbb{S}^1$, la inmersión (2.24) ahora toma la forma

$$\gamma(\mathbf{s}, t) = \gamma_0(\mathbf{s}) + f(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \hat{\mathbf{n}}_0(\mathbf{s}) \quad (2.32)$$

para $\gamma_0(s)$ curva inicial con curvatura κ_0 y sin pérdida de generalidad podemos suponer a γ_0 parametrizada por longitud de arco. Para la ec. (2.32) la evolución de f se reescribe (ver apéndice A) como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1 - \kappa_0 f}{\sqrt{(1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2}} \kappa(t) \quad (2.33)$$

donde

$$\kappa(t) = \frac{(1 - \kappa_0 f) f'' + 2\kappa_0 (f')^2 + \kappa_0' f f' - 2\kappa_0^2 f + \kappa_0^3 f^2}{((1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2)^{3/2}}$$

y el dato inicial $f(\cdot, 0) = 0$.

⁴El término *cuasi-lineal* se agrega por la dependencia de u y sus derivadas en los coeficientes Q y b en (2.31), si esta dependencia no ocurriera se llamaría únicamente *parabólico*.

Observación 2.2.7. El término a la derecha de la ec. (2.33) depende de los parámetros s, t, f, f' y f'' y si se identifica con una función $P(s, t, f, f', f'')$ entonces puede asociarse a la ec. (2.33) un operador (parabólico cuasi-lineal) $\hat{\mathfrak{L}}_1$ de la forma $\hat{\mathfrak{L}}_1(u) := \partial_t u - P(s, u(s, t), u'(s, t), u''(s, t))$ (actuando sobre una función $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, para $Q := \mathbb{S}^1 \times [0, \tau_\epsilon)$).

En lugar de tratar de resolver directamente la ec. (2.33) consideremos la linealización del operador \mathfrak{L}_1 alrededor de una función u_0 . Para lograr esto es necesario invocar algunas definiciones comunes en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales⁵, a saber, se definen la α -seminorma de Hölder y k, α -norma de Hölder.

Definición 2.2.2. Sea $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ con $Q = M \times [0, \tau)$ acotada y continua, se definen

$$\square \quad \|u\|_{C(\bar{Q})} := \sup_{x \in Q} |u(x)| \quad (\text{norma-supremo})$$

$$\square \quad [u]_\alpha := \sup_{\substack{(x,t), (x_0, t_0) \in Q \\ (x,t) \neq (x_0, t_0)}} \left\{ \frac{|u(x,t) - u(x_0, t_0)|}{(|x-x_0|^2 + |t-t_0|)^{\alpha/2}} \right\} \quad (\alpha\text{-seminorma de Hölder})$$

$$\square \quad \text{Para un entero } k \geq 0 \text{ y } 0 < \alpha < 1 \quad (k, \alpha\text{-norma de Hölder})$$

$$\|u\|_{C^{k+\alpha, \frac{k+\alpha}{2}}(\bar{Q})} := \sum_{i+2j \leq k} \left\| \frac{\partial^{i+2j} u}{\partial x^i \partial t^j} \right\|_{C(\bar{Q})} + \sum_{i+2j=k} \left[\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial t^j} \right]_\alpha$$

donde $C(\bar{Q})$ es el espacio de funciones continuas definidas sobre \bar{Q} (la cerradura de Q) y $C^{k+\alpha, \frac{k+\alpha}{2}}(\bar{Q})$ es el espacio de Banach de funciones continuas en \bar{Q} con derivadas $D_x u, D_x^2 u, \dots, D_x^k u$ y $D_t u$ continuas en \bar{Q} , con k, α -norma de Hölder finita. Denotamos por $\bar{C}^{k+\alpha, \frac{k+\alpha}{2}}(Q)$ a la *completez* del $C^{k+\alpha, \frac{k+\alpha}{2}}(Q)$ respecto la k, α -norma de Hölder, es decir, el espacio de funciones con norma k, α -de Hölder finita en el que todas las sucesiones de Cauchy convergen.

Observación 2.2.8. De acuerdo a la ec. (2.33) si esperamos que f tenga cierta diferenciabilidad que haga sentido al planteamiento del problema, entonces podemos buscar una solución en el espacio $\bar{C}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q})$, es decir asumir k en la definición 2.2.2 con valor al menos 2. Esto implica que el operador \mathfrak{L}_1 mapee funciones $u(x, t)$ en $\bar{C}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(Q)$ a $\bar{C}^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q)$.⁶

⁵Estas definiciones fueron tomadas de [6].

⁶El espacio $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q)$ está formado por las funciones continuas (es decir en C^0) cuya seminorma de Hölder (con exponente α) es finita.

2.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DEL FCM

Sea el operador $\hat{\mathfrak{L}}_0$ la *linealización*⁷ de $\hat{\mathfrak{L}}_1$ alrededor de alguna función u_0 , su expresión puede escribirse como

$$\hat{\mathfrak{L}}_0(u) := \partial_t u - a(x, t)u_{xx} - b(x, t)u_x - c(x, t)u - h(x, t) \quad (2.34)$$

definimos

$$\mathfrak{L}_0(u) := \partial_t u - a(x, t)u_{xx} - b(x, t)u_x - c(x, t)u$$

Siguendo [14] el teorema de continuación afirma que el problema **(PL)** que se propone a partir de $\hat{\mathfrak{L}}_0$ (problema lineal) tiene solución.

Teorema 2.2.1. El problema

$$\text{(PL)} \begin{cases} \mathfrak{L}_0(u) = h & \text{con } h \text{ en } \bar{C}^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}) \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{con } u_0 \text{ en } \bar{C}^{2+\alpha}(M) \end{cases} \quad (2.35)$$

tiene solución en $\bar{C}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q})$, con $Q = M \times [0, \tau_\epsilon]$.

Demostración. La prueba de este teorema así como ciertas hipótesis sobre los coeficientes en \mathfrak{L}_0 y estimados se incluyen en el apéndice B. \square

En términos de operadores el problema (ec. 2.33) puede reescribirse como

$$\hat{\mathfrak{L}}_1(u) = 0$$

para $\hat{\mathfrak{L}}_1(u) := \partial_t u - P(x, u(x, t), u'(x, t), u''(x, t))$ y $u(x, t)$ en

$$\{f(x) \in \bar{C}^{k+\alpha, \frac{k+\alpha}{2}}(\bar{Q}) \mid f(\cdot, 0) = u_0\}$$

Como se mencionó anteriormente, la estrategia para probar la existencia y unicidad de soluciones de (2.33) consiste en garantizar la invertibilidad de un operador que lleva elementos de un espacio \mathcal{X} a un espacio \mathcal{Y} . Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y}

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{u \in \bar{C}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}) \mid u(\cdot, 0) = 0\} \\ \mathcal{Y} &= \bar{C}^{2+\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}) \end{aligned}$$

⁷Esta linealización se realiza a través de la derivada de Fréchet, es decir, los coeficientes a, b, c corresponden a la derivada de Fréchet de $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ respecto ξ_4, ξ_3, ξ_2 , actuando sobre (x, u_0, Du_0, D^2u_0) – los detalles este proceso superan los objetivos de este trabajo, para la descripción formal ver [45, cap. 4.2]–.

Teorema 2.2.2. Sea P como en la observación 2.2.7. Existe $\epsilon > 0$ tal que el problema

$$\begin{cases} \partial_t u = P(s, t, u, u_x, u_{xx}) \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

tiene solución en $\bar{C}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q})$ con $Q = M \times [0, \epsilon]$.

Demostración. Definamos $\mathfrak{L} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ por

$$u \mapsto (u_0, \hat{\mathfrak{L}}_1(u))$$

con $\hat{\mathfrak{L}}_1 = \partial_t u - P(x, t, u_x, u_{xx})$. Por el teorema 2.2.1, el problema

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_{u_0}(w(x, t)) = h(u_0; x, t) \\ w(\cdot, 0) = u_0 \end{cases} \quad (2.36)$$

donde \mathfrak{L}_{u_0} es la linealización de \mathfrak{L}_1 alrededor de u_0 tiene solución en $\bar{C}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q})$, por lo que la sucesión $\{w^t\}$ con $w^t := w(\cdot, t)$ converge a u_0 cuando $t \downarrow 0$. Sea w solución a (2.36); y $a(u_0; x, t)$, $b(u_0; x, t)$, $c(u_0; x, t)$ y $h(u_0; x, t)$ los coeficientes de \mathfrak{L}_{u_0} , $a(w; x, t)$, $b(w; x, t)$, $c(w; x, t)$ y $h(w; x, t)$ los coeficientes de \mathfrak{L}_0 (la linealización de $\hat{\mathfrak{L}}_1$ alrededor de w). Usando (2.36)

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(w) &= (u_0, \partial_t w - P(x, t, w, D_x w)) \\ &= (u_0, h(u_0; x, t) + a(u_0; x, t)u_{xx} + b(u_0; x, t)u_x + c(u_0; x, t)u - P(x, t, w, w_x, w_{xx})) \end{aligned}$$

como \mathfrak{L}_0 coincide con $\hat{\mathfrak{L}}_1$ en w

$$\begin{aligned} &= (u_0, h(u_0)u_{xx} - h(w)w_{xx} + a(u_0)u_x - a(w)w_x \\ &\quad + b(u_0)u - b(w)w + c(u_0)u - c(w)w) \end{aligned}$$

como $w \rightarrow u_0$ cuando $t \downarrow 0$ entonces

$$\mathfrak{L}(w) \rightarrow (u_0, 0) \quad \text{cuando } t \downarrow 0$$

por continuidad, podemos tomar v en una vecindad de $\hat{\mathfrak{L}}_1(u_0)$ para la cual $\hat{\mathfrak{L}}_1(v(x, t)) = 0$ para todo t en $[0, \epsilon]$, con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña. Por el teorema de la función inversa en espacios de Banach (ver Zhang [47, p. 20] o Dieudonne [8, p. 273]), como \mathfrak{L} es un difeomorfismo local, significa que podemos encontrar u^* en \mathcal{X} tal que $\mathfrak{L}(u^*, v) = v$, pero $\mathfrak{L}(u^*) = (u_0, 0)$ si $t \in [0, \epsilon]$; el 0 en la segunda coordenada implica $\partial_t u^* = P(x, t, u^*, u_x^*, u_{xx}^*)$.

□

2.3. Implementación del FCM

El objetivo principal de esta sección es mostrar la implementación numérica del FCM y aunque su contenido tiene mayor relación con el siguiente capítulo, se incluye aquí porque el método numérico utilizado se apoya en conceptos desarrollados en este capítulo, dejando para el próximo algunas modificaciones del FCM y sus aplicaciones además a través de esta implementación se muestran más ejemplos de la evolución de curvas.

Lograr implementar numéricamente el FCM es una necesidad motivada por el desarrollo de sus aplicaciones, por tanto es razonable suponer que se parte de una serie de puntos como datos iniciales en lugar de una curva diferenciable. Con el propósito de ver la dificultad que trae consigo este hecho, usemos el ejemplo 2 de la sección 2.1 para $n = 1$, es decir, buscamos reproducir la evolución de una circunferencia de radio ρ_0 inmersa en \mathbb{R}^2 a través de rastrear los puntos $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_S$ en el tiempo, mediante el mapeo $X(\mathbf{p}_i, t)$. Se puede ver que la longitud del segmento de curva es decreciente⁸, para esto, sea \mathcal{L} como en (1.13) y T , vector tangente unitario

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L} &= \frac{d}{dt} \int_{\xi_0}^{\xi_1} |\gamma'| d\xi \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \xi}, T \right\rangle d\xi \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left(\left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial \xi}, T \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial T}{\partial t} \right\rangle \right) d\xi \end{aligned}$$

donde el último término se anula porque T es unitario y sólo puede tener cambios en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$; usando (2.5)

$$\begin{aligned} &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left(\frac{\partial k}{\partial \xi} \left\langle \hat{\mathbf{n}}, T \right\rangle + k \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial \xi}, T \right\rangle \right) d\xi \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} k \left\langle -k s'(\xi) T, T \right\rangle d\xi \\ &= \int_0^S -k^2 ds \end{aligned} \tag{2.37}$$

⁸Por esta razón, al FCM para $n = 1$ se le llama flujo de acortamiento de curvas.

Este resultado indica que los puntos \mathbf{p}_i se acercan cada vez más, y ya que el número de puntos es constante, al aproximar ciertas cantidades como derivadas o normas con cálculos que involucren distancias entre los puntos, resultan nuevas posiciones con un error asociado, al comienzo puede no ser significativo pero al ser las distancias entre los puntos cada vez más pequeñas, el error se incrementa para las nuevas aproximaciones.

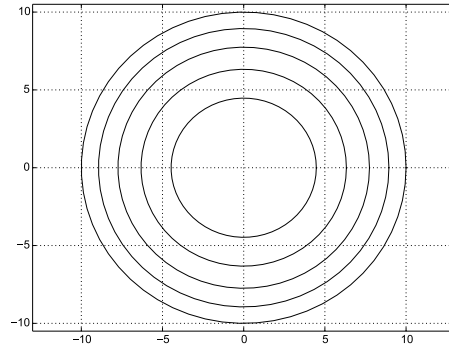
La figura 2.4 muestra comparativamente la solución analítica obtenida a través de la ec. (2.3) y la aproximación numérica, para la cual se supusieron λ intervalos temporales de tamaño Δt y $\mathbf{p}_i^t = \mathbf{p}_i^{\lambda \Delta t} = (x_i^\lambda, y_i^\lambda)$ para una curva $\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ y se reemplazaron por su aproximación discreta (ec. 2.38), éstas aproximaciones se deducen en el apéndice C. Es relevante notar que involucran la resta (por componentes) de las coordenadas de puntos vecinos, y en algunos términos el error repercute aún más, como ocurre en los cocientes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &\approx \left(\frac{x_i^{\lambda+1} - x_i^\lambda}{\Delta t}, \frac{y_i^{\lambda+1} - y_i^\lambda}{\Delta t} \right) \\ \hat{\mathbf{n}}(x_i^\lambda, y_i^\lambda) &\approx \frac{1}{\sqrt{(x_{i+1}^\lambda - x_{i-1}^\lambda)^2 + (y_{i+1}^\lambda - y_{i-1}^\lambda)^2}} (y_{i+1}^\lambda - y_{i-1}^\lambda, x_{i-1}^\lambda - x_{i+1}^\lambda) \\ \kappa(x_i^\lambda, y_i^\lambda) &\approx 4 \frac{(y_{i+1}^\lambda - 2y_i^\lambda + y_{i-1}^\lambda)(x_{i+1}^\lambda - x_{i-1}^\lambda) - (x_{i+1}^\lambda - 2x_i^\lambda + x_{i-1}^\lambda)(y_{i+1}^\lambda - y_{i-1}^\lambda)}{\left((x_{i+1}^\lambda - x_{i-1}^\lambda)^2 + (y_{i+1}^\lambda - y_{i-1}^\lambda)^2 \right)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

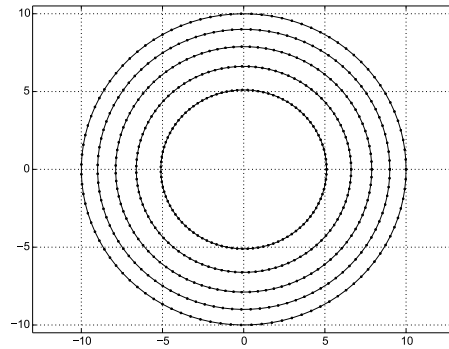
El problema que se ilustra en la figura 2.4 también se presenta en dimensiones mayores ya que los puntos, ahora en una malla en lugar de una curva, también se aproximan cada vez más de acuerdo con la proposición 2.1.1.

Con el propósito de reproducir numéricamente el FCM, Sethian *et al* [5,33,38] propusieron reescribir la variedad en evolución como el conjunto de nivel cero de una función ϕ , y reconstruir el FCM de la hipersuperficie inicial a partir de la dinámica de ϕ . Este método soluciona el problema relacionado con la cercanía y tiene la característica de aumentar la dimensión del problema, lo cual generalmente representa un aumento en el número de cálculos y en el número de variables necesarias para almacenar los datos; esto motivó la búsqueda de otro esquema que permitiera reproducir el FCM para los fines de este trabajo. En lugar de utilizar la representación por conjuntos de nivel, se seguirá el modelo propuesto por Kimura [19,20], el cual también resuelve el problema de la creciente cercanía entre los puntos mediante reparametrizaciones que mantienen igual longitud en todos los segmentos $\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1}}$.

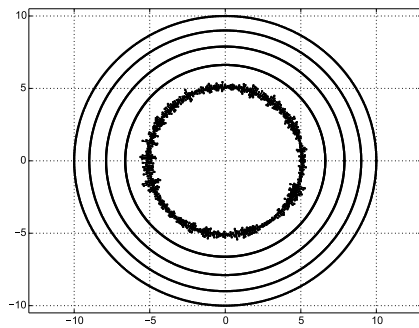
2.3. IMPLEMENTACIÓN DEL FCM



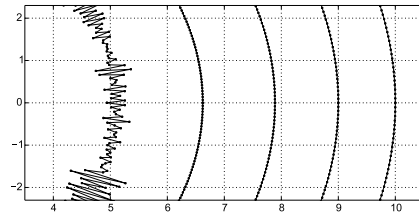
(a) Solución analítica.



(b) Aprox. numérica (100 puntos).



(c) Aprox. numérica (600 puntos).



(c.1) Detalle de (c).

Figura 2.4: FCM para una circunferencia de radio $\rho_0 = 10$: a) solución analítica y aproximaciones numérica con 100 puntos (b) y con 600 puntos (c). La comparación entre (b) y (c) muestra la inestabilidad conforme se reduce la distancia entre los puntos aún para los mismos valores de t (0, 10, 20, 30, 40). La figura (c.1) corresponde a un detalle de (c).

La propuesta de Kimura para reproducir el FCM de una serie de puntos $\{\varphi_{j+1}^k\}_{j=1}^N$ que representan una curva cerrada al tiempo t consiste en estimar la posición de cada punto al tiempo $t + \Delta t$ suponiendo que estas dos curvas $\gamma(t)$, $\gamma(t + \Delta t)$ están suficientemente cerca de manera que existe un campo que lleva φ_i^k a φ_i^{k+1} . La proximidad entre curvas retoma la idea de la sección anterior de trabajar con una vecinda tubular, y esta misma proximidad impone una restricción sobre los desplazamientos en términos de la longitud de la curva al tiempo t .

Sea φ la parametrización por longitud de arco de la curva, denotamos por $\gamma(t)$ al conjunto

$$\gamma(t) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = \varphi(s, t) \text{ para } s \in \mathbb{S}^1 \text{ y } t \in (0, \tau)\} \quad (2.39)$$

y por κ y $\hat{\mathbf{n}}$ a la curvatura y al vector normal a la curva. Además para cada valor fijo de t en $(0, \tau]$ el mapeo

$$\begin{aligned} X_t &: \mathbb{S}^1 \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X_t(s, r) &:= \varphi(s, t) + r\hat{\mathbf{n}}(s, t) \end{aligned}$$

con imagen $N_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(x, \gamma(t)) < \delta\}$ es invertible; es decir existen funciones $s(\mathbf{x}, t)$ y $r(\mathbf{x}, t)$ tales que $(s(\mathbf{x}, t), r(\mathbf{x}, t)) = X_t^{-1}(\mathbf{x})$. De esta manera es suficiente apoyarse en las variables s (relacionada con la longitud de la curva) y r (relacionada con la cercanía entre las curvas) para corregir las posiciones calculadas.

En otras palabras, sea $\{\varphi_j^k\}_{j=1}^N$ el conjunto de N puntos que representan a la curva (simple, suave, cerrada y parametrizada por longitud de arco) al tiempo $k\Delta t$ y $\Delta t := \lambda h^2$ para $h = N^{-1}$ y algún parámetro⁹ λ , denotamos $d_j^k = |\varphi_{j+1}^k - \varphi_j^k|$ a la longitud de cada segmento, y a la longitud total $l_k = \sum_1^n d_i$. La restricción que permite calcular la corrección en las posiciones se basa en asumir que si la longitud de un segmento se contrae (expande) entonces uno de los segmentos vecinos compensa este desplazamiento expandiéndose (contrayéndose).

⁹La única restricción sobre este parámetro λ es $\lambda > 0$, su función es acelerar la evolución cuando el número de puntos es grande (h pequeña) y puede utilizarse también para elegir el número de puntos de manera que Δt no sea muy pequeño (es decir de manera que el flujo no sea “lento”).

2.3. IMPLEMENTACIÓN DEL FCM

Una aproximación al vector tangente en el punto φ_j es $\varphi_{j+1} - \varphi_j$, por tanto si también pedimos que la curva esté parametrizada por longitud de arco (involucrándose la función s) entonces esto reformula el problema en términos de pedir que $|\varphi_{j+1} - \varphi_j|$ sea constante, que en forma equivalente bajo esta aproximación numérica, consiste en pedir que los puntos estén uniformemente distribuidos, es decir repartiendo la longitud l_k entre los N segmentos; la cantidad que estima cuánto debe contraerse o extenderse el vector tangente para que los puntos equidisten es $hl_k - d_j^k$. Si llamamos a_j al desplazamiento del segmento j entonces tenemos las siguientes relaciones que forman un sistema de ecuaciones lineales con variables a_j

$$\begin{aligned} a_{j+1}^k - a_j^k &= b_j^k \\ \sum_{i=1}^n a_i^k &= 0 \end{aligned}$$

con $b_j^k := \frac{hl_k - d_j^k}{\lambda h^2}$. Como el procedimiento consiste en una reparametrización (por longitud de arco) se requiere modificar la ecuación de evolución añadiendo un campo tangente, como lo dice el lema 2.2.2, más aún los coeficientes a_j^k corresponden a la derivada del difeomorfismo que reparametriza (cambios en la rapidez: a_j^k). Para reescribir la ecuación de FCM en su forma discreta se requiere aproximar $\kappa \hat{\mathbf{n}}$ y el vector tangente \mathbf{T} , la aproximación de $\kappa \hat{\mathbf{n}}$ es la aproximación de la derivada (por diferencias) del vector tangente, en [19] se propone

$$\kappa \hat{\mathbf{n}} \approx \mu \frac{2(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_{-1})}{d_1 + d_{-1}} + (1 - \mu) \frac{2(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_{-2})}{d_2 + d_{-2}} \quad (2.40)$$

en donde: ($i = -2, -1, 1, 2$)

$$d_i := |\varphi_{j+i}^k - \varphi_j^k| \quad (2.41)$$

$$\mathbf{T}_i := \text{sign}(i) \frac{\varphi_{j+i}^k - \varphi_j^k}{d_i} \quad (2.42)$$

el parámetro $\mu \in (0, 1)$ se encarga de mediar dos posibles elecciones de derivada del vector tangente a saber, si son muchos puntos, la cercanía entre ellos hace más conveniente aproximar a segundo orden es decir $\varphi_{j\pm 2}^k - \varphi_j^k$. Por otra parte, el campo tangente que se añade por la reparametrización (ec. 2.23) se aproxima por

$$-a_j^k \frac{\mathbf{T}_2 - 4\mathbf{T}_1 - 4\mathbf{T}_{-1} + \mathbf{T}_{-2}}{6} \quad (2.43)$$

en donde $1/6(\mathbf{T}_2 - 4\mathbf{T}_1 - 4\mathbf{T}_{-1} + \mathbf{T}_{-2})$ es una aproximación del vector tangente utilizando cinco puntos, esta expresión puede deducirse de la ecuación C.10 del apéndice C aplicada en ambas coordenadas. Para deducir esta aproximación del vector tangente tomamos la aproximación numérica de la derivada de φ en el punto j

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s_j} &\approx \frac{-\varphi_{j+2} + 8\varphi_{j+1} - 8\varphi_{j-1} + \varphi_{j-2}}{12|\varphi_{j+1} - \varphi_j|} \\ &= \frac{-\varphi_{j+2} + \varphi_j + 8\varphi_{j+1} - 8\varphi_j - 8\varphi_{j-1} + 8\varphi_j + \varphi_{j-2} - \varphi_j}{12|\varphi_{j+1} - \varphi_j|} \end{aligned}$$

utilizando (2.41)

$$= \frac{-d_2\mathbf{T}_2 + 8d_1\mathbf{T}_1 + 8d_{-1}\mathbf{T}_{-1} - d_{-2}\mathbf{T}_{-2}}{12d_1}$$

para puntos distribuidos uniformemente y suficientemente cerca

$$\begin{aligned} &\approx \frac{-2d_1\mathbf{T}_2 + 8d_1\mathbf{T}_1 + 8d_1\mathbf{T}_{-1} - 2d_1\mathbf{T}_{-2}}{12d_1} \\ &= \frac{-\mathbf{T}_2 + 4\mathbf{T}_1 + 4\mathbf{T}_{-1} - \mathbf{T}_{-2}}{6} \end{aligned}$$

expresión de la cual se obtiene la ec. (2.43). La evolución del punto φ_j^k se calcula como:

$$\begin{aligned} \varphi_j^{k+1} = \varphi_j^k + \Delta t \left(\mu \frac{2(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_{-1})}{d_1 + d_{-1}} + (1 - \mu) \frac{2(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_{-2})}{d_2 + d_{-2}} \right. \\ \left. - a_j^k \frac{\mathbf{T}_2 - 4\mathbf{T}_1 - 4\mathbf{T}_{-1} + \mathbf{T}_{-2}}{6} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

La figura 2.5 reproduce correctamente la evolución de una circunferencias y la figura 2.6, de una curva cicloide; el incremento en la variable t se representa por un cambio en el color (de rojo a verde). Los parámetros utilizados en estos ejemplos se incluyen en la tabla 1 del apéndice E

Una vez que se puede garantizar la existencia y unicidad de solución en el FCM y se ha descrito cómo obtener aproximaciones numéricas de éstas, el siguiente capítulo se estudian las aplicaciones del FCM al problema de reconocer objetos en una imagen digital.

2.3. IMPLEMENTACIÓN DEL FCM

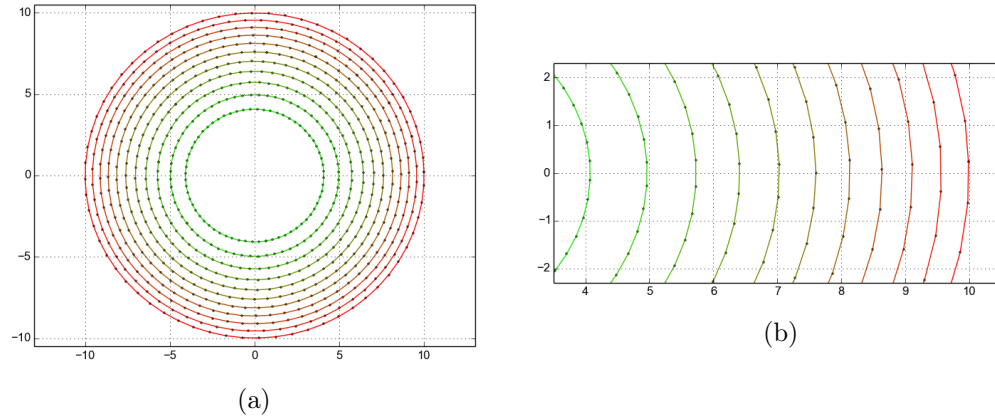


Figura 2.5: Evolución por FCM de una circunferencia (a) y detalle (b) usando (2.44).

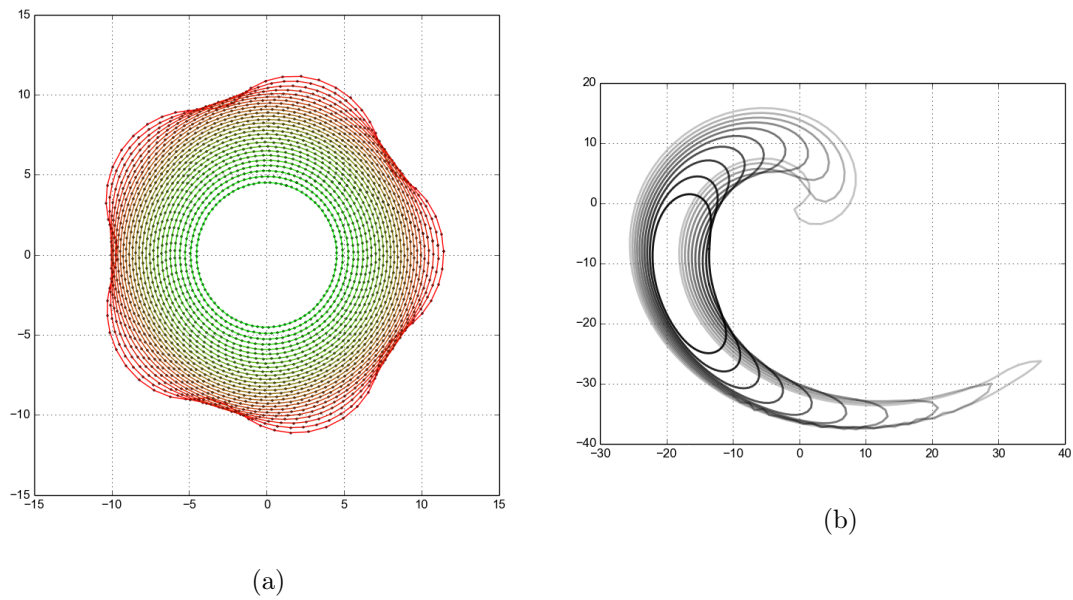


Figura 2.6: Evolución por FCM de una cicloide (a) y un espiral (b) usando (2.44).

Capítulo 3

Geometría Diferencial y Visión por Computadora

En este capítulo se abordan aplicaciones del FCM, en particular el reconocimiento de un objeto en una imagen digital. Este problema se aborda en dos partes, la primera consiste en la utilización de un FCM selectivo o restringido a ciertas regiones de la curva; en la segunda parte se traduce la información de una imagen en propiedades de un objeto geométrico.

3.1. Flujo de curvatura media anisotrópico

La evolución por FCM presentada en el capítulo 2 podría también nombrarse *evolución isotrópica* de FCM en el sentido que cada punto de la hipersuperficie experimenta un desplazamiento normal con rapidez κ , por otra parte si este desplazamiento no afectara por igual a todos los puntos, la evolución se denominaría *anisotrópica*.

Como ejemplo de flujo anisotrópico, imponemos la evolución por FCM sólo a las regiones con curvatura positiva, es decir, en lugar de evolucionar con rapidez κ utilizamos $\max(\kappa, 0)$. La figura 3.1a muestra la evolución por FCM de una curva y la figura 3.1b, el conjunto de curvas que siguen esta dinámica condicionada, en ésta se observa la tendencia a una curva estacionaria ya que cuando $\kappa = 0$, $\max(\kappa, 0) = 0$ y la evolución se detiene.

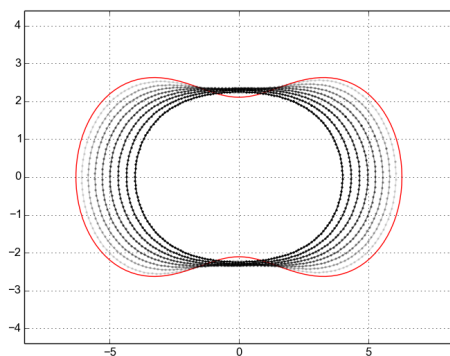
Por el contrario, si proponemos $\min(\kappa, 0)$ entonces las regiones convexas (tomando por convención $\kappa > 0$) evolucionan disminuyendo su curvatura hasta igualar

3.1. FLUJO DE CURVATURA MEDIA ANISOTRÓPICO

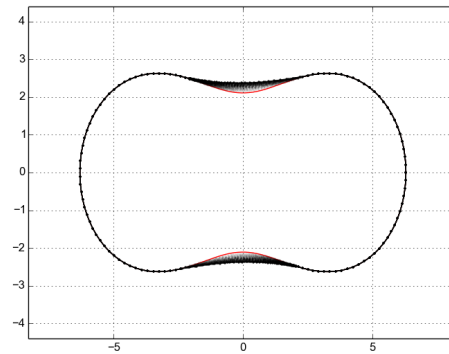
las regiones con curvatura negativa, y después el flujo continua normalmente (ver figura 3.1c). Cuando se elige entre ambos criterios bajo alguna condición adicional suele llamarse a este flujo de curvatura media condicionado *flujo min/max* [26].

Existen otras posibilidades para el flujo de curvatura media anisotrópico por ejemplo $\kappa \cos(\theta)$, con θ la variable angular que parametriza la curva inicial, sin embargo el objetivo de presentar el flujo de curvatura media anisotrópico, y en particular el flujo min/max, es mostrar la posibilidad de utilizarlo como control en la evolución de una curva para aproximarla a una segunda.

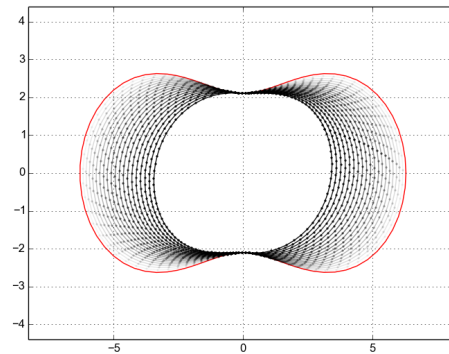
Si la segunda curva es la frontera de una región que representa a un objeto en una imagen entonces puede utilizarse la evolución anisotrópica, de una circunferencia por ejemplo, para aproximar el contorno del objeto. Bastaría dar un criterio para frenar la evolución conforme la curva se aproxime a dicho contorno.



(a) κ



(b) $\max(\kappa, 0)$



(c) $\min(\kappa, 0)$

Figura 3.1: (a) FCM isotrópico y anisotrópico (b y c). En color rojo se muestra la curva inicial (óvalo de Cassini) y en color negro su evolución, el aumento de intensidad representa avance en t .

A partir de aquí existen diversas alternativas para tratar de resolver el problema, cabe señalar que este campo de investigación aún no tiene una solución completa

al problema y en la mayoría de los casos la elección entre procedimientos depende de la información que a priori se conozca del objeto a identificar. Hasta este momento no se harán suposiciones adicionales aunque esto lleve a lidiar con cálculos cuya discretización no sea inmediata.

Como propuesta para hacer el proceso de deformación más controlable consideremos el siguiente problema: Sea γ_0 una curva inicial cerrada, simple y suave cuyo interior se denotará por Ω , asumamos que su evolución depende de la orientación de su vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ respecto un campo vectorial $F := -\text{grad } u$. Además supongamos que la función escalar u es producida por una distribución ρ de cargas puntuales siempre en el interior de $\gamma(t)$, estas cargas serán usadas para atraer o repeler a la curva a ciertas regiones. Este planteamiento permite reescribir el problema en términos de un sistema de ecuaciones parciales, suponiendo que la distribución ρ está dada (más adelante relajaremos esta hipótesis). El sistema de ecuaciones asociado al problema es

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \\ \gamma(0) = \gamma_0 \end{cases} \quad (3.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \rho & \text{en } \Omega \\ u = \beta \kappa & \text{en } \gamma(t) =: \partial \Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

El sistema (3.1) corresponde a la dinámica de la curva bajo $F \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\text{grad } u \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\partial u / \partial \hat{\mathbf{n}}$, mientras que el sistema (3.2) describe al campo debido a u y cuya condición de frontera consiste en pedir que la forma de la curva (las características extrínsecas dadas a través de κ) dependan -linealmente- del valor de la función u en ese punto.

En la sección 2.3 se describió el procedimiento propuesto por Kimura [19] para aproximar el FCM puntualmente, en ese caso el requisito crucial fue calcular los coeficientes para los vectores tangentes que corrigen la aproximación, los cuales se obtienen utilizando una restricción sobre una función definida sobre la curva, a saber la función fue la longitud de la curva y la restricción, compensar desplazamiento (sobre la curva) de cada punto con el desplazamiento de sus vecinos. Esta misma estrategia se intenta seguir para el problema (3.1) y (3.2) en donde la función definida sobre $\partial \Omega = \gamma$ asociada a la restricción se obtendrá a partir de u además de la redistribución de los puntos. Como se muestra en el apéndice D, la fórmula de representación de u sobre $\partial \Omega$ es (ec. D.12)

$$\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\partial \Omega} \left(\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - u \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \, d\mathbf{y} - \frac{1}{2} u(\mathbf{x})$$

3.1. FLUJO DE CURVATURA MEDIA ANISOTRÓPICO

donde

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right)$$

la cual puede reescribirse en términos del problema (3.1) y (3.2) como

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= -\frac{1}{2}\beta\kappa(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &\quad - \beta \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi}{\partial\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\kappa(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $v := -\partial u / \partial \hat{\mathbf{n}}$ es el coeficiente que ahora debe calcularse para aplicar la fórmula de integración $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \Delta t (v\hat{\mathbf{n}} - a^k \mathbf{T})$.

Observación 3.1.1. El lado derecho de la ec. (3.3) involucra funciones conocidas si se tiene información sobre $\partial\Omega$, mientras que el lado izquierdo tiene como incógnita a v . Para obtener una aproximación a la solución de (3.3) es necesario volver al model discreto.¹

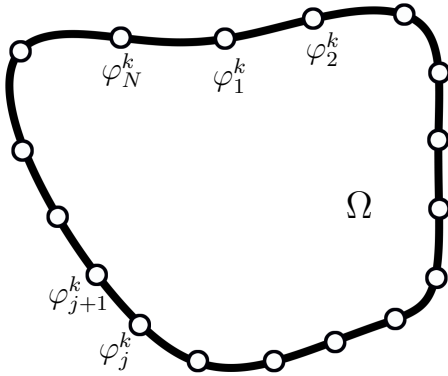


Figura 3.2: Representación de la curva frontera $\partial\Omega$ por N puntos.

Por otra parte las integrales sobre $\partial\Omega$ se pueden dividir de acuerdo a los subintervalos $\overline{\varphi_j^k \varphi_{j+1}^k}$ con $j = 1, \dots, N$ y $(N+1) \sim 1$.

Supongamos que $\gamma(t) = \partial\Omega$ está representada por N puntos $\{\varphi_j^k\}_{j=1}^N$ en \mathbb{R}^2 como se muestra en la figura 3.2. A partir de estos puntos se obtiene una aproximación $\kappa(\varphi_j^k)$ para la curvatura y T_j para el vector tangente unitario usando las ecuaciones (2.40) y (2.41), el vector normal $\hat{\mathbf{n}}_j$ se aproxima calculando el vector ortogonal a T_j , a saber:

$$\hat{\mathbf{n}}_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_j$$

¹Existe una técnica llamada *método de elementos de frontera* [37] utilizado en la solución de ecuaciones similares, aquí se usará esta técnica para resolver la ec. (3.3).

Es necesario utilizar alguna reparametrización en cada segmento $\overline{\varphi_i^k \varphi_{i+1}^k}$ que permita representar a los puntos intermedios y a cualquier función f evaluada en ellos, la manera más simple es una interpolación lineal:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_i(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\varphi_i + \frac{1}{2}(1 + \xi)\varphi_{i+1} \\ f(\mathbf{y}_i(\xi)) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)f(\varphi_i) + \frac{1}{2}(1 + \xi)f(\varphi_{i+1})\end{aligned}$$

con $-1 \leq \xi \leq 1$. Vemos que $\mathbf{y}_i(0) = \varphi_i$ y $\mathbf{y}_i(1) = \varphi_{i+1}$, asimismo también: $|\partial \mathbf{y}_i / \partial \xi| = |\varphi_{i+1} - \varphi_i|/2$.

La función Φ presenta una singularidad cuando $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ por tanto las integrales deben calcularse prestando atención a este hecho, por ejemplo para determinar el valor de $v_j := -\partial u(\varphi_j^k) / \partial \hat{\mathbf{n}}_j$ tenemos que distinguir tres casos a partir de la subdivisión de la curva en N segmentos, a saber: aquellas con límites de integración $\varphi_i^k, \varphi_{i+1}^k$ con $i \neq j \neq i + 1$ (tipo I), con $i = j$ (tipo II), y con $i + 1 = j$ (tipo III).

Con el propósito de aclarar cómo se determinan las v_j 's a partir de estos detalles, se tomará como ejemplo la integral del lado izquierdo en la ec. (3.3) para la cual explícitamente se muestran las expresiones para los tres tipos en el punto φ_j :

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \Phi(\varphi_j - \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \log(|\chi|) \left(\frac{1 - \xi}{2} v_i + \frac{1 + \xi}{2} v_{i+1} \right) \frac{|\varphi_{i+1} - \varphi_i|}{2} d\xi \\ \text{Tipo I} \quad &= -\frac{|\varphi_{i+1} - \varphi_i|}{8\pi} \left\{ v_i \int_{-1}^1 (1 - \xi) \log(|\chi|) d\xi + v_{i+1} \int_{-1}^1 (1 + \xi) \log(|\chi|) d\xi \right\}\end{aligned}$$

$$\text{donde } \chi = \varphi_j - \frac{1 - \xi}{2} \varphi_i - \frac{1 + \xi}{2} \varphi_{i+1}$$

3.1. FLUJO DE CURVATURA MEDIA ANISOTRÓPICO

$$\begin{aligned}
 & \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \Phi(\varphi_j - \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\
 \text{Tipo II} \quad & = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \log \left(\left| \frac{1+\xi}{2} \right| |\varphi_j - \varphi_{j+1}| \right) \left(\frac{1-\xi}{2} v_j + \frac{1+\xi}{2} v_{j+1} \right) \frac{|\varphi_{j+1} - \varphi_j|}{2} d\xi \\
 & = -\frac{|\varphi_{j+1} - \varphi_j|}{8\pi} \{v_j (-3 + 2 \log(|\varphi_j - \varphi_{j+1}|)) + v_{j+1} (-1 + 2 \log(|\varphi_j - \varphi_{j+1}|))\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\varphi_{j-1}}^{\varphi_j} \Phi(\varphi_j - \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\
 \text{Tipo III} \quad & = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \log \left(\left| \frac{1-\xi}{2} \right| |\varphi_j - \varphi_{j-1}| \right) \left(\frac{1-\xi}{2} v_{j-1} + \frac{1+\xi}{2} v_j \right) \frac{|\varphi_j - \varphi_{j-1}|}{2} d\xi \\
 & = -\frac{|\varphi_j - \varphi_{j-1}|}{8\pi} \{v_{j-1} (-1 + 2 \log(|\varphi_j - \varphi_{j-1}|)) + v_j (-3 + 2 \log(|\varphi_j - \varphi_{j-1}|))\}
 \end{aligned}$$

Notemos que las integrales arriba calculadas dependen *linealmente* de las v_i 's y se obtuvieron tomando una φ_j arbitraria, por lo cual al repetir el procedimiento para el resto de los puntos, se obtiene un sistema de N ecuaciones lineales, una vez se calculen las expresiones del lado derecho de la ec. (3.3).²

Observación 3.1.2. La expresión obtenida para las integrales del tipo I requiere calcular dos integrales las cuales deben evaluarse numéricamente ya que los puntos φ_i, φ_{i+1} y φ_j no guardan alguna relación en específico. Este cálculo puede realizarse mediante una fórmula de *cuadratura gaussiana*, esto es una fórmula que aproxima la integral mediante la evaluación de la función en un conjunto de puntos en el intervalo (en este caso $[-1, 1]$) multiplicadas cada una por un peso, la ventaja de estas fórmulas respecto otras más comunes es que la selección de puntos se hace de manera que se minimice el error, ver [21, cap. 3].

Observación 3.1.3. Siguiendo la idea de utilizar cargas puntuales para atraer o repeler a la curva, para la integral que depende de la distribución ρ en ec. (3.3) se

²La integral sobre $\partial\Omega$ en el lado derecho de la ec. (3.3) también se calcula por segmentos utilizando la misma reparametrización, la única diferencia es que todas las expresiones obtenidas no dependen de las incógnitas v_j sino de $\kappa(\varphi_j)$ y los vectores tangentes.

puede proponer una distribución de la forma $\rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{x} - x_i)/|\mathbf{x} - x_i|$, con δ función de Dirac, q_i alguna constante y x_i la posición de las cargas en la distribución.

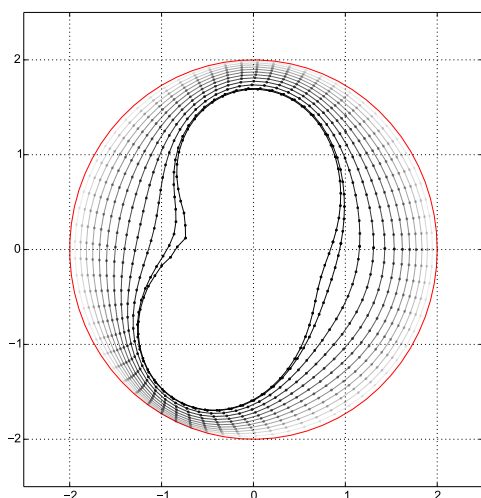


Figura 3.3: Evolución de una circunferencia en presencia de tres cargas.

La figura 3.3 muestra en color rojo una curva inicial y en color negro su evolución cuando se ha colocado una distribución de tres cargas en $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (0, 1)$ y $x_3 = (-1/2, -1)$ y con valores $q_1 = -8.82$, $q_2 = q_3 = 2.1$ de la forma descrita en la observación 3.1.3. Los parámetros y el código para producir este ejemplo se incluyen en el apéndice E.

A partir de aquí, nuevamente podrían tomarse distintos caminos para resolver el problema de reconocer imágenes, por ejemplo a través de resolver el problema inverso del sistema (3.2) es decir, evolucionar la curva hasta que interseccione al objeto $\bar{\Omega}$ y tratar de encontrar la distribución ρ asociada al campo que limita el movimiento de la curva en la región de intersección. Sin embargo aunque el problema inverso de la ecuación de Poisson ya ha sido estudiado y se conocen soluciones numéricas para cargas puntuales (ver por ejemplo [30], [2], [25]) algunos de estos métodos requieren de conocimiento inicial no trivial sobre la distribución, por ejemplo el número de cargas, aproximaciones de las posiciones, etc.

En contraste se utilizará un procedimiento alternativo motivado más por conceptos geométricos y se aprovecharán las ecuaciones de esta sección en donde explícitamente se obtiene el vector velocidad de cada punto en la curva para imponer restricciones directamente sobre este vector. Dejaremos para la siguiente sección la descripción del modelo matemático de los arreglos de píxeles que conforman una imagen, con el cual se plantea la propuesta para reconocer objetos.

3.2. Modelo Geométrico de Imagen Digital

La visión por computadora busca extraer e interpretar información a partir de imágenes, las cuales son representadas digitalmente por un arreglo de píxeles y éstos a su vez, tienen asignado un valor que depende de la intensidad de color de la imagen en ese punto.

Para reconocer un objeto dentro de una imagen a través de cálculos numéricos se busca traducir las propiedades de este arreglo de píxeles a propiedades de alguna estructura matemática, y una de las estructuras que permiten modelar una imagen es un *haz fibrado* o más en específico una *sección* de un haz.

Definición 3.2.1. Sea M un espacio topológico, un *haz fibrado* sobre la base M con fibra F es un espacio E dotado de un mapeo suprayectivo y continuo (proyección) $\pi : E \rightarrow M$ tal que

- (1) Para todo \mathbf{p} en M el conjunto $\{\pi^{-1}(\mathbf{p})\}$ es un homeomorfismo de F .
- (2) Para toda vecindad U de \mathbf{p} existe una variedad N tal que para un isomorfismo $g : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times N$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{g} & U \times N \\ & \searrow \pi & \downarrow \text{Proy}_U \\ & & U \end{array}$$

Definición 3.2.2. Una *sección* de un haz fibrado E es un mapeo $\sigma : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$.

Las definiciones 3.2.1 y 3.2.2 pueden adaptarse a la noción de imagen digital: Si el arreglo de píxeles que representa a la imagen consta de w píxeles de ancho y l píxeles de largo, entonces como $[0, w] \times [0, l] \subset \mathbb{R}^2$ podemos identificar a \mathbb{R}^2 como el espacio base M de la definición 3.2.1. La fibra corresponderá al espacio formado por los posibles valores que puede tomar el pixel el cada punto; para una imagen a blanco y negro, los diferentes tonos de grises pueden identificarse con un número entre 0 y 255 (o equivalentemente entre 0 y 1) de manera que podemos definir la fibra como $[0, 255]$ (o equiv. $[0, 1]$). Por otra parte para una imagen a color tenemos que especificar la intensidad en cada color básico, por ejemplo en RGB tendríamos la fibra $[0, 255] \times [0, 255] \times [0, 255]$ ($[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$). Sin perder generalidad, de aquí en adelante supondremos

que todas las imágenes estarán en tonos de grises.

Suponemos además que existe una función suave $\mathcal{I} : [0, w] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que al evaluarla en las coordenadas \mathbf{p}_i de cada pixel coincide con el valor del pixel en ese punto, entonces una imagen (el arreglo formado por el valor de cada pixel) puede interpretarse como una sección σ del haz fibrado $(\mathbb{R}^2, \pi, \mathbb{R}^2 \times [0, 255])$, es decir

$$\sigma(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathcal{I}(\mathbf{p})) \quad (3.4)$$

Este modelo de imagen digital fue propuesto por T. Georgiev [13] y difiere de otros modelos que tratan a las imágenes como gráficas de una función, estas diferencias se señalarán más adelante, sin embargo en este momento es importante notar que todas las imágenes corresponden a una sección en el mismo haz fibrado E , denotaremos al espacio de todas las secciones (imágenes) por $\mathcal{S}(E)$; además los valores de los pixeles no guardan ninguna correlación, pero al incorporar las herramientas geométricas de esta estructura de haz, es posible comparar el valor de un pixel con el valor de otro cercano definiendo una *conexión* o derivada covariante actuando sobre σ .

Definición 3.2.3. Sean \mathbf{x}, \mathbf{y} puntos en una variedad base M de un haz fibrado E y γ una curva suave sobre M tal que $\gamma(0) = \mathbf{x}$ y $\gamma(1) = \mathbf{y}$, el mapeo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\gamma : \mathcal{S}(E) &\rightarrow \mathcal{S}(E) \\ \mathcal{P}_\gamma(\sigma(\mathbf{y})) &= (\mathbf{x}, \mathcal{I}(\mathbf{y})) \end{aligned}$$

se llama *transporte paralelo* y permite definir la *derivada covariante de la sección* σ respecto el campo $V := \gamma'$ en el punto $\gamma(0)$ como

$$\begin{aligned} \nabla_V \sigma(\gamma(0)) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_\gamma \sigma(\gamma(h)) - \sigma(\gamma(0))}{h} \\ &= \left(\mathbf{x}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(\gamma(h)) - \mathcal{I}(\gamma(0))}{h} \right) \end{aligned}$$

De forma inmediata también se puede tratar el problema de reconocer objetos utilizando la propuesta de la sección anterior de reemplazar las posiciones de puntos que representen una curva hasta llegar a una región $\bar{\Omega}$, a saber: se busca que cada punto frene su avance al llegar a cierta región, esta región se puede identificar a través de la sección $\sigma(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathcal{I}(\mathbf{p}))$ ya que justo en el borde del objeto los valores de \mathcal{I} cambian abruptamente, entonces el frenado

3.2. MODELO GEOMÉTRICO DE IMAGEN DIGITAL

de los puntos puede interpretarse como imponer restricciones a la derivada covariante de σ respecto el campo³ $-\partial u/\partial \hat{\mathbf{n}}$ asociado al flujo de evolución en el tiempo, es decir el vector tangente a la curva $\gamma(s, t)$ con s fijo cuando se tiene un conjunto de cargas cuyo efecto conjunto es atraer (carga negativa) los puntos (por ejemplo una carga negativa colocada en el interior de la curva inicial).

Dicho de otra manera, la sección σ nos permite restringir la dinámica de cada punto, y esta restricción puede verse como evitar que el campo γ_t tome ciertas direcciones, en términos geométricos significa elegir γ_t en un subconjunto de TM donde M es la variedad en la que se encuentra $\gamma(s, t)$, en este caso \mathbb{R}^2 .

Como el problema de reconocer objetos en una imagen ahora se formula en términos de la dinámica de puntos φ_j en una curva sujeta a restricciones (gracias a que la descripción numérica se hizo puntualmente), se pueden utilizar herramientas comunes a mecánica analítica. Desde esta perspectiva identificamos a la restricción con una expresión en términos de coordenadas espaciales (coordenadas de M) ya que esperamos que una región de M sea inaccesible para los puntos φ_j , y diremos que un punto \mathbf{p} llegó a la frontera de esta región si

$$\mathcal{I}(\mathbf{p}) - F_{\max} = 0 \quad (3.5)$$

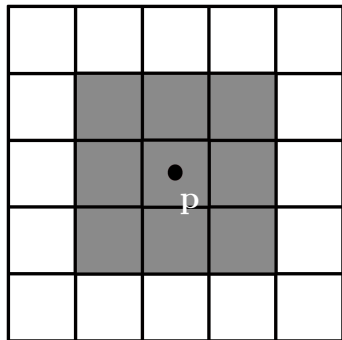


Figura 3.4: Vecindad de radio $\varepsilon_{\text{pix}} = 1$ alrededor del pixel con coordenadas \mathbf{p} .

elección de F_{\max} se obtiene al suponer para un punto \mathbf{p} en $\partial\Omega$ asignamos el promedio $\frac{1}{n} \sum_i \mathcal{I}(\mathbf{p}_i)$ en una vecindad de radio ε_{pix} en lugar de $\mathcal{I}(\cdot)$. La figura 3.4 muestra una vecindad de radio 1 alrededor de un pixel con coordenadas \mathbf{p} .

con \mathcal{I} como en la ec. (3.4) y F_{\max} , un valor máximo o tolerancia entre 0 y 255 que se toma como referencia. En una manera más precisa: la frontera entre el objeto a reconocer y el resto de la imagen generalmente no tiene un borde definido, varios de los pixeles en esta región pueden tomar valores más parecidos a 255/2 (el punto medio del intervalo $[0, 255]$), además la imagen puede tener ruido, es decir algunos pixeles toman valores parecidos al interior de Ω pero no forman parte de Ω . Una buena

³Ver sec. 3.1 ecuación (3.1) y (3.2).

El valor de F_{\max} puede suponerse igual al valor que tomaría el promedio de \mathcal{I} cuando la mitad de pixeles en la vecindad es blanco (255) y el resto negro (0), es decir, justo en un borde ideal.

Cuando en la vecindad hay pixeles de otras intensidades, buscar que los puntos satisfagan la ec. (3.5) se traduce en dar a cada punto una tolerancia que en promedio respete el borde del objeto.

La condición (3.5) resulta difícil de aplicar directamente a los sistemas (3.1), (3.2) y a la fórmula de representación (3.3), ya que estos utilizan el vector velocidad $v\mathbf{n} + a\mathbf{T}$. Para dar solución a este problema se vuelve necesario reformular la restricción espacial en términos de una restricción sobre TM . La herramienta geométrica que permite esta formulación se conoce como *distribución*⁴.

Definición 3.2.4. Sea M una variedad, una *distribución* \mathcal{D} es un mapeo de los puntos \mathbf{p} de M a un subespacio $\mathcal{D}_{\mathbf{p}}$ de $T_{\mathbf{p}}M$.

En general restringir γ_t a un subespacio de TM no es necesario, puede también utilizarse una restricción a un subconjunto de TM : si asociamos las imágenes con la sección σ^*

$$\sigma^*(\mathbf{p}) := (\mathbf{p}, (\mathcal{I}(\mathbf{p}) - F_{\max})^2)$$

e imponemos

$$\nabla_{\gamma_t} \sigma^*(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathcal{S}(\mathbf{p})) \quad \text{con } \mathcal{S}(\mathbf{p}) \leq 0$$

para un objeto Ω representado por pixeles de color negro (pixeles con valor menor a F_{\max}) y el resto de la imagen, por pixeles blancos (pixeles con valor mayor a F_{\max}) entonces, conforme el punto se acerque a la frontera del objeto desde una posición fuera de Ω , la función $(\mathcal{I}(\mathbf{p}) - F_{\max})^2$ disminuye. Si además

$$\frac{\partial}{\partial q} := \gamma_t$$

la restricción anterior puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \nabla f \cdot \gamma_t \leq 0$$

⁴El término *distribución* se utilizó en la sec. 3.1 para referirse a la función ρ que describe al conjunto de cargas puntuales, este uso es común en el área de ecuaciones diferenciales. En el área de geometría este término tiene otra acepción (definición 3.2.4), por lo que resta de este capítulo se utilizará este sentido geométrico y se hará explícita la distinción cuando sea necesario.

3.2. MODELO GEOMÉTRICO DE IMAGEN DIGITAL

con $f(\mathbf{p}) = (\mathcal{I}(\mathbf{p}) - F_{\max})^2$. Las restricciones reciben un nombre dependiendo del tipo de expresión que pueda representarlas, a saber: aquellas que puedan escribirse exclusivamente usando coordenadas espaciales como $\phi(\mathbf{p}_i) = 0$, se denominan *holónomas*; si son restricciones impuestas sobre TM y no pueden llevarse a una forma holónoma, se denominan *no holónomas*; y en general las restricciones que toman la forma de una desigualdad también son llamadas *restricciones no holónomas* [17, p. 19], [10, p. 25].

Los problemas que consisten en encontrar posiciones a partir de ecuaciones dinámicas con o sin restricciones suelen abordarse directamente utilizando el formalismo lagrangiano o hamiltoniano de mecánica analítica. En este caso el modelo de imagen digital permite traducir a lenguaje geométrico (también utilizado en mecánica) el problema de reconocer objetos. Una posibilidad que hubiera podido seguirse es partir de este modelo, plantear las ecuaciones con restricciones y resolverlas, también numéricamente; sin embargo una de las grandes ventajas de utilizar el formalismo mecánico es aprovechar la simetría que presente el problema, por ejemplo para reducir el número de ecuaciones, pero esta característica no puede asumirse para reconocer objetos ya que no tenemos información a priori de la forma o posición de éste.

Lo que se ha hecho hasta este momento es encontrar la solución (numérica) de las ecuaciones dinámicas para el problema no restringido de partículas puntuales “unidas” (los puntos φ_j de la curva en evolución) bajo un potencial formado por cargas puntuales. La solución puntual es $\varphi_j^{k+1} = \varphi_j^k + \Delta t (v_j \hat{\mathbf{n}} + a_j \mathbf{T}_j)$, con v_j obtenida a través de la fórmula de representación y a_j , la corrección que redistribuye los puntos, es decir, puntualmente cada φ_j describe la trayectoria asociada al flujo

$$\dot{\varphi}_j = V$$

con V numéricamente expresado como $v_j \hat{\mathbf{n}} + a_j \mathbf{T}_j$. Si nos limitamos a trabajar en un subespacio de TM entonces incorporar la restricción es sólo proyectar V en este subespacio sólo cuando el punto llegue a la frontera del objeto. Esto puede implementarse numéricamente utilizando un criterio de penalización, a saber: Calculamos φ_j^{k+1} y comparamos con el valor de la sección en φ_j^k , es decir, tomamos la derivada covariante de σ^* respecto V ; si esta derivada es negativa, el punto llegaría a una región accesible, de lo contrario sólo avanzamos en dirección del vector tangente (restringimos el avance al causado sólo por la reparametrización, identificando al subespacio de TM como el espacio generado por \mathbf{T}), es decir,

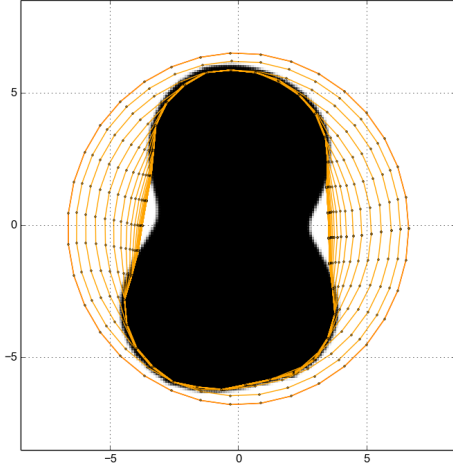


Figura 3.5: Reconocimiento de la región en color negro utilizando una carga en $(0, 0)$ e imponiendo restricciones.

además la derivada de f respecto γ_t es

$$2(\mathcal{I}(\cdot) - F_{\max}) \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \gamma_t} \leq 0 \quad (3.6)$$

El procedimiento busca dos condiciones, la primera: $\mathcal{I}(\varphi_j^{k+1}) \geq F_{\max}$ revisa si la nueva posición se encuentra en una región accesible, la segunda condición por tanto, para satisfacer (3.6), es que el término $\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \gamma_t}$ sea negativo. El proceso de reconocer objetos puede resumirse en los siguientes pasos:

- 1 Inicialización: La curva está representada por un conjunto finito de puntos φ_j^k en cuyo interior se encuentra al menos una carga negativa, dependiendo de la separación entre puntos y el rango de valores entre los que se encuentre la curvatura elegimos μ y λ .
- 2 Calculamos los coeficientes v_j y α_j de acuerdo con la fórmula de representación de la ecuación de Poisson y el esquema de Kimura para el FCM.
- 3 Si cada posición al siguiente tiempo, $\varphi_j^{k+1} = \varphi_j^k + \Delta t(v_j \hat{\mathbf{n}}_j + \alpha_j \hat{\mathbf{T}}_j)$, satisface la ecuación (3.6) entonces reemplazamos φ_j^k por φ_j^{k+1} , en caso contrario reemplazamos por $\varphi_j^k + \Delta t(\alpha_j \hat{\mathbf{T}}_j)$

si la derivada es no negativa, tenemos

$$\varphi_j^{k+1} = \varphi_j^k + a_j \mathbf{T}_j$$

La figura 3.5 muestra la implementación del proceso propuesto para reconocer la región en color negro. En este ejemplo se utilizó una imagen de 150×150 pixeles, un radio $r_{\text{pix}} = 1$, una sola carga $q = -15.1$ en $(0, 0)$. La restricción sobre σ^* se aplicó de la siguiente manera: Como el esquema de Kimura asume que las nuevas posiciones ocurren en una vecindad cercana a la curva inicial, la aproximación de la derivada de \mathcal{I} respecto γ_t es

$$(\mathcal{I}(\varphi_j^{k+1}) - \mathcal{I}(\varphi_j^k)) / \Delta t$$

3.2. MODELO GEOMÉTRICO DE IMAGEN DIGITAL

- 4 Si la sección σ no tiene un valor igual a 0 ó cercano a éste en un porcentaje del número de puntos, iteramos regresando al paso (2).

En la figura 3.5 se observa que el reconocimieto no corresponde región no idéntica al contorno del objeto, la razón de esto es el tipo de potencial que asignamos a la carga: en este caso se utilizó un potencial de la misma forma que el propuesto para la figura 3.3; en éstos, al reducirse la distancia entre el punto y la carga, el avance se vuelve más rápido, es decir, la rapidez de γ_t aumenta, lo cual representa avanzar en cada iteración distancias más grandes, y las regiones de color blanco cercanas al contorno y que no se llegan a cubrir corresponden a regiones en las que para la siguiente iteración se alcanzaría una posición dentro del objeto respecto las tolerancias asignadas como F_{\max} .

En términos generales, la curva en evolución alcanzará una mejor aproximación al contorno que se intente reconocer si la curvatura de éste varía lentamente, es decir, en regiones “grandes” donde la curvatura del contorno no cambie rápidamente; el criterio que permite establecer el tamaño que debe tener la región para que logre ser detectada es la separación entre los puntos φ_j de la curva: entre menor sea la región en relación con la separación entre los puntos, más difícil será detectarla.

Aunque un número grande N de puntos aproximan mejor cualquier contorno, el *tiempo de ejecución* del programa, es decir el tiempo requerido por el programa para concluir el proceso de reconocimiento, también se incrementa con N . La fig. 3.6 muestra la relación entre el tiempo de ejecución promedio para reconocer un disco de radio 5 como imagen mediante la evolución de una circunferencia de radio 10 y el número de puntos N que la representan, con la circunferencia y el disco centrados ambos en el origen; esta relación puede contrastarse con el tiempo de ejecución del programa que evoluciona una circunferencia de radio 10 por su flujo de curvatura media hasta alcanzar un radio igual a 5. En todos

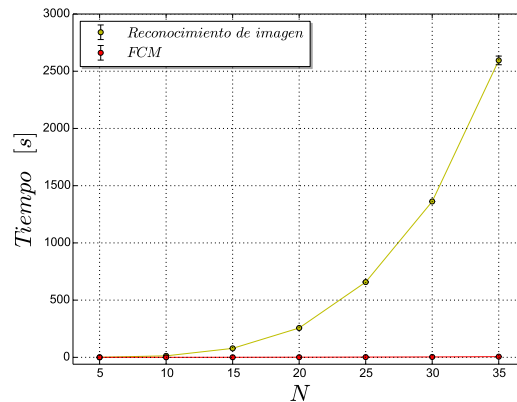


Figura 3.6: Tiempo de ejecución contra número de puntos N para el reconocimiento de una imagen y para la evolución por FCM.

los casos el tiempo de ejecución se realizó utilizando los mismos valores de λ y μ (10 y 0.15, respectivamente) y como criterio de paro la coincidencia de al menos el 95 % de los N puntos con pixeles de color negro. Los intervalos de tiempo promedio que se muestran en la figura 3.6 corresponden sólo a la evolución de la curva es decir, omitiendo la lectura del archivo de imagen y la creación de la gráfica.

3.3. Diferentes modelos de imagen digital

En esta sección se discuten las diferencias entre el modelo de Greorgiev usado anteriormente y el modelo más genérico de imagen digital.

En este segundo modelo el objeto matemático que representa a una imagen es una superficie: si tenemos definida una función suave $\mathcal{I}_2 : [0, w] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que al evaluarla en las coordenadas de cada pixel se obtiene el valor del pixel en ese punto⁵, identificamos a la imagen como la gráfica de la función \mathcal{I}_2 . A diferencia del modelo de Greorgiev, $\mathcal{I}_2 \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$, mientras que \mathcal{I} es una *sección* de un haz fibrado.

Ambos modelos intentan reproducir un hecho conocido: así como el ojo humano distingue más fácilmente un objeto de su entorno entre mayor sea el contraste entre ellos, para reconocer un objeto en una imagen comparamos el valor de intensidad de los pixeles que corresponden al objeto con los valores que corresponden al entorno suponiendo que hay una diferencia apreciable, de manera que el borde del objeto es fácilmente identificable de acuerdo con las propiedades geométricas de \mathcal{I}_2 , ya que al suponer \mathcal{I}_2 continua, basta buscar las regiones de más rápido crecimiento. En la figura 3.7 se ha representado una imagen como gráfica de la función de intensidad \mathcal{I} en forma discreta (a) y en forma continua (b) por interpolación.

El problema de reconocer un objeto se formula directamente de manera variacional: Sea $\gamma_0(r)$ una curva suave cerrada en $[0, w] \times [0, l]$ con $r \in [a, b]$, y sea Ω la región en $[0, w] \times [0, l]$ correspondiente al objeto a identificar, si Ω se encuentra en el interior de γ_0 , se busca evolucionar γ_0 respecto un segundo parámetro t hasta aproximarla *lo mejor posible*⁶ a $\partial\Omega$.

⁵De igual manera se ha supuesto una imagen a blanco y negro de $w \times l$ pixeles.

⁶A esta técnica se le llama *contorno activo*.

3.3. DIFERENTES MODELOS DE IMAGEN DIGITAL

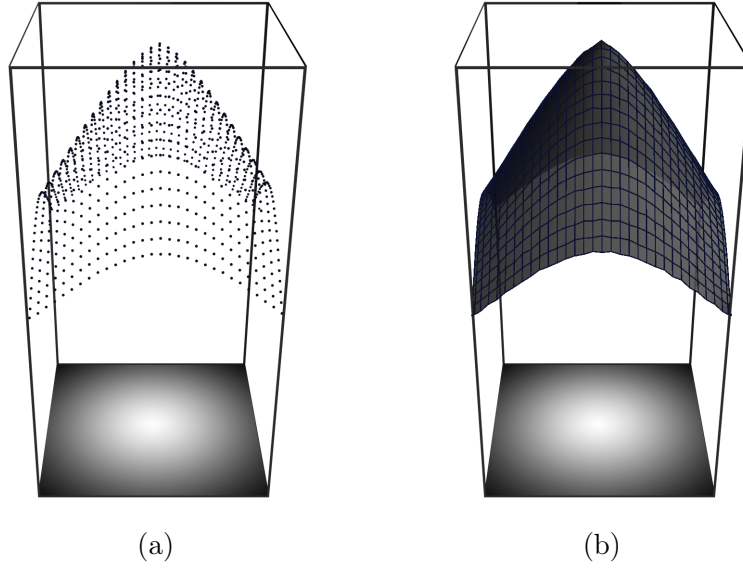


Figura 3.7: Representación de una imagen por una hipersuperficie.

A fin de determinar cuál es la mejor aproximación de $\gamma(r, t)$ a $\partial\Omega$ definimos una función real E a minimizar.

$$E(\gamma(r, t)) = \lambda_1 \int_{\gamma(r, t)} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right|^2 dr + \lambda_2 \int_{\gamma(r, t)} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} \right|^2 dr + \int_{\gamma(r, t)} g(\gamma(r)) dr \quad (3.7)$$

El primer término corresponde a la energía en el sentido variacional (ver sección 1.3), el segundo término depende de la curvatura, y el tercer término involucra a una función $g : [0, w] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ la cual cumple la función de potencial cuyo mínimo se encuentra en $\partial\Omega$. Sin perder de vista que el dominio es discreto, es decir sólo conocemos el valor de \mathcal{I} en los puntos que corresponden a las coordenadas de cada pixel y no en todo $[0, w] \times [0, l]$, la curva inicial γ_0 también es discreta (poligonal); sin embargo como aproximación al caso continuo podría elegirse como curva inicial alguna curva interpolante que pase por los vértices de la curva poligonal y además minimice este segundo término⁷. Por tanto la función a optimizar es

$$E(\gamma(r, t)) = \lambda_1 \int_{\gamma(r, t)} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right|^2 dr + \int_{\gamma(r, t)} g(\gamma(r)) dr$$

⁷Un tipo de curvas que interpolantes satisfacen esta condición son las curvas *spline*.

$$\begin{aligned}
&= \int_{\gamma(r,t)} (\lambda_1 \left| \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right|^2 + g(\gamma(r))) dr \\
&= \int_{\gamma(r,t)} (\lambda \left| \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right|^2 - U(\gamma)) dr \tag{3.8}
\end{aligned}$$

donde $U = -g(\gamma(r))$. A partir de la ec. (3.8) notamos que al definir $L = \lambda \left| \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right|^2 - U(\gamma)$ el problema de minimizar E es un problema variacional que, de acuerdo con el teorema 1.3.4, consiste en resolver la ecuación de Euler-Lagrange y la solución son curvas geodésicas, además sabemos que una curva es geodésica si para cualquier variación propia extremizan el funcional (teorema 1.3.3). Notamos además el primer término de la ec. (3.8) no es cero ya que las curvas con las que se ha trabajado son regulares y más aún este término se aproxima a la longitud del contorno conforme γ y $\partial\Omega$ se aproximen, por esta razón analicemos el último término por separado, esto es:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b \frac{d}{dt} (g(\gamma) |\gamma'|) dr \\
&= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} g(\gamma) \right) |\gamma'| dr + \int_a^b g(\gamma) \left(\frac{d}{dt} |\gamma'| \right) dr \\
&= \int_a^b (\nabla g(\gamma) \cdot \frac{d\gamma}{dt}) |\gamma'| dr + \int_a^b g(\gamma) \left(\tau \cdot \frac{d\gamma'}{dt} \right) dr
\end{aligned}$$

donde τ es un vector tangente unitario a $\gamma(r, t)$ con t fijo. Integrando por partes el segundo término

$$0 = \int_a^b (\nabla g(\gamma) \cdot \frac{d\gamma}{dt}) |\gamma'| dr + g(\gamma) \tau \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial r} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} (g(\gamma) \tau) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} dr$$

y como la curva es cerrada

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b (\nabla g(\gamma) \cdot \frac{d\gamma}{dt}) |\gamma'| dr - \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} (g(\gamma) \tau) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} dr \\
&= \int_a^b (\nabla g(\gamma) \cdot \frac{d\gamma}{dt}) |\gamma'| dr - \int_a^b \left((\nabla g(\gamma) \cdot \gamma') \tau + g(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} \tau \right) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} dr \\
&= \int_a^b (\nabla g(\gamma) \cdot \frac{d\gamma}{dt}) |\gamma'| dr - \int_a^b \left((|\gamma'| \nabla g(\gamma) \cdot \tau) \tau + g(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} \tau \right) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} dr \\
&= \int_a^b (|\gamma'| (\nabla g(\gamma))^\perp \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} - g(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} \tau) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} dr
\end{aligned}$$

Sea \vec{n} el vector unitario normal a γ entonces $\frac{\partial}{\partial r}\tau = \kappa\vec{n}$, y por tanto

$$0 = \int_a^b (|\gamma'| \nabla g(\gamma)^\perp - g(\gamma)\kappa\vec{n}) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} dr \quad (3.9)$$

La ec. (3.9) indica que si la evolución de γ en t obedece la ecuación

$$\gamma_t = F(\kappa) \quad (3.10)$$

con $F(\kappa) = (|\gamma'| \nabla g(\gamma)^\perp - g(\gamma)\kappa\vec{n})^\perp$ entonces siempre se satisface (3.9) y por tanto se minimiza el término U relacionado con la distancia al contorno del objeto.

Este procedimiento se aplica generalmente junto con el esquema de conjuntos de nivel para evolucionar curvas debido a que fácilmente puede reescribirse en esta formulación (recordemos que en un conjunto de nivel de una función ϕ el vector normal es paralelo a $\nabla\phi$) pero tenemos dos inconvenientes: El modelo no provee la función g , es decir se puede elegirse de muchas maneras y, se requiere calcular numéricamente el gradiente de una función a partir de valores discretos en el plano, la dificultad de esta última situación es que el cálculo puede ser muy impreciso y tardado debido a la cantidad de celdas que deben utilizarse para cada punto.

Con el modelo de Greorgiev no fue necesario calcular gradientes ya que se conocía la dirección respecto la cual se buscaba la derivada de σ , a saber $v\hat{\mathbf{n}} + a\mathbf{T}$, además el esquema de Kimura da una aproximación para valores en una pequeña vecindad de la curva por lo que $(\mathcal{I}(\varphi_j^{k+1}) - \mathcal{I}(\varphi_j^k))/\Delta t$ es una buena aproximación de la derivada de \mathcal{I} en la dirección γ_t .

3.4. Conclusiones

La solución que en este trabajo se plantea al problema de reconocer objetos en una imagen puede valorarse en términos del alcance que se busque al querer solucionar este problema, los alcances de esta propuesta son los siguientes:

- Se dio un planteamiento puramente geométrico del problema utilizando las herramientas para tratar con restricciones dinámicas: primero se resolvió el problema para un flujo dependiente de la curvatura en un

esquema puntual, es decir, se resolvió como una dinámica de partículas lo cual permitió incorporar las restricciones utilizando la teoría estandar de mecánica analítica. La descripción geométrica no es aprovechada en la literatura relativa al reconocimiento de objetos, generalmente este problema se aborda en términos variacionales y se trata de resolver directamente.

- Aunque sí es frecuente encontrar referencias del uso de la ecuación de Poisson en el área de imágenes, ésta es usada para procesar imágenes quitándoles ruido o para combinar o suavizar los pixeles en una superposición de imágenes. Estos son los usos planteados por Greorgiev autor del modelo de imagen como sección de un haz. En este trabajo se le dio otro uso a la ecuación de Poisson, a saber, condicionar la dinámica de la curva a un flujo también dependiente de su curvatura.
- Para determinadas aplicaciones el reconocimiento de objetos alcanzado por el procedimiento propuesto puede ser apenas suficiente, sin embargo tiene tres grandes ventajas: (i) tiene fundamento matemático, (ii) puede inicializarse con una sólo carga (negativa) en el interior de la curva inicial y esta carga inicial puede cambiar de posición en cada iteración y, (iii) fácilmente puede ser refinado ya que una vez todos los puntos intersectan a la región del objeto Ω (o al menos cierto porcentaje), se pueden examinar las posiciones de los puntos y su curvatura para asignar nuevas cargas que refinan la aproximación.
- Al ser un procedimiento basado en evaluaciones numéricas, fácilmente es adaptable a distintos lenguajes y plataformas, sin embargo también puede requerir muchas iteraciones para aproximarse a la solución. Otra ventaja es que el número de variables que almacenan la información rastreada (las posiciones de los puntos en la curva) es relativamente pequeño respecto otros métodos.

Apéndices

A. FCM en Vecindad Tubular para Curvas Planas

En este apéndice se deduce la ecuación (2.33). Recordando que

$$\gamma(\mathbf{s}, t) = \gamma_0(\mathbf{s}) + f(\mathbf{s}, t)\hat{\mathbf{n}}_0(\mathbf{s})$$

Si \mathbf{T}_0 y $\hat{\mathbf{n}}_0$ son el vector unitario y el vector normal de γ_0 respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = \frac{\gamma'_0 + f'\hat{\mathbf{n}}_0 - \kappa_0 f \mathbf{T}_0}{\|\gamma'_0 + f'\hat{\mathbf{n}}_0 - \kappa_0 f \mathbf{T}_0\|} = \frac{(1 - \kappa_0 f)\mathbf{T}_0 + f'\hat{\mathbf{n}}_0}{\|(1 - \kappa_0 f)\mathbf{T}_0 + f'\hat{\mathbf{n}}_0\|} \\ &= \frac{(1 - \kappa_0 f)\mathbf{T}_0 + f'\hat{\mathbf{n}}_0}{\sqrt{(1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Usando (2.28) calculamos el vector $\hat{\mathbf{n}}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\hat{\mathbf{n}}_0 - \frac{f'}{\|\gamma'\|} \mathbf{T}}{\|\hat{\mathbf{n}}_0 - \frac{f'}{\|\gamma'\|} \mathbf{T}\|} = \frac{\left(1 - \frac{(f')^2}{\|\gamma'\|^2}\right) \hat{\mathbf{n}}_0 - \frac{f'(1 - \kappa_0 f)}{\|\gamma'\|^2} \mathbf{T}_0}{\|\hat{\mathbf{n}}_0 - f' \mathbf{T}\|} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{(f')^2}{\|\gamma'\|^2}\right) \hat{\mathbf{n}}_0 - \frac{f'(1 - \kappa_0 f)}{\|\gamma'\|^2} \mathbf{T}_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{(f')^2}{\|\gamma'\|^2}\right)^2 + (f')^2 \frac{(1 - \kappa_0 f)^2}{\|\gamma'\|^4}}} \\ &= \frac{(1 - \kappa_0 f)^2 \hat{\mathbf{n}}_0 - f'(1 - \kappa_0 f) \mathbf{T}_0}{(1 - \kappa_0 f) \sqrt{(1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2}} = \frac{(1 - \kappa_0 f) \hat{\mathbf{n}}_0 + f' \mathbf{T}_0}{\sqrt{(1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

B. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.1

mientras que para la curvatura $\kappa(t)$

$$\begin{aligned}
 \kappa(t) &= \frac{\|\mathbf{T}' \wedge \mathbf{T}''\|}{\|\gamma'\|^3} \\
 &= \frac{\|\{(1 - \kappa_0 f)\mathbf{T}_0 + f'\hat{\mathbf{n}}_0\} \wedge \{(-\kappa'_0 - 2\kappa_0 f')\mathbf{T}_0 + (\kappa_0(1 - \kappa_0 f) + f'')\hat{\mathbf{n}}_0\}\|}{\|\gamma'\|^3} \\
 &= \frac{(1 - \kappa_0 f)f'' + 2\kappa_0(f')^2 + \kappa'_0 f f' - 2\kappa_0^2 f + \kappa_0^3 f^2}{((1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2)^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

y usando

$$\frac{\partial f}{\partial t} \langle \hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{n}}_0 \rangle = \kappa(t) \langle \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}_0 \rangle$$

se encuentra que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1 - \kappa_0}{\sqrt{(1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2}} \kappa(t)$$

en donde la expresión en el denominador nunca se anula ya que es la norma del vector velocidad de $\gamma(s, t)$ (ver comentario final en el ejemplo 2 de la sección 2.1).

B. Demostración del Teorema 2.2.1

En este apartado se prueba el teorema 2.2.1 que trata de la existencia y unicidad de soluciones para un operador parabólico lineal aplicado a funciones definidas en $Q = \mathbb{S}^1 \times [0, \tau_\epsilon)$ con condiciones de frontera dadas, podemos además identificar \mathbb{S}^1 con el $[0, 1]$ si $0 \sim 1$. Esta demostración está apoyada en el trabajo de Polden [14], las definiciones que se utilizan se extrajeron de Ejdel'man [1, cap. 3], Zeidler [46] y Wu *et al* [44]. Para la demostración se comienza probando la existencia de soluciones débiles (definición B.2) utilizando ciertas estimaciones y propiedades para después demostrar continuidad (en la solución y sus derivadas) a partir de condiciones de regularidad.

Sea $\mathcal{L}_0(u) := \partial_t u - a(x, t)u_{xx} - b(x, t)u_x - c(x, t)u$ un operador parabólico, el teorema 2.2.1 consiste en probar existencia y unicidad de soluciones del problema

$$(\text{PL}) \begin{cases} \mathcal{L}_0(u) = h & \text{con } h \text{ en } C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}) \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{con } u_0 \text{ en } C^{2+\alpha}(M) \end{cases} \tag{B.1}$$

donde $Q = \mathbb{S}^1 \times [0, \tau_\epsilon)$. Además por la observación 2.2.5 tenemos las condiciones $u_0(\cdot, 0) = 0$ y $u_t(\cdot, 0) = 0$. Podemos reescribir el operador \mathfrak{L}_0 como $\hat{a}(x, t)\partial_x u \partial_x u + \hat{b}(x, t)\partial_x u + \hat{c}(x, t)u$ para llevarlo a una forma que permita trabajar con las definiciones estándar que se utilizan al buscar soluciones débiles y omitir de aquí en adelante la tilde.

De forma similar a como se hizo en el capítulo 2, definimos un espacio de funciones en el cual comenzamos a limitar la búsqueda.

Definición B.1. Sea k un entero no negativo y $1 \leq p < \infty$ el espacio espacio de funciones u tales que

$$\frac{\partial^{\alpha+r} u(x, t)}{\partial x^\alpha \partial t^r} \in L^p(Q)$$

para $\alpha + 2r \leq 2k$, con norma $\|\cdot\|_{W_p^{2k,k}}(Q)$

$$\|u\|_{W_p^{2k,k}}(Q) := \left(\int \int_Q \sum_{\alpha+2r \leq 2k} \left| \frac{\partial^{\alpha+r} u}{\partial x^\alpha \partial t^r} \right|^p dx dt \right)^{1/p}$$

lo denotamos $W_p^{2k,k}$.

El teorema que garantiza la existencia de soluciones débiles requiere dos resultados comúnmente referidos como *desigualdad de Garding* (lema B.1) y *teorema de Lax-Milgram (modificado)*⁸ (lema B.2).

Lema B.1. Sea $A(\cdot)$ un operador diferencial lineal que actúe en funciones $2k$ diferenciales $f(x)$ en M ($M = \mathbb{S}^1$) definido como

$$A(f(x)) := \sum_{\alpha, \beta \leq p} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(a_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x) \right)$$

con $a_{\alpha\beta}$ acotadas y cumpliendo

$$\lambda \|\xi\|^2 \leq \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \leq \mu \|\xi\|^2 \tag{B.2}$$

donde ξ es un vector en \mathbb{R}^k y λ, μ constantes positivas. Si $u(x) \in W_2^k(M)$ entonces

$$A(u, u) := \int_M \sum_{\alpha, \beta \leq k} a_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} dx \geq c_1 \|u\|_{W_2^k(M)}^2 - c_2 \|u\|_{L^2(M)}^2$$

⁸Estos resultados se utilizan siguiendo a Polden *et al* [14].

B. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.1

Demostración. Como las $a_{\alpha\beta}$ están acotadas, para los terminos $\alpha, \beta = k$

$$\begin{aligned} \int_M \sum_{\alpha, \beta=k} a_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} dx &\geq \lambda \int_M \sum_{\alpha=k} \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx \\ &= \lambda \|u\|_{W_2^k(M)}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

para el resto de los términos hacemos uso de dos propiedades conocidas⁹:

- (1) *Desigualdad de Hölder.* Sean u, v funciones reales en un espacio L^p y L^q , donde $1 \leq p, q \leq \infty$ son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$

- (2) *Desigualdad de Ehrling.* Sean X, Y, Z espacios de Banach sobre \mathbb{R} con $X \subset Y \subset Z$. Además X está contenido en su cerradura y ésta en el interior de Y (el embebimiento $X \hookrightarrow Y$ es compacto) y el embebimiento $Y \hookrightarrow Z$ es continuo. Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $c(\epsilon)$ tal que para toda u en X

$$\|u\|_Y \leq \epsilon \|u\|_X + c(\epsilon) \|u\|_Z$$

de la integral con el resto de los términos y la condición B.2

$$\begin{aligned} \int_M \sum_{\alpha, \beta \leq k-1} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} dx &\leq \int_M \mu \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx \\ &= \mu \|u\|_{W_2^{k-1}(M)}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

usando la desigualdad de Ehrling para X, Y, Z iguales a $W_2^k(M), W_2^{k-1}(M)$ y $L^2(M)$, respectivamente

$$\|u\|_Y \leq \epsilon \|u\|_X + c(\epsilon) \|u\|_Z$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mu \|u\|_Y^2 &\leq (\epsilon \|u\|_X + c(\epsilon) \|u\|_Z)^2 \\ &\leq 2\epsilon^2 \|u\|_X^2 + 2c^2(\epsilon) \|u\|_Z^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

⁹Estas propiedades (1) y (2) superan el detalle de la prueba pero su demostración puede consultarse en [9, p. 622] y [46, p. 365], respectivamente.

Por último, retomando la integral:

$$\begin{aligned}
\int_M \sum_{\alpha, \beta \leq k} a_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} dx &\geq \lambda \|u\|_{W_2^k}^2 + \int_M \sum_{\alpha, \beta \leq k-1} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} dx \\
&\geq \lambda \|u\|_{W_2^k}^2 - \int_M \sum_{\alpha, \beta \leq k-1} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} dx \\
&\geq \lambda \|u\|_{W_2^k}^2 - 2\epsilon^2 \|u\|_{W_2^k}^2 - 2c^2(\epsilon) \|u\|_{L^2}^2 \\
&= (\lambda - 2\epsilon^2) \|u\|_{W_2^k}^2 - 2c^2 \|u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

□

La prueba del siguiente lema supera el nivel de detalle de la prueba de existencia de soluciones débiles, por lo que no es incluida pero puede encontrarse en [44].

Lema B.2. Sea H un espacio de Hilbert, $V \subset H$ un subespacio denso y $a(u, v)$ una forma bilineal en $H \times V$ tal que

(1) Sean $u \in H$, $v \in V$ y alguna $C > 0$

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_V$$

(2) Para alguna $\delta > 0$

$$|a(v, v)| \leq \delta \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

Entonces para cualquier operador lineal acotado F en H , existe $u \in H$ tal que $F(v) = a(u, v)$, $\forall v \in V$.

Seguendo la demostración de Polden [14] definimos los siguientes productos internos para funciones en $C_0^\infty(M \times [0, \infty))$, que nos permitirán demostrar la existencia de soluciones

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle_{LL_a(M)} &= \int_0^\infty e^{-at} \langle f, g \rangle_{L^2(M)} dt \\
\langle f, g \rangle_{LW_a(M)} &= \int_0^\infty e^{-at} \langle f, g \rangle_{W_p^2(M)} dt
\end{aligned}$$

llamamos LL_a y LW_a al espacio de Hilbert resultante al *completar* $C_0^\infty(M \times [0, \infty))$ (espacio de funciones C^∞ con soporte compacto) respecto a las normas arriba referidas.

Sea Φ el espacio de funciones $C_0^\infty(M \times (0, \infty))$ que se anulan para tiempo pequeño, denotamos por $WW_{a,0}(M)$ al espacio que resulta de *completar* Φ respecto a la norma LW_a

B. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.1

Definición B.2. Decimos que $u(x, t) \in WW_{a,0}$ una solución débil al problema **(PL)** si

$$\int \int_Q (u_t \varphi + a(x, t) \partial_x u \partial_x \varphi + b(x, t) \partial_x u \varphi + c(x, t) u \varphi) dx dt = \int \int_Q h(x, t) \varphi dx dt$$

para toda φ en $C_0^\infty(M \times (0, \infty))$

Teorema B.1. Sea u en $WW_{a,0}$ es solución débil de **(PL)** si y sólo si

$$\int \int_Q (u_t \varphi_t + a(x, t) \partial_x u \partial_x \varphi_t + b(x, t) \partial_x u \varphi_t + c(x, t) u \varphi_t) e^{-ct} dx dt = \int \int_Q h(x, t) \varphi_t e^{-ct} dx dt \quad (\text{B.6})$$

con c una constante positiva y $\varphi \in C_0^\infty(M \times [0, \infty))$.

Demostración.

\Rightarrow)

Sea $\hat{\varphi}(x, t) = \varphi_t e^{-ct}$ con φ en $C_0^\infty(M \times (0, \infty))$ entonces $\hat{\varphi}(x, t)$ también pertenece a este espacio, sustituyendo $\hat{\varphi}$ en la definición de solución débil se obtiene la expresión.

\Leftarrow)

Sea φ en $C_0^\infty(M \times (0, \infty))$ que satisface (B.6), vemos que la integral en t

$$\varphi(x, t) e^{ct} - c \int_0^t \varphi(x, s) e^{cs} ds$$

también está en $C_0^\infty(\Omega \times (0, \infty))$ por tanto, como la derivada de ésta es $\varphi(x, t) e^{ct}$, al sustituir en ec. (B.6) se obtiene la expresión en la definición de soluciones débiles. \square

Teorema B.2. El problema **(PL)** tiene solución débil en WW_a^0 .

Demostración. Definimos la forma bilineal $A : WW_{a,0} \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$A(u, v) = \int \int_Q e^{-mt} (u_t v_t + a(x, t) \partial_x u \partial_x v_t + b(x, t) \partial_x u v_t + c(x, t) u v_t) dx dt \quad (\text{B.7})$$

para $Q = M \times (0, \infty)$ el dominio de las funciones, m constante, $u \in WW_{a,0}$ y $v \in \Phi$, y a, b, c coeficientes del problema **(PL)**. Sea $F(v)$ el operador lineal definido sobre Φ como

$$F(v) := \int \int_Q h v e^{-mt} dx dt \quad (\text{B.8})$$

notamos que $A(u, \varphi)$ coincide con el lado derecho de la ec. (B.6) en la definición B.2. Si demostramos que A satisface las hipótesis del lema B.2 entonces para cualquier $v \in \Phi$ podemos encontrar u_L tal que

$$F(v) = A(u_L, v)$$

usando (B.8) para reescribir el lado izquierdo y (B.7) para el lado derecho, obtenemos la ec. (B.6) que caracteriza a las soluciones débiles, por tanto u_L es solución débil. Veamos que A satisface (1) y (2) hipótesis del lema B.2:

(1) Podemos asumir que las funciones a, b, c, h son acotadas, es decir existe una constante M que acota su norma, ya que estas funciones son una aproximación lineal obtenida de la ec. (2.32) que involucra a f (función altura de vecindad tubular de la curva inicial), κ_0 y sus derivadas (curvatura de la curva inicial) y cada una de estas funciones está acotada (la curva inicial es difeomorfa a \mathbb{S}^1). A su vez también la norma de u, φ y sus derivadas están acotadas por pertenecer¹⁰

(2) Para la segunda hipótesis del lema B.2, tomamos $v \in \Phi$ y aplicamos la forma bilineal:

$$\begin{aligned} A(v, v) &= \int_0^\infty \int_M (v_t^2 + a \partial_x v \partial_x v_t + b \partial v v_t + c v v_t) e^{-mt} dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_M v_t^2 e^{-mt} dx dt + \int_0^\infty \int_M (a \partial_x v \partial_x v_t + b \partial v v_t + c v v_t) e^{-mt} dx dt \\ &= \|v_t\|_{LL_a}^2 + \int_0^\infty \int_M (a \partial_x v \partial_x v_t + b \partial v v_t + c v v_t) e^{-mt} dx dt \end{aligned}$$

realizamos una integración por partes en la última integral y tenemos:

Para el último término

$$\int_0^\infty \int_M c v v_t e^{-mt} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_M \left(e^{-mt} \frac{d}{dt} (c v^2) - c_t v^2 e^{-mt} \right) dx dt$$

¹⁰Por la definición de la norma $\|\cdot\|_{WW_a}$, el espacio $WW_{a,0}$ es el espacio “más pequeño” en el que el problema tiene sentido: esperar que u sea al menos dos veces diferenciable en x y una vez en t , con derivadas finitas (respecto a la norma correspondiente) faltaría ver que además hay regularidad es decir, continuidad respecto t en la solución y sus derivadas.

B. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.1

$$= \frac{1}{2} (e^{-mt} cv^2) \Big|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_M m e^{-mt} cv^2 dxdt \\ - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_M c_t v^2 e^{-mt} dxdt$$

como las funciones v en Φ se anulan para tiempos pequeños

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_M m e^{-mt} cv^2 dxdt - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_M c_t v^2 e^{-mt} dxdt$$

de forma similar para los otros términos, resultando

$$A(v, v) = \|v_t\|_{LL_a}^2 + \frac{m}{2} \int_0^\infty \int_M e^{-mt} (a \partial_x v \partial_x v + b \partial_x v^2 + cv^2) dxdt \\ - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_M e^{-mt} (a_t \partial_x v \partial_x v + b_t \partial_x v^2 + c_t v^2) dxdt$$

usando lema B.1 existe constante \mathcal{C} tal que

$$\geq \|v_t\|_{LL_a}^2 + \frac{m}{2} \int_0^\infty e^{-mt} \mathcal{C} \|v\|_{W_2^2(M)}^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-mt} \mathcal{J} \|v\|_{W_2^2(M)}^2 dt$$

donde \mathcal{J} es una cota superior de las derivadas a_t, b_t, c_t

$$= \|v_t\|_{LL_a}^2 + \left(\frac{m \mathcal{C} - \mathcal{J}}{2} \right) \|v\|_{LW_a}^2$$

(con $a = m$). Adecuadamente se puede elegir m tal que

$$\geq \|v\|_{LW_a}^2 \tag{B.9}$$

y por tanto se cumpla la hipótesis (2) del lema B.2.

Para ver que la solución presenta cierta regularidad usemos un argumento de aproximación (método de Galerkin [44]): Sea la condición inicial $u_0 \in W_2^1(M)$, si u es solución débil, para $t = 0$ podemos aproximarla por una sucesión $\{u_m\}$ tal que $u_m \rightarrow u_0$ cuando $m \rightarrow \infty$, con u_m función suave (C^∞) que podemos ver como $u_m(x, t) = \sum_i^m \lambda_m^i \omega^i(x)$ para $\{\omega^i\}_{i=1}^\infty$ base de funciones ortonormales C^2 sobre M . Proponemos a u como el límite de una sucesión $\{v_m\}$ tal que $v_m(x, t) = \sum_i^m c_m^i(t) \omega^i(x)$. Utilizando v_m en la definición de soluciones débiles

$$\int \int (v_m)_t \varphi + a \partial_x v_m \partial_x \varphi + b \partial_x v_m \varphi + cv_m \varphi - h \varphi = 0 \tag{B.10}$$

agrupamos los términos de acuerdo a la ortogonalidad de las ω_i 's es decir, la derivada temporal de v_m nos permite identificar m términos que podemos asociar

al siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{dc_m^i}{dt} &= f(t, c_m^1, c_m^2, \dots, c_m^m) \\ c_m^i(0) &= \lambda_m^i\end{aligned}$$

y por tanto encontrar una única solución c_m^i para cada valor de m . Como las ω_i 's son dos veces derivables, la función c_m^i es C^1 entonces v_m tienen norma $\|v_m\|_{W_1^{2,1}}$ finita. El límite de la sucesión (la solución) debe estar en un espacio completo que podemos asumir $WW_{a,0}$ como antes, sin embargo como u es C^1 en t podemos definir un nuevo espacio con otra norma en donde la aplicación del operador \mathfrak{L}_0 nos permite identificarlo como un isomorfismo entre espacios y en consecuencia tener unicidad en la solución. Sea

$$\begin{aligned}LW_a^s &= \left\{ f : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^\infty e^{-at} \|f(\cdot, t)\|_{W_2^s(M)} dt < \infty \right\} \\ \langle f, g \rangle_{LW_a^s(M)} &= \int_0^\infty e^{-at} \langle f(\cdot, t), g(\cdot, t) \rangle_{W_2^s} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_a^l(M) &= \left\{ f : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid \frac{\partial^j f}{\partial t^j} \in LW_a^{2(l-j)} \forall j \leq l \right\} \\ \langle f, g \rangle_{P_a^l(M)} &= \sum_{j \leq l} \left\langle \frac{\partial^j f}{\partial t^j}, \frac{\partial^j g}{\partial t^j} \right\rangle_{LW_a^{2(l-j)}}\end{aligned}$$

identificamos al operador F asociado a nuestro problema como el mapeo (supradyectivo)

$$\begin{aligned}F : P_a^l(M) &\rightarrow W_p^{2l-1} \times P_a^{l-1}(M) \\ F(u) &= (u_0, \mathfrak{L}_0 u)\end{aligned}$$

con $l = 1$, $p = 2$. Para ver que u pertenece a P_a^l bastará el siguiente estimado (ver Mantegazza [27])

$$\|u\|_{P_a^1(M)}^2 \leq C \left(\|u_0\|_{W_2^1(M)}^2 + \|h\|_{LL_a(M)}^2 \right) \quad (\text{B.11})$$

ya que como u_0 y h tienen norma finita en $W_2^1(M)$ y $LL_a^2(M)$, respectivamente también u la tiene en $P_a^1 \subset LW_a^2$.

C. 1^{RA} APROXIMACIÓN NUMÉRICA DEL FCM ($N = 1$)

Para finalizar pidamos $\|u_0\|_{W_2^1(M)}^2$ y $\|h\|_{LL_a}^2(M)$ finitas para garantizar unicidad de soluciones: Sabemos que existe una solución en $WW_{a,0}$ utilizando el lema B.2, las funciones en este espacio también están en $W_p^2(M)$ y a su vez éste es subespacio de LW_a . Con el argumento de aproximación vimos que a partir de pedir mínimamente $u_0 \in W_p^1(M)$ tenemos regularidad en t y la solución construida es dos veces diferenciable (está en $W_p^2(M)$). Las soluciones v_m están en P_a^l ya que éstas son C^∞ , por otra parte de acuerdo con la ec. (B.10) cada una satisface

$$F(v_m) = (u_m, h)$$

con $u_m \rightarrow u_0$ si $m \rightarrow \infty$. Usando la desigualdad (B.11) y por continuidad de F el límite satisface

$$F(v) = (u_0, h)$$

supongamos que tenemos dos soluciones u_1 y u_2 entonces $u := u_1 - u_2$ también es solución y usando nuevamente la desigualdad (B.11)

$$\|u\|_{P_a^1(M)}^2 \leq 0$$

ya que $F(u_1 - u_2) = (u_0, h - h)$ además $u_0 = 0$, por tanto $\|u\|_{P_a^1(M)}^2 = 0$ es decir $u_1 = u_2$. \square

Observación B.1. En general, para probar la existencia y unicidad en el dominio $M \times [0, T)$ podría definirse el espacio $P^l(M, T)$ completando el espacio $C^\infty(M \times [0, T])$ respecto otra norma, reconocer el embebimiento $P_a^l(M) \hookrightarrow P^l(M, T)$, reformular el mapeo F como $F : P^l(M, T) \rightarrow W_2^{2l-1}(M) \times P^{l-1}(M, T)$ y realizar un argumento similar al anterior (ver Mantegazza [27]).

C. 1^{ra} Aproximación Numérica del FCM ($n = 1$)

Uno de los métodos más comunes para resolver numéricamente una ecuación diferencial consiste en aproximar las derivadas por la diferencia entre valores de la función que se esté derivando. Dentro de las aproximaciones más utilizadas se encuentran:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{C.1}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \tag{C.2}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (\text{C.3})$$

Un cálculo simple utilizando en teorema de Taylor permite cuantificar el error en cada caso, para el primero:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \mathcal{O}(h^2) \\ \Rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) &= \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

esto es, el error en (C.1) incluye términos de orden de h^2 , y de forma similar para (C.2); mientras que para C.3

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3) \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3) \\ \Rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) &= \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

cuyo error es del orden de h^3 . Por tanto C.3 representa una mejor aproximación, por otra parte también recibe el nombre de *diferencia central*.

Existen otras aproximaciones a la derivada por ejemplo utilizando cinco puntos: $x_0 - 2h, x_0 - h, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h$, utilizando el desarrollo de Taylor se obtienen las siguientes cuatro ecuaciones

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^4) \quad (\text{C.4})$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^4) \quad (\text{C.5})$$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{4h^2}{2}f''(x_0) + \frac{8h^3}{6}f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^4) \quad (\text{C.6})$$

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + \frac{4h^2}{2}f''(x_0) - \frac{8h^3}{6}f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^4) \quad (\text{C.7})$$

restando C.5 de C.4 y C.7 de C.6 y resolviendo para f'

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) - \frac{h^3}{3}f'''(x_0) = 2hf'(x_0) \quad (\text{C.8})$$

D. FÓRMULA DE REPRESENTACIÓN PARA EC. DE POISSON

$$f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h) - \frac{8h^3}{3}f'''(x_0) = 4hf'(x_0) \quad (\text{C.9})$$

eliminamos la derivada de orden 3 multiplicando C.8 por 8 y restando C.9, obtenemos

$$\frac{f(x_0 + 2h) + 8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h)}{12h} = f'(x_0) \quad (\text{C.10})$$

Por otra parte, utilizando una aproximación central de la derivada, obtendremos las ecuaciones 2.38. Sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_S$ puntos en una curva inicial evolucionando por FCM, y \mathbf{p}_i^λ su posición al tiempo $t = \lambda\Delta t$, como en la sección 2.3. La parcial respecto t se aproxima usando C.3 por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x_i^\lambda, y_i^\lambda) &= \left(\frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)}, \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)} \right) \\ &\approx \left(\frac{x_i^{\lambda+1} - x_i^\lambda}{\Delta t}, \frac{y_i^{\lambda+1} - y_i^\lambda}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

para el vector normal:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}(x_i^\lambda, y_i^\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)}\right)^2}} \left(-\frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)}, \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)} \right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{(x_{i+1}^\lambda - x_{i-1}^\lambda)^2 + (y_{i+1}^\lambda - y_{i-1}^\lambda)^2}} (y_{i+1}^\lambda - y_{i-1}^\lambda, x_{i-1}^\lambda - x_{i+1}^\lambda) \end{aligned}$$

y para la curvatura aplicando dos veces C.3

$$\begin{aligned} \kappa(x_i^\lambda, y_i^\lambda) &= \frac{\frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)} - \frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)}}{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{(x_i^\lambda, y_i^\lambda)}\right)^2 \right)^{3/2}} \\ &\approx 4 \frac{(x_{i+1}^\lambda - x_{i-1}^\lambda)(y_{i+1}^\lambda - 2y_i^\lambda + y_{i-1}^\lambda) - (y_{i+1}^\lambda - y_{i-1}^\lambda)(x_{i+1}^\lambda - 2x_i^\lambda + x_{i-1}^\lambda)}{\left((x_{i+1}^\lambda - x_{i-1}^\lambda)^2 + (y_{i+1}^\lambda - y_{i-1}^\lambda)^2 \right)^{3/2}} \end{aligned}$$

D. Fórmula de Representación para ec. de Poisson

En esta sección se resuelve el problema planteado en la sección 3.1 (para t fijo) que corresponde a la ecuación de Poisson en 2D, es decir

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$u = g \quad \text{en } \partial\Omega = \gamma(t)$$

para una función u de clase $C^2(\Omega)$ y $C^1(\bar{\Omega})$.

Como primer paso se resolverá la ecuación de Laplace, es decir

$$\Delta u = 0 \tag{D.1}$$

el siguiente lema justifica el uso de coordenadas polares y más aún la suposición $u(x, y) = u(r)$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Lema D.1. La ecuación (D.1) es invariante bajo rotaciones

Demostración. Sea α un ángulo y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, considérese la transformación

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

sea $u(x^*, y^*) = u(x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha)$ entonces

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial x} = u_{x^*} \cos \alpha - u_{y^*} \sin \alpha \\ u_y &= \frac{\partial u}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y} = u_{x^*} \sin \alpha + u_{y^*} \cos \alpha \\ u_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^* \partial x^*} \left(\frac{\partial x^*}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x^*} \frac{\partial^2 x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^* \partial y^*} \left(\frac{\partial y^*}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y^*} \frac{\partial^2 y^*}{\partial x \partial x} \\ &= u_{x^* x^*} \cos^2 \alpha + u_{y^* y^*} \sin^2 \alpha \\ u_{yy} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^* \partial x^*} \left(\frac{\partial x^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x^*} \frac{\partial^2 x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^* \partial y^*} \left(\frac{\partial y^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y^*} \frac{\partial^2 y^*}{\partial y \partial y} \\ &= u_{x^* x^*} \sin^2 \alpha + u_{y^* y^*} \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

de lo anterior:

$$0 = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_{x^* x^*} + u_{y^* y^*})(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

□

Usando

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x}{r} u'(r) & u_{xx} &= \frac{x^2}{r^2} u'' + u' \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \\ u_y &= \frac{y}{r} u'(r) & u_{yy} &= \frac{y^2}{r^2} u'' + u' \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \end{aligned}$$

D. FÓRMULA DE REPRESENTACIÓN PARA EC. DE POISSON

la ec. (D.1) se reescribe como

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) &= 0 \end{aligned} \tag{D.3}$$

Antes de poder escribir la solución de la ec. de Poisson, necesitamos tres lemas

Lema D.2. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ y

$$\Phi(\mathbf{x}) := \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right)$$

entonces $\Delta\Phi = 0$.

(NOTA: Φ es llamada solución fundamental a la ecuación de Laplace D.1)

Demostración. Usando ec. (D.3)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

□

Lema D.3. Sea g de clase C^2 en \mathbb{R}^2

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x) \Delta g(x) dx = -g(0)$$

Demostración. Como Φ es singular en $\mathbf{x} = 0$, consideremos $B(\delta, 0)$ la bola de radio δ y centro en $\mathbf{x} = (0, 0)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x) \Delta g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2 - B(\delta, 0)} \Phi(x) \Delta g(x) dx + \int_{B(\delta, 0)} \Phi(x) \Delta g(x) dx = T1 + T2$$

El término T2 puede acotarse del asiguiente manera para algunas constantes c_1 , c_2 y c apropiadamente elegidas

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(\delta, 0)} \Phi(\mathbf{x}) \Delta g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_{B(\delta, 0)} -\frac{1}{2\pi} \log(|\mathbf{x}|) \Delta g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq c_1 \left| \int_{B(\delta, 0)} \Delta g d\mathbf{x} \right| \left| \int_{B(\delta, 0)} \log(|\mathbf{x}|) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq c_2 \left| \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \log(r) r dr d\theta \right| \leq c \left(\frac{1}{2} \delta^2 \log(\delta) - \frac{1}{4} \delta^2 \right) \end{aligned}$$

Mientras que para el primer término T1 aplicamos la segunda identidad de Green ($\int_D (u\Delta v - v\Delta u) da = \int_{\partial D} (u \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - v \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}}) d\mathbf{x}$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 - B(\delta,0)} \Phi(\mathbf{x}) \Delta g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^2 - B(\delta,0)} \Delta \Phi(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\partial B(\delta,0)} \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{x} - \int_{\partial B(\delta,0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= R1 + R2 + R3 \end{aligned}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal a la frontera $\partial(\mathbb{R}^2 - B(\delta,0))$. Por el lema D.2 el término $R1$ es cero. Por otra parte acotamos el término $R2$ por

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(\delta,0)} \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{x} \right| &\leq \left| \int_{\partial B(\delta,0)} \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{x} \right| \left| \int_{\partial B(\delta,0)} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq a_1 \int_{\partial B(\delta,0)} |-\log(|\mathbf{x}|)| d\mathbf{x} \\ &\leq \left| \int_{\partial B(\delta,0)} \log(|\mathbf{x}|) d\mathbf{x} \right| \left| \int_{\partial B(\delta,0)} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq a_2 \left| \int_0^{2\pi} \log(\delta) d\theta \right| |\delta| \\ &\leq a |\delta| |\log(\delta)| \end{aligned}$$

Por último, en $\partial B(\delta,0)$ la expresión $\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = \text{grad } \Phi \cdot \hat{\mathbf{n}}$, que a su vez depende de

$$\text{grad } \Phi = -\frac{1}{2\pi \delta^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

permite reescribir el término $R3$ como

$$-\int_{\partial B(\delta,0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\frac{1}{2\pi \delta} \int_{\partial B(\delta,0)} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x) \Delta g(x) dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0} T2 + R2 + R3 \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ c \left(\frac{1}{2} \delta^2 \log(\delta) - \frac{1}{4} \delta^2 \right) + a |\delta| |\log(\delta)| \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi \delta} \int_{\partial B(\delta,0)} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} \end{aligned}$$

D. FÓRMULA DE REPRESENTACIÓN PARA EC. DE POISSON

$$= -g(0)$$

por la continuidad de g . □

Regresando a la ecuación de Poisson, primero consideremos el caso en el que el dominio de u es \mathbb{R}^2 . El siguiente teorema brinda una fórmula para su solución

Teorema D.1. Sea $u(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ con $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ entonces

$$-\Delta u = f$$

Demostración. A través del cambio de variable $w = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ reescribimos la expresión $u(\mathbf{x})$ como

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(w) f(\mathbf{x} - w) dw$$

y calculemos u_x , u_y , u_{xx} y u_{yy} . Sea $x_1 = e_1$ y $x_2 = e_2$

$$\begin{aligned} u_x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{x} + x_i + h) - u(\mathbf{x} + x_i)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(w) \frac{f(\mathbf{x} + hx_i - w) - f(\mathbf{x} + x_i - w)}{h} dw = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(w) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} - w) dw \\ u_{x_i x_j} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(w) \frac{f_{x_i}(\mathbf{x} + e_j h - w) - f_{x_i}(\mathbf{x} - w)}{h} dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(w) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} - w) dw \end{aligned} \tag{D.4}$$

por continuidad de f y f_{x_i} ($i, j = 1, 2$). Por tanto

$$\Delta u = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(w) \Delta f(\mathbf{x} - w) dw = -f(\mathbf{x})$$

usando lema D.3 □

Cuando el dominio es acotado ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) se busca una función G cuya finalidad es análoga a la Φ en el teorema D.1. Definamos

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

para ϕ tal que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 && \text{en } \Omega \\ \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) && \text{para } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \partial\Omega \end{aligned}$$

donde $\Delta_{\mathbf{y}}$ representa el laplaciano con respecto la variable vectorial \mathbf{y} ; a grandes rasgos, se busca una expresión para u con dominio Ω similar a la del teorema D.1. Antes de esto calculemos la integral de $\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{y})$ sobre Ω .

Tomando en consideración la singularidad de $\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})$: sea $B(\delta, \mathbf{x})$ la bola de radio δ centrada en $\mathbf{x} \in \Omega$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega-B(\delta, \mathbf{x})} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \int_{\partial(\Omega-B(\delta, \mathbf{x}))} \left(\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - u \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\Omega-B(\delta, \mathbf{x})} u \Delta \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial\Omega \cup \partial B(\delta, \mathbf{y})} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega \cup \partial B(\delta, \mathbf{y})} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\partial\Omega} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\partial B(\delta, \mathbf{x})} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{y} \quad (\text{D.6}) \\ &\quad - \int_{\partial B(\delta, \mathbf{x})} u \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Anteriormente se calculó el límite de las últimas dos integrales en (D.6) cuando $\delta \rightarrow 0$, de manera que tomando este mismo límite ($\delta \rightarrow 0$) a ambos lados de la ecuación resulta

$$\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial\Omega} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{y} - u(\mathbf{x}) \quad (\text{D.7})$$

La expresión (D.7) se conoce como *fórmula de representación* y se obtuvo suponiendo que \mathbf{x} es un punto en Ω sin embargo, si también esperamos continuidad de u en $\bar{\Omega}$, podemos obtener una expresión para $u(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ haciendo tender \mathbf{x} a la frontera. Partiendo de la ec. (D.7) observamos que el lado izquierdo no

D. FÓRMULA DE REPRESENTACIÓN PARA EC. DE POISSON

presenta problemas ya que la singularidad de Φ se encuentra sólo cuando $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ pero como el dominio de integración es Ω , si tomamos \mathbf{x} en la frontera siempre se tiene $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Por otro lado la expresión a la derecha de (D.7) sí presenta problemas ya que la integración se realiza sobre $\partial\Omega$ de manera que debe hacerse nuevamente un análisis partiendo de un punto \mathbf{x} en la frontera y tomando una vecindad $\ell(\delta, \mathbf{x})$ de longitud δ alrededor de \mathbf{x} . Retomando (D.5) tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \int_{\partial\Omega - \ell(\delta, \mathbf{x})} \left(\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - u \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} \\
 &\quad + \int_{\Omega} u \Delta \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
 &\quad + \int_{\ell(\delta, \mathbf{x})} \left(\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - u \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} \\
 &= \int_{\partial\Omega - \ell(\delta, \mathbf{x})} \left(\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - u \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} \\
 &\quad + \int_{\ell(\delta, \mathbf{x})} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{y} - \int_{\ell(\delta, \mathbf{x})} u \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
 &= A1 + A2 + A3 \tag{D.8}
 \end{aligned}$$

Nuevamente buscamos acotar $A2$ para demostrar que se anula en el límite $\delta \rightarrow 0$, mientras que $A3$ es un promedio sobre $\ell(\delta, \mathbf{x})$. Para $A2$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\ell(\delta, \mathbf{x})} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{y} \right| &\leq b_1 \left| \int_{\ell(\delta, \mathbf{x})} \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{y} \right| \left| \int_{\ell(\delta, \mathbf{y})} \log(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\mathbf{y} \right| \\
 &\leq b_2 \left| \int_{\ell(\delta, \mathbf{y})} \log(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\mathbf{y} \right| \tag{D.9}
 \end{aligned}$$

Para continuar supongamos que $\partial\Omega$ es una curva suave, simple y regular $\gamma(s)$, la cual sin pérdida de generalidad podemos suponer parametrizada por longitud de arco; consideremos la siguiente reparametrización

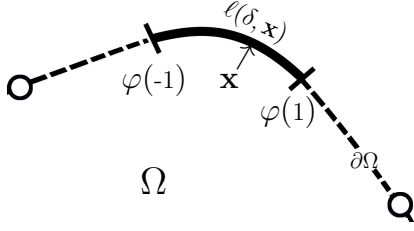


Figura 8: Reparametrización del segmento $\ell(\delta, \mathbf{x})$.

Sea $\varphi(t) = \gamma(s + \frac{\delta}{2}t)$ una reparametrización de $\ell(\delta, \mathbf{x})$ y $\gamma(s) = \mathbf{x}$ p.a. s , vemos que

$$\begin{aligned}\varphi(-1) &= \mathbf{a} \\ \varphi(0) &= \mathbf{x} \\ \varphi(1) &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\overline{\ell(\delta, \mathbf{x})} \setminus \ell(\delta, \mathbf{x}))$

entonces como \mathbf{x} y \mathbf{y} pertenecen al segmento $\ell(\delta, \mathbf{x})$ reescribimos la desigualdad (D.9) como

$$\begin{aligned}\left| \int_{\ell(\delta, \mathbf{x})} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\mathbf{y} \right| &\leq b_2 \left| \int_{\ell(\delta, \mathbf{y})} \log(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\mathbf{y} \right| \\ &\leq b_3 \left| \int_{-1}^1 \log(|\varphi(0) - \varphi(\xi)|) \|\varphi'(\xi)\| d\xi \right| \\ &\leq b_3 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\left| \int_{-1}^{\epsilon} \log(|\varphi(0) - \varphi(\xi)|) \|\varphi'(\xi)\| d\xi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\epsilon}^1 \log(|\varphi(0) - \varphi(\xi)|) \|\varphi'(\xi)\| d\xi \right| \right) \\ &\leq b_3 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\left| \int_{-1}^{\epsilon} \log(|\varphi(0) - \varphi(\xi)|) d\xi \right| \left| \int_{-1}^{\epsilon} \|\varphi'(\xi)\| d\xi \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{\epsilon}^1 \log(|\varphi(0) - \varphi(\xi)|) d\xi \right| \left| \int_{\epsilon}^1 \|\varphi'(\xi)\| d\xi \right| \right)\end{aligned}$$

como la curva es suave al tomar el límite $\delta \rightarrow 0$ tenemos

$$\begin{aligned}b_3 \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} &\left(\left| \int_{-1}^{\epsilon} \log(|\varphi(0) - \varphi(\xi)|) d\xi \right| \left| \int_{-1}^{\epsilon} \|\varphi'(\xi)\| d\xi \right| \right. \\ &\left. + \left| \int_{\epsilon}^1 \log(|\varphi(0) - \varphi(\xi)|) d\xi \right| \left| \int_{\epsilon}^1 \|\varphi'(\xi)\| d\xi \right| \right) \\ &= b_3 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\left| \int_{-1}^{\epsilon} \xi \log(|\varphi'(0)|) d\xi \right| + \left| \int_{\epsilon}^1 \xi \log(|\varphi'(0)|) d\xi \right| \right) \\ &\leq b_4 \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\left| \int_{-1}^{\epsilon} \xi d\xi \right| + \left| \int_{\epsilon}^1 \xi d\xi \right| \right) \\ &= 0\end{aligned}\tag{D.10}$$

Por último para el término $A3$

$$-\int_{\ell(\delta, \mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2\pi \delta} \int_{\ell(\delta, \mathbf{x})} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\text{D.11})$$

cuyo límite es $-\frac{1}{2}u(\mathbf{x})$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Por tanto, siguiendo (D.8), la fórmula de representación para \mathbf{x} en la frontera es

$$\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - u \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} - \frac{1}{2}u(\mathbf{x}) \quad (\text{D.12})$$

La fórmula (D.7) se puede reescribir en términos de la función $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ como

$$u(\mathbf{x}) = -\int_{\Omega} f(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\text{D.13})$$

E. Códigos

En este trabajo se utiliza la implementación numérica del flujo de curvatura media para producir diversos ejemplos. En lugar de repetir las mismas líneas de código con valores de parámetros distintos, se reproduce una vez el código que da lugar a uno de los ejemplos y en la tabla 1 se muestran las parametrizaciones de las curvas y los parámetros λ y μ (ver sección 2.3). Cabe señalar que no hay un único par de valores (λ, μ) que reproduzca satisfactoriamente el FCM, la elección depende de las dimensiones de la curva a evolucionar y el número de puntos N que representen a la curva inicial, este último a su vez se elige dependiendo del detalle o resolución con el que la curva es representada.

La importancia del valor de λ no es crucial, su uso se limita a escalar el tamaño de Δt y siempre es posible tomar un valor “pequeño” aunque la evolución requiera de un mayor número de iteraciones, por otra parte al realizar cálculos numéricos siempre es conveniente que el valor de las cantidades involucradas sea comparable.

Tabla 1: Parámetros utilizados en la elaboración de ejemplos

	Parametrización*	λ	μ
Espiral** $N = 143$ p. 46	$r = \theta^2 + 2\theta$	550	0.7
Circunferencia $N = 64$ p. 46	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $r = 10$	400	0.9
Cicloide $N = 80$ p. 46	$x = (R + r) \cos \theta + \rho \cos((R + r)\theta/r)$ $y = (R + r) \sin \theta + \rho \sin((R + r)\theta/r)$ $R = 10, r = 2, \rho = \frac{3}{2}$	1000	0.35
Óvalo de Cassini $N = 190$ p. 48	$r = 2a^2 \cos(2\theta) + 2\sqrt{-a^4 + b^4 + a^4 \cos^2(2\theta)}$ $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $a = 4.2, b = 4.7$	0.5	0.35

* En todos los casos (excepto la espiral) $0 \leq \theta < 2\pi$.

** La gráfica de la curva asociada a esta parametrización no es cerrada sin embargo los puntos utilizados como curva inicial se lograron escalando dos espirales obtenidos con la parametrización mostrada.

Las siguientes líneas de código (en lenguaje python) fueron utilizadas para reproducir la evolución de la circunferencia. Las líneas 30-36 corresponden a las ecuaciones propuestas por Kimura [19] para actualizar las nuevas posiciones de los puntos.


```

1 from pylab import *
2 from copy import deepcopy
3 t=arange(0,2*pi,0.0987)
4 N,radio=len(t),10.0
5 x,y=radio*cos(t),radio*sin(t)#curva inicial
6 P=[]
7 for i in range(N):
8     v=array([x[i],y[i]])
9     P.append(v)
10 h=1.0/N #parametros
11 mu=0.9
12 la=400 #lambda
13 dt=la*h**2
14 lim=551
15 d,b=zeros(N),zeros(N)
16 A=zeros((N,N))
17 V=list(zeros(N))
18 for i in range(N):
19     A[i][i],A[i][(i+1)%N]=-1,1
20 A[N-1]=ones(N)
21 for k in range(lim): #evolucion
22     L=[]
23     for j in range(N):
24         d[j]=norm(P[(j+1)%N]-P[j])
25     lon=sum(d)
26     for j in range(N-1):
27         b[j]=-h*(d[j]-lon*h)/(la*h**3)
28     b[N-1]=0
29     a=linalg.solve(A,b)
30     for j in range(N):
31         d4=[norm(P[(j+i)%N]-P[j]) for i in [-2,-1,1,2]]
32         t4=[(i/(d4[i]*abs(i)))*(P[(j+i)%N]-P[j]) for i in [-2,-1,1,2]]
33         V[j]=(mu*2/(d4[2]+d4[1]))*(t4[2]-t4[1])
34         V[j]=V[j]+(1-mu)*(2/(d4[3]+d4[0]))*(t4[3]-t4[0])
35         V[j]=V[j]+(a[j]/6)*(-t4[3]+4*t4[2]+4*t4[1]-t4[0])
36         vect=P[j]+dt*V[j]
37         L.append(vect)
38     P=deepcopy(L)
39     xx=[L[i][0] for i in range(N)]
40     yy=[L[i][1] for i in range(N)]
41     if ((k%50)==0):
42         xx.append(xx[0])
43         yy.append(yy[0])
44         r1=float(lim-k)/lim
45         g1=1-r1
46         plot(xx,yy,'-',marker='o',ms=1.8,color=(r1,g1,0))

```

El siguiente código se utilizó para producir el ejemplo de la figura 3.3 en donde se utilizó una distribución de la forma $q_i \delta(\mathbf{x} - x_i) / |\mathbf{x} - x_i|$ compuesta por tres cargas en $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (0, 1)$ y $x_3 = (-1/2, -1)$ y con valores $q_1 = -8.82$, $q_2 = q_3 = 2.1$

```

1 from pylab import *
2 from copy import deepcopy
3 t=linspace(0.,2*pi,70)
4 t=list(t)
5 t.pop()
6 t=array(t)
7 N=len(t)
8 x=2.*cos(t)
9 y=2.*sin(t)
10
11 plot(list(x)+[x[0]],list(y)+[y[0]],'-',color='red')
12 P=[array([x[i],y[i]]) for i in range(N)]
13
14 la=0.46
15 h=1./N
16 dt=la*h**2
17 mu=0.15
18 q=2.1
19 beta=0.2
20 A=zeros((N,N))
21 for i in range(N-1):
22     A[i][i+1]=1.
23     A[i][i]=-1.
24 A[N-1]=ones(N)
25
26 b=zeros(N)
27 f=zeros(N)
28 d=zeros(N)
29 kappa=zeros(N)
30 J=zeros((2,2))
31 J[0][1]=-1
32 J[1][0]=1
33 lim=1701
34 dt=0.0035
35 for kt in range(lim):
36     print kt,kt*dt
37     L=[]
38     d=[norm(P[(j+1)%N]-P[j]) for j in range(N)]
39     l=sum(d)
40     for j in range(N-1):
41         b[j]=(1*h-d[j])/dt
42     b[N-1]=0.
43     alp=linalg.solve(A,b)
44     H=zeros((N,N))
45     F=zeros(N)
46     T=[]
47     for j in range(N):
48         D=[norm(P[(j+i)%N]-P[j]) for i in [-2,-1,1,2]]
49         Tau=[float(i)/(D[i]*abs(i))*(P[(j+i)%N]-P[j]) for i in [-2,-1,1,2]]
50         T.append((1./6)*(-Tau[3]+4*Tau[2]+4*Tau[1]-Tau[0]))

```

E. CÓDIGOS

```

51 for j in range(N):
52     D=[norm(P[(j+i)%N]-P[j]) for i in [-2,-1,1,2]]
53     Tau=[(float(i)/(D[i]*abs(i)))*(P[(j+i)%N]-P[j]) for i in [-2,-1,1,2]]
54     K=(-(2*mu/(D[2]+D[1]))*(Tau[2]-Tau[1])-2*((1-mu)/(D[3]+D[0]))*(Tau[3]-Tau[0]))
55     kappa[j]=dot(K,dot(-J,T[j]))
56     def Elog(x,x2):
57         return log(norm(P[j]-0.5*(1-x)*P[x2]-0.5*(1+x)*P[(x2+1)%N]))
58     def Fk(x,k):
59         return (1-x)*Elog(x,k)
60     def Fk1(x,k):
61         return (1+x)*Elog(x,k)
62     def InCurv(x,x2):
63         return 0.5*(1-x)*kappa[x2]+0.5*(1+x)*kappa[(x2+1)%N]
64     def Vect(x,x2):
65         return P[j]-0.5*(1-x)*P[x2]-0.5*(1+x)*P[(x2+1)%N]
66     def Vect2(x,x2):
67         D=[norm(P[(x2+i)%N]-P[x2]) for i in [-2,-1,1,2]]
68         Tau=[(float(i)/(D[i]*abs(i)))*(P[(x2+i)%N]-P[x2]) for i in [-2,-1,1,2]]
69         TTT=(1./6)*(-Tau[3]+4*Tau[2]+4*Tau[1]-Tau[0])
70         D=[norm(P[(x2+1+i)%N]-P[(x2+1)%N]) for i in [-2,-1,1,2]]
71         Tau=[(float(i)/(D[i]*abs(i)))*(P[(x2+1+i)%N]-P[(x2+1)%N]) for i in [-2,-1,1,2]]
72         TTTT=(1./6)*(-Tau[3]+4*Tau[2]+4*Tau[1]-Tau[0])
73         return -dot(J,0.5*(1-x)*TTT+0.5*(1+x)*TTT)
74     def FInt(x,x2):
75         return InCurv(x,x2)*dot(Vect(x,x2),Vect2(x,x2))/norm(P[j]-0.5*(1-x)*P[x2]-0.5*(1+x)*P[(x2+1)%N])
76     aux=range(N)
77     aux.remove(j)
78     for k in aux:
79         i1=(5./9)*Fk(sqrt(3./5),k)+(8./9)*Fk(0.0,k)+(5./9)*Fk(-sqrt(3./5),k)
80         i2=(5./9)*Fk1(sqrt(3./5),k)+(8./9)*Fk1(0.0,k)+(5./9)*Fk1(-sqrt(3./5),k)
81         H[j][k]=H[j][k]-(d[k]/(8*pi))*i1
82         H[j][(k+1)%N]=H[j][(k+1)%N]-(d[k]/(8*pi))*i2
83         f1=(1./(4*pi))*d[k]*((5./9)*FInt(sqrt(3./5),k)+(8./9)*FInt(0.0,k)+(5./9)*FInt(-sqrt(3./5),k))
84         F[j]=F[j]+f1
85         cte1=dot(P[j]-P[(j+1)%N],dot(-J,T[j]))
86         cte2=dot(P[j]-P[(j+1)%N],dot(-J,T[(j+1)%N]))
87         cte3=dot(-P[j]+P[j-1],dot(-J,T[j-1]))
88         cte4=dot(-P[j]+P[j-1],dot(-J,T[j]))
89         F[j]=F[j]+(1./(16*pi))*cte2*(kappa[j]*4./3+kappa[(j+1)%N]*8./3)
90         F[j]=F[j]+(1./(16*pi))*cte4*(kappa[j-1]*4./3+kappa[j]*8./3)
91         F[j]=F[j]+(1./(16*pi))*cte1*(kappa[j]*8./3+kappa[(j+1)%N]*4./3)
92         F[j]=F[j]+(1./(16*pi))*cte3*(kappa[j]*4./3+kappa[j-1]*8./3)
93         F[j]=-beta*F[j]-beta*(0.5*kappa[j])
94         F[j]=F[j]+q*log(1./norm(P[j]-array([0.,1.]))) / (2*pi*norm(P[j]-array([0.,1.])))
95         F[j]=F[j]+q*log(1./norm(P[j]-array([-0.5,-1.]))) / (2*pi*norm(P[j]-array([-0.5,-1.])))
96         F[j]=F[j]-4.2*q*log(1./norm(P[j]-array([0.,0.]))) / (2*pi*norm(P[j]-array([0.,0.])))
97         s1=-(d[j]/(8*pi))*(-3+2.*log(d[j])) #contrib al j
98         s2=-(d[j-1]/(8*pi))*(-1+2.*log(d[j-1])) #contribuye al j-1
99         s22=-(d[j-1]/(8*pi))*(-3+2.*log(d[j-1])) #contribuye al j
100        ss1=-(d[j]/(8*pi))*(-1+2.*log(d[j])) #contib al j+1
101        H[j][j]=H[j][j]+s1+s22
102        H[j][j-1]=H[j][j-1]+s2
103        H[j][(j+1)%N]=H[j][(j+1)%N]+ss1
104        v=linalg.solve(H,F)
105        dl=beta*sum(kappa)
106        for j in range(N-1):
107            b[j]=(1*h-d[j])/dt
108        b[N-1]=0.
109        alp2=linalg.solve(A,b)

```

```

110     for j in range(N):
111         D=[norm(P[(j+i)%N]-P[j]) for i in [-2,-1,1,2]]
112         Tau=[(float(i)/(D[i]*abs(i)))*(P[(j+i)%N]-P[j]) for i in [-2,-1,1,2]]
113         K=-(2*mu/(D[2]+D[1]))*(Tau[2]-Tau[1])-2*((1-mu)/(D[3]+D[0]))*(Tau[3]-Tau[0])
114         kappa[j]=dot(K,dot(-J,T[j]))
115         act=P[j]+v[j]*dot(-J,T[j])*dt+dt*alp[j]*(1./d[j])*(P[(j+1)%N]-P[j])*T[j]
116         L.append(act)
117     P=deepcopy(L)
118     if (kt%150)==0:
119         xx=[L[i][0] for i in range(N)]
120         yy=[L[i][1] for i in range(N)]
121         xx.append(xx[0])
122         yy.append(yy[0])
123         grid(True)
124         plot(xx,yy,'o-',color='k',alpha=float(kt+0.6)/(lim+0.6),ms=1.8)
125         draw()

```


Bibliografía

- [1] Agranovich, M.S., M. Capinski, Y.V. Egorov, S.D. Ejdel'man, M.A. Shubin, R. Cooke, S.Z. Levendorskij y B. Paneah: *Partial Differential Equations VI: Elliptic and Parabolic Operators*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [2] Burger, Martin, Yanina Landa, Nicolay M. Tanushev y Richard Tsai: *Algorithmic Foundation of Robotics VIII: Selected Contributions of the Eight International Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [3] Carmo, M.P. do: *Riemannian Geometry*. Mathematics (Birkhäuser) theory. Birkhäuser Boston, 1992.
- [4] Chen, Bing Long L. y Le Yin: *Uniqueness and pseudolocality theorems of the mean curvature flow*. Communications in Analysis and Geometry, 15(3):435–490, 2007.
- [5] Chopp, David L. y James A. Sethian: *Flow under curvature: singularity formation, minimal surfaces, and geodesics*. Experiment. Math., 2(4):235–255, 1993.
- [6] Chou, K.S. y X.P. Zhu: *The Curve Shortening Problem*. CRC Press, 2001.
- [7] DeTurck, Dennis M.: *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors*. Journal of Differential Geometry, 18(1):157–162, 1983.
- [8] Dieudonne, J., P.K. Smith y S. Eilenberg: *Treatise on Analysis*. Número v. 1. Academic Press, 1960.
- [9] Evans, L.C.: *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [10] Flores, P., J. Ambrósio, J.C.P. Claro y H.M. Lankarani: *Kinematics and Dynamics of Multibody Systems with Imperfect Joints: Models and Case Studies*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

BIBLIOGRAFÍA

- [11] Friedman, A.: *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2008.
- [12] Garroni, M.G. y J.L. Menaldi: *Second Order Elliptic Integro-Differential Problems*. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series. CRC Press, 2002.
- [13] Georgiev, Todor: *Computer Vision – ECCV 2006: 9th European Conference on Computer Vision, Graz, Austria, May 7-13, 2006, Proceedings, Part IV*, capítulo Covariant Derivatives and Vision, páginas 56–69. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [14] Gerhard, Huisken y Polden Alexander: *Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Cetraro, Italy, June 15–22, 1996*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [15] Gilbarg, D. y N.S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. U.S. Government Printing Office, 2001.
- [16] Halldorsson, Hoeskuldur P.: *Self-similar solutions to the curve shortening flow*. Transactions of the American Mathematical Society, 364(10):5285 – 5309, 2012.
- [17] Holm, D.D., T. Schmah, C. Stoica y D.C.P. Ellis: *Geometric mechanics and symmetry: from finite to infinite dimensions*. Oxford texts in applied and engineering mathematics. Oxford University Press, 2009.
- [18] Jost, J.: *Partial Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.
- [19] Kimura, M.: *Accurate numerical scheme for the flow by curvature*. Appl. Math. Lett., 7(1):69–73, 1994.
- [20] Kimura, Masato: *Numerical analysis of moving boundary problems using the boundary tracking method*. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 14(3):373–398.
- [21] Kythe, P.K. y M.R. Schäferkötter: *Handbook of Computational Methods for Integration*. Taylor & Francis, 2004.
- [22] Ladyzhenskaiia, O.A., V.A. Solonnikov y N.N. Ural'tseva: *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*. American Mathematical Society, translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, 1988.
- [23] Lauret, Jorge: *Evolución geométrica de curvas y métricas*. En *Proceedings of the XIth “Dr. Antonio A. R. Monteiro” Congress (Spanish)*, Actas Congr. “Dr. Antonio A. R. Monteiro”, páginas 83–97. Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 2012.

- [24] Lee, J.M.: *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.
- [25] Ling, Leevan, Y. C. Hon y M. Yamamoto: *Inverse source identification for Poisson equation*. Inverse Problems in Science and Engineering, 13(4):433–447, 2005.
- [26] Malladi, R. y J.A. Sethian: *Image Processing: Flows under Min/Max Curvature and Mean Curvature*. Graphical Models and Image Processing, 58(2):127 – 141, 1996.
- [27] Mantegazza, C.: *Lecture Notes on Mean Curvature Flow*. Progress in Mathematics. Springer Basel, 2011.
- [28] Mantegazza, C. y L. Martinazzi: *A Note on Quasilinear Parabolic Equations on Manifolds*. ArXiv e-prints, Octubre 2010.
- [29] Mullins, W. W.: *Two-Dimensional Motion of Idealized Grain Boundaries*. Journal of Applied Physics, 27(8):900–904, 1956.
- [30] Ohe, Takashi y Kohzaburo Ohnaka: *Boundary element approach for an inverse source problem of the Poisson equation with a one-point-mass like source*. Applied Mathematical Modelling, 18(4):216 – 223, 1994.
- [31] O’Neill, B.: *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1983.
- [32] Osher, S. y R. Fedkiw: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2003.
- [33] Osher, Stanley y James A Sethian: *Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*. Journal of Computational Physics, 79(1):12 – 49, 1988.
- [34] Palmas, O. y H. Sánchez: *Geometría Riemanniana*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2007.
- [35] Pao, C.V.: *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Fems Symposium. Springer US, 1992.
- [36] Pazy, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2012.
- [37] Sauter, S.A. y C. Schwab: *Boundary Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

- [38] Sethian, J.A.: *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1999.
- [39] Sharples, Jason J.: *Linear and quasilinear parabolic equations in Sobolev space*. Journal of Differential Equations, 202(1):111 – 142, 2004.
- [40] Stahl, Axel: *Convergence of solutions to the mean curvature flow with a Neumann boundary condition*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 4(5):421–441, 1996.
- [41] Stahl, Axel: *Regularity estimates for solutions to the mean curvature flow with a Neumann boundary condition*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 4(4):385–407, 1996.
- [42] T. Colding, W. Minicozzi, E. Pedersen: *Mean Curvature Flow*. Bull. Amer. Math. Soc., 52:297 – 333, 2015.
- [43] Topping, P.: *Lectures on the Ricci Flow*. Lecture note series. Cambridge University Press, 2006.
- [44] Wu, Z., J. Yin y C. Wang: *Elliptic and Parabolic Equations*. World Scientific, 2006.
- [45] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: Fixed point theorems*. Número v. 1 en *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*. Springer-Verlag, 1985.
- [46] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: Linear Monotone Operators*. Número v. 2 en *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*. Springer-Verlag, 1990.
- [47] Zhang, Z.: *Variational, Topological, and Partial Order Methods with Their Applications*. Developments in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [48] Zhu, X.P.: *Lectures on Mean Curvature Flows*. AMS/IP studies in advanced mathematics. American Mathematical Soc.