



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Correlaciones cuánticas y su cálculo en sistemas  
simples

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Mario Pérez Jiménez

TUTOR

Dr. Ramón Lopez Peña



Ciudad Universitaria, CDMX, 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado.

1. Datos del alumno

Pérez

Jiménez

Mario

58 41 29 98

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

2. Datos del tutor

Dr

Ramón

López

Peña

3. Datos del sinodal 1

Dr

Jorge Gustavo

Hirsch

Ganievich

4. Datos del sinodal 2

Dr

Carlos Francisco

Pineda

Zorrilla

5. Datos del sinodal 3

Dr

Erick Leonardo

Patiño

Jaidar

6. Datos del sinodal 4

Dr

Eduardo

Nahmad

Achar

7. Datos del trabajo escrito

Correlaciones cuánticas y su cálculo en sistemas simples

88 p

2016

# Dedicatoria

Este texto esta dedicado a todo aquel que tenga curiosidad acerca del funcionamiento de la naturaleza.

# Agradecimientos

Agradezco a mis padres y a mi hermana por siempre brindarme su apoyo incondicional.

A todos mis profesores, especialmente a la Dr. Susana Orozco Segovia por el apoyo brindado en mi primer proyecto fuera del aula y al Dr. Ramón López Peña por la confianza y la paciencia que invirtió en mí.

A todos mis amigos...

Agradezco el apoyo otorgado por el programa PAPIIT en el proyecto IN110114.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Fundamentos</b>	<b>11</b>
1.1. Información en sistemas clásicos . . . . .	11
1.1.1. Probabilidad e información mutua . . . . .	12
1.2. Mediciones en mecánica cuántica . . . . .	19
1.2.1. Matriz de estado . . . . .	19
1.2.2. Mediciones proyectivas . . . . .	19
1.2.3. POVM . . . . .	20
1.2.4. Procesos de purificación . . . . .	21
1.3. Sistemas compuestos . . . . .	22
1.4. Descomposición de Schmidt . . . . .	27
1.5. Generalización de los conceptos de información . . . . .	29
1.6. Desigualdades entrópicas . . . . .	32
1.6.1. Convexidad de la entropía relativa cuántica . . . . .	35
<b>2. Correlaciones en sistemas físicos</b>	<b>39</b>
2.1. Correlaciones clásicas . . . . .	39
2.2. Enredamiento . . . . .	41
2.2.1. Condiciones y pruebas sobre la medida de distancia . . . . .	42
2.2.2. El enredamiento para un estado puro . . . . .	52
2.2.3. Propiedades del enredamiento . . . . .	57
2.2.4. Algoritmo que calcula el enredamiento. . . . .	61
2.2.5. Ejemplos . . . . .	62
2.3. Discordia cuántica . . . . .	64
2.4. Ejemplos del cálculo de correlaciones . . . . .	64

2.4.1. Estado separable . . . . .	64
2.4.2. Interpolación de estados estados extremos . . . . .	65
2.4.3. Estado de Werner . . . . .	68
<b>3. Interpretación geométrica de las correlaciones</b>	<b>75</b>
3.1. Estado de Werner . . . . .	79
<b>4. Conclusiones</b>	<b>83</b>
<b>A. Cálculo numérico del enredamiento</b>	<b>87</b>

# Introducción

La mecánica cuántica fue la solución a varios problemas de la física de los años 1920, como eran la *catástrofe ultravioleta*, el modelo atómico y algunas energías infinitas. Desde la formulación de la mecánica cuántica, ésta ha sido sumamente exitosa y se ha convertido en una parte clave de la ciencia. Se ha utilizado para describir la superficie y el centro del Sol, la estructura del átomo, la fusión nuclear de estrellas, los superconductores, el ADN y las partículas elementales, por mencionar algunos ejemplos. Una de las críticas más fuertes contra la mecánica cuántica es la incompatibilidad con la teoría de la relatividad de Einstein. Durante varias generaciones, los físicos han intentado generar formulaciones de la mecánica cuántica más comprensibles. Uno de los objetivos de la información cuántica, es el de desarrollar herramientas que permitan a los científicos tener una visión diferente de nuestro mundo y aumentar nuestra intuición acerca de la mecánica cuántica.

Por ejemplo, en la década de 1980 hubo un gran interés en utilizar efectos cuánticos para generar una señal que viajara más rápido que la velocidad de la luz. Para realizar esta hazaña, era necesaria la clonación de un estado cuántico. Si la clonación era posible, entonces se podría tener una señal que viajara más rápido que la luz usando efectos cuánticos. Sin embargo, la clonación de estados cuánticos no es posible, a diferencia de la clonación de estados clásicos. El *teorema de no-clonación*, demostrado cerca de 1980, es uno de los primeros resultados concernientes a la teoría de información cuántica. En los años posteriores dicha teoría fue desarrollada ampliamente obteniendo resultados sumamente interesantes como: la manipulación de sistemas de pocos átomos en trampas ópticas, la criptografía cuántica, la corrección cuántica de errores y los algoritmos de búsqueda y factorización, por mencionar algunos.

Por otro lado, tomando en cuenta el problema de la comunicación, en 1948 Claude Shannon publicó varios artículos esenciales, estableciendo la teoría moderna de la comunicación. En el capítulo de fundamentos de la presente tesis se estudia la teoría de la información clásica. Von Neumann fue el encargado de realizar las definiciones análogas en el caso de sistemas cuánticos. Una de las mayores diferencias entre un sistema clásico y uno cuántico, es que sólo éste último puede presentar enredamiento. Dicha característica de los sistemas cuánticos representa un rol vital en casi todas las aplicaciones de información y computación cuántica. En los últimos años, ha habido un esfuerzo considerable por entender el enredamiento como un

recurso de la naturaleza, así como de cuantificarlo para utilizar sus propiedades para el envío y recepción de información.

En este texto se intenta responder a la pregunta ¿qué tan diferente es un sistema clásico de uno cuántico en términos de correlaciones? Ésta es una pregunta compleja, ya que la información contenida en un sistema cuántico es difícil de cuantificar.

En el capítulo de fundamentos de esta tesis se estudian las cantidades relevantes para la transmisión de información clásica. De igual manera se estudia la teoría básica de mediciones y el formalismo de estados en mecánica cuántica, además de la generalización de los conceptos de información clásica. En este punto, se hace especial énfasis en la entropía relativa cuántica debido a que, posteriormente ésta será clave en el texto. Asimismo, en este capítulo se estudia el formalismo del producto tensorial de espacios de Hilbert para describir a sistemas bipartitas; además se hace una especial mención del Teorema de Schmidt y además se muestra una serie de demostraciones útiles sobre operadores en espacios de Hilbert.

En el capítulo 2, se definen diferentes tipos de correlaciones: las correlaciones clásicas, el enredamiento y la discordia. Primero se estudian sus definiciones originales, basadas en las mediciones POVM estudiadas en el capítulo anterior. En el caso del enredamiento, éste se define utilizando la entropía relativa, de la cual se prueban varias propiedades. Dichas propiedades son utilizadas para satisfacer las características necesarias de una buena medida de enredamiento. Después, se prueban algunas propiedades interesantes sobre el enredamiento basado en la entropía relativa. Para estados bipartitos de dos qubits, se programa un algoritmo en el lenguaje *Python* el cual, permite calcular el estado desenredado más cercano y el enredamiento. Al final de este capítulo, se dan ejemplos donde se calculan las correlaciones; estos ejemplos son simples, pero permiten observar las sutiles diferencias entre las correlaciones. Después de este cálculo, se hace una discusión sobre el hecho de que las correlaciones clásicas y el enredamiento no saturan las correlaciones totales.

En el último capítulo, se utiliza la entropía relativa para establecer un marco general para las correlaciones. Con esto se intenta calcular todas las correlaciones usando un criterio en común y además poder generalizar estas correlaciones a estados multipartitos de dimensiones arbitrarias. Como comprobación se reproducen los resultados del capítulo anterior con este enfoque. De esta forma se espera resolver la pregunta central de este texto, obteniendo una descomposición exacta de las correlaciones en un sistema físico y dando una interpretación de cada una de ellas.

Es necesario mencionar que este texto contiene una cantidad considerable de demostraciones y cálculos muy detallados. Esto se hace con la intención de ofrecer un panorama completo al lector, es decir, que el lector encuentre los cálculos específicos relacionados con la entropía relativa y las correlaciones clásicas para estados simples; sin la necesidad de consultar un número considerable de textos. Del mismo modo

se colocan ejemplos y comentarios que clarifican las definiciones.

Los conceptos básicos sobre la teoría de Información Cuántica se tomaron de textos recomendados para nivel Licenciatura, mientras que los conceptos sobre correlaciones cuánticas y clásicas se tomaron principalmente de los artículos [9, 22, 23]. La representación geométrica de las correlaciones está basada en [16]. El programa en *Python* fue programado por el autor de este texto usando las recomendaciones en [16].



# Capítulo 1

## Fundamentos

Los conceptos desarrollados en este capítulo fueron tomados de los textos [8, 24, 17].

### 1.1. Información en sistemas clásicos

La información está presente en todas las actividades del ser humano. Medir la cantidad de información en un sistema físico es de suma importancia. Establecer una definición consistente y general, sobre la información contenida en un sistema físico es de suma importancia. La información, si se medita un momento, está íntimamente relacionada con la probabilidad. La definición formal de entropía está fundamentada en un concepto similar al explicado a continuación. Se toma un evento cualquiera, por ejemplo el evento: *Hay un tornado en la ciudad de México*. El evento anterior tiene una probabilidad de ocurrencia muy baja, por lo cual la cantidad de información que provee es alta. En cambio, el mensaje: *La temperatura ambiente en la ciudad de México es de 21°* es un acontecimiento común, por lo cual la probabilidad de ocurrencia del mensaje es alta. La cantidad de información que provee es pequeña.

Con el ejemplo anterior, se puede inferir que la cantidad de información contenida en un evento es inversamente proporcional a la probabilidad de ocurrencia de éste. Ahora se consideran dos eventos independientes. El primero, la probabilidad de tener lluvia el día de hoy. El segundo, la probabilidad de obtener un cinco al lanzar un dado. Se supone que la probabilidad de ocurrencia de cada suceso es de 50% y de 20%, respectivamente. Se desea que la cantidad de información total, si ambos eventos ocurren, sea la suma de la información de cada evento. La probabilidad de los eventos independientes es la multiplicación de las probabilidades de los eventos individuales. La función logaritmo es una función que posee las propiedades deseadas. Con las justificaciones anteriores en mente, se construye la definición de información contenida en un evento:

$$I = \log_2 \left( \frac{1}{p} \right). \quad (1.1)$$

A lo largo del texto sólo se utilizará  $\log_2$ , por lo cual en lo sucesivo se omitirá la base del logaritmo. La unidades de medición de la información, depende de la base del logaritmo. La unidad de información aceptada es el bit, que se obtiene al usar  $\log_2$ . En caso de usar  $\ln$  a la unidad de información se le denomina nat. Un bit se define como la unidad de información que aporta un evento con una probabilidad de ocurrencia de un medio. La definición de información fue propuesta en 1948 por Claude E. Shannon, por lo cual ahora lleva su nombre. Esta definición es verdaderamente general, ya que sólo es necesario que exista un evento con cierta probabilidad.

Si ahora se considera un conjunto de eventos, es decir, una distribución de probabilidad, la entropía de Shannon de la distribución de probabilidad es

$$H(p) = - \sum_{i=1}^k p_i \log(p_i), \quad (1.2)$$

donde se denota la distribución de probabilidad como  $p = \{p_i\}_{i=1}^k$ . En esta definición tomamos  $0 \log(0) = 0$ .

### 1.1.1. Probabilidad e información mutua

Establecidos los conceptos básicos sobre la información, se usan conceptos de probabilidad para definir cantidades útiles en el cálculo de correlaciones en sistemas clásicos.

#### Entropía conjunta

Dada una distribución de probabilidad conjunta que depende de dos variables aleatorias  $x$  y  $y$ , se define la entropía conjunta como

$$H(p(x, y)) := H(x, y) = - \sum_{x, y} p(x, y) \log(p(x, y)). \quad (1.3)$$

Dicha entropía mide la cantidad de información que se encuentra contenida en la distribución conjunta.

#### Ejemplo 1.1.1.

La entropía conjunta para la distribución de probabilidad de dos monedas justas lanzadas simultáneamente. En esta distribución todos los eventos tienen probabilidad  $\frac{1}{4}$ . Hecha esta observación, se puede calcular la entropía de la distribución de probabilidad  $\{p_i\}_{i=1}^4$ :

$$H(p) = - \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \log\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \text{ bits.}$$

## Entropía relativa

Dada una distribución de probabilidad conjunta, se puede definir la probabilidad marginal de una variable. Se define como

$$P(x) = \sum_y P(x, y),$$

y de modo análogo para la variable  $Y$ . Utilizando la probabilidad condicional es posible definir la entropía relativa entre dos distribuciones de probabilidad que poseen el mismo número de variables, es decir,  $\{p(x)\}_{x=1}^{x=k}$  y  $\{q(y)\}_{y=1}^{y=k}$  del siguiente modo:

$$\begin{aligned} D(p||q) &:= \sum_x p(x) \log \left( \frac{p(x)}{q(x)} \right) & (1.4) \\ &= \sum_x p(x) \log(p(x)) - \sum_x p(x) \log(q(x)) \\ &= - \sum_x p(x) \log(q(x)) - H(x). \end{aligned}$$

La entropía relativa representa la diferencia entre la información calculada con los eventos de  $q$  distribuidos de acuerdo a  $p$ , y la entropía de la variable  $p$ . La entropía relativa es no negativa. Si  $p = q$ , entonces la entropía relativa es cero. A continuación se muestra la prueba de la última observación.

### Observación 1.1.1.

La entropía relativa clásica es no negativa para cualesquiera probabilidades  $p(x)$  y  $q(y)$

$$D(p(x)||q(x)) \geq 0. \quad (1.5)$$

*Demostración.* La prueba radica en la siguiente desigualdad

$$\ln(x) \leq x - 1 \quad \text{con } x > 0, \quad (1.6)$$

la igualdad se alcanza en  $x = 1$ . La gráfica de dichas funciones se muestra en la figura 1.1. Considerando

la siguiente serie de desigualdades:

$$\begin{aligned}
 D(p(x)||q(x)) &= \sum_x p(x) \log \left( \frac{p(x)}{q(x)} \right) \\
 &= -\frac{1}{\ln(2)} \sum_x p(x) \ln \left( \frac{q(x)}{p(x)} \right) \\
 &\geq \frac{1}{\ln(2)} \sum_x p(x) \left( 1 - \frac{q(x)}{p(x)} \right) \\
 &= \frac{1}{\ln(2)} \left( \sum_x p(x) - \sum_x q(x) \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

En la última igualdad se considera el hecho de que tanto  $p(x)$  como  $q(x)$  son distribuciones de probabilidad. □

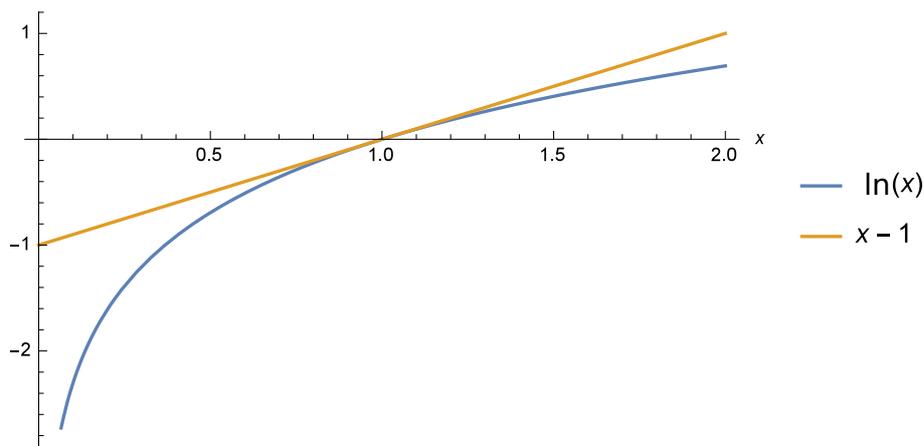


Figura 1.1: Gráfica de las funciones  $\ln(x)$  y  $x - 1$ .

La demostración de la desigualdad (1.28) se muestra a continuación

*Demostración.* Primero es necesario probar que la función  $\ln$  es estrictamente cóncava se utiliza el teorema 12.19 en [3] el cual establece

**Teorema 1.1.1.** *Sea  $I$  un intervalo abierto y suponga que  $f$  una función real tiene segunda derivada en  $I$ . Entonces  $f$  es estrictamente cóncava en  $I$ , si y sólo si*

$$f''(x) < 0.$$

Con lo cual para el caso  $f = \ln$  se tiene  $\frac{d}{dx} \ln = -\frac{1}{x^2} < 0$  para  $x > 0$  con lo cual  $\ln$  es estrictamente

cóncava. Ahora utilizando el teorema del valor medio para funciones reales cóncavas ([3] 12.21) se tiene

$$\begin{aligned}\ln(x) - \ln(1) &\leq \left( \frac{d}{dx} \ln(x) \Big|_{x=1} \right) (x - 1) \\ \ln(x) - \ln(1) &\leq (x - 1) \\ \ln(x) &\leq (x - 1)\end{aligned}$$

□

### Ejemplo 1.1.2.

Para ilustrar el concepto se calcula la entropía relativa de dos distribuciones iguales  $x$  y  $y$ , ambas con cuatro eventos con probabilidad  $\frac{1}{4}$  cada uno.

$$\begin{aligned}D(x||y) &= - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_i(x) \log \left( \frac{p(x)}{p(y)} \right) \\ &= - \log(1) \\ &= 0.\end{aligned}$$

### Entropía condicional

Dada una probabilidad condicional  $\{p(x|y)\}_x$ , la entropía de  $x$  está dada por  $H(x|y = a) := H(p(x|y = a))$  cuando la variable aleatoria toma el valor de  $a$ . Al valor esperado de esta entropía con respecto a la distribución de probabilidad  $y$  se le llama *entropía condicional* denotada por  $H(x|y)$ . Dicha entropía condicional está definida como

$$H(x|y) := - \sum_x \sum_y p(y) p(x|y) \log(p(x|y)) \quad (1.7)$$

$$= - \sum_{x,y} p(x,y) \log \left( \frac{p(x,y)}{p(y)} \right) \quad (1.8)$$

$$= - \sum_{x,y} p(x,y) \log(p(x,y)) + \sum_{x,y} p(x,y) \log(p(y))$$

$$= H(x,y) + \sum_y \log(p(y)) \sum_x p(x,y)$$

$$= H(x,y) + \sum_y \log(p(y)) p(y)$$

$$= H(x,y) - H(y).$$

Es necesario mencionar que las identidades usadas en la ecuación (1.8) son exclusivas de la probabilidad clásica, por ejemplo la relación  $p(x, y) = p(y)p(x|y)$  carece de sentido en el contexto cuántico. Esto debido a que en la teoría cuántica, no es posible asignar una probabilidad conjunta a mediciones físicas relacionadas con observables que no conmutan. Por ejemplo, en el modelo del átomo de Hidrógeno puede predecir una probabilidad conjunta para el momento angular total, energía, y el momento angular en la dirección  $z$  para cualquier estado; pero nunca se puede establecer una probabilidad conjunta para la posición, la energía y el momento, ni para la componente  $z$  del momento angular y la componente  $x$  del momento angular.

**Ejemplo 1.1.3.**

Se calcula la entropía condicional, para la distribución de probabilidad de las dos monedas justas:

$$H(x|y) = 2\text{bit} - 1\text{bit} = 1\text{bit}.$$

En este caso como  $\forall x$  y  $\forall y$   $p(x) = p(y)$ , se tiene que  $H(x|y) = H(y|x)$ .

La entropía de Shannon es una función cóncava, dicha propiedad que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\alpha H(p) + (1 - \alpha)H(p') \leq H(\alpha p + (1 - \alpha)p'), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (1.9)$$

**Información mutua**

La información mutua se puede interpretar de manera clásica como la correlación entre dos variables aleatorias. La información mutua está definida como

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \sum_{x,y} p(x, y) \log \left( \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right) \\ &= \sum_{x,y} p(x, y) \log(p(x, y)) - \sum_{x,y} p(x, y) \log(p(x)p(y)) \\ &= -H(x, y) - \sum_{x,y} p(x, y) \log(p(x)) - \sum_{x,y} \log(p(y)) \\ &= H(x) + H(y) - H(x, y). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Se puede expresar la información mutua en términos de las definiciones anteriores. Dichas identidades son

$$\begin{aligned} I(x, y) &= H(x) - H(x|y) \\ &= H(y) - H(y|x). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Si las variables aleatorias de la distribución de probabilidad conjunta son independientes, entonces la información mutua es cero. La información mutua es simétrica, es decir  $I(x, y) = I(y, x)$ . Esta identidad se deriva de la simetría de la entropía conjunta y de las identidades de la ecuación (1.11).

Por otro lado, es posible expresar la información mutua en términos de la entropía relativa. La información mutua es la entropía relativa entre una distribución de probabilidad conjunta  $p(x, y)$  y su

distribución completamente descorrelacionada  $p(x)p(y)$ , es decir,

$$D(p(x, y)||p(x)p(y)) = \sum_{x, y} p(x, y) [\log(p(x, y)) - \log(p(x)) - \log(p(y))] \quad (1.12)$$

$$= H(x) + H(y) - H(x, y)$$

$$= I(x, y) \quad (1.13)$$

En la figura 1.2 se presenta un diagrama comparativo de las cantidades definidas en esta sección.

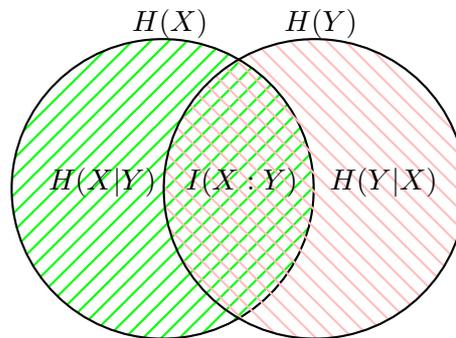


Figura 1.2: Diagrama de comparación entre las distintas medidas de información.

## 1.2. Mediciones en mecánica cuántica

Los conceptos básicos de la teoría cuántica expresados a continuación fueron tomados de [8].

### 1.2.1. Matriz de estado

En la práctica, la mayoría de las veces es imposible producir un sólo estado cuántico, debido a esto se considera un conjunto de estados. El sistema a estudiar puede hallarse en cualquiera de estos estados, con cierta probabilidad. A los sistemas cuánticos que están completamente caracterizados por un vector  $|\psi\rangle$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  se les conoce como estados puros.

Cualquier estado en mecánica cuántica está descrito por una matriz Hermitiana, llamada matriz de densidad. Cualquier matriz de densidad cumple con las siguientes propiedades:

- La suma de las entradas de la diagonal de una matriz de densidad es uno. Esto debido a que dichos elementos son las probabilidades de encontrar al sistema en los diferentes estados permitidos, es decir,  $\text{Tr}(\rho) = 1$ .
- Una matriz de densidad es una matriz positiva semi-definida, es decir,  $\rho \geq 0$ .
- Una matriz de densidad es Hermitiana, es decir,  $\rho = \rho^\dagger$ .

La matriz de densidad es un operador que actúa sobre elementos del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , al conjunto de matrices de densidad que actúan sobre  $\mathcal{H}$  se le denotará como  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ . El vasto número de matrices de densidad de estado se puede clasificar en dos grandes grupos: los estados puros y los estados mixtos.

Un estado puro tiene la propiedad de que su matriz de densidad se puede expresar como  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ . En cambio un estado se considera mixto si su matriz de densidad se puede escribir de la siguiente forma  $\sum_i \alpha_i |u_i\rangle\langle u_i|$ , donde  $\{|u_i\rangle\} \in \mathcal{H}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$  y  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  satisface  $\sum_i \alpha_i = 1$ .

Una manera sencilla de comprobar que una matriz es positiva semi-definida es calcular sus eigenvalores, ya que los eigenvalores de una matriz positiva semi-definida son no negativos. Otro consejo útil para distinguir a la matriz de densidad de un estado puro de la de un estado mezcla, de manera sencilla, es calcular la cantidad  $\text{Tr}(\rho^2)$ , tomando en cuenta que para un estado puro  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ , mientras que para un estado mezcla  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ .

### 1.2.2. Mediciones proyectivas

Las mediciones proyectivas, también llamadas mediciones *Von Neumann*, son un tipo particular de mediciones en mecánica cuántica. Un operador proyectivo puede representarse con una matriz Hermitiana

que cumple las siguientes propiedades:

$$P = P^\dagger, \quad P^2 = P.$$

Estos operadores proyectivos, cumplen una relación de ortonormalidad, es decir,  $P_i P_j = \delta_{i,j} P_i$ . Además deben de cumplir la siguiente relación conocida como relación de completéz  $\sum_j P_j = \mathbb{I}$ , donde  $\mathbb{I}$  denota la matriz identidad.

### 1.2.3. POVM

Una medición sobre un estado en mecánica cuántica está descrita de la manera más general por un conjunto de matrices Hermitianas denotadas por  $M = \{M_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ . Dichas matrices cumplen las siguientes propiedades:

$$M_\omega \geq 0, \quad \sum_{\omega \in \Omega} M_\omega = \mathbb{I}. \quad (1.14)$$

Al conjunto de operadores positivos  $M = \{M_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , se le llama *Medición con operadores de valores positivos* (POVM). Estos operadores no son necesariamente matrices de proyección. Un breve esquema sobre una medición en mecánica cuántica es el mostrado en la figura 1.3

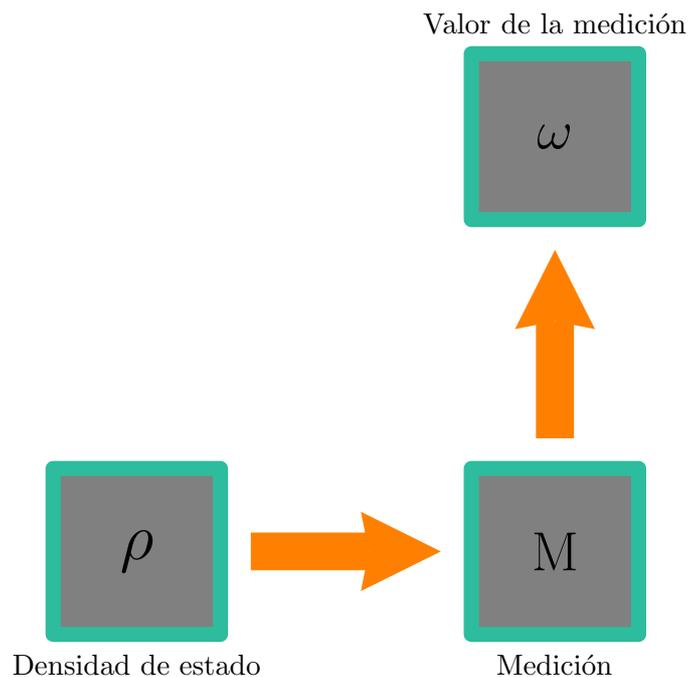


Figura 1.3: Esquema de medición en mecánica cuántica.

La probabilidad de obtener el valor  $\omega$  en una medición correspondiente al *POVM*  $\mathbf{M} = \{M_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , está dada por

$$P_\rho^M(\omega) = \text{Tr}(\rho M_\omega) \quad (1.15)$$

Esta definición cumple las siguientes propiedades:

$$\sum_{\omega} \text{Tr}(\rho M_\omega) = 1, \quad \text{Tr}(\rho M_\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Dichas propiedades están relacionadas íntimamente con las propiedades de una distribución de probabilidad. Los postulados de la mecánica cuántica establecen que la matriz de densidad después de la medición queda determinada por

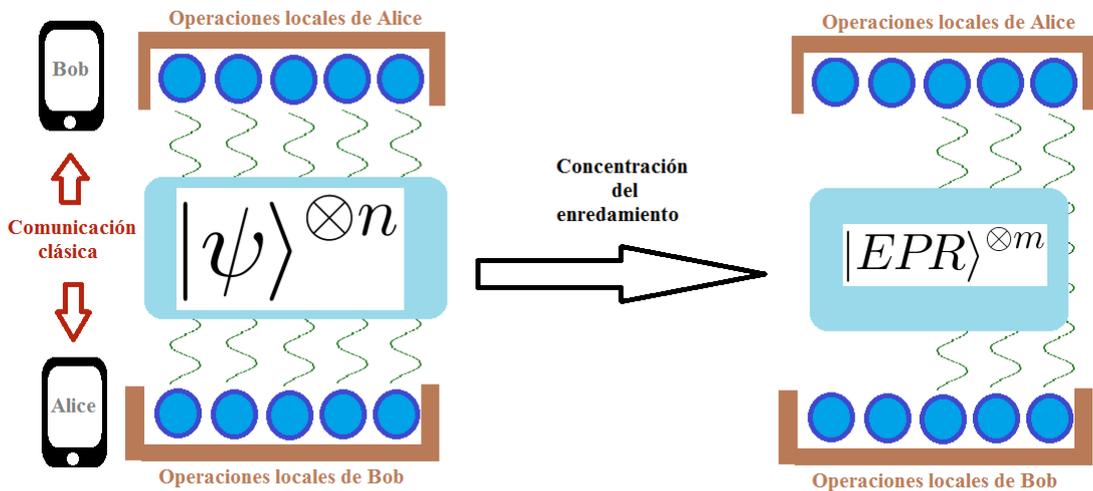
$$\rho^\omega = \frac{M_\omega \rho M_\omega^\dagger}{\text{Tr}(M_\omega \rho M_\omega^\dagger)}. \quad (1.16)$$

#### 1.2.4. Procesos de purificación

Existen tres diferentes ingredientes envueltos en el proceso de *concentrar* el enredamiento en un sistema cuántico. Este protocolo de concentración puede ser llevado a cabo como se menciona a continuación. Se consideran dos sujetos Alice y Bob separados cierta distancia en el espacio, cada uno comparte un elemento de  $n$  pares de estados cuánticos  $|\psi\rangle$  donde  $|\psi\rangle$  se puede expresar como

$$|\psi\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle.$$

Con lo cual es posible concentrar el enredamiento mediante procesos de purificación en  $m$  pares de los originales  $n$  estados con cierto enredamiento, siempre que  $m < n$ . Un esquema de este protocolo se muestra a continuación. Estos procesos de purificación sólo permiten aumentar el enredamiento de manera local,



es decir en los  $m$  pares del total de  $n$  en el protocolo discutido anteriormente. El proceso de purificación se lleva a cabo considerando una combinación de las siguientes operaciones [22]

1. *Mediciones locales generales (LGM)*: éstas son llevadas a cabo sobre dos subsistemas  $A$  y  $B$  separadamente y son descritas por dos conjuntos de operadores que satisfacen la relación de completez  $\sum_i A_i^\dagger A_i = \mathbb{I}_A$  y  $\sum_j B_j^\dagger B_j = \mathbb{I}_B$ . La acción conjunta de ambos está descrita por  $\sum_{ij} A_i \otimes B_j = \sum_i A_i \otimes \sum_j B_j$ , el cual es de nuevo un conjunto de medición completo y local.
2. *Comunicación clásica (CC)*: en este caso la acción de  $A$  y  $B$  puede estar correlacionada. Esto puede ser descrito por un POVM en el espacio completo  $A+B$  y no necesariamente se puede descomponer en una suma de productos directos de operadores, como en el caso anterior. Si  $\rho_{AB}$  describe el estado inicial compartido entre  $A$  y  $B$  entonces la transformación que comprende *LGM+CC* puede escribirse como

$$\Phi(\rho_{AB}) = \sum_i A_i \otimes B_i \rho_{AB} A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger, \quad (1.17)$$

donde  $\sum_i A_i^\dagger A_i B_i^\dagger B_i = \mathbb{I}$  es decir, las acciones de  $A$  y  $B$  están *correlacionadas*. A esta representación se le llama la representación de Kraus [15]. La correlación en la comunicación clásica surge de la posibilidad de que Alice realice una medición local en el subsistema  $A$  y comunique su resultado mediante un canal clásico (teléfono, e-mail, etc.) a Bob para que el realice cierta medición.

3. *Postselección (PS)*: se lleva a cabo en el ensemble final de acuerdo a los dos procedimientos mencionados con anterioridad. Matemáticamente se interpreta como una medición general que no es completa, es decir, que deja fuera algunas operaciones. La matriz de densidad que describe al nuevo estado obtenido (como un subconjunto del original) tiene que ser normalizada correctamente. Supongamos que se quiere mantener sólo los pares en los cuales se ha obtenido un resultado de la medición con los operadores  $A_i$  y  $B_j$ , entonces el estado del subconjunto escogido puede escribirse como

$$\rho_{AB} \rightarrow \frac{A_i \otimes B_i \rho_{AB} A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger}{\text{Tr}(A_i \otimes B_i \rho_{AB} A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger)}, \quad (1.18)$$

donde el denominador es la normalización requerida.

Una manipulación de alguna de las tres operaciones anteriores se considerara un proceso de purificación.

### 1.3. Sistemas compuestos

Los elementos de estados compuestos mencionados a continuación están tomados del texto [8]. Ahora, para poder generalizar las definiciones relacionadas con la información al caso de sistemas cuánticos, es

necesario considerar sistemas cuánticos compuestos. Para la descripción de estos sistemas es necesario estudiar la estructura del producto tensorial de dos o más espacios de Hilbert. Se toma el caso de un sistema compuesto por dos subsistemas  $A$  y  $B$ . Cada uno de los subsistemas tiene asociado un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente, mientras la matriz de densidad  $\rho$  del sistema completo es un operador en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{AB}$ . Cuando el subsistema  $\mathcal{H}_A$  ( $\mathcal{H}_B$ ) posee una base ortonormal  $\{|u_1^A\rangle, \dots, |u_{d_A}^A\rangle\}$  ( $\{|u_1^B\rangle, \dots, |u_{d_B}^B\rangle\}$ ), respectivamente, el espacio que representa al sistema completo  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  tiene como base  $\{|u_1^A\rangle \otimes |u_1^B\rangle, \dots, |u_1^A\rangle \otimes |u_{d_B}^B\rangle, |u_2^A\rangle \otimes |u_1^B\rangle, \dots, |u_2^A\rangle \otimes |u_{d_B}^B\rangle, \dots, |u_{d_A}^A\rangle \otimes |u_1^B\rangle, \dots, |u_{d_A}^A\rangle \otimes |u_{d_B}^B\rangle\}$ . La cardinalidad de este conjunto es  $d_A \times d_B$ . Usando  $d_A \times d_B$  números complejos  $(z^{i,j})$ , los elementos de  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  pueden ser escritos como  $\sum_{i,j} z^{i,j} |u_i^A\rangle \otimes |u_j^B\rangle$ . El producto tensorial de dos vectores  $u^A = \sum_k x^k |u_k^A\rangle$  y  $u^B = \sum_l y^l |u_l^B\rangle$ , se define como  $u^A \otimes u^B = \sum_{k,j} x^k y^j |u_k^A\rangle \otimes |u_j^B\rangle$ . Para simplificar la notación se define  $|u^A\rangle \otimes |u^B\rangle = |u^A, u^B\rangle$ . El producto tensorial  $X_A \otimes X_B$  de un operador  $X_A$  que actúa sobre elementos en  $\mathcal{H}_A$  y otro operador  $X_B$  que actúa sobre elementos en  $\mathcal{H}_B$  se define como

$$X_A \otimes X_B(|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle) = X_A(|u_i\rangle) \otimes X_B(|v_j\rangle). \quad (1.19)$$

La traza del producto tensorial de dos matrices se calcula como

$$\text{Tr}(X_A \otimes X_B) = \text{Tr}(X_A)\text{Tr}(X_B). \quad (1.20)$$

Además se define

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD). \quad (1.21)$$

Con lo cual podemos calcular

$$\text{Tr}((A \otimes B)(C \otimes D)) = \text{Tr}(AC)\text{Tr}(BD). \quad (1.22)$$

Existe un concepto análogo al de probabilidad marginal. Dicho concepto es el de estado reducido. El estado reducido al subsistema A es el que contiene la información concerniente sólo al subsistema A. Este estado reducido se denota por la matriz de densidad  $\text{Tr}_B \rho_{AB}$ . De modo análogo se define el estado reducido al subsistema B. Dichos estados reducidos se obtienen aplicando la operación de traza reducida. Para especificar el espacio en el cual se está reduciendo el sistema, se coloca un subíndice indicándolo. La traza reducida es un operador que actúa sobre matrices de densidad en el conjunto  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{AB})$  y devuelve matrices en el conjunto  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$  o  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$ . Por ejemplo la matriz de densidad reducida al subsistema A, se

define como  $\text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \rho_A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$ , y cumple

$$\text{Tr}(\text{Tr}_B(\rho_{AB})X) = \text{Tr}((X \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{H}_B})\rho). \quad (1.23)$$

De modo análogo se define  $\text{Tr}_A\rho$ . Así en el caso de un sistema compuesto, se define la matriz reducida en el subsistema A como  $\rho_A = \text{Tr}_B\rho_{AB}$ . De manera análoga se define  $\rho_B = \text{Tr}_A\rho_{AB}$ , la matriz reducida en el subsistema B. La traza parcial puede ser calculada de la siguiente forma:

$$\rho^{i,j} = \sum_{k=1}^{d_B} \langle u_i^A \otimes u_k^B | \rho | u_j^A \otimes u_k^B \rangle, \quad \text{Tr}_B\rho = \sum_{i,j} \rho^{i,j} |u_i^A\rangle\langle u_j^A|. \quad (1.24)$$

La última expresión puede escribirse como

$$\text{Tr}_B\rho = \sum_{i,k} \left( \sum_j \rho^{(i,j),(k,j)} \right) |u_i^A\rangle\langle u_k^A|, \quad (1.25)$$

donde

$$\rho = \sum_{i,j,k,l} \rho^{(i,j),(k,l)} |u_i^A, u_j^B\rangle\langle u_k^A, u_l^B|. \quad (1.26)$$

Denotando  $P_k$  como una proyección de  $\mathcal{H}_{AB}$  a  $\mathcal{H}_A \otimes u_k^B$ , la última expresión se reescribe como

$$\text{Tr}_B\rho = \sum_{k=1}^{d_B} P_k \rho P_k. \quad (1.27)$$

A continuación se introduce una definición de utilidad en el resto del texto.

**Definición 1.3.1.** *Se define el logaritmo natural de una matriz diagonalizable como*

$$\ln(\rho) = U \ln(\Delta) U^{-1}, \quad (1.28)$$

donde  $U$  es la eigendescomposición de la matriz  $\rho$ . La matriz  $\Delta$  es una matriz diagonal en la cual se encuentran los eigenvalores de la matriz  $\rho$ . La matriz  $U$  es una matriz que tiene como columnas los eigenvectores de  $\rho$ .

A continuación se prueban una serie de resultados de utilidad.

**Teorema 1.3.1** (Descomposición espectral.). *Cualquier operador hermitiano  $M$  en un espacio vectorial  $V$  es diagonal respecto a alguna base ortonormal para  $V$ .*

*Demostración.* La prueba se hace por inducción sobre la dimensión  $d$  del espacio. Para el caso  $d = 1$  no hay

nada que hacer. Sea  $\lambda$  un eigenvalor de  $M$ ,  $P$  el proyector sobre el subespacio generado por el eigenvector asociado a  $\lambda$  y  $Q$  el proyector sobre el complemento ortogonal. Entonces  $M = (P + Q)M(P + Q) = PMP + PMQ + QMP + QMQ$ . Por la definición de  $P$  se tiene  $PMP = \lambda P$ . Del mismo modo  $QMP = 0$ , ya que  $M$  mapea a  $P$  en sí mismo. Se asegura también que  $PMQ = 0$ . Para observar esto, sea  $|v\rangle$  un elemento del subespacio  $P$ . Entonces  $MM^\dagger|v\rangle = M^\dagger M|v\rangle = \lambda M^\dagger|v\rangle$ . Con lo cual  $M^\dagger|v\rangle$  tiene a  $\lambda$  como eigenvalor, por lo cual  $M^\dagger|v\rangle$  es un elemento del subespacio  $P$ . De lo cual se sigue  $QM^\dagger P = 0$ . Tomando el adjunto de esta ecuación se tiene  $PMQ = 0$ . Con lo cual  $M = PMP + QMQ$ . Ahora, se prueba que  $QMQ$  es hermitiana. Para comprobar esto se debe notar que  $QM = QM(P + Q) = QMQ$ , y  $QM^\dagger = QM^\dagger(P + Q) = QM^\dagger Q$ . Con lo cual, considerando la normalidad de  $M$ , y la observación de que  $Q^2 = Q$ ,

$$\begin{aligned}
QMQQM^\dagger Q &= QMQM^\dagger Q \\
&= QMM^\dagger Q \\
&= QM^\dagger MQ \\
&= QM^\dagger QMQ \\
&= QM^\dagger QMQ,
\end{aligned}$$

con lo cual  $QMQ$  es hermitiana. Por hipótesis de inducción,  $QMQ$  es diagonal con respecto a alguna base ortonormal para el subespacio  $Q$ , y  $PMP$  es diagonal con respecto a alguna base ortogonal para  $P$ . Con lo cual se sigue que  $M = PMP + QMQ$  es diagonal con respecto a alguna base ortogonal para el espacio vectorial total.  $\square$

Este teorema establece que  $M$  puede ser escrita como  $M = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ , donde  $\lambda_i$  son los eigenvalores de  $M$ ,  $|i\rangle$  es una base ortonormal para  $V$ , y cada  $|i\rangle$  un eigenvector de  $M$  con eigenvalor  $\lambda_i$ .

A continuación se prueban ciertas igualdades de utilidad. Se suponen las eigendescomposiciones de las matrices de densidad  $\rho_1 = U_1 \Lambda_1 U_1^\dagger$  y  $\rho_2 = U_2 \Lambda_2 U_2^\dagger$ , respectivamente. Es conveniente notar que

$$\begin{aligned}
\rho_1 \otimes \rho_2 &= (U_1 \Lambda_1 U_1^\dagger) \otimes (U_2 \Lambda_2 U_2^\dagger) \\
&= (U_1 \otimes U_2)(\Lambda_1 U_1^\dagger \otimes \Lambda_2 U_2^\dagger) \\
&= (U_1 \otimes U_2)(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(U_1^\dagger \otimes U_2^\dagger) \\
&= (U_1 \otimes U_2)(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(U_1 \otimes U_2)^\dagger
\end{aligned} \tag{1.29}$$

A continuación se considera  $\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1^{(1)} \dots \lambda_n^{(1)})$  y  $\Lambda_2 = \text{diag}(\lambda_1^{(2)} \dots \lambda_m^{(2)})$ , donde  $\text{diag}$  representa una

matriz diagonal. Se tiene

$$\begin{aligned}
\ln(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2) &= \text{diag}(\ln(\lambda_1^{(1)} \Lambda_2), \dots, \ln(\lambda_n^{(1)} \Lambda_2)) \\
&= \text{diag}(\ln(\lambda_1^{(1)}) \mathbb{I}_m + \ln(\Lambda_2), \dots, \ln(\lambda_n^{(1)}) \mathbb{I}_m + \ln(\Lambda_2)) \\
&= \ln(\Lambda_1) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes \ln(\Lambda_2).
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Con lo cual se puede probar

$$\begin{aligned}
(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(\ln(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)) &= (\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(\ln(\Lambda_1) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes \ln(\Lambda_2)) \\
&= (\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(\ln(\Lambda_1) \otimes \mathbb{I}_m) + (\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(\mathbb{I}_n \otimes \ln(\Lambda_2)) \\
&= (\Lambda_1 \ln(\Lambda_1)) \otimes \Lambda_2 + \Lambda_1 \otimes (\Lambda_2 \ln(\Lambda_2)).
\end{aligned} \tag{1.31}$$

En el caso de un sistema compuesto, las mediciones se pueden presentar en el subsistema A, en el subsistema B o en el sistema total. Considerando la observación anterior surgen algunas preguntas:

¿La medición en el subsistema A afecta al subsistema B? ¿Una medición en el sistema total afecta de igual manera al subsistema A y al subsistema B? Una medición en el sistema total que sólo afecte al subsistema A puede expresarse como un producto tensorial  $M_\omega^A \otimes \mathbb{I}_B$ . Con lo cual, el estado referente al subsistema A, después de la medición en el subsistema B, queda expresado como

$$\rho_A | M_\omega^B = \frac{1}{\text{Tr} [\rho_{AB} (\mathbb{I} \otimes M_\omega^B)]} \text{Tr}_B \left[ \left( \mathbb{I} \otimes \sqrt{M_\omega^B} \right) \rho_{AB} \left( \mathbb{I} \otimes \sqrt{M_\omega^B} \right) \right]. \tag{1.32}$$

Se introduce una notación que facilita la escritura de las ecuaciones:

$$P_{\rho_{AB}}^{M^B}(\omega) = \text{Tr} [\rho_{AB} (\mathbb{I} \otimes M_\omega^B)].$$

Considérese un producto tensorial de espacios de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . En dicho espacio de Hilbert se puede definir un estado desenredado.

**Definición 1.3.2.** *Un estado  $\rho_{AB}$  está desenredado si, y sólo si, el estado se puede escribir como*

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \tag{1.33}$$

donde  $\sum_i p_i = 1$  y  $p_i \geq 0$  para todo  $i$ . En cualquier otro caso el estado está enredado.

Es importante mencionar, que todos los estados en la expansión anterior pueden tomarse como estados puros. Además es necesario mencionar que el conjunto de matrices de densidad desenredadas es un

conjunto convexo. Este hecho es directo de la definición ya que al tomar una suma convexa de cualquier número de estados desenredados nos da un nuevo estado desenredado.

## 1.4. Descomposición de Schmidt

A continuación se muestra un teorema de mucha utilidad para estados bipartitas.[1]

**Teorema 1.4.1.** *Un estado puro bipartito  $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$  se puede expresar de la siguiente forma:*

$$|\alpha\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle, \quad (1.34)$$

donde  $\{|a_i\rangle, |b_j\rangle\}$  son dos bases ortonormales. Entonces este estado se puede escribir de una manera más conveniente:

$$|\alpha\rangle = \sum_n a_n |\lambda_n\rangle \otimes |\phi_n\rangle, \quad n = 1, \dots, \min[\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B],$$

donde  $a_n$  es una distribución de probabilidad y las bases  $\{|\lambda_i\rangle, |\phi_j\rangle\}$  son ortogonales para  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  respectivamente

*Demostración.* Sea un estado arbitrario  $|\alpha\rangle$  escrito como en la ecuación (1.34). Se calcula la matriz reducida del sistema conformado por  $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ , para el subespacio  $A$ ; además se supone su descomposición espectral de la manera

$$\rho^A = \sum_n |a_n|^2 |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|. \quad (1.35)$$

Ahora es posible escribir los estados  $|a_i\rangle$  en términos de los vectores  $|\lambda_n\rangle$ ,

$$|a_i\rangle = \sum_n u_{in} |\lambda_n\rangle.$$

Entonces el estado original toma la forma

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_{ijn} u_{in} c_{ij} |\lambda_n\rangle \otimes |b_j\rangle, \\ &= \sum_{nj} d_{nj} |\lambda_n\rangle \otimes |b_j\rangle. \end{aligned}$$

De este modo se obtiene la matriz de densidad reducida de esta última ecuación haciendo uso de la traza

parcial

$$\begin{aligned}
\rho^A &= \text{Tr}_B (|\alpha\rangle\langle\alpha|) \\
&= \text{Tr}_B \left( \sum_{njlm} d_{nj} d_{lm}^* |\lambda_n b_j\rangle\langle\lambda_l b_m| \right) \\
&= \sum_{njlmk} d_{nj} d_{lm}^* \delta_{jm} |\lambda_n\rangle\langle\lambda_l| \\
&= \sum_{nlm} d_{nm} d_{lm}^* |\lambda_n\rangle\langle\lambda_l|. \tag{1.36}
\end{aligned}$$

Ahora comparando la ecuación (1.36) con la ecuación (1.35) se obtiene

$$\sum_m d_{nm} d_{lm}^* = |a_n|^2 \delta_{nl}. \tag{1.37}$$

Esta condición asegura que los estados  $|\phi_n\rangle = \sum_j (d_{nj}/a_n) |b_j\rangle$  son ortonormales.

$$\begin{aligned}
\langle\phi_k|\phi_l\rangle &= \sum_{ij} \frac{d_{ki}^*}{a_k} \frac{d_{lj}}{a_l} \langle b_i|b_j\rangle \\
&= \sum_{ij} \frac{d_{ki}^*}{a_k} \frac{d_{lj}}{a_l} \delta_{ij} \\
&= \sum_i \frac{d_{ki}^*}{a_k} \frac{d_{li}}{a_l} \\
&= \frac{|a_k|^2 \delta_{kl}}{a_k a_l},
\end{aligned}$$

con lo cual, se obtiene el resultado deseado

$$|\alpha\rangle = \sum_n a_n |\lambda_n\rangle \otimes |\phi_n\rangle. \tag{1.38}$$

□

A las bases  $|\lambda_n\rangle$  y  $|\phi_n\rangle$  se les conoce como las bases de Schmidt para los subsistemas  $A$  y  $B$ , respectivamente, y al número de valores  $a_n$  diferentes de cero se le conoce como el número de Schmidt para el estado  $|\alpha\rangle$ . El número de Schmidt es una propiedad importante de un sistema cuántico compuesto, el cuál se puede interpretar como *la cantidad de enredamiento* del sistema. Además el número de Schmidt se preserva bajo transformaciones unitarias en los subsistemas  $A$  y  $B$  por separado, lo cual hace al número de Schmidt una propiedad útil.

## 1.5. Generalización de los conceptos de información

Los conceptos presentados a continuación fueron tomados de los textos [17, 8, 24] En el caso de los sistemas cuánticos se puede generalizar el concepto de entropía de Shannon. La definición equivalente es

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho). \quad (1.39)$$

Esta cantidad se conoce como la entropía de Von Neumann. Dicho concepto es análogo al concepto de la entropía de Shannon. Para una matriz de densidad  $\rho$  se puede calcular su entropía de Von Neumann a través de sus eigenvalores del siguiente modo:

$$S(\rho) = H(\lambda),$$

donde  $\lambda$  son los eigenvalores de la matriz de densidad. Es decir, la entropía de Von Neumann de una matriz de densidad es idéntica a la entropía de Shannon de los eigenvalores de la matriz de densidad. Para observar este hecho es necesario considerar la eigendescomposición de  $\rho$  como  $\rho = U^\dagger \Lambda U$ , entonces se tiene

$$-\text{Tr}(\rho \ln(\rho)) = -\text{Tr}((U^\dagger \Lambda U)U^\dagger \ln(\Lambda)U) = -\text{Tr}(U^\dagger \Lambda \ln(\Lambda)U) = -\text{Tr}(\Lambda \ln(\Lambda)), \quad (1.40)$$

donde se uso la propiedad de que la traza es invariante ante transformaciones unitarias y la ecuación (1.28) de la definición del logaritmo sobre matrices diagonalizables. A continuación se enuncian algunas propiedades de la entropía de Von Neumann.

1. La entropía de Von Neumann es no negativa, además ésta es cero si, y sólo si, el estado es puro.
2. En un espacio de Hilbert  $d$ -dimensional, la entropía es a lo más  $\log(d)$ . La entropía es igual a  $\log(d)$  si, y sólo si, el sistema está en el estado completamente mezclado  $\rho = \mathbb{I}/d$ .
3. Si un sistema compuesto por dos subsistemas  $AB$  está en un estado puro, entonces  $S(A) = S(B)$ .
4. Suponiendo que  $p_i$  son probabilidades, y los estados  $\rho_i$  tienen soporte en subespacios ortogonales, entonces

$$S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i). \quad (1.41)$$

5. Suponiendo que  $p_i$  son probabilidades,  $|i\rangle$  son estados ortogonales para un sistema  $A$ , y  $\rho_i$  es cualquier conjunto de operadores de densidad para otro sistema  $B$ , entonces

$$S\left(\sum_i p_i |i\rangle\langle i| \otimes \rho_i\right) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i). \quad (1.42)$$

*Demostración.* 1. Se toma en cuenta que  $\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(U^\dagger \Delta U) = \text{Tr}(\Delta) = 1$ , aprovechando las propiedades de la traza, donde  $\Delta$  es la matriz diagonal de los eigenvalores de  $\rho$ . Los eigenvalores de  $\rho$  se encuentran todos entre 0 y 1, con lo cual el logaritmo de los eigenvalores es negativo y por ende la entropía de Von Neumann es no negativa. Si el estado es puro todos los eigenvalores son cero, a excepción de uno que toma el valor de uno, por lo cual la entropía es cero.

2. Tomando en cuenta la entropía relativa y el hecho de que es no negativa, que se demuestra más adelante en el texto, se tiene

$$0 \leq S(\rho || \mathbb{I}/d) = -S(\rho) + \log(d). \quad (1.43)$$

3. De la descomposición de Schmidt, se sabe que los eigenvalores de las matrices reducidas de los subsistemas  $A$  y  $B$  son idénticos. Como la entropía está completamente determinada por los eigenvalores, se tiene  $S(A) = S(B)$ .

4. Sean  $\lambda_i^j$  y  $|e_i^j\rangle$  los eigenvalores correspondientes a  $\rho_i$ . Se observa que  $p_i \lambda_i^j$  y  $|e_i^j\rangle$  son los eigenvalores y los eigenvectores de  $\sum_i p_i \rho_i$ , con lo cual

$$\begin{aligned} S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) &= -\sum_{ij} p_i \lambda_i^j \log(p_i \lambda_i^j) \\ &= -\sum_{ij} p_i \lambda_i^j \log(p_i) - \sum_{ij} p_i \lambda_i^j \log(\lambda_i^j) \\ &= -\sum_j \lambda_i^j \sum_i p_i \log(p_i) - \sum_i p_i \sum_j \lambda_i^j \log(\lambda_i^j) \\ &= -\sum_i p_i \log(p_i) - \sum_i p_i \sum_j \lambda_i^j \log(\lambda_i^j) \\ &= H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i), \end{aligned}$$

lo que se deseaba demostrar.

5. Se utiliza el resultado anterior y la primera propiedad para obtener

$$\begin{aligned} S\left(\sum_i p_i |i\rangle\langle i| \otimes \rho_i\right) &= H(p_i) + \sum_i p_i S(|i\rangle\langle i| \otimes \rho_i) \\ &= H(p_i) + \sum_i p_i (S(|i\rangle\langle i|) + S(\rho_i)) \\ &= H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i). \end{aligned}$$

□

En la prueba de la última desigualdad se ha hecho uso de una propiedad de suma importancia de la entropía. Se enuncia y demuestra a continuación

**Observación 1.5.1** (Entropía de un producto tensorial). *Sean  $\rho_1$  y  $\rho_2$  dos matrices de densidad. Se cumple*

$$S(\rho_1 \otimes \rho_2) = S(\rho_1) + S(\rho_2). \quad (1.44)$$

*Demostración.* Se suponen las eigendescomposiciones de  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , como  $\rho_1 = U_1 \Lambda_1 U_1^\dagger$  y  $\rho_2 = U_2 \Lambda_2 U_2^\dagger$ ,

$$\begin{aligned} S(\rho_1 \otimes \rho_2) &= -\text{Tr}((\rho_1 \otimes \rho_2) \ln(\rho_1 \otimes \rho_2)) \\ &= -\text{Tr}(((U_1 \otimes U_2)(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(U_1 \otimes U_2)^\dagger)(U_1 \otimes U_2) \ln(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(U_1 \otimes U_2)^\dagger)) \\ &= -\text{Tr}((U_1 \otimes U_2)(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2) \ln(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(U_1 \otimes U_2)^\dagger) \\ &= -\text{Tr}((\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(\ln(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2))) \\ &= -\text{Tr}((\Lambda_1 \ln(\Lambda_1)) \otimes \Lambda_2 + \Lambda_1 \otimes (\Lambda_2 \ln(\Lambda_2))) \\ &= -\text{Tr}((\Lambda_1 \ln(\Lambda_1))\text{Tr}(\Lambda_2) - \text{Tr}(\Lambda_1)\text{Tr}(\Lambda_2 \ln(\Lambda_2))) \\ &= S(\rho_1) + S(\rho_2). \end{aligned}$$

En la primer igualdad del desarrollo anterior se hace uso de la ecuación (1.28), en la tercera igualdad se toma en cuenta que la traza es invariante ante transformaciones unitarias. En la cuarta igualdad se hace uso de la ecuación (1.31). En la última igualdad se hace uso de la ecuación (1.40) para poder expresar la entropía en términos de sus eigenvalores.  $\square$

La entropía relativa definida en la ecuación (1.4) se puede generalizar a una *entropía relativa cuántica*  $D(\rho||\sigma)$  para matrices de densidad  $\rho$  y  $\sigma$  como

$$D(\rho||\sigma) := \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)]. \quad (1.45)$$

La información mutua para sistemas clásicos se puede extender a sistemas cuánticos. Ajustando esta definición se obtiene

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}). \quad (1.46)$$

Ahora es necesario indicar que debido al comportamiento de las mediciones en un conjunto completo de observables, las equivalencias presentadas en las ecuaciones (1.11) no son equivalentes en este caso. Esto se debe a que la igualdad  $P(Y)P(X|Y) = P(X, Y)$  no tiene sentido en el ámbito cuántico, como ya se había mencionado en la discusión de la ecuación (1.8). Para obtener la cantidad representada por la ecuación (1.11), es necesario calcular primero la entropía condicional. El estado después de una medición

en el subsistema  $B$  está expresado en la ecuación (1.32). Considerando este estado se calcula su entropía como se muestra a continuación

$$S[\rho_{AB}|M_\omega^B] = \sum_{\omega} P_{\rho_{AB}}^{M^B}(\omega) S[\rho_A|M_\omega^B]. \quad (1.47)$$

Con la definición anterior se puede establecer la cantidad

$$J_\omega(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - S[\rho_{AB}|M_\omega^B]. \quad (1.48)$$

En la sección anterior se mencionó que esta definición es equivalente a la información mutua en el ámbito clásico. En el caso de un sistema cuántico dicha definición no es equivalente, como se discutirá más adelante en el texto.

Un modo geométrico para definir la información mutua de un sistema cuántico bipartita, es utilizar la entropía relativa como una función de distancia, es importante notar el hecho de que la entropía relativa no es reflexiva, es decir,  $D(\sigma||\rho) \neq D(\rho||\sigma)$  para dos matrices de densidad cualesquiera, así la información mutua se puede expresar en términos de la entropía relativa como

$$D(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B) = \text{Tr}[\rho_{AB}(\ln(\rho_{AB}) - \ln(\rho_A \otimes \rho_B))] \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} &= -S(\rho_{AB}) - \text{Tr}[\rho_{AB}(\ln(\rho_A) \otimes \mathbb{I}_B)] - \text{Tr}[\rho_{AB}(\mathbb{I}_A \otimes \ln(\rho_B))]. \\ &= -S(\rho_{AB}) - \text{Tr}_A[\text{Tr}_B[\rho_{AB}(\ln(\rho_A) \otimes \mathbb{I}_B)]] - \text{Tr}_B[\text{Tr}_A[\rho_{AB}(\mathbb{I}_A \otimes \ln(\rho_B))]] \\ &= -S(\rho_{AB}) - \text{Tr}_A[\rho_A \ln(\rho_A)] - \text{Tr}_B[\rho_B \ln(\rho_B)] \\ &= S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Es decir, la distancia entre la matriz de densidad  $\rho_{AB}$  y su contraparte separable  $\rho_A \otimes \rho_B$  medida con la entropía relativa.

## 1.6. Desigualdades entrópicas en sistemas cuánticos

Se comienza este capítulo probando dos lemas que serán de utilidad.

**Lema 1.6.1.** *La función  $-\ln(x)$  es una función convexa entre operadores.*

*Demostración.* Primero se prueba que el operador  $x^{-1}$  es un operador convexo en  $(0, \infty)$ . Sean  $A$  y  $B$ , operadores estrictamente positivos, tales que  $A \leq B$ . En el caso particular donde  $A = \mathbb{I}$ , se tiene que

$$(\lambda \mathbb{I} + (1 - \lambda) B)^{-1} \leq \lambda \mathbb{I} + (1 - \lambda) B^{-1}. \quad (1.51)$$

El resultado anterior se cumple debido a que  $B$  conmuta con la identidad y la función  $x^{-1}$  es convexa en los números reales. Si ahora se realiza la sustitución  $B = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ , se obtiene

$$\left(\lambda\mathbb{I} + (1 - \lambda)A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \leq \lambda\mathbb{I} + (1 - \lambda)\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}. \quad (1.52)$$

De este modo se puede obtener la desigualdad

$$\begin{aligned} A^{-\frac{1}{2}}\left(\lambda\mathbb{I} + (1 - \lambda)A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}A^{-\frac{1}{2}} &\leq A^{-\frac{1}{2}}\left(\lambda\mathbb{I} + (1 - \lambda)\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)^{-1}A^{-\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow (\lambda A + (1 - \lambda)B)^{-1} &\leq \lambda A^{-1} + (1 - \lambda)B^{-1}. \end{aligned}$$

Ahora se hará uso de la siguiente representación integral del operador  $-\ln(a)$ : [1]

$$-\ln(a) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{a+t} - \frac{1}{1-t}\right) dt. \quad (1.53)$$

La expresión para operadores estrictamente positivos toma la forma

$$-\ln(A) = \int_0^{\infty} \left((A+t\mathbb{I})^{-1} - (\mathbb{I}-t\mathbb{I})^{-1}\right) dt. \quad (1.54)$$

Aprovechando la linealidad de la integral para demostrar la convexidad de  $-\ln(A)$ , sólo es necesario probar la convexidad del operador  $(A+t\mathbb{I})^{-1}$ ; es decir,

$$(\lambda A + (1 - \lambda)B + t\mathbb{I})^{-1} \leq \lambda(A + t\mathbb{I})^{-1} + (1 - \lambda)(B + t\mathbb{I})^{-1}.$$

Si se reescribe la ecuación anterior del siguiente modo

$$(\lambda(A + t\mathbb{I}) + (1 - \lambda)B)^{-1} \leq \lambda(A + t\mathbb{I})^{-1} + (1 - \lambda)(B + t\mathbb{I})^{-1},$$

se tiene demostrada la convexidad, basada en la ecuación 1.51. □

A continuación se demuestra otro Lema de utilidad.

**Lema 1.6.2.** *Si  $f$  es una función de operadores convexa y  $U : V \rightarrow W$  es unitaria (donde  $\dim V \leq \dim W$ ), entonces  $f(U^\dagger XU) \leq U^\dagger f(X)U$  para todos los operadores  $X$ .*

*Demostración.* El caso donde  $U$  mapea  $V$  en  $W$  concluye que  $f(U^\dagger XU) = U^\dagger f(X)U$  debido a la descomposición espectral de los operadores. La parte más complicada consiste en probar la desigualdad

estricta. Así suponemos que  $U$  no mapea completamente  $V$  a  $W$ . Definimos  $\Pi$  un proyector en el rango de  $W'$  de  $U$  ( $W'$  es el subespacio de  $W$  en el cual la isometría toma vectores en  $V$ ), y sea  $\hat{\Pi} = \mathbb{I} - \Pi$  un operador en el complemento ortogonal. Si se adopta la notación  $f_V, f_{W'}$  y  $f_W$  para la función  $f$  sobre diferentes espacios. Para el subespacio restringido  $V$ , se tiene la igualdad

$$f_V(U^\dagger XU) = f_V(U^\dagger \Pi(\Pi X \Pi)\Pi U), \quad (1.55)$$

la cual puede reescribirse como

$$f_V(U^\dagger XU) = U^\dagger \Pi f(\Pi X \Pi)\Pi U, \quad (1.56)$$

del hecho de que  $f_V$  es una función inyectiva. Hecha esta observación, es suficiente con probar la siguiente desigualdad para demostrar el Lema:

$$f_{W'}(\Pi X \Pi) \leq \Pi f_W(X)\Pi. \quad (1.57)$$

Se considera

$$f_{W'}(\Pi X \Pi) = \Pi f_W(\Pi X \Pi)\Pi = \Pi f_W(\Pi X \Pi + \hat{\Pi} X \hat{\Pi})\Pi, \quad (1.58)$$

ya que

$$\begin{aligned} f_W(\Pi X \Pi + \hat{\Pi} X \hat{\Pi}) &= f_W(\Pi X \Pi) + f_W(\hat{\Pi} X \hat{\Pi}), \\ \Pi f_W(\hat{\Pi} X \hat{\Pi})\Pi &= 0. \end{aligned}$$

Sea  $S = \Pi - \hat{\Pi}$  unitaria en el espacio  $W$  y recordando que  $\Pi + \hat{\Pi} = \mathbb{I}$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{X + SXS^\dagger}{2} &= \frac{(\Pi + \hat{\Pi})X(\Pi + \hat{\Pi}) + (\Pi - \hat{\Pi})X(\Pi - \hat{\Pi})}{2} \\ &= \Pi X \Pi + \hat{\Pi} X \hat{\Pi}. \end{aligned}$$

Ocupando la igualdad anterior, además de la convexidad de la función  $f$  tenemos:

$$\begin{aligned} f_W(\Pi X \Pi + \hat{\Pi} X \hat{\Pi}) &= f_W\left(\frac{X + SXS^\dagger}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ f_W(X) + f_W(SXS^\dagger) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ f_W(X) + S f_W(X) S^\dagger \right] \\ &= \Pi f_X(X)\Pi + \hat{\Pi} f_X(X)\hat{\Pi}. \end{aligned}$$

Conjugando por  $\Pi$  y usando (1.58) se tiene

$$\Pi f_W \left( \Pi X \Pi + \hat{\Pi} X \hat{\Pi} \right) \Pi \leq \Pi f_X(X) \Pi. \quad (1.59)$$

□

La entropía relativa tiene un papel de suma importancia a lo largo de todo este texto. Una de sus propiedades más relevantes es la convexidad en sus dos argumentos, la cual se demuestra a continuación.

**Definición 1.6.1.** *Se supone una función real  $f(A, B)$  con  $A$  y  $B$  dos matrices. Entonces se dice que  $f$  es convexa en sus dos argumentos  $A$  y  $B$ , si y sólo si, para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,*

$$f(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2, \lambda B_1 + (1 - \lambda)B_2) \leq \lambda f(A_1, B_1) + (1 - \lambda)f(A_2, B_2). \quad (1.60)$$

A continuación se enuncia el teorema de Lieb, el cual no se demuestra, pero su demostración puede hallarse en [17].

**Teorema 1.6.1** (Teorema de Lieb). *Sea  $X$  una matriz, y  $0 \leq t \leq 1$ . Entonces la función*

$$f(A, B) \equiv \text{Tr}(X^\dagger A^t X B^{1-t}) \quad (1.61)$$

*es cóncava en sus dos entradas para matrices semi positivas definidas  $A$  y  $B$ .*

### 1.6.1. Convexidad de la entropía relativa cuántica

Con estos resultados en mente se prueba

**Teorema 1.6.2** (Convexidad de la entropía relativa). *La entropía relativa  $S(\sigma||\rho)$  es convexa en sus dos argumentos.*

La prueba dada a continuación se basa en la contenida en [17].

*Demostración.* Para matrices arbitrarias  $A$  y  $X$  actuando en el mismo espacio se define

$$I_t(A, X) = \text{Tr}(X^\dagger A^t X A^{1-t}) - \text{Tr}(X^\dagger X A). \quad (1.62)$$

El primer término en la expresión es cóncavo en  $A$ , por el teorema de Lieb, y el segundo término es lineal

en  $A$ . Con lo cual  $I_t(A, X)$  es cóncavo en  $A$ , esto debido a que

$$\begin{aligned}
I_t(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2, X) &= \text{Tr}(X^\dagger(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2)^t X(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2)^{1-t}) - \text{Tr}(X^\dagger X(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2)) \\
&\geq \lambda \text{Tr}(X^\dagger A_1^t X A_1^{1-t}) + (1 - \lambda) \text{Tr}(X^\dagger A_2^t X A_2^{1-t}) - \text{Tr}(X^\dagger X(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2)) \\
&= \lambda \text{Tr}(X^\dagger A_1^t X A_1^{1-t}) + (1 - \lambda) \text{Tr}(X^\dagger A_2^t X A_2^{1-t}) - \lambda \text{Tr}(X^\dagger X A_1) - (1 - \lambda) \text{Tr}(X^\dagger X A_2) \\
&= \lambda \text{Tr}(X^\dagger A_1^t X A_1^{1-t}) - \lambda \text{Tr}(X^\dagger X A_1) + (1 - \lambda) \text{Tr}(X^\dagger A_2^t X A_2^{1-t}) - (1 - \lambda) \text{Tr}(X^\dagger X A_2) \\
&= I_t(A_1, X) - I_t(A_2, X).
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta la derivada se define

$$I(A, X) = \left. \frac{d}{dt} I_t(A, X) \right|_{t=0} = \text{Tr}(X^\dagger(\log(A))XA) - \text{Tr}(X^\dagger X(\log(A))A). \quad (1.63)$$

Observando que  $I_0(A, X) = 0$  y usando la concavidad de  $I_t(A, X)$  se tiene

$$\begin{aligned}
I(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2, X) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{I_\Delta(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2, X)}{\Delta} \\
&\geq \lambda \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{I_\Delta(A_1, X)}{\Delta} + (1 - \lambda) \frac{I_\Delta(A_2, X)}{\Delta} \\
&= \lambda I(A_1, X) + (1 - \lambda)I(A_2, X).
\end{aligned}$$

Con lo cual  $I(A, X)$  es una función cóncava en  $A$ . Definiendo las matrices por bloques

$$A = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.64)$$

se puede verificar que

$$\begin{aligned}
I(A, X) &= \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \log(\rho) & 0 \\ 0 & \log(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \right) - \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log(\rho) & 0 \\ 0 & \log(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \right) \\
&= \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log(\rho) & 0 \\ 0 & \log(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho & 0 \end{bmatrix} \right) - \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \log(\rho) & 0 \\ 0 & \sigma \log(\sigma) \end{bmatrix} \right) \\
&= \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho \ln(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \right) - \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho \log(\rho) & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} \rho \ln(\sigma) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) - \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} \rho \ln(\rho) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\text{Tr}(\rho(\ln(\rho) - \ln(\sigma))) \\
&= -S(\rho|\sigma).
\end{aligned}$$

Con lo cual la convexidad de  $S(\rho|\sigma)$  se sigue de la concavidad de  $I(A, X)$  en  $A$ . □



## Capítulo 2

# Correlaciones en sistemas físicos

Los sistemas físicos tienen correlaciones. En el caso de sistemas físicos simples, es posible reconocer que elementos del sistema físico son lo que “generan” las correlaciones. En el caso de sistemas físicos, en los cuales están presentes componentes cuánticos, investigar qué elemento del sistema genera las correlaciones es casi siempre imposible. Del mismo modo que en el capítulo anterior, surgen preguntas naturales: ¿las correlaciones en un sistema físico se pueden separar? Si es así ¿cómo? ¿Las correlaciones en un sistema físico son: clásicas o cuánticas? ¿Existe algún tipo de correlaciones cuánticas diferentes al enredamiento? Etc.

### 2.1. Correlaciones clásicas

En [9] se da una propuesta para cuantificar las correlaciones que posee un sistema físico, de igual modo se propone la posibilidad de separar las correlaciones en dos tipos: correlaciones clásicas y correlaciones cuánticas. Con las secciones anteriores es posible introducir directamente esta definición. Para comenzar, es necesario definir cuáles son las cualidades deseadas para una cantidad que mida las correlaciones clásicas de un sistema. Las propiedades deseadas son

- I)  $C = 0$  para  $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ . Ya que esto indica que los subsistemas no están correlacionados
- II)  $C$  es invariante bajo transformaciones locales unitarias. Esto es debido a que cualquier cambio de base no debe de afectar la correlación entre los dos subsistemas.
- III)  $C$  no aumenta mediante operaciones locales. Si los dos subsistemas evolucionan independientemente, entonces las correlaciones entre ellos no pueden aumentar.
- IV)  $C = S(\rho_A) = S(\rho_B)$  para estados puros.

Considerando los requerimientos anteriores se definen las correlaciones clásicas

$$C_B(\rho_{AB}) = \max_{B_i^\dagger B_i} \left[ S(\rho_A) - \sum p_i S(\rho_A^i) \right], \quad (2.1)$$

donde  $B_i^\dagger B_i$  es un POVM llevado a cabo en el subsistema  $B$  y

$$\rho_A^i = \frac{\text{Tr}_B[(\mathbb{I}_A \otimes B_i)\rho_{AB}(\mathbb{I}_A \otimes B_i^\dagger)]}{\text{Tr}[(\mathbb{I}_A \otimes B_i)\rho_{AB}(\mathbb{I}_A \otimes B_i^\dagger)]}$$

es el estado resultante en el subsistema  $A$ , después de la medición  $i$  en el subsistema  $B$ .

Las correlaciones clásicas pueden aumentar mediante procesos de purificación, inclusive para el sistema completo, si se permite la comunicación clásica. Un ejemplo simple comprueba esta afirmación. Suponiendo que el sistema inicial está dado por

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle) (\langle 00| + \langle 01|),$$

expresando éste como matriz en la base estándar se obtiene

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

cuyos eigenvalores son  $\{1, 0, 0, 0\}$ . Calculando sus matrices reducidas se obtiene

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

cuyos eigenvalores son exactamente iguales a los de la matriz  $\rho_{AB}$ , con lo cual  $S(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$ ; es decir, las correlaciones medidas con la información mutua entre  $A$  y  $B$  son cero. En este caso la información mutua coincide con las correlaciones clásicas, además el estado está desenredado, con lo cual tampoco posee enredamiento. Ahora, se realiza una medición en el estado  $B$ . Si se obtiene 1,  $B$  lo comunica a  $A$  quien entonces *rota* su qubit al estado  $|1\rangle$ . En otro caso no se ejecuta ninguna operación. Después de llevar a cabo esta operación el estado final es

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} (|0_A\rangle\langle 0_A| \otimes |0_B\rangle\langle 0_B| + |1_A\rangle\langle 1_A| \otimes |1_B\rangle\langle 1_B|), \quad (2.4)$$

donde las correlaciones medidas con la información mutua son ahora  $\log(2) \neq 0$ , ya que las matrices reducidas son  $\rho_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \rho_B$ . Las correlaciones clásicas son en este caso iguales a la información mutua, ya que cualquier medición sobre el estado  $\rho_{AB}$  nos lleva a un estado puro, además  $S(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$  y el estado continua desenredado. Entonces el contenido de correlaciones clásicas puede verse aumentado por procedimientos de la forma *LGM+CC*.

## 2.2. Enredamiento

Cuantificar el enredamiento de un sistema cuántico no es una tarea sencilla. Una forma conveniente de hacerlo es interpretar el enredamiento como una distancia (o pseudo-distancia) entre un conjunto de matrices de densidad. Los conjuntos involucrados son el conjunto de estados separables y el de estados enredados. Definiendo el enredamiento de esta forma, se obtiene una medida de enredamiento útil para sistemas con un número arbitrario de subsistemas e independiente de la dimensión de éstos.

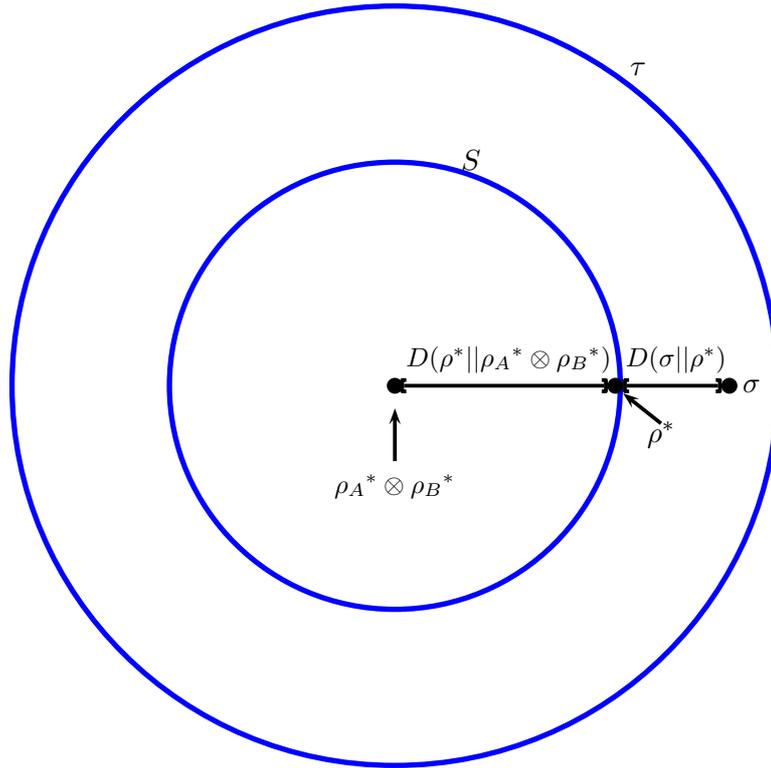


Figura 2.1: Esquema de la medida de enredamiento. En esta imagen  $\tau$  es el conjunto de todas las matrices de densidad y  $S$  el conjunto de estados desenredados. El estado  $\rho^*$  representa el estado desenredado más cercano a  $\sigma$  y ocupando la traza parcial ( $\rho_B^* = \text{Tr}_A \rho^*$ ) se obtiene  $\rho_A^* \otimes \rho_B^*$ . La distancia  $D(\sigma || \rho^*)$  representa al enredamiento, mientras que la distancia  $D(\rho^* || \rho_A^* \otimes \rho_B^*)$  representa las correlaciones clásicas.

Las propiedades necesarias para que una medida de enredamiento, digamos  $E'$ , nos provea de información

útil son las siguientes:

(E1)  $E'(\sigma) = 0$  si, y sólo si,  $\sigma$  está desenredado.

(E2) Operaciones locales unitarias dejan  $E'(\sigma)$  invariante; es decir,  $E'(\sigma) = E(U_A \otimes U_B \sigma U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger)$ .

(E3) El enredamiento de un sistema no puede aumentar mediante procesos de purificación llevados a cabo por matrices de la forma  $\sum_i V_i^\dagger V_i = \mathbb{I}$ , es decir,

$$\sum_i \text{Tr}(\sigma_i) E\left(\frac{\sigma_i}{\text{Tr}(\sigma_i)}\right) \leq E(\sigma),$$

donde  $\sigma_i = V_i \sigma V_i^\dagger$ .

La condición (E1) es natural, ya que los estados desenredados no contienen enredamiento. La condición (E2) es requerida, ya que las correlaciones cuánticas no se ven afectadas por cambios de base locales. La condición (E3) se basa en el hecho de que sólo las correlaciones clásicas pueden aumentar con mediciones locales.

Una medida del enredamiento, propuesta en [22], es el enredamiento basado en la entropía relativa. La entropía relativa se definió en la ecuación (1.45). Se define el enredamiento de un sistema cuántico como

$$E_{RE}(\rho_{AB}) = E(\rho_{AB}) = \min_{\sigma_{AB} \in D} S(\rho_{AB} || \sigma_{AB}), \quad (2.5)$$

donde  $D$  es el conjunto de todos los estados separables.

### 2.2.1. Condiciones y pruebas sobre la medida de distancia

En este punto, lo más natural es probar que la medida de enredamiento propuesta cumple las condiciones (E1,E2,E3). Para ese propósito, se estudian las siguientes propiedades de la entropía relativa:

(F1)  $D(\sigma || \rho) \geq 0$ , satisfaciendo la igualdad en el caso  $\sigma = \rho$ .

(F2) Operaciones unitarias dejan  $D(\sigma || \rho)$  invariante, es decir,  $D(\sigma || \rho) = D(U\sigma U^\dagger || U\rho U^\dagger)$ .

(F3)  $D(\text{Tr}_p(\sigma) || \text{Tr}_p(\rho)) \leq D(\sigma || \rho)$ , donde  $\text{Tr}_p$  es una traza parcial.

(F4)  $\sum_i p_i D(\sigma_i / p_i || \rho_i / q_i) \leq \sum_i D(\sigma_i || \rho_i)$ , donde  $p_i = \text{Tr}(\sigma_i)$ ,  $q_i = \text{Tr}(\rho_i)$ ,  $\sigma_i = V_i \sigma V_i^\dagger$  y  $\rho_i = V_i \rho V_i^\dagger$ . Los operadores  $V_i$  no son locales necesariamente.

(F5)  $D(\sum_i P_i \sigma P_i || \sum_i P_i \rho P_i) = \sum_i D(P_i \sigma P_i || P_i \rho P_i)$ , donde  $P_i$  es cualquier conjunto de proyectores ortogonales, tales que  $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ .

(F6)  $D(\sigma \otimes P_\alpha || \rho \otimes P_\alpha) = D(\sigma || \rho)$ , donde  $P_\alpha$  es cualquier proyector.

Basado en la referencia [22] se muestra que con las condiciones (F1)-(F5), se cumplen las condiciones (E1)-(E3) para cualquier función distancia.

Si se cumplen (F2),(F3), y (F6), entonces se puede probar el siguiente teorema

**Teorema 2.2.1.** *Para cualquier mapeo completamente positivo que preserve la traza, dado por  $\Phi\sigma = \sum_i V_i\sigma V_i^\dagger$  y  $\sum_i V_i^\dagger V_i = \mathbb{I}$ , se tiene que  $D(\Phi\sigma || \Phi\rho) \leq D(\sigma || \rho)$ .*

*Demostración.* En muchas ocasiones se puede expresar una medición completa en mecánica cuántica, como una transformación unitaria más una traza parcial en un espacio de Hilbert extendido  $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}_n$ , donde  $\dim \mathbb{H}_n = n$ . Sea  $\{|i\rangle\}$  una base ortonormal en  $\mathbb{H}_n$  y  $|\alpha\rangle$  un vector unitario [13]. Entonces se define

$$W = \sum_i V_i \otimes |i\rangle\langle\alpha|. \quad (2.6)$$

Entonces

$$\begin{aligned} W^\dagger W &= \left( \sum_i V_i \otimes |i\rangle\langle\alpha| \right)^\dagger \sum_j V_j \otimes |j\rangle\langle\alpha| \\ &= \sum_i V_i^\dagger \otimes |\alpha\rangle\langle i| \sum_j V_j \otimes |j\rangle\langle\alpha| \\ &= \sum_{i,j} V_i^\dagger V_j \otimes |\alpha\rangle\langle i|j\rangle\langle\alpha| \\ &= \sum_{i,j} V_i^\dagger V_j \otimes |\alpha\rangle\delta_{i,j}\langle\alpha| \\ &= \sum_i V_i^\dagger V_i \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &= \mathbb{I} \otimes P_\alpha, \end{aligned}$$

y existe un operador unitario  $U$  en  $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}_n$  tal que  $W = U(\mathbb{I} \otimes P_\alpha)$ . Con lo cual

$$\begin{aligned}
WAW^\dagger &= \sum_{ij} V_i AV_j^\dagger \otimes |i\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle j| \\
&= \sum_{ij} V_i AV_j^\dagger \otimes |i\rangle\langle j| \\
&= U(\mathbb{I} \otimes P_\alpha)(A \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes P_\alpha^\dagger)U^\dagger \\
&= U(A \otimes p_\alpha P_\alpha^\dagger) \\
&= U(A \otimes P_\alpha)U^\dagger.
\end{aligned}$$

Consecuentemente

$$U(A \otimes P_\alpha)U^\dagger = \sum_{ij} V_i AV_j^\dagger \otimes |i\rangle\langle j|, \quad (2.7)$$

con lo cual

$$\text{Tr}(U(A \otimes P_\alpha)U^\dagger) = \sum_i V_i AV_i^\dagger. \quad (2.8)$$

Ahora utilizando (F3), después (F2), y finalmente (F6) se obtiene

$$\begin{aligned}
D(\text{Tr}_2[U(\sigma \otimes P_\alpha)U^\dagger] || \text{Tr}_2[U(\rho \otimes P_\alpha)U^\dagger]) &\leq D(U(\sigma \otimes P_\alpha)U^\dagger || U(\rho \otimes P_\alpha)U^\dagger) \\
&= D(\sigma \otimes P_\alpha || \rho \otimes P_\alpha) \\
&= D(\sigma || \rho).
\end{aligned}$$

□

**Corolario 2.2.1.** *Como para un conjunto completo de proyectores ortogonales  $P$ ,  $\sum_i P_i \sigma_i P_i$  es un mapeo completamente positivo que preserva la traza, entonces*

$$\sum_i D(P_i \sigma_i P_i || P_i \rho P_i) \leq D(\sigma || \rho). \quad (2.9)$$

La suma puede ser sacada de la función debido a la propiedad (F5). Ahora utilizando (F2), (F3), (F6) y la ecuación (2.9) se tiene lo siguiente:

**Teorema 2.2.2.** *Si  $\sigma_i = V_i \sigma V_i^\dagger$  entonces  $\sum D(\sigma_i || \rho_i) \leq D(\sigma || \rho)$ .*

*Demostración.* Utilizando las ecuaciones (2.6) y (2.7), se encuentra

$$\text{Tr}_B(\mathbb{I} \otimes P_i U(A \otimes P_\alpha)U^\dagger \mathbb{I} \otimes P_\alpha) = V_i AV_i^\dagger, \quad (2.10)$$

donde  $P_i = |i\rangle\langle i|$ . Ahora, de (F3), el corolario 2.2.1, y (F6) se halla que

$$\begin{aligned}
& \sum D(\text{Tr}_2[\mathbb{I} \otimes P_i U(\sigma \otimes P_\alpha) U^\dagger \mathbb{I} \otimes P_\alpha] \| \text{Tr}_2[\mathbb{I} \otimes P_i U(\rho \otimes P_\alpha) U^\dagger \mathbb{I} \otimes P_i]) \\
& \leq \sum_i D(\mathbb{I} \otimes P_i U(\sigma \otimes P_\alpha) U^\dagger \mathbb{I} \otimes P_\alpha \| \mathbb{I} \otimes P_i U(\rho \otimes P_\alpha) U^\dagger \mathbb{I} \otimes P_i) \\
& \leq D(U(\sigma \otimes P_\alpha) U^\dagger \| U(\rho \otimes P_\alpha) U^\dagger) \\
& = D(\sigma \otimes P_\alpha \| \rho \otimes P_\alpha) \\
& = D(\sigma \| \rho).
\end{aligned}$$

Para finalizar, del teorema 2.2.2 y (F4) se sigue que

$$\sum_i D\left(\frac{\sigma_i}{p_i} \left\| \frac{\rho_i}{q_i}\right.\right) \leq D(\sigma \| \rho). \quad (2.11)$$

En este punto sea  $E(\sigma) = D(\sigma \| \rho^*)$ . Entonces de la ecuación (2.11) se tiene,

$$\begin{aligned}
E(\sigma) & := D(\sigma \| \rho^*) \geq \sum_i p_i D\left(\frac{\sigma_i}{p_i} \left\| \frac{V_i^\dagger \rho^* V_i}{q_i}\right.\right) \\
& \geq \sum_i p_i E\left(\frac{\sigma_i}{p_i}\right)
\end{aligned}$$

□

Con lo cual quedan probadas las propiedades (E1)-(E3). Ahora se prueban las condiciones (F1)-(F4) para la entropía relativa.

**Observación 2.2.1** (F1). *Para la entropía relativa se cumple  $D(\sigma \| \rho) \geq 0$ , satisfaciendo la igualdad en el caso  $\sigma = \rho$ .*

*Demostración.* Consideremos la descomposición espectral de los estados  $\sigma$  y  $\rho$ , dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\rho = \sum_i p(i) |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad \sigma = \sum_j q(j) |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|,$$

se calcula la entropía relativa de estas dos matrices explícitamente:

$$\begin{aligned}
D(\sigma||\rho) &= \text{Tr} \left[ \sum_j p(j) |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \log \left( \sum_k p(k) |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \right) \right] - \text{Tr} \left[ \sum_j p(j) |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \log \left( \sum_i q(i) |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \right) \right] \\
&= \text{Tr} \left[ \sum_j p(j) |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \sum_k \log(p(k)) |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \right] - \text{Tr} \left[ \sum_j p(j) |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \sum_i \log(q(i)) |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \right] \\
&= \text{Tr} \left[ \sum_{j,k} p(j) \log(p(k)) |\varphi_j\rangle\langle\varphi_k| \delta_{j,k} \right] - \text{Tr} \left[ \sum_{j,i} p(j) \log(q(i)) |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \right] \\
&= \text{Tr} \left[ \sum_k p(k) \log(p(k)) |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \right] - \text{Tr} \left[ \sum_{j,i} p(j) \log(q(i)) |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \right] \\
&= \sum_k p(k) \log(p(k)) \text{Tr} [|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|] - \sum_{j,i} p(j) \log(q(i)) \text{Tr} [|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| |\phi_i\rangle\langle\phi_i|] \\
&= \sum_k p(k) \log(p(k)) - \sum_j p(j) \sum_i \log(q(i)) |\langle\phi_i|\varphi_j\rangle|^2 \\
&\geq \sum_k p(k) \log(p(k)) - \sum_j p(j) \log(r(j)) \\
&= \sum_k p(k) \log \left( \frac{p(k)}{r(k)} \right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

En la primera igualdad se escribió la definición de la entropía relativa. En la segunda igualdad se calculó el logaritmo de una matriz diagonal. En la tercer igualdad se calculó la traza, tomando en cuenta que la cantidad  $|\langle\phi_i|\varphi_j\rangle|^2$  se puede considerar como una probabilidad condicional en  $i$  o en  $j$ , ya que si sumamos sobre  $i$  o  $j$  obtenemos la unidad. La primer desigualdad se sigue de la convexidad de la función  $-\log(x)$ , junto con la definición  $r(j) = \sum_i q(i) |\langle\phi_i|\varphi_j\rangle|^2$ . La última desigualdad es debido a la positividad de la entropía relativa clásica (Observación 1.1.1).  $\square$

**Observación 2.2.2 (F2).** *La entropía relativa es invariante ante transformaciones unitarias:*

$$D(\sigma||\rho) = D(U\sigma U^\dagger||U\rho U^\dagger)$$

*Demostración.* Para comenzar, se suponen descomposiciones espectrales con vectores ortonormalizados para las matrices de densidad  $\sigma$  y  $\rho$ . Dicha descomposición tiene la forma

$$\sigma = \sum_i p(i) |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad \rho = \sum_j q(j) |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|.$$

Al aplicar el operador unitario  $U$  a cada una de las bases ortogonales se obtiene

$$U|\phi_i\rangle = |\phi'_i\rangle, \quad U|\varphi_i\rangle = |\varphi'_i\rangle.$$

Utilizando el hecho de que los operadores unitarios preservan el producto interior y las bases  $|\phi'_i\rangle$  y  $|\varphi'_i\rangle$  son ortogonales se encuentra

$$\begin{aligned} \log(U\rho U^\dagger) &= \log\left(U \sum_j (q(j)|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|) U^\dagger\right) \\ &= \log\left(\sum_j U|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|U^\dagger\right) \\ &= \log\left(\sum_j q(j)|\varphi'_j\rangle\langle\varphi'_j|\right) \\ &= \sum_j \log(q(j))|\varphi'_j\rangle\langle\varphi'_j| \\ &= U\left(\sum_j \log(q(j))|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\right)U^\dagger \\ &= U\log(\rho)U^\dagger. \end{aligned}$$

De modo análogo para el estado  $\sigma$ . Con estas ultimas observaciones resulta

$$\begin{aligned} D(U\sigma U^\dagger || U\rho U^\dagger) &= \text{Tr}[U\sigma U^\dagger(\log(U\sigma U^\dagger) - \log(U\rho U^\dagger))] \\ &= \text{Tr}[U\sigma U^\dagger \log(U\sigma U^\dagger) - U\sigma U^\dagger \log(U\rho U^\dagger)] \\ &= \text{Tr}[U\sigma U^\dagger U \log(\sigma) U^\dagger] - \text{Tr}[U\sigma U^\dagger U \log(\rho) U^\dagger] \\ &= \text{Tr}[U\sigma \log(\sigma) U^\dagger] - \text{Tr}[U\sigma \log(\rho) U^\dagger] \\ &= \text{Tr}[\sigma \log(\sigma) - \sigma \log(\rho)] \\ &= D(\sigma || \rho). \end{aligned}$$

□

**Observación 2.2.3** (F3). *La entropía relativa cumple la monotonía con respecto a la traza parcial, es decir,*

$$D(\text{Tr}_p \sigma || \text{Tr}_p \rho) \leq D(\sigma || \rho).$$

*Demostración.* Para esta demostración se utilizará el método del operador relativo modular. Se asume que  $\rho$  y  $\sigma$  son invertibles, pero la prueba se puede extender para cualesquiera matrices de densidad. Definimos  $\mathcal{L}(C) \equiv \sigma C$  y  $\mathcal{R}(C) \equiv C\rho^{-1}$ . El operador modular relativo es el producto de estos operadores lineales

bajo composición, es decir,  $\Delta(C) = \mathcal{L}(\mathcal{R}(C))$ . En vista de que los operadores  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{R}$  conmutan se tiene  $\Delta(C) = \mathcal{R}(\mathcal{L}(C))$ . Para observar esto de manera más clara se ve que

$$\begin{aligned}\Delta(C) &= \mathcal{L}(\mathcal{R}(C)) \\ &= \mathcal{L}(C\rho^{-1}) \\ &= \sigma C\rho^{-1} \\ &= (\mathcal{L}(C))\rho^{-1} \\ &= \mathcal{R}(\mathcal{L}(C)).\end{aligned}$$

Ahora se define la función  $\ln$  en operadores  $\mathcal{E}$ , donde  $\mathcal{E}$  es un operador lineal que es estrictamente positivo con respecto al producto interno  $\langle C, D \rangle = \text{Tr}[C^\dagger D]$ . Para definir esta operación, es necesario expresar el operador  $\mathcal{E}$  en la base donde éste es diagonal. Es decir,  $\mathcal{E} = \sum_i \mu_i \epsilon_i$ , con lo cual  $\ln(\mathcal{E}) = \sum_i \ln(\mu_i) \epsilon_i$ . Ahora se observa que  $\mathcal{L}(C)$ ,  $\mathcal{R}(C)$ , y  $\Delta(C)$  son estrictamente positivas para  $C \neq 0$ , ya que

$$\begin{aligned}\langle C, \mathcal{L}(C) \rangle &= \text{Tr}[C^\dagger \sigma C] = \text{Tr}[C C^\dagger \sigma] \geq 0, \\ \langle C, \mathcal{R}(C) \rangle &= \text{Tr}[C^\dagger C \rho^{-1}] \geq 0, \\ \langle C, \Delta(C) \rangle &= \text{Tr}[C^\dagger \sigma C \rho^{-1}] \geq 0,\end{aligned}$$

debido a las suposiciones de que  $\rho$  y  $\sigma$  son positivos e invertibles. De igual modo, utilizando las bases ortogonales se tiene  $\ln(\mathcal{L}(C)) = \ln(\sigma)C$  y  $\ln(\mathcal{R}(C)) = -C \ln(\rho)$ . También se tiene

$$\ln(\Delta) = \ln(\mathcal{L}) + \ln(\mathcal{R}),$$

ya que  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{R}$  conmutan. Con lo cual podemos reescribir la entropía relativa como

$$\begin{aligned}D(\sigma||\rho) &= \text{Tr}[\sigma(\sigma - \rho)] \\ &= \text{Tr}[\sigma \ln(\sigma)] - \text{Tr}[\sigma \ln(\rho)] \\ &= \text{Tr}\left[\sigma^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} \ln(\sigma)\right] - \text{Tr}\left[\sigma^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} \ln(\rho)\right] \\ &= -\text{Tr}\left[\sigma^{\frac{1}{2}} \ln(\mathcal{R})\left(\sigma^{\frac{1}{2}}\right)\right] - \text{Tr}\left[\sigma^{\frac{1}{2}} \ln(\mathcal{L})\left(\sigma^{\frac{1}{2}}\right)\right] \\ &= \text{Tr}\left[\sigma^{\frac{1}{2}} \left(-\ln(\mathcal{R})\left(\sigma^{\frac{1}{2}}\right) - \ln(\mathcal{L})\left(\sigma^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right] \\ &= \left\langle \sigma^{\frac{1}{2}}, -\ln(\Delta)\left(\sigma^{\frac{1}{2}}\right) \right\rangle.\end{aligned}$$

Así, se puede describir la monotonía cuántica de la siguiente forma:

$$\left\langle \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}}, -\ln \left( \Delta^A \right) \left( \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\rangle \leq \left\langle \left( \sigma^{AB} \right)^{\frac{1}{2}}, -\ln \left( \Delta^{AB} \right) \left( \left( \sigma^{AB} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\rangle, \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta^A(C) &\equiv \rho^A C \left( \sigma^A \right)^{-1}, \\ \Delta^{AB}(C) &\equiv \rho^{AB} C \left( \sigma^{AB} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Para completar la prueba, se supone que existe una isometría  $U$  definida como  $U : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_{AB}$ , la cual posee las siguientes propiedades:

$$U^\dagger \Delta^{AB} U = \Delta^A, \quad (2.13)$$

$$U \left( \sigma^A \right) = \left( \sigma^{AB} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.14)$$

A continuación se enuncian las implicaciones de tal suposición. Posteriormente se construye la isometría explícitamente. En términos de la isometría, la monotonía relativa cuántica queda como

$$\left\langle \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}}, -\ln \left( U^\dagger \Delta^{AB} U \right) \left( \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\rangle \leq \left\langle \left( \sigma^{AB} \right)^{\frac{1}{2}}, -\ln \left( \Delta^{AB} \right) \left( \left( \sigma^{AB} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\rangle, \quad (2.15)$$

Utilizando además el hecho

$$-\ln \left( U^\dagger \Delta^{AB} U \right) \leq -U^\dagger \ln \left( \Delta^{AB} \right) U, \quad (2.16)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}}, -\ln \left( U^\dagger \Delta^{AB} U \right) \left( \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\rangle &\leq \left\langle \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}}, -U^\dagger \ln \left( \Delta^{AB} \right) U \left( \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle U \left( \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}} \right), -\ln \left( \Delta^{AB} \right) U \left( \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \left( \sigma^{AB} \right)^{\frac{1}{2}} \right), -\ln \left( \Delta^{AB} \right) \left( \left( \sigma^{AB} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Ahora consideremos la siguiente elección para el mapeo  $U$ :

$$U(C) \equiv \left( C \left( \sigma^A \right)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) \left( \sigma^{AB} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta elección para  $U$  satisface (2.14), ya que  $U \left( \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \left( \left( \sigma^A \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) \left( \sigma^{AB} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sigma^{AB} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Como el

operador hermitiano de  $U$  debe de respetar el producto punto se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr} \left[ \left( U^\dagger(B) \right)^\dagger C \right] &= \langle U^\dagger(B), C \rangle \\
&= \langle B, U(C) \rangle \\
&= \mathrm{Tr} \left[ B^\dagger \left( C(\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) (\sigma^{AB})^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= \mathrm{Tr} \left[ \left( (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) (\sigma^{AB})^{\frac{1}{2}} B^\dagger C \right].
\end{aligned}$$

Con lo cual  $U^\dagger$  debe tener la siguiente forma

$$U^\dagger(C) = \mathrm{Tr}_B \left[ C (\sigma^{AB})^{\frac{1}{2}} \left( (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) \right]. \quad (2.17)$$

De esta manera es posible verificar

$$\begin{aligned}
U^\dagger \Delta^{AB} U(C) &= \mathrm{Tr}_B \left[ \left[ \rho^{AB} \left\{ \left( C (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) (\sigma^{AB})^{\frac{1}{2}} \right\} (\sigma^{AB})^{-1} \right] (\sigma^{AB})^{\frac{1}{2}} \left( (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) \right] \\
&= \mathrm{Tr}_B \left[ \left[ \rho^{AB} \left\{ \left( C (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) (\mathbb{I}^{AB}) \right\} \right] \left( (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) \right] \\
&= \mathrm{Tr}_B \left[ (\rho^{AB}) (C (\sigma^A)^{-1} \otimes \mathbb{I}^B) \right] \\
&= \rho^A C (\sigma^A)^{-1} \\
&= \Delta^A(C).
\end{aligned}$$

Además el mapeo  $U$  es unitario, ya que

$$\begin{aligned}
U^\dagger U(C) &= \mathrm{Tr}_B \left[ \left( C (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) (\sigma^{AB})^{\frac{1}{2}} (\sigma^{AB})^{\frac{1}{2}} \left( (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) \right] \\
&= \mathrm{Tr}_B \left[ \left( C (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) (\sigma^{AB}) \left( (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}^B \right) \right] \\
&= C (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} (\sigma^A) (\sigma^A)^{-\frac{1}{2}} \\
&= C.
\end{aligned}$$

En esta prueba se usaron los Lemas 1.6.2 y 1.6.1. □

En el caso de que las matrices no sean invertibles, entonces  $\rho^{-1}$  representa una inversa generalizada definida en el rango de  $\rho$ ,  $\rho \rho^{-1} = \rho^{-1} \rho = \mathrm{supp}(\rho)$ , donde  $\mathrm{supp}(\rho) := \ker(\rho)^\perp$  y  $\ker$  es el kernel de la matriz. La prueba de este teorema fue encontrada por D. Petz y se encuentra en [20].

Ahora se prueba la propiedad (F4)

**Observación 2.2.4.** Se cumple  $\sum_i p_i S(\sigma_i/p_i || \rho_i/q_i) \leq \sum_i S(\sigma_i || \rho_i)$ , donde  $p_i = \text{Tr}(\sigma_i)$  y  $q_i = \text{Tr}(\rho_i)$ , y además  $\sigma_i = V_i \sigma V_i^\dagger$  y  $\rho_i = V_i \rho V_i^\dagger$  (note que las  $V_i$  no son necesariamente locales).

*Demostración.* Para la prueba, primero se muestra la siguiente desigualdad

$$\sum_i S(\sigma_i || \rho_i) = \sum_i p_i S(\sigma_i/p_i || \rho_i/q_i) + \sum_i p_i \ln \left( \frac{p_i}{q_i} \right). \quad (2.18)$$

La prueba de dicha desigualdad se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \sum_i p_i S(\sigma_i/p_i || \rho_i/q_i) &= \sum_i p_i \text{Tr} \left[ \left( \frac{\sigma_i}{p_i} \right) \left( \ln \left( \frac{\sigma_i}{p_i} \right) - \ln \left( \frac{\rho_i}{q_i} \right) \right) \right] \\ &= \sum_i \text{Tr} \left[ (\sigma_i) \left( \ln \left( \frac{\sigma_i}{p_i} \right) - \ln \left( \frac{\rho_i}{q_i} \right) \right) \right] \\ &= \sum_i \text{Tr} \left[ (\sigma_i) \left( \ln \left[ \left( \frac{\sigma_i}{\rho_i} \right) \left( \frac{q_i}{p_i} \right) \right] \right) \right] \\ &= \sum_i \text{Tr} \left[ (\sigma_i) \left( \ln \left( \frac{\sigma_i}{\rho_i} \right) + \ln \left( \frac{q_i}{p_i} \right) \mathbb{I} \right) \right] \\ &= \sum_i \text{Tr} \left[ (\sigma_i) \left( \ln \left( \frac{\sigma_i}{\rho_i} \right) \right) \right] + \sum_i \text{Tr} \left[ \sigma_i \ln \left( \frac{q_i}{p_i} \right) \right] \\ &= \sum_i S(\sigma_i || \rho_i) + \sum_i p_i \ln \left( \frac{q_i}{p_i} \right). \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \sum_i S(\sigma_i || \rho_i) &= \sum_i p_i S(\sigma_i/p_i || \rho_i/q_i) - \sum_i p_i \ln \left( \frac{q_i}{p_i} \right) \\ &= \sum_i p_i S(\sigma_i/p_i || \rho_i/q_i) + \sum_i p_i \ln \left( \frac{p_i}{q_i} \right). \end{aligned}$$

Como el segundo término de la ecuación anterior es la entropía de Shannon de una distribución de probabilidad, entonces por la Observación 1.1.1, dicho término es mayor o igual a cero. Con lo cual se cumple la desigualdad

$$\sum_i p_i S(\sigma_i/p_i || \rho_i/q_i) \leq \sum_i S(\sigma_i || \rho_i) \quad (2.19)$$

□

A continuación se dan referencias acerca de las dos últimas propiedades de la entropía relativa cuántica.

**Observación 2.2.5.** La entropía relativa cumple la igualdad  $D(\sigma \otimes P_\alpha || \rho \otimes P_\alpha) = D(\sigma || \rho)$ , donde  $P_\alpha$  es cualquier proyector.

La prueba de esta observación está incluida como un corolario del Teorema 1 en [12].

**Observación 2.2.6.** *La entropía relativa cuántica cumple la igualdad*

$$D\left(\sum_i P_i \sigma P_i \parallel \sum_i P_i \rho P_i\right) = \sum_i D(P_i \sigma P_i \parallel P_i \rho P_i).$$

La prueba de esta observación está incluida en el Lema 5 de [13].

### 2.2.2. El enredamiento para un estado puro

A continuación se muestra un teorema de gran importancia.

Para un estado puro, el enredamiento medido con la entropía relativa se reduce a la entropía reducida de Von Neumann. La prueba consiste en dar una sugerencia para el mínimo  $\rho^*$  y después mostrar que el gradiente  $(d/dx)S(\sigma \parallel (1-x)\rho^* + x\rho)$  para cualquier  $\rho \in \mathcal{D}$  es no negativo. Sin embargo, si  $\rho^*$  no fuera un mínimo el gradiente anterior sería estrictamente negativo, lo cual es una contradicción. Esto es posible tomando en cuenta que el conjunto de estados desenredados es convexo.

**Teorema 2.2.3.** *Para estados puros  $\sigma = \sum_{n_1, n_2} \sqrt{p_{n_1} p_{n_2}} |\phi_{n_1} \psi_{n_1}\rangle \langle \phi_{n_2} \psi_{n_2}|$  el enredamiento medido con la entropía relativa es igual a la entropía reducida de Von Neumann, es decir,*

$$E(\sigma) = - \sum_n p_n \ln(p_n). \quad (2.20)$$

*Demostración.* Para  $a > 0$ , se utiliza la siguiente representación integral para el logaritmo natural [22]:

$$\ln(a) = \int_0^\infty \left[ \frac{at-1}{a+t} \right] \frac{dt}{(1+t^2)},$$

con lo cual para cualquier operador positivo  $A$  se tiene

$$\ln(A) = \int_0^\infty \left[ \frac{At-1}{A+t} \right] \frac{dt}{(1+t^2)}.$$

Sea

$$f(x, \rho) = S(\sigma \parallel (1-x)\rho^* + x\rho). \quad (2.21)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0, \rho) &= - \lim_{x \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ \frac{\sigma(\ln[(1-x)\rho^* + x\rho] - \ln(\rho^*))}{x} \right\} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ \left( \frac{\sigma}{x} \right) \left( \int_0^\infty \left[ \frac{((1-x)\rho^* + x\rho)t - 1}{(1-x)\rho^* + x\rho + t} \right] \frac{dt}{(1+t^2)} - \int_0^\infty \left[ \frac{\rho^*t - 1}{\rho^* + t} \right] \frac{dt}{(1+t^2)} \right) \right\} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ \left( \frac{\sigma}{x} \right) \left( \int_0^\infty \left[ \frac{((1-x)\rho^* + x\rho)t - 1}{(1-x)\rho^* + x\rho + t} - \frac{\rho^*t - 1}{\rho^* + t} \right] \left[ \frac{dt}{1+t^2} \right] \right) \right\} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ \left( \frac{\sigma}{x} \right) \left( \int_0^\infty \left[ \frac{(((1-x)\rho^* + x\rho)t - 1)(\rho^* + t) - ((1-x)\rho^* + x\rho + t)(\rho^*t - 1)}{((1-x)\rho^* + x\rho + t)(\rho^* + t)} \right] \frac{dt}{(1+t^2)} \right) \right\} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ \left( \frac{\sigma}{x} \right) \left( \int_0^\infty \left[ \frac{((1-x)t\rho^* + x\rho t - 1)(\rho^* + t) - ((1-x)\rho^* + x\rho + t)(\rho^*t - 1)}{((1-x)\rho^* + x\rho + t)(\rho^* + t)} \right] \frac{dt}{(1+t^2)} \right) \right\} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ \left( \frac{\sigma}{x} \right) \left( \int_0^\infty \left[ \frac{((-xt^2 - x)\rho^* + (xt^2 + x)\rho)}{((1-x)\rho^* + x\rho + t)(\rho^* + t)} \right] \frac{dt}{(1+t^2)} \right) \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ \sigma \left( \int_0^\infty \left[ \frac{(\rho^* - \rho)}{((1-x)\rho^* + x\rho + t)(\rho^* + t)} \right] dt \right) \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \sigma \int_0^\infty [(\rho^* + t)^{-1}(\rho^* - \rho)(\rho^* + t)^{-1}] dt \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \sigma \int_0^\infty [(\rho^* + t)^{-1}(\rho^*)(\rho^* + t)^{-1}] dt - \int_0^\infty [(\rho^* + t)^{-1}(\rho)(\rho^* + t)^{-1}] dt \right\} \\
&= 1 - \text{Tr} \left\{ \sigma \int_0^\infty (\rho^* + t)^{-1}(\rho)(\rho^* + t)^{-1} dt \right\} \\
&= 1 - \int_0^\infty \text{Tr} [(\rho^* + t)^{-1}\sigma(\rho^* + t)^{-1}\rho] dt
\end{aligned}$$

Se toma  $\rho^* = \sum_n p_n |\phi_n \psi_n\rangle \langle \phi_n \psi_n|$  (la sugerencia para el mínimo). Entonces

$$\begin{aligned}
(\rho^* + t)^{-1}\sigma(\rho^* + t)^{-1} &= \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} (p_{n_1} + t)^{-1} |\phi_{n_1} \psi_{n_1}\rangle \langle \phi_{n_1} \psi_{n_1}| \sqrt{p_{n_2} p_{n_3}} |\phi_{n_2} \psi_{n_2}\rangle \langle \phi_{n_3} \psi_{n_3}| (p_{n_4} + t)^{-1} \\
&\quad \times |\phi_{n_4} \psi_{n_4}\rangle \langle \phi_{n_4} \psi_{n_4}| \\
&= \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} (p_{n_1} + t)^{-1} |\phi_{n_1} \psi_{n_1}\rangle \sqrt{p_{n_2} p_{n_3}} (p_{n_4} + t)^{-1} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_3, n_4} \langle \phi_{n_4} \psi_{n_4}| \\
&= \sum_{n, m} (p_n + t)^{-1} \sqrt{p_n p_m} (p_m + t)^{-1} |\phi_n \psi_n\rangle \langle \phi_m \psi_m|.
\end{aligned}$$

Ahora se define una función  $g(p, q) = \int_0^{\infty} (p+t)^{-1} \sqrt{pq} (q+t)^{-1} dt$ . Entonces se puede demostrar que  $g(p, p) = 1$  y para  $p \neq q$ .

$$\begin{aligned}
g(p, q) &= \sqrt{pq} \int_0^{\infty} \frac{1}{(p+t)(q+t)} dt \\
&= \sqrt{pq} \int_0^{\infty} \frac{q-p}{(p+t)(q-p)(q+t)} dt \\
&= \sqrt{pq} \int_0^{\infty} \frac{q+t-p-t}{(p+t)(q-p)(q+t)} dt \\
&= \sqrt{pq} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{(p+t)(q-p)} - \frac{1}{(q+t)(q-p)} \right) dt \\
&= \sqrt{pq} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{(p+t)} - \frac{1}{(q+t)} \right) \left( \frac{1}{q-p} \right) dt \\
&= \frac{\sqrt{pq}}{q-p} \ln \left( \frac{q}{p} \right).
\end{aligned}$$

Es necesario notar que si  $p$  o  $q$  toman el valor de cero, entonces significa que Para continuar con la prueba se demuestra un Lema.

**Lema 2.2.1.** *Se cumple  $0 \leq g(p, q) \leq 1$  para todo  $p, q \in (0, 1]$ .*

*Demostración.* Se considera el siguiente resultado

$$(p+t)(q+t) = pq + t(p+q) + t^2 \geq pq + 2t\sqrt{pq} + t^2 = (\sqrt{pq} + t)^2, \quad (2.22)$$

debido a que

$$\begin{aligned}
(p-q)^2 &\geq 0 \\
\Rightarrow p^2 - 2pq + q^2 &\geq 0 \\
\Rightarrow p^2 + 2pq + q^2 &\geq 4pq \\
\Rightarrow (p+q)^2 &\geq 4pq \\
\Rightarrow (p+q) &\geq 2\sqrt{pq},
\end{aligned}$$

con lo cual

$$g(p, q) \leq \sqrt{pq} \int_0^{\infty} (pq+t)^{-2} dt = 1. \quad (2.23)$$

□

Sea  $\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|$  donde  $|\alpha\rangle = \sum_n a_n |\phi_n\rangle$  y  $|\beta\rangle = \sum_n b_n |\psi_n\rangle$  son vectores normalizados. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0, \rho) - 1 &= \text{Tr} \left( \int_0^\infty [(\rho^* + t)^{-1} \sigma (\rho^* + t)^{-1} \rho] dt \right) \\
&= -\text{Tr} \left( \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8} (P_{n_1} + t)^{-1} \sqrt{p_{n_2} p_{n_3}} (p_{n_4} + t)^{-1} |\phi_{n_1} \psi_{n_1}\rangle \langle \phi_{n_4} \psi_{n_4}| \times \right. \\
&\quad \left. \times \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_3, n_4} a_{n_5} a_{n_7} a_{n_6}^* a_{n_8}^* |\phi_{n_5} \psi_{n_7}\rangle \langle \phi_{n_6} \psi_{n_8}| \right) \\
&= -\text{Tr} \left( \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6} g(p_{n_1}, p_{n_2}) |\phi_{n_1} \psi_{n_1}\rangle \langle \phi_{n_2} \psi_{n_2}| a_{n_3} b_{n_4} a_{n_5}^* b_{n_6}^* |\phi_{n_3} \psi_{n_4}\rangle \langle \phi_{n_5} \psi_{n_6}| \right) \\
&= \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6} g(p_{n_1}, p_{n_2}) a_{n_3} b_{n_4} a_{n_5}^* b_{n_6}^* \delta_{n_2, n_3} \delta_{n_2, n_4} \delta_{n_1, n_5} \delta_{n_1, n_6} \\
&= - \sum_{n_1, n_2} g(p_{n_1}, p_{n_2}) a_{n_2} b_{n_2} a_{n_1}^* b_{n_1}^*
\end{aligned}$$

y además

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(0, \rho) - 1 \right| \leq \sum_{n_1, n_2} |a_{n_1}| |b_{n_1}| |a_{n_2}| |b_{n_2}| = \left( \sum_n |a_n| |b_n| \right)^2 \leq \sum_n |a_n|^2 \sum_n |b_n|^2 = 1.$$

Con lo cual se tiene que  $\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, |\alpha, \beta\rangle\langle\alpha, \beta|) \geq 0$ . Pero como cualquier estado desenredado puede ser escrito en la forma  $\rho = \sum_i r_i |\alpha^i \beta^i\rangle\langle\alpha^i \beta^i| \geq 0$ , y como todas las operaciones involucradas en el cálculo de la derivada son lineales, se tiene  $\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, |\alpha, \beta\rangle\langle\alpha, \beta|) = \sum_i r_i \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, |\alpha^i \beta^i\rangle\langle\alpha^i \beta^i|) \geq 0$ . □

**Lema 2.2.2.** Sea  $\Phi \in \mathcal{H}$  con una descomposición de Schmidt dada por

$$|\Phi\rangle = \sum_n \sqrt{p_n} |\varphi_n \psi_n\rangle,$$

y sea  $\sigma = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ . Entonces  $E(\sigma) = - \sum_n p_n \ln(p_n)$ .

*Demostración.* Sabemos que

$$\begin{aligned}
S(\sigma||\rho^*) &= -\text{Tr}(\sigma \ln(\sigma) - \sigma(\ln(\rho^*))) \\
&= S(\sigma) - \text{Tr}(\sigma \ln(\rho^*)) \\
&= -\text{Tr} \left( \sum_{n,m,l} \sqrt{p_n p_m} |\varphi_n \psi_n\rangle \langle \varphi_m \psi_m| \ln(p_l) |\varphi_l \psi_l\rangle \langle \varphi_l \psi_l| \right) \\
&= -\text{Tr} \left( \sum_{n,m,l} \sqrt{p_n p_m} |\varphi_n \psi_n\rangle \delta_{m,l} \ln(p_l) \langle \varphi_l \psi_l| \right) \\
&= -\text{Tr} \left( \sum_{n,m} \sqrt{p_n p_m} \ln(p_m) |\varphi_n \psi_n\rangle \langle \varphi_m \psi_m| \right) \\
&= -\sum_{n,m} \sqrt{p_n p_m} \ln(p_m) \delta_{n,m} \\
&= -\sum_n p_n \ln(p_n).
\end{aligned}$$

De este modo es suficiente probar que  $S(\sigma||\rho) \geq S(\sigma||\rho^*)$  para todo  $\rho \in \mathcal{D}$ . Supongamos que  $S(\sigma||\rho^*) > S(\sigma||\rho)$  para alguna  $\rho \in \mathcal{D}$ . Entonces, para  $0 < x \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
f(x, \rho) &= S(\sigma|(1-x)\rho^* + x\rho) \leq (1-x)S(\sigma||\rho^*) + xS(\sigma||\rho) \\
&= (1-x)f(0, \rho) + xf(1, \rho).
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{f(x, \rho) - f(0, \rho)}{x} \leq f(1, \rho) - f(0, \rho) < 0. \quad (2.24)$$

Pero esto es imposible, ya que

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, \rho) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x, \rho) - f(0, \rho)]}{x} \geq 0. \quad (2.25)$$

□

Con lo cual, sin importar la dimensión de los subespacios, la entropía relativa de enredamiento es igual a la entropía de enredamiento. Esta propiedad es clave, ya que la entropía de enredamiento ha resultado ser una buena medida de enredamiento para sistemas puros. De hecho se puede establecer como un requerimiento para una buena medida de enredamiento.

(E4): Para estados puros la medida de enredamiento se reduce a la entropía de enredamiento, es decir,

$$E(\sigma) = -\text{Tr}(\sigma_A \ln(\sigma_A)), \quad (2.26)$$

donde  $\sigma_A = \text{Tr}_B(\sigma)$ .

### 2.2.3. Propiedades del enredamiento

Esta medida de enredamiento, nos proporciona una manera sencilla de calcular el enredamiento de un número mayor de matrices. Este resultado se condensa en el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.4.** *Si  $\rho^*$  minimiza  $S(\sigma||\rho)$  sobre  $\rho \in \mathcal{D}$ , entonces  $\rho^*$  es también un mínimo para cualquier estado de la forma  $\sigma_x = (1-x)\sigma + x\rho^*$ .*

*Demostración.* Se considera

$$\begin{aligned} S(\sigma_x||\rho) - S(\sigma_x||\rho^*) &= \text{Tr}(\sigma_x \ln(\rho^*)) - \sigma_x \ln(\rho) \\ &= \text{Tr}[((1-x)\sigma + x\rho^*) \ln(\rho^*) - ((1-x)\sigma + x\rho^*) \ln(\rho)] \\ &= (1-x)\text{Tr}(\sigma \ln(\rho^*)) + x\text{Tr}(\rho^* \ln(\rho^*)) - (1-x)\text{Tr}(\sigma \ln(\rho)) - x\text{Tr}(\rho^* \ln(\rho)) \\ &= \text{Tr}(\sigma \ln(\rho^*)) - x\text{Tr}(\sigma \ln(\rho^*)) + x\text{Tr}(\rho^* \ln(\rho^*)) - \text{Tr}(\sigma \ln(\rho)) + x\text{Tr}(\sigma \ln(\rho)) \\ &\quad - x\text{Tr}(\rho^* \ln(\rho)) \\ &= x \{S(\rho||\rho^*) + \text{Tr}(\sigma \ln(\sigma)) - \text{Tr}(\sigma \ln(\rho^*)) - [\text{Tr}(\sigma \ln(\sigma)) - \text{Tr}(\sigma \ln(\rho))]\} \\ &\quad + \text{Tr}(\sigma \ln(\sigma)) - \text{Tr}(\sigma \ln(\rho)) - [\text{Tr}(\sigma \ln(\sigma)) - \text{Tr}(\sigma \ln(\rho^*))] \\ &= x(S(\rho^*||\rho) + S(\sigma||\rho^*) - S(\sigma||\rho)) + S(\sigma||\rho) - S(\sigma||\rho^*) \\ &= xS(\rho^*||\rho) + (1-x)(S(\sigma||\rho) - S(\sigma||\rho^*)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Ahora se muestra que el enredamiento es convexo

**Teorema 2.2.5.**

$$E(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2) \leq x_1E(\sigma_1) + x_2E(\sigma_2),$$

donde  $x_1 + x_2 = 1$ .

*Demostración.* Esta prueba está basada en la convexidad de la entropía relativa en sus dos argumentos. Además se supone que las matrices  $\rho_1^*$  y  $\rho_2^*$  minimizan a  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , respectivamente.

$$\begin{aligned}
E(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2) &= \min_{\rho \in \mathcal{D}} S(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 || \rho) \\
&\leq S(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 || x_1\rho_1^* + x_2\rho_2^*) \\
&\leq x_1S(\sigma_1 || \rho_1^*) + x_2S(\sigma_2 || \rho_2^*) \\
&= x_1E(\sigma_1) + x_2E(\sigma_2).
\end{aligned}$$

□

Esta es una propiedad muy alentadora físicamente, porque dice que si se mezclan dos matrices de densidad con cierta cantidad de enredamiento, no se puede obtener una matriz de densidad con un enredamiento mayor a la suma del enredamiento de éstas. En otras palabras *la mezcla no genera enredamiento*. Por último se verifica que el enredamiento de creación ( $E_c$ ), nunca es menor que la entropía de enredamiento, esto se puede interpretar como que la cantidad de enredamiento que uno debe de invertir para crear un estado enredado es usualmente mayor que la cantidad de enredamiento obtenida mediante procesos de purificación.

A continuación se prueba un teorema que compara el enredamiento de formación con el enredamiento basado en la entropía relativa. Para definir el enredamiento de formación [25] es necesario hacer las siguientes consideraciones. Sea un estado arbitrario  $\rho$  bipartito, se consideran todas sus posibles expansiones en estados puros, es decir expansiones de la forma

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

donde  $|\psi_i\rangle$  es un estado puro para toda  $i$ , además de que  $p_i > 0$  y  $\sum_i p_i = 1$  de nuevo para todo valor de  $i$ . Definiendo el enredamiento de la traza parcial como

$$E'(\psi) = -Tr(\text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \log(\text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|))),$$

donde la traza parcial puede ser tomada respecto al subsistema  $A$  o  $B$ . Con lo cual se define el enredamiento de formación de un estado mezcla.

**Definición 2.2.1.** Se define el enredamiento de formación para un estado arbitrario  $\rho$  como [25]:

$$E_c(\rho) = \min \sum_i p_i E'(\psi), \quad (2.27)$$

donde el mínimo se toma sobre todas las expansiones en estados puros que posea el estado  $\rho$ .

**Teorema 2.2.6.**  $E_c(\sigma) \geq E(\sigma)$ .

*Demostración.* Dado un estado  $\sigma$ , entonces por definición de enredamiento de creación existe una descomposición convexa  $\sigma = \sum_i p_i \sigma_i$  con estados puros  $\sigma_i$  tales que

$$E_c(\sigma) = \sum_i p_i E_c(\sigma_i).$$

Considerando que el enredamiento de creación coincide con el enredamiento de entropía relativa para estados puros, y ocupando la convexidad de esta última,

$$E_c(\sigma) = \sum_i p_i E_c(\sigma_i) = \sum_i p_i E(\sigma_i) \geq E\left(\sum_i p_i \sigma_i\right) = E(\sigma). \quad (2.28)$$

□

La explicación física del resultado anterior, yace en el hecho de que cierta cantidad adicional de información se encuentra presente en la formación del sistema, con lo cual el enredamiento de formación es mayor al enredamiento medido con la entropía relativa.

A pesar de no encontrar una expresión analítica para el enredamiento. Se puede encontrar una expresión numérica para subsistemas de spin  $\frac{1}{2}$  usando un método independiente de la dimensión. Para poder escribir este algoritmo, debe de considerarse que en principio la suma en la ecuación (1.33) puede ser infinita, es decir una combinación infinita de matrices de densidad representando a estados puros. Considerando este hecho, uno debería de buscar al estado desenredado  $\rho^*$  más cercano a un estado arbitrario  $\rho$  como combinación de un estado, diez estados, cien estados y así sucesivamente, pero aprovechando la convexidad del conjunto de matrices de densidad y de la función entropía se puede acotar esta búsqueda. Para lograr acotar el número de combinaciones de matrices de densidad puras se toma en cuenta la cubierta convexa y el Teorema de Caratheodory. El uso de este resultado es vital, ya que nos permite tomar un número finito de combinaciones para el cálculo del enredamiento.

**Definición 2.2.2.** La cubierta convexa  $[co(A)]$  de un conjunto  $A$ , es el conjunto de todos los puntos que pueden ser expresados como una combinación convexa finita de puntos en  $A$ . En otras palabras  $x \in co(A)$ , si y sólo si,  $x$  tiene una expresión de la forma  $x = \sum_{k=1}^K p_k a_k$ , donde  $K$  es un conjunto finito,  $\sum_{k=1}^K p_k = 1$ , y para  $k = 1, \dots, K$ ,  $p_k \geq 0$  y  $a_k \in A$ .

La cubierta convexa de un conjunto  $A$  es la región convexa más pequeña que contiene a  $A$ . Un ejemplo sencillo de la cubierta convexa de un conjunto finito de puntos se muestra en la Figura 2.2.

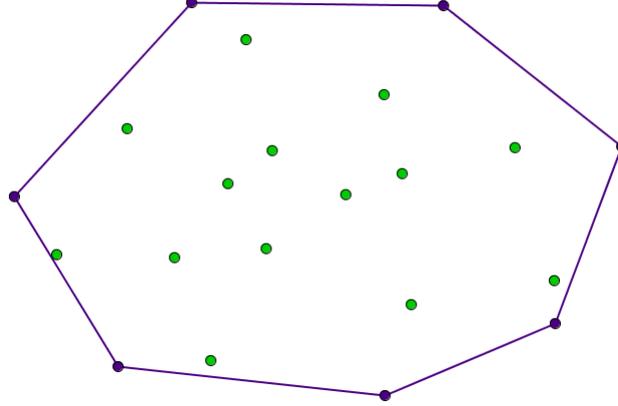


Figura 2.2: Cubierta convexa (región contenida dentro del marco azul) de un conjunto de puntos en el plano

Introducida la definición de la cubierta convexa de un conjunto y tomando matrices de densidad puras en la expansión de la definición de estado desenredado; el conjunto de estados desenredados es la cubierta convexa del conjunto de matrices de densidad que forman la expansión de estos. Esto implica que cualquier estado desenredado puede escribirse de la forma  $\sum_n p_n |\phi_n \psi_n\rangle \langle \phi_n \psi_n|$ . Aún así el problema de la parametrización de los estados desenredados sigue presente.

**Teorema 2.2.7** (Caratheodry). *Sea  $A \subset \mathbb{R}^N$ . Entonces cualquier  $x \in co(A)$  tiene una expresión de la forma  $x = \sum_{n=1}^{N+1} p_n a_n$  donde  $\sum_{n=1}^{N+1} p_n = 1$ , y para  $n = 1, \dots, N + 1$ ,  $p_n \geq 0$  y  $a_n \in A$ .*

La importancia de este teorema radica en que establece una cota superior para el número de elementos en la combinación de un punto en la cubierta convexa de un conjunto. El teorema de Charatheodory asegura en este caso que cualquier estado en  $\mathcal{D}$  puede ser descompuesto en una suma de a lo más  $[dim(\mathcal{H}_1) \times dim(\mathcal{H}_2)]^2$  productos de estados puros [22], ya que un estado puro para un sistema bipartito de dos qubits tiene dimensión  $dim(\mathcal{H}_1) \times dim(\mathcal{H}_2)$  y tomando la matriz de densidad ésta se eleva al cuadrado. Con lo cual, para sistemas compuestos por partículas de espín  $\frac{1}{2}$  hay a lo más 16 términos (estados puros) en la expansión de cualquier estado desenredado. Además, cada estado puro puede ser descrito usando dos números reales, con lo cual en conjunto el estado desenredado puede ser descrito solamente con 79 parámetros reales. Para observar esto se toma  $16 \times 4$  es la cantidad de parámetros reales necesaria para describir a las 16 matrices de densidad desenredadas. Ahora habría que sumar otros 16 parámetros para tomar en cuenta las cantidades  $p_i$ , pero la condición  $\sum_i p_i = 1$  nos deja sólo 15 parámetros, así  $16 \times 4 + 15 = 79$ . A continuación se usa la propuesta basada en [22] para la parametrización de los estados desenredados. Suponemos que el estado desenredado está compuesto por las 16 matrices de densidad desenredadas, con

lo cual

$$\rho = \sum_{i=1}^{16} p_i^2 \rho_1^i \otimes \rho_2^i.$$

Donde se usan los  $p_i^2$  en lugar de los  $p_i$  por conveniencia, donde se requiere que  $\sum_{i=1}^{16} p_i^2 = 1$ . La parametrización elegida es

$$p_i = \sin(\phi_{i-1}) \prod_{j=i}^{15} \cos(\phi_j), \quad \text{con} \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

y

$$\rho_k^i = |\Psi_k^i\rangle \langle \Psi_k^i|, \quad (2.29)$$

$$|\Psi_1^i\rangle = \cos(\alpha_i)|0\rangle + \sin(\alpha_i)e^{i\eta_i}|1\rangle, \quad (2.30)$$

$$|\Psi_2^i\rangle = \cos(\beta_i)|0\rangle + \sin(\beta_i)e^{i\mu_i}|1\rangle. \quad (2.31)$$

Todos los ángulos  $\alpha_i, \beta_i, \phi_i, \eta_i, \mu_i$  pueden tomar valores arbitrarios, pero debido a la periodicidad en realidad sólo se toman en cuenta valores dentro del intervalo  $[0, 2\pi]$ . Numéricamente esto tiene la ventaja de que no existen bordes en los cuales puedan ocurrir problemas. Una búsqueda aleatoria sobre los 79 parámetros es bastante ineficiente. Sin embargo, si se toma en consideración que el espacio de matrices de densidad desenredadas es un espacio convexo y la función de entropía relativa es convexa, entonces todo mínimo local, es también un mínimo global. Por lo tanto se puede calcular el gradiente y alcanzar el mínimo tomando pasos en la dirección contraria al gradiente. Este proceso se muestra en el siguiente algoritmo realizado en *Python*.

#### 2.2.4. Algoritmo que calcula el enredamiento.

Para este algoritmo, se utiliza el método del descenso a través del gradiente. Un esquema sobre el funcionamiento del algoritmo es el mostrado a continuación:

Se desea minimizar la función  $f$ .

1. Se establece el número de iteraciones máximas  $iter_{max}$ , se establece un número real  $\epsilon$  y se hace una suposición para el mínimo, en este caso  $\rho_0$ .
2. Se calcula una dirección descendiente, en este caso  $p_k = -\nabla f$ .
3. Se encuentra  $\alpha_k$  que minimice  $h(\alpha) = f(\rho_k + \alpha p_k)$  con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .
4. Se actualiza el punto  $\rho_{k+1} = \rho_k + \alpha p_k$  y  $k = k + 1$ .
5. El algoritmo finaliza cuando  $iter = iter_{max}$  ó  $\|\nabla f\| < \epsilon$ .

En el punto número 3 del algoritmo anterior, se utiliza el método de minimización aproximada *Backtracking line search*, junto con la condición *Armijo*. Una explicación más detallada de este algoritmo, queda fuera de los objetivos de este texto, pero es posible encontrar este método en numerosos libros de texto sobre minimización de funciones sin restricciones [18]. El algoritmo se presenta en el Apéndice A.

Con este algoritmo, se pudieron comprobar los siguientes resultados

### 2.2.5. Ejemplos

Los ejemplos mostrados a continuación son una comprobación de los presentados en [22]. Para todos estos ejemplos el programa presento la matriz de densidad correcta. La expansión de las 16 matrices no es presentada, pero la combinación de las 16 matrices de densidad es la correcta.

#### Ejemplo 2.2.1.

$$\sigma = \lambda|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1 - \lambda)|01\rangle\langle 01|, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) |00\rangle\langle 00| + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \{|00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|\} \\ & + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2 |01\rangle\langle 01| + \frac{\lambda^2}{4} |10\rangle\langle 10| + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) |11\rangle\langle 11|. \end{aligned}$$

$$E(\sigma) = (\lambda - 2) \ln\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + (1 - \lambda) \ln(1 - \lambda). \quad (2.33)$$

En este caso  $|\Phi^+\rangle$  es uno de los cuatro estados de Bell definidos como

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle).$$

#### Ejemplo 2.2.2.

$$\begin{aligned} \sigma = & \lambda|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1 - \lambda)|00\rangle\langle 00|, \\ \rho = & \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) |00\rangle\langle 00| + \frac{\lambda}{2} |11\rangle\langle 11|, \\ E(\sigma) = & s_+ \ln(s_+) + s_- \ln(s_-) - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{\lambda}{2} \ln\left(\frac{\lambda}{2}\right), \end{aligned}$$

donde

$$s_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 2\lambda(1 - \lambda)} \right) \quad (2.34)$$

son los eigenvalores de  $\sigma$ . Uno podría pensar de acuerdo a los dos casos anteriores, que  $\sigma$  es una mezcla del estado enredado máximo (para el cual la cantidad de enredamiento es  $\ln(2)$ ) y un estado completamente desenredado  $E = 0$ . Entonces se podría esperar una cantidad de enredamiento igual a  $\lambda \ln(2)$ . Es curioso que este razonamiento no funciona para ninguno de los dos estados, ya que de hecho  $E(\sigma) \leq \lambda \ln(2)$ . Ahora podemos usar el teorema 2.2.4 para generar más estados y sus mínimos. Para estados puros  $\sigma^2 = \sigma$  sabemos el mínimo  $\rho$ . Ahora, el estado que es una suma convexa de  $\sigma$  y  $\rho$  debería de tener el mismo mínimo  $\rho$ . Con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} \sigma &= A|00\rangle\langle 00| + B|00\rangle\langle 11| + B^*|11\rangle\langle 00| + (1 - A)|11\rangle\langle 11|, \\ \rho &= A|00\rangle\langle 00| + (1 - A)\ln(1 - A), \\ E(\sigma) &= e_+ \ln(e_+) + e_- \ln(e_-) - A \ln(A) - (1 - A) \ln(1 - A), \end{aligned}$$

donde

$$e_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4A(1 + A) - 4|B|^2} \right). \quad (2.35)$$

En este caso para asegurar la condición de que la matriz  $\sigma_3$  sea de densidad, es necesario que  $A$  y  $B$  cumplan las condiciones  $0 < A < 1$  y  $-\sqrt{A - A^2} < B < \sqrt{A - A^2}$ .

Otro ejemplo de la aplicación del teorema 2.2.4 es el mostrado a continuación

### Ejemplo 2.2.3.

$$\begin{aligned} \sigma &= A|00\rangle\langle 00| + B|00\rangle\langle 11| + B^*|11\rangle\langle 00| + (1 - 2A)|01\rangle\langle 01| + A|11\rangle\langle 11|, \\ \rho &= C|00\rangle\langle 00| + D|00\rangle\langle 11| + D^*|11\rangle\langle 00| + E|01\rangle\langle 01| + (1 - 2C - E)|10\rangle\langle 10| + C|11\rangle\langle 11|, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \frac{(1 - 2A)(1 - A)^2}{(1 - A)^2 - B^2}, \\ C &= 1 - A - E, \\ D &= \sqrt{E(1 - E - 2C)} = \frac{(1 - 2A)(1 - A)}{(1 - A)^2 - B^2} B. \end{aligned}$$

Con lo cual se puede calcular la cantidad de enredamiento. La fórmula explícita se omite por ser extensa.

## 2.3. Discordia cuántica

De las definiciones introducidas en los capítulos anteriores se define una cantidad conocida como *discordia cuántica*

$$D[\rho_{AB}]^{\leftarrow} = I[\rho_{AB}] - \max_{\omega} \{J_{\omega}[\rho_{AB}]\}. \quad (2.36)$$

El máximo se toma sobre todas las posibles mediciones; de este modo se elimina la dependencia de la discordia cuántica respecto al conjunto de medición. La flecha hacia la derecha indica que se realizaron mediciones en la parte B del sistema. La flecha en sentido contrario implica mediciones en la parte A del sistema. El primer término del lado derecho de la ecuación (2.36) se puede interpretar como las correlaciones totales en el sistema. El segundo término como la información obtenida sobre el sistema al realizar una medición únicamente en el subsistema B. Las propiedades de la discordia cuántica se enuncian a continuación:[26]

- I) La discordia cuántica siempre es positiva y casi todos los sistemas cuánticos poseen discordia diferente de cero, es decir,  $D_{AB}[\rho_{AB}]^{\leftarrow} \geq 0$ . La prueba de que el conjunto de matrices  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  que poseen discordia igual a cero es de medida cero se encuentra en [7].
- II) La discordia cuántica de un sistema es cero si, y sólo si, las mediciones locales en un subsistema no afectan al otro subsistema.[19]
- III) La discordia cuántica es en general, asimétrica; es decir,  $D_{AB}[\rho_{AB}]^{\leftarrow} \neq D_{AB}[\rho_{AB}]^{\rightarrow}$ .
- IV) La discordia cuántica no se ve alterada si se aplican transformaciones unitarias al sistema.

## 2.4. Ejemplos del cálculo de correlaciones

### 2.4.1. Estado separable

#### Ejemplo 2.4.1.

Se considera un estado bipartito de la forma

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|_A \otimes \rho_B^i, \quad (2.37)$$

donde  $\{|i\rangle\}$  son estados ortonormales del subsistema A. Claramente este estado es separable, y por lo tanto su enredamiento es cero. La medición que proporciona información sobre el subsistema A es una

medición proyectiva. El cálculo de las correlaciones clásicas nos proporciona

$$C_A(\rho_{AB}) = S(\rho_B) - \sum_i p_i S(\rho_B^i). \quad (2.38)$$

Del mismo modo la información mutua está dada por

$$I(\rho_{A:B}) = S(\rho_B) - \sum_i p_i S(\rho_B^i), \quad (2.39)$$

lo cual era esperado por no existir enredamiento en el sistema. Ahora se investigan las propiedades enunciadas en 2.1. La propiedad 1 se cumple, ya que el estado en el subsistema  $B$  correspondiente a cualquier medición en el subsistema  $A$  es  $\rho_B$ . De hecho se puede notar que  $C(\rho_{AB}) = 0$  si, y sólo si,  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ . La propiedad 2 se cumple debido a que la entropía de Von Neumann es invariante bajo operaciones unitarias locales. La propiedad 4 se cumple, ya que para estados puros  $C_A(\rho_{AB}) = S(\rho_A)$  ( $C_B(\rho_{AB}) = S(\rho_B) = S(\rho_A) = C_A(\rho_{AB})$ ) siempre se puede conseguir con proyecciones sobre la base de Schmidt. Entonces para estados puros  $E(\rho_{AB}) = C(\rho_{AB})$  y  $I(\rho_{A:B}) = 2E(\rho_{AB}) = 2C(\rho_{AB})$ . A continuación se muestra la prueba de que la medida propuesta cumple la condición 3.

**Teorema 2.4.1.** *La cantidad  $C_A(C_B)$  es no creciente, bajo operaciones locales.*

*Demostración.* Sea  $\{A_i^\dagger A_i : \sum_i A_i^\dagger A_i = I\}$  el POVM que maximiza

$$C_A = \max_{A_i^\dagger A_i} S(\rho_B) - \sum_i p_i S(\rho_B^i) = \max_{A_i^\dagger A_i} \sum_i p_i S(\rho_B^i || \rho_B). \quad (2.40)$$

- Considere una operación local  $\phi_A$  en el subsistema  $A$ . Esto puede conseguirse como parte de un POVM en  $A$ , entonces  $C_A$  como es un máximo no es afectado.
- Ahora tome una operación local  $\phi_B$  en el subsistema  $B$ . Entonces la propiedad de que la entropía relativa no es creciente bajo operaciones locales nos asegura

$$\sum_i p_i S(\rho_B^i || \rho_B) \geq \sum_i p_i S(\phi_B(\rho_B^i) || \phi_B(\rho_B)). \quad (2.41)$$

Con lo cual  $C_A$  no es creciente bajo operaciones locales.  $\square$

Ahora se muestran varios ejemplos donde se calculan las correlaciones totales, clásicas y el enredamiento.

### 2.4.2. Interpolación de estados extremos

#### Ejemplo 2.4.2.

Se considera un estado puro con enredamiento máximo,  $|\phi^+\rangle\langle\phi^+|$  y la familia de estados que interpolan éste con el estado  $|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|$ . Estos son estados de la forma

$$\rho_{AB} = p|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + (1-p)|\phi^-\rangle\langle\phi^-|, \quad (2.42)$$

donde  $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ . La información mutua como una función de  $p$  es  $I(\rho_{AB}) = 2 + p \log p + (1-p) \log(1-p)$ . El enredamiento es  $E(\rho_{AB}) = 1 + p \log p + (1-p) \log(1-p)$ . Para calcular la información mutua, simplemente basta con calcular los eigenvalores de la matriz de estado  $\rho_{AB}$ , expresada en la base estándar computacional  $(|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ . Haciendo las operaciones necesarias se obtiene la matriz

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & p - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p - \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

cuyos eigenvalores son  $\{0, 0, 1-p, p\}$ , con lo cual para obtener  $S(\rho_{AB})$  es suficiente con calcular la entropía de Shannon de los eigenvalores, a saber  $S(\rho_{AB}) = -(1-p) \log(1-p) - p \log(p)$ . Para obtener las entropías  $S(\rho_A)$  y  $S(\rho_B)$ , se toman las trazas parciales; en un caso se obtiene la matriz de densidad reducida  $\rho_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ , la cual ya es una matriz diagonal, de modo que  $S(\rho_A) = 1$ . Debido a que el estado es simétrico ante el intercambio de subsistemas A y B, se obtiene  $\rho_A = \rho_B$ . Con lo cual  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1$ . De este modo la información mutua es  $I(\rho_{AB}) = 2 + (1-p) \log(1-p) - p \log(p)$ . Para obtener el enredamiento, se siguen los resultados presentados en [23]. Un estado de Bell diagonal se escribe como

$$\rho = \sum_i \lambda_i \sigma_i, \quad (2.43)$$

donde  $\sigma_1 = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|$ ,  $\sigma_2 = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$ ,  $\sigma_3 = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$  y  $\sigma_4 = |\Psi^4\rangle\langle\Psi^4|$  donde  $|\Psi^\pm\rangle$ ,  $|\Phi^\pm\rangle$  son los estados de Bell usuales [24]. El estado  $\rho$  de la ecuación (2.43) expresado como matriz en la base computacional estándar es

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_3 + \lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda_4 \\ 0 & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

**Observación 2.4.1.** Para un estado de Bell diagonal  $\sigma = \sum_i \lambda_i \sigma_i$ , donde para todas las  $\lambda_i$  se cumple

$\lambda_i \in [0, \frac{1}{2}]$ , se tiene

$$E(\sigma) = 0, \quad (2.45)$$

mientras que para  $\lambda_1 \geq \frac{1}{2}$  se obtiene

$$E(\sigma) = \lambda_1 \ln(\lambda_1) + (1 - \lambda_1) \ln(1 - \lambda_1) + \ln(2). \quad (2.46)$$

Análogamente para  $\lambda_i \geq \frac{1}{2}$ .

*Demostración.* Para el caso donde  $\lambda_i \in [0, \frac{1}{2}] \forall i$ , el enredamiento es cero. Este hecho se demuestra en [10].

Para probar el teorema para  $\lambda_1 \geq \frac{1}{2}$  se utiliza la convexidad de la función  $f(x) = -\ln(x)$ ; así

$$\begin{aligned} E(\sigma) &= \sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i) + \min_{\rho \in \mathcal{D}} -\text{Tr}(\sigma \rho) \\ &\geq \sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i) + \min_{\rho \in \mathcal{D}} - \sum_i \lambda_i \langle e_i | \rho | e_i \rangle. \end{aligned}$$

Se sabe que  $\rho \in \mathcal{D}$  implica que  $\rho_{ii} \leq \frac{1}{2}$  (de otro modo podría ser purificado). Con lo cual se puede restringir la búsqueda de todos los estados desenredados a los estados de Bell con espectro en  $[0, \frac{1}{2}]$  ( $\mathcal{B}$ ); esto proporciona una cota inferior a la cantidad

$$\min_{\rho \in \mathcal{D}} - \sum_i \lambda_i \langle e_i | \rho | e_i \rangle = + \min_{\rho \in \mathcal{B}} - \sum_i \lambda_i \langle e_i | \rho | e_i \rangle. \quad (2.47)$$

Definiendo  $p_i = \langle e_i | \rho | e_i \rangle$  se tiene que minimizar la función  $f(p_1, p_2, p_3, p_4) = - \sum_i \lambda_i p_i$ , bajo las constricciones  $\sum_i p_i = 1$  y  $p_i \in [0, \frac{1}{2}]$ . Esta minimización nos entrega los mínimos

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_i = \frac{\lambda_i}{2(1 - \lambda_1)}. \quad (2.48)$$

El estado  $\rho = \sum_i p_i \sigma_i$  con los valores de la ecuación (2.48) pertenece a  $\mathcal{D}$  con lo cual el mínimo puede ser alcanzado, lo cual prueba la ecuación (2.46).  $\square$

En este caso se tiene  $\{\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = p, \lambda_4 = 1 - p\}$ , con lo cual el enredamiento relativo es  $E(\rho_{AB}) = 1 + (1 - p) \log(1 - p) - p \log(p)$ . Para las correlaciones clásicas se toma como conjunto de medición los

proyectores  $\{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$ . A continuación se muestra un cálculo detallado de este proceso.

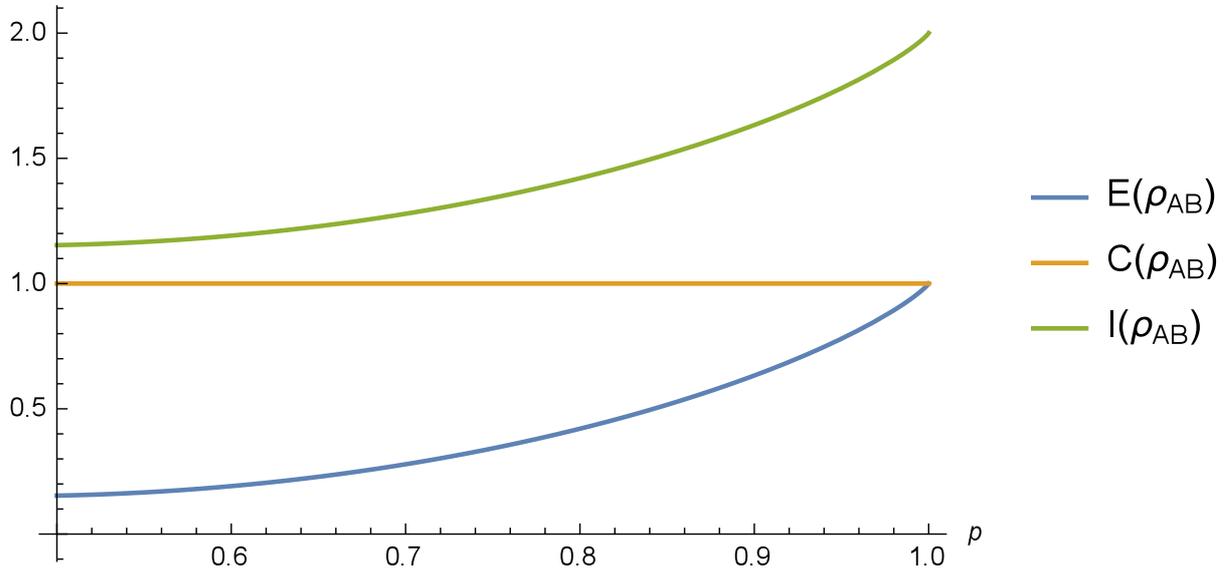
$$\begin{aligned}\rho_{AB}(\mathbb{I} \otimes |0\rangle\langle 0|) &= \left( \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \left( p - \frac{1}{2} \right) (|11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11|) \right) (\mathbb{I} \otimes |0\rangle\langle 0|) \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00|) + \left( p - \frac{1}{2} \right) (|11\rangle\langle 00|).\end{aligned}$$

Se obtiene

$$\begin{aligned}(\mathbb{I} \otimes |0\rangle\langle 0|)\rho_{AB}(\mathbb{I} \otimes |0\rangle\langle 0|) &= (\mathbb{I} \otimes |0\rangle\langle 0|) \left( \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00|) + \left( p - \frac{1}{2} \right) (|11\rangle\langle 00|) \right) \\ &= \frac{1}{2} |00\rangle\langle 00|.\end{aligned}$$

De igual manera  $\text{Tr}((\mathbb{I} \otimes |0\rangle\langle 0|)\rho_{AB}(\mathbb{I} \otimes |0\rangle\langle 0|)) = \frac{1}{2}$ ; con lo cual  $\rho_A^0 = |00\rangle\langle 00|$ , y se obtiene  $S(\rho_A^0) = 0$ . Los cálculos son análogos para el proyector  $|1\rangle\langle 1|$ . Así se calcula el valor de las correlaciones clásicas  $C_A(\rho_{AB}) = C_B(\rho_{AB}) = C(\rho_{AB}) = 1$ . Este es el máximo, ya que las correlaciones clásicas están acotadas por 1. A continuación se presenta una gráfica de las correlaciones en este sistema.

Correlaciones(bits)



### 2.4.3. Estado de Werner

El estudio de este estado en el texto es de suma importancia, ya que es el estado más simple que exhibe claramente las correlaciones cuánticas representadas por la discordia. En este estado la suma de las correlaciones clásicas y el enredamiento no saturan las correlaciones totales.

#### Ejemplo 2.4.3.

Ahora se considera el estado de Werner de la forma

$$\rho_{AB} = p|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \frac{1-p}{4}\mathbb{I},$$

con  $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ . Este sistema se puede expresar en la base computacional:

$$\rho_{AB} = \frac{p+1}{4}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \left(\frac{p}{2}\right)(|11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11|) + \frac{1-p}{4}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|),$$

con  $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ . Se calculan los estados reducidos

$$\rho_A = \text{Tr}_B \left[ \frac{p+1}{4}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \left(\frac{p}{2}\right)(|11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11|) + \frac{1-p}{4}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \right] \quad (2.49)$$

$$= \frac{p+1}{4}\text{Tr}_B(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \frac{p}{2}\text{Tr}_B(|11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11|) + \frac{1-p}{4}\text{Tr}_B(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \quad (2.50)$$

$$= \left(\frac{p+1}{4} + \frac{1-p}{4}\right)(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \quad (2.51)$$

$$= \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|). \quad (2.52)$$

De manera análoga para  $\rho_B$  se obtiene  $\rho_B = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ . La entropía de los estados reducidos es  $S(\rho_A) = -\log\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = S(\rho_B)$ . Si se expresa este estado como una matriz resulta

$$\begin{pmatrix} \frac{1+p}{4} & 0 & 0 & \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{1-p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-p}{4} & 0 \\ \frac{p}{2} & 0 & 0 & \frac{1+p}{4} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

cuyos eigenvalores son  $\left\{\frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1}{4}(1+3p)\right\}$ ; como resultado la información mutua está dada por

$$I(\rho_{AB}) = 2 + \left(\frac{3-3p}{4}\right)\log\left(\frac{1-p}{4}\right) + \left(\frac{1+3p}{4}\right)\log\left(\frac{1+3p}{4}\right), \quad (2.54)$$

el enredamiento está dado por

$$E(\rho_{AB}) = 1 + \left(\frac{3-3p}{4}\right)\log\left(\frac{3-3p}{4}\right) + \left(1 - \left(\frac{3-3p}{4}\right)\right)\log\left(1 - \left(\frac{3-3p}{4}\right)\right). \quad (2.55)$$

Como el sistema es simétrico ante el intercambio de los subsistemas A y B, las correlaciones clásicas de nuevo toman los valores  $C_A(\rho_{AB}) = C_B(\rho_{AB}) = C(\rho_{AB})$ . Esta cantidad se obtiene maximizando sobre mediciones proyectivas. A continuación se muestra un cálculo más detallado, basado en [14]. En este caso

un sistema bipartito de dos qubits puede expresarse de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{1}{4} \left( \mathbb{I} + \sum_{k=1}^3 c_k \sigma_k \otimes \sigma_k \right), \quad (2.56)$$

donde  $c_k$  son coeficientes complejos y  $\sigma_k$  son las matrices de Pauli. Si se expresa el estado anterior como una matriz se encuentra

$$\begin{pmatrix} \frac{1+c_3}{4} & 0 & 0 & \frac{c_1-c_2}{4} \\ 0 & \frac{1-c_3}{4} & \frac{c_1+c_2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{c_1+c_2}{4} & \frac{1-c_3}{4} & 0 \\ \frac{c_1-c_2}{4} & 0 & 0 & \frac{1+c_3}{4} \end{pmatrix},$$

cuyos eigenvalores son

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{1}{4} (1 - c_1 - c_2 - c_3), \\ \Delta_1 &= \frac{1}{4} (1 - c_1 + c_2 + c_3), \\ \Delta_2 &= \frac{1}{4} (1 + c_1 - c_2 + c_3), \\ \Delta_3 &= \frac{1}{4} (1 + c_1 + c_2 - c_3). \end{aligned}$$

Para que  $\rho$  sea una matriz de densidad es necesario imponer que  $\Delta_k \in [0, 1]$  para  $l = 0, 1, 2, 3$ . Dicha condición se aplica sobre los coeficientes  $c_i$ . Las matrices de densidad reducidas son  $\rho_A = \mathbb{I}(\frac{1}{2}) = \rho_B$ , con lo cual la información mutua está dada por

$$I(\rho) = 2 + \sum_{k=0}^3 \Delta_k \log(\Delta_k).$$

Ahora definimos los operadores de proyección  $\{\Pi_k = |k\rangle\langle k| : k = 0, 1\}$ ; con lo cual cualquier medición Von Neumann para el subsistema B puede escribirse como

$$\{B_k = V\Pi_k V^\dagger : k = 0, 1\},$$

para alguna matriz unitaria  $V \in U(2)$ . Pero cualquier matriz unitaria  $V$  puede ser escrita, hasta una fase constante, como

$$V = t\mathbb{I} + i\vec{y}\vec{\sigma}$$

con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , y además  $t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ . Con el estado después de la medición

$$\rho_k := \frac{1}{p_k} (\mathbb{I} \otimes B_k) \rho (\mathbb{I} \otimes B_k),$$

donde  $p_k = \text{Tr}[(\mathbb{I} \otimes B_k) \rho (\mathbb{I} \otimes B_k)]$ , se evalúa explícitamente

$$\begin{aligned} p_k \rho_k &= (\mathbb{I} \otimes B_k) \rho (\mathbb{I} \otimes B_k) \\ &= \left[ \mathbb{I} \otimes (V \Pi_k V^\dagger) \right] \rho \left[ \mathbb{I} \otimes (V \Pi_k V^\dagger) \right] \\ &= (\mathbb{I} \otimes V) (\mathbb{I} \otimes \Pi_k) (\mathbb{I} \otimes V^\dagger) \rho (\mathbb{I} \otimes V) (\mathbb{I} \otimes \Pi_k) (\mathbb{I} \otimes V^\dagger) \\ &= \frac{1}{4} (\mathbb{I} \otimes V) (\mathbb{I} \otimes \Pi_k) \left( \mathbb{I} + \sum_{k=1}^3 c_k \sigma_k \otimes \sigma_k \right) (\mathbb{I} \otimes \Pi_k) (\mathbb{I} \otimes V^\dagger). \end{aligned}$$

Usando las relaciones

$$V^\dagger \sigma_1 V = (t^2 + y_1^2 - y_2^2 - y_3^2) \sigma_1 + 2(ty_3 + y_1 y_2) \sigma_2 + 2(-ty_2 + y_1 y_3) \sigma_3, \quad (2.57)$$

$$V^\dagger \sigma_2 V = (t^2 + y_2^2 - y_1^2 - y_3^2) \sigma_2 + 2(ty_1 + y_3 y_2) \sigma_3 + 2(-ty_3 + y_1 y_2) \sigma_1, \quad (2.58)$$

$$V^\dagger \sigma_3 V = (t^2 + y_3^2 - y_2^2 - y_1^2) \sigma_3 + 2(ty_2 + y_1 y_3) \sigma_1 + 2(-ty_1 + y_2 y_3) \sigma_2, \quad (2.59)$$

además  $\Pi_0 \sigma_3 \Pi_0 = \Pi_0$ ,  $\Pi_1 \sigma_3 \Pi_1 = -\Pi_1$ ,  $\Pi_j \sigma_k \Pi_j = 0$  para  $j = 0, 1, k = 1, 2$ , se obtiene  $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$  y

$$\rho_0 = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + c_1 z_1 \sigma_1 + c_2 z_2 \sigma_2 + c_3 z_3 \sigma_3) \otimes (V \Pi_0 V^\dagger), \quad (2.60)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2} (\mathbb{I} - c_1 z_1 \sigma_1 - c_2 z_2 \sigma_2 - c_3 z_3 \sigma_3) \otimes (V \Pi_1 V^\dagger), \quad (2.61)$$

donde

$$z_1 := 2(-ty_2 + y_1 y_3), \quad (2.62)$$

$$z_2 := 2(ty_1 + y_2 y_3), \quad (2.63)$$

$$z_3 := t^2 + y_3^2 - y_1^2 - y_2^2. \quad (2.64)$$

Sea

$$\theta := \sqrt{|c_1 z_1|^2 + |c_2 z_2|^2 + |c_3 z_3|^2}, \quad (2.65)$$

esta cantidad depende de la matriz  $V$ . Entonces

$$s(\rho_0) = S(\rho_A) = -\frac{1-\theta}{2} \log \left( \frac{1-\theta}{2} \right) - \frac{1+\theta}{2} \log \left( \frac{1+\theta}{2} \right). \quad (2.66)$$

Con lo cual se tiene

$$p_0 S(\rho_A^0) + p_1 S(\rho_A^1) = -\frac{1-\theta}{2} \log\left(\frac{1-\theta}{2}\right) - \frac{1+\theta}{2} \log\left(\frac{1+\theta}{2}\right),$$

de donde se sigue

$$S(\rho_A) - \sum_{B_i} S(\rho_A^{i_A}) = \frac{1-\theta}{2} \log(1-\theta) + \frac{1+\theta}{2} \log(1+\theta). \quad (2.67)$$

Para obtener el máximo que exigen las correlaciones clásicas se define

$$c := \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}, \quad (2.68)$$

con lo cual

$$\theta \leq \sqrt{|c|^2 (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)} = c. \quad (2.69)$$

Ahora el máximo, donde se da la igualdad, se puede resolver por casos

- (1) Si  $c = |c_1|$ , la igualdad se da con  $|z_1| = 1, z_2 = z_3 = 0, y_1 = y_3 = 0$ .
- (2) Si  $c = |c_2|$ , la igualdad se obtiene con  $|z_2| = 1, z_1 = z_3 = 0, y_2 = y_3 = 0$ .
- (3) Si  $c = |c_3|$ , entonces la igualdad se cumple con  $|z_3| = 1, z_1 = z_2 = 0, y_1 = y_2 = 0$ .

Así

$$\max_{B_k} \theta = \max_V \theta = c.$$

De este modo se obtienen las correlaciones clásicas

$$C_B(\rho) = \frac{1-c}{2} \log(1-c) + \frac{1+c}{2} \log(1+c). \quad (2.70)$$

En el ejemplo presentado, haciendo una comparación entre el estado genérico de la ecuación (2.56), con la matriz del estado en la base computacional (2.53), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{1+p}{4} = \frac{1+c_3}{4}, \quad (2.71)$$

$$\frac{c_1 - c_2}{4} = \frac{p}{2}, \quad (2.72)$$

$$\frac{1-c_3}{4} = \frac{1-p}{4}, \quad (2.73)$$

$$\frac{c_1 + c_2}{4} = 0. \quad (2.74)$$

Resolviendo el sistema se obtienen los valores  $\{c_1 = c_3 = p, c_2 = -p\}$ . Al sustituir el valor de  $c = p$  en la

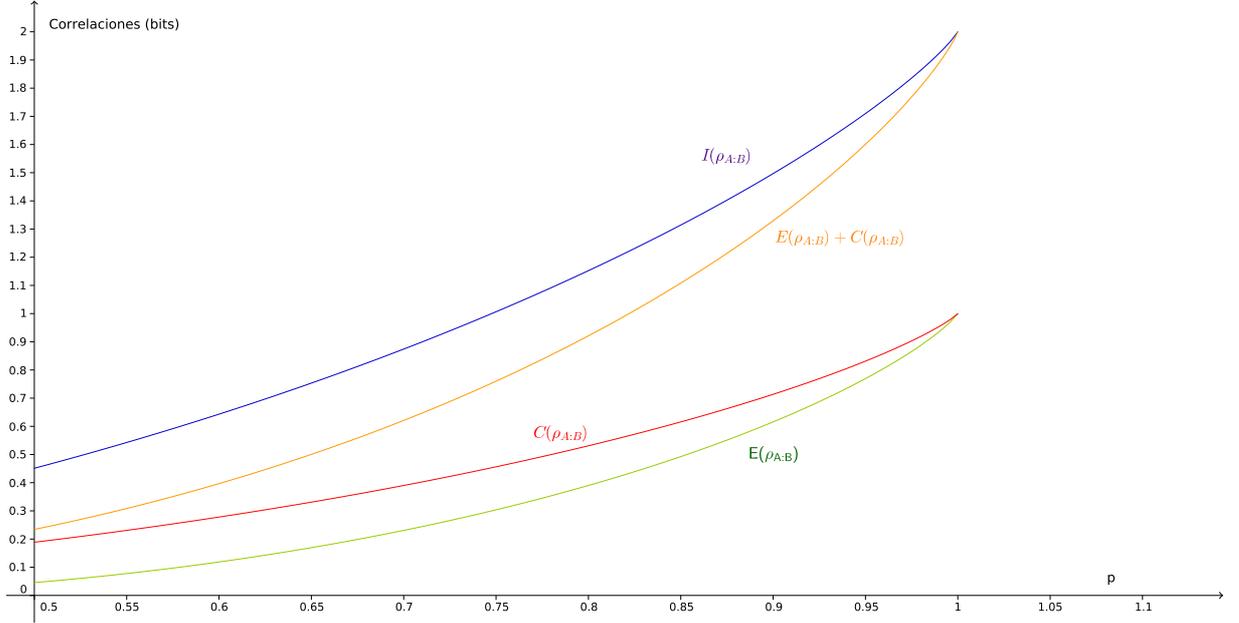


Figura 2.3: Gráfica de las correlaciones en el sistema cuántico  $\rho_{AB} = p|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \frac{1-p}{4}\mathbb{I}$

expresión para las correlaciones clásicas de la ecuación (2.70), se obtiene

$$C(\rho_{AB}) = \frac{1-p}{2} \log(1-p) + \frac{1+p}{2} \log(1+p). \quad (2.75)$$

Para hallar el valor del enredamiento se utilizan los resultados del ejemplo anterior. Para esto se resuelve un sistema de ecuaciones. Dicho sistema de ecuaciones resulta de la comparación entre las matrices (2.53) y (2.44). El sistema de ecuaciones obtenido es

$$\begin{aligned} \frac{1+p}{4} &= \frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2}, \\ \frac{1-p}{4} &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \\ \lambda_1 &= \lambda_2, \\ \lambda_3 - \lambda_4 &= p. \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es  $\left\{ \lambda_1 = \frac{1-p}{4}, \lambda_2 = \frac{1-p}{4}, \lambda_3 = \frac{1-p}{4}, \frac{1+3p}{4} \right\}$ . Se utiliza la ecuación (2.46), con la cual se obtiene el enredamiento mencionado. Una gráfica del valor de las correlaciones, respecto al valor de  $p$  se muestra en la Figura 2.3.

En los dos último ejemplos, se muestra que la suma de el enredamiento medido con la entropía relativa, más las correlaciones clásicas no siempre es igual a la información mutua. En otras palabras que en muchos sistemas existe un tipo de correlaciones que no se pueden catalogar como clásicas y difieren del enredamiento. A estas correlaciones son las que se conocen como la discordia cuántica.



## Capítulo 3

# Interpretación geométrica de las correlaciones

En este capítulo se introducen los conceptos geométricos de todas las correlaciones. Expresar las correlaciones de los sistemas en términos geométricos posee, al menos dos grandes ventajas [16]. La primera consiste en colocar todas las correlaciones en un mismo contexto. Este hecho es bastante útil, ya que ahora todas las correlaciones tendrán una misma interpretación y será más sencillo compararlas. La segunda es la de generalizar los conceptos de correlaciones a estados multipartitos, lo cual permite trabajar con un mayor número de sistemas. El sentido geométrico se deriva del hecho de tomar a la entropía relativa como una función de distancia. Aunque la entropía relativa no es formalmente una distancia (no cumple con la propiedad de simetría), funciona bien para los propósitos de cálculo de correlaciones.

Para comenzar se le llama  $\rho$  a el estado cuántico, el cual ahora no necesariamente es bipartito. Se le llama  $\mathcal{E}$  a el conjunto de estados enredados. Se supone  $\rho \in \mathcal{E}$ . Se le llama  $\sigma \in \mathcal{S}$  a los elementos del conjunto de estados separables. Se le llama  $\chi \in \mathcal{C}$  a los elementos del conjunto de estados clásicos. Estos estados son los que no poseen correlaciones cuánticas, pero pueden poseer correlaciones clásicas. Se le llama  $\pi \in \mathcal{P}$  a los elementos del conjunto de estados producto. A continuación se muestra un diagrama de cómo se relacionan las correlaciones. La cantidad  $L_\rho$ , hasta ahora no tiene una interpretación física concreta. Se define un estado producto de un sistema N-partito, es decir, un estado sin ningún tipo de correlaciones, como  $\pi = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_N$ ; donde  $\pi_k$  es el estado reducido del k-ésimo sistema. El conjunto de los estados producto  $\mathcal{P}$  no es un conjunto convexo en el sentido de que un estado mezcla de estados producto puede no ser un estado producto. El conjunto de los estados clásicos contiene estados mezcla de estados localmente distinguibles  $\chi = \sum_{k_n} p_{k_1 \dots k_n} |k_1 \dots k_n\rangle \langle k_1 \dots k_n| = \sum_{\vec{k}} p_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}|$ , donde  $p_{\vec{k}}$  es una distribución de probabilidad conjunta y los estados locales  $|k_n\rangle$  generan una base ortonormal. Note que  $\mathcal{C}$  no es un conjunto convexo; la mezcla de dos estados clásicos escritos en diferentes bases pueden generar un estado no clásico. El

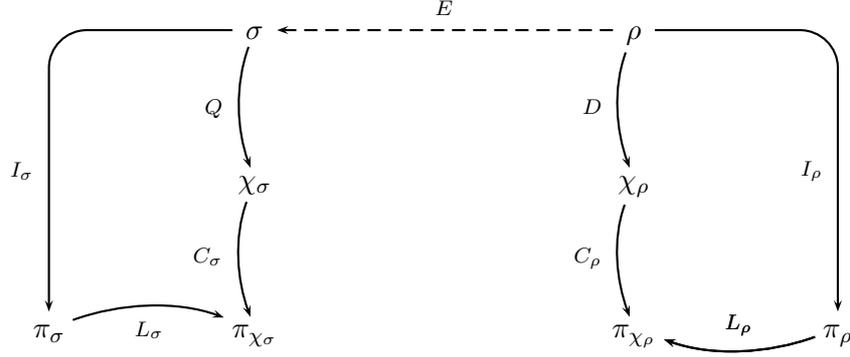


Figura 3.1: Diagrama de las correlaciones de un sistema físico.

conjunto de estados separables  $\mathcal{S}$  es convexo y contiene mezclas de la forma  $\sigma = \sum_i p_i \pi_i^{(i)} \otimes \dots \otimes \pi_N^{(i)}$ . El conjunto de estados producto es un subconjunto de los estados clásicos, que a su vez es un subconjunto de los estados separables. Los conjuntos separables y enredados son disjuntos. A continuación se presentan las definiciones geométricas de las correlaciones, junto con una nueva correlación: la disonancia.

$$E = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} S(\rho || \sigma) \quad (\text{enredamiento}) \quad (3.1)$$

$$D = \min_{\chi \in \mathcal{C}} S(\rho || \chi) \quad (\text{discordia cuántica}) \quad (3.2)$$

$$Q = \min_{\chi \in \mathcal{C}} S(\sigma || \chi) \quad (\text{disonancia cuántica}) \quad (3.3)$$

$$C = \min_{\pi \in \mathcal{P}} S(\chi || \pi) \quad (\text{correlaciones clásicas}) \quad (3.4)$$

En seguida se presenta una serie de lemas y fórmulas que son de utilidad en el cálculo de correlaciones.

**Lema 3.0.1.** *El espacio producto más cercano a cualquier estado genérico  $\rho$ , medido con la entropía relativa, es el producto de sus estados reducidos, i.e.,  $\pi_\rho = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_N$ .*

*Demostración.* Se asume que existe un estado  $\alpha = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \pi_N$ , tal que éste el espacio producto más cercano a  $\rho$ . Entonces se considera la diferencia

$$S(\rho || \pi_\rho) - S(\rho || \alpha) \geq 0. \quad (3.5)$$

Usando la linealidad de la traza y la aditividad de la función logaritmo, condensadas en la ecuación (1.31) resulta

$$\text{Tr}(\rho \log(\alpha_1 \otimes \alpha_2)) = \text{Tr}(\text{Tr}_2(\rho) \log(\alpha_1)) + \text{Tr}(\text{Tr}_1(\rho) \log(\alpha_2)). \quad (3.6)$$

Aplicando esta identidad a ambos términos de la ecuación se obtiene

$$\sum_i S(\pi_i|\pi_i) - S(\pi_i|\alpha_i) = -S(\pi_\rho|\alpha) \geq 0, \quad (3.7)$$

una cantidad negativa, lo cual considerando la positividad de la entropía relativa implica que debe de cumplirse la igualdad, es decir,  $\pi_i = \alpha$ .  $\square$

**Teorema 3.0.2.** *La entropía relativa entre un estado arbitrario  $\rho$  y el estado producto de sus estados reducidos es la información mutua del estado.*

*Demostración.* Directamente de la definición de entropía relativa se tiene

$$\begin{aligned} I(\rho) &= S(\rho|\pi_\rho) \\ &= -\text{Tr}[\rho \log(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_N) + \rho \log(\rho)] \\ &= -\sum_i \text{Tr}[\pi_i \log(\pi_i)] + \text{Tr}[\rho \log(\rho)] \\ &= S(\pi_\rho) - S(\rho), \end{aligned} \quad (3.8)$$

lo cual es la información mutua.  $\square$

El siguiente teorema, proporciona fórmulas para calcular las correlaciones clásicas:

$$C_\sigma = S(\pi_{\chi_\sigma}) - S(\chi_\sigma) \quad \& \quad C_\rho = S(\pi_{\chi_\rho}) - S(\chi_\rho). \quad (3.9)$$

Es importante mencionar que el siguiente teorema no permite calcular el estado clásico más cercano, solamente nos permite hallar las ecuaciones (3.9).

**Teorema 3.0.3.** *Dado un estado arbitrario  $\rho$ , el estado clásico más cercano es  $\chi_\rho = \sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k} | \rho | \vec{k}\rangle \langle \vec{k}|$ , donde  $\{|\vec{k}\rangle\}$  forma la eigenbase de  $\chi_\rho$ .*

*Demostración.* Sea  $\chi_\rho$  el estado clásico más cercano a  $\rho$ . Cualquier otro estado clásico  $X$  tendrá mayor entropía relativa (con respecto a  $\rho$ ) que  $\chi_\rho$ , es decir,  $S(\rho|X) - S(\rho|\chi_\rho) \geq 0$ . Se construye  $X$  proyectando  $\rho$  en la eigenbase de  $\chi_\rho$ ,  $X = \sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k} | \rho | \vec{k}\rangle \langle \vec{k}|$ . Se evalúa el primer término de la desigualdad anterior insertando un conjunto completo de proyectores  $\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}|$  aprovechando las propiedades cíclicas de la

traza y el hecho de que  $|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|$  conmuta con  $X$ ; con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
 S(\rho||X) &= \text{Tr}[\rho(\log(\rho) - \log(X))] \\
 &= -S(\rho) - \text{Tr}\left[\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\rho \log(X)\right] \\
 &= -S(\rho) - \text{Tr}\left[\sum_{\vec{k}} \left(|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\right)^2 \rho \log(X)\right] \\
 &= -S(\rho) - \text{Tr}\left[\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\rho|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}| \log(X)\right] \\
 &= S(X) - S(\rho).
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Se procede del mismo modo para el segundo término de la desigualdad obteniendo

$$\begin{aligned}
 S(\rho||\chi_\rho) &= \text{Tr}[\rho(\log(\rho) - \log(\chi_\rho))] \\
 &= -S(\rho) - \text{Tr}\left[\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\rho \log(\chi_\rho)\right] \\
 &= -S(\rho) - \text{Tr}\left[\sum_{\vec{k}} \left(|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\right)^2 \rho \log(\chi_\rho)\right] \\
 &= -S(\rho) - \text{Tr}\left[\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\rho|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}| \log(\chi_\rho)\right] \\
 &= S(\rho) - \text{Tr}[X \log(\chi_\rho)]
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Utilizando las ecuaciones (3.10) y (3.11), se reescribe la desigualdad como

$$\begin{aligned}
 S(\rho||X) - S(\rho||\chi_\rho) &= S(X) - \text{Tr}[X \log(\chi_\rho)] \\
 &= -S(X||\chi_\rho).
 \end{aligned}$$

Considerando que la entropía es positiva, la única posibilidad es  $S(X) = S(\chi_\rho)$ , lo cual concluye que  $X = \chi_\rho$ .  $\square$

El teorema 3.0.3 proporciona valiosa información, ya que la minimización necesaria para obtener un estado clásico ahora se realiza mediante una minimización de la entropía  $S(\chi_x)$ , sobre la elección de una base local  $|\vec{k}\rangle$ :

$$D = S(\chi_\rho) - S(\rho) \quad \text{y} \quad Q = S(\chi_\sigma) - S(\sigma), \tag{3.12}$$

donde  $S(\chi_x) = \min_{|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|} S\left(\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|x|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\right)$ .

**Teorema 3.0.4.** Las ecuaciones para  $L_\rho$  y  $L_\sigma$  son  $L_\rho = S(\pi_{\chi_\rho}) - S(\pi_\rho)$  y  $L_\sigma = S(\pi_{\chi_\sigma}) - S(\pi_\sigma)$ .

*Demostración.* Para encontrar la fórmula para  $L_\rho$  se comienza evaluando  $S(\rho|\pi_{\chi_\rho}) = -\text{Tr}(\rho \log(\pi_{\chi_\rho})) - S(\rho)$ . Usando el hecho de que  $\pi_{\chi_\rho}$  tiene la misma base que  $\chi_\rho$  e insertando un conjunto completo de proyectores en dicha base en el primer término se tiene  $-\text{Tr}(\rho \ln(\pi_{\chi_\rho})) = -\text{Tr}(\chi_\rho \log(\pi_{\chi_\rho}))$ . Usando las propiedades del logaritmo y de la traza se obtiene  $-\text{Tr}(\rho \ln(\pi_{\chi_\rho})) = S(\pi_{\chi_\rho})$ . Por otro lado usando la linealidad de la traza se obtiene  $-\text{Tr}(\rho \ln(\pi_{\chi_\rho})) = -\text{Tr}(\pi_\rho \log(\pi_{\chi_\rho})) = S(\pi_{\chi_\rho})$  para  $\pi_{\chi_\rho} = |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}| \pi_\rho |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|$ , donde  $\{|\vec{k}\rangle\}$  forma la base de  $\chi_\rho$ . Finalmente  $L_\rho = S(\pi_\rho|\pi_{\chi_\rho}) = S(\pi_{\chi_\rho}) - S(\pi_\rho)$ . La prueba para  $\sigma$  es análoga.  $\square$

Los teoremas anteriores nos proporcionan un método para calcular todas las correlaciones diferentes del enredamiento y las correlaciones clásicas. Felizmente, se cumplen relaciones exactas entre varias de estas cantidades:

$$T_\rho = D + C_\rho - L_\rho, \quad y \quad T_\sigma = Q + C_\sigma - L_\sigma. \quad (3.13)$$

Estas relaciones corresponden a los caminos cerrados en la figura 3.1 y significan que la suma de las correlaciones clásicas y cuánticas es igual a la suma de las correlaciones totales más las cantidades  $L_\rho$  y  $L_\sigma$ . Hasta el momento no existe una interpretación física de las cantidades  $L_\rho$  y  $L_\sigma$ , a pesar de que dichas cantidades juegan un papel importante en las correlaciones. Es importante notar que el enredamiento juega un papel en las correlaciones *dentro* de la discordia, pero no de manera independiente.

### 3.1. Estado de Werner

A continuación se presentan los estados diagonales de Bell como ejemplo para mostrar las relaciones de aditividad mencionadas anteriormente. Se considera el estado de Bell diagonal  $\rho = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \sigma_i$ . De manera equivalente se puede escribir en la base computacional como  $\rho = \frac{1}{4} \left( \mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j \otimes \sigma_j \right)$ , donde  $\sigma_j$

son las matrices de Pauli. Así se pueden calcular los estados reducidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\rho_A &= \text{Tr}_B(\rho) \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr}_B \left( \mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j \otimes \sigma_j \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \text{Tr}_B[\mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B] + \text{Tr}_B \left[ \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j \otimes \sigma_j \right] \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( 2\mathbb{I}_A + \sum_{j=1}^3 c_j \text{Tr}_B[\sigma_j \otimes \sigma_j] \right) \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{I}_A.
\end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene  $\rho_B = \frac{1}{2} \mathbb{I}_B$ . Por lo cual, en base a las definiciones anteriores se obtiene  $\pi_\rho = \rho_A \otimes \rho_B = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B)$ . Además se probó en el ejercicio anterior que el estado desenredado más cercano es  $\sigma = \sum_{i=1}^4 p_i \sigma_i$ , donde  $p_1 = \frac{1}{2}$  y  $p_i = \frac{\lambda_i}{2(1-\lambda_1)}$ , suponiendo que  $\lambda_1 \geq \frac{1}{2}$ , para que el estado posea enredamiento. Por lo tanto el estado clásico más cercano está dado por  $\chi_\rho = [\mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B + c_k \sigma_k \otimes \sigma_k]$ , donde  $c_k$  es el coeficiente escogido entre  $\{c_1, c_2, c_3\}$ , tal que  $|c_k| = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$ . Para ejemplificar estos cálculos geométricos se hace uso del estado

$$\rho_{AB} = p|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + (1-p)|\phi^-\rangle\langle\phi^-| \quad (3.14)$$

estudiado con anterioridad. Primero se calculan las correlaciones totales. Recordando que los eigenvalores de este estado son  $\left\{ \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1}{4}(1+3p) \right\}$ , resulta  $-S(\rho_{AB}) = \left( \frac{3-3p}{4} \right) \log \left( \frac{1-p}{4} \right) + \left( \frac{1+3p}{4} \right) \log \left( \frac{1+3p}{4} \right)$ . Ahora se calcula el término  $-\text{Tr}(\rho_{AB} \log(\pi_\rho))$

$$\begin{aligned}
-\text{Tr}(\rho_{AB} \log(\pi_\rho)) &= -\text{Tr} \left( \rho_{AB} \log \left( \frac{1}{4} (\mathbb{I}_4) \right) \right) \\
&= \text{Tr}(\rho_{AB} (\log(4) \mathbb{I}_4)) \\
&= 2\text{Tr}(\rho_{AB}) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Así se demuestra que las correlaciones totales son  $T(\rho_{AB}) = 2 + \left( \frac{3-3p}{4} \right) \log \left( \frac{1-p}{4} \right) + \left( \frac{1+3p}{4} \right) \log \left( \frac{1+3p}{4} \right)$ . A continuación se calcula la discordia. Para esto se calcula  $S(\chi_\rho)$ . Sabiendo que en este ejemplo

$\{c_1 = c_3 = p, c_2 = -p\}$ , el estado clásico visto como matriz es

$$\chi_\rho = \begin{pmatrix} \frac{1+p}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-p}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+p}{4} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Tomando  $c = c_3$ , los eigenvalores son  $\{\frac{1+p}{4}, \frac{1+p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}\}$ , y por ende  $S(\chi_\rho) = -\frac{1+p}{2} \log\left(\frac{1+p}{4}\right) - \frac{1-p}{2} \ln\left(\frac{1-p}{4}\right)$ . Por lo que la discordia es

$$\begin{aligned} D(\rho_{AB}) &= -\frac{1+p}{2} \log\left(\frac{1+p}{4}\right) - \frac{1-p}{2} \ln\left(\frac{1-p}{4}\right) + \left(\frac{3-3p}{4}\right) \log\left(\frac{1-p}{4}\right) + \left(\frac{1+3p}{4}\right) \log\left(\frac{1+3p}{4}\right) \\ &= -\frac{1+p}{2} \log\left(\frac{1+p}{4}\right) + \left(\frac{3-3p}{4} - \frac{1-p}{2}\right) \ln\left(\frac{1-p}{4}\right) + \left(\frac{1+3p}{4}\right) \log\left(\frac{1+3p}{4}\right) \\ &= -\frac{1+p}{2} \log\left(\frac{1+p}{4}\right) + \left(\frac{1-p}{4}\right) \ln\left(\frac{1-p}{4}\right) + \left(\frac{1+3p}{4}\right) \log\left(\frac{1+3p}{4}\right). \end{aligned}$$

A continuación se calculan las correlaciones clásicas. Como se acaba de mostrar  $\chi_\rho = (\frac{1+p}{4})(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + (\frac{1-p}{4})(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$ , con lo cual  $\chi_\rho^A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \chi_\rho^B$ . De este modo se obtiene  $\pi_{\chi_\rho} = \frac{1}{4}\mathbb{I}_4$ ; por lo tanto  $S(\pi_{\chi_\rho}) = 2 = -\log(\frac{1}{4})$ . Con lo cual las correlaciones clásicas toman la forma

$$\begin{aligned} C(\rho_{AB}) &= S(\pi_{\chi_\rho}) - S(\chi_\rho) \\ &= 2 + \frac{1+p}{2} \log\left(\frac{1+p}{4}\right) + \frac{1-p}{2} \ln\left(\frac{1-p}{4}\right) \\ &= 2 + \frac{1+p}{2} (\log(1+p) - \log(4)) + \frac{1-p}{2} (\ln(1-p) - \ln(4)) \\ &= 2 - \log(4) \left(\frac{1+p}{2} + \frac{1-p}{2}\right) + \frac{1+p}{2} \log(1+p) + \frac{1-p}{2} \ln(1-p) \\ &= 2 - \log(4) + \frac{1+p}{2} \log(1+p) + \frac{1-p}{2} \ln(1-p) \\ &= \frac{1+p}{2} \log(1+p) + \frac{1-p}{2} \ln(1-p). \end{aligned}$$

Lo cual concuerda con lo obtenido. Para finalizar queda por calcular  $L_\rho$ :

$$\begin{aligned} L_\rho &= S(\pi_{\chi_\rho}) - S(\pi_\rho) \\ &= 2 - S\left(\frac{1}{4}(\mathbb{I}_4)\right) \\ &= 2 - \log\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora comprobemos las ecuaciones

$$T_\rho + L_\rho = 2 + \left(\frac{3-3p}{4}\right) \log\left(\frac{1-p}{4}\right) + \left(\frac{1+3p}{4}\right) \log\left(\frac{1+3p}{4}\right). \quad (3.16)$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned} D + C_\rho &= 2 + \frac{1+p}{2} \log\left(\frac{1+p}{4}\right) + \left(\frac{1-p}{2}\right) \ln\left(\frac{1-p}{4}\right) \\ &\quad - \frac{1+p}{2} \log\left(\frac{1+p}{4}\right) + \left(\frac{1-p}{4}\right) \ln\left(\frac{1-p}{4}\right) + \left(\frac{1+3p}{4}\right) \log\left(\frac{1+3p}{4}\right) \\ &= 2 + \left(\frac{1-p}{2} + \frac{1-p}{4}\right) \left(\ln\left(\frac{1-p}{4}\right)\right) + \left(\frac{1+3p}{4}\right) \log\left(\frac{1+3p}{4}\right) \\ &= 2 + \left(\frac{3-3p}{4}\right) \log\left(\frac{1-p}{4}\right) + \left(\frac{1+3p}{4}\right) \log\left(\frac{1+3p}{4}\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Con la igualdad de las ecuaciones (3.17) y (3.16) se tiene el resultado deseado.

## Capítulo 4

# Conclusiones

En esta tesis, se realizó un estudio sobre las correlaciones en sistemas cuánticos. Dentro de dichas correlaciones se hizo especial énfasis en el enredamiento y la discordia. En base a los ejemplos y las discusiones mostradas con anterioridad, se pudo concluir que no es clara la frontera entre las correlaciones clásicas y cuánticas.

En el caso del enredamiento, se estudiaron las propiedades necesarias para obtener una medida de enredamiento útil. Se consideró a la entropía relativa como una posible función de distancia y se enunciaron las propiedades suficientes que debe de cumplir para poder generar una medida de enredamiento útil [22]. Se probaron las propiedades que cumple el enredamiento basado en la entropía relativa, por ejemplo, la convexidad, la subaditividad y compararse siempre menor al enredamiento de formación. Se mostró que para estados puros, el enredamiento basado en la entropía relativa se reduce a la entropía de Von Neumann, lo cual concuerda con otras medidas de enredamiento. Se identificaron las ventajas de esta medida de enredamiento, como son la independencia del número de subsistemas y la dimensión de éstos. Con la intención de mostrar una de estas ventajas, se escribió un código en *Python*, el cual calcula el enredamiento para un sistema bipartito de dos qubits. Dicho código entrega el estado desenredado más cercano y el valor del enredamiento. Utilizando este código se pudo comprobar el enredamiento para una considerable cantidad de ejemplos simples, entre ellos los estados diagonales de Bell y los estados de Werner.

En el caso de la discordia, se estudió esta cantidad como un nuevo tipo de correlación, surgida de una equivalencia para la información mutua en el caso clásico, pero sin sentido en el ámbito cuántico. A partir de esto se consideró como un tipo de correlación cuántica diferente del enredamiento, ya que varios ejemplos mostraron que las correlaciones clásicas y el enredamiento eran incapaces de saturar las correlaciones totales. Es en este punto donde la discordia juega un papel clave en las correlaciones, tomando en cuenta que ésta puede considerarse como un tipo de correlación cuántica más general que incluye al enredamiento.

Para las correlaciones clásicas se obtuvieron y demostraron sus propiedades relacionadas con la medición. Se les da la interpretación de clásicas, por ser el tipo de correlaciones obtenidas a partir de estados invariantes ante mediciones. Lamentablemente para este tipo de correlaciones no se tiene ningún método para encontrar el estado clásico más cercano para un estado en general. A pesar de esto se conocen fórmulas analíticas para los estados diagonales de Bell, que fueron usados en este trabajo para varios ejemplos.

Todas estas correlaciones tienen un origen diferente, pero pueden ser llevadas a un esquema donde puedan calcularse y compararse sin necesidad de hacer mediciones; es decir, utilizando una minimización de la base, en lugar de una minimización sobre la medición. Esto es bastante ventajoso, porque evita complicaciones en los cálculos. Además es posible darle una interpretación similar a cada una de las correlaciones. Este esquema es un esquema geométrico, el cual se estudió en el capítulo 3, donde se utilizó a la entropía relativa como una pseudo-distancia. Posiblemente el resultado más relevante de utilizar este esquema geométrico es que es posible obtener fórmulas exactas para la división de las correlaciones. Dichas fórmulas ofrecen un cálculo simple a las correlaciones, pero algunas cantidades no tienen una interpretación física clara, lo cual es una incógnita aún por resolver.

Considerando todos estos resultados se puede concluir que los estados cuánticos poseen correlaciones mucho más complejas que los estados clásicos. Estas correlaciones no solamente se limitan al enredamiento, sino que posiblemente se puedan definir como la discordia cuántica o aún una cantidad más general.

La importancia de poder dividir las correlaciones en clásicas y cuánticas radica en que para las aplicaciones ópticas, como las de computación cuántica, se requieren estados fuertemente correlacionados. Además de que la transmisión de información puramente cuántica en forma de correlaciones requiere de canales cuánticos, mientras que la información clásica puede ser enviada mediante canales clásicos. Por lo cual, para un procesamiento cuántico de la información eficiente es de vital importancia estudiar diferentes medidas de correlaciones para obtener una medida precisa que nos entregue resultados útiles.

Para resaltar la importancia de las correlaciones en la teoría de la información cuántica, se hace un especial énfasis en la discordia cuántica. Desde que la discordia cuántica fue descubierta, se ha tenido un especial interés sobre su papel en aplicaciones de comunicación cuántica. La discordia cuántica se usa: como un recurso imprescindible en metrología cuántica, en la producción de estados correlacionados de manera remota, en la determinación de la formación y el consumo de enredamiento, por mencionar algunos usos [5, 4, 6]. En estos algoritmos, el enredamiento sólo está presente incluido en la discordia, además de que en las aplicaciones anteriores se utilizan estados desenredados. En muchas aplicaciones es suficiente con utilizar estados separables, pero mezclados al máximo, se utilizan dichos estados, porque éstos son sencillos de preparar en un laboratorio y además son más resistentes a la decoherencia [6].

Dichas aplicaciones muestran que las correlaciones cuánticas no están completamente determinadas por el enredamiento.

Esta tesis está enfocada a todo aquel que necesite calcular las correlaciones de estados cuánticos y busca generar más interés en este tema, debido a sus múltiples aplicaciones en el procesamiento de la información. Los ejemplos que expone son sencillos pero ilustrativos y el código involucrado es libre de modificarse a conveniencia del usuario. Con este trabajo se espera facilitar el acceso a alumnos de licenciatura a la teoría de la información cuántica.



## Apéndice A

# Cálculo numérico del enredamiento

El siguiente código implementa el cálculo numérico del enredamiento para cualquier matriz de densidad de un sistema bipartito de dos qubits. Dicho método está basado en el método del gradiente descendiente, utilizando la condición Armijo, en la minimización por el método Backtracking line search. Se presenta una breve descripción de las funciones.

### *Librerías.*

En este código se hace uso de las librerías

- Numpy, math, scipy y random. Dichas librerías se encuentran comúnmente instaladas en Python y nos ayudan a elaborar operaciones matemáticas.
- Random. Dicha librería nos permite generar números aleatorios.

### *Variables de entrada.*

- Se requiere  $\sigma$ , el cual es el sistema cuántico al cual se le calculará el enredamiento. Se requieren sus elementos de matriz expresados en la base computacional estándar  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ .
- Se solicita *iter*, el cual es el número de iteraciones con las cuales el código calculará el enredamiento. Aproximadamente 200 iteraciones son suficientes para una aproximación muy exacta del enredamiento.

### *Variables de salida.*

- El programa entrega  $\rho$ , la matriz desenredada más cercana a  $\sigma$  medida con la entropía relativa.
- El programa devuelve  $E(\sigma)$ , el enredamiento de la matriz  $\sigma$ .

---

```
1 import numpy as np
2 import math as math
3 import scipy as sci
```

```

4 import random as ran
5 from numpy import *
6 from math import log
7 from numpy import linalg as LA
8 from numpy.linalg import inv
9 _epsilon = sqrt(finfo(float).eps)
10 ket0=np.matrix('1;0')
11 ket1=np.matrix('0;1')
12 ket00bra00=np.outer(np.kron(ket0 , ket0), np.kron(ket0 , ket0).H)
13 def logi(x):          #funcion que calcula el logaritmo de una matriz
14     y=np.zeros_like(x) #entrada por entrada. Ademas define log0=0
15     for i in np.arange(0,x.shape[0]):
16         for j in np.arange(0,x.shape[1]):
17             if np.around(x[i , j] , decimals=13)==0:
18                 y[i , j]=0
19             else:
20                 y[i , j]=np.log(np.around(x[i , j] , decimals=13))
21     return y
22 sigma=np.empty([4 , 4])
23 print "Este es un codigo que calcula el enredamiento de un sistema;\
24     de dos quibits"
25 print "A continuacion ingresa los diez elementos necesarios para ;\
26     definir una matriz de densidad expresada en la base computacional "
27 sigma[0,0]=input("Ingresa la entrada 0,0 de la matriz de densidad a la cual;\
28     se le calculara el enredamiento:")
29 sigma[0,1]=input("Ingresa la entrada 0,1 de la matriz de densidad a la cual;\
30     se le calculara el enredamiento:")
31 sigma[0,2]=input("Ingresa la entrada 0,2 de la matriz de densidad a la cual;\
32     se le calculara el enredamiento:")
33 sigma[0,3]=input("Ingresa la entrada 0,3 de la matriz de densidad a la cual;\
34     se le calculara el enredamiento:")
35 sigma[1,0]=conj(sigma[0 , 1])
36 sigma[1,1]=input("Ingresa la entrada 1,1 de la matriz de densidad a la cual;\
37     se le calculara el enredamiento:")
38 sigma[1,2]=input("Ingresa la entrada 1,2 de la matriz de densidad a la cual;\
39     se le calculara el enredamiento:")
40 sigma[1,3]=input("Ingresa la entrada 1,3 de la matriz de densidad a la cual;\
41     se le calculara el enredamiento:")

```

```

42 sigma[2,0]=conj(sigma[0,2])
43 sigma[2,1]=conj(sigma[1,2])
44 sigma[2,2]=input(" Ingresa la entrada 2,2 de la matriz de densidad a la cual;\
45                 se le calculara el enredamiento:")
46 sigma[2,3]=input(" Ingresa la entrada 2,3 de la matriz de densidad a la cual;\
47                 se le calculara el enredamiento:")
48 sigma[3,0]=conj(sigma[0,3])
49 sigma[3,1]=conj(sigma[1,3])
50 sigma[3,2]=conj(sigma[2,3])
51 sigma[3,3]=input(" Ingresa la entrada 3,3 de la matriz de densidad a la cual;\
52                 se le calculara el enredamiento:")
53 print ("A continuacion se muestra la matriz ingresada:")
54 s = [[str(e) for e in row] for row in sigma]
55 lens = [max(map(len, col)) for col in zip(*s)]
56 fmt = '\t'.join('{{:}}'.format(x) for x in lens)
57 table = [fmt.format(*row) for row in s]
58 print ('\n'.join(table))
59 def chabas(x,y):      #funcion que aplica un cambio de base de la matriz x
60     z=np.zeros_like(x) #con el cambio y
61     z=np.dot(inv(y),np.dot(x,y))
62     return z
63 def logm(x): #funcion que calcula el logaritmo de una matriz invertible
64     w,v=LA.eig(x)
65     z=np.zeros_like(x)
66     z=chabas(logi(chabas(x,v)),inv(v))
67     return z
68 def S(x):
69     return (np.trace(np.dot(sigma,logm(sigma)));\
70            -np.trace(np.dot(sigma,logm(den(x))))).real
71 def S1(x):
72     return (np.trace(np.dot(sigma,logm(sigma)));\
73            -np.trace(np.dot(sigma,logm(x))))).real
74 def prod(x): #funcion que ejecuta el producto de todos los elementos de una lista
75     prod=1
76     for i in np.arange(0,x.size):
77         prod=prod*x[i]
78     return prod
79 def ran(x): #funcion que genera una lista de longitud x de numeros aleatorios

```

```

80     a=[random.uniform(0,2*pi) for _ in range(0,x)]
81     b=np.array(a)
82     return b
83 def ran1(x): #funcion que genera una lista de longitud x de numeros aleatorios
84     a=[random.uniform(0,0.001) for _ in range(0,x)]
85     b=np.array(a)
86     return b
87 phi0=np.array([pi/2])
88 phi=np.append(phi0,ran(15))
89 alpha=ran(16)
90 beta=ran(16)
91 eta=ran(16)
92 mu=ran(16)
93 vari=0
94 a=np.append(beta,eta)
95 b=np.append(phi,alpha)
96 c=np.append(b,a)
97 rho=np.append(c,mu)
98 def P(x,y): #funcion que evalua los p_i cuadrados
99     prod=1
100    for i in np.arange(y,16):
101        prod=prod*cos(x[i])
102    p=sin(x[y-1])*prod
103    return p
104 def psi1(a,k):
105    return cos(a[k+15])*ket0+sin(a[k+15])*exp(complex(0,a[k+47]))*ket1
106 def psi2(a,k):
107    return cos(a[k+31])*ket0+sin(a[k+31])*exp(complex(0,a[k+63]))*ket1
108 def den(y):
109    sum=np.zeros_like(sigma)
110    for i in np.arange(1,17):
111        sum=sum+np.square(P(y,i))*np.kron(np.outer(psi1(y,i),psi1(y,i).H),;\
112                                           np.outer(psi2(y,i),psi2(y,i).H))
113    return sum
114 def Grad(x):
115    vari=ran1(1)
116    gra=np.zeros_like(rho)
117    for i in np.arange(1,80):

```

```

118     vari2=np.zeros_like(x)
119     vari2[i]=vari
120     rhop=x+vari2
121     rhom=x-vari2
122     gra[i]=(S(rhop)-S(rhom))*(1/(2*vari))
123     return gra
124     #####
125 def BacktrackingLineSearch(f, df, x, p, df_x = None, f_x = None, args = (),;\
126     alpha = 0.01, beta = 0.8, eps = _epsilon, Verbose = False):
127
128     if f_x is None:
129         f_x = f(x, *args)
130     if df_x is None:
131         df_x = df(x, *args)
132
133     assert df_x.T.shape == p.shape
134     assert 0 < alpha < 1, 'Valor invalido para alpha'
135     assert 0 < beta < 1, 'Valor invalido para beta'
136
137     derphi = dot(df_x, p)
138
139     assert derphi.shape == (1, 1) or derphi.shape == ()
140     assert derphi < 0, 'Intento de ir en la direccion del gradiente'
141
142     stp = 1.0
143     fc = 0
144     len_p = LA.norm(p)
145
146
147     #Condicion armijo
148     while f(x + stp * p, *args) > f_x + alpha * stp * derphi:
149         stp *= beta
150         fc += 1
151         if Verbose: print('linesearch iteration'), fc, ':',;\
152             stp, f(x + stp * p, *args), f_x + alpha * stp * derphi
153         if stp * len_p < eps:
154             print('Step is too small, stop')
155             break

```

```

156     #if Verbose: print'linesearch iteration 0 :', stp, f_x, f_x
157
158     if Verbose: print('linesearch done')
159     #print fc, 'iterations in linesearch'
160     return stp
161 #####
162 rhold=np.zeros_like(rho)
163 iter=input("Ingresa numero de iteraciones maximo ")
164 sum=1
165 itera=0
166 while (sum > 0.0001 and itera < iter):
167     rhold=np.copy(rho)
168     gradi=Grad(rho)
169     best=BacktrackingLineSearch(S, Grad , rho, - gradi)
170     rho=rhold-best*gradi
171     sum=0
172     for k in np.arange(0,3):
173         for l in np.arange(0,3):
174             sum=sum+absolute(den(rhold)[k, l]-den(rho)[k, l])
175     itera=itera+1
176 rhoround=np.around(den(rho), decimals=4)
177 print ("La matriz desenredada mas cercana es: ")
178 s1 = [[str(e) for e in row] for row in rhoround]
179 lens1 = [max(map(len, col)) for col in zip(*s1)]
180 fmt1 = '\t'.join('{{:{{}}}}'.format(x) for x in lens1)
181 table1 = [fmt1.format(*row) for row in s1]
182 print '\n'.join(table1)
183 print ("El enredamiento de la matriz es: ")
184 print (S(rho))
185 print ("La ultima iteracion tuvo una diferencia menor en ;\
186     cada una de sus entradas a ")
187 print sum

```

---

# Bibliografía

- [1] Stephen M. Barnett. *Quantum Information*. Oxford University Press, 2009.
- [2] B. Bellomo, R. Lo Franco, and G. Compagno. Dynamics of geometric and entropic quantifiers of correlations in open quantum systems. *Phys. Rev. A*, 86:012312, 2012.
- [3] K.G. Binmore. *Mathematical analysis*. Cambridge University Press, 1977.
- [4] Borivoje Dakic et al. Quantum discord as resource for remote state preparation. *Nature Phys*, 8:666–670, 2012.
- [5] Davide Girolami et al. Quantum discord determines the interferometric power of quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 112:210401, 2014.
- [6] K. Modi et al. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. *Rev. Mod. Phys.*, 84:1655–1707, 2012.
- [7] A. Ferraro, L. Aolita, D. Cavalcanti, F. M. Cucchietti, and A. Acín. Almost all quantum states have nonclassical correlations. *Phys. Rev. A*, 81:052318, 2010.
- [8] Masahito Hayashi. *Quantum Information: An Introduction*. Springer, 2006.
- [9] L Henderson and V Vedral. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34:6899–6905, 2001.
- [10] Ryszard Horodecki and Michal Horodecki. Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states. *Phys. Rev. A*, 54:1838–1843, 1996.
- [11] Nan Li and Shunlong Luo. Classical states versus separable states. *Phys. Rev. A*, 78:024303, 2008.
- [12] Göran Lindblad. Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems. *Comm. Math. Phys.*, 39:111–119, 1974.

- 
- [13] Göran Lindblad. Completely positive maps and entropy inequalities. *Comm. Math. Phys.*, 40:147–151, 1975.
- [14] Shunlong Luo. Quantum discord for two-qubit systems. *Phys. Rev. A*, 77:042303, 2008.
- [15] Gen Kimura Masahito Hayashi, Satoshi Ishizaka Akinori Kawachi and Tomohiro Ogawa. *Introduction to Quantum Information Science*. Springer, 2015.
- [16] Kavan Modi, Tomasz Paterek, Wonmin Son, Vlatko Vedral, and Mark Williamson. Unified view of quantum and classical correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 104:080501, 2010.
- [17] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [18] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 2006.
- [19] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 88:017901, 2001.
- [20] D. Petz. Quasi-entropies for finite quantum systems. *Rep. Math. Phys.*, 21:57–65, 1986.
- [21] Dénes Petz. *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*. Springer, 2008.
- [22] V. Vedral and M. B. Plenio. Entanglement measures and purification procedures. *Phys. Rev. A*, 57:1619–1633, 1998.
- [23] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, and P. L. Knight. Quantifying entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2275–2279, 1997.
- [24] Mark M. Wilde. *Quantum Information Theory*. Cambridge University Press, 2013.
- [25] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248, 1998.
- [26] Jian-Song Zhang and Ai-Xi Chen. Review of quantum discord in bipartite and multipartite systems. *Quant. Phys. Lett.*, 1:69–77, 2012.