



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS EN
FORMACIONES MOJADAS POR ACEITE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Ingeniero Petrolero

PRESENTA:

José Luis Ramírez Rosales

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Víctor H. Arana



CDMX, Mayo 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería,
mi más grande reconocimiento por la formación que me han brindado.
Es gracias a ellas la culminación del presente trabajo.
En verdad, ¡Gracias!*

Reconocimientos

“No hay deber más necesario que el de dar gracias” **Cicerón**.

Reconozco el gran esfuerzo que hicieron mis padres Rosalva y José Luis para mantenerme, en todo momento, ocupado únicamente en mis estudios, en especial a mi mamá, lo cual me permitió desarrollarme de manera integral dentro de la Universidad. Ahora logro la culminación de mis estudios de licenciatura con la presentación de mi trabajo de tesis. Una mención importante es para mi tío Bart que se encuentra en todo momento apoyando a mi familia y que de manera directa e indirecta también he recibido su apoyo. ¡A ustedes muchas Gracias!

Agradezco todo el apoyo que me fue brindado por mi director de tesis, el Dr. Víctor Hugo Arana Ortíz ya que sin sus valiosos conocimientos, sin su tiempo invertido en asesorías y sin sus sabios consejos, este trabajo de tesis no lo hubiera podido haber realizado yo solo. ¡Doctor muchas Gracias!

También quisiera hacer un reconocimiento especial al Ing. David Trujillo porque gracias a sus conocimientos y comentarios, me fue posible llevar por buen camino la realización de mi trabajo. ¡Gracias!

Quisiera agradecer a mis sinodales, sus sugerencias fueron de gran soporte para la mejora del presente trabajo.

Gracias a mis hermanos, a mis sobrinitas, a mi familia cercana y a todos mis amigos que estuvieron conmigo.

“Como cualquier hombre ordinario me esfuerzo por la perfección pero como todo buen hombre me he dado cuenta que la perfección está fuera de alcance”.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

José Luis Ramírez Rosales. CDMX, Mayo 2016

Resumen

Para un adecuado entendimiento del yacimiento y predecir su futuro comportamiento, es imprescindible tener una clara comprensión acerca de la física del flujo de fluidos dentro del medio poroso, para esto se requiere tener conocimiento de las propiedades del sistema roca-fluidos y de los mecanismos de producción asociados a la recuperación de aceite, así como de los procesos utilizados para adicionarle de forma artificial energía al yacimiento.

Para poder establecer una aplicación correcta de un simulador numérico de yacimientos, más allá de manejar un software comercial, es necesario comprender los procesos que se llevan a cabo internamente. Primeramente se establece la ecuación diferencial que describe el flujo de fluidos a través de medios porosos, que junto con las condiciones iniciales y de frontera, conforman el modelo matemático del sistema a analizar. Posteriormente se tiene el proceso de solución numérica de la ecuación diferencial que describe el flujo de fluidos y que consiste básicamente en obtener una representación aproximada de la ecuación en puntos específicos de tiempo y espacio. Así la ecuación diferencial de flujo, cuyo dominio de aplicación en espacio y tiempo es continuo, es reemplazada por un sistema algebraico de ecuaciones. El sistema de ecuaciones es no lineal, por lo cual se requiere del uso de métodos numéricos para la linealización y solución del sistema de ecuaciones.

El objetivo de este trabajo es elaborar un simulador numérico de yacimientos bifásico, bajo el esquema Totalmente Implícito, para poder determinar el efecto que tiene la mojabilidad en la recuperación total de aceite cuando se lleva a cabo un proceso de inyección de agua, ya que “la mojabilidad es el principal factor en el flujo, localización y distribución de los fluidos dentro del medio poroso” **Anderson, (1987)**. Cuando la formación es mojada por aceite, la irrupción de agua ocurre a un tiempo temprano con una baja producción de aceite, después de la irrupción una considerable cantidad de aceite puede ser recuperada. A la inversa, cuando la formación es mojada por agua, antes de que se presente la irrupción del frente de agua dentro del pozo productor, la recuperación de aceite es muy alta con una mínima cantidad adicional de producción de aceite posterior a la irrupción.

Índice general

Índice de figuras	XIII
Índice de tablas	XV
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivo	2
1.3. Motivación	2
1.4. Planteamiento del problema	2
1.5. Metodología	3
1.6. Contribuciones	3
1.7. Estructura de la tesis	4
2. Fundamentos de Flujo de Fluidos en Medios Porosos	5
2.1. Propiedades de la Roca	5
2.1.1. Porosidad	5
2.1.2. Compresibilidad de la Roca	7
2.1.3. Saturación	7
2.1.4. Permeabilidad	9
2.1.5. Tensión Interfacial	10
2.1.6. Mojabilidad	11
2.1.7. Fuerzas Capilares	13
2.1.8. Presión Capilar	14
2.2. Propiedades de los Fluidos	14
2.2.1. Tipos de Fluidos	14
2.2.2. Viscosidad	15
2.2.3. Factor de Volumen	16
2.2.3.1. Factor de volumen del gas, B_g	16
2.2.3.2. Factor de volumen del aceite, B_o	16
2.2.3.3. Factor de volumen del agua, B_w	17
2.2.4. Movilidad, λ	17
2.3. Funciones de Saturación	18
2.3.1. Presión Capilar vs Saturación	18

ÍNDICE GENERAL

2.3.2.	Permeabilidades Relativas vs Saturación	24
2.4.	Mecanismos de Producción	27
2.4.1.	Expansión del sistema roca-fluidos	28
2.4.2.	Empuje por gas disuelto	28
2.4.3.	Empuje por casquete de gas	29
2.4.4.	Empuje por acuífero asociado	29
2.4.5.	Segregación gravitacional	30
2.4.6.	Combinación de mecanismos	31
3.	Formulación Matemática	33
3.1.	Flujo Bifásico Aceite-Agua	33
3.1.1.	Planteamiento del Problema.	35
3.1.2.	Modelo Matemático	35
3.2.	Condiciones Iniciales y de Frontera	37
3.2.1.	Condiciones Iniciales	37
3.2.2.	Condiciones de Frontera	37
4.	Formulación Numérica	39
4.1.	Ecuaciones de Flujo en Diferencias Finitas	39
4.1.1.	Discretización de las ecuaciones de Flujo	39
4.1.2.	Acoplamiento de las Condiciones de Frontera	41
4.1.3.	Método de Newton para la Linealización de las Ecuaciones de Flujo	44
4.2.	Solución del Sistema de Ecuaciones	46
4.3.	Algoritmo de Solución	56
5.	Análisis de Resultados	59
5.1.	Caso 0. Validación del Modelo	63
5.2.	Caso 1: Yacimiento con Mojabilidad al Agua	67
5.3.	Caso 2: Yacimiento con Mojabilidad Intermedia	69
5.4.	Caso 3: Yacimiento con Mojabilidad al Aceite	71
6.	Conclusiones	75
A.	Elementos de la Matriz Jacobiana	79
A.1.	ACEITE	79
A.2.	AGUA	94
B.	Tratamiento de Pozos Productores e Inyectores	113
B.1.	Pozo Productor	113
B.1.1.	Condición 1: Gasto de Aceite constante @ c.e., especificado, $q_{o,ce}$	114
B.1.2.	Condición 2: Gasto de Aceite @ p_{wf} constante	119
B.2.	Pozo Inyector	122
B.3.	Gasto de Líquido Especificado, $q_L = q_o + q_w$	124

C. Código/Manuales/Publicaciones	127
C.1. Código de Inicialización	127
C.2. Convergencia	128
Bibliografía	131

Índice de figuras

2.1. Porosidad	6
2.2. Roca saturada de aceite y agua	8
2.3. Gráfica de permeabilidad relativa al aceite y al agua	10
2.4. Tensión interfacial	11
2.5. Roca mojada por agua	12
2.6. Roca mojada por aceite	12
2.7. Roca sin preferencia a ser mojada	12
2.8. Presión capilar	13
2.9. Tipos de fluidos	15
2.10. Gráfica de viscosidad del aceite vs presión del yacimiento	16
2.11. Factor de volumen del aceite vs presión del yacimiento	17
2.12. Sistema mojado por agua	19
2.13. Sistema fuertemente mojado por agua	21
2.14. Sistema mojado por aceite	22
2.15. Sistema fuertemente mojado por aceite	23
2.16. Permeabilidades relativas aceite y agua	24
2.17. Permeabilidades relativas fuertemente mojado por agua	25
2.18. Permeabilidades relativas fuertemente mojado por aceite	26
2.19. Empuje por gas disuelto liberado	28
2.20. Empuje por casquete de gas	29
2.21. Empuje por acuífero asociado	30
2.22. Segregación gravitacional	31
2.23. Combinación de empujes	32
3.1. Inyección de agua en un yacimiento de aceite	36
4.1. Dominio discretizado en dirección x	41
4.2. Malla de cálculo en $x = 0$, mostrando el nodo ficticio $i = 0$	42
4.3. Malla de cálculo en $x = L$, mostrando el nodo ficticio $i = I_{max} + 1$	43
4.4. Malla nodos centrados	50
4.5. Plano cardenal	53
4.6. Plano cardenal, 2D	54
4.7. Plano cardenal, 3D	55

ÍNDICE DE FIGURAS

5.1. Permeabilidades relativas, mojabilidad al agua	60
5.2. Permeabilidades relativas, mojabilidad intermedia	61
5.3. Permeabilidades relativas, mojabilidad al aceite	62
5.4. Comparación entre SNY y Eclipse, Gastos	63
5.5. Comparación entre SNY y Eclipse, Pwf	64
5.6. Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 0 días	65
5.7. Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 182 días	66
5.8. Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 365 días	66
5.9. Malla de simulación, Sw, mojabilidad al agua, 0 días	68
5.10. Malla de simulación, Sw, mojabilidad al agua, 290 días	68
5.11. Producción acumulada, relación agua-aceite, mojabilidad al agua	69
5.12. Malla de simulación, Sw, mojabilidad intermedia, 0 días	70
5.13. Malla de simulación, Sw, mojabilidad intermedia, 290 días	70
5.14. Producción acumulada, relación agua-aceite, mojabilidad intermedia	71
5.15. Malla de simulación, Sw, mojabilidad al aceite, 0 días	72
5.16. Malla de simulación, Sw, mojabilidad al aceite, 290 días	73
5.17. Producción acumulada, relación agua-aceite, mojabilidad al aceite	74
6.1. Producción acumulada	76
6.2. Relación agua-aceite	77
6.3. Factor de recuperación	78
A.1. Representación de las transmisibilidades en el nodo i	83

Índice de tablas

5.1. Parámetros, mojabilidad al agua	60
5.2. Parámetros, mojabilidad intermedia	61
5.3. Parámetros, mojabilidad al aceite	62

Introducción

1.1. Antecedentes

La simulación numérica de yacimientos consiste en el desarrollo de técnicas y métodos para resolver numéricamente las ecuaciones de flujo de fluidos en medios porosos, y en la aplicación de esos modelos numéricos en el estudio del comportamiento de yacimientos, **Rodríguez (2000)**.

Los primeros simuladores de yacimientos simples aparecieron en la década de 1950 como soluciones de ecuaciones diferenciales para el flujo de fluidos en un medio homogéneo de geometría sencilla. Más tarde, con el desarrollo de las computadoras se pudieron modelar flujos a través de celdas que representaban bloques del yacimiento. Posteriormente, el avance en el desarrollo de algoritmos de cálculo permitió resolver sistemas de ecuaciones en forma más rápida y precisa.

Los modelos se hicieron más grandes y más complejos gracias a la increíble capacidad de velocidad de procesamiento y almacenamiento de las computadoras, y a la mayor sofisticación de los algoritmos. Por lo cual es posible extender las soluciones del flujo monofásico hasta el flujo de tres fases -agua, aceite y gas- que permite entonces tomar en cuenta, incluso, los cambios de la composición del aceite y el gas debidos a cambios en presión y temperatura. También se tiene la capacidad de poder solucionar los métodos considerando geometrías irregulares y la incorporación de datos geológicos complejos.

Al tener un modelo de yacimiento representado virtualmente de una forma más realista, éste puede ser utilizado para comparar sus soluciones con datos históricos de producción, a fin de validar y ajustar el modelo. Considerando lo anterior, se tiene una herramienta poderosa con la cual se estará en posibilidades de predecir el comportamiento futuro del yacimiento bajo distintos esquemas de operación.

1.2. Objetivo

Elaborar un simulador de yacimientos no fracturados bifásico, mediante la programación de un modelo numérico, bajo el esquema Totalmente Implícito, y que su aplicación ayude a comprender como la mojabilidad afecta la recuperación total de hidrocarburos.

1.3. Motivación

La principal motivación para el desarrollo de este trabajo fue el hecho de contar con un simulador numérico de yacimientos propio, ya que al inicio de la era de la simulación de yacimientos, este era un tema sólo para especialistas que diseñaban y desarrollaban los programas de cómputo, por lo que los simuladores eran operados y manejados principalmente en las grandes compañías petroleras. Por otra parte, si el funcionamiento y el manejo de un simulador es el adecuado, se está en posibilidades de ensayar las propias ideas, de esta manera el conocimiento teórico adquiere aplicaciones prácticas.

1.4. Planteamiento del problema

Estudiar la relación que tiene la mojabilidad en la recuperación de aceite en yacimientos petroleros no fracturados, al llevar a cabo un proceso de inyección de agua, con el apoyo de un simulador numérico de yacimientos construido de manera propia.

Puesto que la mojabilidad es el principal factor en el flujo, localización y distribución de los fluidos dentro del yacimiento, se piensa que al llevar a cabo una inyección de agua para recuperar aceite, la respuesta no será la misma en una formación que es mojada por agua que en una formación mojada por aceite.

Debido a que no es nada factible llevar a cabo procesos directamente sobre un yacimiento real, como cambiar el tipo de mojabilidad de la formación, solo para experimentar, se busca la alternativa de realizar estos experimentos con el soporte de un simulador de yacimientos para poder estudiar tres casos hipotéticos de un yacimiento no fracturado y su comportamiento ante una inyección de agua, los casos son: yacimiento con mojabilidad al agua, yacimiento con mojabilidad intermedia y yacimiento con mojabilidad al aceite.

La pretención inicial fue llevar a cabo la elaboración de un simulador numérico de yacimientos bifásico e introducir al simulador las curvas de permeabilidades relativas para las fases agua y aceite, características de formaciones con mojabilidad al agua,

mojabilidad intermedia y mojabilidad al aceite, ya que las curvas de permeabilidades relativas determinan la capacidad de flujo que tiene el medio poroso para conducir en su interior más de un fluido. Con los elementos anteriores se está en posibilidades de elaborar los tres modelos de simulación (mojabilidad al agua, intermedia y al aceite), para poder estudiar la respuesta que tiene la recuperación de aceite en un yacimiento isotrópico y homogéneo, al cambiar únicamente la mojabilidad de la formación y mantener las condiciones de operación iguales, esto es, mismo gasto de inyección para el pozo inyector y misma presión de fondo para el pozo productor.

1.5. Metodología

En términos generales la investigación se fue construyendo mediante un proceso de diversas etapas, interconectadas entre sí de una manera lógica, secuencial y dinámica. Se comienza con la idea de analizar la relación que tiene la mojabilidad en el comportamiento de yacimientos de aceite, esta idea se fue acotando hasta que finalmente quedó definido el objeto de estudio de la investigación, ya que solamente se considera flujo bifásico en un yacimiento ideal no fracturado, del cual solamente se analizó el comportamiento de la producción de aceite al cambiar el tipo de mojabilidad ante una inyección de agua. Una vez delimitado el objeto de estudio, se establecieron algunas preguntas de investigación. Se revisó la literatura específica en el tema y se construyó el marco teórico. Después se analizaron las preguntas planteadas, y cuyas respuestas tentativas se tradujeron en hipótesis. Se determinó que el estudio se llevaría a cabo con un simulador numérico de yacimientos, se obtuvieron datos para la inicialización del primer modelo de simulación y para la validación del modelo numérico. Una vez validado el modelo, se corrieron los casos para ser analizados y, por último, se reportaron los resultados.

1.6. Contribuciones

Se espera que la realización de este trabajo pueda ayudar a comprender la importancia que tienen la mojabilidad dentro del medio poroso y como afecta la recuperación de aceite, al llevarse a cabo un proceso de recuperación secundaria mediante la inyección de agua. Se hace uso de gráficas como la producción acumulada (N_p , por sus siglas en inglés) y la relación agua-aceite (WOR, por sus siglas en inglés). Además, de que se proporcionan las bases para la construcción de un modelo numérico de simulación bifásico, bajo el esquema Totalmente Implícito.

1.7. Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en seis capítulos:

Capítulo 1. Contiene la introducción al desarrollo de la tesis, maneja la información que describe de forma general la estructura básica del contenido de esta investigación.

Capítulo 2. Fundamenta lo que es el flujo de fluidos en el medio poroso, considerando las propiedades de la roca, propiedades de los fluidos, funciones de saturación y los mecanismos primarios de producción asociados a la recuperación de aceite.

Capítulo 3. Muestra la ecuación diferencial que describe el flujo de fluidos en medios porosos, sus condiciones iniciales y de frontera, que en conjunto establecen la formulación matemática del sistema a analizar.

Capítulo 4. Muestra la formulación numérica que se requiere para solucionar la ecuación de flujo de fluidos en medios porosos, al discretizar en tiempo y espacio el dominio continuo de la ecuación, lo cual genera un sistema algebraico de ecuaciones, que es resuelto con método de Newton.

Capítulo 5. Detalla la validación del modelo numérico construido, posteriormente analiza los resultados que se obtuvieron para los tres modelos de simulación que fueron elaborados, estos son: mojabilidad al agua, mojabilidad intermedia y mojabilidad al aceite.

Capítulo 6. Presenta las conclusiones obtenidas en la realización de este trabajo de tesis, considerando los resultados que arrojó cada uno de los modelos elaborados, pero presentándolos de manera agrupada.

Fundamentos de Flujo de Fluidos en Medios Porosos

2.1. Propiedades de la Roca

2.1.1. Porosidad

La porosidad es la fracción del volumen de la roca que se encuentra ocupada por los poros (usualmente expresada como fracción o porcentaje), lo que significa que no todo el volumen de la roca es ocupado por partículas sólidas, Figura 2.1.

$$\text{porosidad} = \phi = \frac{\text{Vol. poroso}}{\text{Vol. roca}}$$

La porosidad puede obtenerse directamente a partir de análisis de núcleos en el laboratorio o indirectamente, a partir de registros geofísicos (sónico, densidad y neutrón), pero la porosidad que se obtiene con registros geofísicos es un aproximado de la porosidad total.

La porosidad obtenida en laboratorio no es la misma a condiciones de yacimiento, por lo que debe ser ajustada por la siguiente ecuación:

$$\phi_2 = \phi_1 e^{c_f(p_2 - p_1)}$$

O bien:

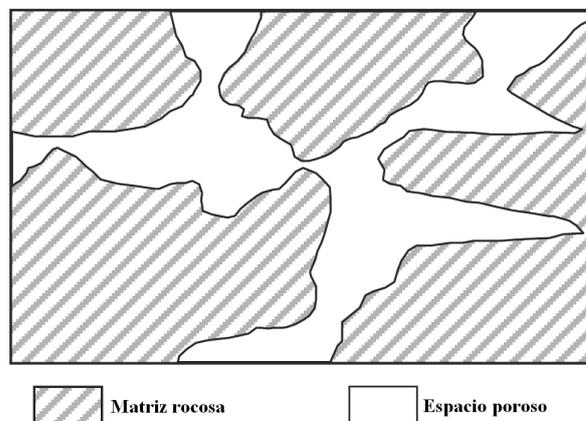


Figura 2.1: Porosidad

$$\phi_2 = \phi_1 [1 + c_f(p_2 - p_1)]$$

Esta ecuación no puede usarse para formaciones suaves. Hay que hacer notar que cuando la presión disminuye, la porosidad disminuye debido al efecto de sobrecarga.

Porosidad absoluta (ϕ_a). También llamada total (ϕ_t), es el volumen total de espacios, llámese poros, canales, fisuras o cavernas, comunicadas o no, que existen entre los elementos minerales de la roca, relacionados al volumen bruto de la roca.

$$\phi_t = \frac{V_{pt}}{V_r}$$

Donde:

V_{pt} es el volumen total de espacios vacíos

V_r es el volumen total de roca

Porosidad efectiva (ϕ_e). Es el porcentaje de espacio poroso intercomunicado con respecto al volumen total de la roca. Por consiguiente, es una indicación de la conductividad de fluidos. La porosidad efectiva es una función de muchos factores litológicos. Los más importantes son: tamaño y empaque de los granos, cementación, cantidad y clases de arcilla, entre otros.

2.1.2. Compresibilidad de la Roca

La compresibilidad de la roca es el cambio relativo de volumen de material rocoso por unidad de cambio de presión a condiciones de temperatura constante. Un incremento en la presión causa una compactación en el material (compresión), de forma contraria, un decremento en la presión causa un incremento en el volumen del material (expansión).

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

Existen tres tipos de compresibilidad en las rocas:

- **Compresibilidad de la matriz:** Es el cambio del volumen de los granos de la roca por un cambio de presión.
- **Compresibilidad de poro:** Es el cambio en el volumen poroso de la roca por cambio de presión.
- **Compresibilidad total de la roca:** Es el cambio en el volumen total de la roca por cambio de presión

2.1.3. Saturación

La saturación de fluidos es la fracción del volumen de poros de una roca que se encuentra ocupada por algún fluido, ya sea aceite, agua o gas. Se obtiene al dividir el volumen del fluido (V_f) a condiciones del medio poroso, entre el volumen de huecos o espacios intercomunicados del medio poroso, es decir:

$$S_f = \frac{V_f}{V_p}$$

Los poros en un yacimiento siempre están saturados de fluidos, Figura 2.2, de este modo, la suma de todas las saturaciones de fluidos de una roca de un yacimiento debe ser igual al 100 % o a 1, si se manejan fracciones.

$$\begin{aligned}\sum S_f &= 1 \\ S_w &= 1 \\ S_o + S_w &= 1 \\ S_g + S_w &= 1 \\ S_o + S_g + S_w &= 1\end{aligned}$$

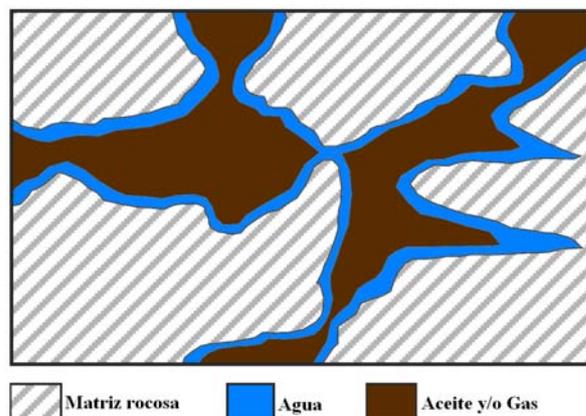


Figura 2.2: Roca saturada de aceite y agua

Dependiendo las condiciones a las que se encuentre, existen diferentes formas de clasificar las saturaciones, dentro de las más comunes tenemos:

- **Saturación de agua inicial (S_{wi}):** Es aquella a la cual es descubierto el yacimiento y se pueden distinguir dos tipos de agua:
 - **Agua libre:** Es la que está en condiciones de fluir ante una diferencia de presión.
 - **Agua intersticial o irreductible:** Es la que está ligada a los granos minerales, ya sea mediante enlaces a la estructura atómica de los minerales o bien como una fina capa adherida a la superficie de los mismos. El adjetivo irreductible se usa para establecer que no puede ser removida durante la producción.
- **Saturación de agua crítica (S_{wc}):** Es la saturación mínima a la cual el agua inicia su movimiento dentro del medio poroso bajo un gradiente de presión.
- **Saturación de aceite residual o remanente (S_{or}):** Es aquella que se tiene después de un periodo de explotación en una zona determinada del yacimiento. El término residual es usualmente asociado con la fase no mojante.
- **Saturación de aceite crítica (S_{oc}):** Es la saturación mínima a la cual el aceite inicia su movimiento dentro del medio poroso bajo un gradiente de presión.
- **Saturación de aceite movable (S_{om}):** La saturación de aceite movable es otra saturación de interés y es definida como la fracción de volumen poroso ocupada por aceite movable, como lo expresa la siguiente ecuación, cuando se tiene S_{wi} .

$$S_{om} = 1 - S_{or} - S_{wi}$$

La saturación de hidrocarburos, aceite o gas, en un yacimiento puede variar desde la residual hasta la máxima, cuando en la roca se tiene la S_{wi} . A su vez, la saturación de agua puede variar, desde un valor mínimo (S_{wi}) hasta un valor máximo igual a 100 %.

2.1.4. Permeabilidad

La permeabilidad es una propiedad del medio poroso y es la medida de la capacidad de un medio para permitir el flujo de fluidos a través de él. La unidad de la permeabilidad es el Darcy. Un Darcy es la permeabilidad de un medio poroso si a través de él fluye un solo fluido de 1 *cp* de viscosidad, a un gasto de 1 cm^3/s , a través de un área de 1 cm^2 y con un gradiente de presión de 1 *atm/cm*.

En estudios de yacimientos petroleros se consideran varios tipos de permeabilidad, algunos son los siguientes:

- **Permeabilidad absoluta (k_a):** Es la propiedad del medio que permite el paso de un fluido, cuando éste lo satura al 100 %. Esta permeabilidad depende exclusivamente de las características físicas de la estructura del medio poroso.
- **Permeabilidad efectiva a un fluido (k_{ef}):** Cuando varias fases de fluidos se encuentran pasando simultáneamente a través de una roca, cada fase de fluido contrarrestará el libre flujo de las otras fases y por lo tanto una fase reducida de permeabilidad será medida. La permeabilidad efectiva a un fluido es la permeabilidad del medio a ese fluido cuando su saturación es menor del 100 %.

Se pueden tener diversos tipos de permeabilidad efectiva: permeabilidad efectiva al gas (k_{eg}), permeabilidad efectiva al aceite (k_{ea}) y permeabilidad efectiva al agua (k_{ew}).

- **Permeabilidad relativa a un fluido (k_{rf}):** Es la relación de la permeabilidad efectiva al fluido entre la permeabilidad absoluta o la permeabilidad al líquido del medio poroso.

$$k_{rf} = \frac{k_{ef}}{k_a}$$

Se tiene permeabilidad relativa al gas, permeabilidad relativa al aceite y permeabilidad relativa al agua, las cuales son:

$$k_{rg} = \frac{k_{eg}}{k_a}; \quad k_{ro} = \frac{k_{eo}}{k_a}; \quad k_{rw} = \frac{k_{ew}}{k_a}$$

La permeabilidad relativa depende de las características tanto del medio poroso como de los fluidos que lo saturan, así como del grado de saturación de los fluidos. Este tipo de permeabilidad se expresa en por ciento o fracción de la permeabilidad absoluta y es muy común representarla en función de la saturación de algún

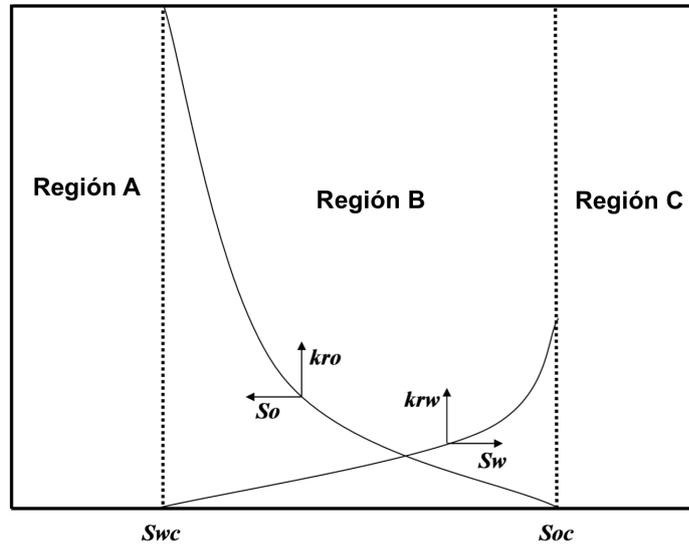


Figura 2.3: Gráfica de permeabilidad relativa al aceite y al agua

fluido. En la Figura 2.3 se muestra una gráfica de k_{rw} y k_{ro} contra S_w .

Región A: Sólo el aceite puede fluir, porque se tiene $S_w \leq S_{wc}$

Región B: Puede fluir simultáneamente el aceite y el agua

Región C: Sólo fluirá el agua, porque se tiene $S_o \leq S_{oc}$

Los factores que afectan la permeabilidad relativa son:

- Saturación de fluidos
- Geometría y distribución del espacio poroso
- Mojabilidad
- Historia de saturación

2.1.5. Tensión Interfacial

Dos fluidos inmiscibles en contacto no se mezclan y los separa una interfase. Las moléculas no se mezclan por su mayor afinidad con las moléculas de su propia clase. Cerca de la superficie las moléculas se atraen con mayor intensidad produciendo una fuerza mecánica en la superficie que se conoce como tensión interfacial, (σ). Ésta es el resultado de efectos moleculares por los cuales se forma una interfase o superficie que separa dos fluidos; en el caso de líquidos, si σ es nula, se dice que los líquidos son miscibles entre sí. Como ejemplo de líquidos inmiscibles se tienen el agua y el aceite,

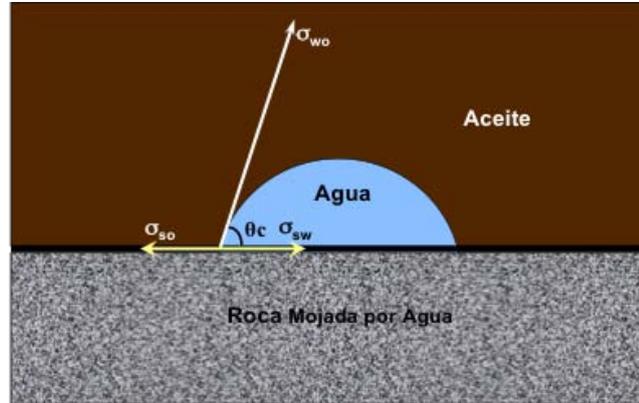


Figura 2.4: Tensión interfacial

Figura 2.4, en tanto que el agua y el alcohol son miscibles. En el caso de que se tenga una interfase líquido-gas, al fenómeno se le llama tensión superficial.

2.1.6. Mojabilidad

La mojabilidad es la tendencia de la fase de un fluido a extenderse o adherirse a una superficie sólida, en presencia de una segunda fase inmisible. Así, aplicando esta definición a la ingeniería de yacimientos, la superficie sólida es la roca del yacimiento y las fases de los fluidos son: agua, aceite y gas.

El gas natural es el fluido no mojante; el aceite es el fluido mojante cuando se presenta con el gas y por lo regular el aceite es el fluido no mojante cuando se presenta con el agua. Dependiendo del tipo de roca en el yacimiento, la capacidad de mojabilidad varía. El fluido mojante cubrirá por completo la superficie de la roca y estará ubicado en los espacios porosos más pequeños, debido a la acción de la capilaridad. La fase no mojante tenderá a congregarse en grandes espacios porosos, o en el centro de éstos.

Un parámetro que refleja la preferencia de una roca a ser mojada ya sea por agua o por aceite es el ángulo de contacto. Si la roca es mojada por aceite se dice que es oleofílica, Figura 2.6, y si lo es por agua será hidrófila, Figura 2.5.

Como se ilustra en la Figura 2.4, el valor del ángulo de contacto puede variar desde 0° hasta 180° , como límites. Los ángulos de contacto menores a 90° , medidos a través de la fase de agua, indican condiciones de mojabilidad preferentemente por agua, Figura 2.5, mientras que los ángulos de contacto mayores a 90° , indican condiciones de mojabilidad preferentemente por aceite, Figura 2.6. Un ángulo de contacto exactamente de 90° indicaría que la superficie de la roca tiene igual preferencia de ser mojada por el agua o por el aceite, Figura 2.7.

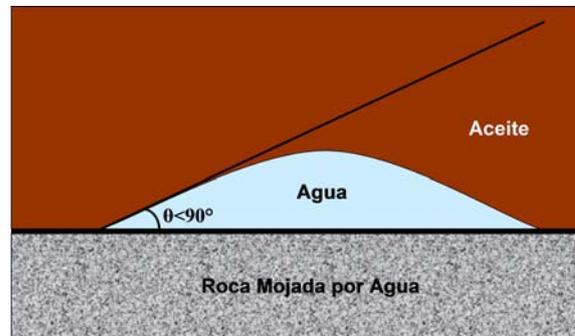


Figura 2.5: Roca mojada por agua

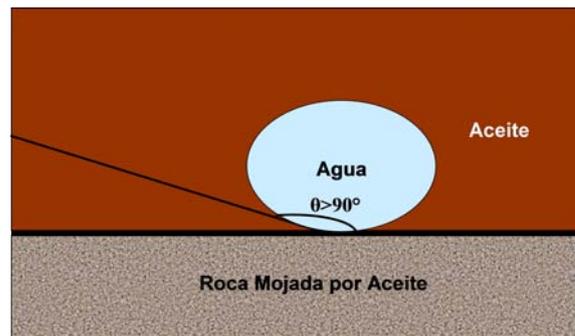


Figura 2.6: Roca mojada por aceite

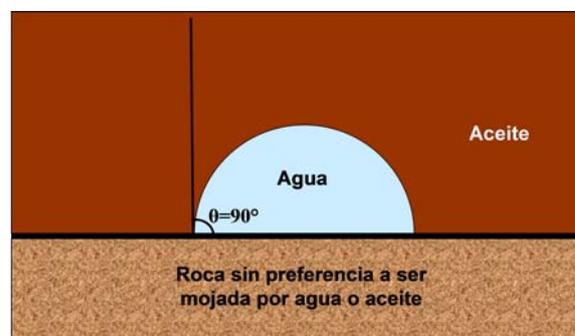


Figura 2.7: Roca sin preferencia a ser mojada

Rara vez se indican los límites cuantitativos de estos términos cualitativos de mojabilidad. Sin embargo, a veces se usan los límites aproximados siguientes: los ángulos de contacto cercanos a 0° y a 180° se consideran como fuertemente mojados por agua y fuertemente mojados por aceite respectivamente. Los ángulos de contacto cercanos a 90° tienen una moderada preferencia de mojabilidad y cubren la gama llamada “mojabilidad intermedia” o “mojabilidad neutra”.

2.1.7. Fuerzas Capilares

Cuando un capilar se sumerge en la interfase de dos fluidos, puede producirse un ascenso o un descenso de la interfase. En el primer caso se produce el denominado “ascenso capilar”, Figura 2.8, y en el segundo caso se habla de “descenso capilar”. Estos movimientos ocurren como consecuencia de los fenómenos de superficie, que dan lugar a que la fase mojante invada en forma preferencial el medio poroso. En términos generales, el ascenso o descenso capilar se detiene cuando la gravedad contrarresta (en función de la altura y de la diferencia de densidad entre los fluidos) la fuerza capilar desarrollada en el sistema. Estas fuerzas, en los yacimientos de hidrocarburos, son el resultado de los efectos combinados de las tensiones interfaciales y superficiales, de la forma y tamaño de los poros, del valor relativo de las fuerzas de adhesión entre fluidos y sólidos y las fuerzas de cohesión en los líquidos; es decir, de las propiedades de mojabilidad del sistema roca-fluidos.

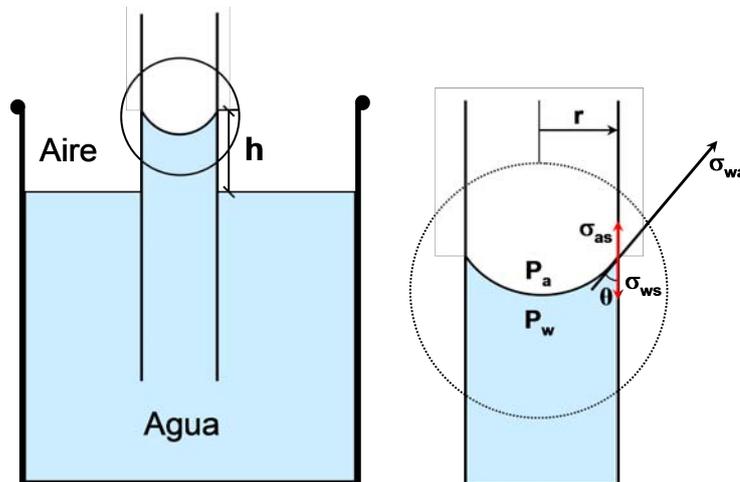


Figura 2.8: Presión capilar

2.1.8. Presión Capilar

La presión capilar es la diferencia de presiones que existe en la interfase que separa dos fluidos inmiscibles, uno de los cuales moja preferentemente la roca. También se define la presión capilar como la capacidad que tiene el medio poroso de absorber al fluido mojante y de repeler al no mojante.

Para un par de fluidos inmiscibles que tienen un valor de tensión interfacial (σ), confinados en un poro de sección circular de radio r , la presión capilar está dada por:

$$P_c = \frac{2\sigma \cos \theta}{r}$$

En donde θ es el ángulo de contacto que es medido a través de la fase mojante, que hace la interfase con la superficie del poro.

La presión capilar normalmente es definida como la presión en la fase no mojante, menos la presión en la fase mojante.

$$P_c = p_{nm} - p_m$$

La presión capilar se usa para:

1. Determinar la distribución de fluidos en el yacimiento.
2. Determinar la saturación de aceite residual para efectos de desplazamiento inmiscible.
3. Determinar la distribución de poros en la roca.
4. Diferenciar zonas o tipos de roca.

2.2. Propiedades de los Fluidos

2.2.1. Tipos de Fluidos

Los fluidos contenidos en los yacimientos de hidrocarburos se clasifican en tres grupos diferentes dependiendo de su compresibilidad:

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

Por lo tanto, la derivada de la densidad con respecto a la presión será de la siguiente manera, Figura 2.9:

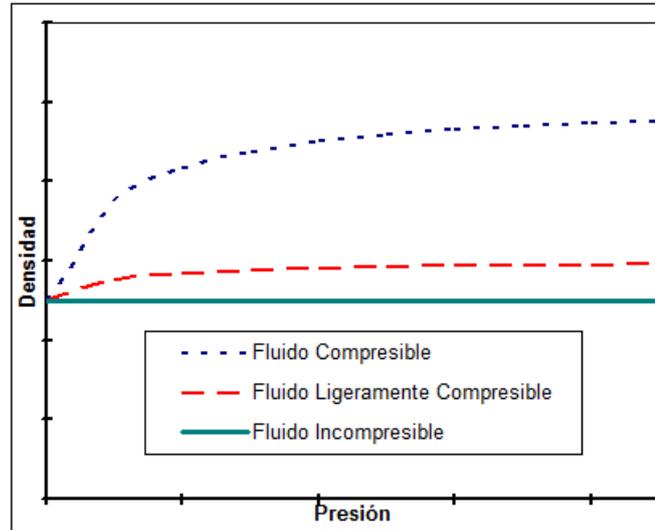


Figura 2.9: Tipos de fluidos

- Fluido incompresible

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$$

- Fluido ligeramente compresible

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \neq 0$$

- Fluido compresible

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \neq 0$$

2.2.2. Viscosidad

La viscosidad es una medida de la resistencia de un fluido a fluir debido a interacciones moleculares; ésta varía con la presión y la temperatura. También puede definirse como la relación de corte inducido por un esfuerzo en el fluido. La mayoría de las teorías microscópicas de la viscosidad son fenomenológicas porque es muy difícil calcular, a partir de los principios fundamentales, las muchas interacciones moleculares de las partículas que son responsables de la viscosidad. Puede obtenerse por análisis de laboratorio o bien mediante alguna correlación. La unidad de la viscosidad es el centipoise (*cp*).

La viscosidad del aceite aumenta al disminuir la presión por debajo de la presión de saturación, esto es debido a la liberación del gas en solución. Estando por encima

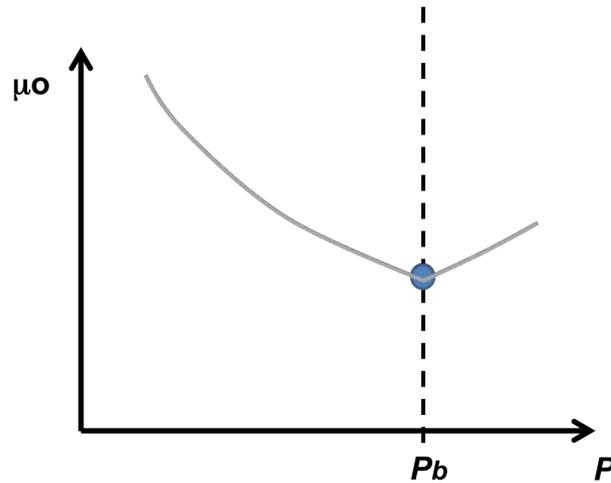


Figura 2.10: Gráfica de viscosidad del aceite vs presión del yacimiento

de la presión de saturación, la viscosidad aumenta al aumentar la presión debido a que las moléculas se ven forzadas a estar más juntas, Figura 2.10.

2.2.3. Factor de Volumen

2.2.3.1. Factor de volumen del gas, B_g

El factor de volumen del gas se define como el volumen de una masa de gas medido a condiciones de presión y temperatura de yacimiento, entre el volumen de la misma masa de gas, pero medido a condiciones estándar.

$$B_g = \frac{V_{gas @ c.y.}}{V_{gas @ c.e.}}$$

2.2.3.2. Factor de volumen del aceite, B_o

El factor de volumen del aceite se define como el volumen de una masa de aceite más su gas disuelto medido a condiciones de yacimiento, entre el volumen de la misma masa de aceite muerto medido a condiciones estándar, Figura 2.11.

$$B_o = \frac{V_{(aceite + gas disuelto) @ c.y.}}{V_{aceite muerto @ c.e.}}$$

El término “aceite muerto”, se refiere al aceite sin gas disuelto.

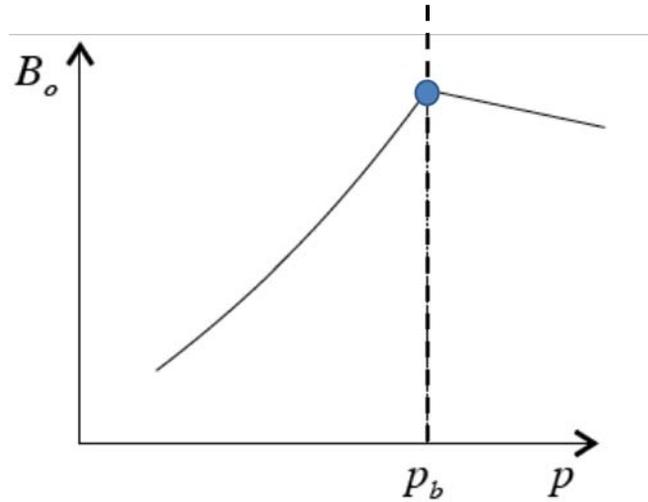


Figura 2.11: Factor de volumen del aceite vs presión del yacimiento

2.2.3.3. Factor de volumen del agua, B_w

La definición de B_w es similar a la de B_o . Pero debido a que la solubilidad del gas en agua es pequeña, en comparación con la correspondiente en aceite, en algunos problemas de yacimientos se usa $B_w = 1$, para cualquier presión, como una aproximación razonable.

2.2.4. Movilidad, λ

La mecánica del desplazamiento de un fluido por otro está controlada por las diferencias que existen en el cociente de la permeabilidad efectiva y la viscosidad. El flujo de cada fase está controlado por la relación $\frac{k_e}{\mu}$, la cual es llamada movilidad del fluido:

$$\lambda_f = \frac{k_{ef}}{\mu_f}$$

La movilidad controla la facilidad relativa con la cual los fluidos pueden fluir en un medio poroso. Dado que las permeabilidades relativas al aceite y al agua son función de la saturación, las movilidades también dependen de la saturación.

La razón de movilidades es el cociente de la movilidad del fluido desplazante y la movilidad del fluido desplazado.

$$M = \frac{\lambda_w}{\lambda_o} = \frac{\frac{k_w}{\mu_w}}{\frac{k_o}{\mu_o}}$$

Si $M < 1$: El desplazamiento es favorable.

Si $M > 1$: El desplazamiento no es favorable.

2.3. Funciones de Saturación

2.3.1. Presión Capilar vs Saturación

Existen básicamente dos tipos de procesos de presión capilar: drene e imbibición. En el proceso de drene el fluido no mojante desplaza al fluido mojante, mientras que para el proceso de imbibición ocurre lo contrario. Generalmente, existe histéresis en la presión capilar conforme la saturación es variada, provocando así que las curvas de drene e imbibición sean diferentes. Para establecer una curva de presión capilar de drene, en lo sucesivo curva de drene, la saturación de la fase mojante es reducida de su valor máximo a su valor mínimo irreductible al incrementar la presión capilar de cero a un valor positivo muy grande. Para establecer la curva de presión capilar de imbibición, en lo sucesivo curva de imbibición, la saturación de la fase mojante es incrementada. Es importante notar que pueden ser medidos dos segmentos distintos de la curva de imbibición. El primer segmento es la curva de imbibición espontánea, que es determinada inmediatamente después de la medición de la curva de drene, donde la presión capilar, $P_c = p_{nm} - p_m$, es disminuida a cero, permitiendo que la fase mojante pueda imbibir. El segundo segmento es la curva de imbibición forzada, donde la presión capilar es disminuida de cero a un valor negativo muy grade.

Un ejemplo de estas tres secciones, en una gráfica de presión capilar, se muestra en la Figura 2.12 para un sistema mojado por agua. Inicialmente, cuando la presión capilar es cero, la fase mojante es continua y estable a esa presión. La curva de drene (curva 1) es medida gradualmente conforme se incrementa la presión capilar de cero a un valor positivo muy grande, con lo cual se reduce la saturación de la fase mojante (agua). Conforme la saturación de la fase mojante es disminuida, porciones de esta fase irán desconectándose del total de la masa de la fase mojante. Eventualmente, cuando la presión capilar aplicada externamente es suficientemente alta, la fase mojante restante en el sistema será desconectada completamente y la curva de presión capilar será casi vertical. Esta saturación, a la cual se pierde la continuidad hidráulica de la fase mojante, es la saturación irreductible de la fase mojante.

La curva 2 de la Figura 2.12 es la curva de imbibición espontánea, determinada después de que la curva de drene es medida. La presión capilar, inicialmente a un valor

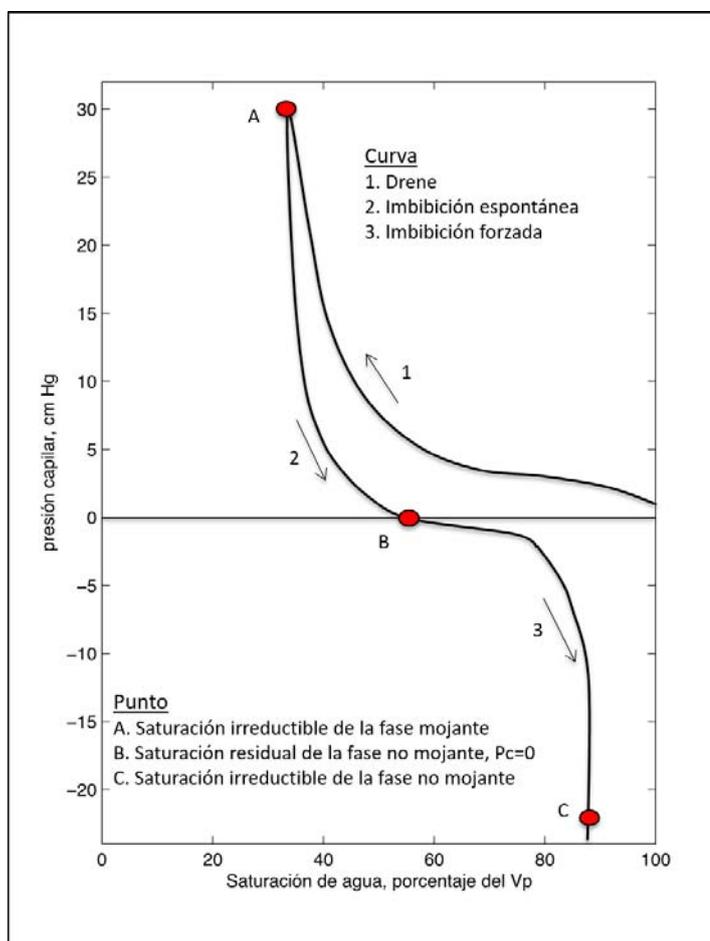


Figura 2.12: Sistema mojado por agua

positivo muy grande, es gradualmente disminuida hasta cero, permitiendo a la fase mojante (agua) imbibir. La saturación residual de la fase no mojante es alcanzada cuando $P_c = 0$, la cual será referida cuando la presión capilar sea cero. En general, cantidades de aceite (fase no mojante) se encuentran aún conectadas cuando la presión capilar es cero, así la saturación residual de la fase no mojante definida de esta forma no es la irreductible.

La curva 3 de la Figura 2.12 es la curva de imbibición forzada, cuando la presión capilar, $P_o - P_w$, es disminuida de cero hasta un valor negativo muy grande. Cuando la presión capilar es negativa, la presión de la fase mojante (agua) es más grande que la presión de la fase no mojante (aceite), forzando al agua dentro del sistema. Debido a que mucho del aceite (fase no mojante) se encuentra aún conectado al final de la imbibición espontánea cuando la presión capilar es cero, es posible que aceite adicional sea producido conforme la presión capilar se vuelve negativa. Así, continuando con este

proceso, la saturación de aceite disminuye y el aceite gradualmente se va desconectando conforme la presión capilar se mueve hacia un valor negativo más grande, hasta que la curva de imbibición forzada se vuelve casi vertical. Esta saturación, cuando la continuidad hidráulica de la fase no mojante se pierde, es la saturación irreductible de la fase no mojante.

La Figura 2.12 es la representación de la presión capilar medida en un sistema mojado por agua, mientras que la Figura 2.13 representa un sistema fuertemente mojado por agua. La mojabilidad al agua del sistema mostrado en la Figura 2.12 causa que las áreas bajo las curvas de drene (curva 1) y de imbibición forzada (curva 3) difieran significativamente. Debido al cambio favorable de energía libre, poco o nulo trabajo debe ser realizado durante la imbibición, cuando el fluido que es preferencialmente mojante (agua) desplaza al fluido no mojante (aceite). A la inversa, mucho trabajo es requerido durante el drene cuando el fluido no mojante desplaza al fluido mojante. Se puede demostrar que el trabajo requerido para que un fluido desplace a otro dentro del sistema es relacionado al área bajo la curva de presión capilar. Para aceite desplazando agua (curva de drene en un sistema mojado por agua, curva 1), el trabajo externo requerido es:

$$\Delta W_{ext} = -\phi V_b \int_{S_{w1}}^{S_{w2}} P_c dS_w \quad (2.1)$$

Donde:

V_b = volumen del sistema

ϕ = porosidad, y

S_w = saturación de agua

Similarmente, el trabajo requerido para que el agua desplace aceite (curva de imbibición forzada para un sistema mojado por agua) es:

$$\Delta W_{ext} = \phi V_b \int_{S_{o1}}^{S_{o2}} P_c dS_o \quad (2.2)$$

El área bajo la curva de drene en las Figuras 2.12 y 2.13 es relativamente grande debido a la gran cantidad de trabajo necesario para que el aceite desplace al agua.

El sistema de la Figura 2.13 es fuertemente mojado por agua debido a la gran cantidad de agua imbibida espontáneamente (cerca del 80 % del V_p), y se alcanza la saturación de aceite residual cuando la presión capilar es cero. El sistema mostrado en la Figura 2.12 es en menor medida mojado por agua, donde después de la imbibición espontánea, la saturación de agua es cerca del 55 % del V_p , y en donde agua adicional puede ser forzada dentro del sistema (Curva 3, Fig. 2.12). El área bajo la curva de imbibición (ec. 2.2), sin embargo, es mucho menor que el área bajo la curva de drene (ec. 2.1), con

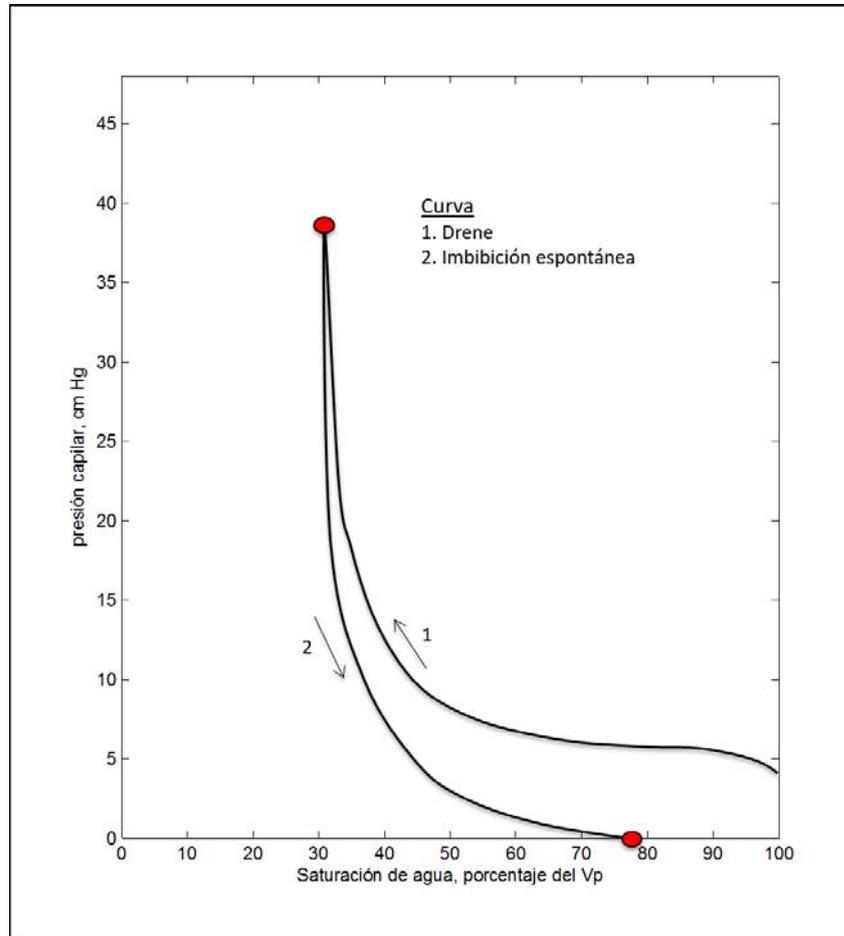


Figura 2.13: Sistema fuertemente mojado por agua

esto se puede ver claramente que más trabajo es necesario para que el aceite desplace al agua, del que se requiere para que el agua desplace al aceite. Esto muestra el grado de mojabilidad del agua.

Las Figuras 2.14 y 2.15 muestran las mediciones de presión capilar en sistemas mojados por aceite. Las curvas de drene (Curva 1 en las Figuras 2.14 y 2.15) fueron medidas al incrementar la presión capilar, $P_o - P_w$, a un valor negativo grande. Debido a que el aceite es el fluido mojante, una gran cantidad de trabajo se necesita para forzar al agua dentro del sistema, lo cual se puede mostrar por el gran área que existe bajo la Curva 1 (ver ec. 2.2).

Cuando el aceite es el fluido mojante, los roles de aceite y agua se invierten con respecto al caso de mojabilidad al agua. Para demostrar esto, la Figura 2.15 muestra un sistema fuertemente mojado por aceite. La curva es graficada vs saturación de aceite

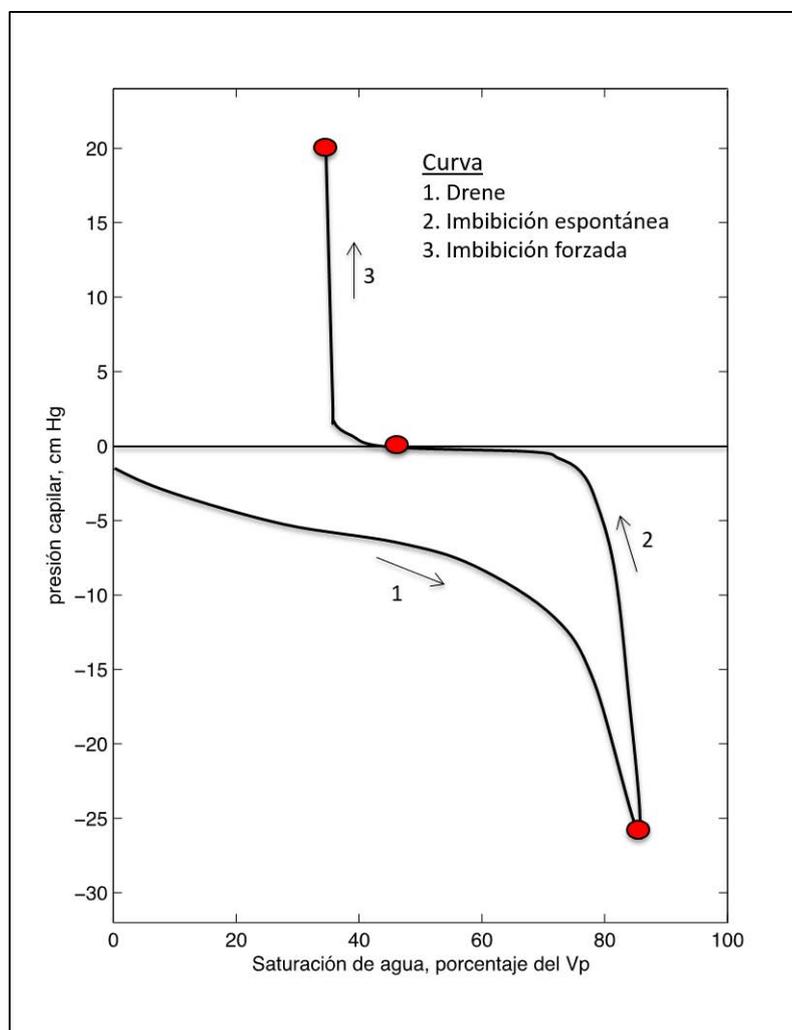


Figura 2.14: Sistema mojado por aceite

y con la presión capilar negativa trazada hacia arriba para tener una gráfica de presión capilar normal. Notar el fuerte parecido a la Figura 2.13 para el sistema fuertemente mojado por agua. Similarmente, si la Figura 2.14 para el sistema mojado por aceite fuera invertido, se parecería a la curva de presión capilar mostrada en la Figura 2.12 del sistema mojado por agua.

La Curva 2 en las Figuras 2.14 y 2.15 es la curva de imbibición espontánea, medida conforme la presión capilar es reducida a cero. Debido a que el aceite es el fluido mojan- te, éste imbibición espontáneamente tal como el agua imbibición en los sistemas mojados por agua. La curva 3 en la Figura 2.14 es la curva de imbibición forzada. La presión capilar, $P_o - P_w$, es incrementada a un valor positivo grande, forzando a que aceite adicional

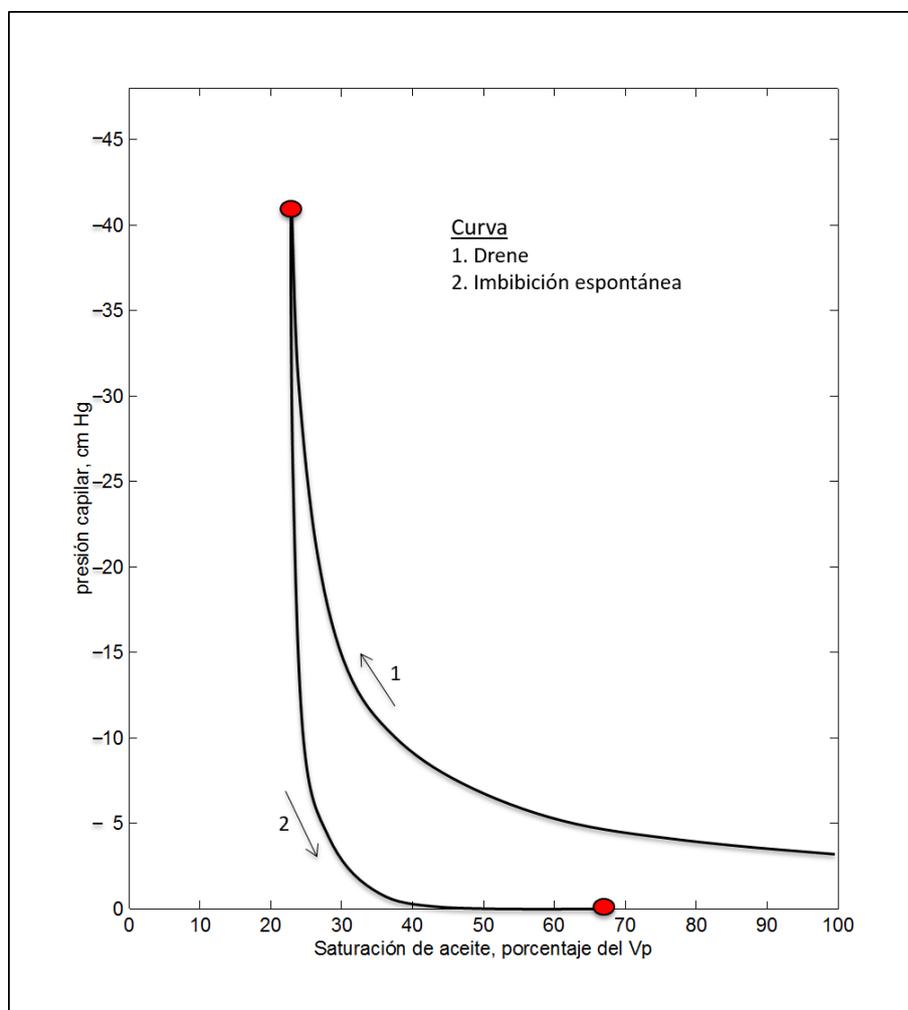


Figura 2.15: Sistema fuertemente mojado por aceite

entre al sistema. Otra vez, las áreas bajo las curvas de presión capilar muestran que el trabajo requerido para que el fluido mojante desplace al fluido no mojante es mucho menor que el trabajo requerido para que el desplazamiento sea inverso.

Conforme la mojabilidad del sistema, ya sea mojado por agua o mojado por aceite, se vuelve cada vez más neutra, la zona de transición y el área bajo la curva de drene se reducen. Esto ocurre debido a que la preferencia de la superficie de la roca a la fase mojante disminuye, y por lo tanto menos trabajo es requerido para que se lleve a cabo el proceso de drene.

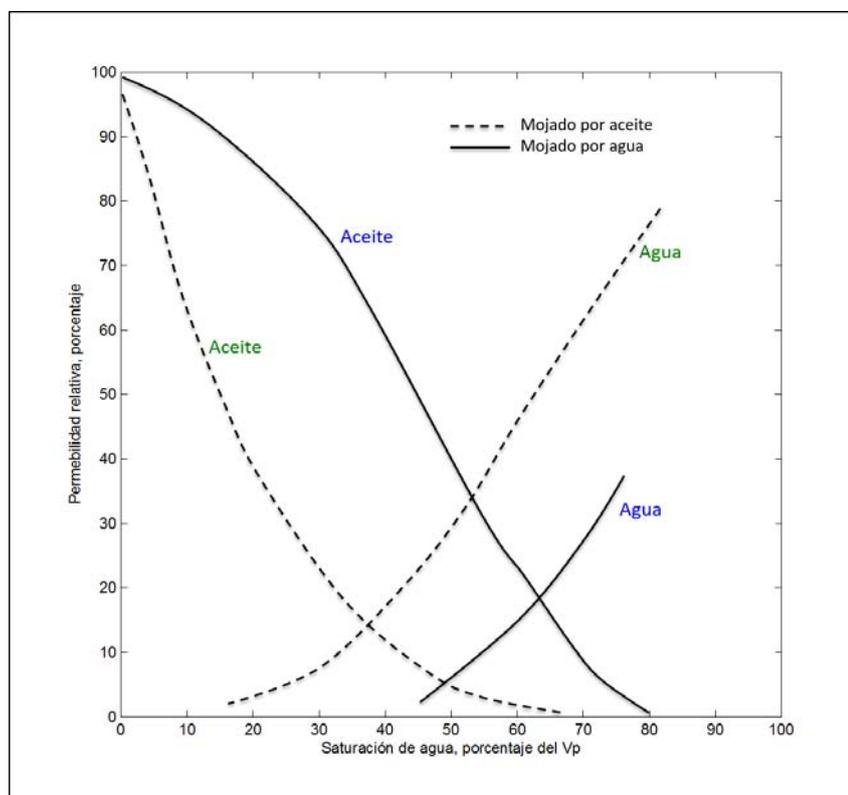


Figura 2.16: Permeabilidades relativas aceite y agua

2.3.2. Permeabilidades Relativas vs Saturación

La permeabilidad relativa es una medida directa de la habilidad del sistema poroso para conducir un fluido cuando uno o más fluidos están presentes. Esta propiedad de flujo es el efecto compuesto de la geometría de poro, mojabilidad, distribución de fluidos y de la historia de saturaciones.

En un sistema mojado uniformemente, el fluido mojante generalmente estará localizado en los poros pequeños y como una delgada capa en los poros más grandes, mientras que el fluido no mojante estará localizado en el centro de los poros grandes. En general, a una cierta saturación, la permeabilidad relativa a un fluido es más alta cuando este es el fluido no mojante. Por ejemplo, la permeabilidad relativa al agua es más alta en un sistema mojado por aceite que en un sistema mojado por agua. Esto ocurre debido a que el fluido mojante tiende a viajar a través de los poros más pequeños, poros menos permeables, mientras que el fluido no mojante viaja más fácilmente en los poros grandes. Además, a una baja saturación de la fase no mojante, la fase no mojante será atrapada como glóbulos discontinuos en los poros grandes, estos glóbulos bloquearán las gargantas de los poros, bajando así la permeabilidad relativa a la fase mojante. Por

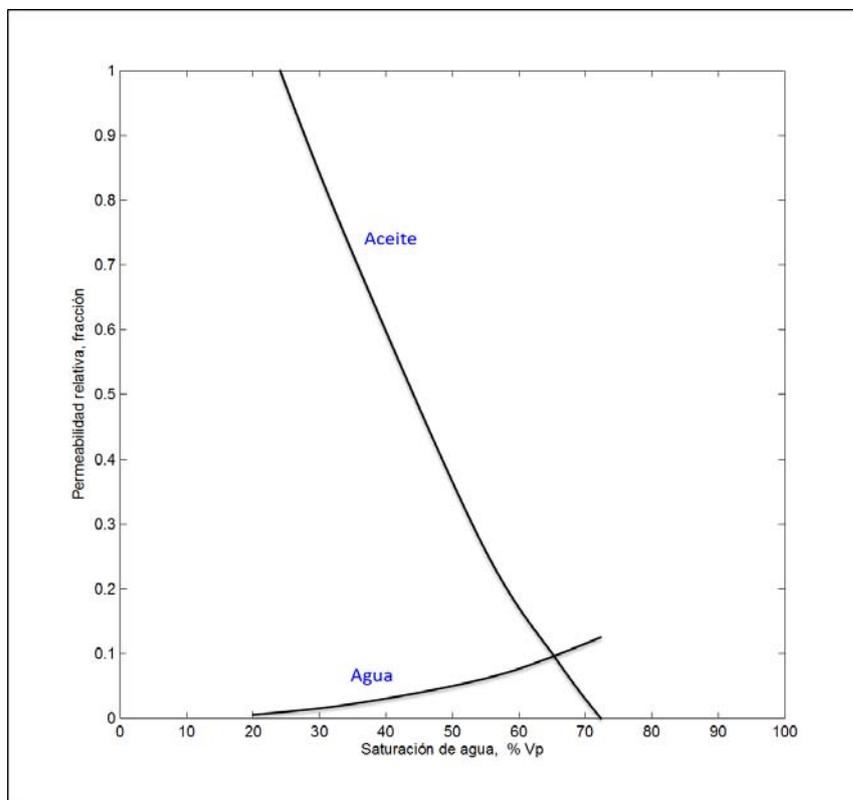


Figura 2.17: Permeabilidades relativas fuertemente mojado por agua

otra parte, la permeabilidad relativa a la fase no mojante es alta debido a que fluye a través del centro de los poros grandes. A saturaciones bajas de la fase mojante, la permeabilidad efectiva de la fase no mojante se aproximará a la permeabilidad absoluta, demostrando que la fase mojante no restringe en gran medida el flujo de la fase no mojante.

A una saturación dada, la permeabilidad relativa al agua es mayor y la permeabilidad relativa al aceite es menor para el sistema mojado por aceite cuando se compara con el sistema que es mojado por agua, Figura 2.16. La permeabilidad relativa al agua a la S_{or} para el sistema mojado por aceite es aproximadamente del 80 %, mientras que para el sistema mojado por agua es menos del 40 %. El punto de cruce, en donde las permeabilidades relativas al agua y al aceite son iguales, ocurre a una saturación de agua de cercana al 35 % del V_p para el sistema mojado por aceite y cerca del 65 % del V_p para el sistema mojado por agua. Cabe hacer notar que las curvas de permeabilidades relativas para los sistemas mojados por agua y mojado por aceite tienen un buen ajuste si se grafican vs la saturación de la fase mojante (aceite para el sistema mojado por aceite y agua para el sistema mojado por agua).

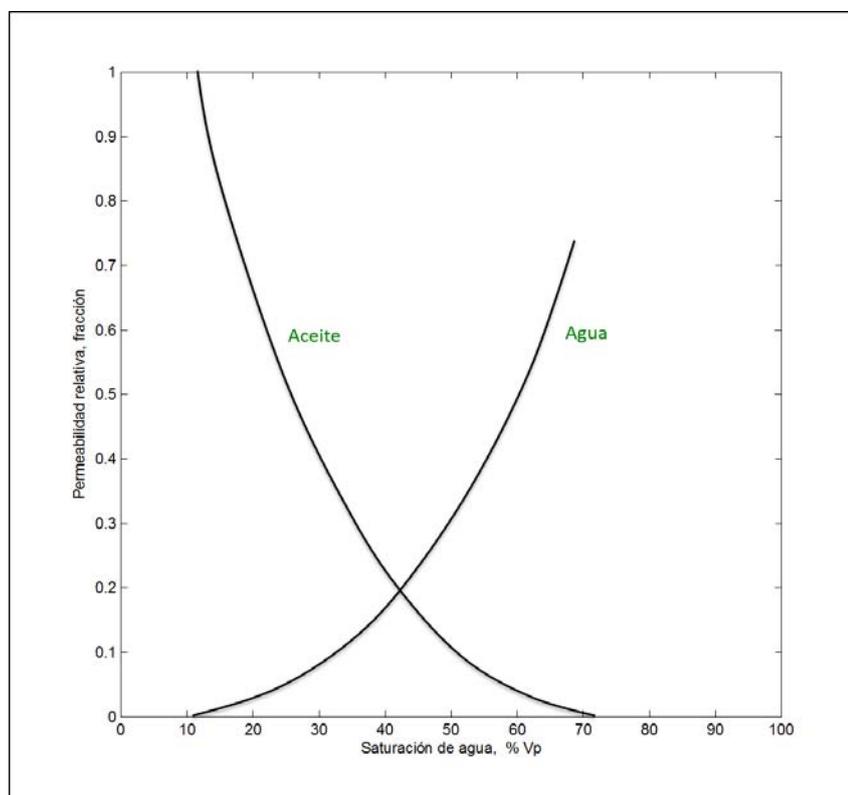


Figura 2.18: Permeabilidades relativas fuertemente mojado por aceite

Las diferencias en las permeabilidades relativas medidas en sistemas fuertemente mojados por agua y fuertemente mojados por aceite son causadas por las diferencias en la distribución de los fluidos. Considerar un sistema fuertemente mojado por agua, a la S_{wi} el agua está localizada en los poros pequeños, y por tal motivo el agua no bloquea significativamente el flujo de aceite, la permeabilidad relativa al aceite es alta, aproximándose a la permeabilidad absoluta. En contraste, la permeabilidad relativa al agua a la S_{or} es muy baja, debido a que algo de aceite residual es atrapado como glóbulos en el centro de los poros grandes, donde es muy eficaz en la reducción de la permeabilidad relativa al agua. Por lo tanto, la permeabilidad relativa al agua a la S_{or} es mucho menor que la permeabilidad relativa al aceite a la S_{wi} , con una relación de menos de 0.3 para un sistema fuertemente mojado por agua, Figura 2.17.

En un sistema fuertemente mojado por aceite, Figura 2.18, las posiciones de los dos fluidos se invierten. La permeabilidad relativa al aceite a la S_{wi} es baja debido a que el agua residual bloquea el flujo de aceite. La permeabilidad relativa al agua a la S_{or} es alta debido a que el aceite residual está localizado en los poros pequeños y como una delgada película en la superficie de la roca, donde su efecto en el flujo de agua es mínimo.

La saturación de agua a la cual las permeabilidades relativas al agua y al aceite son iguales, tiene un valor mayor al 50 % para sistemas fuertemente mojados por agua (Figura 2.17) y menor del 50 % en sistemas fuertemente mojados por aceite (Figura 2.18). El fluido mojante tiene relativamente una baja movilidad comparada con la del fluido no mojante debido a que el fluido mojante está localizado cerca de las paredes del poro, mientras que el fluido no mojante está localizado en el centro de los poros. Por lo tanto, la saturación del fluido mojante debe ser alta al punto de cruce de las permeabilidades relativas para compensar su baja movilidad.

2.4. Mecanismos de Producción

Cada yacimiento está compuesto de una única combinación de forma geométrica, propiedades geológicas de la roca, características de fluidos, y mecanismos primarios de producción. Aunque dos yacimientos no son iguales en todos sus aspectos, ellos pueden ser agrupados de acuerdo al mecanismo primario de recuperación por el cual producen. Se ha observado que cada mecanismo de producción tiene ciertas características típicas de comportamiento en términos de:

- Factor de recuperación.
- Ritmo de declinación de presión.
- Relación gas-aceite.
- Producción de agua.

La recuperación de aceite por cualquiera de los mecanismos naturales de producción es llamada “recuperación primaria”. El término se refiere a la producción de hidrocarburos de un yacimiento sin el uso de ningún proceso (tal como la inyección de un fluido) para adicionarle energía al yacimiento.

El comportamiento de los yacimientos de aceite se debe en gran medida a la naturaleza de la energía, es decir, mecanismos de empuje disponibles para mover el aceite hacia los pozos productores. Existen básicamente seis mecanismos de producción que proporcionan la energía natural necesaria para la recuperación de aceite:

1. Expansión del sistema roca-fluidos.
2. Empuje por gas disuelto liberado.
3. Empuje por casquete de gas.
4. Empuje por acuífero asociado.
5. Segregación gravitacional.
6. Combinación de mecanismos.

2.4.1. Expansión del sistema roca-fluidos

Cuando un yacimiento de aceite inicialmente existe a una presión más alta que a su presión de saturación, el yacimiento es llamado “yacimiento de aceite bajo-saturado”. A la presión por arriba de la presión de saturación, el aceite y el agua congénita son los únicos fluidos presentes dentro de la roca del yacimiento. Conforme la presión del yacimiento declina, la roca y los fluidos se expanden debido al efecto de sus compresibilidades individuales.

Conforme la expansión de los fluidos y la reducción del volumen poroso ocurren debido al decremento de la presión del yacimiento, el aceite y el agua son forzados fuera de los poros hacia el pozo. Debido a que los líquidos y rocas son ligeramente compresibles, el yacimiento experimenta una rápida declinación de la presión. El aceite del yacimiento bajo este mecanismo de producción se caracteriza por una relación gas-aceite constante que es igual al gas en solución al punto de presión de burbuja.

Este mecanismo de producción es considerado el menos eficiente y usualmente resulta en solo un pequeño porcentaje en la recuperación total de aceite en sitio.

2.4.2. Empuje por gas disuelto

En este tipo de yacimientos, la principal fuente de energía es resultado de la liberación de gas del aceite y su subsecuente expansión conforme la presión del yacimiento es reducida. Cuando la presión cae por debajo de la presión de saturación, burbujas de gas son liberadas dentro de los espacios microscópicos de los poros. Estas burbujas se expanden y fuerzan al aceite fuera del espacio poroso, como se muestra conceptualmente en la Figura 2.19.

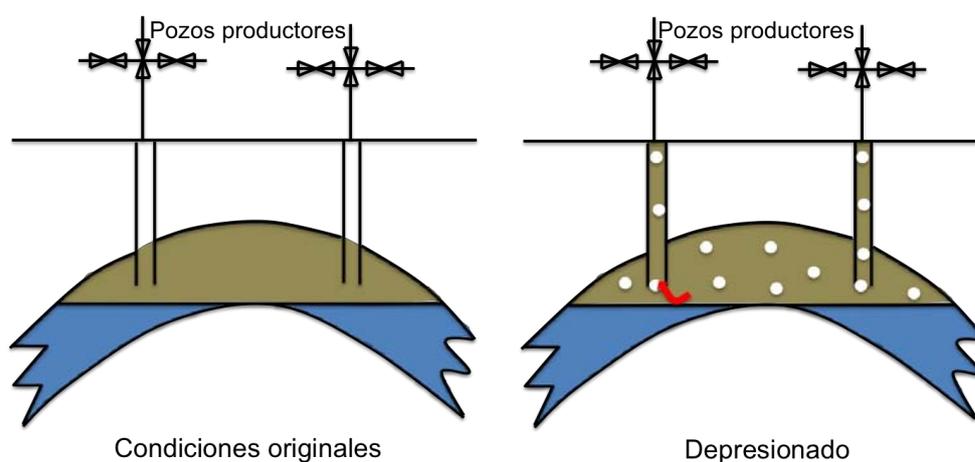


Figura 2.19: Empuje por gas disuelto liberado

2.4.3. Empuje por casquete de gas

El empuje por casquete de gas puede ser identificado por la presencia de un casquete de gas con un pequeño o nulo acuífero como lo muestra la Figura 2.20. Debido a la capacidad del casquete de gas de expandirse, estos yacimientos son caracterizados por una baja declinación de la presión del yacimiento. La energía disponible para producir el aceite proviene de las siguientes dos fuentes:

- Expansión del casquete de gas, y
- Expansión del gas en solución conforme es liberado.

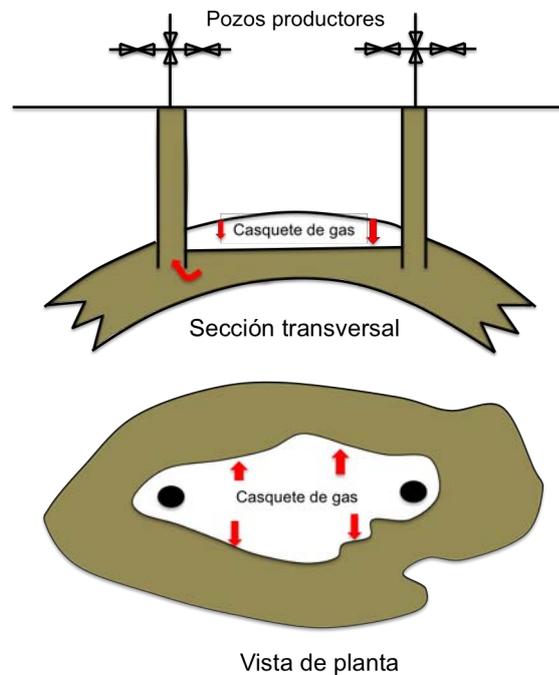


Figura 2.20: Empuje por casquete de gas

2.4.4. Empuje por acuífero asociado

Muchos yacimientos están limitados en toda su periferia por rocas saturadas de agua llamadas acuíferos. Los acuíferos pueden ser grandes comparados con el tamaño del yacimiento que pueden ser considerados como infinitos para fines prácticos, o incluso pueden ser demasiado pequeños que sus efectos en el comportamiento del yacimiento pueden ser considerados como despreciables.

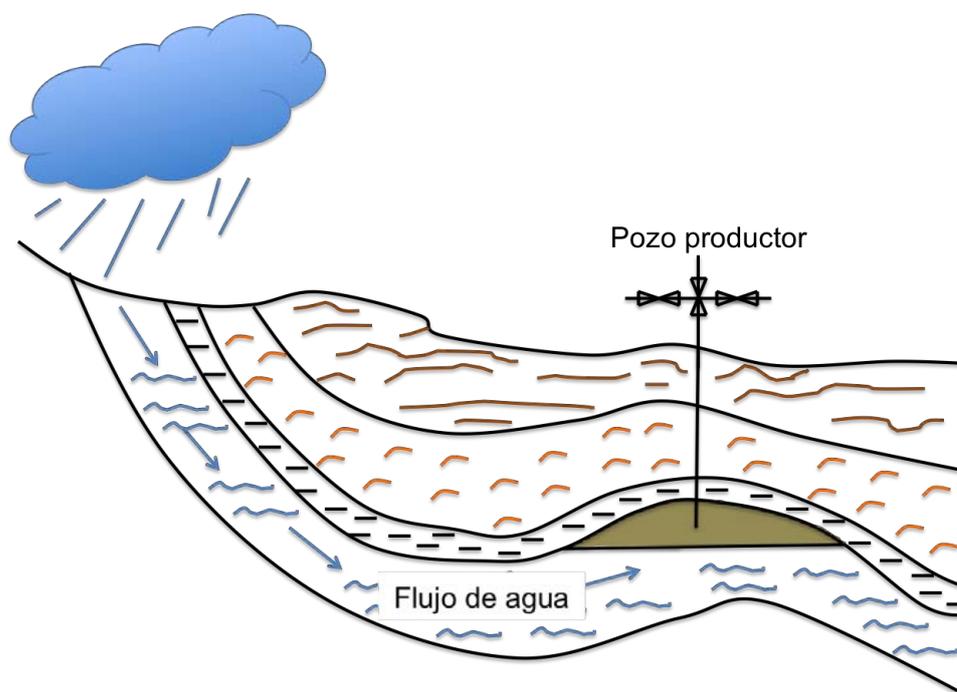


Figura 2.21: Empuje por acuífero asociado

El yacimiento por sí mismo puede ser completamente delimitado por roca impermeable tal que el yacimiento y el acuífero juntos formen una unidad cerrada (volumétrica). Por otra parte, el yacimiento puede localizarse en uno o más lugares donde el acuífero que invade y desplaza al aceite puede ser alimentado por agua superficial como se muestra esquemáticamente en la Figura 2.21. Independientemente de la fuente de agua, el empuje del acuífero es el resultado del agua moviéndose dentro del espacio poroso originalmente ocupado por aceite, reemplazando al aceite y desplazándolo hacia los pozos productores.

2.4.5. Segregación gravitacional

El mecanismo de segregación gravitacional ocurre en los yacimientos de aceite como resultado de las diferencias en las densidades de los fluidos del yacimiento. El efecto de las fuerzas gravitacionales puede ser fácilmente ilustrado al colocar cierta cantidad de aceite y agua en un recipiente y agitar el contenido. Después de la agitación, el recipiente es colocado en reposo, y el fluido más denso (normalmente el agua) se establecerá en el fondo del recipiente, mientras que el fluido menos denso (normalmente aceite) descansará en la cima del fluido más denso. Los fluidos se han separado como resultado de las fuerzas gravitacionales actuando sobre ellos.

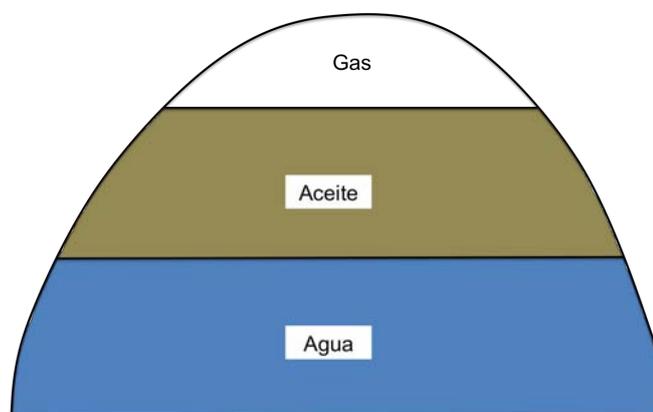


Figura 2.22: Segregación gravitacional

Los fluidos en los yacimientos de aceite son sometidos a las fuerzas gravitacionales, como evidencia por su posición relativa de los fluidos, es decir, gas en la cima, aceite por debajo del gas, y agua por debajo del aceite. La posición relativa de los fluidos en el yacimiento se muestra en la Figura 2.22. Debido a los grandes periodos de tiempo involucrados en la acumulación del petróleo y en el proceso de migración, generalmente se asume que los fluidos del yacimiento se encuentran en equilibrio, por lo tanto los contactos gas-aceite y aceite-agua serán horizontales. Aunque es difícil determinar precisamente el contacto de los fluidos, los mejores datos disponibles indican que, en la mayoría de los yacimientos los contactos de los fluidos realmente son esencialmente horizontales.

La segregación gravitacional de fluidos probablemente se presenta en cierto grado en todos los yacimientos de aceite y puede contribuir sustancialmente en la producción de aceite en algunos yacimientos.

2.4.6. Combinación de mecanismos

El mecanismo de empuje mayormente encontrado en los yacimientos de aceite no es sólo uno, sino que se presenta una combinación de mecanismos, principalmente el desplazamiento por acuífero y por casquete de gas, ambos contribuyen al desplazamiento del aceite hacia los pozos productores, como se ilustra en la Figura 2.23. Además, la segregación gravitacional puede jugar un papel importante en cualquiera de estos dos mecanismos.

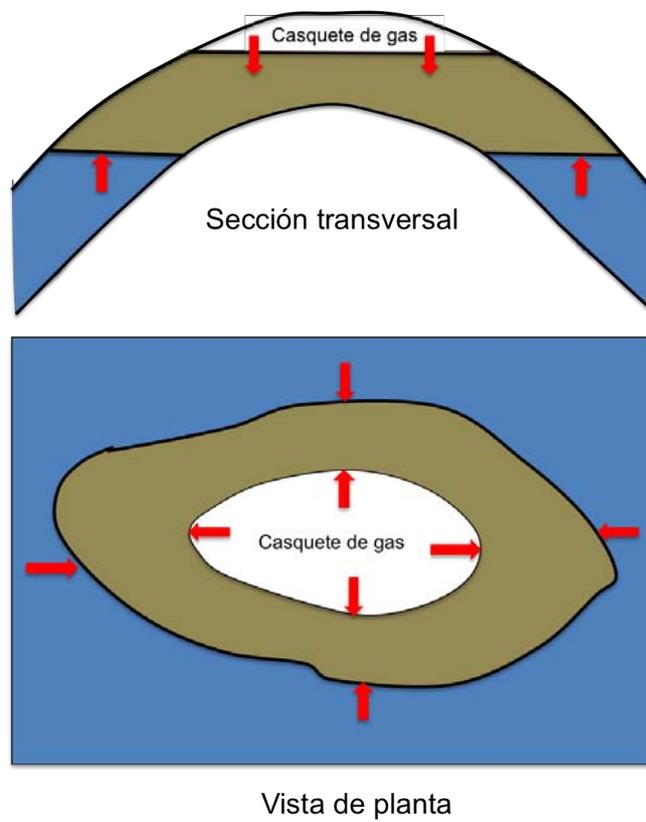


Figura 2.23: Combinación de empujes

Formulación Matemática

3.1. Flujo Bifásico Aceite-Agua

Partiendo de la ecuación de continuidad,

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_\alpha \vec{u}_\alpha) + \tilde{q}_{m,\alpha} = -\frac{\partial(\phi S_\alpha \rho_\alpha)}{\partial t} \quad (3.1)$$

Donde $\tilde{q}_{m,\alpha} = \frac{q_{m,\alpha}}{V_b}$, representa el gasto másico de fluido extraído por unidad de volumen de roca, ρ , S , u , q , son respectivamente la densidad, saturación, velocidad volumétrica, y gasto másico/volumétrico de la fase α .

La velocidad volumétrica u está dada por la ley de Darcy,

$$\vec{u}_\alpha = -\frac{k_\alpha}{\mu} \left(\vec{\nabla} p_\alpha - \gamma_\alpha \vec{\nabla} D \right) \quad (3.2)$$

Recordando que $k_{r\alpha} = \frac{k_\alpha}{k}$

$$\vec{u}_\alpha = -\frac{k k_\alpha}{\mu_\alpha} \left(\vec{\nabla} p_\alpha - \gamma_\alpha \vec{\nabla} D \right) \quad (3.2a)$$

Donde k , k_α , $k_{r\alpha}$, p_α , μ_α , son la permeabilidad absoluta del medio, la permeabilidad efectiva a la fase α , la permeabilidad relativa a la fase α , la presión, y la viscosidad de la fase α , respectivamente. D es asignada a la profundidad y γ_α es el peso específico de la fase α .

Las condiciones iniciales y de frontera son específicas del problema a resolver. De esta manera podemos tener gasto constante o gasto a presión constante. Sin flujo en las fronteras o fronteras a presión constante, entre otras.

3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

Considerando la ec. 3.2a en la ec. 3.1 se tiene lo siguiente,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[-\frac{\rho_\alpha k k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \left(\vec{\nabla} p_\alpha - \gamma_\alpha \vec{\nabla} D \right) \right] + \tilde{q}_{m,\alpha} = -\frac{\partial (\phi S_\alpha \rho_\alpha)}{\partial t} \quad (3.3)$$

Donde

$$\tilde{q}_{m,\alpha} \left[\frac{m}{tL^3} \right] = \frac{q_{m,\alpha} \left[\frac{m}{t} \right]}{V_b [L^3]}$$

y

$$\rho_{\alpha,ce} \left[\frac{m}{L^3} \right] = \frac{q_{m,\alpha} \left[\frac{m}{t} \right]}{q_{v,\alpha} \left[\frac{L^3}{t} \right]}$$

O, también,

$$q_{m,\alpha} \left[\frac{m}{t} \right] = q_{v,\alpha} \left[\frac{L^3}{t} \right] \rho_{\alpha,ce} \left[\frac{m}{L^3} \right] \quad (3.4)$$

Dividiendo la ec. 3.3 por la densidad a condiciones estándar, $\rho_{\alpha,ce}$,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[-\frac{\rho_\alpha}{\rho_{\alpha,ce}} \frac{k k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \left(\vec{\nabla} p_\alpha - \gamma_\alpha \vec{\nabla} D \right) \right] + \frac{\tilde{q}_{m,\alpha}}{\rho_{\alpha,ce}} = -\frac{\partial (\phi S_\alpha \rho_\alpha)}{\partial t} \frac{1}{\rho_{\alpha,ce}} \quad (3.5)$$

El factor de volumen para una fase líquida es,

$$B_\alpha = \frac{\rho_{\alpha,ce}}{\rho_\alpha} \quad (3.6)$$

Por lo tanto la ecuación en derivadas parciales para nuestro modelo resulta de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{k k_{r\alpha}}{B_\alpha \mu_\alpha} \left(\vec{\nabla} p_\alpha - \gamma_\alpha \vec{\nabla} D \right) \right] + \frac{q_{\alpha,ce}}{V_b} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_\alpha}{B_\alpha} \right) \quad \alpha = w, o \quad (3.7)$$

Considerando $b_\alpha = \frac{1}{B_\alpha}$ en el término de acumulación, la ec. 3.7 es,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{k k_{r\alpha}}{B_\alpha \mu_\alpha} \left(\vec{\nabla} p_\alpha - \gamma_\alpha \vec{\nabla} D \right) \right] + \frac{q_{\alpha,ce}}{V_b} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_\alpha b_\alpha) \quad \alpha = w, o \quad (3.7a)$$

3.1.1. Planteamiento del Problema.

Flujo de aceite, $\alpha = o$.

La ec. 3.7a para la fase aceite es la siguiente,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{kk_{ro}}{B_o\mu_o} \left(\vec{\nabla}p_o - \gamma_o\vec{\nabla}D \right) \right] + \frac{q_{o,ce}}{V_b} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o b_o) \quad (3.8)$$

Flujo de agua, $\alpha = w$.

La ec. 3.7a para la fase agua es la siguiente,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{kk_{rw}}{B_w\mu_w} \left(\vec{\nabla}p_w - \gamma_w\vec{\nabla}D \right) \right] + \frac{q_{w,ce}}{V_b} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w b_w) \quad (3.9)$$

Para el flujo multifásico agua-aceite se considera que son fluidos inmiscibles, esto es, no son solubles.

Las restricciones del problema son:

$$S_w + S_o = 1.0 \quad (3.10)$$

Las presiones de las fases están relacionadas através de la presión capilar,

$$P_c(S_w) = p_o - p_w \quad (3.11)$$

Sistema Físico a estudiar.

Considerando como sistema el esquema de la Figura 3.1, nuestro modelo será una parte de él. Podemos tomar como nuestro modelo una sección del yacimiento, desde el pozo productor hasta el pozo inyector.

3.1.2. Modelo Matemático

Las ecuaciones en derivadas parciales de nuestro modelo lo conforman las ecuaciones obtenidas de 3.8 a 3.11. Esto es,

3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

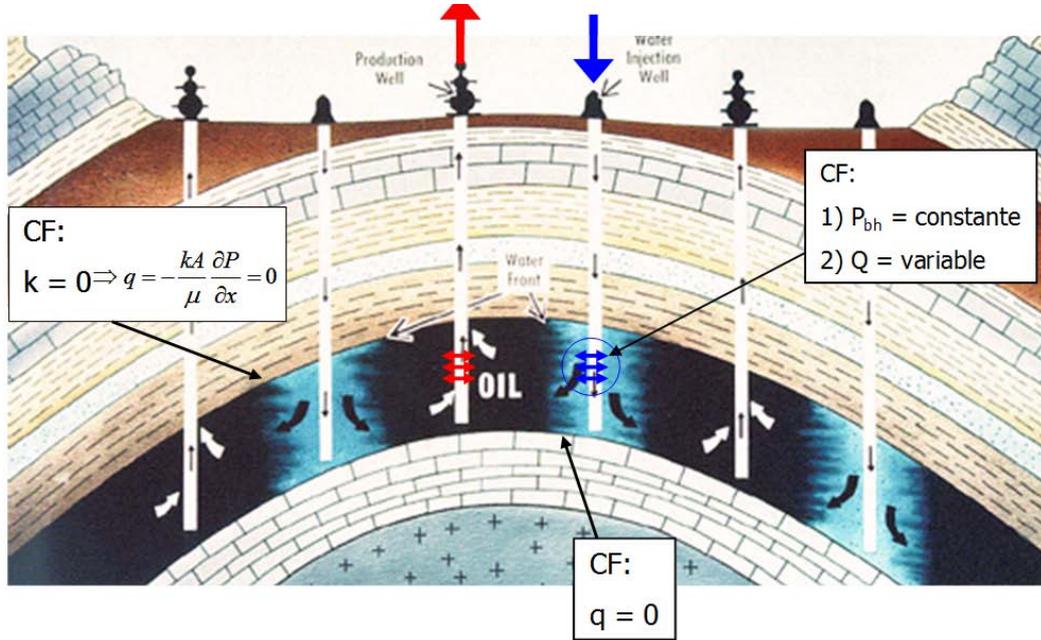


Figura 3.1: Inyección de agua en un yacimiento de aceite

Flujo de aceite,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{kk_{ro}}{B_o\mu_o} (\vec{\nabla}p_o - \gamma_o\vec{\nabla}D) \right] + \frac{q_{o,ce}}{V_b} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o b_o) \quad (3.8)$$

Flujo agua,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{kk_{rw}}{B_w\mu_w} (\vec{\nabla}p_w - \gamma_w\vec{\nabla}D) \right] + \frac{q_{w,ce}}{V_b} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w b_w) \quad (3.9)$$

$$S_w + S_o = 1.0 \quad (3.10)$$

$$P_c(S_w) = p_o - p_w \quad (3.11)$$

Las condiciones iniciales y de frontera serán planteadas posteriormente.

Las ecs. 3.8 a 3.11 son no lineales. Aunque existen soluciones analíticas, éstas consideran suposiciones que en la mayoría de los casos no se presentan en la realidad. Lo anterior no indica que las soluciones analíticas dejen de ser importantes, las soluciones analíticas proporcionan una fuente muy importante y económica para entender los procesos que se modelan.

Para resolver las ecs. 3.8 a 3.11 es necesario considerar algún algoritmo numérico que nos permita su solución para varias condiciones de frontera.

Los métodos numéricos comúnmente usados en la simulación numérica de yacimientos son: El método de diferencias finitas, el método de volumen finito (método de volumen de control) y el método de elemento finito.

En este trabajo se utilizará el método de diferencias finitas para pasar del dominio continuo al dominio discreto, **Chopra (2000)**.

3.2. Condiciones Iniciales y de Frontera

La formulación de un problema de flujo de fluidos no está completa si no se definen las condiciones iniciales y de frontera. Las condiciones iniciales definen en el caso más general, de flujo bifásico, la distribución de presiones y saturaciones de las fases al tiempo cero de nuestro problema. Por otra parte, las condiciones de frontera introducen la información correspondiente a la forma en que el yacimiento interactúa con sus alrededores durante su vida productiva.

3.2.1. Condiciones Iniciales

Cuando una de las variables independientes en una ecuación diferencial parcial es el tiempo, se necesita conocer entre otras cosas, la variable dependiente a un tiempo t_0 para obtener la solución a otros tiempos.

$$p_o(x, t = 0) = p_{ini}$$

A esta condición se le llama condición inicial. Las condiciones iniciales especifican el estado inicial de las variables primarias (incógnitas) del sistema.

3.2.2. Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera pueden ser internas o externas, entre ellas existen por ejemplo:

- C.F. Interna: presión o gasto constante.
- C.F. Externa: yacimiento infinito, no-flujo o frontera a presión constante, etc.

Básicamente existen dos tipos de C.F.:

3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

1. Condiciones Dirichlet (condiciones de presión). Cuando las condiciones de presión son especificadas, normalmente se hace en las fronteras del dominio del problema.

$$p(x = 0, t > 0) = p_L$$

$$p(x = L, t > 0) = p_R$$

2. Condiciones Neumann (condiciones de gasto). Se podría especificar una frontera impermeable (no hay flujo) en los extremos del dominio del problema.

$$q_o |_{x=0} = q_w |_{x=0} = 0$$

$$q_o |_{x=L} = q_w |_{x=L} = 0$$

Formulación Numérica

4.1. Ecuaciones de Flujo en Diferencias Finitas

4.1.1. Discretización de las ecuaciones de Flujo

Las ecuaciones 3.8 y 3.9 describen el flujo de agua y aceite en un medio poroso. Para obtener su solución numérica es necesario discretizarlas mediante diferencias finitas.

Considerando un esquema implícito y en dirección (x) , la ec. 3.8 puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{kk_{ro}}{B_o\mu_o} (\vec{\nabla}p_o - \gamma_o\vec{\nabla}D) \right] + \frac{q_{o,ce}}{V_b} &= \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o b_o) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]_i^{n+1} + \frac{q_{o,ce}}{V_b} \Big|_i^{n+1} &= \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o b_o)_i^{n+1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Donde $\lambda_o = \frac{kk_{ro}}{B_o\mu_o}$, $i = 1, 2, \dots, I_{max}$

Utilizando diferencias centrales para espacio y diferencias regresivas para tiempo, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right] \right\}_i^{n+1} &\approx \\ \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \left(\frac{\lambda_o}{\Delta x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i+1} - p_{o,i} - (\gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - \left(\frac{\lambda_o}{\Delta x} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i} - p_{o,i-1} - (\gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} \right\} & \end{aligned} \quad (4.2)$$

4. FORMULACIÓN NUMÉRICA

La aproximación del término de acumulación mediante diferencias regresivas, es;

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o b_o) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o b_o) \right\}_i^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[(\phi S_o b_o)_i^{n+1} - (\phi S_o b_o)_i^n \right] \quad (4.3)$$

Sustituyendo las ecs. 4.2 y 4.3 en la ec. 4.1 y multiplicando por el volumen de roca de la celda i , $V_{b,i} = A_x \Delta x$, se obtiene lo siguiente:

$$T_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i+1} - p_{o,i} - (\gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{o,i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i} - p_{o,i-1} - (\gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{o,ce,i}^{n+1} = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \left[(\phi S_o b_o)_i^{n+1} - (\phi S_o b_o)_i^n \right] \quad (4.4)$$

Donde $i = 1, 2, \dots, I_{max}$

La transmisibilidad T para coordenadas cartesianas en dirección x se define como:

$$T_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left(\frac{A_x}{\Delta x} \right)_{i+\frac{1}{2}} \lambda_{o,i+\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

y

$$T_{o,i-\frac{1}{2}}^{n+1} = \left(\frac{A_x}{\Delta x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \lambda_{o,i-\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

El área A_x está dada por el área transversal expuesta al flujo, esto es, $A_x = \Delta y \Delta z$.

Considerando la notación previamente usada,

$$\Delta_x u_i = u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}$$

o

$$\Delta_x u_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+1} - u_i$$

y

$$\Delta_t u = u^{n+1} - u^n$$

La ec. 4.4 puede expresarse en términos de operadores de diferencias, esto es,

$$T_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} [\Delta p_o - \gamma_o \Delta D]_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{o,i-\frac{1}{2}}^{n+1} [\Delta p_o - \gamma_o \Delta D]_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + q_{o,ce,i}^{n+1} = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \Delta_t (\phi S_o b_o)_i \quad (4.7)$$

O de una forma más compacta,

$$\Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{o,ce,i}^{n+1} = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \Delta_t (\phi S_o b_o)_i \quad (4.8)$$

Un procedimiento igual se realiza para la ecuación de la fase agua, obteniéndose lo siguiente,

$$\Delta [T_w (\Delta p_w - \gamma_w \Delta D)]_i^{n+1} + q_{w,ce,i}^{n+1} = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \Delta_t (\phi S_w b_w)_i \quad (4.9)$$

Donde $i = 1, 2, \dots, Imax$

4.1.2. Acoplamiento de las Condiciones de Frontera

Antes de continuar, es prudente analizar las condiciones de frontera para el problema en cuestión. Supongamos que se desea resolver el flujo bifásico de aceite y agua en el siguiente dominio, Figura 4.1.

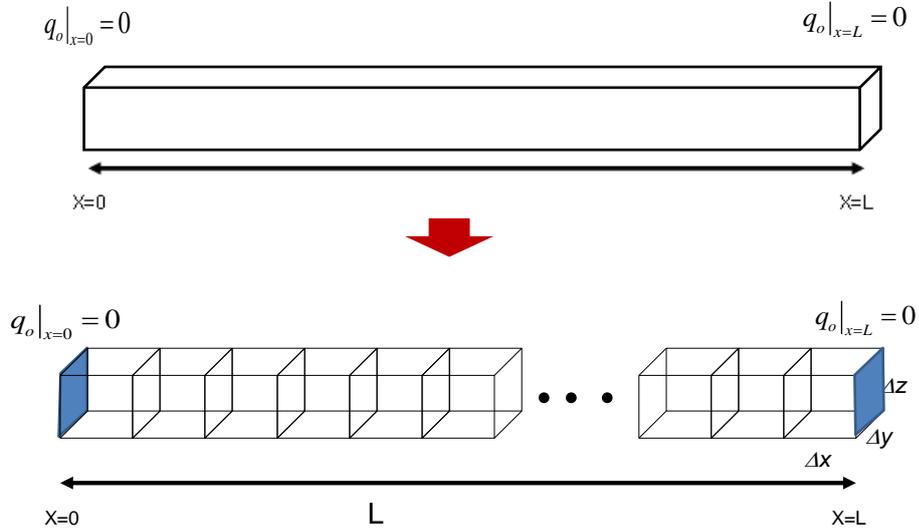


Figura 4.1: Dominio discretizado en dirección x

Las condiciones iniciales y de frontera son las siguientes:

$$p_o(x, t = 0) = p_{ini} \quad (4.10a)$$

4. FORMULACIÓN NUMÉRICA

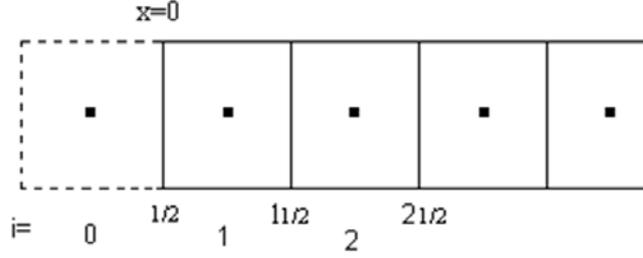


Figura 4.2: Malla de cálculo en $x = 0$, mostrando el nodo ficticio $i = 0$

$$q_o |_{x=0} = q_w |_{x=0} = 0 \quad (4.10b)$$

$$q_o |_{x=L} = q_w |_{x=L} = 0 \quad (4.10c)$$

Se necesita ahora obtener la forma particular que adquiere la ecuación aproximada en las celdas de las fronteras, $i = 1$ e $i = I$, debido al acoplamiento de las condiciones de frontera. Para esto, considérese la porción de la malla de cálculo correspondiente a la frontera ubicada en $x = 0$, mostrada en la Figura 4.2, donde se muestra el nodo $i=0$.

La aproximación de la condición de frontera, ec. 4.10b, en $x = 0$, o $i = \frac{1}{2}$, empleando diferencias centrales es:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right] \right\}_{\frac{1}{2}}^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta x_{\frac{1}{2}}} \left[p_{o,1} - p_{o,0} - (\gamma_o \Delta D)_{\frac{1}{2}} \right]^{n+1} = - \left(\frac{\mu_o B_o}{k_o A} \right)_{\frac{1}{2}}^{n+1} q_o$$

O bien:

$$q_o = -T_{o,\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,1} - p_{o,0} - (\gamma_o \Delta D)_{\frac{1}{2}} \right]^{n+1} = 0 \quad (4.11)$$

La condición de frontera en $x = L$, ec. 4.10c, Figura 4.3, se aproxima similarmente.

En $x = L$, o $i = I_{max} + \frac{1}{2}$, se tiene que:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right] \right\}_{I+\frac{1}{2}}^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta x_{I+\frac{1}{2}}} \left[p_{o,I+1} - p_{o,I} - (\gamma_o \Delta D)_{I+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} = 0$$

Entonces, al igual que la ec. 4.11

$$q_o = T_{o,I+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,I+1} - p_{o,I} - (\gamma_o \Delta D)_{I+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} = 0 \quad (4.12)$$

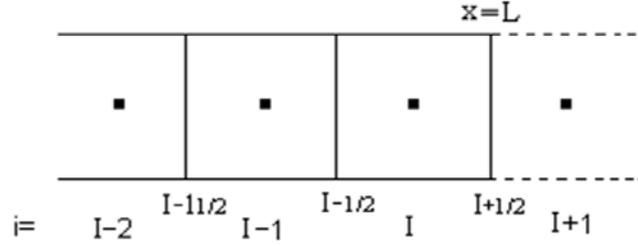


Figura 4.3: Malla de cálculo en $x = L$, mostrando el nodo ficticio $i = I_{max} + 1$

Considérese ahora la ec. 4.4 escrita en la celda 1, $i = 1$,

$$T_{o,1+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,2} - p_{o,1} - (\gamma_o \Delta D)_{1+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{o,\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,1} - p_{o,0} - (\gamma_o \Delta D)_{\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{o,ce,1}^{n+1} = \frac{V_{b,1}}{\Delta t} \left[(\phi S_o b_o)_1^{n+1} - (\phi S_o b_o)_1^n \right]$$

La condición de frontera, ec. 4.11, puede ahora acoplarse en esta ecuación. Así la ecuación aproximada para el **nodo 1** adquiere la siguiente forma:

$$T_{o,1+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,2} - p_{o,1} - (\gamma_o \Delta D)_{1+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{o,ce,1}^{n+1} = \frac{V_{b,1}}{\Delta t} \left[(\phi S_o b_o)_1^{n+1} - (\phi S_o b_o)_1^n \right] \quad (4.13)$$

Véase ahora la forma particular que adquiere la ec. 4.11 en la celda I :

$$T_{o,I+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,I+1} - p_{o,I} - (\gamma_o \Delta D)_{I+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{o,I-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,I} - p_{o,I-1} - (\gamma_o \Delta D)_{I-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{o,ce,I}^{n+1} = \frac{V_{b,I}}{\Delta t} \left[(\phi S_o b_o)_I^{n+1} - (\phi S_o b_o)_I^n \right]$$

Acoplando la condición de frontera, ec. 4.12, la ecuación para el **nodo I** se reduce a:

$$- T_{o,I-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,I} - p_{o,I-1} - (\gamma_o \Delta D)_{I-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{o,ce,I}^{n+1} = \frac{V_{b,I}}{\Delta t} \left[(\phi S_o b_o)_I^{n+1} - (\phi S_o b_o)_I^n \right] \quad (4.14)$$

El **resto de los nodos**, esto es, de 2 a $I - 1$ está dado por la ec. 4.4.

4. FORMULACIÓN NUMÉRICA

4.1.3. Método de Newton para la Linealización de las Ecuaciones de Flujo

El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

Para el **nodo 1**:

Aceite.

$$T_{o,1+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,2} - p_{o,1} - (\gamma_o \Delta D)_{1+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{o,ce,1}^{n+1} = \frac{V_{b,1}}{\Delta t} \left[(\phi S_o b_o)_1^{n+1} - (\phi S_o b_o)_1^n \right] \quad (4.15a)$$

Agua

$$T_{w,1+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{w,2} - p_{w,1} - (\gamma_w \Delta D)_{1+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{w,ce,1}^{n+1} = \frac{V_{b,1}}{\Delta t} \left[(\phi S_w b_w)_1^{n+1} - (\phi S_w b_w)_1^n \right] \quad (4.15b)$$

Para los **nodos $i = 2, 3, \dots, I - 1$** , es el siguiente:

Aceite

$$T_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i+1} - p_{o,i} - (\gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{o,i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i} - p_{o,i-1} - (\gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{o,ce,i}^{n+1} = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \left[(\phi S_o b_o)_i^{n+1} - (\phi S_o b_o)_i^n \right] \quad (4.16a)$$

Agua

$$T_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{w,i+1} - p_{w,i} - (\gamma_w \Delta D)_{i+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{w,i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{w,i} - p_{w,i-1} - (\gamma_w \Delta D)_{i-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{w,ce,i}^{n+1} = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \left[(\phi S_w b_w)_i^{n+1} - (\phi S_w b_w)_i^n \right] \quad (4.16b)$$

Para el **nodo I** , es el siguiente:

Aceite

$$- T_{o,I-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,I} - p_{o,I-1} - (\gamma_o \Delta D)_{I-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{o,ce,I}^{n+1} = \frac{V_{b,I}}{\Delta t} \left[(\phi S_o b_o)_I^{n+1} - (\phi S_o b_o)_I^n \right] \quad (4.17a)$$

Agua

$$- T_{w,I-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{w,I} - p_{w,I-1} - (\gamma_w \Delta D)_{I-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{w,ce,I}^{n+1} = \frac{V_{b,I}}{\Delta t} \left[(\phi S_w b_w)_I^{n+1} - (\phi S_w b_w)_I^n \right] \quad (4.17b)$$

Nótese que ya se han considerado las condiciones de frontera. Se tiene un sistema de ecuaciones algebraicas *no lineales*. La no linealidad se encuentra en el producto de las transmisibilidades por el potencial y el término de acumulación (los parámetros dependen de las presiones y saturaciones al tiempo $n + 1$).

Este sistema se debe de linealizar por algún método para poder ser resuelto. Se utilizará el método *iterativo* de Newton. Este método consiste básicamente en expandir las funciones de residuos, F_i^{n+1} , en series de Taylor alrededor del nivel de iteración (ν).

Antes de continuar podemos ver que el sistema de ecuaciones no lineales en diferencias finitas ecs. 4.15 a 4.17, puede ser simplificado en sus incógnitas y ecuaciones.

Número de incógnitas: (4), p_o , p_w , S_o , S_w

Número de ecuaciones: (4), Ecs. 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, o sus formas discretas.

Es posible expresar la p_w en términos de la p_o (ec. 3.11) y tener las ecuaciones del agua en términos de p_o y S_w . Así mismo, la saturación de aceite (ec. 3.10) puede expresarse en términos de la saturación de agua, S_w .

Por lo tanto, se tiene lo siguiente,

$$S_o = 1.0 - S_w \tag{4.18}$$

$$p_w = p_o - P_c(S_w) \tag{4.19}$$

4.2. Solución del Sistema de Ecuaciones

El sistema de ecuaciones a ser resuelto se obtiene considerando la ecuación general para cada una de las fases fluyendo simultáneamente.

Fase Aceite

$$T_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i+1} - p_{o,i} - (\gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{o,i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i} - p_{o,i-1} - (\gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{o,ce,i}^{n+1} = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \left[(\phi \{1 - S_w\} b_o)_i^{n+1} - (\phi \{1 - S_w\} b_o)_i^n \right] \quad i = 1, 2, \dots, I$$

O en su forma compacta,

$$\Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{o,ce,i}^{n+1} = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \Delta_t (\phi \{1 - S_w\} b_o)_i \quad (4.20)$$

Fase Agua

$$T_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i+1} - p_{o,i} - P c_{wo,i+1} + P c_{wo,i} - (\gamma_w \Delta D)_{i+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{w,i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i} - p_{o,i-1} - P c_{wo,i} + P c_{wo,i-1} - (\gamma_w \Delta D)_{i-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + q_{w,ce,i}^{n+1} = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \left[(\phi S_w b_w)_i^{n+1} - (\phi S_w b_w)_i^n \right] \quad i = 1, 2, \dots, I$$

O en su forma compacta,

$$\Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{wo} - \gamma_w \Delta D)]_i^{n+1} + q_{w,ce,i}^{n+1} = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \Delta_t (\phi S_w b_w)_i \quad (4.21)$$

Las ecs. 4.20 y 4.21 pueden simplificarse o complicarse dependiendo de las condiciones de frontera establecidas. Nótese que se han eliminado dos ecuaciones y dos incógnitas, es decir, $[p_w, S_o]^T$.

Continuando con la aplicación del método de Newton a las ecs. 4.20 y 4.21, se debe de identificar la funcionalidad (dependencia de variables) de las funciones de residuos.

Las funciones de residuos son,

Fase aceite,

$$\begin{aligned}
 F_{o,i}^{n+1} = & T_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i+1} - p_{o,i} - (\gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{o,i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i} - p_{o,i-1} - (\gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} \\
 & + q_{o,ce,i}^{n+1} - \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \left[(\phi \{1 - S_w\} b_o)_i^{n+1} - (\phi \{1 - S_w\} b_o)_i^n \right] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, I
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Fase agua,

$$\begin{aligned}
 F_{w,i}^{n+1} = & T_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i+1} - p_{o,i} - P c_{wo,i+1} + P c_{wo,i} - (\gamma_w \Delta D)_{i+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - \\
 & T_{w,i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{o,i} - p_{o,i-1} - P c_{wo,i} + P c_{wo,i-1} - (\gamma_w \Delta D)_{i-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} \\
 & + q_{w,ce,i}^{n+1} - \frac{V_{b,i}}{\Delta t} \left[(\phi S_w b_w)_i^{n+1} - (\phi S_w b_w)_i^n \right] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, I
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Con el propósito de identificar la funcionalidad de las ecs. 4.22 y 4.23 y definiendo el siguiente vector, se tiene,

$$U = [p_o, S_w]^T$$

Por lo tanto, considerando el análisis en una dimensión, la dependencia de las funciones de residuos es la siguiente,

Fase Aceite

$$F_{o,i}^{n+1} = F_{o,i}^{n+1}(U_{i-1}^{n+1}, U_i^{n+1}, U_{i+1}^{n+1}) \tag{4.24}$$

Fase Agua

$$F_{w,i}^{n+1} = F_{w,i}^{n+1}(U_{i-1}^{n+1}, U_i^{n+1}, U_{i+1}^{n+1}) \tag{4.25}$$

El método *iterativo* de Newton consiste básicamente en expandir las funciones de residuos, $F_{\alpha,i}^{n+1}$, en series de Taylor alrededor del nivel de iteración (ν), suprimiendo el superíndice $n + 1$ para facilitar la lectura, se tiene:

4. FORMULACIÓN NUMÉRICA

Fase Aceite

$$\begin{aligned}
F_{o,i}^{(\nu+1)}(p_{o,i-1}, p_{o,i}, p_{o,i+1}, S_{w,i-1}, S_{w,i}, S_{w,i+1}) &\approx F_{o,i}^{(\nu)} + \\
&\left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{o,i}}{\partial p_{o,i-1}^2} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i-1}^{2(\nu+1)} + \dots + \\
&\left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{o,i}}{\partial p_{o,i}^2} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i}^{2(\nu+1)} + \dots + \\
&\left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i+1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{o,i}}{\partial p_{o,i+1}^2} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i+1}^{2(\nu+1)} + \dots + \\
&\left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{o,i}}{\partial S_{w,i-1}^2} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i-1}^{2(\nu+1)} + \dots + \\
&\left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{o,i}}{\partial S_{w,i}^2} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i}^{2(\nu+1)} + \dots + \\
&\left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i+1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{o,i}}{\partial S_{w,i+1}^2} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i+1}^{2(\nu+1)} + \dots + = 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Fase Agua

$$\begin{aligned}
F_{w,i}^{(\nu+1)}(p_{o,i-1}, p_{o,i}, p_{o,i+1}, S_{w,i-1}, S_{w,i}, S_{w,i+1}) &\approx F_{w,i}^{(\nu)} + \\
&\left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{w,i}}{\partial p_{o,i-1}^2} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i-1}^{2(\nu+1)} + \dots + \\
&\left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{w,i}}{\partial p_{o,i}^2} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i}^{2(\nu+1)} + \dots + \\
&\left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i+1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{w,i}}{\partial p_{o,i+1}^2} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i+1}^{2(\nu+1)} + \dots + \\
&\left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{w,i}}{\partial S_{w,i-1}^2} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i-1}^{2(\nu+1)} + \dots + \\
&\left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{w,i}}{\partial S_{w,i}^2} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i}^{2(\nu+1)} + \dots + \\
&\left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i+1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial^2 F_{w,i}}{\partial S_{w,i+1}^2} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i+1}^{2(\nu+1)} + \dots + = 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Donde $i = 1, 2, \dots, Imax$

De esta expansión sólo se conservan los términos de menor orden, es decir:

Fase Aceite

$$\begin{aligned}
 F_{o,i}^{(\nu+1)}(p_{o,i-1}, p_{o,i}, p_{o,i+1}, S_{w,i-1}, S_{w,i}, S_{w,i+1}) \approx F_{o,i}^\nu + \\
 \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i}^{(\nu+1)} + \\
 \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i+1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i-1}^{(\nu+1)} + \\
 \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i+1}^{(\nu+1)} = 0
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Fase Agua

$$\begin{aligned}
 F_{w,i}^{(\nu+1)}(p_{o,i-1}, p_{o,i}, p_{o,i+1}, S_{w,i-1}, S_{w,i}, S_{w,i+1}) \approx F_{w,i}^\nu + \\
 \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i}^{(\nu+1)} + \\
 \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i+1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i-1}^{(\nu+1)} + \\
 \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i+1}^{(\nu+1)} = 0
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Por lo tanto, simplificando y arreglando, se tiene que para la fase aceite

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i+1}^{(\nu+1)} + \\
 \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i+1}^{(\nu+1)} = -F_{o,i}^{(\nu)}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Y para la fase agua

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta p_{o,i+1}^{(\nu+1)} + \\
 \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i-1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i+1}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w,i+1}^{(\nu+1)} = -F_{w,i}^{(\nu)}
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

4. FORMULACIÓN NUMÉRICA

Donde $\delta p_{o,i}^{(\nu+1)}$ y $\delta S_{w,i}^{(\nu+1)}$ representan los cambios iterativos de las variables primarias o incógnitas:

$$\delta p_{o,i}^{(\nu+1)} = p_{o,i}^{(\nu+1)} - p_{o,i}^{(\nu)} \quad (4.32)$$

$$\delta S_{w,i}^{(\nu+1)} = S_{w,i}^{(\nu+1)} - S_{w,i}^{(\nu)} \quad (4.33)$$

Escribiendo las ecs. 4.30 y 4.31, para la malla numérica de la Figura 4.4.

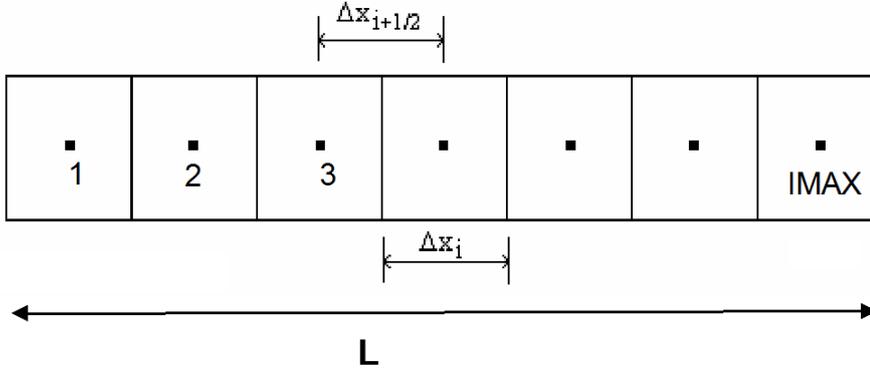


Figura 4.4: Malla nodos centrados

Fase Aceite.

Para el nodo 1:

$$\left(\frac{\partial F_{o,1}}{\partial p_{o,1}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,1}}{\partial S_{w,1}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,1}}{\partial p_{o,2}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,2}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,2}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,2}^{(\nu+1)} = -F_{o,1}^{(\nu)} \quad (4.34)$$

Para los nodos $i = 2, 3, \dots, I - 1$ es el siguiente

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i-1}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i-1}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,i}^{(\nu+1)} + \\ \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial p_{o,i+1}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,i+1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,i}}{\partial S_{w,i+1}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,i+1}^{(\nu+1)} = -F_{o,i}^{(\nu)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Para el nodo I , es el siguiente,

$$\left(\frac{\partial F_{o,I}}{\partial p_{o,I-1}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,I-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,I}}{\partial S_{w,I-1}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,I-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,I}}{\partial p_{o,I}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,I}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{o,I}}{\partial S_{w,I}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,I}^{(\nu+1)} = -F_{o,I}^{(\nu)} \quad (4.36)$$

Similarmente,

Fase Agua,

Para el nodo 1:

$$\left(\frac{\partial F_{w,1}}{\partial p_{o,1}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,1}}{\partial S_{w,1}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,1}}{\partial p_{o,2}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,2}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,1}}{\partial S_{w,2}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,2}^{(\nu+1)} = -F_{w,1}^{(\nu)} \quad (4.37)$$

Para los nodos $i = 2, 3, \dots, I - 1$ es el siguiente

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i-1}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i-1}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,i-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,i}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,i}^{(\nu+1)} + \\ \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial p_{o,i+1}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,i+1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,i}}{\partial S_{w,i+1}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,i+1}^{(\nu+1)} = -F_{w,i}^{(\nu)} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para el nodo I , es el siguiente,

$$\left(\frac{\partial F_{w,I}}{\partial p_{o,I-1}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,I-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,I}}{\partial S_{w,I-1}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,I-1}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,I}}{\partial p_{o,I}}\right)^{(\nu)} \delta p_{o,I}^{(\nu+1)} + \left(\frac{\partial F_{w,I}}{\partial S_{w,I}}\right)^{(\nu)} \delta S_{w,I}^{(\nu+1)} = -F_{w,I}^{(\nu)} \quad (4.39)$$

Donde las submatrices están definidas por los elementos:

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{w,ij}}{\partial p_{o,ij-1}} & \frac{\partial F_{w,ij}}{\partial S_{w,ij-1}} \\ \frac{\partial F_{o,ij}}{\partial p_{o,ij-1}} & \frac{\partial F_{o,ij}}{\partial S_{w,ij-1}} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{w,ij}}{\partial p_{o,ij+1}} & \frac{\partial F_{w,ij}}{\partial S_{w,ij+1}} \\ \frac{\partial F_{o,ij}}{\partial p_{o,ij+1}} & \frac{\partial F_{o,ij}}{\partial S_{w,ij+1}} \end{pmatrix};$$

De manera similar a la expansión de una dimensión a dos dimensiones, tenemos que para una malla en tres dimensiones, esto es, considerando flujo en la dirección z , se adicionan dos diagonales más que representan la interacción con las celdas $(i, j, k - 1)$ e $(i, j, k + 1)$, Figura 4.7.

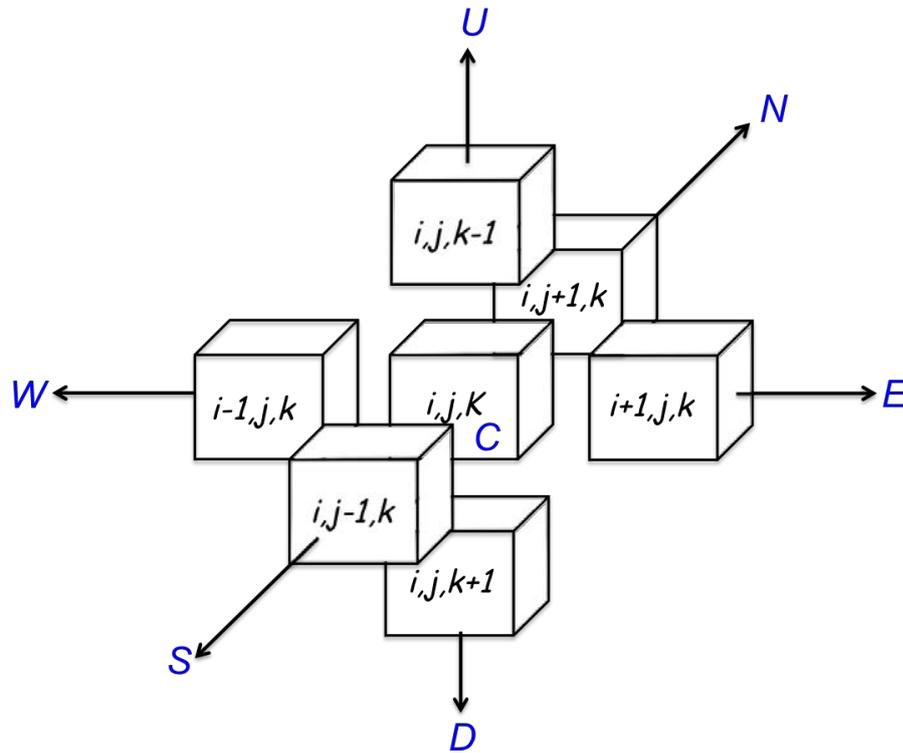


Figura 4.7: Plano cardinal, 3D

Algoritmo 1 Algoritmo General de Solución:

Simulador Bifásico 2-D, Totalmente Implícito.

Entrada: Información de Inicialización

Salida: presiones y Saturaciones, $p_{o,ij}^{n+1}$ y $S_{w,ij}^{n+1}$

- 1: Verificar Consistencia de Unidades
 - 2: Definir la Malla de Simulación
 - 3: Definir un Incremento de Tiempo, Dt, y Tiempo Total de Simulación, Tsim
 - 4: Inicialización de presión, Saturación, Porosidad, Propiedades PVT, Funciones de Saturación
 - 5: **mientras** Tacum \leq Tsim **hacer**
 - 6: **mientras** No Converge **hacer**
 - 7: Obtención de los coeficientes $S_i, W_i, C_i, E_i, N_i, \bar{F}_i$
 - 8: Resolver el Sistema Pentadiagonal con el Método Numérico Linsolve para $\delta p_{o,ij}^{\nu+1}$ y $\delta S_{w,ij}^{\nu+1}$, Cálculo de Potenciales, Cálculo de Transmisibilidades, Derivadas Numéricas e Interpolación de Propiedades
 - 9: Verificar Convergencia con las ecs. 4.43 y 4.44
 - 10: **si** No Converge **entonces**
 - 11: Realizar Otra Iteración Newtoniana, ecs. 4.41 y 4.42 y Regresar al Punto 7
 - 12: **si no** Sí Converge **entonces**
 - 13: La Solución es, $p_{o,ij}^{n+1} \Leftarrow p_{o,ij}^{\nu+1}$ y $S_{w,ij}^{n+1} \Leftarrow S_{w,ij}^{\nu+1}$ Ver C.2
 - 14: **fin si**
 - 15: **fin mientras**
 - 16: Imprimir para el Tiempo Acumulado, Tacum=Tacum+Dt, las presiones y Saturaciones
 - 17: Para Avanzar Otro Paso de Tiempo, Dt=Dt*cte. por ejemplo, Reasignar las presiones y Saturaciones, $p_{o,ij}^n \Leftarrow p_{o,ij}^{n+1}$ y $S_{w,ij}^n \Leftarrow S_{w,ij}^{n+1}$, Regresar al Punto 7
 - 18: **fin mientras** Se alcanza el Tiempo Total de Simulación, Parar el Proceso
-

Análisis de Resultados

Primeramente, se establece la validación del modelo numérico construido, al elaborar un modelo de simulación y comparar los resultados que se obtuvieron con los resultados arrojados por el simulador comercial Eclipse 100. Posteriormente se muestra la aplicación que se le dió al simulador para la elaboración de este trabajo al correr tres casos de simulación, cambiando únicamente las curvas de permeabilidades relativas para las fases aceite y agua, de esta manera se puede mostrar de una manera concreta el efecto que tiene la mojabilidad en la recuperación total de aceite.

Las curvas de permeabilidades relativas para las fases aceite y agua pueden ser obtenidas con el modelo del exponente de Corey:

$$k_{rw} = k_{rw}(S_{or}) \left(\frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^{n_w} \quad (5.1)$$

$$k_{row} = k_{ro}(S_{wc}) \left(\frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^{n_o} \quad (5.2)$$

Donde $k_{rw}(S_{or})$ y $k_{ro}(S_{wc})$ son referenciados como los “end-point” de las curvas de permeabilidades relativas, n_w y n_o son llamados exponentes de Corey para el agua y para el aceite respectivamente. Para el sistema mojado por agua, la permeabilidad relativa al aceite se caracteriza por tener una saturación de aceite residual del orden de 0.3 o más, un exponente de Corey, n_o , de entre 2-3 y un “end-point” de permeabilidad relativa, $k_{ro}(S_{wc})$, entre 0.6-0.8. Su correspondiente permeabilidad relativa al agua se caracteriza por tener una saturación irreductible de agua, S_{wc} , del orden de 0.1, un exponente de Corey, n_w , de entre 4-6 y un “end-point” de permeabilidad relativa, $k_{rw}(S_{or})$, entre 0.1-0.4. Para el sistema mojado por aceite, el agua y el aceite solamente cambian lugares. Para el caso de mojabilidad intermedia, se suponen ambos valores de S_{wc} y S_{or} iguales y aproximadamente de 0.20, los exponentes de Corey n_o y n_w con un valor de entre 3-5 y los “end-point” de $k_{ro}(S_{wc})$ y $k_{rw}(S_{or})$ con un valor de 0.5.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

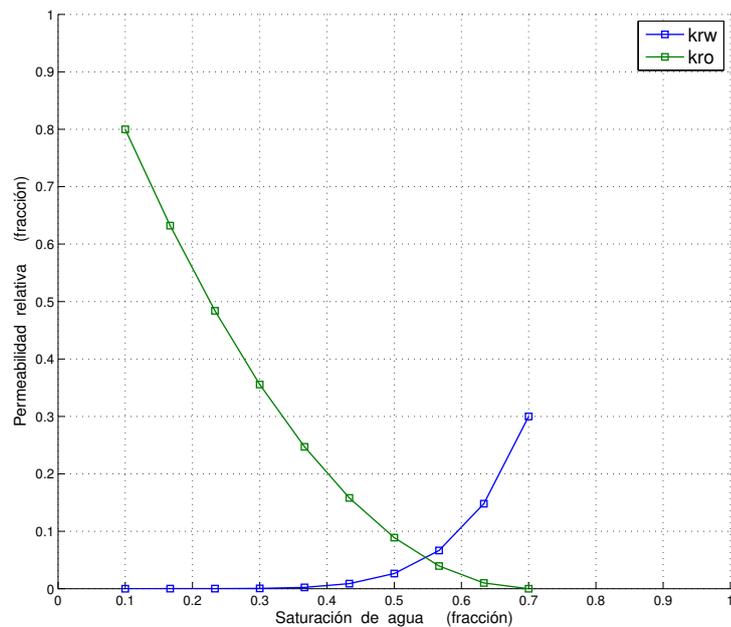


Figura 5.1: Permeabilidades relativas, mojabilidad al agua

Sistema mojado por agua			
k_{ro}		k_{rw}	
S_{or}	0.3	S_{wc}	0.1
n_o	2	n_w	6
$k_{ro,wc}$	0.8	$k_{rw,or}$	0.3

Tabla 5.1: Parámetros utilizados para la obtención de las curvas de permeabilidades relativas, mojabilidad al agua

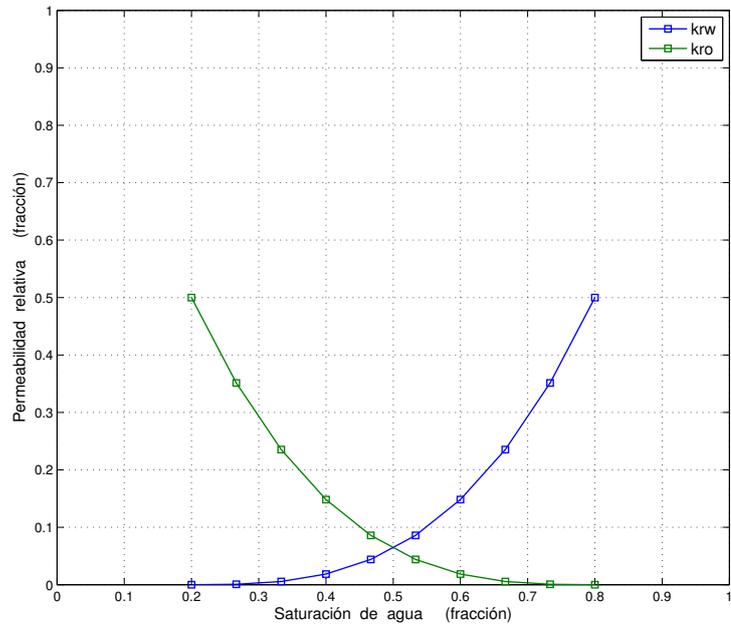


Figura 5.2: Permeabilidades relativas, mojabilidad intermedia

Sistema con mojabilidad intermedia			
k_{ro}		k_{rw}	
S_{or}	0.2	S_{wc}	0.2
n_o	3	n_w	3
$k_{ro,wc}$	0.5	$k_{rw,or}$	0.5

Tabla 5.2: Parámetros utilizados para la obtención de las curvas de permeabilidades relativas: mojabilidad intermedia

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

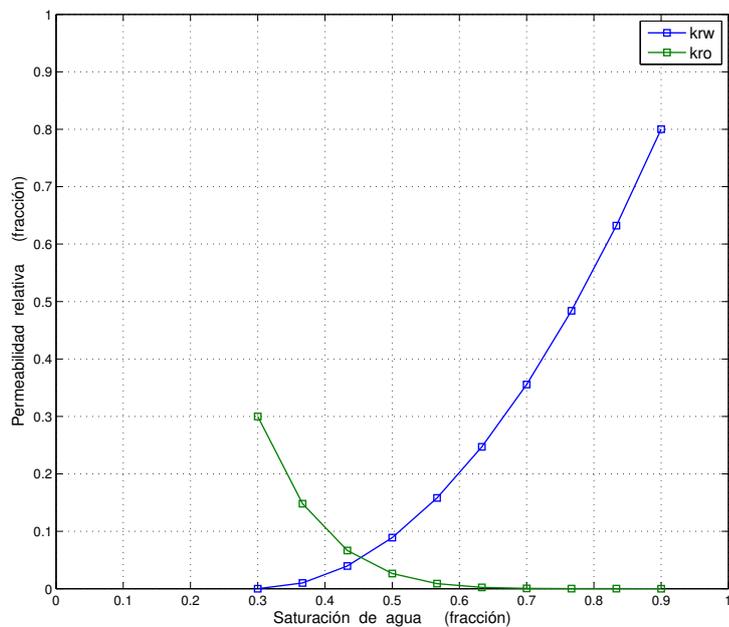


Figura 5.3: Permeabilidades relativas, mojabilidad al aceite

Sistema mojado por aceite			
k_{ro}		k_{rw}	
S_{or}	0.1	S_{wc}	0.3
n_o	6	n_w	2
$k_{ro,wc}$	0.3	$k_{rw,or}$	0.8

Tabla 5.3: Parámetros utilizados para la obtención de las curvas de permeabilidades relativas, mojabilidad al aceite

Las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3 muestran de manera resumida los valores de los parámetros que fueron utilizados dentro del modelo del exponente de Corey para la obtención de las curvas de permeabilidades relativas para las fases aceite y agua que se muestran en las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3, mismas que se utilizan para las simulaciones de este trabajo.

5.1. Caso 0. Validación del Modelo

Los resultados para el modelo de simulación propuesto se muestran en las Figuras 5.4 y 5.5 en donde se puede apreciar que los resultados obtenidos con el simulador construido se ajustan al comportamiento de los resultados que arroja el simulador comercial. Para este modelo se consideró un yacimiento de dos dimensiones de sección transversal en el plano $x - y$, simétrico, esto es $Lx = Ly$, con igual número de nodos (15) en x y en y , con diferentes transmisibilidades para cada dirección de flujo en cada una las celdas al cargar un set de datos de permeabilidades. Se considera un pozo inyector de agua a gasto constante de 300 BPD en la celda (1, 1, 1) y un pozo productor de aceite a presión de fondo fluyendo (Pwf, por sus siglas en inglés) constante de 2900 psi, en la celda (15, 15, 1). La presión inicial de todo el yacimiento es de 3000 psi y el tiempo total de la simulación es de 365 días. La información necesaria para la inicialización de la simulación se muestra en el Apéndice C.1.

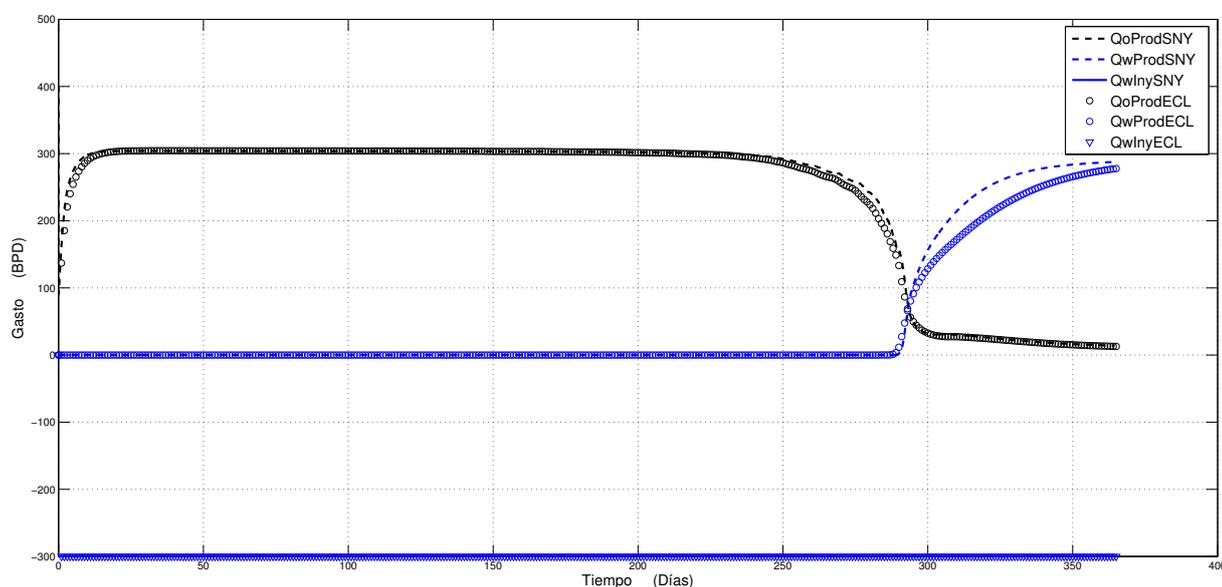


Figura 5.4: Comparación entre SNY y Eclipse, Gastos

Analizando la Figura 5.4 en la cual se grafican los gastos de ambos pozos vs tiempo, y como es de esperarse el gasto de aceite del pozo productor es variable ya que opera a

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Pwf constante. A tiempos muy cortos, aproximadamente un día, el gasto de aceite disminuye de 400 a poco menos de 100 BPD para evitar que la Pwf caiga. Posteriormente se observa que la producción de aceite comienza a incrementarse hasta que se logra estabilizar y prácticamente se mantiene constante a 300 BPD, esto se debe a que se comienza a sentir el efecto que causa el pozo inyector como represionamiento. Después de aproximadamente 240 días el gasto de aceite comienza a disminuir nuevamente, debido a que el aceite móvil contenido dentro del yacimiento comienza a agotarse. Después de 285 días el frente de agua del pozo inyector logra irrumpir dentro del pozo productor, es por eso que a partir de ese punto el agua comienza a ser producida en mayor cantidad conforme transcurre el tiempo y el gasto de aceite ya no cae tan abruptamente. El gasto de agua del pozo inyector, como se establece desde un inicio, permanece constante a 300 BPD durante todo el tiempo de simulación.

Con respecto a la Figura 5.5 en donde se grafica la Pwf del pozo productor y del pozo inyector vs tiempo, es conveniente analizar y entender primeramente a que se debe el comportamiento de la Pwf del pozo inyector, ya que éste opera a gasto constante de 300 BPD y por lo tanto su Pwf es variable.

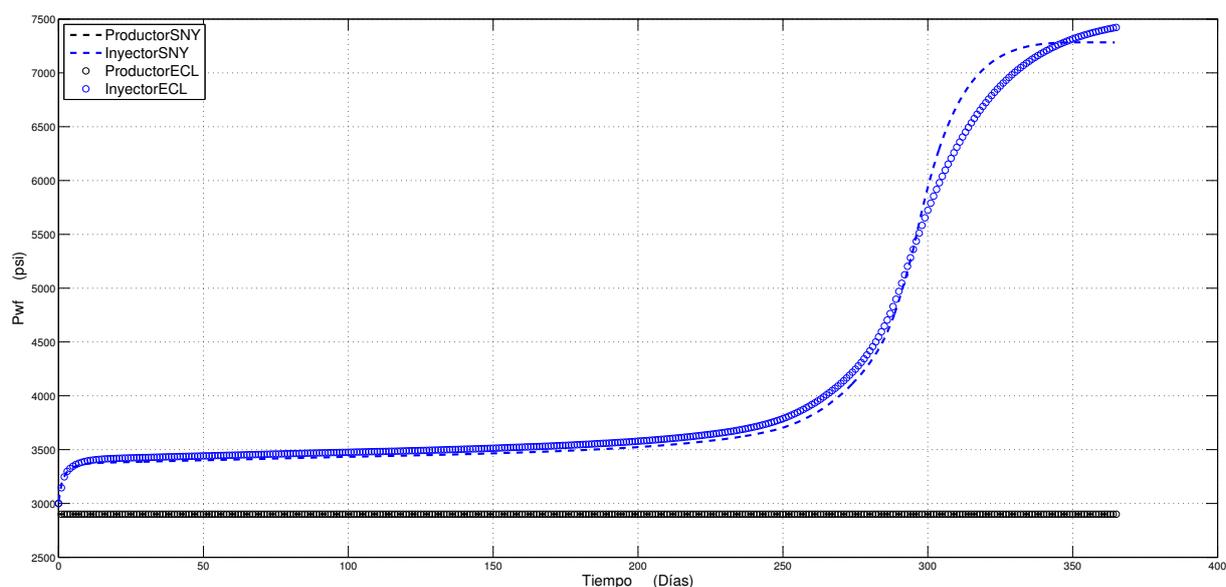


Figura 5.5: Comparación entre SNY y Eclipse, Pwf

Como el yacimiento es mojado por agua, la movilidad del agua es menor con respecto a la movilidad del aceite, ahora bien, si conforme transcurre el tiempo más cantidad de agua es inyectada dentro del yacimiento, se requiere de mayor presión para desplazar al aceite hacia el pozo productor ya que también el agua inyectada tiene que ser desplazada, es por esta razón que la Pwf en todo momento mantiene una tendencia ascendente.

Además, de forma gradual se va alcanzando la saturación de aceite residual dentro de todo el yacimiento, así cuando la producción de aceite comienza a disminuir a aproximadamente 240 días, la Pwf del pozo inyector comienza a incrementarse más rápidamente debido a que el aceite residual no puede ser producido y limita aún más la movilidad del agua.

Cuando prácticamente todo el yacimiento se encuentra inundado por agua, la Pwf del pozo inyector comienza a estabilizarse a un valor muy grande de presión, aproximadamente 7400 psi ya que se alcanza un equilibrio entre lo que se inyecta, lo que se desplaza dentro del medio poroso y lo que se produce. Como se establece desde un inicio la Pwf del pozo productor se mantiene constante a un valor de 2900 psi durante el todo el tiempo de simulación.

La malla de simulación de las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8 muestra la distribución de la saturación de agua dentro del yacimiento al inicio, después de un periodo de 182 días y al final del tiempo de simulación, respectivamente. La escala para los valores de la saturación de agua tiene un rango de 0.25 a 0.70, que corresponden a los valores de saturación de agua inicial S_{wi} y a $1 - S_{or}$ que es el valor máximo que puede alcanzar la saturación de agua.

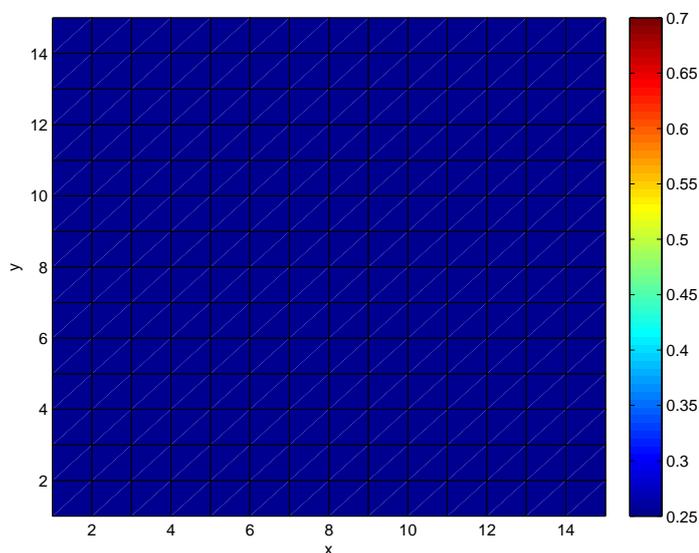


Figura 5.6: Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 0 días

La Figura 5.6 muestra la distribución de saturación de agua a las condiciones iniciales, esto es, al tiempo cero. Una vez que inicia la simulación y los pozos entran en operación, la saturación de agua en el yacimiento cerca del pozo inyector aumenta muy

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

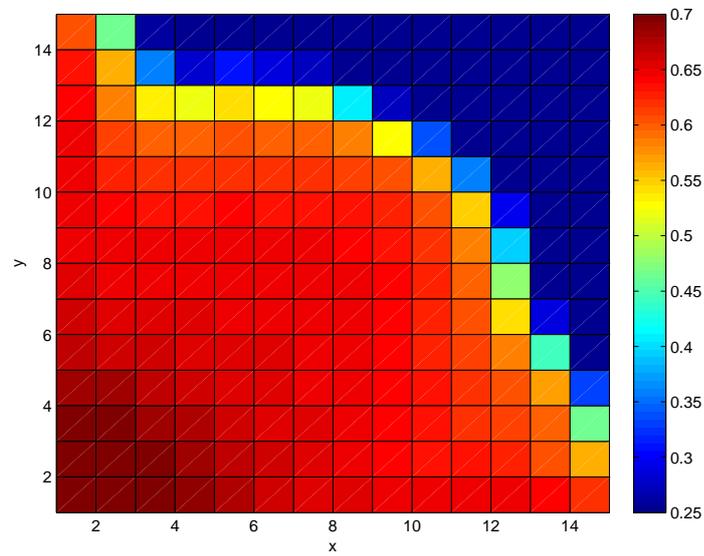


Figura 5.7: Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 182 días

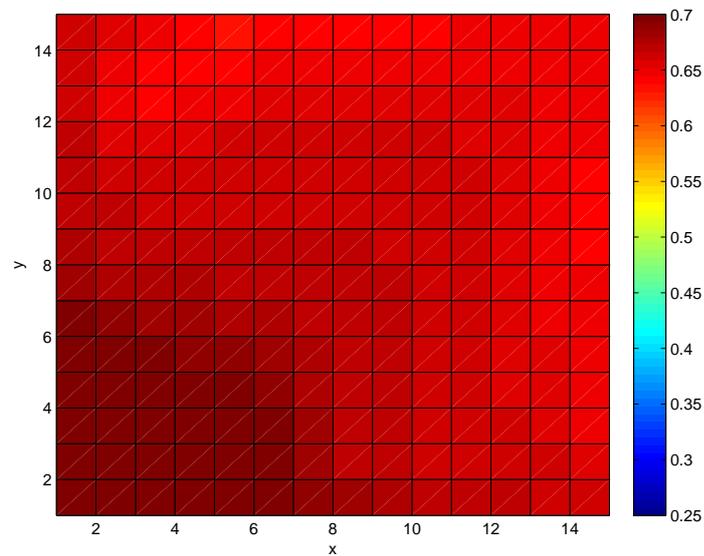


Figura 5.8: Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 365 días

rápidamente, debido al agua que es inyectada, lo que indica que el aceite está siendo desplazado hacia el pozo productor. A un tiempo de 182 días se puede observar que la saturación de agua en las celdas cercanas al pozo productor aún mantienen el valor de saturación de agua inicial, $S_{wi} = 0.25$, Figura 5.7, lo que quiere decir que el frente de agua aún no llega a esa zona y por lo tanto se continúa produciendo solamente aceite. Al final de los 600 días de simulación, la saturación de agua es muy alta en todo el yacimiento e incluso en una gran zona cercana al pozo inyector ya se ha alcanzado el valor máximo, $S_w = 0.70$, Figura 5.8.

5.2. Caso 1: Yacimiento con Mojabilidad al Agua

El modelo de simulación utilizado para este caso toma como base el que fue elaborado para la validación del modelo numérico del caso 0, con la diferencia de que aquí se utiliza una permeabilidad constante de 200 mD para todo el yacimiento, además de que se utilizan las curvas de permeabilidades relativas que se muestran en la Figura 5.1, las cuales corresponden a un yacimiento ideal con mojabilidad al agua. Un pozo productor a P_{wf} constante de 2900 psi en la celda (15,15,1) y un pozo inyector de agua a un gasto constante de 300 BPD en la celda (1,1,1), ambos operando durante todo el tiempo de simulación que es de 600 días.

La malla de simulación que se muestra en la Figura 5.9 presenta la distribución que tiene la saturación de agua al inicio de la simulación, con un valor de 0.10 para todas las celdas, después de 290 días se puede ver como el frente de agua ha avanzado ya que la saturación de agua es muy alta cerca del pozo inyector, lo que indica que el agua ha ido desplazando al aceite, a este tiempo la irrupción de agua aún no se presenta ya que la saturación de agua en las cercanías del pozo productor sigue siendo de 0.10, Figura 5.10. El volumen original de aceite es de 194,761 Bls. y un valor máximo recuperable de 136,333 Bls. o sea un $Fr_{max} = 70\%$ ya que la saturación de aceite remanente tiene un valor de 0.30.

En la Figura 5.11 se puede apreciar que la irrupción de agua se presenta cuando se da el cambio de pendiente en la curva de producción acumulada de aceite ya que en ese momento comienza a ser producida el agua. Estos hechos se dan después de que transcurre un tiempo de aproximadamente 400 días. Posterior a este tiempo se continúa con la inyección de agua, durante 200 días más, para visualizar que la recuperación adicional de aceite posterior a la irrupción es mínima con un valor de 2.89% con respecto al volumen original.

En la Figura 5.11 también es graficada la curva de relación agua-aceite, que mantiene un valor de cero antes de la irrupción de agua, ya que la saturación de agua inicial es igual al valor de la saturación de agua irreductible. La relación agua-aceite comienza a crecer muy rápidamente una vez que el frente de agua alcanza al pozo productor, ya que

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

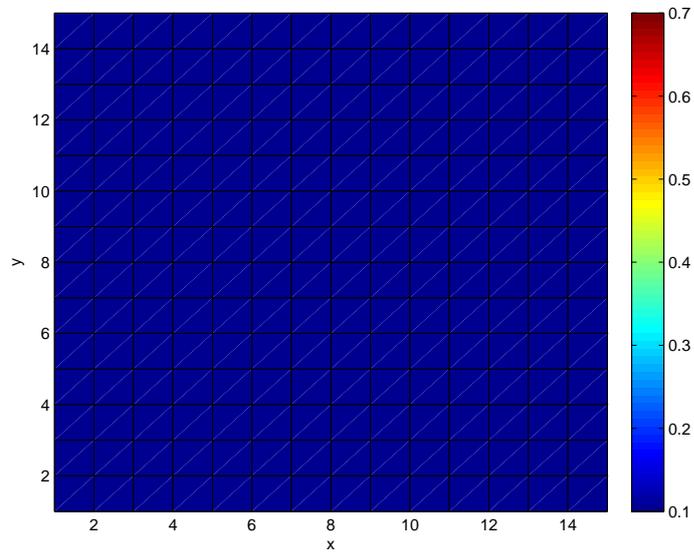


Figura 5.9: Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 0 días

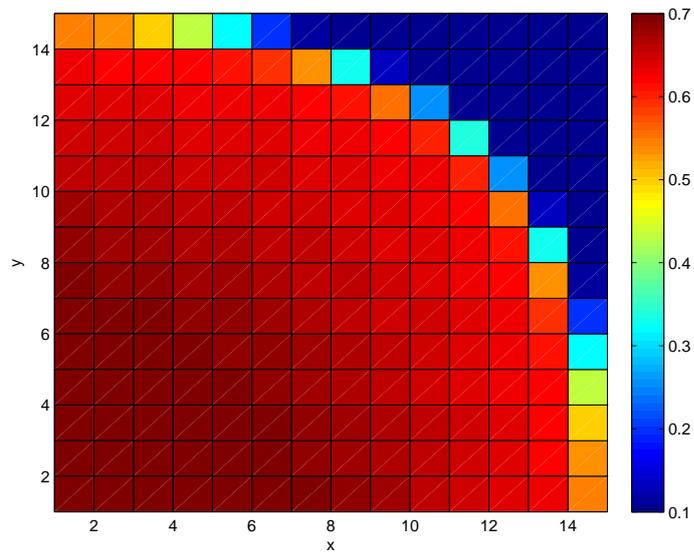


Figura 5.10: Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 290 días

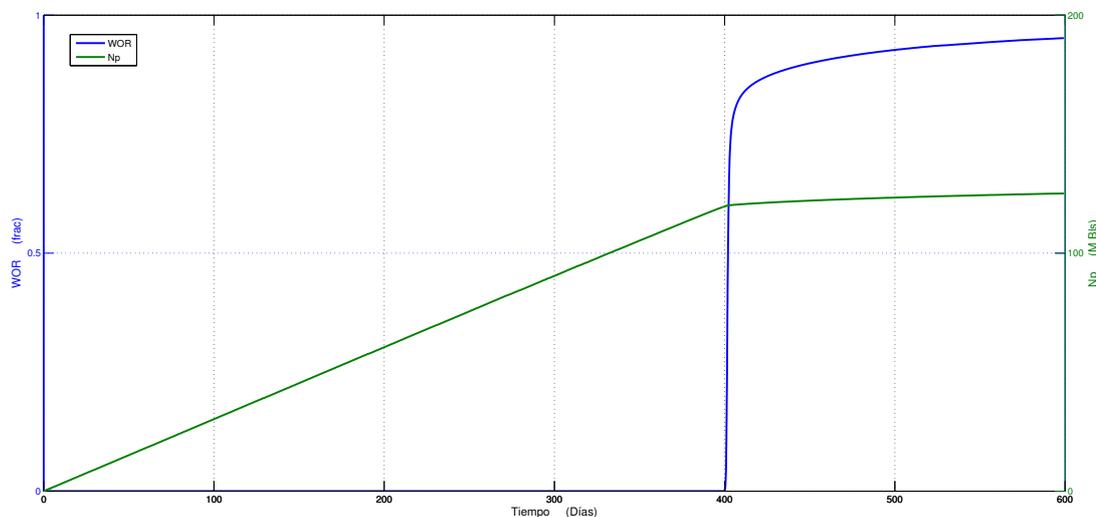


Figura 5.11: Producción acumulada, relación agua-aceite, mojabilidad al agua

prácticamente todo el aceite móvil (91.76 %) dentro del yacimiento ha sido producido y para mantener la condición del pozo productor de 2900 psi, el agua que es inyectada comienza a ser producida en mayor cantidad.

Al final de los 600 días de simulación se tiene un factor de recuperación del 64.23 %, cabe hacer notar que a los 400 días ya se tenía un factor de recuperación del 61.34 %.

5.3. Caso 2: Yacimiento con Mojabilidad Intermedia

El modelo de simulación es prácticamente el mismo que el modelo del caso anterior, con la única diferencia de que aquí se cambiaron las curvas de permeabilidades relativas, Figura 5.2, para que la mojabilidad de la formación sea intermedia. Para estas condiciones de mojabilidad el volumen original de aceite es de 173,121 Bls., con un valor máximo recuperable de 138,497 Bls. o sea un $Fr_{max} = 80\%$ debido a las condiciones que impone la saturación de aceite residual.

La malla de simulación presentada en la Figura 5.12 contiene la distribución de saturación de agua en todo el yacimiento al inicio de la simulación, con un valor de 0.20. En la Figura 5.13 se puede observar que después de haber transcurrido un tiempo de 290 días, la saturación de agua es mucho mayor a la saturación inicial en todas las celdas, a excepción de la última celda la cual corresponde a la localización el pozo productor, ahí la saturación de agua recientemente ha comenzado a incrementarse y por consiguiente muy pronto se presentará la irrupción de agua.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

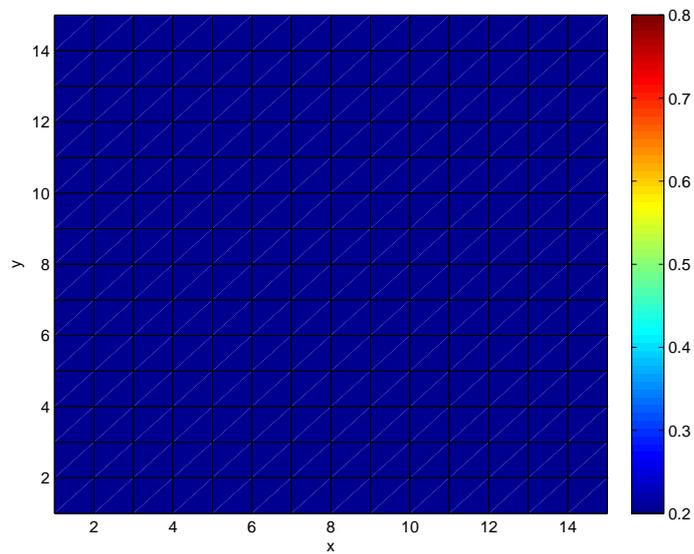


Figura 5.12: Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 0 días

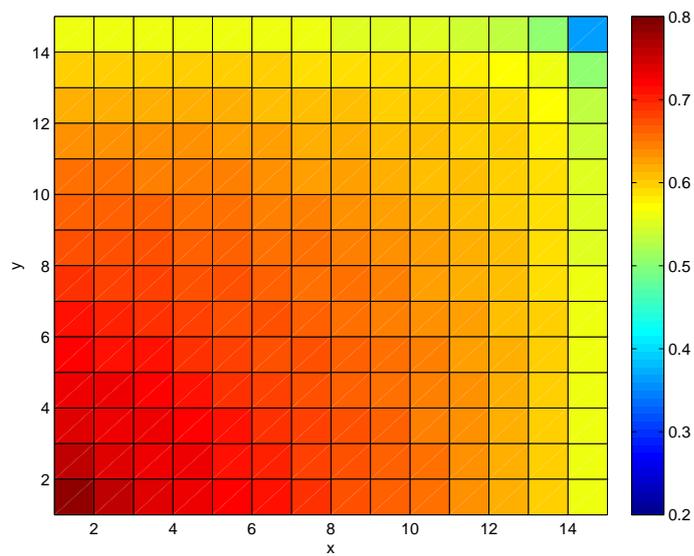


Figura 5.13: Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 290 días

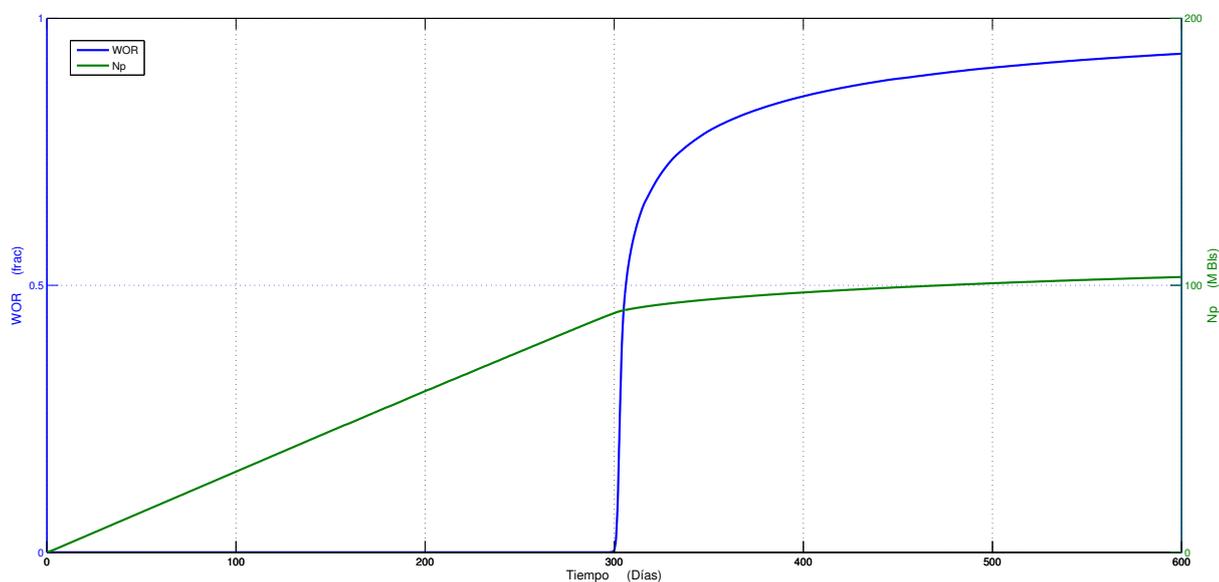


Figura 5.14: Producción acumulada, relación agua-aceite, mojabilidad intermedia

En la Figura 5.14 se puede apreciar que la irrupción de agua se presenta a un tiempo aproximado de 296 días después de haber iniciado la simulación, recuperándose hasta este punto una cantidad de aceite de 88,571 Bls. lo que equivale a un 51.16 % del volumen original, posterior a este punto se continúa con la inyección de agua hasta que se alcanza el tiempo total de simulación de 600 días. La recuperación adicional de aceite posterior a la irrupción alcanza un valor del 8.41 %.

La relación agua-aceite incrementa rápidamente, y el aceite aún puede seguirse produciendo después de la irrupción pero con un corte de agua muy elevado. Debido a que la inyección de agua se está llevando a cabo, la relación agua-aceite forzosamente tiene que incrementar conforme transcurre el tiempo.

Cuando se presenta la irrupción de agua dentro del pozo productor se tiene un factor de recuperación del 51.16 %, y al final de los 600 días de simulación se tiene un factor de recuperación del 59.57 %.

5.4. Caso 3: Yacimiento con Mojabilidad al Aceite

Para este caso al igual que los dos casos anteriores el modelo de simulación únicamente difiere en la utilización de las curvas de permeabilidades relativas, ya que aquí se utilizan las curvas que se presentan en la Figura 5.3, para que de esta manera la

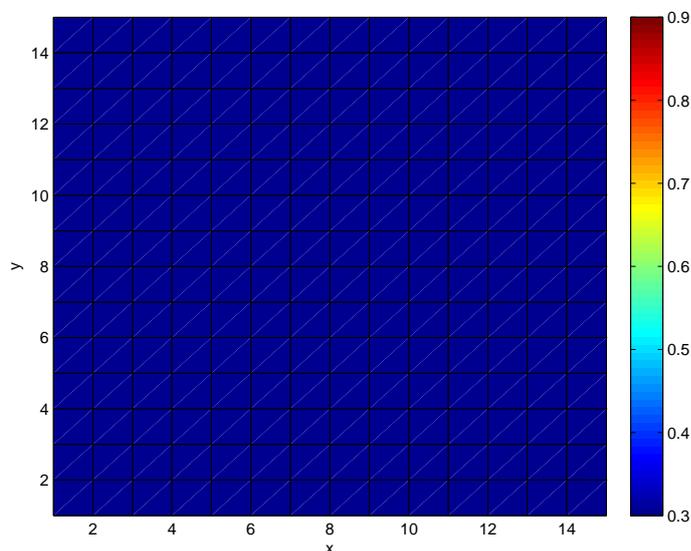


Figura 5.15: Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 0 días

formación sea mojada por aceite. El volumen original de aceite es de 151,481 Bls. y un valor máximo recuperable de 136,333 Bls. o sea un $Fr_{max} = 90\%$ ya que para este caso la saturación de aceite residual mantiene un valor de únicamente 0.10.

La malla de simulación, Figura 5.15, muestra la distribución de saturación de agua al inicio de la simulación, con un valor de 0.30 para cada una de las 225 celdas que discretizan al yacimiento. Después de 290 días la saturación de agua ya se ha incrementado en todas las celdas, lo que indica que a ese tiempo el agua ya logró irrumpir dentro del pozo productor, Figura 5.16. A pesar de la irrupción de agua, aún hay aceite móvil contenido dentro del yacimiento debido a que la saturación de agua no es muy alta.

Como se puede apreciar en la Figura 5.17, la irrupción de agua se presenta aproximadamente a los 152 días después de haber iniciado la simulación, a este punto la recuperación de aceite tiene un factor del 29.82%, es un tiempo y un factor de recuperación relativamente pequeños para que se tenga agua dentro del pozo productor, esto se debe a que el agua fluye mejor y más libremente dentro de los poros grandes de la roca.

Posterior a la irrupción se continúa con la inyección de agua para mostrar que el aceite se puede seguir recuperando, al inicio con un moderado corte de agua pero conforme transcurre el tiempo la relación agua-aceite se ve incrementada. El incremento en la relación agua-aceite se presenta de una manera no tan abrupta, lo cual da la pauta

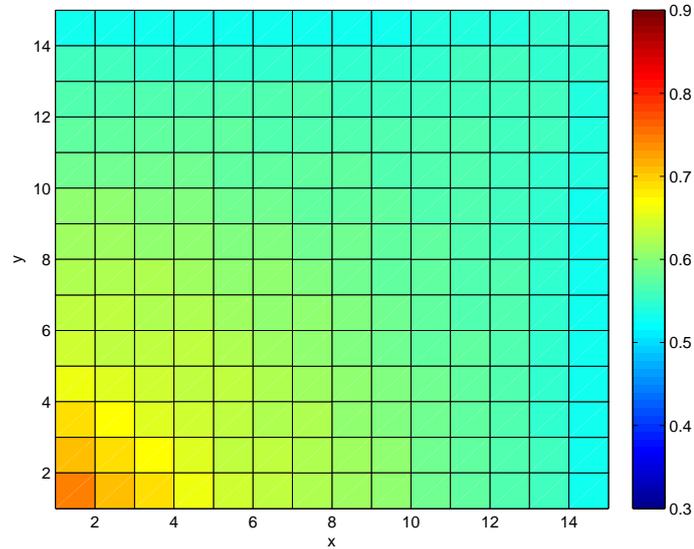


Figura 5.16: Malla de simulación, distribución de saturación de agua, 290 días

para que el aceite siga produciéndose en pequeñas cantidades junto con el agua.

Para este caso la recuperación adicional de aceite posterior a la irrupción es de 22,000 Bls. esto equivale al 14.52% del volumen original, este valor es considerablemente grande. Al final de los 600 días de simulación se tiene un factor de recuperación del 44.34%, cabe hacer notar que a los 152 días únicamente se tenía un factor de recuperación del 29.82%.

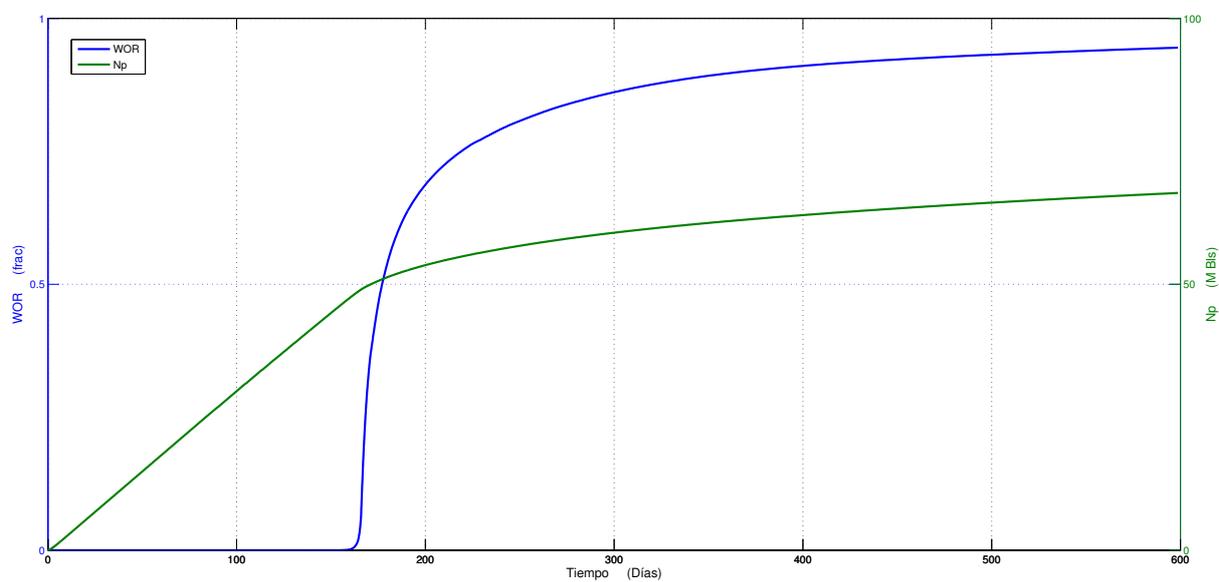


Figura 5.17: Producción acumulada, relación agua-aceite, mojabilidad al aceite

Conclusiones

- Una vez que se construyó el simulador numérico de yacimientos bifásico bajo el esquema Totalmente Implícito, se procedió a la validación del mismo utilizando el simulador comercial Eclipse 100, se considera que el funcionamiento del simulador construido es correcto ya que los resultados obtenidos concuerdan con los resultados que arroja el simulador comercial.
- Validado el simulador se manipuló para presentar una aplicación práctica. Se elaboraron y corrieron tres modelos de simulación con diferentes mojabilidades: mojabilidad al agua, mojabilidad intermedia y mojabilidad al aceite. De esta manera se pudo analizar el comportamiento del flujo bifásico dentro del yacimiento, por consiguiente, el efecto directo que tiene en la recuperación de aceite.
- Las condiciones de operación para los tres casos son idénticas, para que se obtuvieran resultados concretos sobre el efecto que tiene la mojabilidad en la recuperación total de aceite, los tres casos se simularon a 600 días.
- Para los tres casos se tiene que la mayor cantidad de aceite producido se obtiene antes de la irrupción de agua, Figura 6.1. Es conveniente analizar lo que pasa con la recuperación de aceite posterior a la irrupción, ya que la inyección de agua continúa, para los tres casos, a un gasto constante de 300 BPD hasta que se alcanza el tiempo total de simulación.

Mojabilidad al agua. Después de la irrupción, la recuperación es exageradamente mínima, tan solo un 2.89 % adicional durante aproximadamente 200 días.

Mojabilidad intermedia. La recuperación adicional de aceite posterior a la irrupción es baja, con un factor del 8.41 % durante 304 días de inyección de agua.

6. CONCLUSIONES

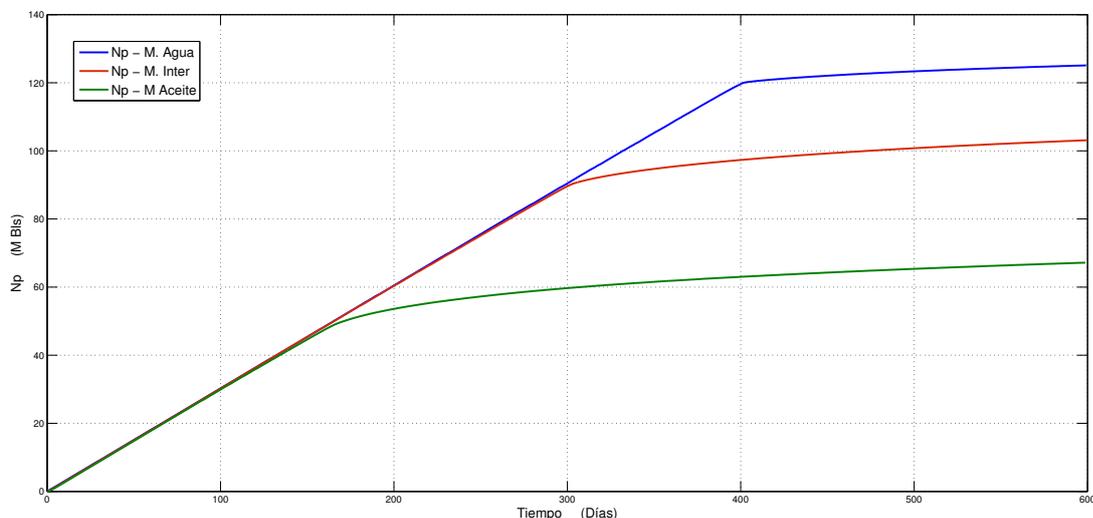


Figura 6.1: Producción acumulada

Mojabilidad al aceite. La producción adicional de aceite es moderada con un valor del 14.52 % pero el tiempo que se llevó para la obtención de este factor es de aproximadamente 450 días.

- Aunque para los tres casos el volumen poroso es el mismo, se tienen diferentes valores de volumen original de aceite, debido a la saturación de agua inicial que marcan las curvas de permeabilidades relativas para cada caso: $S_{wi,MW} = 0.10$, $S_{wi,MI} = 0.20$, $S_{wi,MO} = 0.30$.
- De manera análoga, al punto anterior, la saturación de aceite residual, S_{or} , es distinta para cada caso, $S_{or,MW} = 0.30$, $S_{or,MI} = 0.20$, $S_{or,MO} = 0.10$, lo cual provoca que el factor de recuperación de aceite máximo, Fr_{max} , sea distinto para cada uno de los tres casos, $Fr_{max,MW} = 70\%$, $Fr_{max,MI} = 80\%$, $Fr_{max,MO} = 90\%$.
- Analizando las curvas de relación agua-aceite, o lo que es lo mismo el corte de agua dentro del pozo productor para cada uno de los casos, podemos ver en la Figura 6.2 que al final de los 600 días todos los cortes de agua prácticamente se emparejan, pero lo que hay que analizar es el tiempo al que se presenta y el tiempo que tarda en alcanzar un valor grande, se considera un corte de agua de 0.60.

Mojabilidad al agua. La irrupción de agua ocurre a un tiempo de 400 días, es el mayor tiempo dentro de los tres casos, ya que como el agua se localiza en las paredes de la roca como una fina película y el aceite dentro de los poros

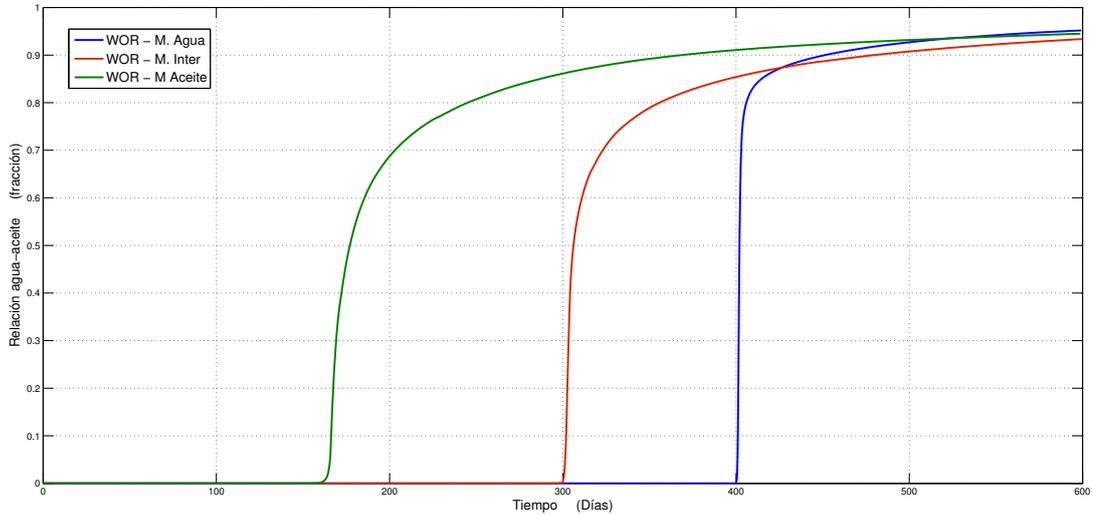


Figura 6.2: Relación agua-aceite

grandes de la roca, el agua que es inyectada tiene que desplazar al aceite dentro de la roca pero debido a la baja movilidad del agua con respecto al aceite, se hace un barrido muy eficiente del aceite. Una vez que el frente de agua alcanza al pozo productor, la relación agua-aceite crece de una manera casi instantánea, ya que con una alta saturación de agua su movilidad supera a la del aceite, al tiempo que la saturación de aceite remanente es alcanzada, de esta manera a los pocos días (tres) ya se tiene un corte de agua del 0.60.

Mojabilidad intermedia. Para el segundo caso la irrupción ocurre a un tiempo de 296 días, el tiempo es intermedio con respecto a los otros dos casos. El aceite fluye mejor que el agua dentro del medio poroso al inicio de la inyección, pero debido a que la inyección es constante, conforme transcurre el tiempo la saturación de agua cada vez es mayor hasta que su movilidad supera a la del aceite y una vez que alcanza al pozo productor, la relación agua-aceite crece de una manera no tan rápida como en el Caso 1 pero de igual manera alcanza un valor muy grande en poco tiempo, 0.60 a los 10 días.

Mojabilidad al aceite. La irrupción se presenta a un tiempo de 152 días, es el menor de los tiempos considerando los dos casos anteriores. Debido a la localización del agua dentro de los poros grandes de la roca y a la inyección constante de agua es que se van creando caminos de flujo, y en poco tiempo el agua inyectada alcanza al pozo productor. El aceite que se produce posterior a la irrupción es por que se van arrastrando poco a poco pequeñas cantidades de aceite que son desprendidas de la masa total que se encuentra adherida a las paredes de la roca y dentro de los poros más pequeños.

6. CONCLUSIONES

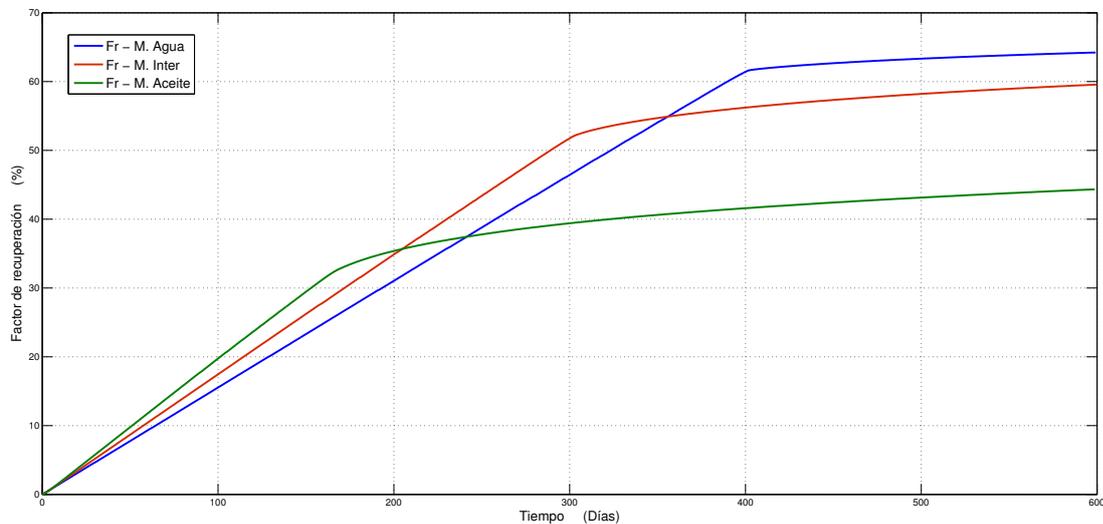


Figura 6.3: Factor de recuperación

El corte de agua presenta una tendencia creciente, menor que los dos casos anteriores, alcanzando un valor de 0.60 en 30 días.

- Es evidente que si se continúa con la inyección de agua por mucho más tiempo, se podría obtener para los tres casos su recuperación máxima, ya que son casos ideales. Aquí con el simulador nada nos limita pero en realidad habrían que tomarse en cuenta restricciones tanto técnicas como económicas.
- La Figura 6.3 en donde se grafica el factor de recuperación vs tiempo, solamente muestra como la mayor recuperación de aceite se tiene en la formación que es mojada por agua ($Fr = 64\%$), la formación con mojabilidad intermedia tiene un factor de recuperación medio ($Fr = 59\%$), y por último la formación que es mojada por aceite presenta la menor recuperación de aceite ($Fr = 44\%$). La tendencia del factor de recuperación es muy similar a la tendencia de la producción acumulada.

Elementos de la Matriz Jacobiana

A.1. ACEITE

FUNCIÓN DE RESIDUO DEL ACEITE:

$$F_{o_{ijk}}^{n+1} = \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{ijk}^{n+1} + [b_o q_o]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi (1 - S_w) b_o]_{ijk} \quad (\text{A.1})$$

A. ELEMENTOS DE LA MATRIZ JACOBIANA

Expansión de la función de residuo del Aceite:

$$\begin{aligned}
 F_{o_{ijk}}^{n+1} = & \left[\begin{array}{c} \underbrace{T_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}}_{T_{ox2}} \underbrace{\left(p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - (\gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2},jk} \right)}_{Pot_{ox2}} \\ \underbrace{T_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}}_{T_{ox1}} \underbrace{\left(p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - (\gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2},jk} \right)}_{Pot_{ox1}} \\ \underbrace{T_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}}}_{T_{oy2}} \underbrace{\left(p_{o_{i,j+1,k}} - p_{o_{ijk}} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right)}_{Pot_{oy2}} \\ \underbrace{T_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}}}_{T_{oy1}} \underbrace{\left(p_{o_{ijk}} - p_{o_{i,j-1,k}} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right)}_{Pot_{oy1}} \\ \underbrace{T_{o_{ij,k+\frac{1}{2}}}}_{T_{oz2}} \underbrace{\left(p_{o_{ij,k+1}} - p_{o_{ijk}} - (\gamma_o \Delta D)_{ij,k+\frac{1}{2}} \right)}_{Pot_{oz2}} \\ \underbrace{T_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}}}_{T_{oz1}} \underbrace{\left(p_{o_{ijk}} - p_{o_{ij,k-1}} - (\gamma_o \Delta D)_{ij,k-\frac{1}{2}} \right)}_{Pot_{oz1}} \end{array} \right]^{n+1} \left. \begin{array}{l} - \\ + \\ - \\ + \\ - \\ + \end{array} \right\} \text{T. Flujo} \\
 \underbrace{\left[b_o q_o \right]_{ijk}^{n+1}}_{\text{T. Fuente}} - \frac{V p_{ijk}}{\Delta t} \underbrace{\left\{ \left[[1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] [b_o (1 - S_w)]^{n+1} \right] - [b_o (1 - S_w)]^n \right\}}_{\text{T. Acumulación}} \Big|_{ijk} = 0
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la presión de aceite en el nodo ijk :

$$\frac{\partial F_{o,ijk}}{\partial p_{o,ijk}} = \frac{\partial \{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o,ijk}} + \frac{\partial \{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o,ijk}} + \frac{\partial \{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o,ijk}} \tag{A.3}$$

Término de Flujo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o,ijk}} = & \left(T_{ox2} \frac{\partial Pot_{ox2}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{ox2} \frac{\partial T_{ox2}}{\partial p_{o,ijk}} \right) - \left(T_{ox1} \frac{\partial Pot_{ox1}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{ox1} \frac{\partial T_{ox1}}{\partial p_{o,ijk}} \right) + \\ & \left(T_{oy2} \frac{\partial Pot_{oy2}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{oy2} \frac{\partial T_{oy2}}{\partial p_{o,ijk}} \right) - \left(T_{oy1} \frac{\partial Pot_{oy1}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{oy1} \frac{\partial T_{oy1}}{\partial p_{o,ijk}} \right) + \\ & \left(T_{oz2} \frac{\partial Pot_{oz2}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{oz2} \frac{\partial T_{oz2}}{\partial p_{o,ijk}} \right) - \left(T_{oz1} \frac{\partial Pot_{oz1}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{oz1} \frac{\partial T_{oz1}}{\partial p_{o,ijk}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Término Fuente:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o,ijk}} = \left\{ b_o \frac{\partial q_o}{\partial p_o} + q_o \frac{\partial b_o}{\partial p_o} \right\}_{ijk} \quad (\text{A.5})$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o,ijk}} = & - \frac{Vr_{ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial p_{o,ijk}} \Delta_t [\phi b_o (1 - S_w)]_{ijk} \\ = & - \frac{Vr_{ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial p_{o,ijk}} [(\phi\{1 - S_w\}b_o)^{n+1} - (\phi\{1 - S_w\}b_o)^n] \\ = & - \frac{Vp_{ijk}}{\Delta t} \left\{ (1 - S_w) \left[1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \frac{\partial b_o}{\partial p_o} + b_o C_r \right\}_{ijk} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Derivadas de los Potenciales del aceite con respecto a la presión de aceite:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{ox2}}{\partial p_{o_{ijk}}} = & \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - \gamma_{o_{i+\frac{1}{2},jk}} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \right] \\ = & -1 - \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{ox1}}{\partial p_{o_{ijk}}} = & \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - \gamma_{o_{i-\frac{1}{2},jk}} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \right] \\ = & 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Pot_{oy2}}{\partial p_{o_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{ij+1,k}} - p_{o_{ijk}} - \gamma_{o_{ij+\frac{1}{2},k}} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \right] \\ &= -1 - \frac{1}{2} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}}\end{aligned}\quad (A.9)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Pot_{oy1}}{\partial p_{o_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{ij-1,k}} - \gamma_{o_{ij-\frac{1}{2},k}} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}}\end{aligned}\quad (A.10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Pot_{oz2}}{\partial p_{o_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk+1}} - p_{o_{ijk}} - \gamma_{o_{ijk+\frac{1}{2}}} (D_{ijk+1} - D_{ijk}) \right] \\ &= -1 - \frac{1}{2} (D_{ijk+1} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}}\end{aligned}\quad (A.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Pot_{oz1}}{\partial p_{o_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{ijk-1}} - \gamma_{o_{ijk-\frac{1}{2}}} (D_{ijk} - D_{ijk-1}) \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ijk-1}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}}\end{aligned}\quad (A.12)$$

Derivadas de las Transmisibilidades del aceite con respecto a la presión de aceite:

La transmisibilidad está definida como:

$$T_{ox2} = T_{o_{i+\frac{1}{2},jk}} = (Fg\lambda_o)_{i+\frac{1}{2},jk}$$

$$T_{ox1} = T_{o_{i-\frac{1}{2},jk}} = (Fg\lambda_o)_{i-\frac{1}{2},jk}$$

$$T_{oy2} = T_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}} = (Fg\lambda_o)_{i,j+\frac{1}{2},k}$$

$$T_{oy1} = T_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}} = (Fg\lambda_o)_{i,j-\frac{1}{2},k}$$

$$T_{oz2} = T_{o_{i,j,k+\frac{1}{2}}} = (Fg\lambda_o)_{i,j,k+\frac{1}{2}}$$

$$T_{oz1} = T_{o_{i,j,k-\frac{1}{2}}} = (Fg\lambda_o)_{i,j,k-\frac{1}{2}}$$

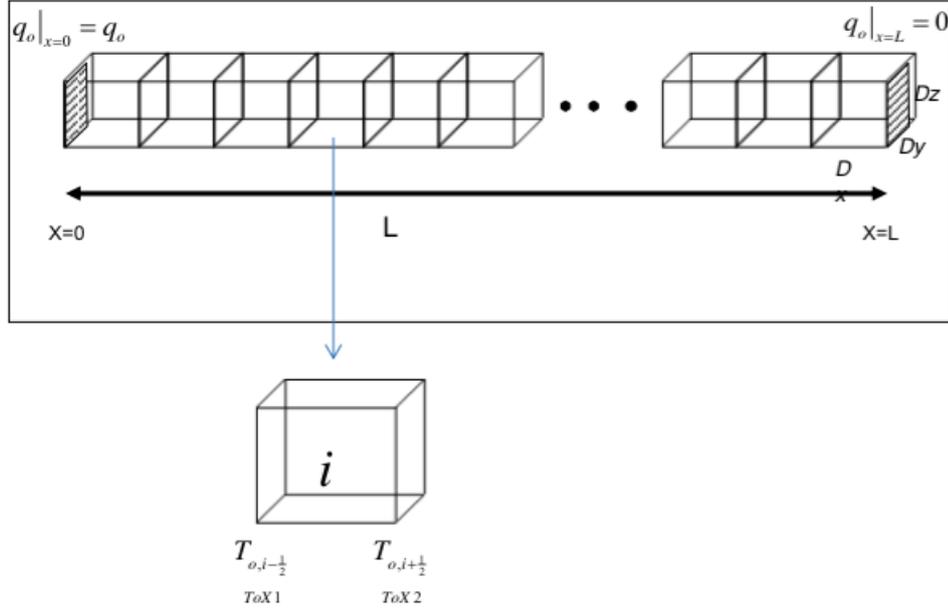


Figura A.1: Representación de las transmisibilidades en el nodo i

Donde el factor geométrico para la dirección en x es $Fg = \frac{Ax}{\Delta x}$, para la dirección en y es $Fg = \frac{Ay}{\Delta y}$, y para la dirección en z es $Fg = \frac{Az}{\Delta z}$.

Y Donde la movilidad es: $\lambda_o = \frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} = \frac{kk_{ro} b_o}{\mu_o}$

De la ec. A.2 se observa que para cada celda se definen dos transmisibilidades para cada dirección, esto es:

Las transmisibilidades, $T_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}$, $T_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}$, $T_{o_{ij+\frac{1}{2},k}}$, $T_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}}$, $T_{o_{i,j,k+\frac{1}{2}}}$ y $T_{o_{i,j,k-\frac{1}{2}}}$ se evaluarán **corriente arriba**, es decir, se evaluarán a las condiciones de la celda de mayor potencial. Considerar la Figura A.1 para la dirección x .

Si $Pot_{ox2} = p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - \gamma_{o_{i+\frac{1}{2},jk}} (D_{i+1,jk} - D_{ijk})$ es mayor o igual a cero, entonces la transmisibilidad $T_{ox2} = T_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}$ será considerada como $T_{ox2} \Rightarrow T_{o_{i+1,jk}}$ y la derivada con respecto a $p_{o_{i+1,jk}}$ **existirá**. La derivada con respecto a $p_{o_{ijk}}$ será cero. Nótese que NO se está considerando la derivada con respecto a $p_{o_{i-1,jk}}$ debido a que esta transmisibilidad, $T_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}$, únicamente depende de $p_{o_{i+1,jk}}$, $p_{o_{ijk}}$ siendo congruente con el concepto de corriente arriba.

A. ELEMENTOS DE LA MATRIZ JACOBIANA

Similarmente, si $Pot_{ox1} = p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - \gamma_{o_{i-\frac{1}{2},jk}} (D_{ijk} - D_{i-1,jk})$ es mayor o igual a cero, entonces la transmisibilidad $T_{ox1} = T_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}$ será considerada como $T_{ox1} \Rightarrow T_{o_{ijk}}$ y la derivada con respecto a $p_{o_{ijk}}$ **existirá**. Por lo tanto la derivada con respecto a $p_{o_{i-1,jk}}$ será cero. Nótese que NO se está considerando la derivada con respecto a $p_{o_{i+1,jk}}$ debido a que esta transmisibilidad, $T_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}$, únicamente depende de $p_{o_{ijk}}$, $p_{o_{i-1,jk}}$ siendo congruente con el concepto de corriente arriba.

En forma general la derivada de la transmisibilidad con respecto a la presión de aceite es la siguiente:

$$T_o = F_g \lambda_o \Rightarrow \frac{\partial T_o}{\partial p_o} = F_g k k_{ro} \frac{\partial (b_o / \mu_o)}{\partial p_o} \quad (A.13)$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial p_o} = F_g k k_{ro} \frac{\mu_o \frac{\partial b_o}{\partial p_o} - b_o \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o}}{\mu_o^2} \quad (A.14)$$

$$= F_g k k_{ro} \frac{\mu_o b_o}{\mu_o^2} \left(\frac{1}{b_o} \frac{\partial b_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) \quad (A.15)$$

$$= F_g \frac{k k_{ro} b_o}{\mu_o} \left(\frac{1}{b_o} \frac{\partial b_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) \quad (A.16)$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial p_o} = T_o \left\{ \frac{1}{b_o} \frac{\partial b_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right\} \quad (A.17)$$

Derivadas de Transmisibilidades del aceite con respecto a la presión de aceite:

$$\frac{\partial T_{ox2}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{o_{i+\frac{1}{2},jk}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial b_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial \mu_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \right\} \quad (A.18)$$

$$\frac{\partial T_{ox1}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{o_{i-\frac{1}{2},jk}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial b_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial \mu_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \right\} \quad (A.19)$$

$$\frac{\partial T_{oy2}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial b_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{o_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial \mu_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \right\} \quad (A.20)$$

$$\frac{\partial T_{oy1}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial b_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{o_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial \mu_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \right\} \quad (A.21)$$

$$\frac{\partial T_{oz2}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{o_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{i,j,k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial b_{o_{i,j,k+\frac{1}{2}}}}{\partial p_{o_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{o_{i,j,k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial \mu_{o_{i,j,k+\frac{1}{2}}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \right\} \quad (A.22)$$

$$\frac{\partial T_{oz1}}{\partial p_{oijk}} = T_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial b_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial p_{oijk}} - \frac{1}{\mu_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial \mu_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial p_{oijk}} \right\} \quad (A.23)$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de agua en el nodo en ijk :

$$\frac{\partial F_{o,ijk}}{\partial S_{w,ijk}} = \frac{\partial \{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w,ijk}} + \frac{\partial \{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_{w,ijk}} + \frac{\partial \{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w,ijk}} \quad (A.24)$$

Término de flujo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w,ijk}} = & \left(Pot_{ox2} \frac{\partial T_{ox2}}{\partial S_{w,ijk}} \right) - \left(Pot_{ox1} \frac{\partial T_{ox1}}{\partial S_{w,ijk}} \right) + \\ & \left(Pot_{oy2} \frac{\partial T_{oy2}}{\partial S_{w,ijk}} \right) - \left(Pot_{oy1} \frac{\partial T_{oy1}}{\partial S_{w,ijk}} \right) + \\ & \left(Pot_{oz2} \frac{\partial T_{oz2}}{\partial S_{w,ijk}} \right) - \left(Pot_{oz1} \frac{\partial T_{oz1}}{\partial S_{w,ijk}} \right) \end{aligned} \quad (A.25)$$

Término fuente:

$$\frac{\partial \{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_w} = 0 \quad (A.26)$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w,ijk}} &= -\frac{Vr_{ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial S_{w,ijk}} \Delta t [\phi [(1 - S_w) b_o]]_{ijk} \\ &= -\frac{Vr_{ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial S_{w,ijk}} [(\phi \{1 - S_w\} b_o)^{n+1} - (\phi \{1 - S_w\} b_o)^n]_{ijk} \\ &= \frac{Vp_{ijk}}{\Delta t} \{ [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] b_o^{n+1} \}_{ijk} \end{aligned} \quad (A.27)$$

A. ELEMENTOS DE LA MATRIZ JACOBIANA

Derivadas de los Potenciales del aceite con respecto a la saturación de agua:

$$\frac{\partial Pot_{ox2}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - \gamma_{o_{i+\frac{1}{2},jk}} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \right] = 0 \quad (A.28)$$

$$\frac{\partial Pot_{ox1}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - \gamma_{o_{i-\frac{1}{2},jk}} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \right] = 0 \quad (A.29)$$

$$\frac{\partial Pot_{oy2}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{ij+1,k}} - p_{o_{ijk}} - \gamma_{o_{ij+\frac{1}{2},k}} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \right] = 0 \quad (A.30)$$

$$\frac{\partial Pot_{oy1}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{ij-1,k}} - \gamma_{o_{ij-\frac{1}{2},k}} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \right] = 0 \quad (A.31)$$

$$\frac{\partial Pot_{oz2}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk+1}} - p_{o_{ijk}} - \gamma_{o_{ijk+\frac{1}{2}}} (D_{ijk+1} - D_{ijk}) \right] = 0 \quad (A.32)$$

$$\frac{\partial Pot_{oz1}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{ijk-1}} - \gamma_{o_{ijk-\frac{1}{2}}} (D_{ijk} - D_{ijk-1}) \right] = 0 \quad (A.33)$$

Derivadas de las Transmisibilidades del aceite con respecto a la saturación de agua:

En forma general la derivada de la transmisibilidad es la siguiente:

$$\frac{\partial T_o}{\partial S_w} = \left\{ \frac{A}{\Delta x} \frac{kb_o}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right\} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right\} \quad (A.34)$$

Derivadas de la Transmisibilidad del aceite con respecto a la saturación de agua:

$$\frac{\partial T_{ox2}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{i+\frac{1}{2},jk} \frac{\partial k_{ro_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (A.35)$$

$$\frac{\partial T_{ox1}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{i-\frac{1}{2},jk} \frac{\partial k_{ro_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (A.36)$$

$$\frac{\partial T_{oy2}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{i,j+\frac{1}{2},k} \frac{\partial k_{ro_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial T_{oy1}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{i,j-\frac{1}{2},k} \frac{\partial k_{ro_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial T_{oz2}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{\partial k_{ro_{i,j,k+\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial T_{oz1}}{\partial S_{w_{ijk}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{i,j,k-\frac{1}{2}} \frac{\partial k_{ro_{i,j,k-\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (\text{A.40})$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la presión de aceite en el nodo $i-1,j,k$:

$$\frac{\partial \{T. \text{ Fuente} \}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Acum.} \}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Flujo} \}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = - \left(T_{ox1} \frac{\partial Pot_{ox1}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} + Pot_{ox1} \frac{\partial T_{ox1}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} \right) \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial Pot_{ox2}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial Pot_{ox1}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = -1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{o_{i-1,jk}}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial T_{ox2}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial T_{ox1}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = T_{o_{i-\frac{1}{2},jk}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial b_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} - \frac{1}{\mu_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial \mu_{o_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} \right\} \quad (\text{A.47})$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de agua en el nodo $i-1,j,k$:

$$\frac{\partial \{T. \text{ Fuente} \}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = - \left(Pot_{ox1} \frac{\partial T_{ox1}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} \right) \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{\partial Pot_{ox2}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial Pot_{ox1}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial T_{ox2}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{\partial T_{ox1}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{i-\frac{1}{2},jk} \frac{\partial k_{ro_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} \quad (\text{A.54})$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la presión de aceite en el nodo $i,j-1,k$:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} = - \left(T_{oy1} \frac{\partial Pot_{oy1}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} + Pot_{oy1} \frac{\partial T_{oy1}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} \right) \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{\partial Pot_{oy2}}{\partial p_{o_{ij-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{\partial Pot_{oy1}}{\partial p_{o_{ij-1,k}}} = -1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \frac{\partial \gamma_{o_{ij-1,k}}}{\partial p_{o_{ij-1,k}}} \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\partial T_{oy2}}{\partial p_{o_{ij-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{\partial T_{oy1}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} = T_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial b_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} - \frac{1}{\mu_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial \mu_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} \right\} \quad (\text{A.61})$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de agua en el nodo $i,j-1,k$:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = - \left(Pot_{ox1} \frac{\partial T_{oy1}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} \right) \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{\partial Pot_{oy2}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{\partial Pot_{oy1}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.66})$$

$$\frac{\partial T_{oy2}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.67})$$

$$\frac{\partial T_{oy1}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{i,j-\frac{1}{2},k} \frac{\partial k_{ro_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} \quad (\text{A.68})$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la presión de aceite en el nodo $i,j,k-1$:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o_{i,j,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o_{i,j,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.70})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o_{i,j,k-1}}} = - \left(T_{oz1} \frac{\partial Pot_{oz1}}{\partial p_{o_{i,j,k-1}}} + Pot_{oz1} \frac{\partial T_{oz1}}{\partial p_{o_{i,j,k-1}}} \right) \quad (\text{A.71})$$

$$\frac{\partial Pot_{oz2}}{\partial p_{o_{i,j,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.72})$$

$$\frac{\partial Pot_{oz1}}{\partial p_{o_{i,j,k-1}}} = -1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ijk-1}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk-1}}}{\partial p_{o_{i,j,k-1}}} \quad (\text{A.73})$$

$$\frac{\partial T_{oz2}}{\partial p_{o_{i,j,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{\partial T_{oz1}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} = T_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial b_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} - \frac{1}{\mu_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial \mu_{o_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} \right\} \quad (\text{A.75})$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de agua en el nodo $i,j,k-1$:

$$\frac{\partial \{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.76})$$

$$\frac{\partial \{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.77})$$

$$\frac{\partial \{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = - \left(Pot_{oz1} \frac{\partial T_{oz1}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} \right) \quad (\text{A.78})$$

$$\frac{\partial Pot_{oz2}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.79})$$

$$\frac{\partial Pot_{oz1}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.80})$$

$$\frac{\partial T_{oz2}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{\partial T_{oz1}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{ij,k-\frac{1}{2}} \frac{\partial k_{ro_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} \quad (\text{A.82})$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la presión de aceite en el nodo $i+1,j,k$:

$$\frac{\partial \{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{\partial \{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.84})$$

$$\frac{\partial \{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = \left(T_{ox2} \frac{\partial Pot_{ox2}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} + Pot_{ox2} \frac{\partial T_{ox2}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} \right) \quad (\text{A.85})$$

$$\frac{\partial Pot_{ox2}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = 1 - \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{o_{i+1,jk}}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{\partial Pot_{ox1}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.87})$$

$$\frac{\partial T_{ox2}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = T_{o_{i+\frac{1}{2},jk}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial b_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} - \frac{1}{\mu_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial \mu_{o_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} \right\} \quad (A.88)$$

$$\frac{\partial T_{ox1}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = 0 \quad (A.89)$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de agua en el nodo $i+1,j,k$:

$$\frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = 0 \quad (A.90)$$

$$\frac{\partial \{T. Acum.\}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = 0 \quad (A.91)$$

$$\frac{\partial \{T. Flujo\}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = \left(Pot_{ox2} \frac{\partial T_{ox2}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} \right) \quad (A.92)$$

$$\frac{\partial Pot_{ox2}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = 0 \quad (A.93)$$

$$\frac{\partial Pot_{ox1}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = 0 \quad (A.94)$$

$$\frac{\partial T_{ox2}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{i+\frac{1}{2},jk} \frac{\partial k_{ro_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} \quad (A.95)$$

$$\frac{\partial T_{ox1}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = 0 \quad (A.96)$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la presión de aceite en el nodo $i,j+1,k$:

$$\frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.97)$$

$$\frac{\partial \{T. Acum.\}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.98)$$

$$\frac{\partial \{T. Flujo\}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = \left(T_{oy2} \frac{\partial Pot_{oy2}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} + Pot_{oy2} \frac{\partial T_{oy2}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} \right) \quad (A.99)$$

$$\frac{\partial Pot_{oy2}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = 1 - \frac{1}{2} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{o_{ij+1,k}}}{\partial p_{o_{ij+1,k}}} \quad (A.100)$$

$$\frac{\partial Pot_{oy1}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.101)$$

$$\frac{\partial T_{oy2}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = T_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial b_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} - \frac{1}{\mu_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial \mu_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} \right\} \quad (A.102)$$

$$\frac{\partial T_{oy1}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.103)$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de agua en el nodo $i,j+1,k$:

$$\frac{\partial \{T. \text{ Fuente} \}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.104)$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Acum.} \}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.105)$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Flujo} \}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = \left(Pot_{oy2} \frac{\partial T_{oy2}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} \right) \quad (A.106)$$

$$\frac{\partial Pot_{oy2}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.107)$$

$$\frac{\partial Pot_{oy1}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.108)$$

$$\frac{\partial T_{oy2}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{i,j+\frac{1}{2},k} \frac{\partial k_{ro_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} \quad (A.109)$$

$$\frac{\partial T_{oy1}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.110)$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la presión de aceite en el nodo $i,j,k+1$:

$$\frac{\partial \{T. \text{ Fuente} \}}{\partial p_{o_{i,j,k+1}}} = 0 \quad (A.111)$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Acum.} \}}{\partial p_{o_{i,j,k+1}}} = 0 \quad (A.112)$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = \left(T_{oz2} \frac{\partial Pot_{oz2}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} + Pot_{oz2} \frac{\partial T_{oz2}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} \right) \quad (\text{A.113})$$

$$\frac{\partial Pot_{oz2}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk+1} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk+1}}}{\partial p_{o_{ijk+1}}} \quad (\text{A.114})$$

$$\frac{\partial Pot_{oz1}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.115})$$

$$\frac{\partial T_{oz2}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = T_{o_{ij,k+\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{1}{b_{o_{ij,k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial b_{o_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} - \frac{1}{\mu_{o_{ij,k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial \mu_{o_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} \right\} \quad (\text{A.116})$$

$$\frac{\partial T_{oz1}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.117})$$

Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de agua en el nodo $i,j,k+1$:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.118})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.119})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = \left(Pot_{oz2} \frac{\partial T_{oz2}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} \right) \quad (\text{A.120})$$

$$\frac{\partial Pot_{oz2}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.121})$$

$$\frac{\partial Pot_{oz1}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.122})$$

$$\frac{\partial T_{oz2}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = \left\{ Fg \frac{kb_o}{\mu_o} \right\}_{ij,k+\frac{1}{2}} \frac{\partial k_{ro_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} \quad (\text{A.123})$$

$$\frac{\partial T_{oz1}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.124})$$

A.2. AGUA

FUNCIÓN DE RESIDUO DEL AGUA:

$$F_{w_{ijk}}^{n+1} = \Delta [T_w (\Delta p_w - \gamma_w \Delta D)]_{ijk}^{n+1} + [b_w q_w]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta t [\phi S_w b_w]_{ijk} \quad (\text{A.125})$$

Expansión de la función de residuos del Agua:

$$F_{w_{ijk}}^{n+1} = \left. \begin{array}{l} \left[\underbrace{T_{w_{i+\frac{1}{2},jk}}}_{T_{wx2}} \left(\underbrace{p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{i+1,jk}} + P_{cwo_{ijk}} - (\gamma_w \Delta D)_{i+\frac{1}{2},jk}}}_{Pot_{wx2}} \right) \right]_{n+1}^- \\ \left[\underbrace{T_{w_{i-\frac{1}{2},jk}}}_{T_{wx1}} \left(\underbrace{p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{i-1,jk}} - (\gamma_w \Delta D)_{i-\frac{1}{2},jk}}}_{Pot_{wx1}} \right) \right]_{n+1}^+ \\ \left[\underbrace{T_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}}}_{T_{wy2}} \left(\underbrace{p_{o_{i,j+1,k}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{i,j+1,k}} + P_{cwo_{ijk}} - (\gamma_w \Delta D)_{i,j+\frac{1}{2},k}}}_{Pot_{wy2}} \right) \right]_{n+1}^- \\ \left[\underbrace{T_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}}}_{T_{wy1}} \left(\underbrace{p_{o_{ijk}} - p_{o_{i,j-1,k}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{i,j-1,k}} - (\gamma_w \Delta D)_{i,j-\frac{1}{2},k}}}_{Pot_{wy1}} \right) \right]_{n+1}^+ \\ \left[\underbrace{T_{w_{i,j,k+\frac{1}{2}}}}_{T_{wz2}} \left(\underbrace{p_{o_{i,j,k+1}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{i,j,k+1}} + P_{cwo_{ijk}} - (\gamma_w \Delta D)_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \right) \right]_{n+1}^- \\ \left[\underbrace{T_{w_{i,j,k-\frac{1}{2}}}}_{T_{wz1}} \left(\underbrace{p_{o_{ijk}} - p_{o_{i,j,k-1}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{i,j,k-1}} - (\gamma_w \Delta D)_{i,j,k-\frac{1}{2}}} \right) \right]_{n+1}^+ \end{array} \right\} \text{T. Flujo}$$

$$\underbrace{\left[b_w q_w \right]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{p_{ijk}}}{\Delta t} \left\{ \left[[1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] (b_w S_w)^{n+1} \right] - (b_w S_w)^n \right\}}_{\text{T. Fuente} \quad \text{T. Acumulación}} \Bigg|_{ijk} = 0 \quad (\text{A.126})$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la presión de aceite en el nodo ijk :

$$\frac{\partial F_{w,ijk}}{\partial p_{o,ijk}} = \frac{\partial \{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o,ijk}} + \frac{\partial \{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o,ijk}} + \frac{\partial \{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o,ijk}} \quad (\text{A.127})$$

Término de Flujo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o,ijk}} &= \left(T_{wx2} \frac{\partial Pot_{wx2}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{wx2} \frac{\partial T_{wx2}}{\partial p_{o,ijk}} \right) - \left(T_{wx1} \frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{wx1} \frac{\partial T_{wx1}}{\partial p_{o,ijk}} \right) + \\
&\quad \left(T_{wy2} \frac{\partial Pot_{wy2}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{wy2} \frac{\partial T_{wy2}}{\partial p_{o,ijk}} \right) - \left(T_{wy1} \frac{\partial Pot_{wy1}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{wy1} \frac{\partial T_{wy1}}{\partial p_{o,ijk}} \right) + \\
&\quad \left(T_{wz2} \frac{\partial Pot_{wz2}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{wz2} \frac{\partial T_{wz2}}{\partial p_{o,ijk}} \right) - \left(T_{wz1} \frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial p_{o,ijk}} + Pot_{wz1} \frac{\partial T_{wz1}}{\partial p_{o,ijk}} \right)
\end{aligned} \tag{A.128}$$

Término Fuente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o,ijk}} &= \left\{ b_w \frac{\partial q_w}{\partial p_o} + q_w \frac{\partial b_w}{\partial p_o} \right\}_{ijk} \\
&= \left\{ b_w \frac{\partial q_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial p_o} + q_w \frac{\partial b_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial p_o} \right\}_{ijk} \\
&= \left\{ b_w \frac{\partial q_w}{\partial p_w} + q_w \frac{\partial b_w}{\partial p_w} \right\}_{ijk}
\end{aligned} \tag{A.129}$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o,ijk}} &= -\frac{Vr_{ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial p_{o,ijk}} \Delta_t (\phi b_w S_w)_{ijk} \\
&= -\frac{Vr_{ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial p_{o,ijk}} \left\{ [(\phi^n (1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) S_w b_w)^{n+1} - (\phi S_w b_w)^n)] \right\}_{ijk} \\
&= -\frac{Vp_{ijk}}{\Delta t} \left\{ S_w [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] \frac{\partial b_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial p_o} + b_w c_r \right\}_{ijk} \\
&= -\frac{Vp_{ijk}}{\Delta t} \left\{ S_w [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] \frac{\partial b_w}{\partial p_w} + b_w c_r \right\}_{ijk}
\end{aligned} \tag{A.130}$$

Derivadas de los Potenciales del agua con respecto a la presión de aceite:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Pot_{wx2}}{\partial p_{o_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{i+1,jk}} + P_{cwo_{ijk}} - \gamma_{w_{i+\frac{1}{2},jk}} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \right] \\
 &= -1 - \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \\
 &= -1 - \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}}
 \end{aligned} \tag{A.131}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial p_{o_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{i-1,jk}} - \gamma_{w_{i-\frac{1}{2},jk}} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}}
 \end{aligned} \tag{A.132}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Pot_{wy2}}{\partial p_{o_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{ij+1,k}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{ij+1,k}} + P_{cwo_{ijk}} - \gamma_{w_{ij+\frac{1}{2},k}} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \right] \\
 &= -1 - \frac{1}{2} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \\
 &= -1 - \frac{1}{2} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}}
 \end{aligned} \tag{A.133}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Pot_{wy1}}{\partial p_{o_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{ij-1,k}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{ij-1,k}} - \gamma_{w_{ij-\frac{1}{2},k}} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}}
 \end{aligned} \tag{A.134}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Pot_{wz2}}{\partial p_{o_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk+1}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{ijk+1}} + P_{cwo_{ijk}} - \gamma_{w_{ijk+\frac{1}{2}}} (D_{ijk+1} - D_{ijk}) \right] \\
&= -1 - \frac{1}{2} (D_{ijk+1} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \\
&= -1 - \frac{1}{2} (D_{ijk+1} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}}
\end{aligned} \tag{A.135}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial p_{o_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{ijk-1}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{ijk-1}} - \gamma_{w_{ijk-\frac{1}{2}}} (D_{ijk} - D_{ijk-1}) \right] \\
&= 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ijk-1}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial p_{o_{ijk}}} \\
&= 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ijk-1}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}}
\end{aligned} \tag{A.136}$$

Derivadas de las Transmisibilidades del agua con respecto a la presión de aceite:

Recordando que la transmisibilidad está definida como:

$$T_{wx2} = T_{w_{i+\frac{1}{2},jk}} = (Fg\lambda_w)_{i+\frac{1}{2},jk}$$

$$T_{wx1} = T_{w_{i-\frac{1}{2},jk}} = (Fg\lambda_w)_{i-\frac{1}{2},jk}$$

$$T_{wy2} = T_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}} = (Fg\lambda_w)_{i,j+\frac{1}{2},k}$$

$$T_{wy1} = T_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}} = (Fg\lambda_w)_{i,j-\frac{1}{2},k}$$

$$T_{wz2} = T_{w_{i,j,k+\frac{1}{2}}} = (Fg\lambda_w)_{i,j,k+\frac{1}{2}}$$

$$T_{wz1} = T_{w_{i,j,k-\frac{1}{2}}} = (Fg\lambda_w)_{i,j,k-\frac{1}{2}}$$

Donde el factor geométrico para la dirección en x es $Fg = \frac{Ax}{\Delta x}$, para la dirección en y es $Fg = \frac{Ay}{\Delta y}$, y para la dirección en z es $Fg = \frac{Az}{\Delta z}$. La movilidad es

$$\lambda_w = \frac{kk_{rw}}{\mu_w B_w} = \frac{kk_{rw} b_w}{\mu_w}$$

En forma general la derivada de la transmisibilidad es la siguiente:

$$T_w = F_g \lambda_w \Rightarrow \frac{\partial T_w}{\partial p_w} = F_g k k_{rw} \frac{\partial (b_w / \mu_w)}{\partial p_o} \quad (\text{A.137})$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial p_o} = F_g k k_{rw} \left(\frac{\mu_w \frac{\partial b_w}{\partial p_o} - b_w \frac{\partial \mu_w}{\partial p_o}}{\mu_o^2} \right) \quad (\text{A.138})$$

$$= F_g \frac{k k_w \mu_w b_w}{\mu_w^2} \left(\frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_o} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_o} \right) \quad (\text{A.139})$$

$$= T_w \left\{ \frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial p_o} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial p_o} \right\} \quad (\text{A.140})$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial p_o} = T_w \left\{ \frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_w} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right\} \quad (\text{A.141})$$

Derivadas de las Transmisibilidades del agua con respecto a la presión de aceite:

$$\frac{\partial T_{wx2}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{w_{i+\frac{1}{2},jk}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{i+\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial b_{w_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{w_{i+\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial \mu_{w_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right\} \quad (\text{A.142})$$

$$\frac{\partial T_{wx1}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{w_{i-\frac{1}{2},jk}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{i-\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial b_{w_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{w_{i-\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial \mu_{w_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right\} \quad (\text{A.143})$$

$$\frac{\partial T_{wy2}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial b_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{w_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial \mu_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right\} \quad (\text{A.144})$$

$$\frac{\partial T_{wy1}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial b_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{w_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial \mu_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right\} \quad (\text{A.145})$$

$$\frac{\partial T_{wz2}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial b_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial p_{w_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial \mu_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right\} \quad (\text{A.146})$$

$$\frac{\partial T_{wz1}}{\partial p_{o_{ijk}}} = T_{w_{ij,k-\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{ij,k-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial b_{w_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial p_{w_{ijk}}} - \frac{1}{\mu_{w_{ij,k-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial \mu_{w_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right\} \quad (\text{A.147})$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de agua en el nodo ijk :

$$\frac{\partial F_{w,ijk}}{\partial S_{w,ijk}} = \frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w,ijk}} + \frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_{w,ijk}} + \frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w,ijk}} \quad (\text{A.148})$$

Término de Flujo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w,ijk}} &= \left(T_{wx2} \frac{\partial Pot_{wx2}}{\partial S_{w,ijk}} + Pot_{wx2} \frac{\partial T_{wx2}}{\partial S_{w,ijk}} \right) - \left(T_{wx1} \frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial S_{w,ijk}} + Pot_{wx1} \frac{\partial T_{wx1}}{\partial S_{w,ijk}} \right) + \\ &\quad \left(T_{wy2} \frac{\partial Pot_{wy2}}{\partial S_{w,ijk}} + Pot_{wy2} \frac{\partial T_{wy2}}{\partial S_{w,ijk}} \right) - \left(T_{wy1} \frac{\partial Pot_{wy1}}{\partial S_{w,ijk}} + Pot_{wy1} \frac{\partial T_{wy1}}{\partial S_{w,ijk}} \right) + \\ &\quad \left(T_{wz2} \frac{\partial Pot_{wz2}}{\partial S_{w,ijk}} + Pot_{wz2} \frac{\partial T_{wz2}}{\partial S_{w,ijk}} \right) - \left(T_{wz1} \frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial S_{w,ijk}} + Pot_{wz1} \frac{\partial T_{wz1}}{\partial S_{w,ijk}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.149})$$

Término Fuente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_{w,ijk}} &= \left\{ b_w \frac{\partial q_w}{\partial S_w} + q_w \frac{\partial b_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial P_{cwo}} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right\}_{ijk} \\ &= \left\{ b_w \frac{\partial q_w}{\partial S_w} - q_w \frac{\partial b_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right\}_{ijk} \end{aligned} \quad (\text{A.150})$$

Note que la derivada de b_w es función de p_w . Se aplica la regla de la cadena.

$$\frac{\partial p_{w,ijk}}{\partial P_{cwo,ijk}} = -1 \quad (\text{A.151})$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w,ijk}} &= -\frac{Vr_{ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial S_{w,ijk}} [\Delta_t(\phi b_w S_w)]_{ijk} \\ &= -\frac{Vr_{ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial S_{w,ijk}} [(\phi S_w b_w)^{n+1} - (\phi S_w b_w)^n]_{ijk} \\ &= -\frac{Vp_{ijk}}{\Delta t} \left\{ [1 + c_r(p_o^{n+1} - p_o^n)] \left(b_w + S_w \frac{\partial b_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial P_{cwo}} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) \right\}_{ijk} \\ &= -\frac{Vp_{ijk}}{\Delta t} \left\{ [1 + c_r(p_o^{n+1} - p_o^n)] \left(b_w - S_w \frac{\partial b_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) \right\}_{ijk} \end{aligned} \quad (\text{A.152})$$

Derivadas de los Potenciales del agua con respecto a la saturación de agua:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Pot_{wx2}}{\partial S_{w_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{i+1,jk}} + P_{cwo_{ijk}} - \gamma_{w_{i+\frac{1}{2},jk}} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \right] \\
 &= \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} - \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial P_{cwo_{ijk}}} \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \\
 &= \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[1 + \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right]
 \end{aligned} \tag{A.153}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial S_{w_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{i-1,jk}} - \gamma_{w_{i-\frac{1}{2},jk}} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \right] \\
 &= -\frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial P_{cwo_{ijk}}} \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \\
 &= -\frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right]
 \end{aligned} \tag{A.154}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Pot_{wy2}}{\partial S_{w_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{ij+1,k}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{ij+1,k}} + P_{cwo_{ijk}} - \gamma_{w_{ij+\frac{1}{2},k}} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \right] \\
 &= \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} - \frac{1}{2} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial P_{cwo_{ijk}}} \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \\
 &= \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[1 + \frac{1}{2} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right]
 \end{aligned} \tag{A.155}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Pot_{wy1}}{\partial S_{w_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{ij-1,k}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{ij-1,k}} - \gamma_{w_{ij-\frac{1}{2},k}} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \right] \\
 &= -\frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial P_{cwo_{ijk}}} \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \\
 &= -\frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right]
 \end{aligned} \tag{A.156}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Pot_{wz2}}{\partial S_{w_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk+1}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{ijk+1}} + P_{cwo_{ijk}} - \gamma_{w_{ijk+\frac{1}{2}}} (D_{ijk+1} - D_{ijk}) \right] \\
&= \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} - \frac{1}{2} (D_{ijk+1} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial P_{cwo_{ijk}}} \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \\
&= \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[1 + \frac{1}{2} (D_{ijk+1} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right]
\end{aligned} \tag{A.157}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial S_{w_{ijk}}} &= \frac{\partial}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[p_{o_{ijk}} - p_{o_{ijk-1}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{ijk-1}} - \gamma_{w_{ijk-\frac{1}{2}}} (D_{ijk} - D_{ijk-1}) \right] \\
&= -\frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ijk-1}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} - \frac{\partial p_{w_{ijk}}}{\partial P_{cwo_{ijk}}} \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \\
&= -\frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \left[1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ijk-1}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{w_{ijk}}} \right]
\end{aligned} \tag{A.158}$$

Derivadas de las Transmisibilidades del agua con respecto a la saturación de agua:

En forma general la derivada de la transmisibilidad es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(T_w)}{\partial S_w} &= \Gamma \frac{\partial(\lambda_w)}{\partial S_w} = \Gamma \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{k_{rw} b_w}{\mu_w} \right) \\
\Gamma_{i \pm \frac{1}{2}} &= \left(K \frac{A}{\Delta x} \right)_{i \pm \frac{1}{2}} = \left(K \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right)_{i \pm \frac{1}{2}} \\
\lambda_{w, i \pm \frac{1}{2}} &= \left(\frac{k_{rw}}{B_w \mu_w} \right)_{i \pm \frac{1}{2}} = \left(\frac{k_{rw} b_w}{\mu_w} \right)_{i \pm \frac{1}{2}} \quad \text{donde } b_w = \frac{1}{B_w}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(T_w)}{\partial S_w} = T_w \left\{ \frac{1}{k_{rw}} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \left[\frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_w} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right] \frac{\partial p_w}{\partial P_{cwo}} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right\}^{-1}$$

Multiplcando por (-1), se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(T_w)}{\partial S_w} &= \Gamma \frac{\partial(\lambda_w)}{\partial S_w} = \Gamma \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{k_{rw} b_w}{\mu_w} \right) \\
\frac{\partial(T_w)}{\partial S_w} &= T_w \left\{ \frac{1}{k_{rw}} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \left[\frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} - \frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_w} \right] \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right\}
\end{aligned}$$

A. ELEMENTOS DE LA MATRIZ JACOBIANA

Esta forma de derivar la T_w es correcta; sin embargo, cuando la $S_w = S_{wc}$ existe una división entre cero ($k_{rw} = 0$). Para evitar esto, se deriva de otra manera. Esta se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(T_w)}{\partial S_w} &= \Gamma \frac{\partial(\lambda_w)}{\partial S_w} = \Gamma \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{k_{rw} b_w}{\mu_w} \right) = \Gamma \frac{\partial}{\partial S_w} \left\{ [k_{rw}] \left[\frac{b_w}{\mu_w} \right] \right\} \\ \frac{\partial(T_w)}{\partial S_w} &= \Gamma \left\{ k_{rw} \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right) + \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right) \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.159})$$

Desarrollando la primer derivada (cociente de dos funciones), se tiene lo siguiente,

$$\frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right) = \left(\frac{\mu_w \frac{\partial b_w}{\partial S_w} - b_w \frac{\partial \mu_w}{\partial S_w}}{\mu_w^2} \right) \quad (\text{A.160})$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente,

$$\frac{\partial(T_w)}{\partial S_w} = \Gamma \left\{ k_{rw} \left(\frac{\mu_w \frac{\partial b_w}{\partial S_w} - b_w \frac{\partial \mu_w}{\partial S_w}}{\mu_w^2} \right) + \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right) \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} \right\} \quad (\text{A.161})$$

Manipulando los términos, se tiene,

$$\frac{\partial(T_w)}{\partial S_w} = \frac{\Gamma k_{rw} b_w}{\mu_w} \left(\frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial S_w} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial S_w} \right) + \Gamma \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right) \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} \quad (\text{A.162})$$

Aplicando la regla de la cadena para la derivada $\frac{\partial^*}{\partial S_w}$, se tiene

$$\frac{\partial(T_w)}{\partial S_w} = \underbrace{\frac{\Gamma k_{rw} b_w}{\mu_w} \left(\frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_w} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right)}_{\frac{\partial T_w}{\partial p_o}} \frac{\partial p_w}{\partial P_{c_{wo}}} \frac{\partial P_{c_{wo}}}{\partial S_w} + \Gamma \left(\frac{b_w}{\mu_w} \right) \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} \quad (\text{A.163})$$

Nótese que el primer término es la $\frac{\partial T_w}{\partial p_o}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial(T_w)}{\partial S_w} = - \frac{\partial T_w}{\partial P_o} \frac{\partial P_{c_{wo}}}{\partial S_w} + \left(Fg \frac{k b_w}{\mu_w} \right) \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} \quad (\text{A.164})$$

El signo negativo afectando la derivada es debido a $\frac{\partial p_w}{\partial P_{c_{wo}}} = -1$

Derivadas de las Transmisibilidades del agua con respecto a la saturación de agua:

$$\frac{\partial T_{wx2}}{\partial S_{w_{ijk}}} = - \frac{\partial T_{wx2}}{\partial P_{o_{ijk}}} \frac{\partial P_{c_{wo_{i+\frac{1}{2},jk}}}}{\partial S_{w_{ijk}}} + \left(Fg \frac{k b_w}{\mu_w} \right)_{i+\frac{1}{2},jk} \frac{\partial k_{rw_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (\text{A.165})$$

$$\frac{\partial T_{wx1}}{\partial S_{w_{ijk}}} = -\frac{\partial T_{wx1}}{\partial P_{o_{ijk}}} \frac{\partial P c_{wo_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} + \left(Fg \frac{kb_w}{\mu_w} \right)_{i-\frac{1}{2},jk} \frac{\partial k_{rw_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (\text{A.166})$$

$$\frac{\partial T_{wy2}}{\partial S_{w_{ijk}}} = -\frac{\partial T_{wy2}}{\partial P_{o_{ijk}}} \frac{\partial P c_{wo_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{ijk}}} + \left(Fg \frac{kb_w}{\mu_w} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k} \frac{\partial k_{rw_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (\text{A.167})$$

$$\frac{\partial T_{wy1}}{\partial S_{w_{ijk}}} = -\frac{\partial T_{wy1}}{\partial P_{o_{ijk}}} \frac{\partial P c_{wo_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{ijk}}} + \left(Fg \frac{kb_w}{\mu_w} \right)_{i,j-\frac{1}{2},k} \frac{\partial k_{rw_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (\text{A.168})$$

$$\frac{\partial T_{wz2}}{\partial S_{w_{ijk}}} = -\frac{\partial T_{wz2}}{\partial P_{o_{ijk}}} \frac{\partial P c_{wo_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ijk}}} + \left(Fg \frac{kb_w}{\mu_w} \right)_{ij,k+\frac{1}{2}} \frac{\partial k_{rw_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (\text{A.169})$$

$$\frac{\partial T_{wz1}}{\partial S_{w_{ijk}}} = -\frac{\partial T_{wz1}}{\partial P_{o_{ijk}}} \frac{\partial P c_{wo_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ijk}}} + \left(Fg \frac{kb_w}{\mu_w} \right)_{ij,k-\frac{1}{2}} \frac{\partial k_{rw_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ijk}}} \quad (\text{A.170})$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la presión de aceite en el nodo $i-1,j,k$:

$$\frac{\partial \{T. \text{ Fuente} \}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.171})$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Acum.} \}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.172})$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Flujo} \}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = -\left(T_{wx1} \frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} + Pot_{wx1} \frac{\partial T_{wx1}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} \right) \quad (\text{A.173})$$

$$\frac{\partial Pot_{wx2}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.174})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} &= -1 - \frac{1}{2} \left(D_{ijk} - D_{i-1,jk} \right) \frac{\partial \gamma_{w_{i-1,jk}}}{\partial p_{w_{i-1,jk}}} \frac{\partial p_{w_{i-1,jk}}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} \\ &= -1 - \frac{1}{2} \left(D_{ijk} - D_{i-1,jk} \right) \frac{\partial \gamma_{w_{i-1,jk}}}{\partial p_{w_{i-1,jk}}} \end{aligned} \quad (\text{A.175})$$

$$\frac{\partial T_{wx2}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.176})$$

$$\frac{\partial T_{wx1}}{\partial p_{o_{i-1,jk}}} = T_{w_{i-\frac{1}{2},jk}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{i-\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial b_{w_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{w_{i-1,jk}}} - \frac{1}{\mu_{w_{i-\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial \mu_{w_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{w_{i-1,jk}}} \right\} \quad (\text{A.177})$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de agua en el nodo i-1,j,k:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.178})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{g_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.179})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = - \left(T_{wx1} \frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} + Pot_{wx1} \frac{\partial T_{wx1}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} \right) \quad (\text{A.180})$$

$$\frac{\partial Pot_{wx2}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.181})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} &= \frac{\partial P_{cwo_{i-1,jk}}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{w_{i-1,jk}}}{\partial p_{w_{i-1,jk}}} \frac{\partial p_{w_{i-1,jk}}}{\partial P_{cwo_{i-1,jk}}} \frac{\partial P_{cwo_{i-1,jk}}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} \\ &= \frac{\partial P_{cwo_{i-1,jk}}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} \left[1 + \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{w_{i-1,jk}}}{\partial p_{w_{i-1,jk}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.182})$$

$$\frac{\partial T_{wx2}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.183})$$

$$\frac{\partial T_{wx1}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} = - \frac{\partial T_{wx1}}{\partial P_{o_{i-1,jk}}} \frac{\partial P_{cwo_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} + \left(Fg \frac{kb_w}{\mu_w} \right)_{i-\frac{1}{2},jk} \frac{\partial k_{rw_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{i-1,jk}}} \quad (\text{A.184})$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la presión de aceite en el nodo i,j-1,k:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.185})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.186})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} = - \left(T_{wy1} \frac{\partial Pot_{wy1}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} + Pot_{wy1} \frac{\partial T_{wy1}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} \right) \quad (\text{A.187})$$

$$\frac{\partial Pot_{wy2}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (\text{A.188})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Pot_{wy1}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} &= -1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \frac{\partial \gamma_{w_{ij-1,k}}}{\partial p_{w_{ij-1,k}}} \frac{\partial p_{w_{ij-1,k}}}{\partial p_{o_{ij-1,k}}} \\ &= -1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \frac{\partial \gamma_{w_{ij-1,k}}}{\partial p_{w_{ij-1,k}}}\end{aligned}\quad (A.189)$$

$$\frac{\partial T_{wy2}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (A.190)$$

$$\frac{\partial T_{wy1}}{\partial p_{o_{i,j-1,k}}} = T_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial b_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{w_{i,j-1,k}}} - \frac{1}{\mu_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial \mu_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{w_{i,j-1,k}}} \right\} \quad (A.191)$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de agua en el nodo $i,j-1,k$:

$$\frac{\partial \{T. \text{ Fuente} \}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (A.192)$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Acum.} \}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (A.193)$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Flujo} \}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = - \left(T_{wy1} \frac{\partial Pot_{wy1}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} + Pot_{wy1} \frac{\partial T_{wy1}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} \right) \quad (A.194)$$

$$\frac{\partial Pot_{wy2}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (A.195)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Pot_{wy1}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} &= \frac{\partial P_{cwo_{ij-1,k}}}{\partial S_{w_{ij-1,k}}} - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \frac{\partial \gamma_{w_{ij-1,k}}}{\partial p_{w_{ij-1,j}}} \frac{\partial p_{w_{ij-1,k}}}{\partial P_{cwo_{ij-1,k}}} \frac{\partial P_{cwo_{ij-1,k}}}{\partial S_{w_{ij-1,k}}} \\ &= \frac{\partial P_{cwo_{ij-1,k}}}{\partial S_{w_{ij-1,k}}} \left[1 + \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{ij-1,k}) \frac{\partial \gamma_{w_{ij-1,k}}}{\partial p_{w_{ij-1,j}}} \right]\end{aligned}\quad (A.196)$$

$$\frac{\partial T_{wy1}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = 0 \quad (A.197)$$

$$\frac{\partial T_{wy1}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} = - \frac{\partial T_{wy1}}{\partial P_{o_{i,j-1,k}}} \frac{\partial P_{cwo_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} + \left(Fg \frac{kbw}{\mu_w} \right)_{i,j-\frac{1}{2},k} \frac{\partial k_{rw_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{i,j-1,k}}} \quad (A.198)$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la presión de aceite en el nodo $i,j,k-1$:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.199})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.200})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} = -\left(T_{wz1} \frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} + Pot_{wz1} \frac{\partial T_{wz1}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}}\right) \quad (\text{A.201})$$

$$\frac{\partial Pot_{wz2}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.202})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} &= -1 - \frac{1}{2} \left(D_{ijk} - D_{ijk-1}\right) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk-1}}}{\partial p_{w_{ijk-1}}} \frac{\partial p_{w_{ijk-1}}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} \\ &= -1 - \frac{1}{2} \left(D_{ijk} - D_{ijk-1}\right) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk-1}}}{\partial p_{w_{ijk-1}}} \end{aligned} \quad (\text{A.203})$$

$$\frac{\partial T_{wz2}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.204})$$

$$\frac{\partial T_{wz1}}{\partial p_{o_{ij,k-1}}} = T_{w_{ij,k-\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{ij,k-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial b_{w_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial p_{w_{ij,k-1}}} - \frac{1}{\mu_{w_{ij,k-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial \mu_{w_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial p_{w_{ij,k-1}}} \right\} \quad (\text{A.205})$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de agua en el nodo $i,j,k-1$:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.206})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.207})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = -\left(T_{wz1} \frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} + Pot_{wz1} \frac{\partial T_{wz1}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}}\right) \quad (\text{A.208})$$

$$\frac{\partial Pot_{wz2}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = 0 \quad (\text{A.209})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} &= \frac{\partial P_{cwo_{ijk-1}}}{\partial S_{w_{ijk-1}}} - \frac{1}{2}(D_{ijk} - D_{ijk-1}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk-1}}}{\partial p_{w_{ijk-1}}} \frac{\partial p_{w_{ijk-1}}}{\partial P_{cwo_{ijk-1}}} \frac{\partial P_{cwo_{ijk-1}}}{\partial S_{w_{ijk-1}}} \\ &= \frac{\partial P_{cwo_{ijk-1}}}{\partial S_{w_{ijk-1}}} \left[1 + \frac{1}{2}(D_{ijk} - D_{ijk-1}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk-1}}}{\partial p_{w_{ijk-1}}} \right] \end{aligned} \quad (A.210)$$

$$\frac{\partial T_{wz2}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = 0 \quad (A.211)$$

$$\frac{\partial T_{wz1}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} = -\frac{\partial T_{wz1}}{\partial P_{o_{ij,k-1}}} \frac{\partial P_{cwo_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} + \left(Fg \frac{kb_w}{\mu_w} \right)_{ij,k-\frac{1}{2}} \frac{\partial k_{rw_{ij,k-\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ij,k-1}}} \quad (A.212)$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la presión de aceite en el nodo $i+1,j,k$:

$$\frac{\partial \{T. \text{ Fuente} \}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = 0 \quad (A.213)$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Acum.} \}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = 0 \quad (A.214)$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Flujo} \}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = \left(T_{wx2} \frac{\partial Pot_{wx2}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} + Pot_{wx2} \frac{\partial T_{wx2}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} \right) \quad (A.215)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{wx2}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} &= 1 - \frac{1}{2}(D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{i+1,jk}}}{\partial p_{w_{i+1,jk}}} \frac{\partial p_{w_{i+1,jk}}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{i+1,jk}}}{\partial p_{w_{i+1,jk}}} \end{aligned} \quad (A.216)$$

$$\frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = 0 \quad (A.217)$$

$$\frac{\partial T_{wx2}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = T_{w_{i+\frac{1}{2},jk}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{i+\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial b_{w_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{w_{i+1,jk}}} - \frac{1}{\mu_{w_{i+\frac{1}{2},jk}}} \frac{\partial \mu_{w_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{w_{i+1,jk}}} \right\} \quad (A.218)$$

$$\frac{\partial T_{wx1}}{\partial p_{o_{i+1,jk}}} = 0 \quad (A.219)$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de agua en el nodo $i+1,j,k$:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.220})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.221})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = \left(T_{wx2} \frac{\partial Pot_{wx2}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} + Pot_{wx2} \frac{\partial T_{wx2}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} \right) \quad (\text{A.222})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{wx2}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} &= -\frac{\partial P_{cwo_{i+1,jk}}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} - \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{i+1,jk}}}{\partial p_{w_{i+1,jk}}} \frac{\partial p_{w_{i+1,jk}}}{\partial P_{cwo_{i+1,jk}}} \frac{\partial P_{cwo_{i+1,jk}}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} \\ &= -\frac{\partial P_{cwo_{i+1,jk}}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} \left[1 - \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{i+1,jk}}}{\partial p_{w_{i+1,jk}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.223})$$

$$\frac{\partial Pot_{wx1}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.224})$$

$$\frac{\partial T_{wx2}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = -\frac{\partial T_{wx2}}{\partial P_{o_{i+1,jk}}} \frac{\partial P_{cwo_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} + \left(Fg \frac{kb_w}{\mu_w} \right)_{i+\frac{1}{2},jk} \frac{\partial k_{rw_{i+\frac{1}{2},jk}}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} \quad (\text{A.225})$$

$$\frac{\partial T_{wx1}}{\partial S_{w_{i+1,jk}}} = 0 \quad (\text{A.226})$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la presión de aceite en el nodo $i,j+1,k$:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (\text{A.227})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (\text{A.228})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = \left(T_{wy2} \frac{\partial Pot_{wy2}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} + Pot_{wy2} \frac{\partial T_{wy2}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} \right) \quad (\text{A.229})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{wy2}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} &= 1 - \frac{1}{2} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ij+1,k}}}{\partial p_{w_{ij+1,k}}} \frac{\partial p_{w_{ij+1,k}}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ij+1,k}}}{\partial p_{w_{ij+1,k}}} \end{aligned} \quad (\text{A.230})$$

$$\frac{\partial Pot_{wy1}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.231)$$

$$\frac{\partial T_{wy2}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = T_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial b_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{w_{i,j+1,k}}} - \frac{1}{\mu_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}}} \frac{\partial \mu_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial p_{w_{i,j+1,k}}} \right\} \quad (A.232)$$

$$\frac{\partial T_{wy1}}{\partial p_{o_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.233)$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de agua en el nodo $i,j+1,k$:

$$\frac{\partial \{T. \text{ Fuente} \}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.234)$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Acum.} \}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.235)$$

$$\frac{\partial \{T. \text{ Flujo} \}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = \left(T_{wy2} \frac{\partial Pot_{wy2}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} + Pot_{wx2} \frac{\partial T_{wy2}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} \right) \quad (A.236)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{wy2}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} &= -\frac{\partial P_{cwo_{ij+1,k}}}{\partial S_{w_{ij+1,k}}} - \frac{1}{2} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ij+1,k}}}{\partial p_{w_{ij+1,k}}} \frac{\partial p_{w_{ij+1,k}}}{\partial P_{cwo_{ij+1,k}}} \frac{\partial P_{cwo_{ij+1,k}}}{\partial S_{w_{ij+1,k}}} \\ &= -\frac{\partial P_{cwo_{ij+1,k}}}{\partial S_{w_{ij+1,k}}} \left[1 - \frac{1}{2} (D_{ij+1,k} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ij+1,k}}}{\partial p_{w_{ij+1,k}}} \right] \end{aligned} \quad (A.237)$$

$$\frac{\partial Pot_{wy1}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.238)$$

$$\frac{\partial T_{wy2}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = -\frac{\partial T_{wy2}}{\partial P_{o_{i,j+1,k}}} \frac{\partial P_{cwo_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} + \left(Fg \frac{kb_w}{\mu_w} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k} \frac{\partial k_{rw_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} \quad (A.239)$$

$$\frac{\partial T_{wy1}}{\partial S_{w_{i,j+1,k}}} = 0 \quad (A.240)$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la presión de aceite en el nodo $i,j,k+1$:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.241})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.242})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = \left(T_{wz2} \frac{\partial Pot_{wz2}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} + Pot_{wz2} \frac{\partial T_{wz2}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} \right) \quad (\text{A.243})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{wz2}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} &= 1 - \frac{1}{2} \left(D_{ijk+1} - D_{ijk} \right) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk+1}}}{\partial p_{w_{ijk+1}}} \frac{\partial p_{w_{ijk+1}}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(D_{ijk+1} - D_{ijk} \right) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk+1}}}{\partial p_{w_{ijk+1}}} \end{aligned} \quad (\text{A.244})$$

$$\frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.245})$$

$$\frac{\partial T_{wz2}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = T_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{1}{b_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial b_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial p_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}}} - \frac{1}{\mu_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial \mu_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial p_{w_{ij,k+\frac{1}{2}}}} \right\} \quad (\text{A.246})$$

$$\frac{\partial T_{wz1}}{\partial p_{o_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.247})$$

Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de agua en el nodo $i,j,k+1$:

$$\frac{\partial\{\text{T. Fuente}\}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.248})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Acum.}\}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.249})$$

$$\frac{\partial\{\text{T. Flujo}\}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = \left(T_{wz2} \frac{\partial Pot_{wz2}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} + Pot_{wz2} \frac{\partial T_{wz2}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} \right) \quad (\text{A.250})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Pot_{wz2}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} &= -\frac{\partial P_{cwo_{ijk+1}}}{\partial S_{w_{ijk+1}}} - \frac{1}{2} \left(D_{ijk+1} - D_{ijk} \right) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk+1}}}{\partial p_{w_{ijk+1}}} \frac{\partial p_{w_{ijk+1}}}{\partial P_{cwo_{ijk+1}}} \frac{\partial P_{cwo_{ijk+1}}}{\partial S_{w_{ijk+1}}} \\ &= -\frac{\partial P_{cwo_{ijk+1}}}{\partial S_{w_{ijk+1}}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(D_{ijk+1} - D_{ijk} \right) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk+1}}}{\partial p_{w_{ijk+1}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.251})$$

$$\frac{\partial Pot_{wz1}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.252})$$

$$\frac{\partial T_{wz2}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = -\frac{\partial T_{wz2}}{\partial P_{o_{ij,k+1}}} \frac{\partial P_{cwo_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} + \left(Fg \frac{kb_w}{\mu_w} \right)_{ij,k+\frac{1}{2}} \frac{\partial k_{rw_{ij,k+\frac{1}{2}}}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} \quad (\text{A.253})$$

$$\frac{\partial T_{wz1}}{\partial S_{w_{ij,k+1}}} = 0 \quad (\text{A.254})$$

Tratamiento de Pozos Productores e Inyectores

B.1. Pozo Productor

Se definirán dos condiciones para pozos productores. La primera será producción constante de aceite @ c.e. y la segunda será producción de aceite a presión de fondo fluyendo, p_{wf} , constante.

A continuación se definen las movilidades para cada fase y la movilidad total considerando flujo bifásico de aceite y agua.

Movilidad del Aceite, λ_o y sus derivadas

La movilidad de la fase aceite se define como,

$$\lambda_o = \frac{k_{ro}}{\mu_o} \quad (\text{B.1})$$

Las derivadas con respecto a presión de Aceite, p_o , y Saturación de Agua, S_w , son las siguientes,

$$\frac{\partial}{\partial p_o} \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) = \frac{\mu_o \frac{\partial k_{ro}}{\partial p_o} - k_{ro} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o}}{\mu_o^2} = -\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \quad (\text{B.2})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial p_o} (\lambda_o) = -\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o}} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} = \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) = \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \quad (\text{B.4})$$

$$\boxed{\frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} = \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w}} \quad (\text{B.5})$$

Movilidad del Agua, λ_w y sus derivadas

La movilidad de la fase agua se define como,

$$\lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w} \quad (\text{B.6})$$

Las derivadas con respecto a presión de Aceite, p_o , y Saturación de Agua, S_w , son las siguientes,

$$\frac{\partial}{\partial p_o} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) = \frac{\mu_w \frac{\partial k_{rw}}{\partial p_o} - k_{rw} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_o}}{\mu_w^2} = -\frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial p_o} \quad (\text{B.7})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial p_o} (\lambda_w) = -\frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w}} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial \lambda_w}{\partial S_w} = \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) = \frac{\mu_w \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} - k_{rw} \frac{\partial \mu_w}{\partial S_w}}{\mu_w^2} \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} - \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial P_{cwo}} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \quad (\text{B.10})$$

$$\boxed{\frac{\partial \lambda_w}{\partial S_w} = \frac{1}{\mu_w} \left(\frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \lambda_w \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right)} \quad (\text{B.11})$$

B.1.1. Condición 1: Gasto de Aceite constante @ c.e., especificado,

$q_{o,ce}$

El gasto de la fase α a condiciones de yacimiento en términos del gasto especificado es,

$$q_{\alpha,ijk} = (q_{\alpha,ce} B_{\alpha})_{ijk} = \left(\frac{q_{\alpha,ce}}{b_{\alpha}} \right)_{ijk} \quad (\text{B.12})$$

También, el gasto @ c.e. se puede expresar como,

$$q_{\alpha,sc,ijk} = \left(\frac{q_{\alpha}}{B_{\alpha}} \right)_{ijk} = (q_{\alpha} b_{\alpha})_{ijk} \quad (\text{B.13})$$

Nótese que el último término de la ec. B.13, esto es, $(q_{\alpha} b_{\alpha})_{ijk}$ es el que aparece en la función de residuos. Por lo tanto, es el término que se estará derivando con respecto a las variables primarias.

El gasto de producción de la fase α a condiciones de yacimiento, q_{α} que aporta la celda (i, j, k) está dado por,

$$\begin{aligned} q_{\alpha,ijk} &= W I_{ijk} \lambda_{\alpha,ijk} \Delta p \\ W I_{ijk} &= \frac{2\pi \sqrt{k_x k_y} \Delta z}{\log \left[\frac{0.14 \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}}}{r_w} \right]} \\ \lambda_{\alpha,ijk} &= \frac{k_{r\alpha}}{\mu_{\alpha}} \\ \Delta p &= p_{\alpha,ijk} - p_{wf} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Nótese que en la ec. B.14, se está usando el modelo de Peaceman. $W I_{ijk}$ representa la parte geométrica del índice de productividad, se le identifica como índice de pozo en la celda ijk . La movilidad de la fase α es λ_{α} .

Para el caso de la fase aceite. la ec. B.14 es,

$$\begin{aligned} q_{o,ijk} &= W I_{ijk} \lambda_{o,ijk} \Delta p \\ W I_{ijk} &= \frac{2\pi \sqrt{k_x k_y} \Delta z}{\log \left[\frac{0.14 \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}}}{r_w} \right]} \\ \lambda_{o,ijk} &= \frac{k_{ro}}{\mu_o} \\ \Delta p &= p_{o,ijk} - p_{wf} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

B. TRATAMIENTO DE POZOS PRODUCTORES E INYECTORES

Nótese que la ec. B.15 está a condiciones de yacimiento. Esta es la ecuación que se considerará en el análisis cuando se especifique el gasto de aceite como condición.

En el flujo bifásico considerado, el gasto de la fase agua dependerá, por lo tanto, de las condiciones que cause la extracción de ese gasto de aceite. El gasto de agua estará expresado en términos del gasto de aceite de la siguiente manera,

Dado un gasto de la fase aceite a condiciones estandar, $q_{o,ce}$, como restricción. La caída de presión que causa este gasto está dado por:

$$\Delta p = \frac{q_{o,ijk}}{WI_{ijk}\lambda_{o,ijk}} = \frac{q_{o,sc}B_{o,ijk}}{WI_{ijk}\lambda_{o,ijk}} = \frac{q_{o,sc}}{WI_{ijk}b_{o,ijk}\lambda_{o,ijk}} \quad (B.16)$$

Por lo tanto, el gasto de agua está dado por:

$$q_{w,ijk} = WI_{ijk}\lambda_{w,ijk} \underbrace{\frac{\Delta p}{WI_{ijk}\lambda_{o,ijk}}}_{\frac{q_{o,ijk}}{WI_{ijk}\lambda_{o,ijk}}} \quad (B.17)$$

Esto es,

$$q_{w,ijk} = \frac{WI_{ijk}\lambda_{w,ijk}}{WI_{ijk}\lambda_{o,ijk}} q_{o,ijk} \quad (B.18)$$

Nótese que se puede cancelar el término geométrico del índice de productividad, esto es, el índice de pozo, WI . En el caso que el pozo vertical atraviere varias celdas se deben de mantener en ambos términos para facilitar el análisis. En el caso de una celda disparada, estos términos se pueden cancelar. También, nótese que las expresiones, como debe de ser, están a condiciones de yacimiento (No aparece el factor de volumen del aceite).

Las derivadas de los gastos con respecto a las dos incógnitas, esto es, presión del aceite y Saturación de Agua, son las siguientes:

Derivada del Gasto de Aceite con respecto a presión de Aceite, $\frac{\partial q_o}{\partial p_o}$

$$\frac{\partial q_o}{\partial p_o} = WI \frac{\partial}{\partial p_o} (\lambda_o \Delta p) \quad (\text{B.19})$$

$$= WI \left(\lambda_o \frac{\partial \Delta p}{\partial p_o} + \Delta p \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o} \right) \quad (\text{B.20})$$

$$= WI \left[\lambda_o + \Delta p \left(-\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) \right] \quad (\text{B.21})$$

$$= WI \left[\lambda_o - \Delta p \left(\frac{\lambda_o}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) \right] \quad (\text{B.22})$$

$$= WI \lambda_o \left(1 - \frac{\Delta p}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) \quad (\text{B.23})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_o}{\partial p_o} = WI \lambda_o \left(1 - \frac{\Delta p}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right)} \quad (\text{B.24})$$

Derivada del Gasto de Aceite con respecto a Saturación de Agua, $\frac{\partial q_o}{\partial S_w}$

$$\frac{\partial q_o}{\partial S_w} = WI \frac{\partial}{\partial S_w} (\lambda_o \Delta p) \quad (\text{B.25})$$

$$= WI \left(\lambda_o \frac{\partial \Delta p}{\partial S_w} + \Delta p \frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} \right) \quad (\text{B.26})$$

$$= WI \left[0 + \Delta p \left(\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right) \right] \quad (\text{B.27})$$

$$= WI \frac{\Delta p}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \quad (\text{B.28})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_o}{\partial S_w} = WI \frac{\Delta p}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w}} \quad (\text{B.29})$$

Derivada del Gasto de Agua con respecto a presión de Aceite, $\frac{\partial q_w}{\partial p_o}$

$$\frac{\partial q_w}{\partial p_o} = \frac{\partial}{\partial p_o} \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} q_o \right) \quad (\text{B.30})$$

$$= q_o \frac{\lambda_o \frac{\partial \lambda_w}{\partial p_o} - \lambda_w \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o}}{\lambda_o^2} + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial p_o} \quad (\text{B.31})$$

$$= q_o \left(\frac{\lambda_o}{\lambda_o^2} \frac{\partial \lambda_w}{\partial p_o} - \frac{\lambda_w}{\lambda_o^2} \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o} \right) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial p_o} \quad (\text{B.32})$$

$$= q_o \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left(\frac{1}{\lambda_w} \frac{\partial \lambda_w}{\partial p_o} - \frac{1}{\lambda_o} \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o} \right) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial p_o} \quad (\text{B.33})$$

$$= q_o \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left(\frac{1}{\lambda_w} \frac{\partial \lambda_w}{\partial p_o} - \frac{1}{\lambda_o} \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o} \right) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial p_o} \quad (\text{B.34})$$

$$= q_o \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left[\frac{1}{\lambda_w} \left(-\frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) - \frac{1}{\lambda_o} \left(-\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) \right] + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial p_o} \quad (\text{B.35})$$

$$= -q_o \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left[\frac{1}{\lambda_w} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) - \frac{1}{\lambda_o} \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) \right] + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial p_o} \quad (\text{B.36})$$

$$= -q_o \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left(\frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial p_o} \quad (\text{B.37})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_w}{\partial p_o} = -q_w \left(\frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial p_o}} \quad (\text{B.38})$$

Derivada del Gasto de Agua con respecto a Saturación de Agua, $\frac{\partial q_w}{\partial S_w}$

$$\frac{\partial q_w}{\partial S_w} = \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} q_o \right) \quad (\text{B.39})$$

$$= q_o \frac{\lambda_o \frac{\partial \lambda_w}{\partial p_o} - \lambda_w \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o}}{\lambda_o^2} + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial S_w} \quad (\text{B.40})$$

$$= q_o \left(\frac{\lambda_o}{\lambda_o^2} \frac{\partial \lambda_w}{\partial S_w} - \frac{\lambda_w}{\lambda_o^2} \frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} \right) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial S_w} \quad (\text{B.41})$$

$$= q_o \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left(\frac{1}{\lambda_w} \frac{\partial \lambda_w}{\partial S_w} - \frac{1}{\lambda_o} \frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} \right) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial S_w} \quad (\text{B.42})$$

$$= q_o \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left(\frac{1}{\lambda_w} \frac{\partial \lambda_w}{\partial S_w} - \frac{1}{\lambda_o} \frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} \right) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial S_w} \quad (\text{B.43})$$

$$= q_o \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left[\frac{1}{\lambda_w} \left(\frac{1}{\mu_w} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) - \frac{1}{\lambda_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right) \right] + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial S_w} \quad (\text{B.44})$$

$$= q_o \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left(\frac{1}{k_{rw}} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} - \frac{1}{k_{ro}} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial S_w} \quad (\text{B.45})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_w}{\partial S_w} = q_w \left(\frac{1}{k_{rw}} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} - \frac{1}{k_{ro}} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \right) \frac{\partial q_o}{\partial S_w}} \quad (\text{B.46})$$

B.1.2. Condición 2: Gasto de Aceite @ p_{wf} constante

Cuando un pozo productor alcanza una presión de fondo fluyendo límite, éste debe cambiar de modo de producción para que continúe la producción. Apoyándonos de las ecs. B.14 y B.15

$$q_o = WI\lambda_o(p_o - p_{wf}) = WI\lambda_o\Delta p$$

$$q_w = WI\lambda_w(p_w - p_{wf}) = WI\lambda_w\Delta p$$

Considerando la presión capilar agua-aceite nula, esto es $p_o = p_w$, y al mantener la p_{wf} constante, las dos fases estarán sometidas a la misma caída de presión. El gasto, por lo tanto, dependerá de las movilidades de las fases.

Las derivadas con respecto a las incógnitas son las siguientes:

Derivada del Gasto de Aceite con respecto a presión de Aceite, $\frac{\partial q_o}{\partial p_o}$

$$\frac{\partial q_o}{\partial p_o} = WI \frac{\partial}{\partial p_o} (\lambda_o \Delta p) \quad (B.47)$$

$$= WI \left(\lambda_o \frac{\partial \Delta p}{\partial p_o} + \Delta p \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o} \right) \quad (B.48)$$

$$= WI \left[\lambda_o + \Delta p \left(-\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) \right] \quad (B.49)$$

$$= WI \left[\lambda_o - \Delta p \left(\frac{\lambda_o}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) \right] \quad (B.50)$$

$$= WI \lambda_o \left(1 - \frac{\Delta p}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right) \quad (B.51)$$

$$\boxed{\frac{\partial q_o}{\partial p_o} = WI \lambda_o \left(1 - \frac{\Delta p}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right)} \quad (B.52)$$

Derivada del Gasto de Aceite con respecto a Saturación de Agua, $\frac{\partial q_o}{\partial S_w}$

$$\frac{\partial q_o}{\partial S_w} = WI \frac{\partial}{\partial S_w} (\lambda_o \Delta p) \quad (B.53)$$

$$= WI \left(\lambda_o \frac{\partial \Delta p}{\partial S_w} + \Delta p \frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} \right) \quad (B.54)$$

$$= WI \left[0 + \Delta p \left(\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \right) \right] \quad (B.55)$$

$$= WI \frac{\Delta p}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} \quad (B.56)$$

$$\boxed{\frac{\partial q_o}{\partial S_w} = WI \frac{\Delta p}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w}} \quad (B.57)$$

Derivada del Gasto de Agua con respecto a presión de Aceite, $\frac{\partial q_w}{\partial p_o}$

$$\frac{\partial q_w}{\partial p_o} = WI \frac{\partial}{\partial p_o} (\lambda_w \Delta p) \quad (B.58)$$

$$= WI \left(\lambda_w \frac{\partial \Delta p}{\partial p_o} + \Delta p \frac{\partial \lambda_w}{\partial p_o} \right) \quad (B.59)$$

$$= WI \left[\lambda_w + \Delta p \left(-\frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) \right] \quad (B.60)$$

$$\boxed{\frac{\partial q_w}{\partial p_o} = WI \lambda_w \left(1 - \frac{\Delta p}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_o} \right)} \quad (\text{B.61})$$

Derivada del Gasto de Aceite con respecto a Saturación de Agua, $\frac{\partial q_w}{\partial S_w}$

$$\frac{\partial q_w}{\partial S_w} = WI \frac{\partial}{\partial S_w} (\lambda_w \Delta p) \quad (\text{B.62})$$

$$= WI \left(\lambda_w \frac{\partial \Delta p}{\partial S_w} + \Delta p \frac{\partial \lambda_w}{\partial S_w} \right) \quad (\text{B.63})$$

$$= WI \left[0 + \Delta p \left(\frac{1}{\mu_w} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) \right] \quad (\text{B.64})$$

$$= WI \left[0 + \frac{\Delta p}{\mu_w} \left(\frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \lambda_w \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) \right] \quad (\text{B.65})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_w}{\partial S_w} = WI \frac{\Delta p}{\mu_w} \left(\frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \lambda_w \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right)} \quad (\text{B.66})$$

B.2. Pozo Inyector

A continuación se definirán las condiciones para pozos inyectoros. En este caso el fluido a inyectar será sólo agua ya que nuestro modelo es sólo para flujo de aceite y agua. La primera condición será la inyección constante de agua y la segunda será la inyección de agua a presión de fondo fluyendo, p_{wf} , constante.

Al inyectar agua al yacimiento, la caída de presión o resistencia a entrar es causada por las condiciones existentes en la formación. Por lo tanto, la movilidad que se debe de considerar es la movilidad de todas las fases existentes, en este caso serán ambas, esto es, la movilidad de la fase aceite, λ_o , y la movilidad de la fase agua, λ_w .

La movilidad total considerando flujo bifásico de aceite y agua es:

$$\lambda_T = \lambda_o + \lambda_w \quad (\text{B.67})$$

Por lo tanto, el gasto de inyección de agua que la formación admite estará sometido a esa condición de movilidad.

$$q_w = WI\lambda_T\Delta p = WI(\lambda_o + \lambda_w)\Delta p \quad (\text{B.68})$$

Las derivadas de las movilidades con respecto a las variables primarias esto es, p_o y S_w se obtuvieron anteriormente. Las derivadas de los gastos con respecto a las variables primarias son las siguientes:

Derivada del gasto de agua con respecto a presión de aceite, $\frac{\partial q_w}{\partial p_o}$

$$\frac{\partial q_w}{\partial p_o} = WI \frac{\partial}{\partial p_o} (\lambda_T \Delta p) \quad (\text{B.69})$$

$$= WI \left(\lambda_T \frac{\partial \Delta p}{\partial p_o} + \Delta p \frac{\partial \lambda_T}{\partial p_o} \right) \quad (\text{B.70})$$

$$= WI \left[\lambda_T + \Delta p \left(-\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} - \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) \right] \quad (\text{B.71})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_w}{\partial p_o} = WI \left[\lambda_T - \Delta p \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} + \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) \right]} \quad (\text{B.72})$$

Derivada del gasto de agua con respecto a saturación de agua, $\frac{\partial q_w}{\partial S_w}$

$$\frac{\partial q_w}{\partial S_w} = WI \frac{\partial}{\partial S_w} (\lambda_T \Delta p) \quad (\text{B.73})$$

$$= WI \left(\lambda_T \frac{\partial \Delta p}{\partial S_w} + \Delta p \frac{\partial \lambda_T}{\partial S_w} \right) \quad (\text{B.74})$$

$$= WI \left[0 + \Delta p \left(\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} + \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) \right] \quad (\text{B.75})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_w}{\partial S_w} = WI \Delta p \left[\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} + \frac{1}{\mu_w} \left(\frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \lambda_w \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) \right]} \quad (\text{B.76})$$

B.3. Gasto de Líquido Especificado, $q_L = q_o + q_w$

Como se estableció anteriormente, el gasto de las fases aceite, q_o , y agua, q_w , puede ser expresado en términos del gasto de líquido total, q_L , requerido como restricción.

$$q_o = \frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_w} q_L = \frac{\lambda_o}{\lambda_T} q_L \quad (\text{B.77})$$

$$q_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} q_L = \frac{\lambda_w}{\lambda_T} q_L \quad (\text{B.78})$$

Las derivadas de los gastos con respecto a las dos incógnitas, esto es, presión del aceite, p_o , y saturación de agua, S_w , son las siguientes:

Gasto de aceite con respecto a presión de Aceite, $\frac{\partial q_o}{\partial p_o}$

$$\frac{\partial q_o}{\partial p_o} = \frac{\partial}{\partial p_o} \left(\frac{\lambda_o}{\lambda_T} \right) q_L = q_L \frac{\partial}{\partial p_o} \left(\frac{\lambda_o}{\lambda_T} \right) = q_L \frac{\lambda_T \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o} - \lambda_o \frac{\partial \lambda_T}{\partial p_o}}{\lambda_T^2} \quad (\text{B.79})$$

$$\frac{\partial q_o}{\partial p_o} = q_L \left[\frac{\lambda_T}{\lambda_T^2} \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o} - \frac{\lambda_o}{\lambda_T^2} \frac{\partial \lambda_T}{\partial p_o} \right] = \frac{q_L \lambda_o}{\lambda_T} \left[\frac{1}{\lambda_o} \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\lambda_T} \frac{\partial \lambda_T}{\partial p_o} \right] \quad (\text{B.80})$$

$$\frac{\partial q_o}{\partial p_o} = q_o \left[\frac{1}{\lambda_o} \frac{\partial \lambda_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\lambda_T} \frac{\partial \lambda_T}{\partial p_o} \right] \quad (\text{B.81})$$

$$\frac{\partial q_o}{\partial p_o} = q_o \left[-\frac{k_{ro}}{\lambda_o \mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\lambda_T} \left(-\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} - \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) \right] \quad (\text{B.82})$$

$$\frac{\partial q_o}{\partial p_o} = q_o \left[-\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} + \frac{1}{\lambda_T} \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} + \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) \right] \quad (\text{B.83})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_o}{\partial p_o} = -q_o \left[\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\lambda_T} \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} + \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) \right]} \quad (\text{B.84})$$

Gasto de aceite con respecto a Saturación de Agua, $\frac{\partial q_o}{\partial S_w}$

$$\frac{\partial q_o}{\partial S_w} = q_L \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{\lambda_o}{\lambda_T} \right) = \frac{\lambda_T \frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} - \lambda_o \frac{\partial \lambda_T}{\partial S_w}}{\lambda_T^2} = q_L \left(\frac{1}{\lambda_T} \frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} - \frac{\lambda_o}{\lambda_T^2} \frac{\partial \lambda_T}{\partial S_w} \right) \quad (\text{B.85})$$

$$\frac{\partial q_o}{\partial S_w} = \frac{q_L \lambda_o}{\lambda_T} \left(\frac{1}{\lambda_o} \frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} - \frac{1}{\lambda_T} \frac{\partial \lambda_T}{\partial S_w} \right) = q_o \left(\frac{1}{\lambda_o} \frac{\partial \lambda_o}{\partial S_w} - \frac{1}{\lambda_T} \frac{\partial \lambda_T}{\partial S_w} \right) \quad (\text{B.86})$$

$$\frac{\partial q_o}{\partial S_w} = q_o \left[\frac{1}{\lambda_o} \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} - \frac{1}{\lambda_T} \left(\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) \right] \quad (\text{B.87})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_o}{\partial S_w} = q_o \left[\frac{1}{k_{ro}} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_w} - \frac{1}{\lambda_T} \left(\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \frac{1}{\mu_w} \left(\frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \lambda_w \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) \right) \right]} \quad (\text{B.88})$$

Gasto de Agua con respecto a presión de Aceite, $\frac{\partial q_w}{\partial p_o}$

$$\frac{\partial q_w}{\partial p_o} = \frac{\partial}{\partial p_o} \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_T} \right) q_L = q_L \frac{\lambda_T \frac{\partial \lambda_w}{\partial p_o} - \lambda_w \frac{\partial \lambda_T}{\partial p_o}}{\lambda_T^2} \quad (\text{B.89})$$

$$\frac{\partial q_w}{\partial p_o} = q_{SL} \left(\frac{1}{\lambda_T} \frac{\partial \lambda_w}{\partial p_w} - \frac{\lambda_w}{\lambda_T} \frac{\partial \lambda_T}{\partial p_o} \right) = \frac{q_L \lambda_w}{\lambda_T} \left(\frac{1}{\lambda_w} \frac{\partial \lambda_w}{\partial p_o} - \frac{1}{\lambda_T} \frac{\partial \lambda_T}{\partial p_o} \right) \quad (\text{B.90})$$

$$\frac{\partial q_w}{\partial p_o} = q_w \left[\frac{1}{\lambda_w} \left(-\frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) - \frac{1}{\lambda_T} \left(-\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} - \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) \right] \quad (\text{B.91})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_w}{\partial p_o} = -q_w \left[\frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} - \frac{1}{\lambda_T} \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o^2} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} + \frac{k_{rw}}{\mu_w^2} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \right) \right]} \quad (\text{B.92})$$

Gasto de Agua con respecto a Saturación de Agua, $\frac{\partial q_w}{\partial S_w}$

$$\frac{\partial q_w}{\partial S_w} = q_L \frac{\partial}{\partial S_w} \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_T} \right) = q_L \frac{\lambda_T \frac{\partial \lambda_w}{\partial S_w} - \lambda_w \frac{\partial \lambda_T}{\partial S_w}}{\lambda_T^2} \quad (\text{B.93})$$

$$\frac{\partial q_w}{\partial S_w} = \frac{q_L \lambda_w}{\lambda_T} \left(\frac{1}{\lambda_w} \frac{\partial \lambda_w}{\partial S_w} - \frac{1}{\lambda_T} \frac{\partial \lambda_T}{\partial S_w} \right) \quad (\text{B.94})$$

$$\boxed{\frac{\partial q_w}{\partial S_w} = q_w \left[\frac{1}{k_{rw}} \left(\frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \lambda_w \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) - \frac{1}{\lambda_T} \left(\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \frac{1}{\mu_w} \left(\frac{\partial k_{rw}}{\partial S_w} + \lambda_w \frac{\partial \mu_w}{\partial p_w} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_w} \right) \right) \right]} \quad (\text{B.95})$$

Código/Manuales/Publicaciones

C.1. Código de Inicialización

La siguiente información es requerida como entrada para el simulador y en particular los datos que se muestra a continuación son los que se utilizaron para la inicialización del primer modelo de simulación, Caso 0.

```
1 L.x = 450;           % Longitud (ft)
2 L.y = 450;           % Longitud (ft)
3 L.z = 30;            % Longitud (ft)
4 Res.fi = 0.20;       % Porosidad (-)
5 Res.cr = 3e-6;        % Compresibilidad de la roca (psi-1)
6 Res.PrsIni = 3000;   % Presion Inicial (psi)
7 Res.PrsDRef = 3000;  % Presion de referencia (psi)
8 Res.DRef = 0.0;      % Profundidad de referencia (ft)
9 Res.SwIni = 0.25;    % Saturacion de agua inicial
10 Swc = 0.25;         % Saturacion de agua irreductible
11 Sor = 0.30;         % Saturacion de aceite residual
12 NN.II = 15;         % Numero de nodos en x
13 NN.JJ = 15;         % Numero de nodos en y
14 NN.KK = 1;         % Numero de nodos en z
15 NN.np = 2;         % Numero de fases
16 Time.TSim = 365;    % Tiempo de simulacion (dias)
17 Time.dt = 10;      % Dt inicial (seg)
18 inc = 1.03;        % Incremento de tiempo (-)
19 DtMax = 45;        % Dt maximo (dias)
```

```

20 MaxNoIter = 11;           % Numero maximo de iteraciones
21 Tol.dp = 389;           % Presion de convergencia, (psi)
22 Tol.dSw = 5e-5;         % Saturacion de convergencia, (-)

```

Las funciones de saturación y el PVT se muestran a continuación:

S_w	kr_w	k_{ro}	P_{cwo}
0.25	0.000000000	0.700000000	0.0
0.30	0.000987654	0.491632373	0.0
0.35	0.003950617	0.329355281	0.0
0.40	0.008888889	0.207407407	0.0
0.45	0.015802469	0.120027435	0.0
0.50	0.024691358	0.061454047	0.0
0.55	0.035555556	0.025925926	0.0
0.60	0.048395062	0.007681756	0.0
0.65	0.063209877	0.000960219	0.0
0.70	0.080000000	0.000000000	0.0

P	B_o	V_o	$DensO$	B_w	V_w	$DensW$
400	1.012	1.17	720.831	1.0	1.0	993.145
800	1.009	1.14	720.831	1.0	1.0	993.145
1200	1.005	1.11	720.831	1.0	1.0	993.145
1600	1.001	1.08	720.831	1.0	1.0	993.145
2000	0.996	1.06	720.831	1.0	1.0	993.145
2400	0.990	1.03	720.831	1.0	1.0	993.145
2800	0.988	1.00	720.831	1.0	1.0	993.145
3200	0.985	0.98	720.831	1.0	1.0	993.145
3600	0.980	0.95	720.831	1.0	1.0	993.145
4000	0.975	0.94	720.831	1.0	1.0	993.145
4400	0.970	0.92	720.831	1.0	1.0	993.145
4800	0.965	0.91	720.831	1.0	1.0	993.145
5200	0.960	0.90	720.831	1.0	1.0	993.145
8600	0.940	0.89	720.831	1.0	1.0	993.145

C.2. Convergencia

Numéricamente no se realizan los siguientes cambios de variables:

$$p_{o,ij}^{n+1} \Leftarrow p_{o,ij}^{\nu+1} \quad y \quad S_{w,ij}^{n+1} \Leftarrow S_{w,ij}^{\nu+1}$$

Las variables de presiones y saturaciones que se usan dentro del proceso iterativo de Newton son las mismas que se consideran para la impresión de resultados y para pasar al siguiente paso de tiempo una vez que el proceso iterativo converge.

Para cada iteración Newtoniana se calculan los vectores solución $\delta p_{o,i}^{(\nu+1)}$ y $\delta S_{w,i}^{(\nu+1)}$, las presiones y saturaciones en la iteración $\nu + 1$ se determinan de la siguiente manera:

$$p_{o,i}^{(\nu+1)} = p_{o,i}^{(\nu)} + \delta p_{o,i}^{(\nu+1)}$$

$$S_{w,i}^{(\nu+1)} = S_{w,i}^{(\nu)} + \delta S_{w,i}^{(\nu+1)}$$

El proceso iterativo converge a la solución cuando los cambios iterativos de las incógnitas, en valor absoluto, son menores que una tolerancia estipulada, $|\delta p_{o,i}^{(\nu+1)}| < \varepsilon_p$ y $|\delta S_{w,i}^{(\nu+1)}| < \varepsilon_s$.

Lo anterior se traduce en el siguiente segmento de código.

```

1 TolVar='NoConv';
2 m=0;
3
4   for k=1:NN.KK
5       for j=1:NN.JJ
6           for i=1:NN.II
7               m=m+1;
8               Prs.New(i,j,k,1)=Prs.New(i,j,k,1)+DV(1,m,1);
9               Sw.New(i,j,k,1)=Sw.New(i,j,k,1)+DV(2,m,1);
10          end
11      end
12  end
13
14
15  if (DPMax<Tol.dp) && (DSMax<Tol.dSw)
16      TolVar='SiConv';
17  end

```


Bibliografía

- [1] Afilaka, J.O., Bahamaish, J., Bowen, G., Bratvedt, K., Holmes, J.A., Miller, T., Fjerstad, P., Grinestaff, G., Jalali, Y., Lucas, C., Jiménez, Z. 2001. Mejoramiento de los Yacimientos Virtuales. *Oilfiel Review*: 26-47.
- [2] Anderson, W.G. 1986. Wettability Literature Survey - Part 1: Rock/Oil/Brine Interactions and the Effects of Core Handling on Wettability. SPE 13932-PA.
- [3] Anderson, W.G. 1986. Wettability Literature Survey - Part 2: Wettability Measurement. SPE 13933-PA.
- [4] Anderson, W.G. 1986. Wettability Literature Survey - Part 3: The Effects of Wettability on the Electrical Properties of Porous Media. SPE 13934-PA.
- [5] Anderson, W.G. 1987. Wettability Literature Survey - Part 4: Effects of Wettability on Capillary Pressure. SPE 15271-PA.
- [6] Anderson, W.G. 1987. Wettability Literature Survey - Part 5: The Effects of Wettability on Relative Permeability. SPE 16323-PA.
- [7] Anderson, W.G. 1987. Wettability Literature Survey - Part 6: The Effects of Wettability on Waterflooding. SPE 16471-PA.
- [8] Arana V., Trujillo D., Sánchez, J. -*Apuntes de Simulación Numérica de Yacimientos*, Universidad Nacional Atonóma de México.
- [9] Aziz, k., Settari, A. 1979. *Petroleum Reservoir Simulation*, New York: Elsevier Applied Science Publishers.
- [10] Borbón, A., Mora, W. 2014. Edición de Textos Científicos LaTeX, segunda edición, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- [11] Li, K., Lenormand, R., Robin, M., Bossie Codreanu, D. 1997. Numerical Evaluation of Combined Effect of Wettability and Heterogeneity on Waterflood Performance. International Energy Agency, Copenhagen Dk.
- [12] Odeh, A.S. Reservoir Simulation... What is it?. SPE 2790-PA.

BIBLIOGRAFÍA

- [13] Oetiker, T., Partl, H., Hyna, I., Schlegl, E. 2014 *La introducción no-tan-corta a LaTeX 2e*.
- [14] Peaceman, D. W. 1977. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing.
- [15] Rodríguez, F., Galindo, A.P. 2000 -*Fundamentos de Simulación Numérica de Yacimientos*, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [16] Sampieri, R., Fernández, C., Baptista, P. 2003 *Metodología de la investigación*, tercera edición, México, D.F.: McGraw-Hill.
- [17] Satter A., Vamon, J.E., Hoang, M.T. 1994. Integrated Reservoir Management. SPE 22350-PA.
- [18] Tanaka, S., Datta-Gupta, A., King, M. J. 2014. Compositional Streamline Simulation of CO₂ Injection Accounting for Gravity and Capillary Effects Using Orthogonal Projection. Paper SPE 169066-MS presented at the SPE Improved Oil Recovery Symposium held, Tulsa, 12-16 April.
- [19] Tarek, A., MacKinney, P.D. 2005. *Advanced Reservoir Engineering*, United States of America: Elsevier.