UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

SECUENCIA DIDÁCTICA SOBRE LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

PRESENTA:

DIANA OLIVIA LÓPEZ MELCHOR

TUTOR PRINCIPAL

MTRO. VICTOR JOSÉ PALENCIA GÓMEZ

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

EN SU CASO, MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DRA. MARÍA TERESA ALICIA SILVA Y ORTIZ

DR. MIGUEL MERCADO MARTÍNEZ

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

NAUCALPÁN DE JUÁREZ, ESTADO DE MÉXICO, JUNIO DE 2016

RESUMEN

En la secuencia didáctica se pretende el aprendizaje cooperativo en grupos formales de la ecuación canónica de la parábola y la obtención de su ecuación ordinaria como resultado de la traslación de una parábola con vértice en el origen hacia alguna región del plano cartesiano. Además, se define a la parábola como lugar geométrico y se revisa brevemente el origen de ésta como sección cónica.

ABSTRACT

In the didactic sequence is intended to the cooperative learning in formal groups of the canonical equation of the parabola and obtaining their ordinary equation as a result of the translation of a parabola with vertex at the origin to some region of the Cartesian plane. In addition, the parabola is defined as locus and the origin of this is briefly reviewed as conic section.

INTRODUCCIÓN

En el contexto actual, donde los conocimientos son fruto de un proceso de diálogo y consenso, dado por la globalización económica y nuevos retos que afronta el s. XXI; el Sistema Educativo en los Estados Unidos Mexicanos enfrenta reformas que conllevan la obligatoriedad del Nivel de Educación Medio Superior, modificaciones a los Planes de Estudio y nuevos enfoques. El reto mexicano se dificulta por las diferentes modalidades de Bachillerato existentes: general, tecnológico y aquel que contempla una profesión técnica y por las diferencias existentes entre los enfoques disciplinar y didáctico dados a la asignatura de Matemáticas. Concretamente en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, se concibió al campo de conocimientos matemáticos como ciencia y herramienta de conocimiento, el paradigma educativo promovido por la Organización de las Naciones Unidas de aprender a aprender ha sido realizado al fomentar en los jóvenes actividades de búsqueda y adquisición del conocimiento por ellos mismos.

Además, los docentes de Nivel Medio Superior son docentes e investigadores, por lo tanto, su labor educativa implica análisis y reflexión de su labor educativa y la investigación de contenidos didácticos que conlleven la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje.

JUSTIFICACIÓN

La enseñanza de las matemáticas considera importante el desarrollo del razonamiento hipotético-deductivo, cuyas bases están dadas en los Elementos de Euclides; así como en la resolución de problemas y en experiencias que permiten comprender las propiedades de objetos matemáticos.

La Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, ante problemas de eficiencia terminal relacionados con el alto índice de reprobación de la asignatura de Matemáticas disminuyó el tamaño de sus grupos de clase y promovió asesorías en temas de la asignatura que preparan a los estudiantes para futuros extraordinarios. Cabe señalar que no hay suficiente investigación educativa en el nivel medio superior.

En el caso de la enseñanza de la Geometría Analítica dentro del Colegio de Ciencias y Humanidades aparentemente aprender la ecuación de una parábola es un tema relativamente sencillo, pues se revisa primeramente dentro de la asignatura de Matemáticas III, lo qué es un lugar geométrico en la segunda unidad temática, en las unidades temáticas tercera y cuarta, se incluye el estudio de la línea recta, la circunferencia y la elipse. Es importante recordar que en 2013 acreditaron de forma ordinaria Matemáticas III el 63% de los estudiantes que cursaron, de acuerdo con lo mencionado por Muñoz (2014, p. 34).

Muñoz (2014) indicó que para el quinto semestre en la generación 2011 el 84% de los estudiantes debían dos asignaturas y adeudaban cuatro asignaturas el 51% de los jóvenes. Los informes que se ofrecen sobre la eficiencia terminal, que en 2013 fue de 59%, de la ENCCH no muestran indagación sobre las causas que provocan esta problemática y si la reprobación está relacionada con la práctica docente. No se hallaron evidencias sobre si el proceso de enseñanza aprendizaje fomenta hábitos de estudio entre los estudiantes para estudiar y aprender juntos. Es probable que los profesores no reflexionen sobre sus habilidades sociales y sobre la forma en que gestionan la adquisición de aprendizajes matemáticos y sociales que afectan a sus estudiantes.

PROBLEMA A RESOLVER

Los estudiantes de la ENCCH presentan problemas en el aprendizaje de la parábola, primero la estudian como representación gráfica de una función cuadrática y luego como lugar geométrico. Después de un tiempo no conservan en su memoria que es la representación gráfica de una función cuadrática ni la definición analítica de la parábola. También olvidan qué es el lado recto o cómo se relacionan los conceptos de foco y vértice. Los estudiantes en la mayoría de los casos, aprenden procedimientos matemáticos sin razonar, no se preguntan por qué se sigue un determinado curso de acción y por qué no otro.

La secuencia didáctica pretende que los estudiantes adquieran aprendizajes significativos por medio de lecturas y ejercicios sobre representaciones algebraicas y gráficas de la parábola realizados en grupos formales con estrategias de aprendizaje cooperativo. Se pretende que razonen relaciones entre los elementos de la parábola para hallar la ecuación de ésta, sin que la vean como una receta necesaria para aprobar un examen.

La elaboración de la ecuación ordinaria se realizará al trasladar una parábola con vértice en el origen que es un conocimiento básico, el cual se amplía al comprender que la parábola se mueve en el plano cartesiano hacia una nueva ubicación donde se hallará su vértice, este hecho geométrico transforma las ecuaciones de los elementos de la parábola como la directriz y el foco, pero se conserva la distancia focal y la apertura de la parábola, luego de comprender qué se conserva y que no, luego de desmenuzar es más fácil restablecer y construir la ecuación de la parábola ya trasladada.

HIPÓTESIS.

Si se aplica una secuencia didáctica sobre la parábola y su ecuación cartesiana con estrategias de aprendizaje para grupos formales, entonces los estudiantes probablemente obtendrán aprendizajes significativos.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Si los estudiantes tienen material de apoyo y estrategias de aprendizaje cooperativo para estudiar la ecuación cartesiana de la parábola, ¿lograrán probables aprendizajes significativos?

PROCEDIMIENTO DE INVESTIGACIÓN

Para comprobar la hipótesis planteada se recurrirá al método cualitativo, que mostrará la aplicación de la secuencia didáctica como si se tratara de un caso a estudiar en lo referente al tema de la enseñanza de la parábola. Las actividades metodológicas de esta investigación son:

- Elaboración de la estrategia didáctica de la ecuación cartesiana de la parábola.
- Elaboración de materiales de apoyo para la secuencia didáctica.
- Asignación aleatoria de un grupo por parte de la Secretaria Académica del Plantel del CCH donde la secuencia tenga lugar.
- Aplicación de la secuencia didáctica de la ecuación cartesiana de la parábola.
- Obtención de evidencias sobre aprendizajes de los estudiantes.
- Análisis de las evidencias.
- Redacción de resultados y conclusiones.

OBJETIVO GENERAL.

Aplicar una secuencia didáctica sobre la parábola y su ecuación cartesiana con estrategias de aprendizaje cooperativo para que los estudiantes puedan obtener aprendizajes significativos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Elaborar una secuencia didáctica para el aprendizaje de la ecuación cartesiana de la parábola, que estará diseñada con base en estrategias de aprendizaje cooperativo entre bachilleres de dieciséis años.

2. Aplicar dicha secuencia en un grupo aleatoriamente asignado en un plantel del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México.

3. Analizar los aprendizajes obtenidos durante la aplicación de la secuencia.

Capítulo 1. Estilos de aprendizaje en jóvenes de bachillerato.

1.1 Situación socioeconómica y política que afecta al bachiller

El contexto en el que se desarrollan los jóvenes mexicanos del año 2015 en el ámbito económico está marcado por la recesión económica. No debe olvidarse que el Tratado de Libre Comercio para América del Norte provocó poco a poco que las empresas nacionales fueran cerrándose y se dio el desempleo, tanto para quienes tenían créditos universitarios como para quienes fueron forzados a incursionar en el mercado laboral desde su adolescencia. Aunado a la constante compra de gasolina y diesel importados, la población mexicana importa alimentos por la falta de programas que activen la producción agrícola. México compra manufacturas hechas en Asia, la gente se subemplea en la venta de *cháchara*s y algunos han incursionado en el tráfico de estupefacientes.

En el ámbito político, los institutos políticos crearon una nueva institución para dar legitimidad a las elecciones venideras y lograron acuerdos inciertos para promulgar las reformas: energética, laboral y educativa. Es inevitable que dichas reformas agraven aún más la inestabilidad económica de varias familias mexicanas, acosadas por créditos y su escasa cultura del ahorro.

De acuerdo con lo comentado por Muñoz y Ávila (2012) en el segundo capítulo de su libro los jóvenes que cursaban el bachillerato en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades [ENCCH] de la Universidad Nacional Autónoma de México [UNAM] en ese año, eran jóvenes que no trabajan en un 87.2%, el 98% de ellos era soltero y vivían con sus padres un 94.6%; lo que significa que a diferencia de las primeras generaciones de egresados de CCH los alumnos que cursan esta opción de bachillerato no son adultos que trabajen, ya que la mayoría son adolescentes de 14 y 15 años de edad al ingresar a primer semestre.

Sus hábitos de estudio están poco documentados, los autores comentan que el 66.8% de los estudiantes encuestados, se consideró un buen estudiante y un 69.6% de ellos dijo que los conocimientos obtenidos en el nivel secundaria eran buenos. Lo increíble es que los chicos son dispersos y olvidadizos. Ellos confesaron en 2012 usar como acervos de consulta, libros de texto en un 52.5 % frente a un 57.4% de información en Internet, tal y como lo señalan Muñoz y Ávila (2012). Lo anterior sirve para conjeturar que sus hábitos de estudio son deficientes y que los libros de texto no tienen competencia frente a Internet.

Egresan alrededor de la mitad de los jóvenes que ingresan a la ENCCH. Las gráficas mostradas por Muñoz y Ávila (2012), dan cuenta de que hay más estudiantes mujeres que varones y que las jóvenes egresan en un 65% frente al 49% de los muchachos. La pregunta es qué sucede con quienes desertan o se quedan truncos. Esta información es desconocida. Los jóvenes desertores ¿tendrán las herramientas suficientes para encontrar trabajo al no concluir sus estudios de bachillerato?

1.2 UBICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA PROPUESTA.

Esta propuesta es una secuencia didáctica que se trabajará en un grupo asignado por la Secretaría Académica de la ENCCH Plantel Naucalpan perteneciente a la UNAM, a dicho plantel asisten adolescentes que viven en el Estado de México, a quienes les fue asignada esta Institución Educativa a través del Examen del Concurso de Ingreso para la Educación Media Superior en el valle de México.

El propósito es la mejora de los aprendizajes en las ecuaciones canónicas y ordinarias de la parábola. Los estudiantes conocerán brevemente el origen de la parábola y su definición analítica, para a partir de ella generar su ecuación en forma canónica. Es deseable usar transformaciones geométricas como la simetría axial y la traslación para obtener ecuaciones de la parábola en forma ordinaria.

1.3 FACTORES QUE INFLUYEN EN EL LOGRO DEL APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS.

De acuerdo con Covington, Mueller, De Corte, Pintrich y De Groot (como se cita en López, Hederich-Martínez y Camargo, 2012, pág. 42): “es sabido que cuando los estudiantes creen que son buenos para las matemáticas tienden a ser más persistentes frente a las dificultades encontradas en el proceso de aprendizaje y, en consecuencia, tienen un mejor desempeño en matemáticas”.

Lo anterior significa que la creencia en las habilidades personales frente a las matemáticas es un motivador intrínseco que permite la *autorregulación* en el aprendizaje; la capacidad para monitorear el desempeño propio en tareas de aprendizaje. Así pues, López *et al*. (2012) comentan que:

> Probablemente los estudiantes con tendencia a la independencia de campo tienen mejores capacidades para llevar a cabo la planeación consciente de actividades frente al aprendizaje de las matemáticas. Es decir, ellos saben qué pasos deben seguir para lograr sus metas de aprendizaje y, en esta medida, son capaces de distribuir su tiempo de estudio y de ser sistemáticos en el monitoreo de las actividades que planean. De igual forma, evalúan constantemente sus resultados de aprendizaje de acuerdo con el estado deseado y, finalmente, toman acciones para cambiar, modificar o afinar las estrategias a fin de lograr lo planeado durante su proceso de aprendizaje (p. 48).

Sería deseable que todos los estudiantes tuvieran tendencia a la independencia de campo, así su aprendizaje matemático sería más provechoso y los profesores podrían diseñar actividades donde la metacognición implicará un análisis de logros obtenidos y toma de decisiones al respecto. Por lo pronto, los profesores deben esmerarse en enseñarles a los jóvenes a organizar sistemáticamente el tiempo dedicado a actividades de estudio en Matemáticas, también a autoevaluarse y tomar acciones para afinar las estrategias que los lleven hacia el aprendizaje.

Los estudiantes exitosos en matemáticas, suelen fragmentar problemas complejos en otros más simples y prueban hipótesis, lo que constituye un acercamiento analítico a la información, algo estudiado por Nebelkopf y Dreyer (citados por López *et al.*, 2012, p. 42). En la ENCCH son pocos los estudiantes exitosos y las acciones encaminadas a disminuir el índice de reprobación han contemplado la capacitación de los nuevos docentes y la actualización de quienes poseen experiencia en estrategias y recursos didácticos, con el fin de una profesionalización de la docencia en Matemáticas.

La *autorregulación* de un estudiante comprende estrategias metacognitivas y de gestión de recursos como: pedir ayuda, aprender con un compañero, esfuerzo para regulación o quitar distractores, monitoreo de la propia cognición y tiempo en ambiente de estudio; también estrategias cognitivas que implican repaso para fortalecer memoria a largo plazo, elaboración de conexiones entre conocimiento nuevo y previo; organización de la información en: esquemas, resúmenes y mapas conceptuales, y pensamiento crítico para abordar nuevos problemas y tomar decisiones. La independencia de campo es un estilo cognitivo propuesto y desarrollado por Witkin en 1948 como lo comentan López *et al.* (2012). Aquellos sujetos que procesan la información en forma global e influenciados por el contexto son dependientes de campo.

El componente motivacional de la autorregulación incluye en primer lugar el valor de la tarea que provoca el esfuerzo del aprendiz, las motivaciones extrínsecas como recompensas académicas o fama personal; las motivaciones intrínsecas, ejemplificadas por el deseo de dominar un tema o la curiosidad que despierta en el joven; junto con la *autoeficacia* que el propio bachiller perciba en una tarea de aprendizaje.

1. 3. 1. Estilos de aprendizaje vinculados a las Matemáticas.

La información al respecto no es amplia, porque esta línea de investigación es independiente de la Educación Matemática o corriente de investigación que ha tomado la batuta en lo referente a la didáctica disciplinar de las Matemáticas. Algo trascendente que comunicaron Amado, Brito, García, Guerrero y Cuervo (2008) después de una investigación conjunta sobre los estilos de aprendizaje en estudiantes colombianos y mexicanos es que los docentes no debieran basarse en su estilo de aprendizaje sino en aquellos que presentan los alumnos de un grupo específico.

El estilo de aprendizaje como lo explica Varela (2006) es la manera en que un sujeto "percibe, procesa, integra y recuerda información" (p. 2). Para Gardner las mentes extraordinarias tienen capacidad de *metacognición* lo que les permite detectar sus fortalezas y debilidades para usarlas en planes de acción. "La metacognición se puede entender como el conocimiento de la propia manera de aprender y de pensar" (Varela, 2006, p. 2). Flavell como lo menciona Varela (2006) indica que las variables de la cognición incluyen a: las capacidades y limitaciones de las personas, las características de la tarea y las estrategias que facilitan cumplir con la demanda de la tarea.

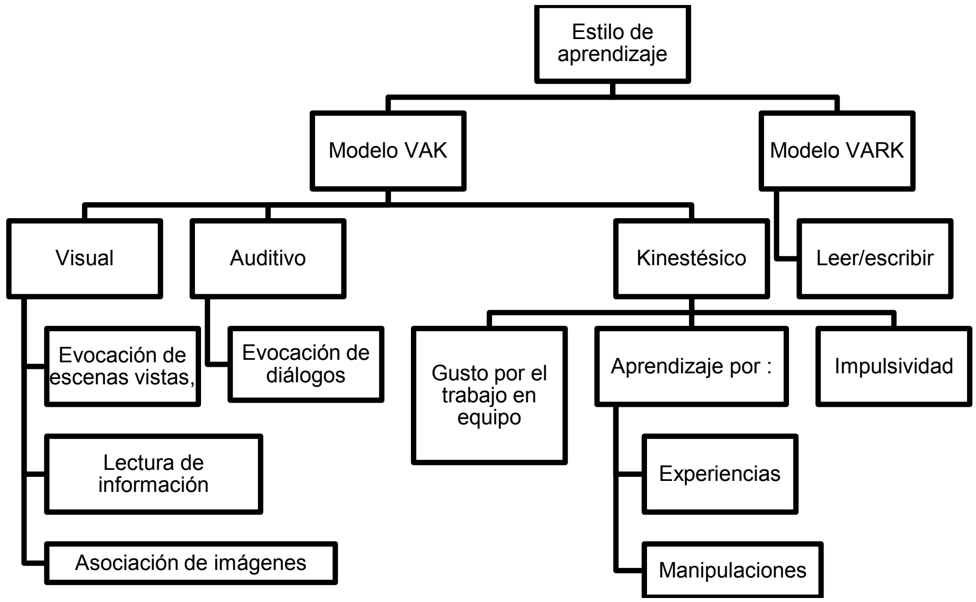


Diagrama 1. 1 Estilos de aprendizaje de los modelos VAK y VARK

El diagrama 1.1 indica los estilos de aprendizaje del modelo VAK y el modelo VARK, donde Fleming introdujo el estilo de lectura. Así para este autor el profesor prefiere leer/escribir mientras que por lo menos el 70%de los estudiantes son multimodales. Fleming cita a Eison y Bonuell para promover el aprendizaje activo y aconseja que los docentes realicen cinco aspectos:

1. Introduzcan al estudiante al tema por diversas formas, no sólo a través de una escucha pasiva.
2. Desarrollen en el estudiante habilidades como organizar información en mapas conceptuales o mentales, le orienten para buscar información, así como reflexionar, corregir errores y autoevaluarse.
3. Promuevan en clase el análisis y síntesis de información.
4. Procuren que los jóvenes resuelvan problemas y argumenten las soluciones.
5. Permitan que los jóvenes exploren sus valores y actitudes en clase.

En su investigación Amado *et al*. (2009) definen las características de los estudiantes visuales: "[l]os visuales prefieren recibir la información a través de gráficos, películas, cuadros, o diagramas de flujo, contrario a los verbales o auditivos que manifiestan una abierta preferencia a las explicaciones escritas o habladas" (p. 5). Ahora los estudiantes kinestésicos "tienen un alto nivel de energía para hacer cosas que son pragmáticas, lógicas y útiles" (Amado *et al.*, p. 5). Estos investigadores concluyeron que los estudiantes de Ingeniería tanto mexicanos como colombianos tienen el estilo visual.

Kolb promueve cuatro estilos de aprendizaje donde interviene el ciclo representado en el diagrama 1.2. El estilo divergente corresponde a las personas que gustan de experiencias concretas, el asimilador a quienes observan y reflexionan experiencias, el convergente a quienes recurren a su capacidad de abstracción para conceptualizar experiencias y el estilo acomodador finalmente, corresponde a quienes aprenden con experiencias activas. Kolb no comenta sobre un estilo particular para aprender matemáticas.

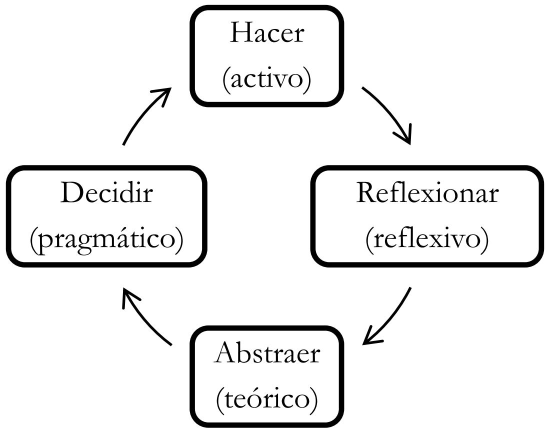


Diagrama 1. 2 Ciclo del aprendizaje de Kolb

Honey y Alonso recurren al ciclo del aprendizaje de Kolb y buscan preferencias en una etapa del ciclo en determinados individuos, ellos comentan que en el estilo de aprendizaje activo las personas gustan de ser líderes en equipos de trabajo y también de asumir retos. En el estilo reflexivo las personas revisan cuidadosamente las opciones antes de decidir; ahora las personas con estilo teórico son racionales y no se dejan llevar por la intuición. Los pragmáticos son funcionales, positivos y tienden a decidir sin demasiadas reservas. Honey y Alonso aplicaron un cuestionario en la Universidad Complutense de Madrid, como lo comenta en su artículo Varela (2006) encontraron relación entre los estilos de aprendizaje de los padres y sus hijos, señalan que en los bachilleres de ciencias básicas predominan los estilos reflexivo y pragmático; mientras que los estudiantes de letras tienen estilo activo.

Tabla 1.1 Comparación entre los estilos de aprendizaje de Kolb y los de Honey y Alonso.

Kolb	Honey y Alonso	Etapa del ciclo de Kolb
Acomodador	Activo	Hacer
Reflexivo	Asimilador	Reflexionar
Convergente	Teórico	Abstraer
Divergente	Pragmático	Decidir

Gallego y Nevot (2007) basaron su investigación en la clasificación de los estilos de aprendizaje de Honey y Alonso, hallaron cierto grado de correlación entre los estilos reflexivo y teórico con las calificaciones de matemáticas, en estudiantes de Bachillerato en centros de estudio públicos y privados de España. Los bachilleres españoles tuvieron un estilo de aprendizaje activo en su primer año que en los posteriores. Prefieren el estilo reflexivo. Los jóvenes que estudiaban en un centro de estudios privado tenían un estilo de aprendizaje teórico.

Gallego y Nevot (2007) sugirieron cursos de acción docente en concordancia con los estilos de aprendizaje que investigaron, sus recomendaciones están resumidas en la tabla 1.2 para aprendizaje activo, la tabla 1.3 para aprendizaje reflexivo, la tabla 1.4 para aprendizaje teórico y la tabla 1.5 para el aprendizaje Pragmático.

Tabla 1.2 Sugerencias de Gallego y Nevot (2007) para aprendizaje Activo.

Sugerencia	¿En qué consiste?
Evitar el miedo al fracaso	Stemberg (como se cita en Gallego y Nevot, 2007) comentó que a veces se ve al fracaso sólo como una estadística negativa. Los profesores pocas veces enseñan a sus estudiantes a aprender de sus errores.
Hacer algo nuevo	Guzmán (como se cita en Gallego y Nevot, 2007) comenta que se debe jugar con un problema aunque sea difícil para hacerle nuestro *amigo*.
“Activar la curiosidad” (p. 107)	“Es evidente que el profesor capta la atención de los alumnos de esta manera” (p. 107).
Rapidez	“Discutir con los estudiantes sus procedimientos para elaborar respuestas rápidas y evaluarlas posteriormente” (p. 107).
“Cambiar de actividad” (p. 107)	Experimentar primero y luego verificar propiedades de los objetos de experimentación.
Líder	Exponer un tema en clase, pero saber escuchar en un grupo de trabajo como moderador de una discusión.
“Comunicación oral” (p. 107)	Compartir por medio de la palabra lo que se hizo con otros compañeros
Fluidez	La clase debe ser amena y no debe notarse el paso del tiempo.

Tabla 1.3 Sugerencias de Gallego y Nevot (2007) para aprendizaje Reflexivo.

Sugerencia	¿En qué consiste?
Precisión al escribir	Usar precisión y notación entendible en el lenguaje matemático.
Que el alumno escriba	Fomentar el miedo a resolver un problema frente a la clase.
Serenidad	Los estudiantes deben controlar sus impulsos y buscar soluciones con actitud reflexiva.
Registro protocolario	Ser sistemático para registrar todo lo que aconteció en la resolución de un problema.
Recabar información	Tener meticulosidad para extraer información de gráficos y diagramas. Revisar lo que otro estudiante hizo y complementar apuntes.
Tiempo suficiente	Brindar tiempo suficiente para analizar un problema.
Participación	El estudiante debe participar en la resolución de un problema.
Buscar alternativas	Pozo (como se cita en Gallego y Nevot, 2007) sugirió entre otras cosas, definir una meta y las dificultades alrededor, distinguir los datos relevantes, buscar lo que no se tiene, conseguir un problema semejante al que se quiere resolver.
Interpretar	El profesor debe partir de los conocimientos previos y debe tener un discurso bien elaborado. “Piénsese en los alumnos que no entienden por qué se ha hecho una determinada transformación o un determinado paso en una demostración, debido a que el profesor ha dado por supuesto algo sabido” (p. 108).
Perseverancia	Una actitud de continuar en la consecución de una meta a pesar de adversidades es necesaria para aprender matemáticas.

Tabla 1.4 Sugerencias de Gallego y Nevot (2007) para aprendizaje Teórico.

Sugerencia	¿En qué consiste?
Tareas estructuradas	Trabajar en las tareas aunque nos desagraden de forma ordenada.
Dependencia	El estudiante confía en su profesor y en sus compañeros para que le expliquen algo que no entendió.
Formular y comprobar conjeturas	Fomentar la capacidad del estudiante para hallar una respuesta aunque no sea correcta.
Observar	"La observación de una actividad suele ser útil para su posterior realización independiente" (p. 109).
Cómo y qué preguntar	Guzmán (como se cita en Gallego y Nevot, 2007) sugiere que una pregunta es un *anzuelo* que genera una actividad inquisitiva. El profesor debe preguntar si los estudiantes conocen un problema similar, si saben cuál es el objetivo o si existen palabras en el texto de la clase que no entiendan.
Hacer cuestionamientos	Sternberg (como se cita en Gallego y Nevot, 2007) comenta que el pensamiento creativo comienza con la pregunta ¿por qué…?
Experimentar	Proponer al estudiante la posibilidad de entender cómo un matemático llegó a un algoritmo o concepto matemático.
Seleccionar información relevante	Separar datos de información cultural en un problema dado.
"Formulación algebraica" (p. 110)	El alumno debe explicar las expresiones algebraicas en sus propias palabras.
Memorizar	Memorizar enunciados o fórmulas cuyo significado se ha comprendido.

Tabla 1.5 Sugerencias de Gallego y Nevot (2007) para aprendizaje Pragmático.

Sugerencia	¿En qué consiste?
Practicar	"No basta con tener buenas ideas, sino también la capacidad de ponerlas en práctica, trasladar el pensamiento a la acción" (p. 110).
Recabar ayuda de expertos	Buscar el pensamiento flexible e intuitivo del experto ante la resolución de un problema.
Aprender del profesor	El estudiante revisa junto con el docente la aplicación adecuada de un algoritmo.
Observar y experimentar	Contrastar conjeturas y experiencias.
Matemáticas en la vida diaria	Mostrar en qué aspectos de la vida se usan las matemáticas.
Resolver ejercicios	Los estudiantes deben aplicar lo que saben y resolver retos.
Imagen	"Las nuevas generaciones aprenden desde que nacen mediante imágenes" (p. 111). Las imágenes ayudan a comprender procedimientos más que las fórmulas.
Buscar Matemáticas en la comunidad	El estudiante debe comprender cómo el aprendizaje matemático está presente en lo que hace su comunidad escolar y social.
"El resultado importa" (p. 111).	Entender que el aprendizaje matemático requiere precisión.

Newble y Entwistle analizaron la conducta de los estudiantes en lo que se refiere a motivación intrínseca y extrínseca. Estos autores clasificaron tres enfoques, los cuales están descritos en la tabla 1.6.

Tabla 1.6 Enfoques investigados por Newble y Entwistle

Enfoque	¿En qué consiste?
Aprendizaje estratégico	Estudiante competitivo que desea sobresalir en el grupo, su motivación es principalmente extrínseca.
Aprendizaje profundo	Estudiante crítico y reflexivo, quien desea comprender lo que ya sabe con nueva información, usa estrategias de autorregulación. Se presenta motivación intrínseca.
Aprendizaje superficial	El estudiante percibe al aprendizaje como algo externo e impuesto, "[s]u intención principal es acreditar el curso y hay cierto temor al fracaso" (Varela, 2006, p. 7). No se presenta autorregulación y su motivación tiene orientación extrínseca.

Aunque tanto Amado *et al*. (2009) como Gallego y Nevot (2007) no mencionaron la motivación como factor en sus investigaciones; los trabajos de Newble y Entwistle permiten valorar el papel del profesor para estimular los aprendizajes estrategicos y superficiales, al descuidar la motivación intrínseca en los estudiantes. Debe tenerse en cuenta que los estudiantes modifican sus estilos de aprendizaje, no conservan uno fijo.

1.3. 2 Estilos de enseñanza de los profesores

Amado *et al*. (2008) cuando citan a Felder y Pérez, enfatizan que debería existir compatibilidad entre los estilos de aprendizaje de los estudiantes y los estilos de enseñanza de los profesores, su cercanía mejoraría el rendimiento de los grupos y argumentan:

> Para ello, en primer lugar, el profesor debe tener muy claro cuál es su estilo natural de enseñanza (intuitivo, sensorial, deductivo, visual, verbal, global, secuencial, etc.) para que pueda adaptarse a su grupo. Por otra parte, deberá conocer las características de los estudiantes con respecto a sus estilos de aprendizaje (intuitivo, sensorial, visual, verbal, deductivo, global, secuencial, etc.) identificar quiénes hacen mayoría, quiénes los que difieren de las cualidades promedio, etc. En función de esto se podrán determinar y adecuar las mejores opciones de enseñanza y aprendizaje que tomen en cuenta tanto las características del profesor como las de sus estudiantes (p. 2).

Pinelo (2008) citó a Grigorenko y Sternberg, investigadores que en 1995 reconocieron que los distintos estudios realizados pueden agruparse en tres enfoques que están resumidos en la tabla 1.7:

Tabla 1.7 Enfoques para analizar estilos de aprendizaje

Enfoque	Características
Centrado en la cognición	"[C]onsiste en conocer como los individuos perciben y realizan sus actividades intelectuales" (Pinelo, 2008, p. 18).
Centrado en la personalidad	Myers y Myers distinguieron: dos actitudes, extroversión e introversión; dos funciones perceptuales, la intuición y la sensación; dos funciones de decisión, el pensamiento y la intuición y dos formas de negociación, la percepción y el juicio. Gregory en 1984 hizo dos categorías:

Enfoque	Características
	➢ abstracto y concreto con respecto al espacio ➢ secuencia y aleatorio con respecto al tiempo Miller realizó las siguientes categorías: ✓ analíticos vs. holísticos (globales) ✓ subjetivos vs. Objetivos ✓ emocionalmente estables vs. emocionalmente inestables
Centrado en la actividad	Se basa en la relación entre los estilos de enseñanza y aprendizaje, es el enfoque más utilizado.

También Pinelo (2008) mostró la clasificación de Burke y Garger, que data de 1988 y tiene puntos de coincidencia con la propuesta de Grigorenko y Sternberg, véase la tabla 1.8:

Tabla 1.8 Clasificación de Burke y Garger

Estilo	Descripción
Centrado en la cognición	Son las diferencias perceptuales quienes afectan el qué y cómo se recibe el conocimiento. La percepción es el estado inicial de la cognición para adquirir, procesar y utilizar información.
Centrado en la conceptualización	Existen cuatro maneras de pensar: divergente, convergente, lineal o aleatoria. “Algunas personas verbalizan sus ideas para entenderlas, otras piensan rápidamente, espontáneamente e impulsivamente, o por el contrario lo hacen de manera lenta y reflexiva.” (Pinelo, 2008, p. 18)
Centrado en los afectos	Se considera a la motivación, las emociones y el juicio individual. “Algunas personas se motivan internamente, otras se motivan con factores externos; mientras unos toman decisiones calculadas, lógicas y racionales, otros lo hacen de manera subjetiva, basados en sus percepciones o emociones” (Pinelo, 2008, p. 18)
Centrado en la conducta	Síntesis de los anteriores.

Burke y Gager (citados por Pinelo, 2008) comentan que los patrones básicos de personalidad afectan la conducta personal y profesional. Si afectan al aprendizaje se llaman estilos de aprendizaje, si se plasman en la enseñanza se llaman estilos de enseñanza. Los estilos cognitivos pueden moldearse por la experiencia y reflejan la forma en que una persona usa su inteligencia. En el caso del docente, surge el problema de la inconsciente tendencia a favorecer a los estudiantes que tienen su estilo de aprendizaje, como lo señaló Alonso en 1997. Para Kolb el docente tiene cuatro facetas mostradas en la tabla 1.9.

Tabla 1.9 Objetivos específicos de cada faceta del papel de instructor según Kolb

Papel del instructor	Objetivo
1. Ayudante, modelo a seguir y colega	Desarrollar el conocimiento y el entendimiento personal
2. Facilitador del proceso y especialista en tareas	Apreciar y entender el cómo y por qué de las cosas
3. Intérprete de un campo específico de conocimiento y comunicador de información	Adquirir y dominar el conocimiento y actitudes
4. Entrenador y asesor	Aplicar activamente lo aprendido a situaciones reales

Fuente: Cuadro 1 de Pinelo (2008, p. 20).

Pinelo (2008) comenta que los estilos de aprendizaje tienen algunas ventajas como son: “[p]roporcionan estructuras para construir sesiones, facilitando una mejor planificación, aprendizaje técnico y enseñanza de conocimientos” Boyce (como se cita en Pinelo, 2008, p. 19). Por eso es importante revisar la tabla 1.10 donde se muestra la relación entre los estilos de aprendizaje de Kolb con los roles del profesor que propuso Pinelo en su cuadro 2 en 2008.

Tabla 1.10 Rol del profesor y estilos de aprendizaje de Kolb

Rol del profesor	Estilo de aprendizaje
Ayudante	Divergente
Facilitador	Reflexivo
Entrenador	Acomodador
Intérprete	Convergente

Wheeler y Marshall en 1986 tomando como referente las propuestas teóricas de Kolb redactaron un Inventario del Tipo de Instructor que se utiliza para mejora profesional no como prueba psicológica. Pinelo (2008) usó este inventario para efectuar un estudio estadístico entre profesores de Piscología en la FES Zaragoza de la UNAM. En su estudio el rol de Ayudante se transformó en Oyente, el rol de facilitador en Director y los otros roles conservaron sus nombres intactos. Los profesores del rol Oyente crean un ambiente de aprendizaje afectivo y promueven la autonomía de sus estudiantes, los profesores del rol Director no permiten que el estudiante participe y dan conferencias, los profesores del rol Intérprete permiten pensamientos mas no acciones en el aula y en la carrera de Psicología se basan en la metodología del Estudio de Casos; por último los profesores del rol Entrenador facilitan discusiones y promueven aprendizaje basado en tareas y problemas. Toman en cuenta los juicios de los estudiantes para el proceso de evaluación. Aunque Pinelo no explica si esta participación en la evaluación es autoevaluación, evaluación del trabajo de los compañeros o evaluación de la clase del profesor.

Pinelo en su investigación halló diferencias entre hombres y mujeres en lo que se refiere al rol Oyente, puede pensarse que las profesoras se preocupan por las emociones e intereses de sus estudiantes. En lo que se refiere a experiencia docente encontró que los profesores más experimentados tienden al rol Entrenador. Pinelo (2008) concluyó que un profesor no posee un estilo de enseñanza predominante y que las diferencias individuales entre ellos corresponden al tiempo que utilizan un estilo particular.

1.3. 3 REFLEXIONES SOBRE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE.

De los teóricos anteriores se puede elaborar una breve hipótesis: que los estudiantes exitosos en matemáticas aprenden por medio de gráficos y diagramas, son visuales; tienen aprendizaje autorregulado y son reflexivos. También pueden ser acomodadores de acuerdo con Kolb y auditivos de acuerdo con el modelo VAK. Por supuesto, no se debe descartar del aprendizaje en Matemáticas a los estudiantes *kinestésicos* a quienes les agrada trabajar en equipo; el hecho de que sean impulsivos no implica que no posean autoeficacia y autorregulación.

En cuanto a los profesores no han reflexionado sobre sus propias estrategias cognitivas y metacognitivas. Por ejemplo, aun entre los adultos no es fácil pedir ayuda o adaptarse al trabajo en equipo. Organizar información, vincular la nueva con la anterior o intentar retos para probarse a sí mismo; son estrategias que el profesor debería transmitir en clase.

Un factor muy importante en la enseñanza de los adolescentes es el grupo de pares, que en ocasiones domina el interés y la atención de los jóvenes; las habilidades sociales necesarias para usar al grupo de pares a favor de la clase y no como factor distractor es una línea de investigación poco socorrida. El profesor no debe actuar de forma empírica sino basándose en la teoría psicopedagógica y planificar su clase con estrategias de las cuales está convencido y también de las cuales conoce su validez teórica.

Un propósito es que el docente trabaje con el grupo de modo tal, que se promueva el trabajo en equipo, pero en este trabajo deben intervenir estrategias cognitivas como la organización de la información y metacognitivas como la vinculación de un conocimiento previo con uno nuevo. De este modo la gestión que el profesor haga sobre el grupo ayudará a que los jóvenes comiencen a creer en su eficacia en problemas matemáticos y autorregular su aprendizaje.

CAPÍTULO 2. LA PARÁBOLA Y EL APRENDIZAJE COOPERATIVO.

2.1 LA ENSEÑABILIDAD DE LAS MATEMÁTICAS.

Los seres humanos no aprenden de la forma en que la ciencia evoluciona y la ciencia se enseña a las nuevas generaciones por la necesidad que posee una comunidad científica de tener nuevos investigadores como lo indica Florez (1994), pero el contexto de enseñanza o la respuesta cultural a la que se refiere dicho autor, incide sobre los nuevos conocimientos "afectando el proceso de elaboración y formulación de los proyectos y de los informes de investigación" (p. 76). Además del valor que tiene la ciencia por los conocimientos tecnológicos que emanan de ella y como éstos transforman la vida de la sociedad humana.

La investigación científica no tiene razón de ser, hasta que no se transforma en un artículo o conferencia, la forma en que es comunicado el conocimiento científico va de la mano del contexto de enseñanza de cada época. Actualmente, en la ciencia moderna de acuerdo con Florez (1994) cada conocimiento es "un nódulo más de un sistema teórico encadenado lógicamente, sustentado y argumentado en forma demostrativa" (p. 77). El científico fundamenta su saber, con la esperanza de que la sociedad en general, le aceptará reflexiva y críticamente. Cualquier avance conceptual se muestra como una teoría elaborada. Para un científico no sólo hay reglas lógico-formales, sino un marco de referencia en el cual se comunica con sus colegas. "La objetivación de su descubrimiento no es ajena al efecto de comunicación que se propone lograr" (Florez, 1994, p. 80). Tanto los métodos de investigación como la demostración no se separan del significado de la actividad creadora del científico. No obstante, "no hay que confundir la enseñabilidad de una ciencia con su enseñanza, ni mucho menos con la pedagogía" (Florez, 1994, p. 79). De algún modo no existe un grupo de clase donde los estudiantes hagan preguntas que el sistema de instrucción científica formalizada considere razonables y coherentes.

Por ejemplo, Einstein no ahorró en suposiciones, argumentos ni ecuaciones para sustentar su teoría de la relatividad; rebatió a la mecánica clásica formulada por Newton al variar el marco teórico. No tuvo ayudas audiovisuales para su teoría y usó como ejemplos: trenes en movimiento y relojes. Es importante lo que destaca Florez (1994): "[e]n el seguimiento de las exposiciones científicas de Einstein se descubre no sólo al físico matemático, sino también al maestro que enseña y configura su investigación desde el contexto de la enseñanza" (p. 81).

Marx, por su parte, diferenció el contexto lógico-dialéctico para indagar conceptos claves con la finalidad de "descifrar la estructura y funcionamiento del modo de producción capitalista" (Florez, 1994, p. 82), detectó conceptos elementales, llegó a determinaciones simples y abstractas que le permitieron ir en direcciones de ida y regreso para construir un todo jerarquizado.

La enseñanza se convierte en un marco de inteligibilidad implícito resultante de la investigación cuando se formulan y exponen intersubjetivamente las investigaciones científicas. De acuerdo con Kuhn, el concepto de paradigma se ha entendido como *ejemplar*; procedimientos típicos para plantear y solucionar problemas dentro de una comunidad de expertos. Del mismo modo en que un estudiante toma un ejemplo de su libro de texto, así mismo el investigador busca "*semejanzas* entre problemas aparentemente ajenos dentro de ciertos límites" (Florez, 1994, p. 83). Se olvida que el conocimiento científico es un proceso cognitivo estructural, intuitivo y heurístico; el producto de una investigación científica "debe elaborarse de manera lógico-deductiva, paso por paso, estableciendo el puente entre el „marco conceptual" que alienta la hipótesis y las conclusiones y generalizaciones encontradas" (Florez, 1994, p. 84).

El papel del pedagogo consiste en diseñar estrategias y modelos adecuados para quitar las nociones residuales de etapas del desarrollo intelectual de una persona que debieron ser superadas; pues al no ser vencidas, se transforman en obstáculos para el aprendizaje científico. Los obstáculos mencionados por Florez (1994) son el subjetivismo y el egocentrismo, la causalidad única y el razonamiento teleológico. La pedagogía debe entonces comprender, diseñar y experimentar modelos de intervención para las matemáticas. No sólo se trata de caracterizar el pensamiento lógico-formal, sino contenidos y propiedades relacionados con el tema que aprenderá el estudiante. Florez (1994) comenta que los *organizadores previos* propuestos por Ausubel para un aprendizaje significativo deben ser claros y estables además de "resaltar las *diferencias* entre el nuevo aprendizaje y el conocimiento preexistente" (p. 86). Las diferencias no deben diluirse y hay que partir de lo general y abarcador; es aconsejable usar la secuencia lógica de sus diferentes divisiones e interdependencias, éstas funcionarán como organizadores previos. Sería conveniente incluir en la formación docente experiencias de transición entre los principios de las ciencias puras acerca del desarrollo humano y sus aplicaciones pedagógicas; también estrategias y procedimientos de enseñanza en contraposición de la solución de problemas en el aula.

La familia y el contexto crean disposición de una persona para aprender una asignatura o disciplina, Florez (1994) indica la labor del pedagogo y de algún modo del profesor:

> [E]l pedagogo debe acoger y definir los contenidos, experiencias, lenguaje y metodologías más compatibles y productivos para la enseñanza de nuevos conocimientos, y el clima interpersonal y social que asegure mejores efectos educativos para el desarrollo de la personalidad y creatividad del alumno (p. 88).

Como lo comenta Florez (1994, p. 88) Bruner consideró que un tema puede ser explicado a cualquier persona siempre y cuando, se represente la estructura del tema en función de cómo piensa el sujeto. Al pasar de los años las representaciones se hacen más poderosas. Los adolescentes y los niños tienen ventaja sobre los adultos, pues ellos extraen elementos de su estructura cognitiva para aprender algo nuevo a nivel abstracto y lógico-formal; pero deben atenderse sus lagunas generadas en los ciclos escolares ante la desarticulación con la vida sociocultural del entorno escolar.

A los epistemólogos también les preocupa el contexto de enseñanza, sobre todo a aquéllos que lo prefieren como objeto de reflexión tal es el caso de Piaget, Kuhn y Bachelard como lo menciona Florez (1994, p. 89). Para Kuhn los científicos se forman en la resolución de problemas. El aprendizaje es una invitación a realizar transformaciones sobre los datos o estímulos que el sujeto recibe. La estructura cognitiva no es estable y debería acomodarse a nuevas formas de producción interior. Muchos estudiantes se quedan en el nivel egocéntrico, piensan que los objetos se mueven en la dirección en que se les empuja aunque se muevan en otra dirección. El sentido común como diría Bachelard es un obstáculo epistemológico, además se hace un uso incorrecto de analogías en el lenguaje. La misma instrucción científica mantiene aislados los conocimientos, los jóvenes no pueden enlazar un concepto previo con el anterior.

Debe entenderse que los profesores de matemáticas requieren conocimientos pedagógicos, deberían de comprender que una disciplina hermenéutica es la pedagogía y como tal pretende la comprensión de la interacción entre el contexto del aprendiz y el contexto de la enseñabilidad, tal y como lo comenta Florez en su página 105.

Muchos de los errores de razonamiento son atribuibles a la *falta de discriminación entre conceptos*. Las estrategias de pensamiento científico, bajo la guía del profesor, se transforman en estrategias de aprendizaje cuando se parte de situaciones compartidas de modo que se hagan preguntas relevantes.

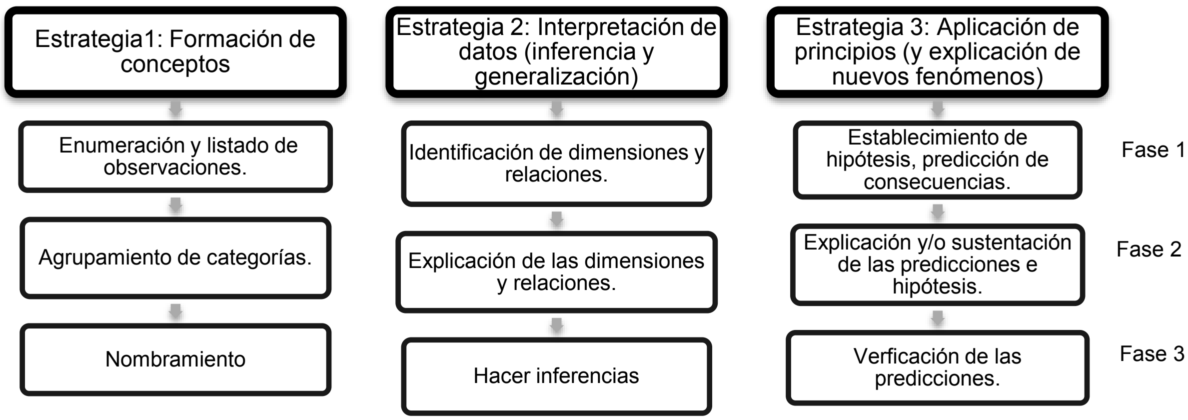


Diagrama 2.1. Modelo inductivo de Taba (Florez, 1994, p. 94)

El modelo inductivo de Hilda Taba propone tres tareas del pensar, los jóvenes encuentran preguntas estimulantes que les introducen a un tema- problema. Para Florez (1994) la secuencia de actividades es la sintaxis de las estrategias pedagógicas, el profesor provoca aprendizajes “de acuerdo con la fase por la que atraviesa el estudiante en su tarea de aprender a pensar” (p. 93).

Clifton Chadwick presentó una estrategia cognitiva que presenta “una forma deductiva basada en investigaciones de procesamiento semántico adelantadas por Greeno” (Florez, 1994, p. 94). Florez lista seis pasos esenciales que son:

1. Identificar claramente el problema a resolver y representarle detalladamente.
2. Generar alternativas de respuesta.
3. Seleccionar lógicamente las alternativas que prometen más en lo referente a la solución del problema.
4. Confrontar o ensayar las alternativas seleccionadas.
5. Supervisar el proceso de solución “a la luz de la „retroalimentación‟” (Florez, 1994, p. 94).
6. Evaluar la alternativa escogida según criterios.

Chadwick propone hallar una estrategia y evaluar si el problema propuesto puede ser resuelto como un caso particular de problemas ya resueltos. Taba propone formar categorías de conceptos relacionados, inferir relaciones entre las categorías y elaborar una hipótesis que permita justificar la resolución del problema propuesto que pertenece al conjunto de problemas estudiado.

2.2. APRENDIZAJE COOPERATIVO EN EL AULA.

De acuerdo con Camelo, García, Castillo y Merchán (2009) una estrategia es "un procedimiento organizado, formalizado y orientado a la obtención de una meta claramente establecida" (p. 110). Para Eggen y Kauchak en 2005 el aprendizaje cooperativo es un modelo de enseñanza formado por estrategias que persiguen que un grupo de individuos construyan conocimiento al compartir y ampliar la información que poseen de un tema. "El aprendizaje cooperativo es definido por un conjunto de procesos que ayudan a las personas a interactuar para lograr una meta específica o desarrollar un producto final, por lo general ambos relacionados directamente con un contenido" (del Valle y López, 2003, p. 4).

Molano en 2006 indicó que el *trabajo cooperativo* permite aprender a los seres humanos a trabajar con otros semejantes como lo narran Camelo *et al*. (2009, p. 110). ¿Por qué es importante el aprendizaje cooperativo? ¿Por qué aprender a trabajar juntos? En 1996 Jacques Delors desde la UNESCO señaló que "la educación es un proceso permanente que debe orientarse al desarrollo de potencialidades" (Camelo *et al*., 2009, p.110). En la Declaración Mundial sobre la Educación Superior para el siglo XXI, la UNESCO de 1998 propuso cuatro pilares básicos para la vida: *aprender a ser*, *aprender a convivir*, *aprender a aprender* y *aprender a hacer*. Estos pilares no se restringen al nivel educativo Superior, es importante que los estudiantes les desarrollen para adquirir valores, habilidades, actitudes y conocimientos a lo largo de su vida.

Partiendo de la tendencia educativa de realizar trabajo orientado por un profesor que coordina a un grupo de estudiantes en clase, del Valle y López (2003) distinguen entre dos enfoques para este propósito, el enfoque cooperativo y el enfoque colaborativo. En ambos enfoques los grupos de trabajo son heterogéneos porque hay diversidad étnica, de género y distintos niveles cognitivos en los integrantes. Básicamente la diferencia entre ambos enfoques para estos autores estriba en el rol del docente y la forma en que se realizan las estrategias de aprendizaje.

En el enfoque cooperativo el docente dirige y controla actividades individuales y por equipo; mientras que en el enfoque colaborativo, el profesor es un mediador que primeramente orienta al equipo en la búsqueda de información y luego, promueve que sus miembros compartan experiencias y conocimientos. El enfoque colaborativo se usa para solucionar problemas, comunicación de ideas y presentación de proyectos. En este enfoque, la autoridad del profesor es compartida con los equipos, se "descarta la idea de que para aprender es indispensable seguir las concepciones de alguien más competente" (del Valle y López, 2003, p. 3) y se presenta una distribución equitativa del conocimiento entre el docente y los equipos de estudiantes.

¿Por qué es importante el aprendizaje en grupos cooperativos? Los trabajos mejor remunerados siempre están asociados a las habilidades interpersonales, pues se debe "conseguir que los demás cooperen, guiarlos, enfrentarse a los complejos problemas relacionados con el poder y la influencia y ayudar a la gente a resolver sus problemas para trabajar con otros" (Johnson y Johnson, 1999, p. 30). No hay evidencia estadística en México, pero en Estados Unidos de América un estudio datado en 1982 comentó que el 90% de los despidos no se debían a falta de habilidades técnicas sino a relaciones interpersonales pobres como lo reportaron Johnson y Johnson en 1989 (1999, p. 30).

El equipo de investigación encabezado por Johnson y Johnson elaboró conclusiones en cuanto al rendimiento de los estudiantes cuando trabajan en situaciones de aprendizaje cooperativo que son:

- Rendimiento académico. Una situación de aprendizaje cooperativo es superior a una situación individualista o competitiva si las tareas no son simples o mecánicas.
- Relaciones socioafectivas. Se incrementa el sentimiento de solidaridad y ayuda mutua entre los integrantes de un grupo de trabajo. Se da un incremento de la autoestima.
- Tamaño del grupo y productos de aprendizaje. Trabajan mejor los grupos de a lo más seis integrantes y requieren un producto final.

En su artículo, Herreid (2007) destaca cinco elementos clave del aprendizaje cooperativo.

- Interdependencia positiva. Para que un equipo funcione requiere dos cosas, una tarea clara y un objetivo grupal, la tarea exigirá que todos trabajen para completar el trabajo. "[D]eben cooperar o fallar, porque la tarea es demasiado compleja consume tiempo para hacerla en solitario" (p. 128).

- Rendición de cuentas a nivel individual y grupal. El equipo como un todo debe valorar el logro de sus objetivos e individualmente cada integrante debe rendirse cuentas sobre sus contribuciones. No es válida una especie de sabotaje entre los integrantes del equipo.

- Interacción promotora. Hace referencia a la compartición de recursos y la retroalimentación entre pares dada a través de conclusiones desafiantes. Los estudiantes deben actuar de manera confiable, procurándose. éxito mutuo. Es aconsejable que los grupos de aprendizaje trabajen en clase.

- Habilidades interpersonales y de grupos pequeños. "La gente debe ser enseñada a trabajar en grupos. El liderazgo, la toma de decisiones, la construcción de confianza, la comunicación y la gestión de conflictos son habilidades que tienen que ser enseñadas justo como precisamente y a propósito son enseñadas las habilidades académicas" Johnson, Johnson y Holubec (como se cita en Herreid, p. 128).

- Procesamiento de grupo. Los estudiantes deberían ser capaces de evaluar el funcionamiento de su equipo y arreglar desajustes internos. En opinión de Herreid aquellos grupos que trabajan bien por largos periodos resuelven sus conflictos internos por sí mismos.

Por su parte Camelo *et al*. (2009) señalan como principios del aprendizaje cooperativo la interdependencia positiva, el principio de contradicción y el de corresponsabilidad. Lo interesante es el desarrollo de intereses comunes entre los estudiantes que desarrollan estrategias de aprendizaje cooperativo. El compromiso individual debe ser coherente con las recompensas obtenidas y con los roles que desempeñarán los estudiantes en el grupo cooperativo. Además, se dan dos niveles de interacciones interpersonales, el primer nivel está formado sólo por los estudiantes y el segundo por los estudiantes y los docentes. En ambos se requieren habilidades sociales para la escucha activa, la comunicación y la valoración de lo que el otro piensa.

2 .2. 1 GRUPO DE APRENDIZAJE COOPERATIVO.

Cualquier grupo de aprendizaje es "una colección de personas que interactúan entre sí y que ejercen una influencia recíproca" Schmuck y Schmuck (como se cita en Díaz Barriga y Hernández, 2002, p. 102). Entre los miembros de un grupo de aprendizaje la interacción que debe darse entre las personas para que aprendan un contenido específico se llama interacción educativa y ésta persigue objetivos más o menos definidos en una tarea de aprendizaje como lo mencionaron Coll y Solé (como se cita en Díaz Barriga y Hernández, p. 103). Al interior de un grupo se presentan situaciones relacionadas con el estilo de liderazgo, manejo de expresiones afectivas, nivel de logro y recompensa alcanzados. Las habilidades sociales de los profesores y estudiantes están en juego en las estrategias que persiguen un aprendizaje en grupo.

Díaz-barriga y Hernández (2002, p. 107) comentan que Slavin definió una estructura de aprendizaje como aquella donde intervienen tareas a realizar, una estructura de autoridad y otra estructura para recompensar a los estudiantes. La estructura de autoridad es el grado de autonomía de los estudiantes para decidir y organizar sus tareas. La estructura de recompensa varia en la tipología de interdependencia establecida entres los integrantes de un grupo de trabajo. Para Díaz Barriga y Hernández (2002) "[E]n el aprendizaje cooperativo los resultados y,…, las recompensas, son beneficios tanto para sí mismos como para los miembros restantes" (p. 107).

Díaz Barriga y Hernández (2002) analizan las estructuras de aprendizaje en el aula. Señalan que en una estructura de aprendizaje individualista no hay objetivos comunes entre los estudiantes, el logro de aprendizajes depende de la capacidad y esfuerzo propios. Por otra parte, en la estructura de aprendizaje competitiva, los resultados del aprendizaje son desiguales y los compañeros de clase actúan como rivales, de hecho el beneficio parece ser un perjuicio ajeno como lo comentan: "[e]l alumno obtiene una mejor calificación cuando sus compañeros han rendido poco" (p. 108).

En estas estructuras de aprendizaje, los estudiantes con dificultades para aprender perciben una estratificación social en el aula que les lleva a pensar que son incapaces de aprender, "a descalificar las ideas u opiniones de otros, y terminan desarrollando conductas muy poco solidarias y actitudes competitivas irracionales" (p. 105); de hecho quieren participar menos con tal de que todo el grupo no participe.

Finalmente, se pretende generar equidad en el ámbito educativo a través de grupos de trabajo cooperativo. No se persiguen grupos de *pseudoaprendizaje* donde priva la desconfianza mutua y la competencia entre sus miembros o bien, grupos tradicionales de aprendizaje donde no hay disposición de ayudar al otro, cada quien se hace responsable de lo que le corresponde.

Los grupos de clase son informales, cuando los estudiantes están reunidos en una sesión, donde el profesor les enseña directamente una demostración, con las pretensiones de generar expectativas de aprendizaje o cerrar un tema. Un grupo formal trabaja en la consecución de un objetivo de aprendizaje durante una o más sesiones, sin mayores compromisos. En cambio, los grupos cooperativos pretenden relaciones estables y responsables entre sus miembros, de tal manera que se ayuden y apoyen entre ellos, en el afán de que todos aprendan.

Los investigadores del aprendizaje cooperativo Johnson y Johnson (1999), propusieron tres condiciones para que los grupos cooperativos funcionen: que los participantes sean positivamente interdependientes; que interactúen presencialmente [sin medios electrónicos], que compartan recursos de información y que surja retroalimentación entre ellos; y destrezas colaborativas y de procesamiento grupal. Estas condiciones requieren la promoción del docente y el involucramiento en tareas de aprendizaje cooperativo de los estudiantes.

2. 2. 2 TEORÍAS QUE SUSTENTAN AL APRENDIZAJE COOPERATIVO.

Como lo narran Johnson y Johnson (1999), el aprendizaje cooperativo tiene sus orígenes en el Talmud hebreo, este libro contiene reflexiones de la comunidad judía sobre temas religiosos, es ejemplo de una tradición oral que complementa al libro sagrado del judaismo. En el caso de los Estados Unidos de América, durante las últimas tres décadas del s. XIX, Francis Parker siendo inspector de escuelas en Massachusetts, implementó procedimientos de aprendizaje cooperativo. Más tarde, en 1924 John Dewey en su método educativo "promovió el uso de los grupos de aprendizaje cooperativo" (Johnson y Johnson, 1999, p. 15). Conforme la teoría constructivista, fue apoyada en el ámbito pedagógico surgieron estrategias encaminadas al desarrollo del aprendizaje individual a través del grupo de pares; aunque estos equipos de trabajo en el aula podían ser grupos de *pseudoaprendizaje* o grupos tradicionales como lo han mencionado Díaz Barriga y Hernández (2012, p. 109).

En la década de los cincuenta del s. XX comienzan los estudios naturalistas sobre situaciones individualistas, con la incursión del aprendizaje por descubrimiento de Bruner de 1960-1969 como lo mencionan Johnson y Johnson (1999, p. 7) surgen simposios como el de Nebraska en 1962, donde se analizan fenómenos como la cooperación y la confianza, hasta llegar a las investigaciones realizadas por David Johnson y sus colegas en 1970. Son tres las perspectivas teóricas que han guiado este desarrollo: la interdependencia social, la evolutiva-cognitiva y la conductista.

La teoría de la interdependencia social tiene sus orígenes en la Gestalt con Kurt Koffka, quien "sugirió que los grupos eran conjuntos dinámicos en los que la interdependencia entre sus miembros podía variar" (Johnson y Johnson, 1999, p. 8). Como lo mencionan Johnson y Johnson (1999) Kurt Lewin concibió al grupo como un todo dinámico al cual una tensión puede motivarlo hacia el logro de un objetivo y por su parte, Morton Deutsch formuló hacia finales de la década de los años cuarenta del siglo XX una teoría de la cooperación y la competencia; así pues la cooperación es la interdependencia positiva y la competencia es la negativa.

La perspectiva evolutiva cognitiva en el aprendizaje cooperativo tiene sus raíces en los trabajos de Piaget y Vygotsky como lo mencionan Johnson y Johnson (1999, p. 9). En el caso piagetano, tal como lo describen Johnson y Johnson "cuando las personas cooperan en su medio, surge el conflicto socio-cognitivo que crea desequilibrio cognitivo, que a su vez estimula la capacidad de adoptar puntos de vista y el desarrollo cognitivo" (Johnson y Johnson, 1999, p. 9). En el trabajo cooperativo un estudiante se desarrolla intelectualmente al conocer y conciliar los puntos de vista de sus compañeros sobre un tema con el suyo. La teoría evolutiva cognitiva propone lo mismo que la teoría de la controversia, está última propone pasos esenciales para confrontar puntos de vista sobre un tema entre pares que son:

> [L]a organización de lo que ya se sabe en una posición, la defensa de esa posición ante alguien que sostiene la posición contraria, el intento de refutar la posición opuesta y defender la propia de los ataques del otro, la inversión de perspectivas para poder ver el tema desde ambos puntos de vista simultáneamente y la creación de una síntesis en la que todos estén de acuerdo. (Johnson y Johnson, 1999, p. 9).

En la teoría vygotskyana, el conocimiento se construye a partir de relaciones sociales. Para Camelo *et al*. "las estructuras mentales, los procesos psicológicos superiores y la zona de desarrollo próximo se construyen mediante la interacción social" (2009, p. 114) La zona de desarrollo próximo implica que el desarrollo real de un individuo mejora al convivir con alguien más experimentado que le guie en el tema; el sujeto con experiencia acerca al sujeto inexperto a su desarrollo potencial.

Entre los aportes constructivistas que posee el aprendizaje cooperativo se encuentra el aprendizaje significativo de Ausubel que propone estrategias favorecedoras de la interacción entre docentes y estudiantes para construir conceptos, tal y como lo comentan Camelo *et al*. (2009, p. 114).

Como lo mencionan Díaz Barriga y Hernández (2002, p. 129) el aprendizaje cooperativo es un cuerpo teórico cuestionado, en primer lugar se consideran trabajos ateóricos las investigaciones de Deutsch y la teoría de Kurt Lewin; en segundo lugar los hermanos Johnson y Slavin se han enfrentado, al comparar los logros obtenidos por aprendizaje individualizado y los aportados por el aprendizaje significativo y por último, no se sabe si realmente los estudiantes son beneficiados en su aprendizaje al trabajar en grupos formales; aunque la formación de grupos heterogéneos es la más aconsejable para implementar estrategias de aprendizaje cooperativo.

¿Cuál es la relación entre el aprendizaje cooperativo y el pensamiento crítico? De acuerdo con las investigaciones realizadas por Spurlin, Dansereau, Larson, Brooks, O'Donnell, Hythecker, Lambiotte y Rocklin (como se cita en Johnson y Johnson, 1999, p. 22) en 1984, los estudiantes de los grupos cooperativos recurrían a la estrategia de elaboración, es decir, integraban la nueva información con los conocimientos previos que tenían, lo que produce que se desempeñen en un nivel superior. Herreid (2007) comenta que las estrategias de aprendizaje cooperativo favorecen habilidades del pensamiento como son: análisis, síntesis y evaluación.

Como lo comentan Johnson y Johnson (1999, p. 22) McKeachie en 1998, concluyó que en la mejora de las habilidades de pensamiento los estudiantes deben discutir entre ellos y verbalizar estrategias y métodos que estimulen el desarrollo de la *metacognición*; además el docente debe enfatizar los métodos y procedimientos de resolución de problemas en diversos ejemplos. También Johnson y Johnson (1999, p. 23) señalaron que para DiPardo y Freedman en 1988 las parejas de estudiantes en estrategias de aprendizaje cooperativo favorecen las actividades escritas de nivel superior.

2. 2. 3 BARRERAS A VENCER PARA EL APRENDIZAJE COOPERATIVO

Herreid (2007) comenta las dificultades que halló para implementar estrategias de aprendizaje cooperativo en el nivel educativo superior de EE UU. Las clasificó como barreras para el aprendizaje cooperativo en profesores, estudiantes y barreras administrativas.

Barreras para los profesores

La mayoría de los docentes universitarios en el área de ciencias:

- Desconocen las estrategias de aprendizaje cooperativo y las rechazan por considerar que son propias para los profesores de niveles escolares preuniversitarios.
- Exponen el tema o hacen lecturas grupales, no están acostumbrados a responder pequeñas preguntas, por lo cual la guía de una discusión no es una habilidad en ellos.
- No saben gestionar el trabajo de varios grupos.
- No quieren gastar tiempo revisando otros métodos de enseñanza. El uso de pruebas estandarizadas se dificulta por las demandas del pensamiento crítico del aprendizaje cooperativo en los estudiantes.

Ante la negativa por usar estrategias de aprendizaje cooperativo, Herreid narra lo sucedido en la Universidad McMaster en Hamilton, Ontario. En esta institución se trabajaba el método de aprendizaje basado en la resolución de problemas y los estudiantes de Medicina tuvieron lagunas de aprendizaje, dichas lagunas fueron llenadas rápidamente durante la residencia. Los estudiantes aprendieron a encontrar información y a analizarla.

Herreid (2007, p. 134) comenta que algunos expertos como Kegan insisten en que no se puede calificar a un grupo y prefieren calificar pruebas individuales. Los detractores de la calificación grupal consideran que el estudiante trabaja en grupo por un interés solamente personal. De acuerdo con Herreid (2007, p. 131) otra escuela de pensamiento considera que el trabajo en grupo debe ser una parte de la nota individual para incentivar a los estudiantes. Los proyectos del grupo simplifican la corrección de los trabajos a los profesores. Ante el problema de una evaluación este autor aconseja la coevaluación, es decir, entre los propios estudiantes se elaboran juicios sobre el valor de sus desempeños durante una tarea grupal.

Herreid (2007) comenta que los profesores jóvenes en EE UU no dejan la enseñanza tradicional por temor a cierto rechazo. En Colombia, Camelo *et al*. (2009) realizaron un estudio etnográfico con tres grupos de profesores: quienes estrictamente trabajan aprendizaje cooperativo, quienes trabajan estrategias afines y quienes promueven estrategias colaborativas en su clase; su investigación les permitió hallar “una contrapuesta al trabajo en grupo tradicional y…una forma alternativa de cualificación de las prácticas de trabajo en grupo” (p. 119). Estos autores confirmaron que la interdependencia positiva debe ser previa a la clase a través de lecturas que realizan los estudiantes. En opinión de ellos los estudiantes universitarios colombianos participantes en el estudio asumieron un rol activo y reflexivo sobre su propio aprendizaje.

Para Camelo *et al*., ante la puesta en marcha de estrategias de aprendizaje con grupos formales o informales aunque no haya fundamentación teórica en el aprendizaje cooperativo, debe resignificarse el rol docente, crear comunicación efectiva e interdependencia positiva, y además los estudiantes deben hacerse responsables de su formación y la de sus compañeros.

Un problema manifestado por Herreid (2007) es la cobertura del plan de estudios a través de estrategias de aprendizaje cooperativo. Este autor comenta que la metodología de investigación de los estudios de caso que suele usarse en psicología y medicina, en cuanto a docencia plantea la dificultad de definir la secuencia de casos a estudiar, como lo comenta en la página 131. Por supuesto que otro detalle es el tamaño del grupo de clase. La mayoría de las investigaciones se han realizado con grupos de a lo más treinta estudiantes. No lo manifiesta pero dividir a un grupo extenso en secciones es lo más aconsejable para que las estrategias de aprendizaje cooperativo funcionen.

¿Por qué el aprendizaje cooperativo se puede usar en Matemáticas? Como comenta Herreid (2007) en la página 127, las investigaciones realizadas por Johnson y Johnson de 1989 arrojaron que los estudiantes adquirieron más conocimiento en tareas que requieren habilidades matemáticas y verbales, cuando éstas son realizadas con estrategias de aprendizaje cooperativo frente a la realización en estructuras de aprendizaje competitivas o individualistas. Este autor y profesor propone que los profesores compartan sus estrategias y que investiguen sobre el aprendizaje cooperativo en sus departamentos dentro de la institución educativa a la cual pertenecen.

Herreid no menciona las habilidades sociales del docente o aquellas que deberían desarrollar los estudiantes; sin embargo manifiesta que la conferencia es muy socorrida por profesores decanos y nuevos, también comenta que el ego del profesor le causa problemas, se resiste a probar nuevas estrategias porque considera que es bueno en su trabajo tradicional.

Barreras para los estudiantes.

- Los estudiantes no reconocen que ellos deben ser responsables de su aprendizaje y piensan que el profesor holgazanea por pedirles que realicen estrategias de aprendizaje cooperativo.
- Los estudiantes de ciencias están acostumbrados a la enseñanza tradicional; “aunque las conferencias sean desorganizadas y aburridas, los mejores alumnos en Ciencias se sienten atraídos por el tema y tienen fe en que a largo plazo las cosas se pondrán mejor” (Herreid, 2007, p. 132).
- Entre los odontólogos y médicos hay un gran escepticismo hacia el aprendizaje cooperativo, quizás esto se deba a las calificaciones que han obtenido con el método tradicional.
- Los estudiantes de ciencias sociales reciben con más entusiasmo el aprendizaje cooperativo.
- A los alumnos no les gusta sentirse parte de un experimento, si perciben inseguridad en el docente le culpan de los problemas ocurridos en una sesión y, claro, también culpan a las estrategias de aprendizaje cooperativo.
- La competencia provoca que los jóvenes universitarios padezcan estrés en los primeros años de su licenciatura; quieren un buen sitio en el escalafón general. Al enfrentarse a estrategias de aprendizaje cooperativo sienten que sus compañeros de clase se aprovechan de sus logros.

Herreid (2007) comenta que quizás buenos estudiantes renuncian al aprendizaje científico por una clase aburrida. También señala los futuros problemas que enfrenta un docente en su interacción con los estudiantes durante las estrategias de aprendizaje cooperativo, en primer lugar la persona dominante, después el tímido que no participa y finalmente las luchas de poder dentro de los grupos.

Barreras administrativas.

- Quejas de estudiantes enojados con las nuevas estrategias con altos funcionarios de la Escuela.
- Por razones presupuestarias los grupos pequeños que facilitan el aprendizaje cooperativo son mal vistos. El profesor debe gestionar secciones de grupos grandes para trabajar en laboratorios o usar las estrategias de aprendizaje cooperativo en auditorios.
- La enseñanza merma el tiempo de trabajo de un investigador. Los catedráticos requieren de tiempo para escribir documentos de investigación que los promuevan en su trabajo. El tiempo dedicado a revisar y corregir trabajos, supervisar equipos y crear materiales didácticos les impide hacerlo.

Ante las barreras Herreid (2007) señala que el aprendizaje cooperativo es importante para reducir el alto índice de reprobación de algunos cursos y como profesor no deposita su confianza en las pruebas estandarizadas, considera que no proporcionan medidas exactas del aprendizaje de pensamiento crítico en los estudiantes. Por último señala que los estudiantes asisten a las clases porque se sienten comprometidos con sus compañeros y con ellos mismos. En este sentido Janke en 1980 como lo mencionan Johnson y Johnson (1999, p. 31) descubrió que la asistencia a clase de jóvenes con problemáticas emocionales aumenta si la clase tiene estrategias de aprendizaje cooperativo.

Cruz (2003) menciona cuatro razones de Karl Smith para apoyar al aprendizaje cooperativo en la enseñanza de las Matemáticas y la Ingeniería, sólo se rescatan tres de ellas:

1. La persona al organizar, resumir, elaborar, justificar y explicar; aprende porque realiza trabajo conceptual.
2. Los alumnos adquieren mayor aprendizaje si trabajan en cosas que les gustan.
3. "Cuando el aprendizaje es informal y social, se enfoca en problemas significativos, se crea un conocimiento interno. Ese conocimiento interno es una parte importante al llegar a ser miembro de una comunidad de práctica" (p. 8).

La razón mencionada por Smith y argumentada por Cruz (2003) fue omitida porque no está suficientemente fundamentada la relación de proporcionalidad directa entre el tiempo invertido en tareas en grupo con respecto del aprendizaje de los estudiantes. Además el *trabajo duro* es un término que Cruz no definió explícitamente.

El grupo es un ente muy importante, su capacidad para auto gestionarse puede llevar al éxito o al fracaso; sin embargo en el caso de la enseñanza de las matemáticas se tiene un ejemplo de la importancia del trabajo en grupos formales:

> Uri Treisman (1985), pionero en la enseñanza de cálculo en grupos de la Universidad de California-Berkeley. Él se dio cuenta que los estudiantes Afro-Americanos reprobaban cálculo en su primer año en una tasa más alta que otras minorías; mientras que los estudiantes Asiático-Americanos superaban a todos los demás. Él encontró que los estudiantes Afro-Americanos tendían a trabajar solos, mientras que los estudiantes

> Asiático-Americanos tendían a estudiar en grupos. Cuando Theisman [sic] estableció grupos de estudio para los estudiantes Afro-Americanos, su ejecución mejoró espectacularmente. (Herreid, 2007, p. 128).

Sin embargo Díaz Barriga y Hernández (2002) comentan tres obstáculos del aprendizaje cooperativo:

- Falta de consenso sobre el beneficio para todo tipo de estudiantes,
- Ventajas de la productividad grupal en contraste con el aprendizaje individual,
- Polémica de la relación entre la eficacia y las recompensas.

Como lo mencionan Díaz Barriga y Hernández (2002, p. 129) para Slavin la interdependencia está relacionada con la estructura de incentivos basada en cuatro principios:

- Las tareas deben requerir la acometida conjunta de los estudiantes.
- Recompensas idénticas para todos los integrantes del equipo.
- Las recompensas no deben basarse en medida del rendimiento global del grupo.
- Igualdad de oportunidades para trabajar por el éxito del equipo.

2. 2. 4 Diseño de situaciones de aprendizaje cooperativo

De acuerdo con Camelo *et al*. (2009) un profesor al elaborar la planeación de estrategias de aprendizaje cooperativo debe considerar un "proceso sobre el que los estudiantes construyen hipótesis, discuten y disciernen sobre conceptos de su interés" (p. 114).

Como lo comentan Díaz Barriga y Hernández (2002, p. 117) el docente debe trabajar con dos tipos de objetivos, los académicos y los encaminados a desarrollar la colaboración entre los estudiantes. Autores como Sapon y Levin en 1999 comentaron que el éxito de situaciones cooperativas de aprendizaje está dado por los vínculos entre el aprendizaje cooperativo con el currículo escolar y con la creación de aulas justas e inclusivas (como se cita en Díaz-Barriga y Hernández, 2002).

El Centro de Aprendizaje Cooperativo de la Universidad de Minnesota (como se cita en Díaz Barriga y Hernández, 2002, p. 116) propuso dieciocho pasos para estructurar la enseñanza en situaciones cooperativas, se señalan seis que son considerados claves para lograr éxito en el diseño de clases en entornos cooperativos:

- Planear materiales de enseñanza para promover la interdependencia,
- Asignar roles para asegurar la interdependencia,
- Explicar la tarea académica,
- Monitorear la conducta de los estudiantes,
- Proporcionar un cierre a la lección y
- Valorar el funcionamiento del grupo de clase.

En cada equipo se requieren ocho roles descritos por Johnson, Johnson y Holubec autores comentados por Díaz Barriga y Hernández (2002, p. 119) de los cuales los más interesantes son:

- Observador. Vigila la participación de todos.
- Mensajero. Consigue materiales para el equipo es su vocero ante otros equipos.
- Entrenador. Corrige los errores de los resúmenes de los integrantes del equipo.
- Compendiador. Resume las conclusiones del equipo.
- Secretario. Redacta el reporte de trabajo.
- Animador. Refuerza las contribuciones de cada integrante.

El docente para realizar efectivamente su labor en situaciones de aprendizaje cooperativas, de acuerdo con Woolfolk autor comentado por Díaz Barriga y Hernández (2002, p. 122) debe:

- Reconocer los puntos de vista de sus estudiantes.
- Esforzarse por comprender las ideas de sus estudiantes.
- Explicar la necesidad de restricciones en el trabajo dentro del aula.
- Fomentar la iniciativa personal de sus estudiantes.
- Evitar la crítica negativa, el control aversivo o la coerción, ante los desempeños deficientes de los estudiantes.

2. 2. 5. ESTRATEGIAS DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO.

De las diferentes estrategias para realizar situaciones de aprendizaje cooperativo, se retoman aquellas que persiguen un análisis de materiales escritos, para que los estudiantes puedan explicarse unos a otros los contenidos matemáticos a aprender. Las estrategias seleccionadas son:

- *Jigsaw*. Sus autores son Aronson, Stephan, Sikes, Blaney y Snapp como lo comentan Goikoetxea y Pascual (2002, p. 236). En esta estrategia se trabaja con equipos heterogéneos de seis integrantes. El tema a tratar se divide en seis partes como un rompecabezas, de modo que los estudiantes requieren las otras cinco partes para entender el tema. Así pues, un estudiante se convierte en experto al trabajar con miembros de otros equipos a los que se les asignó el mismo tema. Al regresar a sus equipos, los estudiantes se turnan para enseñar su parte. Las calificaciones son individuales y se basan en un examen del tema.

- *Jigsaw II*. El costo del material para cada parte dificulta la implementación del Jigsaw, o bien, no es posible seccionar el tema, o que los alumnos se vuelvan expertos en él. En estas circunstancias, Slavin en 1986 como lo comentan Goikoetxea y Pascual (2002, p. 37) hizo las siguientes adecuaciones: los estudiantes trabajan en equipos de 4 ó 5 integrantes; el profesor prepara el tema, con la posibilidad de cortar textos, añadir información o escribir material nuevo, según lo requiera; la tarea es grupal; todos los alumnos leen el tema completo, pero a cada miembro del equipo se le proporciona un subtema sobre el que debe ser experto; los estudiantes discuten los subtemas en grupos de expertos, y luego regresan a sus equipos para enseñar su parte. Como lo indican Goikoetxea y Pascual (2002) “[l]a recompensa, al contrario que en Jigsaw original, es grupal, en base a la suma de las puntuaciones obtenidas por los miembros del equipo en un examen individual sobre el tema completo” (p. 237).

STAD [*Student Teams Achievement Divisions*] Su autor es Robert Slavin como lo comentan Goikoetxea y Pascual (2002), dichos autores explican que la estrategia consta de equipos heterogéneos de cuatro o cinco integrantes, al igual que en *Learning together* dónde el docente expone una lección y permite que los estudiantes, en otro lapso de tiempo, se ayuden a dominar el material proporcionado. Díaz Barriga y Hernández (2002, p. 123) comentan que el material académico dividido en lecciones es otorgado al equipo y ellos deben asegurarse que todos los miembros dominen dicho material. Por otra parte, del Valle y López (2003) comenta que cada integrante estudia el material de la clase y "ayuda a sus compañeros a aprender con explicaciones, debates o ejercicios" (p. 6). ¿Cómo se evalúa? Goikoetxea y Pascual comentan que "[l]a recompensa es grupal, dependiendo del grado en que cada uno de los miembros del equipo haya mejorado su calificación respecto a la anterior calificación en un examen individual" (2002, p. 237); por otra parte Cruz explica:

> Se aplican exámenes individuales y sus calificaciones se comparan con sus propios promedios pasados, y se otorgan puntos basados en el grado en que los estudiantes puedan alcanzar o exceder sus ejecuciones anteriores, estos puntos se suman y forman calificaciones por equipo. (2003, p. 8).

El estudiante compite consigo mismo y todo el equipo recibe beneficio del interés de los integrantes.

TGT [*Teams Games Tourmaments*]. Sus autores son DeVries, Edward y Slavin como lo comentan Goikoetxea y Pascual (2002). Esta estrategia es similar a la estrategia STAD, pertenece junto con la estrategia STAD a un grupo de estrategias conocido como STL [*Student Team Lerning*]. ¿Cuál es su diferencia con STAD? En ésta se sustituyen los exámenes por torneos académicos semanales. Como lo mencionan Goikoetxea y Pascual (2002, p. 238): "Estos consisten básicamente en responder a preguntas, escritas en fichas dentro de una caja, sobre la lección presentada por el profesor y trabajada por cada alumno en sus correspondientes equipos". Cada integrante compite con miembros de similar nivel de rendimiento en los otros equipos, para obtener puntos para su equipo. El ganador tiene 6 puntos, el segundo lugar 4 y el tercero 2. Con ésta estrategia se proporciona a todos los miembros del grupo iguales oportunidades de contribuir en la puntuación grupal.

Otras estrategias que complementan a las investigadas en la Universidad de Minnesota son las propuestas por Díaz Barriga y Hernández (2002, p.126). Entre ellas se destacan:

- Lluvia de Ideas. Para que esta estrategia tenga eficacia, deben cuidarse los siguientes aspectos:
    - El problema a resolver debe tener varias opciones de solución y los estudiantes deben poseer conocimientos previos para fundamentar sus propuestas.
    - El grupo debe generar propuestas de solución.
    - Los estudiantes pueden modificar una propuesta que no es suya.

- Las propuestas deben registrarse en el pizarrón o enviarlas por correo electrónico por el secretario del grupo, de forma que todos tengan acceso a ellas.
- Las propuestas se evalúan en una sesión distinta a la de resolución.

El docente debe evitar censura o descalificación entre los participantes y modificar algunas ideas o poner en consideración otras características del problema. También debe solicitar a los estudiantes ideas poco usuales.

- Discusión guiada. Cooper dice que la discusión en el aula es “un procedimiento interactivo a partir del cual profesor y alumnos hablan acerca de un tema determinado” (como se cita en Díaz Barriga y Hernández, 2002, p. 149)

  Los estudiantes durante el diálogo entre el profesor y el grupo comparten información previa que tenían. Los aspectos más importantes que deben tener son:

  - Objetivos claros.
  - Introducción general del tema central del nuevo aprendizaje.
  - Animar la participación de los estudiantes.
  - Elaboración de respuestas abiertas.
  - Proporcionar tiempo suficiente para que los estudiantes contesten.
  - Respeto y apertura entre todos los participantes de la discusión.
  - “[L]a discusión debe ser breve, bien dirigida…y participativa” (Díaz-Barriga y Hernández, 2002, p. 150).
  - Anotar la información que los estudiantes proporcionen.
  - Cerrar la discusión con información esencial.

2.3 HABILIDADES SOCIALES.

Para que una persona logre liderazgo en un contexto social requiere de una serie de habilidades descuidadas en la enseñanza tradicional; sin embargo como lo señala Pulido (2009) también se pueden aprender. Las habilidades sociales son:

> [U]n conjunto de comportamientos eficaces o tipos de pensamiento en las relaciones interpersonales, que llevan a resolver una determinada situación social de manera efectiva y aceptable no sólo por el propio sujeto que demuestra la práctica habilidosa, sino también por el contexto social y cultural que le rodea. (Muñoz 2009, p. 2).

Para Pulido (2009) los componentes de las habilidades sociales son de tres tipos: conductual, cognitivo y situacional. Los dos primeros tienen relación con la conducta del ser humano y el último con factores externos que inciden sobre esta conducta. El diagrama 2.2 muestra los componentes conductuales mencionados por Pulido (2009) y el diagrama 2.3 los componentes cognitivos

<table>
<tr><td rowspan="7">Componentes conductuales</td><td rowspan="2">Verbales</td><td colspan="2">Inicio de conversación
Retroalimentación</td></tr>
<tr><td>Contenido</td><td>• Preguntas
• Peticiones
• Refuerzos
• Claridad</td></tr>
<tr><td>No verbales</td><td colspan="2">Contacto ocular
Gestos
Postura
Proximidad
Apariencia</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Paralingüísticos</td><td>Voz</td><td>• Volumen
• Tono
• Timbre</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tiempo de habla</td></tr>
<tr><td>Perturbaciones del habla</td><td>• Pausas
• Muletillas
• Vacilaciones</td></tr>
<tr><td>Mixtos</td><td colspan="2">Afecto
Conducta positiva espontánea
Escoger el momento adecuado
Escuchar</td></tr>
</table>

Diagrama 2.2 Componentes conductuales de las habilidades sociales

<table>
<tr><td rowspan="6">Componentes cognitivos</td><td>Competencia cognitiva</td><td colspan="2">Conocimientos sobre la conducta habilidosa
Costumbres sociales
Señales de respuesta
Empatía
Capacidad de solucionar problemas</td></tr>
<tr><td>Valoraciones subjetivas</td><td colspan="2">Preferencias y gustos
Escala de valores
Percepción interpersonal</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Expectativas</td><td>Relaciones</td><td>Conducta-resultado
Estímulo-resultado</td></tr>
<tr><td colspan="2">Autoeficacia
Positivas sobre consecuencias de la conducta
Sentimientos de indefensión</td></tr>
<tr><td>Autorregulación</td><td colspan="2">Autoinstrucciones/ autoverbalizaciones
Atribuciones
Autoestima</td></tr>
</table>

Diagrama 2.3 Componentes cognitivos de las habilidades sociales

Los componentes situacionales son el reglamento escolar o las normas del entorno en el que se dan las interacciones interpersonales, los roles de las personas y los estereotipos que son aplicables en determinados contextos sociales, la temperatura del entorno, la luz de una habitación y también se incluyen la raza, edad, género o estado civil de las personas. Pulido (2009) menciona tres habilidades sociales para el docente: *empatía*, *asertividad* y *escucha activa*. Por su parte Muñoz (2009) comenta seis grupos de habilidades sociales en el docente que se muestran en el diagrama 2.4.

<table>
<tr><td rowspan="6">Habilidades sociales docentes</td><td>Elementales</td><td>Escuchar al otro
Capacidad de comprender lo que el otro dice
Aprender a iniciar una conversación y conservarla
Formular preguntas
Hacer cumplidos sin zalamerías</td></tr>
<tr><td>Avanzadas</td><td>Aprender a pedir ayuda
Disculparse por un error cometido
Saber dar y seguir instrucciones</td></tr>
<tr><td>Planificación</td><td>Recogida de información
Toma de decisiones
Establecimiento de objetivos didácticos
Resolución de problemas</td></tr>
<tr><td>Emocionales</td><td>Saber reaccionar ante el enfado del interlocutor
Resolver situaciones de miedo</td></tr>
<tr><td>Evitar agresiones</td><td>Negociación
Autocontrol en situaciones difíciles
Defensa de derechos
Responder a bromas</td></tr>
<tr><td>Evitar estrés</td><td>Respuesta a falsas acusaciones
Hacer frente a las respuestas del grupo
Formulación o contestación de una queja
Prepararse para una conversación incómoda</td></tr>
</table>

Diagrama 2.4 Habilidades sociales docentes

Para Muñoz (2009) el docente requiere de ciertas herramientas que le doten de una conducta habilidosa socialmente que le evite situaciones conflictivas en el aula con sus estudiantes y fuera de ella con otros docentes. Las herramientas propuestas son:

- Autovaloración. Implica el cuidado del auto concepto y la autoestima personal al identificar valores y cualidades.
- Darse a respetar sin amenazas. Autodefensa al manifestar opiniones o posturas después de una reflexión. Firmeza sin exceso de dureza.
- Control del enfado. Ira constante en una persona muestra su fragilidad en futuras situaciones aún más conflictivas que las que enojaron. Es importante que el docente exprese tranquilamente su opinión, que contextualice problemas y busque soluciones.
- Disculparse sin protocolos. El docente debe asumir sus errores cuando los haya cometido. “En caso de error manifiesto, el docente deberá rectificar pues dicha actitud de cambio provocará el ser más estimado” (p. 6).
- Escucha activa. Escuchar sin pensar que se posee la razón, ofrecer salidas a las ideas de otros no silenciar el diálogo.

Tanto Muñoz como Pulido coinciden en la *asertividad* del profesor como la *escucha activa*. La primera como dice Vaello (s. f.) refiere una conducta donde “se defienden los derechos propios sin violar los ajenos” (p. 22). Las actitudes asertivas alejan al individuo de la docilidad extrema y de los ataques verbales o reproches hacia los demás. Vaello en su documento ofrece doce técnicas para afrontar discusiones asertivamente, se exponen diez de ellas en la tabla 2.1; se omite el parafraseo porque es parte de la escucha activa y el recorte porque implicaría una actitud pasiva o una actitud agresiva de acuerdo con las circunstancias que rodean la discusión.

Tabla 2.1 Técnicas para discusiones asertivas

Técnica	¿En qué consite?	Oración sugerida
1. Disco rayado	“Repetir insistentemente y de forma tranquila nuestro punto de vista.” (Vaello, s. f., p. 22).	“Lo he entendido, pero no estoy de acuerdo” (Vaello, s. f., p. 22).
2. Información mutua	“Escuchamos la versión de la otra persona, y después contamos nuestra visión alternativa.”	“Ya, pero yo opino…”.
3. Aserción negativa	“Reconocer una crítica justa sin dar demasiadas explicaciones.”. Es válido autocriticarse.	“Es cierto que podría haberlo hecho más rápido, lo siento”
4. Interrogación negativa	“Útil para conocer los sentimientos o ideas de los demás, facilitando la comunicación cuando nos critican.”	“¿Qué defecto encuentras a…?”.
5. Centrarse en el acuerdo	“Aunque haya desacuerdo en un 99, centrarse en el 1%. Puede convertir una actitud	“Coincidimos en que...”.

Técnica	¿En qué consite?	Oración sugerida
	hostil en amistosa.”	
6. Rehusar peticiones	“Dar razones para la negativa, respuestas concisas y a veces proponer alternativas, sin dar excusas.”	“Es la última vez que te lo pido...” “No sé qué voy a hacer... Estoy...”.
7. Acuerdo asertivo	“Admitir que se ha cometido un error, pero sin pensar ni admitir ser una mala persona.” “No defenderse ni contraatacar.”	“Eso es cierto. Gracias”
8. Repetir los sentimientos ajenos	“Se repite lo dicho por el otro, sin mostrar acuerdo alguno en lo que se dice.”	“Ya sé que para ti es muy importante que te preste…, pero”.
9. Pero	“Se admite una parte de la crítica que parezca razonable, pero manteniendo nuestra postura.”	“Es posible que…, pero…”
10. Ignorar selectivamente	“Si es grave, responder sólo a comentarios ajenos asertivos, pero no a los no asertivos.”	Sin ejemplo

Fuente: LA ESE: un antídoto contra los conflictos elaborada por Vaello (s. f., p. 23).

La actitud pasiva implica que la persona permite que otros abusen de ella, porque de ese modo se evita confrontaciones y aparentemente no recibe rechazo; sin embargo la persona acumula resentimiento. La actitud agresiva es propia de las personas que imponen sus ideas y derechos sobre los demás, el rechazo del entorno social sólo se nota en el momento en que las personas pueden optar por alejarse de alguien agresivo.

De acuerdo con Pulido (2009) los profesores pasivos no cumplen con su planeación didáctica porque permiten que algunos alumnos tomen decisiones en momentos indebidos de una sesión. Los profesores agresivos suelen infundirles temor a sus estudiantes antes que respeto pues llegan a ser autoritarios.

La escucha activa se logra cuando los interlocutores no caen en roles obstaculizadores como: hablante dominante, oyente indiferente e interrogador. Es importante prestar atención al interlocutor junto con un contacto ocular frecuente, no acaparar el diálogo y no pensar que se tiene la razón al ciento por ciento. Tampoco hay que mostrar desinterés a través del lenguaje no verbal y no hay que preguntar como si se lanzara un balón esperando que el otro responda. Las respuestas abiertas y la reformulación de los diálogos también ayudan a crear un clima agradable.

Los patrones de conducta negativa que deben evitarse en los diálogos son la ansiedad, los sarcasmos, la falta de sinceridad, la crítica destructiva, la falta de responsabilidad y la falta de autonomía.

De acuerdo con Johnson y Johnson (1999) en clase los estudiantes necesitan las siguientes habilidades sociales para lograr sus objetivos: “(1) llegar a conocerse y confiar en el otro, (2) comunicarse con precisión y sin ambigüedad, (3) aceptarse y apoyarse y (4) resolver sus conflictos de manera constructiva" (p. 30).

Como lo indican Johnson y Johnson (1999) Lew, Mesch, Johnson y Johnson en 1986 concluyeron que los estudiantes tímidos cooperan para aprender en grupos cooperativos y que eso les ayuda a aprender a resolver conflictos. Johnson y Johnson (1999) reiteran que "[a]quellos que carecen de habilidades sociales se encuentran aislados, alienados y en desventaja en los ámbitos vocacionales y profesionales" (p. 30); ellos también señalan lo sugerido por Slavin en 1977 para quien el aprendizaje cooperativo ayuda a los jóvenes con problemas emocionales a interactuar con sus compañeros. Esto es importante por la probabilidad alta de enfrentar conflictos en la vida. Johnson y Johnson comentan que las estrategias cooperativas brindan la oportunidad de aprender y practicar habilidades de resolución de conflictos de manera que se busque el respeto y el beneficio mutuo.

Johnson y Johnson (1985) propusieron ocho condiciones para desarrollar actitudes favorecedoras del aprendizaje, las cuales son retomadas de la página 32:

1. Adoptar las normas de los grupos de referencia a los que uno pertenece y a los que aspira a pertenecer y con los que uno se identifica, y adaptarse a ellas.
2. Comprometerse públicamente a adoptar las actitudes y las conductas deseadas (y ser considerado por los pares responsable del cumplimiento de los compromisos adquiridos).
3. Exponerse a modelos sociales visibles y creíbles.
4. Enfrentarse a información y pedidos vívidos y personalizados.
5. Discutir la información con los pares de manera que favorezcan el procesamiento cognitivo activo y el desarrollo de sistemas conceptuales perdurables.
6. Enseñar a otros la información que uno ha aprendido.
7. Adquirir motivación continua para aprender.
8. Formular la información recibida como ganancia o pérdida.

¿Cómo debe cuidarse la autoestima? Los estudiantes deben comparar positivamente sus propios atributos con los atributos de sus compañeros, de manera tal que la *autoaceptación condicional* no los lleve necesariamente hacia la envidia o la soberbia. Cuando los estudiantes laboran en estructuras competitivas y no tienen éxito se sienten inferiores y eso los aísla, por ello cooperar para aprender les ayuda a "configurar impresiones multidimensionales y realistas de las aptitudes ajenas y ofrecer realimentación precisa" (Johnson y Johnson, 1999, p.30).

2. 4. Evaluación del aprendizaje

La evaluación sirve para que el docente descubra los problemas de quien aprende y como lo comentan Hargreaves, Earl y Ryan (1998) "[l]a evaluación puede ser diagnóstica, formativa o recopiladora dependiendo del motivo que requiera su aplicación" (p. 186). En la evaluación inicial se identifica la naturaleza de comprensión de un estudiante con respecto de un tema para decidir si deben hacerse adecuaciones al programa de estudios que el estudiante deberá aprender. Se evalúa inicialmente a los estudiantes de modo informal a través de las respuestas que dan los estudiantes. Por su parte la evaluación formativa se da en diversos momentos durante un curso para mejorar la enseñanza que recibe el estudiante.

Existe también la evaluación basada en el criterio o en el resultado, que “equipara a los estudiantes con un nivel” (Hargreaves *et al.*, 1998, p. 187). Si se compara al estudiante con respecto a sus compañeros se considera una norma como referencia. Por último los autores mencionados comentan la evaluación *autoreferenciada o ipsativa* donde se analizan los rendimientos del estudiante con sus logros pasados.

Se evalúa para asignar una calificación y decidir la promoción de un estudiante al siguiente grado o nivel en una asignatura o su reprobación. Al docente evaluar le sirve para ofrecer ayuda individualizada, si es posible o para realizar modificaciones al plan de estudios como consecuencia de los saberes que tienen los estudiantes de un grupo.

De acuerdo con Díaz Barriga y Hernández (2002) la evaluación tiene dos funciones: la pedagógica y la social. La segunda está relacionada con la acreditación y promoción del sujeto de evaluación. La primera permite valorar el éxito de un proceso de enseñanza aprendizaje. Para estos autores, la evaluación tiene tres dimensiones: la normativa que tiene que ver con los fines administrativos e institucionales; la psicopedagógica que está basada en tres aspectos: conceptualización de la evaluación, funciones de las tareas de evaluación y “decisiones sobre qué, cómo y para qué evaluar” (p. 356). La dimensión de las prácticas de evaluación hace referencia a procedimientos, técnicas, instrumentos y criterios que sean utilizados para evaluar a los estudiantes, para los autores el instrumento no determina una concepción de la evaluación sino solamente cómo se le usará para dicho fin.

La conceptualización está relacionada con un modelo teórico y las funciones con un planteamiento curricular de los contenidos. Para que una práctica docente no tenga un sesgo tecnicista ni burocrático, debe tener un referente psicopedagógico y curricular bien delimitado.

Se pretende en la evaluación constructivista que el alumno sea corresponsable de su proceso de aprendizaje, a través de la evaluación formativa, la cual lleva al estudiante a un control autónomo y autorregulado de lo que aprende. La evaluación analiza la eficacia de las estrategias de enseñanza desarrolladas en el aula.

Para la evaluación formativa el proceso de enseñanza aprendizaje sufre reestructuraciones a partir de las acciones que realizan los estudiantes. Importan por un lado, las relaciones logradas entre el contenido y los conocimientos previos y por otro, los errores de los estudiantes entendidos como obstáculos epistemológicos. La visión positiva del error del estudiante descubre la calidad de las representaciones que elaboró. Claro que también se valoran los aciertos, los logros del estudiante.

La evaluación formativa tiene tres modalidades que regulan “[l]os procesos de construcción realizados por los alumnos sobre los contenidos escolares” (Díaz Barriga y Hernández, 2002, p. 412) y la eficacia de las estrategias pedagógicas utilizadas. Estas modalidades son: la regulación retroactiva que pretende reforzar tareas de aprendizaje donde se dieron fallas; la regulación proactiva que propone tareas de ampliación de lo aprendido y tareas para quienes se equivocaron y por último, la regulación interactiva dada después de las preguntas que elabora el docente en clase. El profesor en la regulación interactiva hace confirmaciones, rechazos, recapitulaciones y usará estrategias que mejoren la organización de los contenidos a aprender. La regulación interactiva se efectúa por medio de técnicas de evaluación informales como son la observación y la entrevista. Las regulaciones proactiva y retroactiva se usan cuando falla la regulación interactiva. En la evaluación formativa se persigue un equilibrio entre las técnicas de evaluación informal y las técnicas de evaluación semiformal e informal.

2. 4. 1. TÉCNICAS DE EVALUACIÓN

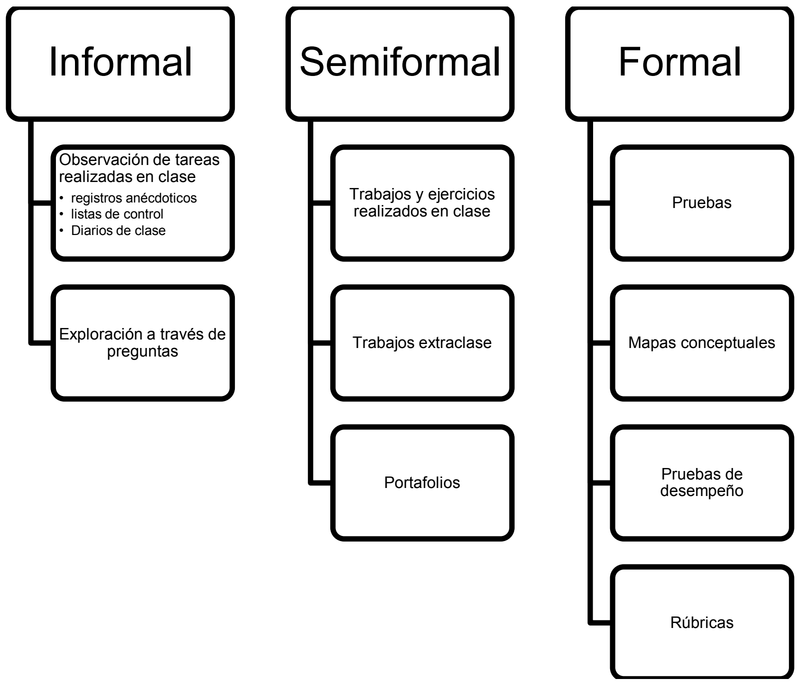


Diagrama 2.5 Tipos de técnicas de evaluación descritas por Díaz Barriga y Hernández (2002)

En el diagrama 2.5 se muestran las técnicas de evaluación a utilizar en una evaluación formativa y se describen sólo aquellos que interesan a este documento.

2. 4. 1. 1. TÉCNICAS INFORMALES

Registros anecdóticos.

Estas fichas contienen descripciones de lo observado en el aula o en un debate. La observación puede darse de forma sistemática o asistemática, puede ser abierta o focalizada. Para que los alumnos no se sientan observados debe darse una observación más informal y menos instrumentada. Se registran el habla de los estudiantes, sus gestos, estrategias y formas de razonamiento.

El habla espontánea permite la valoración sobre aquello que los estudiantes comprenden de un tema, sean concepciones erróneas, hipótesis o estrategias; también brinda información sobre la funcionalidad de una estrategia de enseñanza. Para que el habla sea eficaz debe existir un clima de respeto en el aula y familiaridad con los contenidos. Los gestos dan cuenta del grado de motivación de los estudiantes en la clase y del valor funcional de una estrategia de enseñanza. Los profesores expertos son sensibles a todos los factores que permiten interpretar y evaluar una clase. Por otra parte, la observación incidental es subjetiva.

2. 4. 1. 2. TÉCNICAS SEMIFORMALES

Trabajos y ejercicios realizados en clase

Es importante que estos trabajos no sean desmotivadores y que estén acordes a los objetivos de la clase; deben permitir que los estudiantes “reflexionen, profundicen y practiquen sobre determinados conceptos o procedimientos” (Díaz Barriga y Hernández, 2002, p. 372). El docente debe buscar durante su ejecución una regulación oportuna de su desarrollo y también debe comunicar mensajes sobre el éxito que tiene un estudiante o un grupo formal.

Los estudiantes por medio de un intercambio de trabajos coadyuvan a la evaluación de los ejercicios. Se establecen criterios bien definidos para evaluar el trabajo realizado y se discuten respetuosamente los avances obtenidos.

En el cuarto capítulo de su libro Lafourcade (1972) propone dentro de las pruebas escritas las pruebas de respuestas guiadas y explica que debería indicarse el tiempo de respuesta por pregunta y que además los estudiantes deberían responder las preguntas en distintas hojas; además debe aumentarse el número de preguntas y disminuir el tamaño del contenido a preguntar. Por otra parte, los estudiantes deben tener claro que es explicar, comparar, interpretar o resumir para que contesten adecuadamente las preguntas. Las respuestas son comparadas con una respuesta modelo para calificar un cuestionario.

2. 4. 1. 3. TÉCNICAS FORMALES

Pruebas

Las pruebas definidas por Díaz Barriga y Hernández (2002) son “situaciones controladas donde se verifica el grado de rendimiento o aprendizaje logrado por los aprendices” (p. 379). El aprendizaje es cuantificable en números y aparentemente la evaluación realizada es objetiva. Las pruebas pueden ser estandarizadas o formuladas por los profesores para atender sus necesidades pedagógicas. En las pruebas “se compara a un sujeto contra su grupo de referencia” (p. 379). Las críticas hacia las pruebas señaladas por estos autores son: a) se miden capacidades generales no habilidades específicas, b) “[l]a distribución o curva normal sólo ocurre cuando tenemos un número amplio de calificaciones” (p. 379); c) se obtiene la respuesta del estudiante a un ítem, pero no hay retroalimentación sobre por qué fallo y d) a los estudiantes rara vez les agrada su estatus individual después del examen.

Al aplicar una prueba existen dos objetivos: que las pruebas tengan validez, que midan precisamente el aprendizaje que pretenden medir y que sean confiables; para Díaz Barriga y Hernández esto significa que “en condiciones similares permita obtener resultados similares” (p. 379). En el octavo capítulo de su libro Lafourcade (1972) explica que la confiabilidad trata de estimar el grado de consistencia de una prueba. Este autor considera que el docente antes que conocimientos estadísticos, requiere saber las características de una prueba que influyen en su confiabilidad; el primer factor es el número de ítems, de acuerdo con Lafourcade (p. 183) se necesitarían seiscientos cuarenta ítems en una prueba para adquirir una confiabilidad de 97%; el grado de homogeneidad entre los ítems, que todos los ítems se refieran al mismo tema; la capacidad de un ítem para calificar distintos niveles de rendimiento, aquí los distractores y el lenguaje con el que se construyó el ítem entran en juego; la prueba no debe tener un ítem donde nadie se equivoque o donde todos acierten; la puntuación de algún ítem no dependerá de la opinión del docente sobre la respuesta. Ebel, un autor comentado por Lafourcade, menciona que una prueba de respuestas cortas tiene dificultad media, si la mitad de un grupo responde acertadamente.

También en el octavo capítulo Lafourcade (1972) explica que la validez recae en la construcción de la prueba basada en los objetivos del aprendizaje a medir; a pesar de determinarse con cuidado la relación entre el contenido a evaluar y el ítem más adecuado para éste, si las consignas no son claras o las bases de los ítems fueron descuidadas y no se administró la prueba eficientemente; la validez de la prueba será deficiente. La relación entre el contenido a evaluar y su correspondiente ítem se puede establecer con base en lo que Lafourcade (1972) aconseja:

> Si los resultados del aprendizaje son muy simples, será suficiente que se seleccionen pruebas de respuestas breves, o por pares; si son más complejas pruebas de opciones múltiples. Si se quiere apreciar la capacidad de creación, organización, etc., pruebas de ensayo o composición (p, 200).

Díaz Barriga y Hernández (2002) critican la Taxonomía de Bloom usada por Lafourcade, al señalar que sirve para valorar contenidos de tipo declarativo, que se centra en productos no en procesos y que no tiene el mismo principio de jerarquización al tratar los verbos analizar y sintetizar como productos y no como juicios. Además para estos autores los ítems de complementación y de opción múltiple requieren el recuerdo de información “aunque si son adecuadamente elaborados pueden valorar niveles de comprensión (parafraseo reproductivo y productivo) y hasta aplicación de los conocimientos” (p. 381). No obstante, no niegan que la elección del ítem y su respuesta tienen subjetividad por parte del diseñador. También cuestionan si los ítems miden la elaboración de argumentos y pensamiento crítico. Por supuesto, consideran que se usa aprendizaje memorístico al realizar un examen y esto es poco significativo.

Ítems de complementación

¿En qué consisten? En escribir sobre la línea correspondiente la palabra, frase, número o símbolo que responda a la oración propuesta. ¿Para qué se usan? Se usan para evaluar la memorización de contenidos.

Tabla 2.2 Comparación entre ventajas y desventajas en la construcción de ítems de complementación

Ventajas	Limitaciones
Facilidad de construir si se les compara con ítems donde se elije una respuesta.	No sirven para medir contenidos inexpresables en números, símbolos o palabras
Las respuestas no son adivinanzas.	Si la construcción del ítem es deficiente resulta difícil calificarle.
Útiles para calificar contenidos asociados a dibujos, esquemas, diagramas, mapas, etc.	

Las sugerencias que se deben tener en cuenta al construir este tipo de pruebas son:

1. El ítem será redactado para una respuesta específica.
2. No usar expresiones de los libros consultados en clase.
3. “Expresar el enunciado de la base de modo que las respuestas sean totalmente específicas” (Lafourcade, 1972, pág. 92).

4. “[L]as preguntas directas son preferibles a las oraciones incompletas en razón de que hacen más específica la respuesta” (Lafourcade, 1972, pág. 92).
5. Evitar indicios que conduzcan a la respuesta.
6. Procurar que se coloquen espacios en blanco a la derecha y que todos sean del mismo tamaño.

Ítems de opción múltiple

Este tipo de ítem está formado por una proposición o base de indagación y la respuesta, un número, una palabra, un símbolo o un enunciado que hace verdadera a la proposición; la respuesta debe ser hallable entre diversas opciones. La proposición puede ser expresada directamente o a través de una oración incompleta.

Para resolver un ítem de opción múltiple no se usarán preguntas como: qué, dónde y cuándo; quien ejecute la prueba debe pensar en la mejor respuesta. Como Lafourcade (1972) lo comenta en el quinto capítulo de su libro, Lindquist consideró a los ítems de opción múltiple como superiores en la medición de objetivos como: discriminar de relaciones, inferir conclusiones, predecir situaciones, interpretar, evaluar y extrapolar, entre otras.

Tabla 2.3 Comparación entre ventajas y desventajas en la construcción de ítems de opción múltiple

Ventajas	Desventajas
Permite diagnosticar deficiencias en los aprendizajes de los estudiantes por medio distractores.	Dificultad de su construcción
Ayuda a precisar las implicaciones y las derivaciones de una cuestión.	Incapacidad para medir pensamiento divergente o creador.

Las sugerencias para construir ítems de opción múltiple son:

1. Seleccionar el contenido que constituirá el motivo de cada ítem. En primer lugar existe una cuestión para la cual es difícil determinar la mejor respuesta. Lafourcade (1972) considera que para algunos contenidos son preferibles los ítems de alternativas constantes o los ensayos escritos. En segundo lugar, la cuestión no debe ser trivial y si ese fuera el caso es preferible usar pruebas de respuestas cortas. Además, no deben usarse las palabras del autor del texto de la bibliografía consultada en clase, para no dar indicios sobre la respuesta.

2. Organizar la base del ítem con base en las siguientes observaciones:
    a. Mostrar completamente la base de indagación de la cuestión a medir.
    b. Deben darse los elementos necesarios para comprender qué se está preguntando.
    c. Determinar las palabras que son parte de la base de indagación, las cuales pueden usarse en varios ítems, mas no en las respuestas.
    d. Evitar proposiciones que incluyan la palabra no.
    e. Dar datos suficientes en la base, sin dar la respuesta, de modo que el alumno no se confunda y caiga en una respuesta distractor.
    f. Las definiciones deben estar en la respuesta, para no facilitar la memorización y en la base de indagación se debe preguntar la definición.

3. La respuesta. En la elaboración de ésta, no deben existir dos opciones que señalen la respuesta correcta. Para preguntar los límites de una entidad federativa, entre los distractores habrían dos o más respuestas posibles; en dado caso, se tendría otro tipo de ítem, al cual Lafourcade llamó ítem de verdadero-falso agrupado.

4. Los *distractores.* El distractor separa al estudiante que si estudió de quien no lo hizo. Para elaborar un distractor se consideran dos aspectos: el primero es que la *distanc*ia entre el distractor y la respuesta correcta sea justa, los distractores no deben ser obvios y no deben confundir al ejecutante de la prueba y los ítems deben tener al menos tres alternativas. Un ítem puede tener dos opciones de respuesta, pero como advierte Lafourcade esta situación se da ante contenidos de los cuales es difícil encontrar muchos distractores.

5. Los reveladores de la respuesta. No se debe dar veladamente prioridad a la respuesta correcta. La respuesta deseada no debe ser el enunciado más largo. Los distractores deben ser congruentes con la base de indagación, para que no sea fácil hallar la opción correcta. Tampoco deben darse respuestas parecidas a las de la clase, que sean claves para responder sin razonar. Por supuesto que, la respuesta no debe tener mayor generalidad que los distractores, entonces sería evidente cuál es la respuesta acertada.

a. La opción que contiene la respuesta correcta debería ser colocada en cualquier lugar dentro de la lista de opciones de respuesta, para evitar un patrón que facilite la resolución de una prueba. En algunas ocasiones una opción en un ítem, es la respuesta en otro. Se debe tener cuidado con las formas gramaticales usadas para la redacción del ítem; si solamente la respuesta coincide en género y número con los sustantivos de la base de indagación, los alumnos la escogerán sin problemas.

6. Adecuación del lenguaje. Considerar la concordancia gramatical entre las opciones y la base de indagación; hay que usar una cantidad apropiada de palabras y deben usarse adecuadamente los significados de las palabras con las cuales se construye el ítem.

7. Grado de dificultad de y discriminación de cada ítem. Debe descartarse cualquier ítem demasiado sencillo. Los ítems de dificultad media son los más indicados. En una prueba con ítems de cuatro opciones, la dificultad media, se calcula considerando una probabilidad de 25% de atinar a una respuesta correcta en cada ítem. Si a este número se le suma el 100% y se divide a la suma obtenida por 2, se obtendrá un cociente igual al 62.5%. Este resultado implica que la prueba debe ser resuelta por el 62.5% de los alumnos correctamente.

   La dificultad de un ítem recae en los objetivos a medir; un docente no se debe solicitar lo que no ha enseñado. Para el tiempo de Lafourcade el ítem debía medir diferencias individuales, lo que se contrapone con el aprendizaje cooperativo basado en la evaluación formativa.

8. Las consignas. El estudiante debe comprender la dificultad de su tarea y cómo ha de resolverla. Lafourcade (1972) comenta que encerrar en un círculo la letra de la respuesta correcta quizás sea la mejor consigna. Se aconseja que las opciones estén colocadas en columna, así es más difícil leerlas e identificar la respuesta correcta. Los ítems no deben estar ordenados con base en los objetivos del curso, sino alrededor de

un eje de ideas. Ello refuerza en los estudiantes un esquema de comprensión, referente a múltiples variantes de un contenido, ya que los ítems deberían analizar el tema de desde distintos enfoques.

Ítems por pares

Los ítems de este tipo asocian símbolos, números frases u oraciones. La columna izquierda contiene a las premisas y la columna derecha a las respuestas con sus respectivos distractores. El inconveniente que poseen radica en su puntaje, si éste corresponde a un punto por respuesta o al ítem completo.

¿Para qué se usan? Para medir el aprendizaje que implica la asociación de dos o tres ideas. En matemáticas se les usaría para asociar: causas y efectos, términos y definiciones. Principios y ejemplos y usos y normas.

Tabla 2.4 Comparación entre ventajas y desventajas en la construcción de ítems por pares

Ventajas	Desventajas
Útiles para identificar nombres, relacionar dos secuencias o clasificar objetos.	Dificultad para hallar *distractores* que tengan el mismo grado de dificultad
A través de ellos se examina información factual	Inviable medir el nivel de comprensión de un tema, la organización o un posible análisis del tema.
Relativa facilidad para realizarles	Este tipo de ítem es evidente

Lafourcade propuso en su sexto capítulo sugerencias para construir este tipo de ítems las cuales son:

1. Usar premisas homogéneas.
2. Limitar el número de premisas a un intervalo de [5,10].
3. Deben existir más respuestas que premisas.
4. ”[L]os indicios aparecen cuando se mezclan términos en plural y singular en ambas listas, o cuando coinciden el género de alguna proposición con el de la respuesta o no se toman en cuenta otras claves gramaticales más o menos parecidas” (Lafourcade, 1972, pág. 132).
5. Si no se usan fórmulas ni expresiones algebraicas, debe ordenarse lógicamente cada columna.
6. Si es posible, crear alguna variación a lo que se ha revisado en textos.
7. El ítem debe caber en una cuartilla.
8. Las consignas deben ser claras para saber si las alternativas se pueden usar más de una vez y cómo se expresará la respuesta esperada
9. El número de premisas indica la presencia de igual número de ítems.
10. Cada respuesta debe tener un puntaje.

Rúbricas

Díaz Barriga define a las rúbricas como matrices de verificación que evalúan el desempeño de un profesor o estudiante en una tarea dada, de acuerdo con distintos niveles de dominio; se dan puntuaciones numéricas por cada nivel y estos están graduados desde el nivel novato al nivel experto.

Para elaborarlas, de acuerdo con Airasian (como se cita en Díaz Barriga y Hernández, 2002, p. 390) se siguen ocho pasos: en primer lugar deben identificarse los aprendizajes a lograr, los procesos implicados y los productos esperados; en segundo lugar se identifican los criterios de desempeño, esto a través de localizar el desempeño idóneo; en tercer lugar se eligen los aspectos a evaluar y se establece la cantidad de niveles a considerar [entre tres y cinco] en una escala de clasificación; en el cuarto sitio se formula el nivel óptimo; en el quinto sitio los restantes o como diría Díaz Barriga (2013) "formular la descripción de los criterios de ejecución de cada nivel y aspecto a evaluar" (diapositiva 10 de 20). El paso seis consiste en comparar a cada sujeto a evaluar con los niveles de desempeño, en el séptimo se selecciona el nivel que mejor describe el aspecto a evaluar y en el octavo paso se asigna este nivel de ejecución al sujeto de evaluación.

Tabla 2.5. Ejemplo de una rúbrica.

	Excelente	Cumplió bien	Cumplió
Preparación	Buen proceso de preparación, muestra profundidad en el desarrollo del tema.	Cumplido en la presentación de los resúmenes aprovecha el tiempo para aclaraciones.	Presenta el resumen y la actividad planeada sucintamente.
Sustentación Teórica	Domina el tema propuesto, logra conectarlo y explicarlo en sus diferentes aspectos. La evaluación logra analizar el tema.	Logra explicar el tema relacionando los diferentes aspectos de éste. La evaluación tiene en cuenta los diversos aspectos presentados.	Conoce el tema superficialmente, logra explicar los puntos planteados. La actividad de evaluación es poco adecuada.
Manejo de la Discusión	Bien liderada, suscita controversia y participación.	Es Organizada, puede contestar los diferentes interrogantes.	La dirige, no resalta los puntos más importantes no llega a conclusiones.
Participación	Pertinente. Activa, es fundamental para el buen desarrollo de cada uno de los temas.	Oportuna, aporta buenos elementos, presta atención a las distintas participaciones.	Está presente. Presta poca atención a las distintas participaciones.

Nota: Matriz de Valoración para una Presentación Oral realizada por Aguirre (2002)
Fuente: Eduteka. Tecnologías de Información y Comunicación para Educación Básica y Media.

2. 4. 2. EVALUAR APRENDIZAJE COOPERATIVO

Debe comprenderse que en el aprendizaje cooperativo los estudiantes esencialmente resuelven controversias, analizan sus posturas en busca de consenso y no deberían aferrarse a ellas como sucede en un enfrentamiento. Evaluar la cooperación entre seres humanos es una tarea difícil, Díaz Barriga y Hernández (2002) comentan que el profesor "requiere conjugar los aspectos cuantitativos y cualitativos del aprendizaje logrado por los alumnos" (p. 120). Ellos sugieren la elaboración de un reporte de trabajo, problemas resueltos por el grupo de trabajo y exámenes. La evaluación formativa se da en dos niveles: individual y grupal.

Hargreaves *et al.* (1998) señalan que los exámenes favorecen la pasividad mental del estudiante y le desvían de procesos creativos. Por otra parte un examen permite al estudiante tener una idea precisa sobre sus logros mediante la comparación con sus pares y con estudiantes de otras escuelas. Una crítica significativa de los exámenes es que obligan al profesor a estar al pendiente de lo que enseña para que sus estudiantes no reprueben exámenes aplicados por instancias evaluadoras y además los alumnos sólo aprecian el conocimiento que les es evaluado a través de un examen.

En un trabajo que requiere la cooperación de las personas no pueden excluirse los exámenes pues ayudarán a dar justicia ante la asignación de la calificación individual; sin embargo es aconsejable evaluar el aprendizaje cooperativo por medio de *portafolios* y rubricas, los cuales son instrumentos que ayudan a valorar el rendimiento de un estudiante durante un curso. En un portafolio se conservan evidencias de los logros de un estudiante dentro de un grupo de trabajo o a nivel individual, lo cual le permite reflexionar sobre lo que han hecho y aprendido. Para que no se afecte la interdependencia positiva de un grupo formal o informal, a los estudiantes debe solicitárseles un reporte, proyecto, ensayo, maqueta, protocolo, prototipo o guión donde todos los miembros del equipo se necesiten para realizarlo.

La evaluación constructivista para Díaz Barriga y Hernández (2002) evalúa el grado en que los estudiantes construyen interpretaciones significativas y valiosas de los contenidos revisados en una secuencia didáctica, y el grado en que los estudiantes valoran la funcionalidad de dichas construcciones. El aprendizaje significativo es progresivo y sólo puede valorarse cualitativamente, de acuerdo con Díaz Barriga y Hernández (2002). La construcción de significados no se detiene y es difícil evaluarla finamente en cuanto a naturaleza, complejidad e integración de los significados construidos. El docente recurrirá a su habilidad y experiencia para proponer instrumentos de evaluación informativos que le permitan evaluar el grado de significatividad de los contenidos revisados en el aula.

Para evaluar aprendizajes cooperativos hay que realizar una evaluación formativa y una evaluación formadora; la segunda, de acuerdo con Díaz Barriga y Hernández (2002) parte de la heteroevaluación proporcionada por el docente hacia la autoevaluación del estudiante. En el trayecto son importantes: la coevaluación, entendida como un juicio emitido por el docente y el estudiante y la evaluación mutua que implica la evaluación de trabajos del equipo B en el equipo A. También comentan la negociación entre el docente y el grupo de clases para comprender el por qué y el cómo de un proceso de evaluación.

De acuerdo con Jorba y Casellas comentados por Díaz Barriga y Hernández (2002) “los alumnos que son capaces de desarrollar habilidades autorreguladoras son más eficaces en su aprendizaje…tales habilidades son aprendibles por mediación de alguien que sabe más” (p. 411). No hay que olvidar que los alumnos que interpretan de mejor manera los objetos y los criterios de evaluación considerados por su docente, obtienen notas aprobatorias.

La evaluación del trabajo grupal

Herreid (2007) propone la coevaluación, la técnica utilizada por él consiste en que dentro de un equipo de cinco integrantes a cada integrante se le permita calificar el desempeño de sus compañeros con diez o nueve; aunque omite mencionar la calificación mínima que un compañero le puede asignar a otro, estas calificaciones se promedian y quien obtenga diez obtendrá el 100% de la calificación grupal, la calificación grupal es proporcional al promedio resultante de la coevaluación. Probablemente una evaluación de estas características genere mucha insatisfacción entre algunos estudiantes; por ello Herreid deja la decisión sobre su uso en el docente.

De acuerdo con Díaz Barriga y Hernández (2002) para facilitar la autonomía de los equipos debe vigilarse la estructura social de éstos distribuida en roles. Es indispensable evaluar cómo funciona el grupo, aconseja consultar el cuadro 4.7 (p. 122) que elaboraron, del cual solo se listan las preguntas a continuación:

- ¿Cómo están trabajando en lo individual cada uno de los estudiantes dentro del grupo? ¿Se muestran implicados, motivados, responsables?
- ¿En qué medida las preguntas y asuntos importantes están siendo discutidos de manera inteligente por los miembros del grupo?
- ¿Hay estudiantes que parecen estar tomando la iniciativa la mayor parte del tiempo?
- ¿Hay estudiantes que se sienten inhibidos para hablar aun en el contexto del grupo pequeño?
- ¿Hay estudiantes que tienden a dominar la discusión e imponerse a los demás?
- ¿Hay alumnos que parecen demasiado ansiosos en aceptar lo que otros han dicho mostrándose pasivos o renuentes a expresar su propio punto de vista?
- ¿Hay personas o grupos que parecen „correr" con las cuestiones a resolver o las actividades a realizar, revisándolas sólo brevemente, con un mínimo de profundidad en su análisis?
- ¿Algún grupo o alumno tiende a salirse del tópico, divagando en anécdotas personales no relevantes a la tarea o asunto a discutir?
- ¿El „clima" del grupo se caracteriza por el respeto mutuo, la aceptación y la empatía; o, por el contrario, hay segregación, rechazo, exclusión, presión o competencia destructiva, y apatía?

Los investigadores colombianos Camelo *et al.* (2009) mencionan que los profesores deben usar *rúbricas* y fungir como observadores y reporteros, de manera que a través de notas cuantitativas y cualitativas, los docentes describen el desempeño de los estudiantes al usar el material diseñado para la sesión, el dominio conceptual de los integrantes del equipo, "las actividades desarrolladas, la preparación de las actividades, la habilidad de incluir a los compañeros en la presentación y la maestría en el lenguaje" (p. 116).

2.5 DIFICULTADES PARA LA ENSEÑANZA DE LA PARÁBOLA

Antes de aprender temas de geometría analítica se debe estudiar álgebra. Los estudiantes tienen problemas para pasar de un modo informal de representación y de resolución de problemas como se da en aritmética a otro más formal como ocurre en álgebra. Como lo mencionan Kieran y Filloy (1989) "[e]l álgebra requiere un cambio de pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones" (p. 229).

Los estudiantes tienen problemas porque desean un resultado numérico como ocurre en aritmética, por ello comprenden el significado de la ecuación $2x+5=15$, pero erran en cuanto tropiezan con una ecuación como $2x+3=x+4$. Además carecen de conocimientos sobre jerarquía de operaciones, realizan operaciones con dos elementos, si se les dan tres sumandos realizan primero la suma de los dos primeros sumandos y luego a la suma de éstos le suman el tercer sumando. No conciben al signo igual como una equivalencia entre las operaciones de los miembros izquierdo y derecho alrededor de éste.

El mal uso de fórmulas que calculan el área o perímetro de figuras, hace que vean a las literales como etiquetas, lugares donde sustituir un valor, y que no comprendan el concepto de variable. También los estudiantes confunden las variables con incógnitas en ecuaciones. Lo que Collis en 1975 llamó *no aceptación de la falta de clausura* interfiere para que elaboren una representación acerca de términos como $a+3$ o $2x+5y$, quieren asociarlos con alguna cantidad específica y desgraciadamente no comprenden, como lo mencionan Kieran y Filloy (1989), que el procedimiento es la respuesta.

En cuanto a resolución de ecuaciones los estudiantes se quedan anclados en métodos intuitivos como recubrimiento, contar hacia atrás o contar hacia adelante. A los aprendices de álgebra les cuesta trabajo juzgar las expresiones equivalentes de adición/sustracción y cometen dos tipos de errores.

- Intercambio de sumandos. Los estudiantes piensan que $x+37=150$ tienen la misma solución $x=37+150$.
- Redistribución. Piensan también que tienen soluciones idénticas las ecuaciones: $x+37=150$ y $x+37-10=150+10$.

Greeno en 1982 documentó un error de simplificación relacionado con la propiedad distributiva: los estudiantes creen que $4(6x-3y)+5x=4(6x-3y+5x)$. Para muchos profesores es evidente que al efectuar una transposición de términos los estudiantes saben que se cumplen axiomas de uniformidad en la ecuación. No obstante, los estudiantes no comprenden que en la ecuación $2x+6=x+2$, al restar 2 a ambos miembros de la ecuación se obtiene $2x+6-2=x+2-2$, el mismo resultado que transponer el número dos en el miembro izquierdo, $2x+6-2=x$. Es importante usar los axiomas de uniformidad en la resolución de ecuaciones lineales para aminorar problemas relacionados con la transposición de términos algebraicos.

Como la parábola es la representación algebraica de una función cuadrática es importante saber qué problemas enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de funciones. Clement en 1985 y Janvier en 1981 encontraron problemas para ubicar puntos en el plano cartesiano. Markovits, Eylon y Bruckheimer en 1983 descubrieron que los estudiantes siempre piensan en funciones lineales. Además al relacionar un fenómeno científico con una función los estudiantes sobresalientes aciertan en cuestiones puramente matemáticas sin comprender las consecuencias científicas, en cambio, los menos favorecidos fallan en lo puramente matemático y no en cuestiones teóricas. Sfard en 1987 encontró que los estudiantes no conciben a la función como la correspondencia entre dos conjuntos sino como un algoritmo para calcular una magnitud variable a través de otra.

2. 5. 1. INVESTIGACIONES DE ERRORES EN ÁLGEBRA

Los errores en el álgebra aquí expuestos fueron investigados en 1984 por Booth (como se cita en Socas *et al*., 1996) en su proyecto *Strategies and Errors in Secundary Mathematics* efectuado en estudiantes de nivel secundario del Reino Unido. La tabla 2.6 los resume.

Tabla 2.6 Errores en el álgebra.

Tema	Descripción
"La naturaleza y significado de los símbolos y las letras" (p. 97)	"La ambigüedad notacional y la dualidad en álgebra provocan confusión en la conexión entre la evolución simbólica y numérica"(p.98). Los jóvenes no comprueban la validez de transformaciones algebraicas por medio de la aritmética. • Suelen sumar términos no semejantes porque buscan un resultado, por ejemplo en 4x +2, colocan 6x. • En el caso de las fracciones mixtas, es aconsejable no omitir el signo de multiplicación entre el entero y la fracción común. • El signo igual conlleva el problema de estar asociado a un resultado y no a un proceso de transformaciones. • Con el signo igual se presentan problemas como olvidar al denominador común. $\frac{1}{2-x}+\frac{x}{x-1}=7$ $(x-1)+x(2-x)=7$ • Las letras en aritmética son símbolos de unidades del Sistema internacional.
"El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra" (p. 99)	En álgebra se persigue la formulación de relaciones y procesos a través de expresiones generalizadas y sencillas. Algunos estudiantes no comprenden esto y se equivocan porque buscan una solución única y numérica. Collis en 1975 comentó el problema de no aceptar la falta de clausura, ello explica la insistencia en sumar términos algebraicos no semejantes. Los alumnos insisten en la *respuesta bien dada* de Matz en 1980 que sucede en aritmética.
"La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes" (p. 100)	Los problemas para realizar cálculos aritméticos en fracciones, potencias y uso de paréntesis, generan problemas en el uso del lenguaje algebraico. No calculan correctamente el denominador común (problemas con el mínimo común múltiplo). No efectúan la suma de fracciones correctamente: $\frac{33}{15}+\frac{5}{45}=\frac{33+5}{45}=\frac{38}{5}$ En general los estudiantes muestran dificultad para apropiarse de un concepto o falta de percepción.
"El uso inapropiado de<< fórmulas>> o <<reglas de procedimientos>>" (p. 101).	Son cinco los tipos de errores en este apartado y se explican en la tabla 2.13. • Mal uso de propiedad distributiva. • Uso de recíprocos • Cancelación • Generalización sobre números • Métodos informales

De la tabla 2.6 es rescatable que los estudiantes no usan el signo igual como un símbolo de transformación entre expresiones. Para entender el uso inapropiado de: la propiedad distributiva, la *cancelación* y las falsas generalizaciones sobre números es necesario consultar la tabla 2.7.

Tabla 2.7 Uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos.

Fórmula o procedimiento algebraico	Error investigado
Mal uso de propiedad distributiva.	El problema básicamente es la falta de comprensión de los operadores lineales. "Un operador es lineal cuando el resultado final de su aplicación a un objeto se consigue aplicando el operador a cada subparte y luego se combinan los resultados parciales" Socas *et al*. (1996, p. 101). ¿Qué pasa? *1)* Distribución incompleta. d(e +f) = de + f *2)* No saben qué hacer si la constante está del lado derecho del paréntesis. *3)* Creen que los siguientes casos son válidos. "[U]na expresión algebraica es linealmente descompuesta distribuyéndola por el operador más dominante" (p. 102). $\sqrt{e+f}=\sqrt{e}+\sqrt{f}$ $\qquad \frac{l}{m+n}=\frac{l}{m}+\frac{l}{n}$ $(c+d)^2=c^2+d^2$ $\qquad e(f\times g)=(e\times f)(e\times g)$ Es importante que los estudiantes tengan clara la precedencia de operaciones aritméticas.
Uso de recíprocos	• Creen que se pueden sumar sólo los denominadores, o sólo denominadores o ambos. • Malinterpretan ecuaciones. $\frac{1}{24}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{8}$ $\qquad 24=x^2+8$ El error quizás sea inducido por la igualdad de reciprocos o por suma de fracciones con un mismo denominador. Al sustituir $x=\sqrt{12}$ en cada caso, los estudiantes compararían y descubrirían su error.
Cancelación	La regla $\frac{Dx}{D}=D$ origina: $\frac{Dx+Fy}{x+y}=D+F$ $\frac{10x-6}{10}=x-6$ Parece que los alumnos generalizan resultados en determinadas condiciones. Los errores podrían evitarse "si el alumno hubiese modificado la situación para que encajase con la regla, en vez de extender la regla para la nueva situación" (p. 104).
Falsas Generalizaciones sobre números	Problemas en factorización de polinomios. Usan la siguiente regla que les causa errores: $(x-a)(x-b)=k$ entonces $x=a+k$ y $x=b+k$. [no comprenden cómo calcular la raíz] De los axiomas de grupo relacionados con neutro aditivo e idéntico multiplicativo provienen los errores: $H\frac{1}{H}=0$ $\qquad X*0=X$
Métodos informales	El alumno se acostumbra a sus métodos propios de resolución. En vez de sumar 38 + 75 cuenta y eso le dificulta comprender la ecuación: x + y = 100

De la tabla anterior debe rescatarse el uso inapropiado de la propiedad distributiva en el desarrollo de un binomio al cuadrado y de la „cancelación" el hecho de que no es fácil aceptar que el denominador común de una fracción algebraica sea un producto de términos.

La tabla 2.8 permite conocer los errores que se cometen mientras se realiza un procedimiento algebraico sobre una ecuación y algunos errores que presentan al resolver ecuaciones cuadráticas.

Tabla 2.8. Errores en resolución de ecuaciones.

Aspecto	¿Qué sucede?
"Errores que se originan en la transición conceptual de la aritmética al álgebra" (Socas *et al.*, 1996, p. 105).	Fallas en el cálculo del mínimo común múltiplo $\frac{x}{5}+3x=4+\frac{x}{25} \rightarrow \frac{x}{25}+15x=\frac{100}{25}+\frac{x}{25}$ No operan en ambos miembros. $2t-6=3t+2 \rightarrow 2t=3t+2$ No multiplican ambos miembros por (-1). $-2x+3=5 \rightarrow 2x-3=5$ "Ellos trabajan un aparte de la igualdad sin ver la necesidad de modificar el otro miembro de la misma manera" (p. 106). Existen tipos de ecuaciones donde multiplicar por el mínimo común múltiplo a cada miembro de la ecuación no debería afectar el valor de la incógnita, tal es el caso de: $\frac{7}{3x}=\frac{8}{2x+5} \rightarrow \frac{7(3x)(2x+5)}{3x}=\frac{8(3x)(2x+5)}{2x+5}$ $7(2x+5)=24x$ Los alumnos deberían seguir esta serie de pasos: 1. **"**La naturaleza de cada transformación." (p. 106) 2. La relación entre los nuevos miembros: izquierdo y derecho de la ecuación. 3. Las relaciones de igualdad entre los miembros de la ecuación en cada parte del proceso de resolución. "[R]econocer expresiones equivalentes cuando no se dan" (p. 107).
"Uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos" (p. 107).	Además del uso inadecuado de la propiedad distributiva y del recíproco, las falsas generalizaciones sobre números generan situaciones como: $\frac{4}{x}+x=0 \rightarrow 4+x^2=0$ $\frac{4}{x}+x=13 \rightarrow 4+x^2=13$ Las cuales pueden llevar a omitir la solución y = 0 en ecuaciones cuadráticas incompletas como: $y^2=-9y \Leftrightarrow y=9$

2. 5. 2 POSIBLE CORRECCIÓN DE ERRORES.

De acuerdo con Socas *et al*. (1996) el profesor debe entender los errores específicos de sus estudiantes para hallar las dificultades y efectuar un esfuerzo preventivo de éstas, sin embargo hay errores que se producen con frecuencia y no son propiamente un descuido. En el texto se comenta la resolución del conflicto con la sustitución de los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada. La comprensión del concepto se da al enfrentar a los estudiantes a una contradicción, lo cual genera una discusión guiada que les permite corregirse a través de la interacción social.

La tabla 2.9 resume los consejos que dan estos autores con respecto a los Principios que debería tener el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra.

Tabla 2.9. Principios generales para la enseñanza-aprendizaje del álgebra.

Principio	Descripción.
"Un determinado grado de automatización en las operaciones básicas en un estadio es un prerrequisito para el desarrollo en el estadio siguiente (Socas *et al*., 1996, p. 110)."	El progreso hacia el estadio de las operaciones formales de Piaget, "dependerá de que los estudiantes hayan automatizado las operaciones básicas del último estadio concreto (nivel 3)" (p. 110). La capacidad para usar variables debería ser precedida por el trabajo con números generalizados como lo sugiere Collis en 1975. Así cuando lleguen al nivel de operaciones formales entenderán preguntas que requieren la comprensión del concepto de variables. Por ejemplo, frente a la fórmula $V = \frac{l^2 h}{3}$ los estudiantes podrían contestar: ¿Qué debe hacerse para que el volumen de la pirámide sea el triple de su altura?
"No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado rápido" (p. 111).	En el caso de las funciones lineales, antes de establecer los conceptos de pendiente y ordenada al origen, se debe trabajar con el hecho de hallar las coordenadas del punto de intersección entre el eje de las ordenadas y la recta, desde el contexto algebraico. Si se usa el *modelo de la balanza* para aprender a resolver ecuaciones lineales y luego se introduce el *método operacional* no se obtendrán buenos resultados. Para algunos estudiantes la igualdad entre cantidades no es el camino para resolver ecuaciones lineales, de ahí que se prepare cuidadosamente el camino hacia la igualdad de cantidades.
"No introducir ideas o técnicas algebraicas demasiado específicas que no sirvan para el desarrollo algebraico futuro" (p. 112).	Las literales no deben ser tratadas como un objeto, una introducción más adecuada se lograría al usar a las letras como números generalizados. El ejemplo más claro donde ocurren errores al introducir técnicas demasiado específicas, es la obtención de las raíces de un polinomio. Al polinomio se le expresa como producto de factores y al usar la regla de Ruffini para encontrar un polinomio factor del propuesto se dan confusiones. Es recomendable usar un procedimiento general con sumo cuidado de efectos posteriores, "al tratar con alumnos que desarrollan un aprendizaje más lento, un contexto más específico será necesario para progresar" (p. 113).
"Asegurar que los aspectos diferentes de una idea, técnica o símbolo algebraico estén claramente distinguidos" (p. 113).	El ejemplo más claro de este principio es el aprendizaje del uso del *signo menos* en las operaciones con números enteros. • Representación simbólica. -10 o negativo diez como un todo. • Regla de los paréntesis. El signo menos se usa por sí mismo en operaciones como– (-5) = +5 o –(+7)=-7; pero suele omitirse el signo "+" al escribir números positivos. • Sustracción. (+8) - (-11) =19, donde el signo del centro indica una operación entre números enteros. Las expresiones algebraicas deberían ser interpretadas con términos que son inversos aditivos. 8n –m – 3n + 4m es (+8n)+ (-m)+(-3n)+(+4m) Existen estudiantes que al encontrar el monomio *-7m* creen que *m* tiene que ser un número negativo por el signo del propio término algebraico.

Principio	Descripción.
“No introducir o establecer la notación formal antes de que una idea o técnica algebraica haya sido asimilada por los alumnos” (p. 114).	En el caso de exponentes fraccionarios, cuando no se ha trabajado notación para casos como 3^{-1} o $4^{-1/3}$. En el caso de las funciones no debe abusarse de su representación algebraica o tabular o gráfica; también deben usarse otros diagramas que expliquen la función con fines didácticos.
“Evitar la complejidad notacional innecesaria” (p. 115).	“Los alumnos olvidan con facilidad por qué surge la notación y de donde vienen sus reglas operacionales” (p. 115).Para señalar la solución de una ecuación no hay que escribirla como y = {7} eso es innecesario.
“Favorecer la comprensión algebraica en términos de traducción de lenguajes” (p. 116).	“[E]l hecho de presentar un concepto de formas diversas hace que a éste se le conozca en más facetas de las que normalmente se le considera cuando se hace el aprendizaje con un solo lenguaje” (p. 116). Deben usarse modelos abstractos además de socorridos modelos físicos, como el modelo de las balanzas en ecuaciones lineales y las representaciones gráficas, sean figuras o diagramas. Claro que hay que separar al modelo geométrico del aritmético. “[L]os „modelos‟ generan „esquemas‟ mentales que facilitan la comprensión de abstracciones” (1996, p. 117).
“No introducir técnicas formales demasiado pronto” (p. 117).	“Retrasar las técnicas formales por procedimientos más informales hasta que los procesos sean identificables en varios contextos…parece lo más adecuado en álgebra” (1996, p.118). Deben discutirse en clase los métodos informales de resolución que poseen los estudiantes, para que ante un problema más difícil el método informal sea reemplazado por un método más general.

En la enseñanza del álgebra la abstracción de un concepto es favorecida por el uso de varios lenguajes que representen al concepto, como lo comentan Socas *et al*. (1996). El álgebra debería ser enseñada con *modelos gráficos* como son los diagramas o con modelos físicos como son las *balanzas*, para la resolución de ecuaciones de primer grado. La finalidad de los modelos es facilitar la comprensión de un concepto.

De hecho los estudiantes deben aprender procedimientos algebraicos informalmente hasta que el procedimiento haya sido identificado en varios contextos. Los ocho principios de enseñanza de Socas *et al*. (1996) están citados en la tabla 2.9 y estos autores construyeron el cuadro 4.3 de su libro que aquí corresponde al diagrama 2.6.

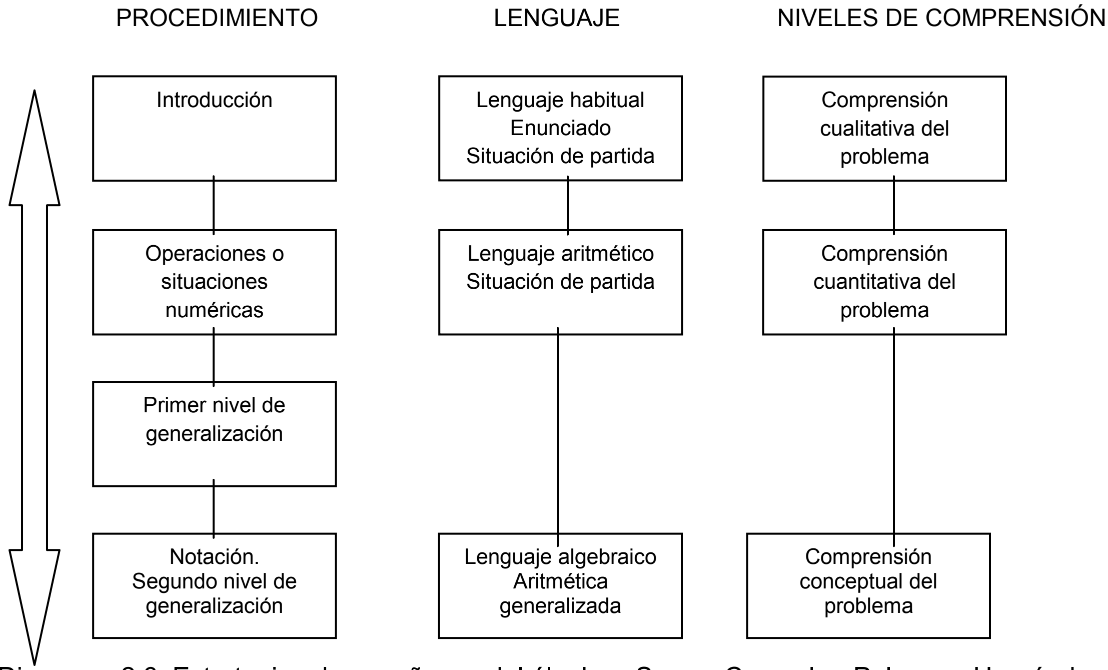


Diagrama 2.6 Estrategias de enseñanza del álgebra. Socas, Camacho, Palarea y Hernández, (1996, p. 120).

Las estrategias de enseñanza del álgebra describen los enlaces necesarios entre diferentes componentes para:

1. Introducir letras como números generalizados partiendo de ecuaciones como: $n - 2 = 13$.
2. "[B]uscar regularidades en el campo numérico y hacer generalizaciones basadas en sus observaciones…y encontrar métodos formalizados y simbolizados que permitan probarlos" (p. 121).
3. Buscar respuestas concretas en vez de detenerse en el método para hallarlas.
4. "Permitir la consecución y validez de preguntas abiertas…a las que no están acostumbrados los alumnos" (p. 121).

"La idea final…es que el alumno comprenda el lenguaje algebraico y su uso" (1996, p. 121). En los Niveles de comprensión, el primer nivel se refiere a conjeturas basadas en observaciones y sus respectivas comprobaciones, en tanto, el segundo nivel corresponde a los métodos formalizados y simbolizados.

2. 5. 3. LENGUAJE VISUAL Y LENGUAJE ALGEBRAICO

Para Skemp en 1980 la imaginación mental de las personas puede ser verbal y visual, entonces cada concepto matemático tiene dos sistemas de símbolos, uno visual y el otro verbal. El sistema visual sencillo en comunicación es intuitivo, representa un pensamiento individual y muestra estructura porque “abstrae propiedades espaciales, tales como forma, posición” (Socas *et al*., 1996, p. 142). Mientras el sistema verbal-algebraico difícil en comunicación es lógico, analiza detalles y representa un pensamiento social porque “[a]bstrae propiedades que son independientes de la configuración espacial, tales como número” (Socas *et al.*, p. 142).

El lenguaje algebraico debe ser aprendido junto con construcciones geométricas que lo complementen. “[D]ada una expresión algebraica o numérica, el paso previo a su transformación vendrá apoyado por una traducción al lenguaje visual en un primer momento, sintetizado en un esquema en el paso siguiente, que refleja una nueva dimensión del mismo, para terminar el proceso con la transformación de la expresión algebraica” (Socas *et al*., 1996, p. 144). Los autores citados en su cuadro 5.3 muestran un esquema general para construir actividades didácticas usando los lenguajes visual y algebraico, dicho cuadro está mostrado en el diagrama 2.7.

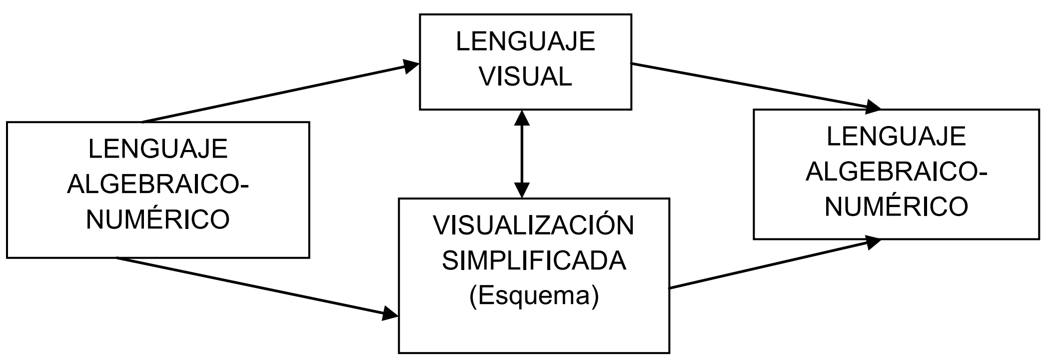


Diagrama 2.7. Lenguaje visual y esquematización. Socas *et al*. (1996, p. 144).

2. 6 CONVERSIONES ENTRE REGISTROS SEMIÓTICOS

Los sistemas de signos que pueden ser transformados en otro sistema de signos y que tienen una significación para una persona que las utilice se llaman sistemas semióticos. Las actividades cognitivas que debe permitir un sistema semiótico son tres: la posibilidad de marcas perceptibles para representar algo, la transformación de dichas representaciones a través de reglas del sistema (ganancia de conocimiento) y el cambio a otro sistema de representaciones. El lenguaje morse es uno de los sistemas semióticos que no cumple con las actividades cognitivas mencionadas; lo importante es que el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos y las figuras geométricas son lo que Duval (1999) denominó registros de representación semiótica.

Tabla 2.10. Cuadro comparativo de las oposiciones en representaciones semióticas

Consciente/No consciente	Externo/Interno
La consciencia en la persona surge con mirar al objeto. "La objetivación corresponde al descubrimiento por el sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospechaba" (Duval, 1999, p. 32) ésta es de carácter intencional. Existe la aprehensión de muchos datos, la cual se realiza como una significación, el sujeto no comunica su toma de consciencia del objeto.	Las representaciones son producidas por un sujeto o por un sistema semiótico con el cual interactúa la persona. La producción de las representaciones externas proviene de un sistema semiótico. Cumplen con tres funciones: • Función de Comunicación. • Función de Objetivación. • Función de Tratamiento.

La clasificación de las oposiciones en representaciones semióticas, de acuerdo con Ny en 1985, Paivo en 1986, y Larkin y Simon en 1987 mostrada en la tabla 2.10 permite comprender cuáles son las representaciones que interesan en el aprendizaje matemático, se trata de aquellas que son conscientes y externas, donde exista una transformación en un mismo registro a lo que Duval llama tratamiento y también donde se pueda pasar de un registro a otro a través de una conversión. El aprendizaje de estos sistemas de representación semiótica enfrenta tres fenómenos descritos por Duval (1998) que son:

- Diversificación de registros de representación semiótica.
- Diferenciación entre representante y representado
- Coordinación entre los diferentes registros.

El primer fenómeno permite comprender que el lenguaje natural y los gráficos cartesianos plantean preguntas específicas sobre su aprendizaje, puesto que poseen una rigidez funcional que los sistemas de inteligencia artificial no pueden abordar con facilidad; el segundo fenómeno tiene que ver con la comprensión de qué es lo que se representa y de integrar varias representaciones por medio de procedimientos de tratamiento; y el tercer fenómeno implica que las reglas de correspondencia entre sistemas de representación semiótica no actúan en solitario, ante una conversión entre dos registros de representación semiótica es necesario que haya congruencia entre ellos.

No se debe confundir a la *representación semiótica* con la *representación mental*; en la segunda no hay significante perceptible, se trata de nociones, conceptos, creencias y fantasías. Por otra parte la *representación computacional* es "una transformación algorítmica de una serie de significantes en otra serie" (Duval, 1999, p. 36) que se efectúa a través de un proceso de compilación con el uso de reglas sintácticas de formación y que no implica un aprendizaje.

> La producción de una respuesta, sea un texto o un esquema, movilizan simultáneamente la formación de representaciones semióticas y su tratamiento. La comprensión de algo, sea un texto o una imagen, puede movilizar actividades de conversión y de formación o las tres actividades cognitivas. (Duval, 1999, p. 40).

Las representaciones conscientes, tienen dos tipos de tratamientos mostrados en el diagrama 2.8; para Duval la base de cualquier actividad cognitiva es la complementariedad entre estos tipos de tratamientos.

Cuasi-instantáneo	Intencional
• "[C]orresponden a la familiaridad o a la experiencia que resulta de una larga práctica adquirida o de una competencia en un dominio" (Duval 1999, p. 39)	• "[S]olo pueden ser efectuadas una después de otra y que son muy sensibles al número de elementos que se han integrar" (Duval, 1999, p. 39).

Diagrama 2.8 Tipos de tratamientos para representaciones conscientes

La formación de representaciones semióticas implica sustituir la visión de un objeto por medio de signos ya constituidos en un sistema semiótico, las *reglas de producción* son en realidad, *reglas de conformidad* que permiten la utilización de signos por una comunidad de seres humanos; las reglas de conformidad combinan unidades elementales para formar una unidad superior, sin embargo, el conocimiento de ellas es insuficiente para la comprensión o la exploración de las representaciones semióticas. "Formación, tratamiento y conversión son las actividades cognitivas fundamentales de la semiosis" (Duval, 1999, p. 41).

Las *reglas de expansión* permiten obtener un registro nuevo a partir de un registro inicial en el mismo sistema semiótico; con ellas se realizan las actividades de *tratamiento* definidas por Duval. Un ejemplo de ellas son las reglas de derivación propias del razonamiento deductivo, que a través de la regla de agregación y la regla de sustitución, permiten usar de forma casi independiente una lengua formal y la lengua natural; sin embargo, para que las reglas de derivación funcionen en lengua natural deben prevalecer las reglas de coherencia temática y las de asociación por similitud o contigüidad.

La *conversión* es la transformación externa del registro de una representación inicial. Desafortunadamente, la representación obtenida sólo puede cubrir muy parcialmente a la representación original, lo cual implica seleccionar contenido y reorganizar elementos; de acuerdo con Frege se debe distinguir entre el sentido y la referencia de los símbolos o bien "entre el contenido de un representación y lo que ésta representa" (Duval, 1999, p. 44).

Cuando se escriben operaciones aritméticas se debe distinguir entre "la significación operatoria vinculada al significante y el número representado" (Duval, 1999, p. 44). Cuando la significación operatoria mencionada no está diferenciada del número representado, la sustitución por conversión de alguna de las representaciones hace que los estudiantes no comprendan que la suma de un cuarto más un cuarto en forma de fracción o en forma de fracción decimal lleva al mismo resultado, por ejemplo.

Para Duval el problema es “saber si un aprendizaje encaminado a la adquisición de actividades de conversión es de la misma naturaleza que un aprendizaje encaminado a la adquisición de actividades de tratamiento” (1999, p. 45). Se cree que al existir reglas bien explicitadas para cambiar de registro, no existe problema; Ahora que, entre registros algebraicos y gráficos sucede que los estudiantes no discriminan la forma de escritura que corresponde a una recta que pasa por el origen. Hay que tener presente que: “las reglas de conversión no son las mismas según el sentido en el que se efectúa el cambio de registro” (p. 45).

Las actividades de formación, tratamiento y conversión de registros de representación semiótica permiten el aprendizaje conceptual, con el cuidado de no mezclarlas entre sí, especialmente si las actividades cognitivas intervienen en las *macrotareas* de comprensión o producción. ¿Qué sucede en la enseñanza tradicional de las matemáticas? No hay reglas de conversión, se hace un cambio de registro por economía de tratamiento, sin que el estudiante cambie en su mente el registro en el cual trabaja el profesor en clase. Esto provoca problemas en el aprendizaje conceptual. Es deseable un aprendizaje centrado en la conversión de diferentes registros de representación semiótica, se sugiere que “un trabajo previo en el registro de los grafos proposicionales hace posible que para los alumnos sea más fácil y puedan dominar la de redacción de los textos de demostración” (Egret y Duval como se cita en Duval, 1999, p. 47).

La congruencia entre registros de representación semiótica comprende tres criterios:

- Posibilidad de una correspondencia semántica de los elementos significantes
- Univocidad semántica terminal
- Orden en el arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones

El primero implica que entre dos registros de sistemas distintos a cada unidad significante simple del registro A se le asocia otra unidad significante simple del registro B. El segundo criterio explica que a cada unidad significante simple del registro A le corresponde una y sólo una unidad significante simple del registro B. El tercero funciona cuando las representaciones tienen el mismo número de dimensiones, pareciera que tomáramos botellas de plástico de dos líneas de producción distintas en el mismo orden.

La importancia de la no congruencia en relación con el aprendizaje de las matemáticas y el análisis de la complejidad conceptual permite comprender por qué a veces es necesario encontrar un registro C que sea congruente con cada uno de los registros A y B, aunque ellos no sean congruentes entre sí.

Analizar las unidades semióticas elementales de una figura geométrica privilegia la enseñanza de las tareas de construcción de figuras y censura los tratamientos heurísticos e intuitivos de ella.

En una conversión el desconocimiento de uno de los registros de representación agrava la *no congruenc*ia, esto sucede en los registros bidimensionales como los gráficos cartesianos, las tablas y las figuras geométricas. Pasar de una ecuación a una gráfica no tiene una dificultad específica, porque a cada punto del plano cartesiano le corresponde un par ordenado de números reales. En los “registros bidimensionales…en los cuales las unidades significantes no están semióticamente separadas,…es necesario un aprendizaje de los tratamientos que les son propios y,…el criterio de univocidad semántica es más difícil de verificar para la actividad cognitiva de conversión” (Duval, 1999, p. 58). Cuando hay conversiones fallidas por falta de congruencia entre los registros existe encapsulamiento de los registros de representación.

Duval (1999) no apoya estrategias del aprendizaje significativo como son los mapas conceptuales y las redes semánticas aunque reconoce que los registros analógicos como esquemas y diagramas representan las relaciones entre los elementos de un hecho o un contenido. Sin embargo señala que “la productividad inferencial de las redes está estrictamente ligada al pasaje del registro de red hacia el registro de proposiciones (de estructura funcional)” (p. 69), las redes semánticas dependen del razonamiento deductivo; la congruencia entre la red semántica y una proposición está relacionada con la memoria del sujeto que las use o en el “acceso múltiple a conocimientos complejos” (p. 69). Por otra parte, los arcos que unen a los nodos pueden ser homogéneos cuando representan una misma relación como sucede en una demostración o son heterogéneos y representan distintos tipos de relaciones como ocurre en las redes semánticas. Finalmente, “las representaciones analógicas, no pueden representar más que estados, configuraciones o productos de operaciones, y no acciones o transformaciones” (Bresson como se cita en Duval, 1999, p. 67).

También este autor comenta que la comprensión de una representación implica la comprensión del contenido conceptual representado; para él “la comprensión conceptual aparece ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas” (Duval, 1999, p. 39). Un estudiante debe convertir y tratar a cada una de las representaciones del concepto función de modo que se enriquezca su aprendizaje sobre dicho concepto.

Los autores Justin, Oliveira y Moreno (2014) aclaran los elementos que participan en la conversión entre gráficos y ecuaciones:

> Supone que se consiga tener en cuenta, de un lado las variables visuales propias de los gráficos (inclinación, intersección con los ejes, etc.) y de otro, los valores escalares de las ecuaciones (coeficientes positivos o negativos, mayor, menor o igual 1, etc.) (Duval como se cita en Justin, Oliveira y Moreno, 2014, p. 142).

Estos elementos corresponden a variables visuales de la ecuación de la recta en el plano cartesiano y posteriormente citan a Duval al mencionar que: “las representaciones gráficas poseen tres tipos distintos de procedimientos: 1) el procedimiento por puntos; 2) el procedimiento de extensión de un trazado efectuado y 3) el procedimiento de interpretación globlal de las propiedades figurales” (Justin, Oliveira y Moreno, 2014, p. 142). Estos autores latinoamericanos comentan que generalmente se localizan puntos en el plano cartesiano y luego son juntados lo que provoca no conexión entre un gráfico y su correspondiente expresión algebraica.

En 2003, Duval (como se cita en Justin, Oliveira y Moreno, 2014) plantea una vez más que entre un gráfico y una ecuación deben usarse dos sentidos de conversión para que el estudiante analice propiedades poco perceptibles. Para Duval (como se cita en Justin, Oliveira y Moreno, 2014) un obstáculo en el aprendizaje de registros se da por la falta de coordinación entre ellos.

> Organizar situaciones de aprendizaje centradas en la coordinación de registros requiere una identificación previa de las variaciones cognitivamente pertinentes de una representación en un registro, de manera que pueda ser realizada por los alumnos una exploración según el método de hacer variar solamente un factor de cada vez, dejando los otros sin cambio, en una representación (Justin, Oliveira y Moreno, 2014, p. 143).

Para Duval (1999) la comprensión integrativa es “la comprensión de las representaciones semióticas que procede de una coordinación de registros“ (p. 67), surge de la conversión bidireccional entre registros y se deposita en el objeto cognitivo representado. En el álgebra lineal en un momento dado se requiere la coordinación de al menos tres registros de representación semiótica, así “lo que representa en un registro puede ser considerado como lo representado en otro registro, como es el caso en la relación entre texto e imagen” (p. 66). A partir de esto Duval propone dos planos de análisis para la producción de conocimientos: el conocimiento construido, donde sólo hay formación y tratamiento de representaciones semióticas; y el funcionamiento cognitivo que distingue lo representado del representante.

Un sujeto puede percibir o reproducir representaciones careciendo de comprensión conceptual respecto de las representaciones semióticas de un objeto. Cuando el objeto no es perceptible, no se discrimina fácilmente qué es lo representado y quién es el representante, por ello se recurre a representaciones heterogéneas del objeto que son coordinables. Duval retoma las ideas de Bresson y aclara que la representación tiene parcialidad cognitiva, porque dos registros de representación semiótica no presentan los mismos aspectos de un contenido conceptual. La coordinación entre registros de representación semiótica sobre un tema le permite a un ser humano libertad de usar estrategias heurísticas para representarle, su funcionamiento cognitivo es más amplio.

La discriminación es la dificultad de la conversión. “La discriminación de las unidades significantes de una representación, y por tanto la posibilidad de una aprehensión de lo que ella representa, depende de la aprehensión de un campo de variaciones posibles relativo a la significancia en un registro” (Duval, 1999, p. 74). En el caso de las lenguas formales hay unidades discretas, pero en las figuras y gráficas las unidades no son separables y en el caso de la lengua natural las unidades no aparecen independientes entre sí, su segmentación es funcional.

Para los gráficos cartesianos su interpretación reposa en discriminar doce valores provenientes de cinco variables como lo señaló Duval (1999). En el artículo de Justin, Oliveira y Moreno (2014) se mencionan dos de tres variables visuales de la línea recta: el sentido de inclinación de la recta y la posición de su intersección con el eje de las ordenadas; falta su posición en relación con un reparto simétrico de los cuadrantes opuestos. Duval comenta que existen ocho valores asociados a las tres variables visuales y para que el alumno los perciba hay que variar una variable a la vez. Cada valor corresponde con un cambio en la ecuación de la recta, que puede ser visto como la presencia o ausencia de ciertos símbolos o la sustitución de símbolos antimónicos (positivos o negativos) y la expresión de la pendiente. En el trabajo de exploración y observación están excluidos los cálculos aritméticos.

La representación semiótica se convierte en un trabajo de exploración de variaciones sistemáticas y de observación de variables que cambian al mismo tiempo. Entonces, al tener un registro R en el sistema A y otro registro R‟ en el sistema B, suceden dos tipos de variaciones:

1) Las variaciones de R en A que no producen un cambio para R‟ en B.
2) Las variaciones de R en A que producen variaciones que actúan también en R‟ situado en B.

El segundo tipo de variaciones es el que interesa en semiosis porque permite la variación cognitiva. De este modo, se entiende que organizar aprendizajes conlleva la identificación de las variaciones cognitivas pertinentes para una representación y su registro semiótico. La metodología de enseñanza es reiterada, ésta "consiste en hacer variar un sólo factor a la vez y dejar a los otros sin cambio" (Duval, 1999, p. 75). Aunque como lo advierte Duval, en el caso del registro gráfico cartesiano sus unidades significantes son inseparables, porque se les percibe como partes de una sola forma; mientras que las unidades significantes son discretas para el registro algebraico.

2. 6. 1. FIGURAS Y DEDUCCIONES

El problema que posee la enseñanza de la geometría es que se realizan tratamientos sobre la figura y sobre el discurso en lengua natural que analiza a la figura, al mismo tiempo; existen idas y venidas entre lo figural y lo discursivo, en las cuales los alumnos no hábiles, en la mayoría de las ocasiones se pierden y no comprenden el contenido matemático relacionado con la figura. Por ello es necesario hallar las variables visuales cualitativas y dimensionales de una figura, que son sus unidades constitutivas de acuerdo con Duval (1999); de este modo, los puntos corresponden a unidades figurales de dimensión 0, los segmentos, las rectas, y los arcos de circunferencia son unidades figurales de dimensión 1 y los polígonos, la elipse y la circunferencia son unidades figurales de dimensión 2. La parábola por ser una curva abierta también es una unidad figural de dimensión 2.

”[H]ay una predominancia de las unidades de dimensión 2 sobre las unidades de dimensión inferior” (Duval 1999, p. 150), lo cual se explica por la ley gestaltista de cierre o continuidad; los contornos cerrados y simples son percibidos como un todo.

> [E]l tratamiento de la situación matemática representada por la figura (para la aplicación de definiciones o teoremas) requiere que se la restrinja a unidades figurales de dimensión 1 o 0, mientras que la percepción se focaliza automáticamente sobre las unidades figurales de dimensión 2. (Duval, 1999, p. 152).

En algunos casos se usan variables visuales cualitativas como el color para resaltar alguna unidad figural necesaria, de hecho Duval (1999) aclara que una propiedad geométrica no se representa directamente por medio de una variable visual, “las unidades de dimensión 1 vinculadas por esta propiedad deben ser sobrecargadas con una marca que codifique esta propiedad” definición de Guin (Duval, 1999, p. 151).

En las demostraciones matemáticas se trabaja con unidades figurales de dimensión 0 y 1 que deben ser reconocidas dentro de la figura geométrica. Las figuras deben permitir la conducta descrita por Pierce como abducción que consiste “en limitar de entrada la clase de hipótesis o de alternativas que han de considerarse” (Duval, 1999, p. 152). La abducción está relacionada con dos niveles de aprensión, el primero implica reconocer unidades figurales en la figura y el segundo es la aprehensión operatoria que consiste en “modificaciones posibles…de las unidades figurales reconocidas y de la figura dada” (Duval, 1999, p. 153).

El diagrama 2.9 muestra la interacción entre los registros figural y discursivos, también señala la importancia de la abducción para que exista razonamiento deductivo.

Diagrama 2.9 Interacción entre los tratamientos del registro gráfico y el registro discursivo

Duval plantea dos operaciones para que los estudiantes no piensen en otras relaciones entre las unidades figurales de una figura. La primera es la *reconfiguración* que es la operación fundamental de la *aprehensión operatoria* sobre figuras, ya que las divide en subfiguras, las cuales son comparadas y reagrupadas para una comprensión global. Como lo señala Duval (1999) “[l]as subfiguras…pueden consistir en una unidad figural o en una combinación de unidades” (p. 156). El problema geométrico o la demostración indican cual es la subfigura inicial y la sucesión de subfiguras que ayudarán a comprender su solución. La figura utilizada como recurso didáctico necesitará leyenda y por otra parte el razonamiento se relaciona con unidades figurales de dimensión inferior a la dimensión de la figura utilizada, hay que cuidar este recurso didáctico puesto que "[l]a exploración heurística de las figuras tiende a privilegiar las unidades de dimensión 2 sobre las de dimensión inferior" (Duval, 1999, p. 162). La segunda operación es la *puesta en perspectiva* la cual permite ver la superposición de figuras que al ser yuxtapuestas en el plano parecen de tamaño distinto. La reconfiguración trabaja sobre cambios mereológicos y la puesta en perspectiva trabaja sobre cambios ópticos.

La rotación o traslación de una figura, puede ser un obstáculo para su reconocimiento por parte de los estudiantes. Los tratamientos figurales inhiben o facilitan el reconocimiento de situaciones y búsquedas heurísticas en una figura. Los alumnos se confunden si no están preparados para integrar, el nivel de aprehensión gestaltista de una figura en su aprehensión operatoria y si no han descubierto formas del razonamiento deductivo.

Una figura exitosa en un problema geométrico depende de cómo se articulen la aprehensión operatoria de la figura y el manejo discursivo de inferencias que usan definiciones y teoremas. El entrenamiento de la aprehensión operatoria conlleva neutralizar la organización perceptiva espontánea de la figura, no proponer problemas que usen teoremas o definiciones geométricos, cuidar que la secuencia de subfiguras no contenga cambios de dimensión, el ejercicio debe pertenecer a una serie organizada en una variación sistemática de los factores de visibilidad que retarde o facilite la aprehensión requerida.

2. 6. 2. COMPRENSIÓN DE TEXTOS

Para Duval (1999) "[e]l problema de un aprendizaje de la comprensión de textos es pues el de la posibilidad de comprender los textos en todas las situaciones de lectura y no solo [sic] en la situación de práctica oral del texto" (p. 285).

La comprensión de un texto implica dos operaciones: segmentación del texto en unidades de información y recontextualización de las unidades de información. Los textos tienen dos variables redaccionales, la primera es el contenido cognitivo del texto y la segunda es su organización redaccional.

Tres son los factores que integran la organización redaccional de un texto. El primero se refiere a los objetos y relaciones nombradas o no con expresiones de función referencial y expresiones de función apofántica. El segundo se refiere específicamente a qué expresiones referenciales y apofánticas serán utilizadas. El tercero lo indica Duval (1999) lo constituye: "el orden de presentación de los elementos explicitados" (p. 273). Dicha organización redaccional depende del contenido cognitivo a tratar. Las reglas gramaticales no lo determinan. La organización de un texto se aprehende globalmente y luego de forma local.

Existen tres tipos de segmentación de textos, la segmentación funcional, la segmentación proposicional y la segmentación cognitiva. La primera se realiza cuando se reconocen la espontaneidad y la entonación del texto. La segunda se realiza al determinar proposiciones que contiene el texto, el problema que posee esta segmentación es la supresión de unidades apofánticas de estructura remática. La tercera se basa en preguntas que obligan a buscar unidades de información en el texto, recurre a representaciones completas llamadas *escenarios* por Schank y Abelson (como se cita en Duval, 1999, p. 276). La teoría de la representación de la significación de la memoria fundamenta a la segmentación proposicional. La teoría de dependencia conceptual fundamenta a la segmentación cognitiva.

Es necesario entender que las unidades apofánticas son enunciados, pero como lo señala Duval (1999) "[l]a expresión "enunciado completo" es entonces desafortunada en cuanto tiende a oscurecer la diferencia que hay entre una proposición, o una frase, y un texto" (p. 99). Las unidades apofánticas hacen referencia a hechos u objetos; sin embargo el *sentido* [lo que se quiere decir] de ellas está en su valor social, si el enunciado es una orden, una promesa o un deseo; o bien en su valor epistémico, si el enunciado es verosímil, posible o absurdo. Debe recordarse que la estructura remática se da en las lenguas naturales y la estructura funcional en las lenguas formales. El diagrama 2.10 muestra a las unidades apofánticas con las estructuras analizadas por Duval (1999)

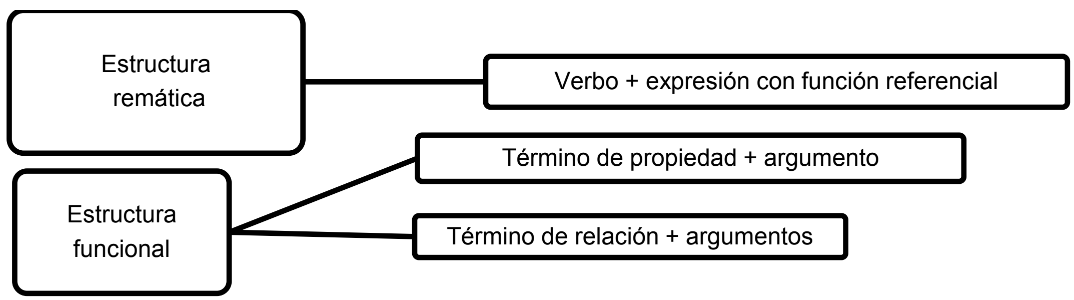


Diagrama 2.10. Estructuras de una unidad apofántica

La expresión con función referencial es aquella que en lengua natural se llama *sujeto*, es decir, el objeto, animal o persona que realiza una acción, dicho ente es designado por medio de alguna de las cuatro operaciones investigadas por Duval (1999): designación pura, categorización simple, determinación o descripción. En tanto, los argumentos "pueden ser o bien constantes o bien el vínculo de un cuantificador y una variable definida en un dominio de extensión previamente fijado" (p. 103).

Las unidades apofánticas de estructura remática cumplen con funciones metadiscursivas de objetivación y comunicación; mientras que las unidades apofánticas de estructura funcional sólo cumplen con la función metadiscursiva de tratamiento, la cual está asociada al conocimiento pues permite extraer información nueva de la dada. Las unidades apofánticas de estructura remática tienen dos *sentidos*, el categorial que designa objetos y el axiológico que señala: propiedades, relaciones o sentimientos. Las unidades apofánticas de estructura funcional son proposiciones con valor de verdad que carecen de unidades de función referencial.

Al retomar la comprensión de textos debe entenderse que la recontextualización "no reubica las unidades segmentadas junto a sus vecinas de ocurrencia, sino en un conjunto de conocimientos relativos al tema tratado o en una red de relaciones propia a la organización redaccional de texto" (Duval, 1999, p. 277). Esta operación es de dos tipos una cognitiva y otra redaccional. En la recontextualización cognitiva "el texto es comprendido solo a partir de lo conocido sobre el tema que evoca o trata" (Duval, 1999, p. 278), si hay información ausente debe ser localizada en otra fuente de información, no importa la diferencia entre el contenido cognitivo del texto y lo que el lector sabe de este tema.

La recontextualización redaccional no depende del contenido cognitivo del texto y trabaja sobre unidades apofánticas y relaciones entre objetos designados como son la co-referencia, la oposición y la anáfora, por mencionar algunas.

Duval (1999) al combinar los tipos de segmentación y de recontextualización de un texto propone tres procesos de comprensión de textos uno inductivo, otro deductivo y otro que surge de la interacción entre los anteriores. La comprensión emanada del proceso inductivo no implica una comprensión verdadera de situaciones, fenómenos o problemas mencionados en el texto, el lector queda limitado por lo que dice el texto. La comprensión proveniente del proceso deductivo coloca en segundo lugar lo que el texto explica de un fenómeno. "La comprensión evolutiva es la que permite un aprendizaje a través de la lectura" (Duval, 1999, p. 280).

Tabla 2.11 Situaciones de lectura investigadas por Duval

	TEXTO: correspondencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo.		
LECTOR:		Congruencia	No congruencia
su base de conocimientos	Familiar	I. Situación trivial, sin riesgo de error	II. Situación trivial, con riesgo de error.
le hace el contenido del texto.	Nuevo	III. Situación normativa para un aprendizaje que exige tratamientos al margen del texto.	IV. Situación que exige una búsqueda o un aprendizaje independiente del texto.

Fuente: Duval (1999, p. 283)

Son dos los parámetros que plantea Duval para clasificar las situaciones de lectura que corresponden a las mostradas en la tabla 2.11. El primero se refiere a la forma en que está redactado un texto, es decir, si su redacción permite explicitar el contenido cognitivo, se establece la congruencia o no congruencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo. El segundo parámetro analiza la relación entre la base de conocimientos del lector y el contenido cognitivo.

Para las situaciones de lectura I y II el proceso deductivo basta para comprender el texto; en cambio para las situaciones de lectura III y IV se adquiere el contenido cognitivo del texto primero a través de la recontextualización redaccional y se hace necesario el proceso deductivo.

En la situación de lectura I se comprende el texto como se comprende el contenido de una conversación, en la situación II el lector confía en sus conocimientos sobre el tema y los errores en la comprensión del texto se deben a una segmentación insuficiente del texto o a recontextualizaciones inadecuadas de alguna información. En la situación III el lector debe leer con atención y si es necesario retroceder párrafos o páginas, además debe consultar otros textos, como indica Duval (1999) se debe "recurrir a otros registros de representación como la transcripción de ciertos pasajes en un esquema" (p. 284). Para el caso de la situación de lectura IV se requiere trabajar directa e independientemente con el contenido cognitivo, así se puede entender lo que dice el texto.

En palabras de Duval (1999): “[e]l problema de un aprendizaje de la comprensión de textos es, en primer lugar, aprender a segmentar un texto en unidades textuales de información y a recontextualizar las unidades segmentadas” (p. 286). En la comprensión de textos es necesario el cambio de registros, se requiere de una aprehensión sinóptica de la organización redaccional o de la cognitiva, de preferencia se debe usar una representación no discursiva.

Para el contenido cognitivo Duval sugiere las representaciones conceptuales no discursivas de Quillian y Schank y luego, los escenarios desarrollados, así como las redes semánticas. Se sugiere en los textos de matemáticas no matematizarles al convertir un enunciado en una operación entre variables o números. Ahora la representación de un texto con base en su organización redaccional se efectúa a través de un procedimiento común, el cual utiliza dos criterios: el predicativo o el remático. Como lo indica Duval (1999): “[u]na representación no discursiva de la organización redaccional conjuga pues la construcción de una red sobre una segmentación tabular del texto” (p. 290). Los textos son segmentados con base en una tabla y son recontextualizados al construir una red de relación. Duval aconseja omitir enunciados con el verbo ser y colocar en infinitivo a los verbos que expresan actitudes proposicionales.
Duval (1999) reconoce que no se hacen representaciones no discursivas de la organización redaccional de un texto por la “conversión activa del texto hacia la representación no discursiva” (p. 300), admite que este tipo de conversión es muy difícil y sugiere que el proceso inductivo de comprensión se presente no sólo en situaciones de lectura III y IV sino también en la situación I, de esta forma disminuirían problemas al contestar un cuestionario sobre el texto. Duval apoya las representaciones no discursivas de la organización redaccional de un texto frente a las pruebas o síntesis de textos, puesto que estiman “la centralidad o la marginalidad de lo que se recuerda” (p. 300).

2. 7 LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

2. 7. 1. SECCIONES CÓNICAS

En la figura 2.1 se observa un cono, generado por el giro de una recta llamada *generatriz* que atraviesa un punto fijo, a lo largo de una circunferencia base. Debe aclararse que los griegos al construir el cono con el movimiento descrito anteriormente, bajo la guía de la circunferencia como *directriz* obtenían dos conos en el espacio.

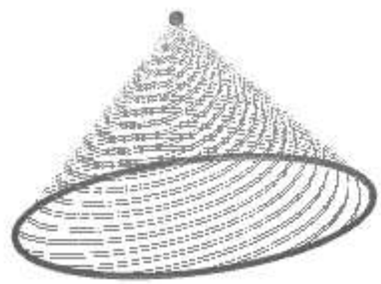


Figura 2.1 Cono con su circunferencia base.

Menecmo (375 a. n. e. – 325 a. n. e.) es el matemático griego quien al intentar resolver el problema de la duplicación del volumen de un cubo, quizás describió por primera vez a las secciones cónicas. Este problema geométrico no se resuelve con instrumentos como la regla y el compás, ya que su solución implica la igualdad de dos *medias proporcionales*.

$$\frac{x}{k}=\frac{y}{x} \text{ y } \frac{x}{y}=\frac{y}{2k}$$

La solución es la abscisa del punto de intersección entre las parábolas $ky=x^2$ y $2kx=y^2$.

¿Cómo sucede esto? Se visualiza a cada sección cónica como el resultado de un corte perpendicular a la generatriz de un determinado tipo de cono, se tiene una *interpretación estereométrica*.

Si el cono es acutángulo, se obtiene una elipse como lo muestra la figura 2.2. En cambio si el ángulo es rectángulo, el corte generará una parábola como lo muestra la figura 3.5, en el tercer capítulo. Finalmente, si el cono es obtusángulo, el corte generará una de las ramas de la hipérbola como lo muestra la figura 2.3.

Figura 2.2 Elipse resultante de un corte en un cono acutángulo tomada de Alegría (2002, p. 4)

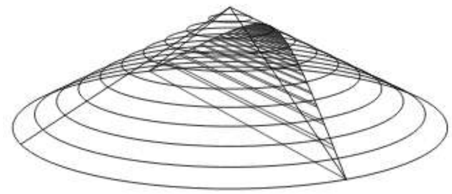


Figura 2.3 Rama de una Hipérbola resultante de un corte en un cono obtusángulo tomada de Alegría (2002, p. 4)

A las secciones cónicas originalmente se les dieron nombres referentes al corte generador en un particular tipo de cono. A la parábola se le llamaba *ortotoma*, la elipse se llamó *oxitoma* y a la hipérbola, *amblitoma*; lo anterior se entiende al leer a González (1992, p. 358). Apolonio de Perga innovó en su momento al usar un cono para trazar todas las secciones cónicas.

La figura 2.4 muestra a cada cónica como resultado de un corte realizado por un plano, dentro de un mismo cono.

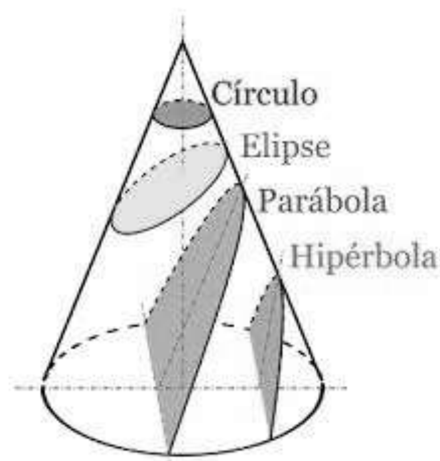


Figura 2.4 Secciones Cónicas figura tomada de Gil, Ortega, Pol, Tur y Abia (2010).

La tabla 2.12 explica como es el ángulo de inclinación del plano cortante, con respecto del plano de la base, de modo que se obtenga una cónica determinada.

Tabla 2.12 Secciones cónicas y ángulos de inclinación del plano cortante

Cónica	Relación de paralelismo entre el plano de corte a la base o a la generatriz
Circunferencia	Paralelo a la base
Elipse	No es paralelo a la base o la generatriz
Parábola	Paralelo a la generatriz
Hipérbola	"[P]lano que forma un ángulo inferior, al ángulo formado por una generatriz del cono y su eje" (Pérez, 2011, p. 11).

Si el plano pasa exactamente por la generatriz del cono se genera una recta y si pasa por el punto fijo genera un punto en el espacio. Tanto la recta como el punto son considerados cónicas degeneradas. La figura 2.5 muestra a la parábola como resultado de un corte con un plano paralelo a la generatriz del cono que la contiene.

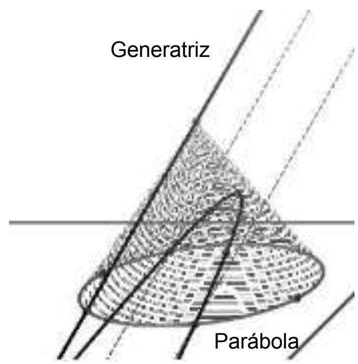


Figura 2.5 Parábola generada por un plano paralelo a la generatriz de un cono no rectángulo

¿Cómo las secciones cónicas se volvieron lugares geométricos? Payán (2005) dice que:

> El primer tratado escrito que se conserva sobre las secciones cónicas es debido a Apolonio de Perga. En sus 8 libros Apolonio estudia las propiedades geométricas de las secciones cónicas. Las figuras que se van a estudiar, todas ellas conocidas con el nombre genérico de cónicas, se pueden obtener como intersección de una superficie cónica con un plano.

Apolonio (262 a. n. e. – 190 a. n. e.) como lo comenta González (1992) fue el primer matemático griego en abandonar la definición de cónica como una curva resultante de un corte, para buscar una condición necesaria y suficiente que la definiera como lugar geométrico. A esta condición o propiedad fundamental la llamó síntoma de sección cónica.

Es interesante que Apolonio no haya desarrollado un sistema de coordenadas, aunque como comenta González Urbaneja (2001, p. 5) utilizó una especie de sistema antecedente "Apolonio considera ciertas *líneas de referencia* (diámetros conjugados o diámetro-tangente), que juegan un papel de *coordenadas.* En el segundo caso, al tomar un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como *rectas de referencia*, las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las *abscisas* y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las *ordenadas*." La relación exclusiva entre los diámetros y los segmentos paralelos a las tangentes de cada cónica generó su respectivo s*ymptoma*. Gónzalez Urbaneja (2001) comenta también que Fermat en su libro *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* llama a los síntomas de las cónicas *Propiedades específicas de las curvas* o *Ecuaciones características* de éstas.

Es conveniente señalar que Apolonio formuló un problema geométrico en su dedicatoria de *Las Cónicas* que despertó el interés de varios eruditos, siglos después de su muerte. Este consistía en hallar el lugar geométrico determinado por tres o cuatro rectas. Descartes de acuerdo con González Urbaneja (2001, p. 4) llamó a esta interrogante *Problema de Pappus* y su importancia en la historia de las matemáticas radica en que el problema inspiró el libro *La Geometría* de Descartes. Pappus había reconocido que la solución del problema es una cónica, pero al igual que Apolonio no conoció un lenguaje simbólico que le facilitara la comprensión de los lugares geométricos que solucionaban el problema.

Los síntomas de Apolonio no son expresados con lenguaje simbólico que siglos más tarde aportaría Viète en su *Arte Analítica*. Después Fermat y Descartes usarían el álgebra simbólica de los *cosistas* italianos y de Viète para analizar los lugares geométricos descritos por Apolonio a través de ecuaciones indeterminadas en dos variables. La vinculación entre el lenguaje simbólico y las propiedades de las secciones cónicas originaron la Geometría Analítica.

2. 7. 2 SÍNTOMA DE SECCIÓN CÓNICA PARA PARÁBOLA.

Apolonio no usó un sistema de coordenadas, pero facilitó el camino hacia el surgimiento de estos. Al observar la figura 2.6, recuérdese que el segmento QV [diámetro] es una abscisa y el segmento PV [tangente] es una ordenada. Para entender el síntoma de la parábola, primero que todo, deben ser analizados los diferentes elementos que integran la figura 2.6.

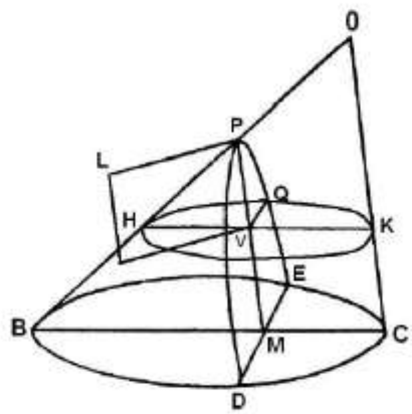


Figura 2.6 Síntoma de la parábola realizada por Salazar (2011, p.4).

Al usar la notación de Salazar (2011) este análisis se resume en la siguiente lista:

1. El cuerpo mostrado es un cono oblicuo, si se girara alrededor de un eje *l* un triángulo oblicuángulo se obtendría el cuerpo señalado.
2. La base del cono oblicuo es la circunferencia DBEC.

3. El segmento OC es paralelo a PV.
4. El plano DPE contiene a la parábola DPE.
6. La circunferencia HQK es paralela a la circunferencia DBEC.
7. La parábola DPE y la circunferencia HQK se encuentran en una recta QV.
8. El punto V es el punto de intersección entre los segmentos PM y QV.

Si se construye la figura 2.7 para comprender lo que sucede en la figura 2.6 se obtienen dos parejas de triángulos semejantes. En cada pareja se cumple el criterio de semejanza entre triángulos, cuando sus tres ángulos interiores correspondientes entre sí son congruentes.

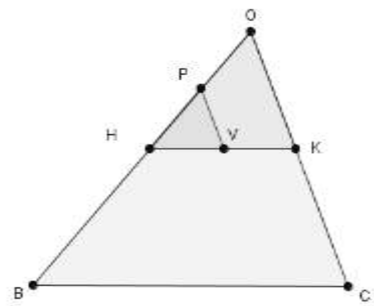


Figura 2.7 Triángulos semejantes ΔHVP, ΔHKO y ΔBCO

Los triángulos ΔHVP y ΔHKO son semejantes porque los ángulos $\angle HPV$ y $\angle HOK$ son congruentes al ser PV el segmento paralelo al segmento OC, del mismo modo la pareja de ángulos $\angle HVP$ y $\angle HKO$ son congruentes; además comparten el ángulo $\angle OHK$

Los triángulos ΔHKO y ΔBCO son semejantes porque comparten el ángulo $\angle HOK$, los ángulos $\angle OBC$ y $\angle OHK$ son congruentes al ser HK paralelo al segmento BC; lo mismo ocurre con los ángulos $\angle BCO$ y $\angle HKO$ que son congruentes entre sí.

Entre los lados correspondientes de los triángulos semejantes ΔHKO y ΔBCO se establece la proporción: $\frac{HV}{BC}=\frac{PV}{OC}=\frac{HP}{OB}$. De ésta se toma la proporción: $\frac{HV}{BC}=\frac{PV}{OC}$ a la cual al aplicársele la propiedad fundamental de las proporciones se transforma en:

$$\frac{HV}{PV}=\frac{BC}{OC} \quad (1)$$

La posición de los triángulos semejantes ΔHVP y ΔHKO, permite aplicar el teorema de Tales, cuyo enunciado establece la proporcionalidad entre los segmentos de rectas secantes entre rectas paralelas. Como el segmento PV es paralelo al segmento OK y como los segmentos HO y HK forman parte de rectas secantes, entonces se establece la proporción:

$$\frac{VK}{PO} = \frac{HV}{HP} \quad (2)$$

Las proporciones (1) y (2) son iguales y con ellas se obtiene la proporción: $\frac{VK}{PO} = \frac{BC}{OB}$ (3)

Si se multiplican los miembros de las proporciones (1) y (3) anteriores se obtiene:

$$\left(\frac{HV}{PV}\right)\left(\frac{VK}{PO}\right) = \frac{(BC)^2}{(OC)(OB)} \quad (4)$$

Si se aplica el Teorema de potencia de un punto en la circunferencia HQK se obtiene que:

$$(QV)^2 = HV(VK) \quad (5)$$

De la proporción (4) se despeja el producto de los segmentos HV y VK:

$$(HV)(VK) = \frac{(BC)^2(PV)(PO)}{(OC)(OB)} \quad (6)$$

Si en la ecuación (6) se sustituye el miembro izquierdo de la ecuación (5) queda:

$$(QV)^2 = \frac{(BC)^2(PV)(PO)}{(OC)(OB)} \quad (7)$$

El número $a = \frac{(BC)^2(PO)}{(OC)(OB)}$ es independiente de la posición del punto V, esta constante es el lado recto de la parábola y al ser sustituida en la (7), junto con QV = *x* y PV = *y* se obtiene la ecuación de la parábola $x^2 = ay$

.

2. 7. 3 PARÁBOLA SIGNIFICADO EN TÉRMINOS DE ÁREAS

Apolonio acuñó el término parábola para la sección cónica que cumplía con la proposición 11 de su primer libro. González Urbaneja (2001) lo resumió así: “La Parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su *ordenada y* es exactamente igual al rectángulo construido sobre la *abcisa x* y el *latus rectum* l” (p. 3).

La figura 2.8 muestra el caso particular de la parábola $y^2 = x$. Si el punto P tiene coordenadas en P(4, 2), el segmento mide la ordenada del punto P que es 2 y sobre éste se construye el cuadrado PBCA. El segmento PK mide la abscisa del punto P que es 4 y se construye a partir del punto P un segmento que mide lo mismo que el lado recto de la parábola.

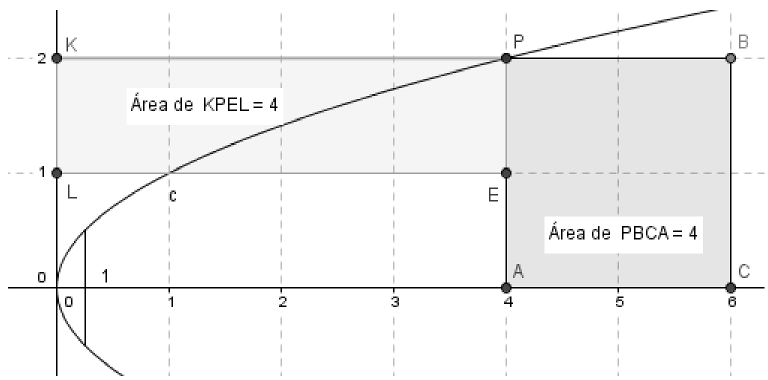


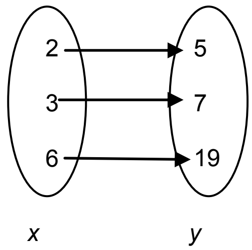
Figura 2.8 Relación entre las áreas de los paralelogramos PBCA y KPEL.

El *lado recto* en la figura 2.8 es el segmento de longitud 1 cercano al vértice de la parábola que es el origen. Más adelante se detalla que este segmento, en toda parábola mide 4p, dicha medida debe entenderse como el coeficiente de *x* en la ecuación de la parábola propuesta $y^2 = x$.

La figura 2.8 también muestra al cuadrado PBCA cuya área se calcula como $2^2 = 4$ y el rectángulo KPEL cuya área mide 4(1) = 4. El nombre de cada sección cónica proviene del método que usaban los griegos para resolver ecuaciones cuadráticas conocido como método de Aplicación de las Áreas. Como lo comenta Solórzano (1999) la palabra elipse significa deficiencia, la palabra hipérbola exceso y la palabra parábola equiparación. Como las áreas del cuadrado PBCA y KPEL son iguales, entre ellas se cumple la equiparación a la que alude el término parábola.

2. 7. 4 PARÁBOLA Y FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Una función es aquella relación en la cual a cada elemento de un conjunto llamado dominio le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto llamado codominio. El dominio es el conjunto de valores que tendrá la variable independiente y el codominio es el conjunto de valores que tendrá la variable dependiente. El valor de la variable dependiente es calculado a partir del valor de la variable independiente mediante una regla de correspondencia, que es una expresión algebraica si la función es algebraica. La función cuadrática es un tipo de función algebraica. La figura 2.9 muestra dos relaciones: una que si es función y una que no lo es.



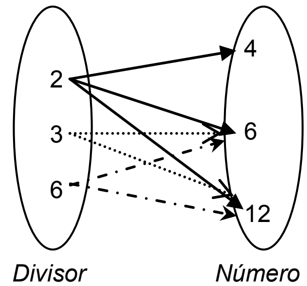


Figura 2.9 Función y relación.

La función cuadrática básicamente es aquella función cuya regla de correspondencia tiene un término cuadrático, aquel donde la variable independiente tiene exponente 2. La parábola es la representación gráfica de una función cuadrática.

Si la función tiene como variable independiente a *x*, los puntos que forma la representación gráfica de la función son pares ordenados que no comparten la misma abscisa entre sí. Al considerarse un valor particular de *x* a éste le corresponde una $y = f(x)$. Para averiguar si una curva es función con respecto a la variable x, debe trazarse una recta paralela al eje y, si la recta solo se encuentra con la curva en un punto único, la curva es función, en caso contrario no lo es.

La figura 2.10 muestra la parábola que representa a la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, si se elige el valor particular de $x = 2$ y se traza una paralela al eje y en el punto A (2, 0), dicha recta interseca a la parábola de la función cuadrática $f(x)$ en el punto B (2, 3). La ordenada del punto B es $y_B = f(2)$. La recta cuya ecuación es $x = 2$ sólo cruza a la parábola en un punto.

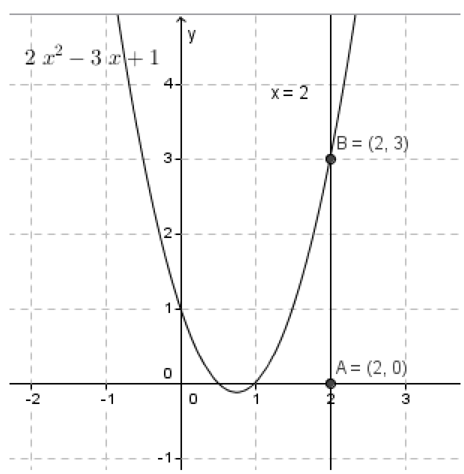


Figura 2.10 Parábola de la función *f(x) = 2x*^{2} *-3x*

La parábola de esta función $f(x)$ no podría ser una función $g(y)$, porque al trazar una recta paralela al *eje x*, esta recta cortaría a la parábola en dos puntos.

2. 7. 4. 1. TRASLACIÓN DE PARÁBOLA DESDE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA.

En el caso de una función cuadrática en x, su representación algebraica en forma general es: $f(x) = ax^2 + bx + c$, pero si se completa el trinomio cuadrado perfecto, a partir de los términos cuadrático y lineal: ax^2 y bx, respectivamente, la función cuadrática se expresa como:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

El siguiente desarrollo algebraico explica por qué:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = \left(\sqrt{a}x\right)^2 + 2\left(\sqrt{a}x\right)\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right) + \frac{b^2}{4a} + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = \left[\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

A partir de esta última representación de la función cuadrática se sabe que las coordenadas del vértice son: $x = -\frac{b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Si la abscisa del vértice es positiva entonces la parábola se mueve a la derecha del *eje y;* en caso contrario se mueve hacia la izquierda. Si la ordenada del vértice es positiva la parábola se desplazará verticalmente hacia arriba y en caso contrario hacia abajo. La abscisa del vértice indica la ecuación de la recta que es el eje de simetría.

Nótese que en el diagrama 2.11 puede advertirse que una función cuya variable independiente es *x,* tiene como representación gráfica una parábola vertical, en cambio, una función cuya variable independiente es *y*, tiene como representación gráfica una parábola horizontal.

Representación algebraica

- *Parábola vertical* $f(x) = ax^2 + bx + c$
- *Parábola horizontal* $g(y) = ay^2 + by + c$

Diagrama 2.11. Representaciones algebraicas de la parábola como función cuadrática.

2. 7. 5 Ecuación de la parábola

De acuerdo con Leithold (1994) “[l]a parábola es el conjunto de los puntos de un plano que equidistan de un punto y una recta fijos. Al punto fijo se le llama foco, y a la recta fija directriz” (p. 176).

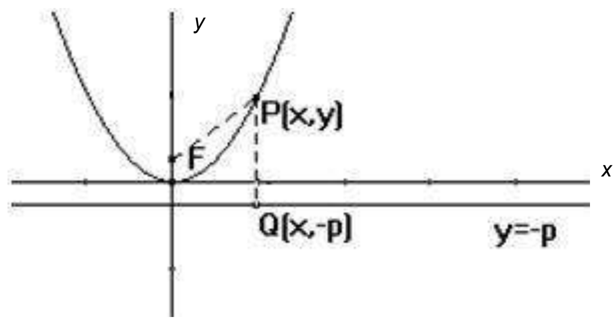


Figura 2.11. Parábola y = x^2

En el caso de la figura 2.11, el *foco* es el punto de coordenadas F(0,p) y la *directriz*, es la recta cuya ecuación es y = -p. Sean P(x, y) un punto que pertenece a la parábola y Q(x,-p) el *pie de la perpendicular* que va de P a la directriz, se cumple que:

$$\overline{FP} = \overline{QP}$$

Donde la longitud de estos segmentos son las distancias:

$$\overline{FP} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} \quad y \quad \overline{QP} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}$$

Al igualar dichas distancias queda: $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2}$

Elevando al cuadrado a cada miembro de la ecuación da como resultado:

$$x^2 + y^2 \quad 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

Al simplificar se obtiene la ecuación buscada: $x^2 = 4py$

Se obtuvo la **ecuación en forma canónica** de una parábola vertical con *vértice* en el origen cuya rama abre hacia arriba. Su *directriz* es la recta *y* = -*p*. Su eje de simetría es la recta respecto de la cual dos puntos que pertenecen a ella son simétricos. En este caso se trata del *eje y*, y como el foco pertenece al eje de simetría a dicho eje se le conoce también como *eje focal*.

Existen dos elementos faltantes para la parábola de la figura 2.11. La *distancia focal* que es la distancia del foco al vértice, la cual mide *p* unidades de longitud y la medida del *lado recto* [segmento que une dos puntos pertenecientes a una recta paralela a la directriz y que pasa por el foco]. Para determinar la longitud de este segmento se recurre a la figura 2.12 que muestra la parábola de la figura 2.11 con su lado recto y los extremos del segmento que son los puntos R y S. Ambos tienen como ordenada el valor p o la distancia focal.

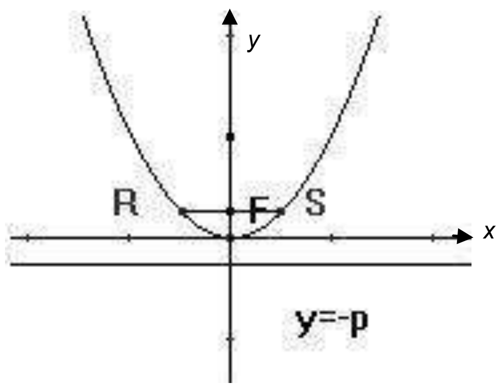


Figura 2.12 Segmento RS o lado recto de la parábola $x^2 = y$

Adviértase que se desconoce el valor de la abscisa de R y de la abscisa de S, estos valores son simétricos. Para conocer el valor de estas abscisas, se sustituye el valor *p* en el lugar de la variable *y* en la ecuación canónica obtenida, lo que da: $x^2 = 4p^2$.

Las soluciones de la ecuación cuadrática anterior son $x = \pm 2p$. Para conocer la longitud del segmento RS, como R y S son puntos con la misma ordenada, se suman los valores absolutos de sus abscisas:

$$|2\mathrm{p}| + |-2\mathrm{p}|$$

$$2\mathrm{p} + 2\mathrm{p} = 4\mathrm{p}$$

En conclusión, el lado recto en parábolas verticales mide 4p. El resultado también se extiende a cualquier parábola.

Para el caso de una parábola horizontal cuya rama abre hacia la derecha como la mostrada en la figura 2.13, debe advertirse que no se da la ecuación de la directriz. Para obtener dicha ecuación debe recordarse que la distancia focal *p* es también la distancia del vértice de la parábola a su directriz. Por ello, el punto sobre el *eje x* que cumple la condición de estar a *p* unidades de longitud del vértice V (0, 0) es el punto T(-p, 0). La recta donde la abscisa es una constante –*p,* tiene la ecuación *x* = -*p* y dicha recta es la directriz buscada.

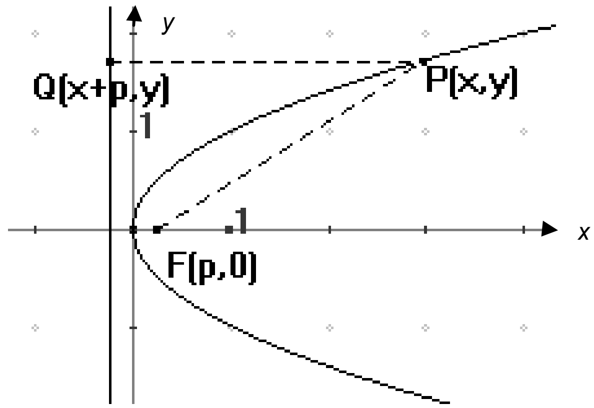


Figura 2.13 Parábola con ecuación $y^2 = x$

La ecuación se construye de forma análoga a como se hizo con una parábola vértice que abre hacia arriba. A partir de la definición de parábola, se toma como hipótesis que los segmentos QP y FP miden lo mismo.

$$\overline{FP} = \overline{QP}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

La **ecuación en forma canónica** para parábolas horizontales cuya rama abre hacia la derecha es: $y^2 = 4px$

De los elementos de la parábola se conocen la distancia focal, foco y directriz. Faltan el eje de simetría y el lado recto.

En el caso de una parábola horizontal cuya rama abre hacia la derecha, el lado recto se calcula al sustituir en la variable *x* el valor de *p*. De la ecuación cuadrática $y^2 = 4p^2$ sus soluciones son: $y = 2p$, $y = -2p$. El lado recto es la suma de los valores absolutos de estas ordenadas que da el resultado ya conocido *4p*.

2. 7. 5. 1 PARÁBOLAS SIMÉTRICAS

En la simetría axial cada punto A de una figura original y su punto simétrico A" en la figura reflejo, están a la misma distancia con respecto de una recta que es mediatriz del segmento AA".

Si se tuviera una parábola vertical que abre hacia arriba y se escogiera al *eje x* como eje de simetría axial, se trazaría una parábola vertical cuya rama abriría hacia abajo. El punto simétrico del vértice de la parábola sigue siendo el mismo vértice. Los puntos que forman la simétrica tendrán su ordenada negativa.

El foco de la parábola simétrica tiene ordenada negativa, sus coordenadas son F" (0, -p) y su directriz es la recta *y = p*. Debe advertirse que la distancia focal y el lado recto son cantidades positivas por ello se expresan con valor absoluto: $|p|$ y $|4p|$. Son las coordenadas del foco quienes auxilian a quien graficará una parábola para saber cómo abre la rama de una parábola.

Para parábolas con vértice en el origen, el foco tiene una coordenada que es cero y la otra coordenada tiene el valor de *p*. este parámetro si es positivo hará que la rama de la parábola abra hacia arriba o hacia la derecha, si no es así, la rama abrirá hacia la izquierda o hacia abajo.

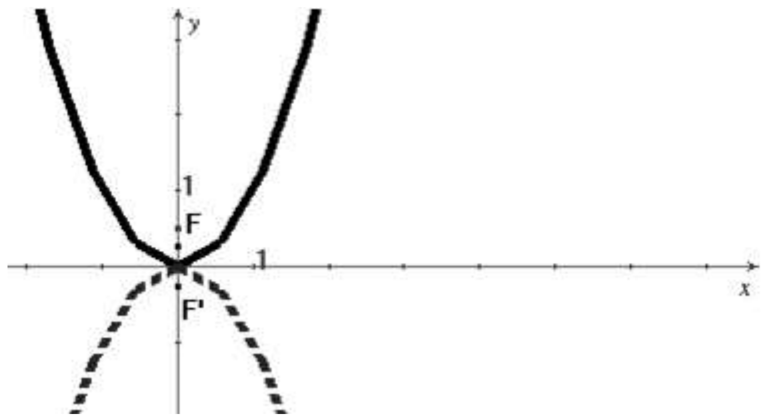


Figura 2.14 Parábola cuya ecuación es y = x^2 y su parábola reflejo

Por ejemplo, si la ecuación de una parábola fuera y = $-x^2$; como la mostrada en la figura 2.14, a partir de ella se obtendría que su lado recto de la parábola mide 1. Como $4p=-1$ entonces el parámetro p vale $p=-\frac{1}{4}$, esto indica que el foco de la parábola tiene coordenadas en $F(0,-\frac{1}{4})$ y que el sentido en el cual abre la rama de la parábola es hacia abajo.

En síntesis, las parábolas que abren hacia abajo con vértice en el origen son reflexiones de aquellas que abren hacia arriba con el mismo vértice y viceversa. También las parábolas que abren hacia la izquierda con vértice en el origen son reflexiones de aquellas que abren hacia la derecha con el mismo vértice y viceversa.

2. 7. 5. 2 TRASLACIÓN DE LA PARÁBOLA EN EL PLANO CARTESIANO.

Las parábolas no siempre tienen como vértice el origen, una parábola puede ser el resultado de trasladar una parábola con vértice en el origen hacia la derecha o hacia abajo, o hacia la combinación de estos dos sentidos. ¿Qué pasa si se traslada una parábola cuya rama abre hacia la derecha y hacia arriba? Como lo muestra la figura 2.15 ésta conserva su forma y tamaño del lado recto; porque en una traslación la figura original y la figura trasladada son congruentes. Sin embargo, en la parábola trasladada cambian las coordenadas del foco, del vértice, la ecuación de la directriz y la ecuación de esta parábola.

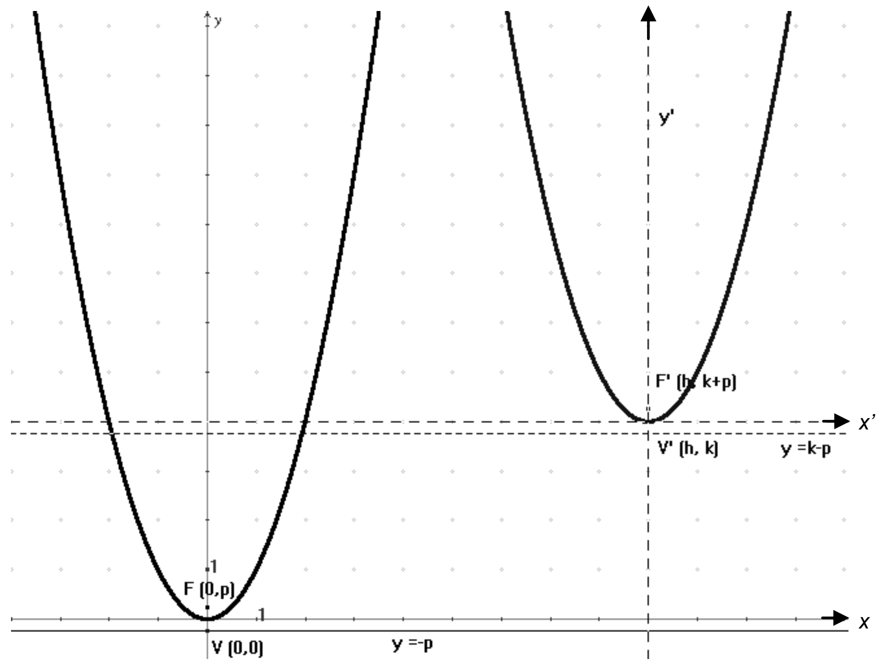


Figura 2.15 Traslación de la parábola $x^2 = 4py$ hacia arriba y hacia la derecha

Al trasladar una parábola en el plano cartesiano, los ejes coordenados también son trasladados, esto implica que se transforman en otros ejes coordenados. Si el *eje x* se mueve a la derecha *h* unidades de longitud su ecuación con respecto al sistema de coordenadas original será *x = h*, pero si lo hace hacia la izquierda su ecuación será *x = -h*.

En la tabla 2.13 se muestra lo que sucedería con el *eje y* si se moviera en los sentidos arriba y abajo.

Tabla 2.13 Ecuaciones de los ejes coordenados al trasladarse.

Ejes coordenados	Izquierda	Derecha	Arriba	Abajo
Eje x	x = -h	x = h		
Eje y			y = -k	y =k

Bajo el supuesto de que la parábola vertical cuya rama abre hacia arriba se moviera hacia la derecha y hacia arriba como muestra la figura 2.15, debe analizarse cómo cambiarán las coordenadas de su vértice y foco, también debe pensarse en la ecuación de la directriz de la parábola ya trasladada.

En cuanto al vértice en la parábola original este punto era el origen de plano cartesiano con coordenadas *y = 0* y *x =0*. El origen es el punto de intersección de los ejes coordenados. La ecuación del *eje x* es *y =0* y la del *eje y* es *x =0*.

Las cantidades involucradas en estas ecuaciones son las coordenadas del punto de intersección, por lo tanto, al trasladarse los ejes coordenados su punto de intersección definirá las ecuaciones de los nuevos ejes coordenados. De este modo si el *eje x'* tiene ecuación $x = h$ y el *eje y'* tiene ecuación $y = k$, su punto de intersección O" tendrá coordenadas O"(h, k) en el sistema de coordenadas *xy*. Para la parábola de la suposición su vértice en el sistema de coordenadas original era V(0,0) al trasladarse su vértice tendrá coordenadas V(h, k).

¿Qué pasa con la directriz de la parábola trasladada? Si la directriz de la parábola original estaba a *–p* unidades del vértice, la directriz de la parábola trasladada estará a *–p* unidades del nuevo vértice, lo que significa que se sumará *-p* unidades de longitud a la cantidad *k* para formar la ecuación *y* = *k* – *p*. Para el foco, ocurre algo similar, a la abscisa del foco original se le suman *h* unidades de longitud y a la ordenada del foco también se le suman *k* unidades de longitud.

La tabla 2.14 permite comparar los elementos de la nueva parábola y la original Obsérvese que las parábolas tienen al parámetro *p* [ordenada del foco en la parábola original] como un elemento que no cambia.

Tabla 2.14 Vértice, foco y directriz de parábolas verticales, original y trasladada.

Elementos	Original	Nueva parábola
Vértice	V(0,0)	V"(h,k)
Foco	F(0, p)	F"(h, k +p)
Directriz	y = -p	y = k-p

Para hallar la ecuación de la parábola resultante de la traslación propuesta, puede recurrirse a sustituir las ecuaciones de los nuevos ejes coordenados en su forma general, *eje x'* y *eje y'* en la ecuación canónica $(x')^2 = 4p(y')$. Las ecuaciones de los nuevos ejes coordenados se describen en la tabla 2.15:

Tabla 2.15 Ecuaciones en forma general para ejes de traslación.

Eje	Ecuación	Ecuación en forma general
X"	x = h	x - h = 0
Y"	y = k	y – k =0

Después de sustituir en la ecuación canónica la ecuación del *eje x'* y la ecuación del *eje y'* queda:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Una forma tradicional de obtener la ecuación faltante es partir de la definición analítica de parábola y calcular la distancia de P (x, y) al foco F" (h, k + p) y la distancia de P (x, y) a la directriz *y* = *k* + *p.* En este caso también se traza una recta perpendicular a la directriz que pase por el punto P para obtener el punto Q" que es la intersección entre la directriz y la perpendicular trazada.

$$\overline{F'P} = \overline{Q'P}$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = y-(k-p)$$

$$(x-h)^2 + (y-k-p)^2 = (y-k+p)^2$$

Después de desarrollar trinomios al cuadrado y reducir términos semejantes se obtiene:

$$(x-h)^2 - 4py + 4pk = 0$$

Al transponer los términos que contienen el factor común *4p*, se llega a la ecuación ordinaria de una parábola vertical que es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

2. 7. 5. 3. TRASLACIÓN DE PARÁBOLAS HORIZONTALES

Si la parábola a trasladar fuera una parábola horizontal cuya rama abre hacia la derecha, para trasladársele hacia la izquierda y hacia abajo las ecuaciones para los nuevos ejes coordenados *x"* y *y"* son: para el eje *x"*, *y = -k* y para el eje *y"*, *y = -k*.

El parámetro *p* se conserva. Las coordenadas del vértice son las coordenadas del punto de intersección de los nuevos ejes coordenados y las coordenadas del foco resultan de sumarle a la abscisa del foco *–h* unidades de longitud y a la ordenada *–k* unidades de longitud. En la tabla 2.16 se muestran los cambios en las coordenadas del foco, del vértice y en la ecuación de la directriz.

Tabla 2.16 Vértice, foco y directriz de dos parábolas horizontales, original y trasladada.

Elementos	Original	Nueva parábola
Vértice	V(0,0)	V"(-h, -k)
Foco	F(p, 0)	F"(-h + p, -k)
Directriz	x = -p	x = -h –p

La figura 2.16 muestra la parábola original y la resultante de trasladarla hacia abajo y hacia la izquierda.

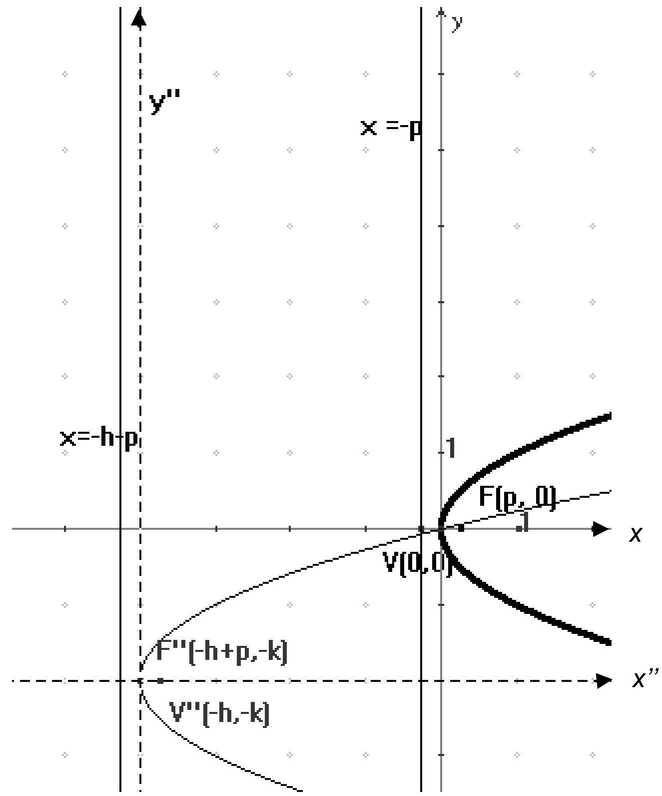


Figura 2.16 Traslación de la parábola $y^2 = 4px$ hacia abajo y hacia la izquierda

La ecuación de la nueva parábola se obtiene sustituyendo sobre la ecuación canónica las ecuaciones de los ejes coordenados y'' y x'' en su forma general o bien, usando la definición analítica de la parábola para calcular la distancia de P(x, y) al foco F''(-h, -k + p) y la distancia de P(x, y) a la directriz *y = -k + p*.

En el primer caso, las ecuaciones buscadas son, para el *eje x”*: $x+h=0$ y para el *eje y”*: $y+k=0$. Si la ecuación canónica fuera $(y'')^2 = 4p(x'')$ al sustituir las ecuaciones en forma general de los nuevos ejes coordenados se obtiene la ecuación ordinaria $(y+k)^2 = 4p(x+h)$.

En el segundo caso, se tiene que construir la ecuación como sigue:

$$\left|\overline{F''P}\right| = \left|\overline{Q''P}\right|$$

$$\sqrt{(x-(-h+p))^2 + (y-(-k))^2} = x+h+p$$

$$(x+h-p)^2 + (y+k)^2 = (x+h+p)^2$$

Después de desarrollar trinomios al cuadrado y reducir términos semejantes se obtiene:

$$(y+k)^2 - 4px - 4ph = 0$$

Al transponer los términos que contienen el factor común 4p, se llega a la ecuación ordinaria de una parábola vertical que es:

$$(y+k)^2 = 4p(x+h)$$

En la tabla 2.17 se define el sentido en que abrirá la rama de una parábola de acuerdo con el parámetro *p*.

Tabla 2.17 Coordenadas cartesianas y ecuaciones de los elementos de la parábola.

Elemento	Parábola horizontal		Parábola vertical	
Parámetro	p > 0	p < 0	p > 0	p < 0
Vértice		$V(h, k)$		
Foco	$F(h+p, k)$	$F(h+(-p), k)$	$F(h, k+p)$	$F(h, k+(-p))$
Directriz	$x=h-p$	$x=h-(-p)$	$y=k-p$	$y=k-(-p)$
Eje de simetría	$y=k$		$x=h$	
Sentido en el que abre la rama de la parábola	derecha	izquierda	arriba	abajo

CAPÍTULO 3. SECUENCIA DIDÁCTICA

3.1 INTRODUCCIÓN

Esta secuencia didáctica usa estrategias de aprendizaje cooperativo para intentar que los alumnos aprendan qué es la parábola como lugar geométrico y sección cónica. Se utilizan organizadores previos descritos por Díaz Barriga y Hernández (2002) como estrategias para obtener un aprendizaje significativo entre ellos: ilustraciones descriptivas de objetos matemáticos en dos dimensiones y en tres dimensiones, diagramas, objetivos de la sesión, organizadores gráficos como cuadros sinópticos, preguntas intercaladas, lluvia de ideas y discusiones guiadas. Esta secuencia didáctica considera las estrategias propuestas por los investigadores de la Universidad de Minnesota Johnson, D. W. y Johnson, R. (1999) quienes retoman la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, la teoría de la interdependencia social de Lewin y se pretende desarrollar una *zona de desarrollo próximo* como lo indica la teoría de de Vygotsky. Se utilizan cuestionarios, exámenes individuales y rúbricas para evaluar las estrategias desarrolladas en las sesiones. En las pruebas se recurrió a las sugerencias de Lafourcade (1972) para la elaboración de ítems de opción múltiple, ítems de complementación y los ítems donde se relacionan columnas.

La parábola es una curva que requiere de conocimientos previos en: operaciones aritméticas con números reales, resolución de ecuaciones de primer grado, conocimientos sobre binomio al cuadrado y trinomio cuadrado perfecto, noción de lugar geométrico y cálculo de la distancia entre dos puntos del plano cartesiano.

En la secuencia didáctica, se parte de la parábola como sección cónica, para establecer su definición analítica y analizar los elementos de la parábola que ayudan a deducir su ecuación en forma canónica y posteriormente en forma ordinaria; se omite la revisión de la parábola como representación gráfica de la función cuadrática, aunque se menciona que la parábola representa gráficamente a una función del tipo señalado.

La tabla 3.1 muestra cada tipo de tarea a desarrollar durante la secuencia didáctica de la parábola y las estrategias en cada una de ellas.

Tabla 3.1. Tipos de tareas que se desarrollarán durante la secuencia didáctica.

Tipo de tarea	Propósito	Estrategias propuestas
Individual	Identificar los conceptos más generales del tema.	• Organizador previo. • Ilustraciones descriptivas. • Preguntas intercaladas.
En equipo	• Corregir ideas previas de los integrantes. • Explicar cómo se resuelven los problemas propuestos entre integrantes del equipo.	• *Jigsaw* • STAD [*Student Teams Achievement Divisions]* • TGT [*Teams Games Tourmaments*] • Lluvia de ideas

Tipo de tarea	Propósito	Estrategias propuestas
Grupal	• Generalizar los procedimientos utilizados. • Destacar errores y cómo corregirlos. • Conocer formas de resolución de problemas comunes o bien, desarrollar otras alternativas.	Discusión guiada

Los equipos estarán formados por dos, tres o cuatro integrantes de acuerdo con la tarea a realizar y éstos serán heterogéneos. Los equipos serán formados por auto asignación de un dígito por parte de los estudiantes.

Las acciones a realizar por el profesor son.

1. Resolver las dudas de los estudiantes mientras trabajan en equipo, sin que esto implique explicar algo más. Es aconsejable buscar un ejemplo más sencillo y si es posible un contraejemplo que aclare las dudas propuestas.
2. Exponer el tema en las estrategias de aprendizaje cooperativo que lo requieran con ayuda de figuras videoproyectadas en el pizarrón, si no hubiera videoproyector, deben realizarse dichas figuras en láminas de papel bond, la intención es no perder tiempo dibujándolas.
3. Ayudar al equipo a resolver sus conflictos internos cuando éstos surjan.

Tabla 3.2 Desarrollo de la secuencia

Tarea No.	Semana	Sesión	Estrategia de aprendizaje	Tiempo total [min.]	Subtema(s)
1	1	1	Presentación del tema, estrategias a laborar en clase y formación del primer grupo informal	30	
2			*Jigsaw*	65	• Parábola como sección cónica.
3			Discusión guiada	25	• Definición analítica de la parábola. • Elementos geométricos de la parábola • Fundamentación teórica de la aplicación de la parábola en la vida real
4		2	STAD	60	Ecuaciones canónicas de la parábola con
5			Ejercicios en clase	60	$p > 0$
6		3	Prueba de las tareas 2, 3, 4 y 5	50	Prueba individual
7			Elaboración de tabla C-Q-A	10	
8	2	4	STAD	50	Longitud del lado recto
9			STAD	65	Ecuaciones canónicas de la parábola con $p < 0$.
10		5	Discusión guiada	50	Resumen previo a la prueba
11			Prueba de las tareas 7, 8 y 9	60	Prueba individual
12		6	*Jigsaw* II	60	Ecuación ordinaria de la parábola como consecuencia de una traslación en el plano cartesiano de una parábola con ecuación

Tarea No.	Semana	Sesión	Estrategia de aprendizaje	Tiempo total [min.]	Subtema(s)
					canónica.
13	3	7	TGT	90	Ecuación ordinaria de parábolas conociendo lado recto, o ecuación de la directriz y coordenadas del vértice, o coordenadas de vértice y foco.
14			Lluvia de ideas (1ª parte)	30	Ecuaciones ordinarias con vértice y foco o bien con vértice y directriz.
		8	Lluvia de ideas (2ª parte)	30	
15			TGT	65	Ecuación ordinaria considerando los extremos del lado recto y el vértice; o también los extremos del lado recto y la directriz de la parábola.

3.2 Desarrollo de la secuencia didáctica

Sesión 1

Tabla 3.2.1 Distribución de tiempo en la sesión 1

Tarea	Estrategia	Subtarea	Tiempo [min]
1	Uso de habilidades sociales	Presentación	8
	Rotafolio y breve explicación.	Presentación de objetivos y acciones a realizar	15
	Autoasignación de un dígito del 1 al 5 por estudiante	Formación de equipos y asignación de roles	7
2	*Jigsaw*	Lectura de la sección individual	20
		Trabajo con grupo de expertos	15
		Trabajo del equipo	10
3	Discusión guiada	Cuestionario e ítem de identificación	20
		Presentación de las preguntas y escucha de las respuestas	15
		Escritura de respuestas correctas en pizarrón.	10

Tarea 1. Presentación de la secuencia

Tiempo total: 30 minutos

Indicaciones generales:

El profesor presentará el tema e intentará motivarlos con el comentario de que lo más importante es el aprendizaje antes que la calificación. Les explicará cómo serán evaluados y la importancia de un compromiso por parte de ellos para obtener beneficios en equipo.

También el docente debe formar equipos de cinco integrantes; pidiéndoles que de forma ordenada uno de ellos sea el vocero, quien comunique las respuestas del equipo al resto de la clase; otra persona debe copiar el cuestionario y anotar las respuestas del equipo para cada pregunta, y alguien coordinará las participaciones al interior del equipo y tomará decisiones, en un momento dado, para que el trabajo en equipo dé buenos resultados; es decir, fungirá como líder; los otros dos integrantes del equipo deben vigilar que todos trabajen. El profesor debe ayudar a que se resuelvan diferencias de opinión entre los miembros del equipo.

Objetivos de la sesión:

1. Entender en qué forma la parábola es una sección cónica.
2. Conocer brevemente el origen de la Geometría Analítica y su aplicación en el contexto científico.
3. Conocer la definición analítica de la parábola.
4. Identificar los elementos geométricos de la parábola.
5. Conocer la propiedad de reflexión de los *paraboloides*.

Acciones a realizar:

El docente:

- Formará equipos de cinco personas con un líder, un secretario, un vocero y dos observadores.
- Informará sobre objetivos de la sesión, acciones a realizar en ésta y evaluación semanal.
- Resolverá dudas.

Los estudiantes en equipo:

- Analizarán una lectura mediante la técnica Jigsaw.
- Resolverán un cuestionario.
- Identificarán los elementos de una parábola que está ubicada en una cuadrícula.
- Participarán en una discusión guiada donde comprueben lo que han aprendido.

Evaluación semanal.

- Cuestionarios, discusión guiada y ejercicios con recompensa por equipo.
- Interacción del equipo controlada a través de una *rúbrica*.
- Prueba individual (viernes)

El profesor debe llenar la siguiente matriz de valoración para conocer el desempeño de cada equipo de trabajo.

Tabla 3.3 Rúbrica para evaluar a los equipos en la sesión.

Aspecto	Deficiente 5	Regular 6	Buena 8	Muy buena 10
Realización de los roles asignados	Sólo trabaja el líder y hay apatía entre los integrantes.	El líder es rechazado y los estudiantes no se comprometen, sólo cumplen con las labores pedidas.	El líder y los integrantes comparten responsabilidad y luchan para que el trabajo esté bien hecho.	Todos se comprometen y trabajan en su rol, luchan porque todos aprendan.
Comunicación entre	Permiten que	Comunican ideas	Procuran	Se escuchan y

Aspecto	Deficiente 5	Regular 6	Buena 8	Muy buena 10
sus integrantes	alguien monopolice los comentarios hechos en la labor de grupo formal.	pero existen actitudes pasivas en los integrantes.	escuchar y ser escuchados, buscan aprender juntos.	apoyan, buscan aprender juntos.
Resolución de conflictos	Hay ruptura, el trabajo es abandonado a la suerte de quien continúe haciéndolo.	Logran resolver el conflicto porque interviene el profesor como mediador, pierden puntos y el equipo no quiere continuar.	Resuelven los conflictos internos, debido a la participación de alguno de ellos quien actúa asertivamente. Pierden puntos y hay algunos reproches.	Resuelven el conflicto por medio de empatía y escucha atenta. Se comprometen a arreglar los desperfectos y asumen el costo en puntos que contrajeron por su conflicto.
Uso de notación	Problemas con notación de elementos geométricos.	Problemas con notación de elementos geométricos.	Carecen de problemas con notación de elementos geométricos.	Carecen de problemas con notación de elementos geométricos.
Proporción directa	Problemas con fracciones y proporciones directas.	Requieren ejemplos para entender Propiedad Fundamental de las Proporciones.	Requieren ejemplos para entender Propiedad Fundamental de las Proporciones.	Comprenden la Propiedad Fundamental de las Proporciones.
Origen de ecuaciones de parábolas	No entienden el origen de las ecuaciones de las parábolas.	Requieren ayuda para entender el origen de las ecuaciones de las parábolas.	Requieren poca ayuda para entender el origen de las ecuaciones de las parábolas.	Comprenden cómo se obtuvieron las ecuaciones de las parábolas.
Problema de la duplicación del cubo	No entienden la solución del problema.	No reconocen la solución del problema.	Reconocen que la solución del problema es la abscisa del punto I.	Entienden que la solución del problema es la abscisa del punto I.
Visualización de parábolas	Problemas para visualizar a las parábolas por separado y en el mismo plano.	Requieren ayuda para visualizar a las parábolas por separado y en el mismo plano.	Visualizan a las parábolas por separado y en el mismo plano.	Visualizan a las parábolas por separado y en el mismo plano.
Sección cónica	Problemas para comprender la acción del plano de corte sobre la	Requieren ayuda para comprender la acción del plano de corte	Requieren poca ayuda para comprender la acción del plano	Comprenden la acción del plano de corte sobre la superficie del

Aspecto	Deficiente 5	Regular 6	Buena 8	Muy buena 10
	superficie del cono.	sobre la superficie del cono.	de corte sobre la superficie del cono.	cono.

TAREA 2. ¿QUÉ ES UNA PARÁBOLA?

Tiempo total: 65 minutos

Indicaciones generales.

Se usará la estrategia de aprendizaje cooperativo *Jigsaw*, por lo que los estudiantes realizarán acciones en grupos de cinco integrantes, se les asignará secciones de un texto, que cada integrante leerá cuidadosamente durante veinte minutos. Luego cada integrante se reunirá con su equipo de expertos durante quince minutos. Regresarán a su equipo original y tendrán entre todos diez minutos para explicar su parte. El profesor puede auxiliar al equipo de expertos si lo requieren.

Responderán por escrito un cuestionario y realizarán un ejercicio para identificar los elementos de una parábola como lugar geométrico; ambos deben ser presentados cuando los estudiantes regresen con sus compañeros, después de trabajar con su equipo de expertos, de modo que no localicen la respuesta antes de tiempo y se perjudique el trabajo al interior del equipo. Trabajarán veinte minutos en el ejercicio de columnas relacionadas y la resolución del cuestionario. Las preguntas del cuestionario son:

1. ¿Qué problema geométrico originó las secciones cónicas como su posible solución?
2. ¿Cómo colocarían el plano de corte en cualquier tipo de cono, para obtener una línea recta?
3. ¿Qué reto geométrico inspiró a Descartes a escribir su libro *La Geometría*?
4. ¿Cuál es la diferencia entre una parábola y un paraboloide?
5. Expliquen con sus propias palabras la propiedad de reflexión de los paraboloides.

El texto es narrativo, contiene información histórica que está presentada cronológicamente, En la sección 1 se describe brevemente el problema de la duplicación del cubo y trata de explicar un contraste entre cómo se resolvió en la antigüedad y cómo se le resuelve ahora. En la sección 2 se explica por qué la parábola es una sección cónica, lo cual implica imaginación para entender qué es una sección cónica y trabajar con un gráfico de tres dimensiones en donde la parábola tiene dimensión uno por ser una curva de acuerdo con Duval (1999).

La sección 3 explica la definición de una parábola como lugar geométrico, al usar una relación de igualdad entre dos distancias, la que va de un punto de la parábola a la directriz y la que va de dicho punto al foco. La sección 4 en correspondencia con la sección 3 describe los elementos de una parábola primero como una figura sin abscisas y ordenadas y luego como una curva en el plano cartesiano.

La sección 5 explica brevemente como el paraboloide tiene su origen en la parábola y cómo la propiedad de reflexión dada en estas superficies en el espacio se ha utilizado para transmitir señales de telecomunicación.

Integrantes: ____ Grupo: _____

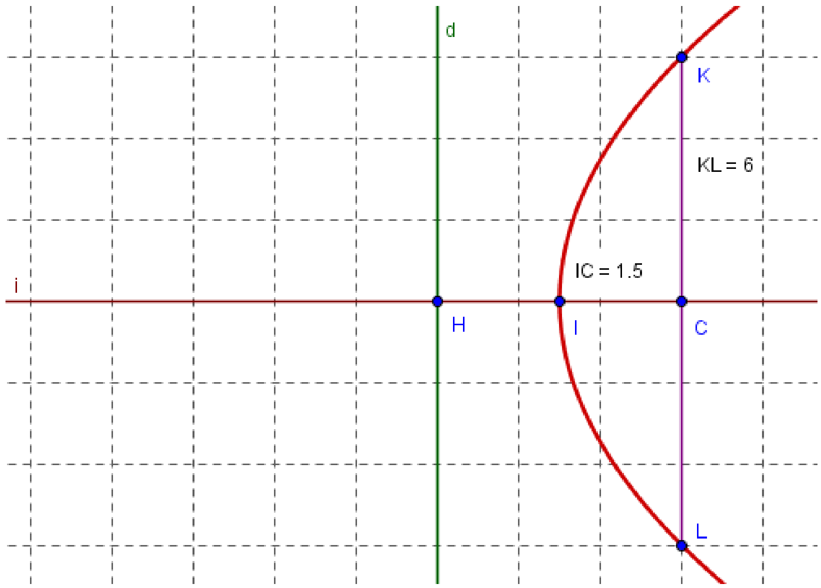
____

____

____

____

Consigna: Observen la parábola siguiente y relacionen las columnas que están debajo de ella.



3.1 Parábola de la cual se identificarán sus elementos.

Elemento de la parábola	Elemento de la gráfica 3.1
a. Foco	Punto I ( )
b. Directriz	Segmento $\overline{KL}$ ( )
c. Eje de simetría	Recta *i* ( )
d. Vértice	Punto K ( )
e. Distancia focal	Punto H ( )
f. Lado recto	Recta *d* ( )
	Punto C ( )
	Segmento $\overline{IC}$ ( )

Las respuestas son:

Punto I (d)
Segmento KL (f)
Recta i (c)
Punto K ( )
Punto H ( )
Recta d (b)
Punto C (a)

Segmento IC (e)

Sección 1: Origen de las secciones cónicas.

Los antiguos griegos resolvían problemas geométricos con el uso de regla y compás. De pronto, se plantearon el famoso problema de duplicar el volumen de un cubo; el cual requiere saber cuánto mide la arista de un cubo para que su volumen sea el doble de otro. Dicho problema no es resoluble con el uso de los instrumentos geométricos mencionados. Su solución en la antigua Grecia conllevaba resolver dos proporciones directas.

Una proporción directa es la igualdad de dos razones, las cuales son representadas como fracciones, así lo muestra el diagrama 3.1

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Razones: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$

Medios: a y d Extremos: b y c

Diagrama 3.1. Proporción y sus elementos

En una proporción directa, el producto de los *medios* es igual al producto de los *extremos;* a esto se le conoce como *Propiedad Fundamental de las Proporciones.*

Si en una proporción directa existe una pareja de *medios* idénticos o bien, una pareja de *extremos* idénticos, a esta cantidad se llama *media proporcional* como lo muestra el diagrama 3.2

$$\frac{e}{b}=\frac{c}{e}$$

Diagrama 3.2. Proporción con una cantidad conocida como media proporcional

Después de considerar la información anterior, ahora se puede entender lo hecho por el matemático griego Hipócrates de Quíos; a quien se le atribuye ser el primer matemático en haber planteado las siguientes proporciones directas:

$\frac{x}{k}=\frac{y}{x}$ Proporción 1 $\frac{x}{y}=\frac{y}{2k}$ Proporción 2

Al aplicar la *Propiedad Fundamental de las Proporciones,* de cada proporción directa se obtiene una ecuación, cuya representación gráfica es una parábola. Entonces de la proporción 1 se obtiene la parábola A que es vertical y de la proporción 2 se obtiene la parábola B que es horizontal; como lo muestran las figuras 3.2 y 3.3, respectivamente.

A. $x^2 = ky$

B. $2kx = y^2$

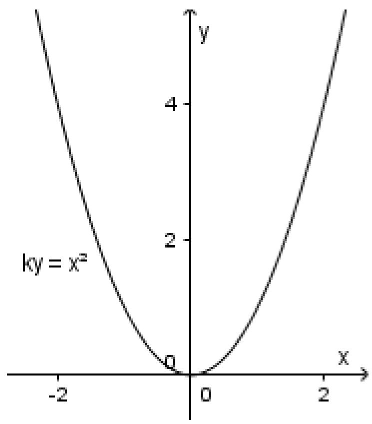


Figura 3.2 Parábola A

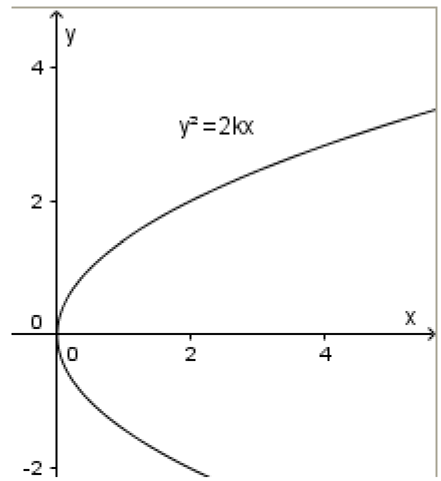


Figura 3.3 Parábola B

En nuestros días, para resolver el problema de la duplicación del cubo basta con hallar las coordenadas del punto donde se intersecan las parábolas de A y B. Dicho punto está representado en la figura 3.4 como el punto I de coordenadas $y = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 k$ y $x = \sqrt[3]{2}k$.

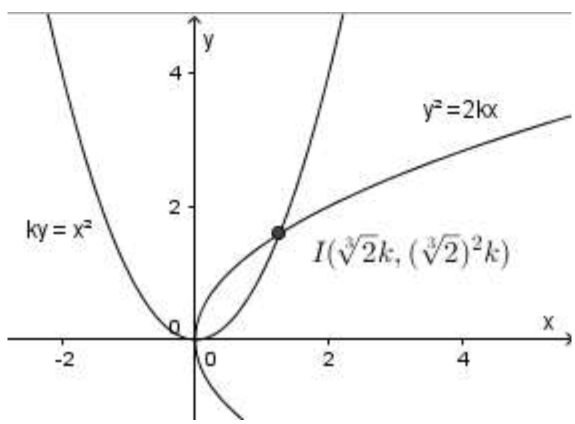


Figura 3.4 Punto de intersección de las parábolas A y B

Por ahora, es suficiente con sustituir las coordenadas del punto I en la ecuación de cada parábola, para comprobar que los valores hallados resuelven el problema de duplicar el volumen de un cubo.

Menecmo aproximadamente hacia el año 350 a. n. e., al intentar resolver el problema de duplicar el volumen de un cubo, quizás fue la primera persona en usar *secciones cónicas*. Las secciones cónicas son curvas resultantes de cortar la superficie de un cono con un plano. Las secciones cónicas son la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.

Sección 2. ¿Por qué la parábola es una sección cónica?

¿Cómo es eso posible?, ¿qué es una generatriz? Bueno, una generatriz es una recta en el espacio que al girar guiada por una circunferencia base y además al pasar por un punto fijo también en el espacio, genera no uno sino dos conos. La figura 3.5 muestra los conos obtenidos por el movimiento descrito anteriormente.

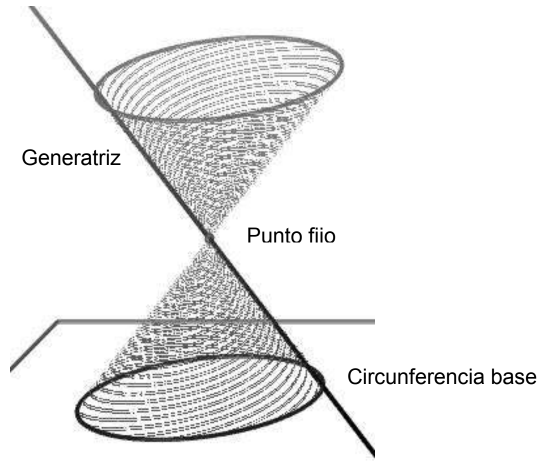


Figura 3.5 Cono generado por la generatriz

De acuerdo con Menecmo, si se tiene un cono rectángulo el corte de un plano perpendicular a la generatriz de dicho cono, generará sobre su superficie una curva llamada parábola.

En la figura 3.6 se muestra un cono de perfil. El ángulo entre las generatrices es recto y por eso el cono recibe el nombre de cono rectángulo.

Por otra parte, el plano de corte es representado por la recta *g;* la cual es perpendicular a la generatriz y forma junto con ésta un ángulo recto. El segmento GH representa a la región del plano que contiene a la parábola. La figura 3.7 muestra una parábola al interior de un cono rectángulo.

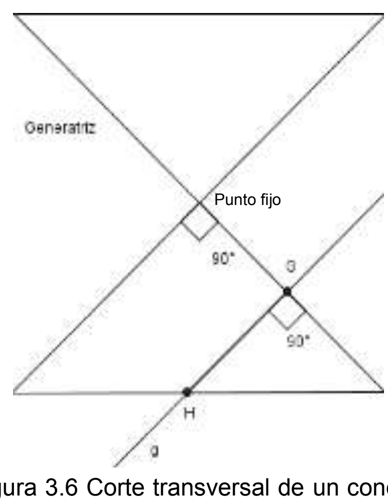


Figura 3.6 Corte transversal de un cono rectángulo

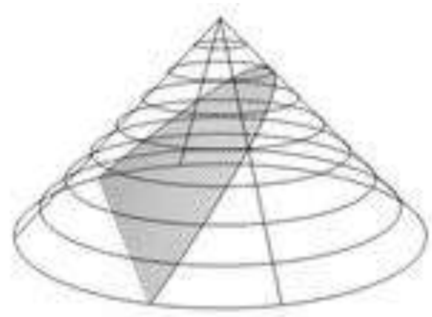


Figura 3.7 Parábola dentro de un cono rectángulo tomado de (Alegría, 2002)

Las secciones cónicas eran curvas cuya definición requería un poco de imaginación para poder visualizarlas como conjuntos de puntos sobre la superficie de un cono. Definitivamente, era necesaria una definición más sencilla.

En el siglo III a. n. e. Apolonio de Perga, varió la posición del plano de corte en un cono único, para obtener cada una de las secciones cónicas, hizo más sencilla la definición de una sección cónica. Apolonio descubrió que para obtener una parábola, el plano de corte debe ser paralelo a la generatriz del cono, sin importar que el cono no sea rectángulo.

La figura 3.8 muestra un cono no rectángulo donde hay dos planos paralelos a la generatriz y uno de ellos pasa exactamente por ella. La parábola se observa como una línea punteada al interior del cono inferior.

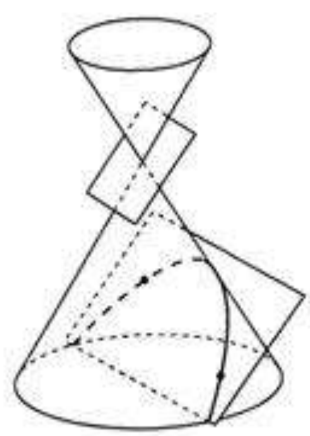


Figura 3.8 Corte paralelo a la generatriz de un cono, tomado de González Urbaneja (2001 ¶3)

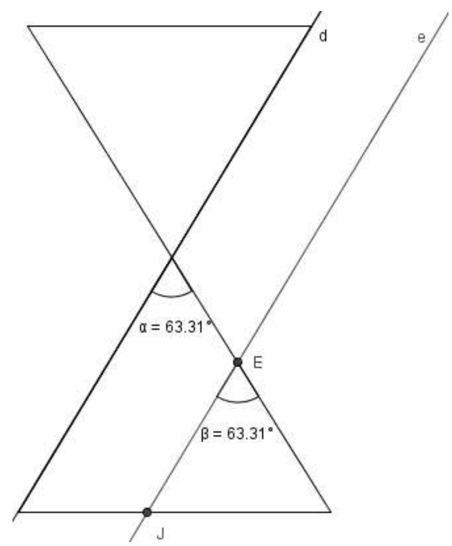


Figura 3.9 Cono no rectángulo de perfil.

En la figura 3.9 se observa a un cono no rectángulo de perfil, con las rectas *e* y *d*, que representan a planos paralelos a la generatriz del cono. Los ángulos α y β evidentemente son congruentes, puesto que son ángulos correspondientes entre paralelas. El segmento EJ en la figura 3.9 representa a una región del plano que contiene una parábola como la contenida en la figura 3.8.

Cierto, la definición de sección cónica todavía no era lo suficientemente sencilla para resolver de forma práctica un problema geométrico como el de la duplicación del volumen de un cubo. Sin embargo, Apolonio de Perga propuso un reto: localizar el lugar geométrico relacionado con tres o cuatro rectas en un plano. El matemático griego Pappus de Alejandría propuso que la solución de dicho reto es una sección cónica. Más tarde, en el siglo XVII d. n. e., René Descartes llamo al reto propuesto por Apolonio, Problema de Pappus.

Antes debe recordarse que Francois Viète hacia 1591 introdujo un lenguaje simbólico predecesor del lenguaje algebraico actual. Dicho lenguaje y el gusto de Descartes por el Problema de Pappus, le permitieron escribir el libro *La geometría,* por el cual él es considerado creador de la Geometría Analítica; sin embargo también su compatriota Pierre de Fermat representó elipses y parábolas mediante ecuaciones cuadráticas. Hacia 1629 Fermat realizó investigaciones sobre la ecuación general de la línea recta.

Sección 3: Parábola como lugar geométrico.

No se trata de quitarle mérito a Descartes o a Fermat, sino de mostrar cómo la resolución de un problema geométrico permitió el desarrollo de la Geometría Analítica. Los nuevos conocimientos matemáticos ayudaron a otros científicos a realizar sus investigaciones. En su primera ley del movimiento de cuerpos celestes Johannes Kepler uso órbitas elípticas para describir el movimiento de los planetas del sistema solar. Isaac Newton comprobó que la trayectoria de un proyectil, después de su lanzamiento describe una parábola. Ambos científicos utilizaron secciones cónicas para elaborar modelos que explican fenómenos físicos.

La parábola como lugar geométrico es un conjunto de puntos en el plano cartesiano que cumple la condición que se explica en el recuadro.

> Un punto P pertenece a una *parábola,* si la distancia del punto P a un punto fijo F, llamado *foco,* mide lo mismo que la distancia del punto P a una recta *d,* llamada *directriz.*

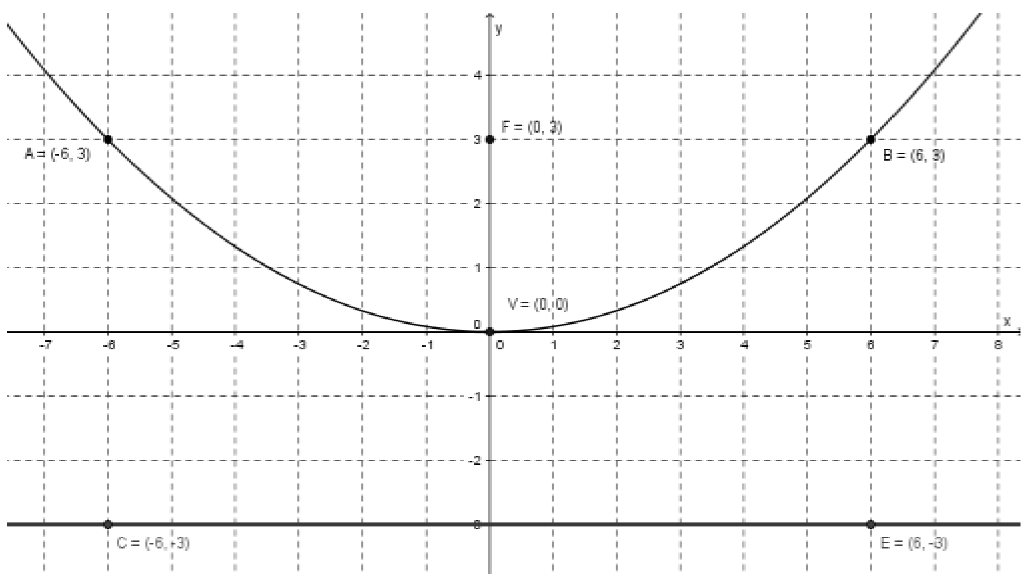


Figura 3.10 Gráfica una parábola y su directriz

En la figura 3.10 observen las coordenadas de los puntos A, B, C, F y V, y comprueben si son ciertos los siguientes enunciados:

a) Los puntos C y E pertenecen a la directriz.
b) Los puntos A, V y B pertenecen a la parábola.
c) La unidad de longitud en la figura 3.10 es la medida del lado de un cuadrado.
d) La distancia del punto V al punto F mide tres unidades de longitud y es igual a la distancia punto V a la directriz.

e) La distancia del punto B al punto F es igual a la distancia del punto B al punto E, pues ambas distancias miden seis unidades de longitud.

Sección 4: Elementos de la parábola como lugar geométrico.

Una parábola como *lugar geométrico* tiene los siguientes elementos:

$$\text{Parábola}\left\{\begin{array}{l}\text{Foco}\\ \text{Directriz}\\ \text{Vértice}\\ \text{Distancia focal}\\ \text{Lado recto}\\ \text{Eje de simetría}\\ \text{Rama}\end{array}\right.$$

Diagrama 3.3 Elementos de la parábola

Para entender qué es cada uno de los elementos además de observar la figura 3.11, cotejen la lista presentada con los elementos contenidos en el cuadro sinóptico expuesto en el diagrama 3.3.

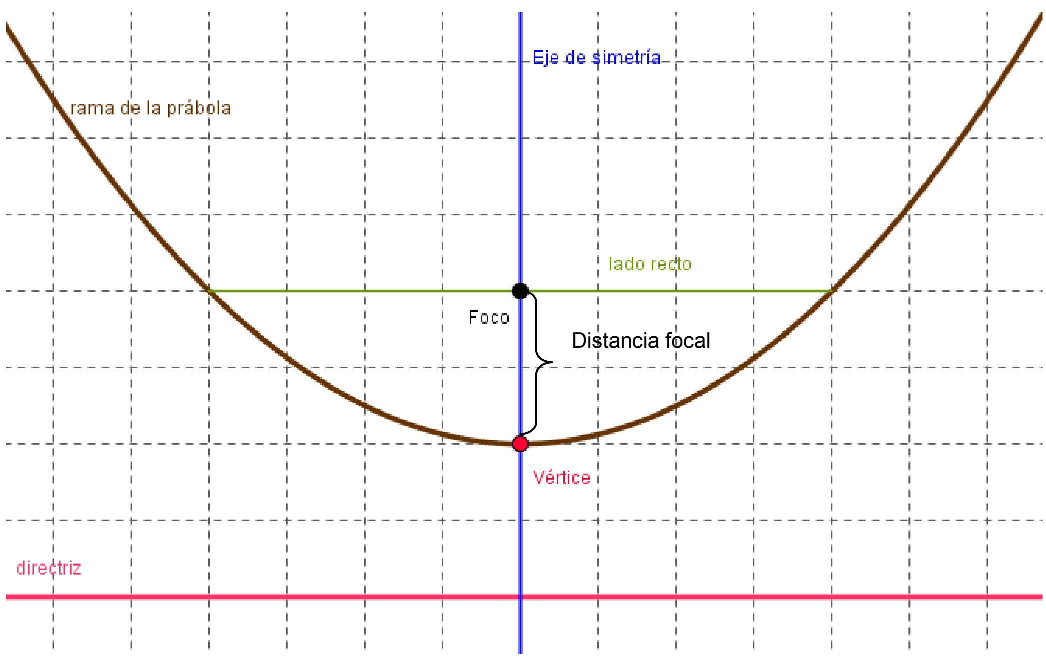


Figura 3.11 Elementos de la parábola

En la figura 3.11, se muestra una parábola que no está ubicada en el plano cartesiano sino en una cuadrícula, la finalidad es apreciar los elementos de la parábola de una mejor forma.

La siguiente lista explica los elementos de cualquier parábola:

1. El *foco* es un punto fijo ajeno a la parábola.
2. La *directriz* es una recta que no se interseca con la parábola y que no contiene al foco.
3. El vértice de la parábola es el punto medio entre el foco y la directriz.

4. La distancia entre el *vértice* y el *foco* se llama *distancia focal*.
5. La cuerda paralela a la *directriz* y que pasa por el *foco* se le llama *lado recto.*
6. El *eje de simetría* divide a la *rama de la parábola* en dos conjuntos de puntos simétricos entre sí.
7. La *rama de la parábola* está compuesta por todos los puntos que pertenecen a la parábola.

La unidad de medida de longitud en la figura 3.11 es la medida del lado de un cuadrado de la cuadrícula La información anterior sirve para comprobar que si la *distancia focal* mide dos unidades de longitud y el *lado recto* mide ocho unidades de longitud entonces, el *lado recto* mide cuatro veces lo que mide la *distancia focal*.

¿Qué sucede con una parábola cuando está ubicada en el plano cartesiano? Si su eje de simetría coincide con el *eje y*, la parábola es vertical como la mostrada en la figura 3.12.

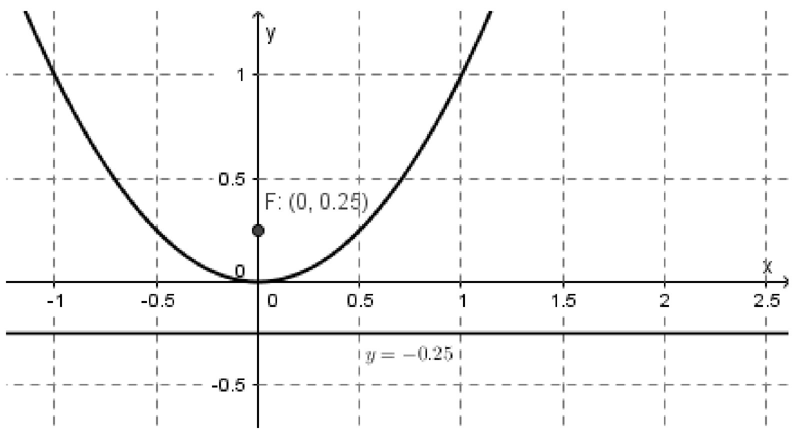


Figura 3.12 Gráfica de una parábola en el plano cartesiano

Entonces verifiquen la veracidad de la siguiente lista de enunciados:

- El *vértice* de la parábola es el punto llamado *origen* del plano cartesiano, sus coordenadas son y = 0 y x = 0.
- El *foco* llamado F se ubica en F(0, 0.25)
- El *eje de simetría* de la parábola coincide con el *eje y,* su ecuación es *x = 0.*
- La *directriz* de la parábola es la recta cuya ecuación es y = - *0.25*.
- La ordenada del foco es positiva y por lo tanto, la rama de la parábola abre hacia
- arriba.
- La *distancia foca*l mide 0.25 unidades de longitud.

Sección 5. ¿Para qué sirve la parábola?

Si una parábola gira alrededor de su eje de simetría, se genera una superficie denominada paraboloide, como la mostrada en la figura 3.13.

Figura 3.13 Paraboloide realizado por Fernández (2011).

Los paraboloides se usan en antenas parabólicas, faros de automóvil y en algunos telescopios por su propiedad de reflexión. Las ondas electromagnéticas se reflejan en la superficie de un paraboloide de la misma forma en que lo hace la luz.

Propiedad de reflexión

En un paraboloide, los rayos de la luz que inciden paralelamente a su eje de simetría se reflejan dirigidos a un punto en el espacio llamado *foco*, como lo muestra la figura 3.14.

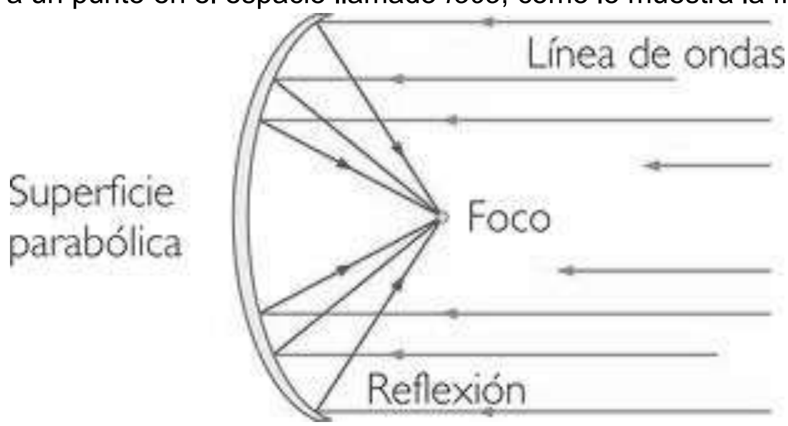


Figura 3.14 Señal reflejada sobre la superficie de un paraboloide tomado de del Olmo (2014).

En algunas antenas parabólicas su foco tiene un aparato que le permite reflejar ondas electromagnéticas hacia la superficie del paraboloide, de forma que la antena emite una señal de telecomunicación.

Cuenta la leyenda que Arquímedes usó espejos parabólicos para reflejar la luz del sol e incendiar las naves romanas, de esta forma él defendió Siracusa su ciudad natal. ¿Les parecen interesantes las parábolas?

Finalmente, la Parábola en Matemáticas es una sección cónica; un lugar geométrico y la representación gráfica de una función cuadrática; siempre y cuando el eje de simetría de la parábola, sea perpendicular a alguno de los ejes coordenados del plano cartesiano.

No se estudiará a la parábola como función cuadrática porque ese contenido corresponde a un curso previo. En las sesiones siguientes el análisis de la parábola se centrará en su definición analítica para obtener ecuaciones de la parábola con eje de simetría idéntico o paralelo a alguno de los ejes coordenados.

TAREA 3. DISCUSIÓN GUIADA

Tiempo total: 25 minutos

Indicaciones generales

Los estudiantes realizarán una discusión guiada junto con el profesor, la cual responderá a las siguientes preguntas:

1. De acuerdo con Menecmo: ¿qué tipo de cono genera una parábola?
2. De acuerdo con Apolonio de Perga: ¿qué posición debería tener el plano de corte en cualquier cono, para obtener una parábola?
3. De acuerdo con Pappus de Alejandría: ¿cuál era la solución del reto propuesto por Apolonio?
4. ¿La definición analítica de la parábola tiene relación con la propiedad de reflexión en los paraboloides?
5. ¿Cómo explicarían esa relación si es que existe?

El objetivo es evaluar cómo funciona la estrategia de Jigsaw en los estudiantes y reconocer qué problemas presentaron ante la lectura del texto.

Los estudiantes deben anotar en una hoja de trabajo las respuestas correctas ya analizadas y escritas en el pizarrón; también es conveniente que lo hagan en su cuaderno para conservar los resultados de su trabajo en equipo.

SESIÓN 2

Tabla 3.2.2 Distribución de tiempo en la sesión 2

Tarea	Estrategia	Subtarea	Tiempo [min]
4	STAD	Exposición del tema	30
		Estudio del tema en equipo	15
		Ejercicios en parejas dentro del equipo para obtener de la gráfica de una parábola su ecuación canónica	15
5		Ejercicios realizados por el equipo completo para obtener la gráfica de una ecuación canónica de la parábola	30
		Revisión de las respuestas	20

Objetivos de la sesión:

1. Deducir las ecuaciones canónicas de una parábola vertical cuya rama abre hacia arriba y de una parábola horizontal cuya rama abre hacia la derecha.
2. Realizar ejercicios en donde se construya la ecuación canónica a partir de una representación gráfica de la parábola.
3. Realizar ejercicios en donde se reconozca la gráfica de una parábola a partir de la ecuación canónica.

Acciones a realizar:

El docente:

- Revisará con cuidado la labor de los integrantes de los equipos en diferentes roles como son líder, secretario y vocero.
- Informará sobre objetivos de la sesión y las acciones a realizar en ésta.
- Resolverá dudas.

Los estudiantes en equipo:

- Identificarán y trazarán el lado recto de una parábola así como su eje de simetría.
- Hallarán la distancia focal y la ecuación canónica de una parábola a partir de una gráfica que muestre la rama de la parábola, el foco y la directriz.
- Hallarán la distancia focal y las coordenadas del foco de una parábola a partir de la ecuación canónica.
- Identificarán la gráfica de la parábola correspondiente a una ecuación canónica.

TAREA 4. PARÁBOLAS CON VÉRTICE EN EL ORIGEN

Tiempo total: 60 minutos

Indicaciones generales.

Conservarán los equipos de la estrategia Jigsaw y realizarán la estrategia de aprendizaje cooperativo STAD. Se comentará brevemente que el profesor expondrá la deducción de las ecuaciones canónicas de las parábolas durante treinta minutos, usar cronómetro y procurar no dejar secciones pendientes. El material también será fotocopiado para que todos tengan acceso al mismo apunte. Los estudiantes tendrán quince minutos para apropiarse del tema.

Al interior de cada equipo se formarán dos parejas que resolverán por separado los dos ejercicios, con previo aviso que deben anotarse las respuestas en el cuaderno de cada integrante; dispondrán de quince minutos para contestar los ejercicios 1 y 2. Debe entenderse que surgirán dudas y es necesario atenderlas en ese momento de forma grupal, probablemente la respuesta no saldrá del profesor sino de otro equipo y debe ser dada con respeto.

El texto será fotocopiado para que los estudiantes puedan estudiarlo previamente a la prueba; éste utiliza figuras que son analizadas por el discurso, el registro algebraico forma parte del texto y se le relaciona con puntos, segmentos o rectas asociadas a la parábola como lugar geométrico, distinguiendo a estos elementos geométricos como unidades figurales de la parábola. El teorema de Pitágoras es mostrado en un registro gráfico y también con un enunciado que describe la relación algebraica entre las áreas de las figuras implicadas en él.

Equipo: ___

Integrantes: ____ Grupo: ______

____

Ejercicio 1.

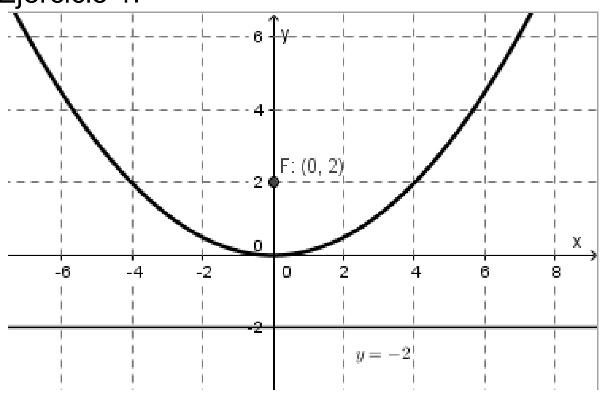


Figura 3.15. Parábola del ejercicio 1.

a) ¿Cuánto mide la distancia focal?

b) Trazar en la gráfica propuesta el lado recto de la parábola

c) ¿Cuánto mide el lado recto?

d) ¿Cuál es la ecuación canónica de la parábola? Subráyala

A. $x^2 = 4y$ B. $y^2 = 8x$ C. $x^2 = 8y$

Ejercicio 2.

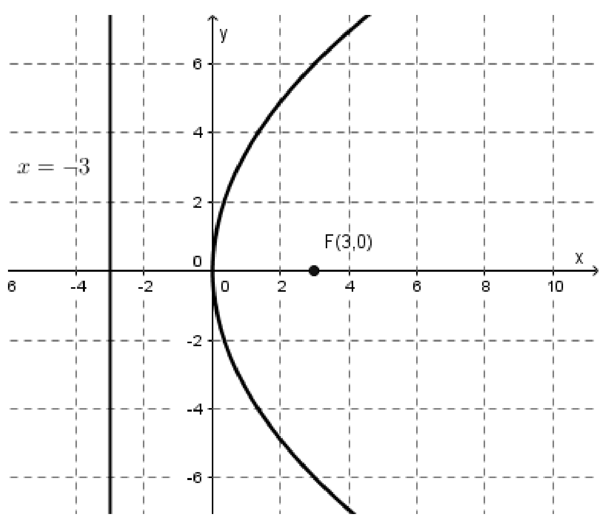


Figura 3.16. Gráfica del ejercicio 2.

a) ¿Cuánto mide la distancia focal?

b) Trazar el eje de simetría de la parábola

c) ¿Con qué eje coordenado coincide el eje de simetría de la parábola?

d) ¿Cuál es la ecuación canónica de la parábola? Subráyala

A. $y^2 = 6x$ B. $x^2 = 12y$ C. $y^2 = 12x$

Respuestas:

Ejercicio 1

a) Mide 5 unidades de longitud.
b) Se traza la cuerda focal que pasa por el foco.
c) Mide 8 unidades de longitud
d) B.

Ejercicio 2

a) Mide 3 unidades de longitud.
b) Se traza la cuerda focal que pasa por el foco
c) Mide 12 unidades de longitud.
d) C.

Texto expuesto por el profesor

Parábola vertical cuya rama abre hacia arriba

Para determinar la ecuación canónica de una parábola vertical con vértice en el origen, cuya rama abre hacia arriba; primeramente, se dibuja en un plano cartesiano una curva similar a la parábola, la exactitud del trazo no es importante.

En este esbozo se ubica el punto F, el foco de la parábola, de coordenadas $F(0, p)$ y se traza la directriz que es la recta cuya ecuación es *y* = -*p*. Luego se señala un punto P de coordenadas $P(x, y)$ que pertenece a la parábola, como lo muestra la figura 3.17.

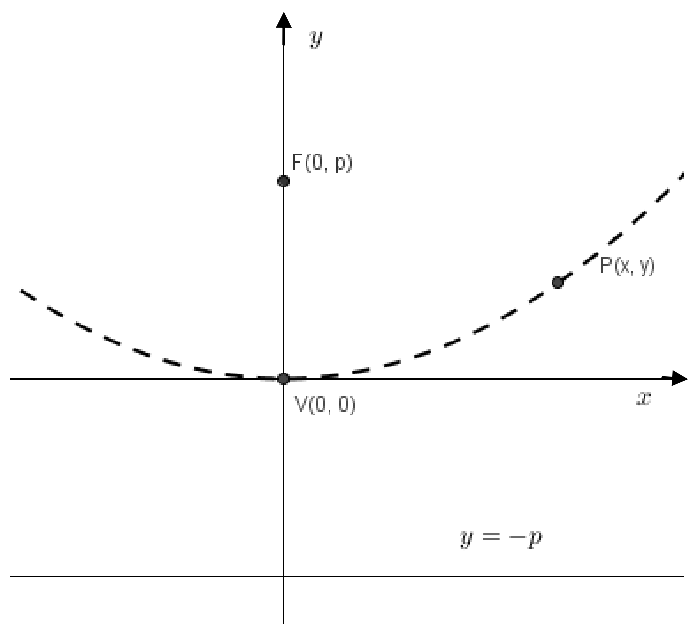


Figura 3.17 Esbozo de la parábola vertical cuya rama abre hacia arriba

Es importante notar que el foco está ubicado en el sentido en el que abre la rama de la parábola, en este caso arriba del *eje x*. Si se observa la figura 3.17 la directriz está debajo del *eje x*, en el sentido opuesto al foco.

Si se recuerda la definición analítica de la parábola es indispensable hallar expresiones algebraicas que calculen la distancia del punto P(x, y) hacia el foco F(0, p) y hacia la directriz *y* = - *p*. Por ello se realizarán básicamente los siguientes pasos:

1) **Calcular la distancia del punto P al foco**. Para ello, es necesario recordar cómo se calcula la distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano. Es más fácil, si se construye un triángulo rectángulo como FBP como el mostrado en la figura 3.18.

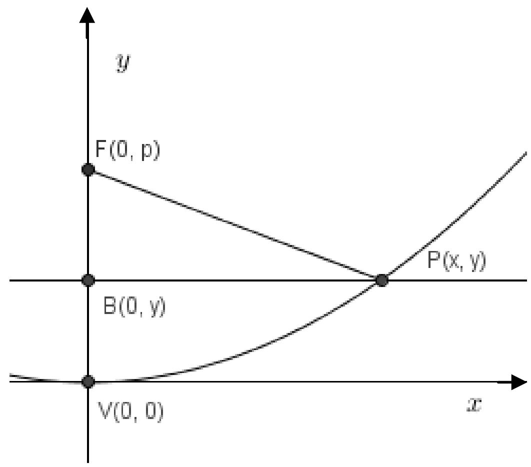


Figura 3.18 Triángulo FBP

Uno de los vértices del triángulo FBP es el punto P, el otro vértice es el punto F y el último vértice es el punto B; que tiene la misma abscisa que el punto F y además comparte con el punto P la misma ordenada, por lo tanto las coordenadas de B son $B(0, y)$.

Como el triángulo FBP es rectángulo tiene como *catetos* a los segmentos PB y FB, su *hipotenusa* es el segmento PF. Para el *cateto* BF como los puntos B y F están sobre el *eje y*; la distancia es fácil de calcular como el resultado de restar, a la ordenada del punto F a la ordenada del punto B, es decir:

$$\overline{FB} = p - y$$

Para el *cateto* PB como los puntos P y B tienen la misma ordenada, la distancia entre ellos es el resultado de restar, a la abscisa de P la abscisa de B, es decir:

$$\overline{PB} = x$$

En el caso de la *hipotenusa* PF se utiliza el Teorema de Pitágoras, cuyo enunciado dice:

> En cualquier triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Al observar la figura 3.19, se tiene al cuadrado construido sobre la hipotenusa que está cuadriculado, cuya área mide $\left(\overline{PF}\right)^2$; el cuadrado construido sobre el cateto FB que se asemeja a un muro de ladrillos, cuya área mide $\left(\overline{FB}\right)^2$; por último, el cuadrado construido sobre el cateto PB, que se asemeja a un panal y cuya área mide $\left(\overline{PB}\right)^2$.

$$\left(\overline{PF}\right)^2 = \left(\overline{FB}\right)^2 + \left(\overline{PB}\right)^2$$

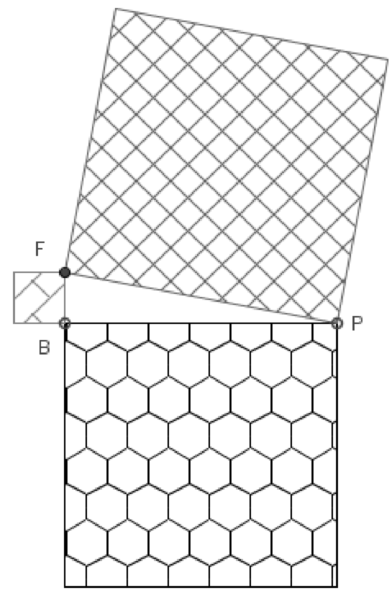


Figura 3.19 Cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo FBP

La igualdad anterior se transforma en: $$\left(\overline{PF}\right)^2 = (p-y)^2 + x^2$$

Al extraer raíz cuadrada de ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$\overline{PF} = \sqrt{(p - y)^2 + x^2}$$

2) **Calcular la distancia del punto P a la directriz**. Pare ello, se traza una recta perpendicular a la directriz que pase por el punto P, la cual genera el punto D de coordenadas $D(x,-p)$, como se muestra en la figura 3.20.

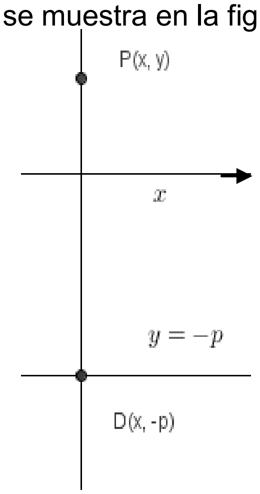


Figura 3.20 Punto D sobre la directriz *y = -p*

Los puntos P y D comparten la misma *abscisa*, pero D tiene ordenada negativa y P tiene ordenada positiva, entonces el segmento PD es el resultado de restar a la ordenada de P la ordenada de A, es decir:

$$\overline{PD} = y-(-p) = y+p$$

3) **Construir la ecuación requerida a partir de la definición analítica.**

La definición analítica de una parábola establece la igualdad entre dos distancias; la distancia entre el foco F y cualquier punto P que pertenece a la parábola, que corresponde a longitud del segmento PF y la distancia de ese punto P a la directriz *de* la parábola, la cual corresponde a la longitud del segmento PD. Esto se escribe como:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

$$\sqrt{(p-y)^2 + x^2} = y+p$$

4) **Simplificar la ecuación anterior**.

a) Como el miembro izquierdo de la ecuación anterior es una raíz cuadrada, entonces ambos miembros de la ecuación son elevados al cuadrado y queda:

$$(p-y)^2 + x^2 = (y+p)^2$$

b) Desarrollar el binomio al cuadrado en cada miembro de la ecuación anterior:

$$p^2 - 2py + y^2 + x^2 = y^2 + 2py + p^2$$

c) Reducir términos semejantes.

Se restan a los términos del miembro izquierdo de la ecuación aquéllos que son términos semejantes en el miembro derecho de la ecuación:

$$p^2 - 2py + y^2 + x^2 - y^2 - p^2 - 2py = 0$$

d) Finalmente se obtiene la ecuación:

$$x^2 - 4py = 0$$

Para la parábola vertical se conserva a la variable x en el miembro izquierdo de la ecuación y en el miembro derecho el término algebraico que contiene a la variable y.

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

La ecuación del recuadro anterior recibe el nombre de ***ecuación de la parábola vertical en forma canónica***. Por tener vértice en el origen y ser vertical, su *eje de simetría* tiene la ecuación *x = 0* la cual corresponde con el *eje y*.

Parábola horizontal cuya rama abre hacia la derecha

Para determinar la ecuación canónica de la parábola horizontal con vértice en el origen y que abre hacia la derecha; se realizará un procedimiento similar al expuesto anteriormente. La finalidad de esto es comprender cómo se calculan las distancias involucradas en la definición analítica con expresiones algebraicas.

En este caso el foco está a la derecha del *eje y*, que no es el eje de simetría de la parábola y por supuesto, la directriz está en el lado opuesto, a la izquierda del *eje y*, como se observa en la figura 3.21.

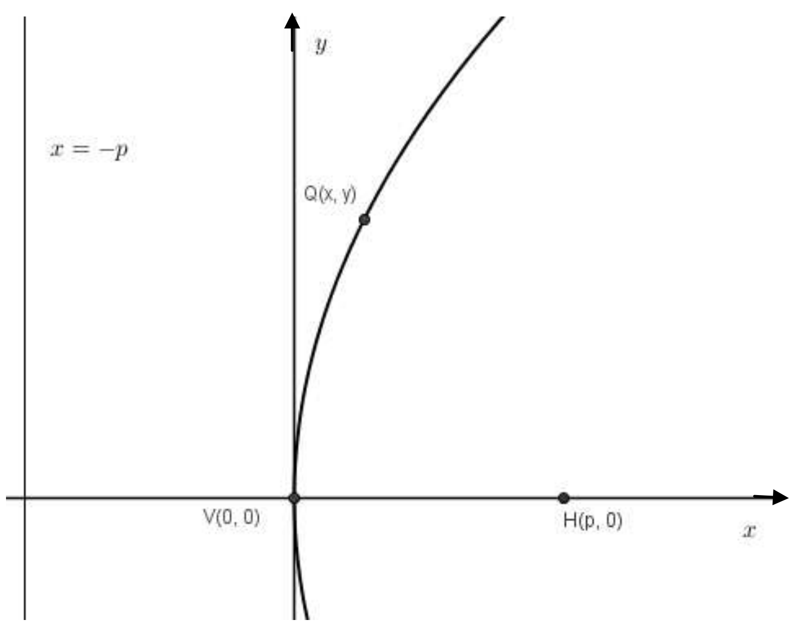


Figura 3.21 Esbozo de una parábola horizontal cuya rama abre hacia la derecha.

Las coordenadas del foco son H(p, 0) y la ecuación de directriz es x = -p. Ahora se usará un punto Q de coordenadas Q(x, Y) para hallar la ecuación canónica requerida.

1) **Calcular la distancia del punto Q al foco**. Para ello, se realiza el triángulo rectángulo QAH como el mostrado en la figura 3.22.

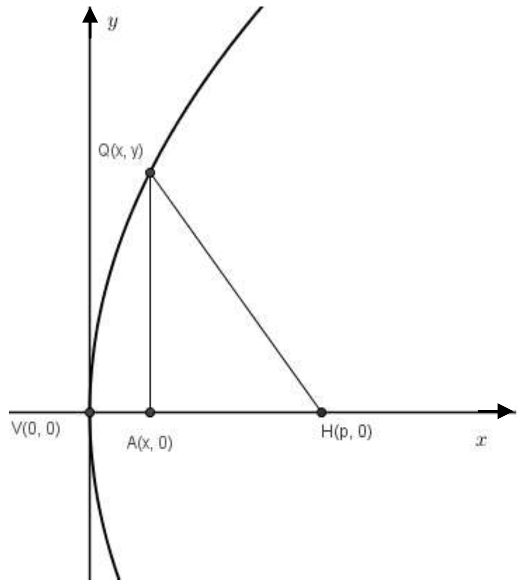


Figura 3.22 Triángulo QAH

Los vértices del triángulo son el punto H, el punto Q pertenece a la parábola horizontal y el punto A tiene la misma abscisa que el punto Q; pero A se halla sobre el *eje x*, por eso su ordenada es cero y sus coordenadas son $A(x,0)$.

Para el cateto HA como los puntos A y H están sobre el *eje x*, la distancia entre ambos es el resultado de restar, a la abscisa del punto H la abscisa del punto A, es decir:

$$\overline{HA} = p - x$$

Para el cateto QA como los puntos Q y A tienen la misma abscisa, la distancia entre ellos es el resultado de restar, a la ordenada de Q la ordenada de A, es decir:

$$\overline{QA} = y$$

Finalmente la distancia entre los puntos Q y H es la medida de la hipotenusa QH del triángulo rectángulo QAH, al aplicar el Teorema de Pitágoras resulta que:

$$\overline{QH} = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$

2) **Calcular la distancia del punto Q a la directriz**. Para ello, se traza una recta perpendicular a la directriz que pasa por el punto Q. El punto de intersección entre las rectas mencionadas se llama C y sus coordenadas son $C(-p, y)$.

La figura 3.23 muestra a los puntos Q y C con sus respectivas coordenadas y en medio de la directriz de la parábola se observa parte del *eje y*.

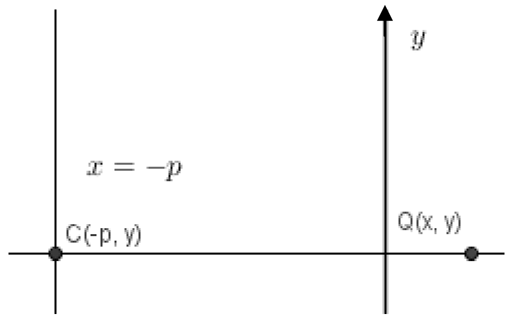


Figura 3.23 Puntos C sobre la directriz x = -p

La abscisa del punto C es negativa y la abscisa del punto Q es positiva por ello al restar a la abscisa de Q la abscisa de C, prácticamente se suman las abscisas lo que da:

$$\overline{QC} = x - (-p) = x + p$$

3) **Construir la ecuación requerida a partir de la definición analítica**.

De acuerdo con la definición analítica, la distancia entre el foco H y cualquier punto Q que pertenece a la parábola horizontal y corresponde a la longitud del segmento QH es igual a la distancia entre la directriz de la parábola y el punto Q, la cual corresponde a la longitud del segmento QC. Esto se escribe como:

$$\overline{QH} = \overline{QC}$$

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$

4) **Simplificar la ecuación anterior.**
   a) Se eleva al cuadrado cada miembro de la ecuación para obtener:

$$(p-x)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

   b) Después se desarrolla el binomio al cuadrado en cada miembro de la ecuación anterior y se obtiene:

$$p^2 - 2px + x^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

c) Reducir términos semejantes.

De la misma forma que en la sesión anterior, para obtener finalmente:

$$y^2 - 4px = 0$$

Para la parábola horizontal, se conserva a la variable x en el miembro derecho y en el miembro izquierdo el término algebraico que contiene a la variable y.

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

La ecuación del recuadro anterior recibe el nombre de ***ecuación de la parábola horizontal en forma.*** Por ser horizontal, la parábola tiene como eje de simetría a una recta cuya ecuación es *y = 0,* que es la misma ecuación que posee el *eje x*.

TAREA 5. EJERCICIOS DE LA SESIÓN

Tiempo total: 50 minutos

Indicaciones generales.

Los integrantes del equipo resolverán durante treinta minutos dos ejercicios en los cuales se pretende analizar una parábola a partir de su ecuación. Entregarán la hoja de trabajo y elaborarán en su cuaderno un apunte con las respuestas dadas por el equipo. Luego en los últimos veinte minutos se revisarán los resultados de los ejercicios. Es necesario aclarar dudas durante los primeros treinta minutos sin que esto implique dar indicios de más sobre las respuestas.

Equipo: ____

Integrantes: ____ Grupo: _____

____

____

____

Consigna: Subrayen la respuesta correcta.

Ejercicio 3. A partir de la ecuación canónica $x^2 = 10y$ respondan las siguientes preguntas:

1) Si $4p = 10$ ¿Cuánto mide la distancia focal?
2) Si se sabe que el vértice es el origen y la medida de la distancia focal ¿cuáles son las coordenadas del foco?

3) Subrayen la respuesta a ¿cuál es la gráfica de la parábola?

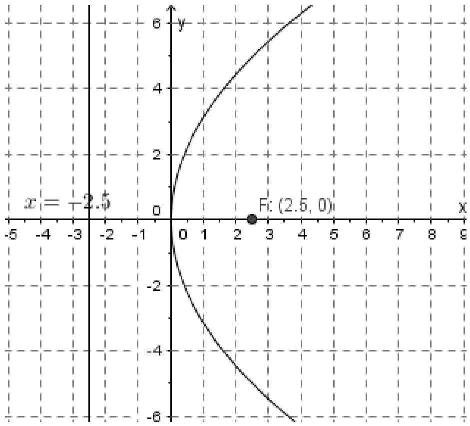
a) 

Figura 3.24 Inciso a del ejercicio 3

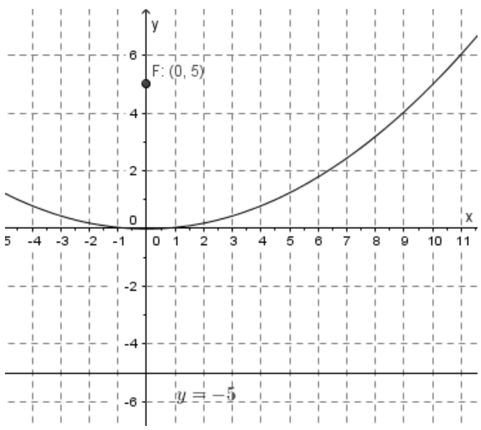
b) 

Figura 3.25 Inciso b del ejercicio 3

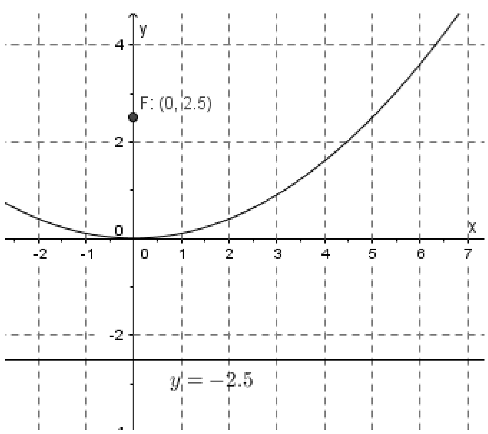
c) 

Figura 3.26 Inciso c del ejercicio 3

Ejercicio 4. A partir de la ecuación canónica $y^2 = 4x$ respondan las siguientes preguntas:

1) Si $4p = 4$ ¿Cuánto mide la distancia focal?
2) ¿Cuál es la ecuación de su directriz?

3) Subrayen la respuesta a ¿cuál es la gráfica de la parábola?

a)

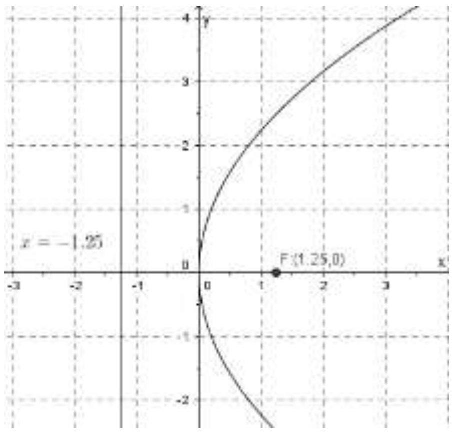


Figura 3.27 Inciso a del ejercicio 4

b)

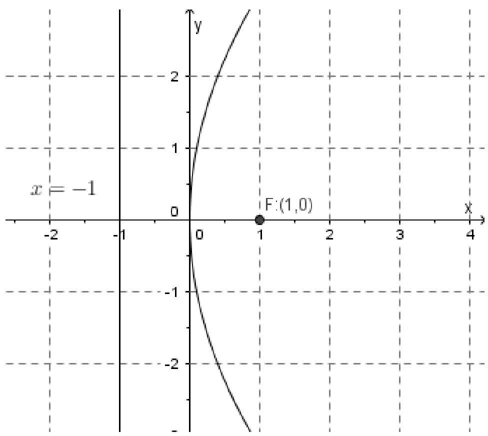


Figura 3.28 Inciso b del ejercicio 4

c)

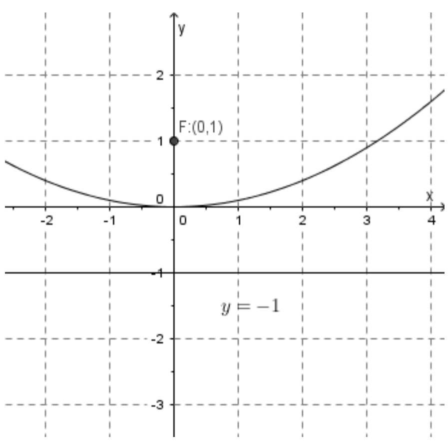


Figura 3.29 Inciso c del ejercicio 4

Respuestas:

Ejercicio 3.

1) Mide dos unidades y media de longitud.
2) F(0, 2.5)
3) Inciso c.

Ejercicio 4.

1) Mide una unidad de longitud
2) x = -1
3) Inciso b

Los ejercicios están diseñados para revisar el registro gráfico de una parábola dándole importancia a la distancia focal, al lado recto de ésta y a su posición frente al estudiante, si la parábola es horizontal o vertical, de manera que puedan utilizar alguna de las dos ecuaciones de la parábola en forma canónica que han revisado.

SESIÓN 3

Objetivo durante la sesión:

1. Evaluar de forma individual los aprendizajes de los estudiantes en una prueba escrita.

Acciones a realizar:

1. Los estudiantes realizarán la prueba con honestidad y el profesor les vigilará.
2. Elaborarán una tabla C-Q-A.

TAREA 6. PRUEBA SEMANAL

Tiempo total: 50 minutos

Indicaciones generales.

Los estudiantes recibirán la prueba en fotocopia y deben resolverla durante toda la sesión.

Matemáticas III. Parábola
Prueba semanal 1

Nombre: ____ Grupo: ____

I. Subraya la respuesta correcta.

1. ¿Qué matemático propuso el reto que desencadenó el desarrollo de la Geometría Analítica?
   a) Pappus de Alejandría
   b) Hipócrates de Quíos
   c) Apolonio de Perga

2. ¿Qué es una sección cónica?
   a) Un plano que al cortar la superficie de un cono forma una curva.
   b) Una curva formada por el corte de un plano sobre la superficie de un cono.
   c) Una curva formada por un plano perpendicular a la superficie de un cono.

3. En la definición analítica de la parábola a través del signo igual se relacionan la distancia…
   a) del foco de la parábola al vértice y la distancia de este punto a la directriz
   b) de un punto de la parábola a la directriz y la distancia de ese punto al foco.
   c) de un punto de la parábola a la directriz y la distancia de un punto al foco.

4. De acuerdo con Menecmo ¿cómo debe ser el corte realizado a un cono rectángulo para obtener una parábola?
   a) Paralelo a la base del cono rectángulo.
   b) Perpendicular a la base del cono.
   c) Perpendicular a la generatriz del cono.

5. ¿Cuál es la distancia focal de la siguiente parábola si su foco está en F(0, 6)?
   a) 6
   b) 24
   c) 12

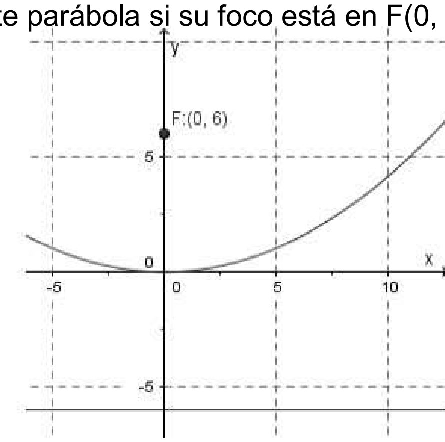


Figura 3.30 Parábola del ítem 5

6. ¿Cuál es la ecuación de la directriz de la parábola de la pregunta cinco?
   a) $y=6$
   b) $x=-6$
   c) $y=-6$

7. ¿Cuál es la ecuación de la parábola en forma canónica para la pregunta cinco?
   a) $x^2 = 24y$
   b) $24y = -x^2$
   a) $y = 24x^2$

8. Si la ecuación en forma canónica de una parábola es: $8x = y^2$ ¿cuál es la ecuación de su eje de simetría?
   a) x = 0
   b) y = 0
   c) x = 2

9. ¿Cuál es la parábola correspondiente a la ecuación canónica de la pregunta anterior?

a)

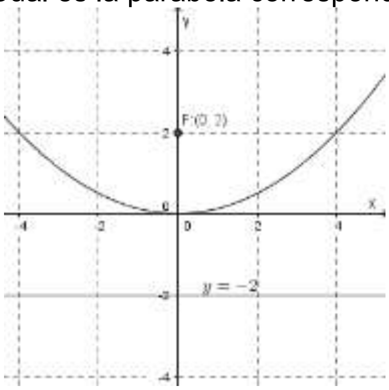


Figura 3.31 Inciso a) del ítem 9

b)

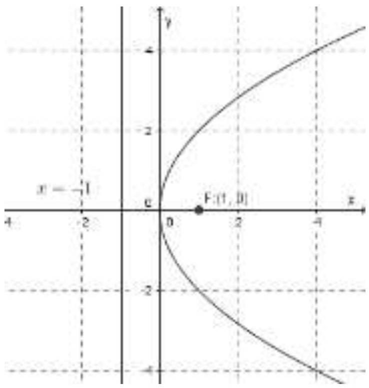


Figura 3.32 Inciso b) del ítem 9

c)

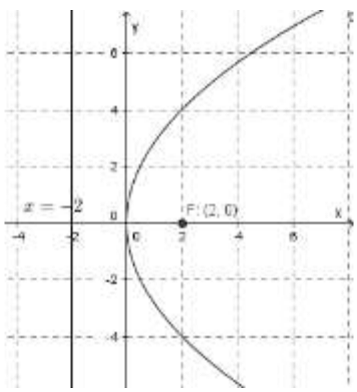


Figura 3.33 Inciso c) del ítem 9

II. Complementa los siguientes enunciados:

10. ____________ en su tiempo fue innovador porque usó sólo un cono para obtener a cada una de las secciones cónicas.

11. Un ____________ es la superficie de revolución generada cuando una ____________ gira alrededor de su eje de simetría.

12. De acuerdo con la propiedad de reflexión, si los rayos de luz son paralelos al eje de simetría se reflejan en el ____________.

13. En cualquier parábola el lado recto mide ____________ veces la distancia focal.

Las respuestas de la prueba propuesta están redactadas en la tabla 3.4

Tabla 3.4 Respuestas de la prueba

Opción múltiple	Complementación
1. c)	10. Apolonio
2. b)	11. paraboloide, parábola
3. b)	12. foco
4. c)	13. cuatro
5. a)	
6. c)	
7. a)	
8. b)	
9. c)	

TAREA7. TABLA C-Q-A

Tiempo total: 10 minutos

Indicaciones generales.

Los estudiantes elaborarán una tabla C-Q-A, que servirá como estrategia postinstruccional y como técnica de evaluación informal en una interacción retroactiva del proceso de enseñanza aprendizaje realizado en la semana.

Nombre:____
Tema: Parábola

¿Qué aprendí?	¿Qué me faltó?	¿Qué me gustaría aprender?

SESIÓN 4

Objetivos de la sesión:

1. Analizar por qué el lado recto de una parábola mide cuatro veces la medida de la distancia focal.
2. Entender la diferencia entre el parámetro *p* y la distancia focal.
3. Identificar a las parábolas con parámetro $p<0$ como simétricas de aquellas que tienen al parámetro $p>0$.

Acciones a realizar:

El docente:

- Actuará como supervisor del trabajo de nuevos equipos.
- Informará sobre objetivos de la sesión y las acciones a realizar en.
- Resolverá dudas.

Los estudiantes en equipo:

- Resolverán un cuestionario.

TAREA 8. LADO RECTO DE UNA PARÁBOLA

Tiempo total: 50 minutos

Indicaciones generales

Los estudiantes formarán nuevos equipos de cuatro formados por los resultados de una matriz de valoración elaborada, contestada y evaluada por el profesor. En esta tercera etapa del STAD los estudiantes tendrán quince minutos para apropiarse del tema y diez minutos para contestar un cuestionario y el profesor veinticinco para exponer el texto a los estudiantes.

El cuestionario debe ser entregado al profesor. Las preguntas son las siguientes:

1. En la parábola vertical ¿con respecto de qué eje coordenado los extremos del lado recto son simétricos?
2. ¿Qué comparten en común dichos puntos con el foco de la parábola?
3. ¿De qué forma la simetría de los extremos del lado recto permite calcular su longitud?
4. ¿Por qué no puede ser negativa la distancia focal?
5. ¿Cómo es el parámetro p en los ejercicios 1 y 2 de la tarea 4?

Posibles respuestas:

1) Sí.
2) La misma ordenada.
3) Como tienen la misma ordenada, las abscisas se restan.
4) Porque como distancia se calcula con ayuda de la función valor absoluto.
5) En ambos casos es positivo.

El texto analiza a partir de un gráfico cómo calcular la longitud del segmento conocido como lado recto. Se utiliza la ecuación canónica de la parábola vertical sin que se detalle qué es el parámetro p de la parábola. Tampoco se realiza el respectivo análisis para una parábola horizontal, de forma que los estudiantes no se sientan confundidos.

Exposición del profesor

Quizás se recuerde que en cualquier parábola la cuerda paralela a su directriz que pasa por su foco y une dos puntos que pertenecen a ella, se llama *lado recto*. Desde la primera sesión se debió descubrir que el *lado recto* mide cuatro veces la *distancia focal*, pero no se explicó el por qué. En esta sesión se aclarará la relación entre el lado recto y la distancia focal.

La figura 3.34 muestra la gráfica de una parábola vertical con vértice en el origen y como su foco tiene ordenada positiva el parámetro *p* positivo. En este caso, el *lado recto* es el segmento delimitado por los puntos R y S.

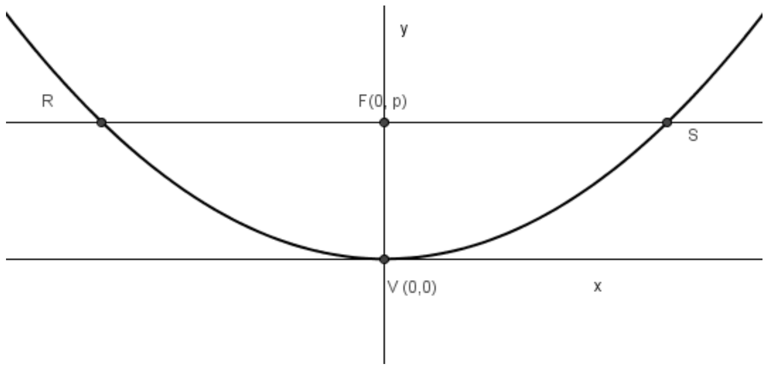


Figura 3.34 Gráfica de la parábola con ecuación canónica $x^2 = 4py$.

El foco de la parábola de la figura 3.34 tiene coordenadas en $F(0, p)$. Como consecuencia, se deduce que R y S tienen como ordenada $y = p$. ¿Cuál es la abscisa del punto R y cuál la del punto S? Para conocer estos valores, se sustituye $y = p$ en la ecuación canónica de la parábola; se obtiene $x^2 = 4p^2$.

La ecuación canónica de la parábola ahora es una ecuación cuadrática cuyas soluciones son $x_1 = 2p$ y $x_2 = \ 2p$. El valor de x_1 es positivo y corresponde a un punto con abscisa positiva y el valor de x_2 corresponde a un punto con abscisa negativa. De acuerdo con la figura 3.27, el punto R está a la izquierda del *eje y*, entonces la abscisa de R es negativa y de forma similar al estar S a la derecha del *eje y*, la abscisa de S es positiva. Las coordenadas del punto R son $R(-2p, p)$ y las coordenadas del punto S son $S(2p, p)$.

Como R y S son puntos que comparten la misma ordenada, la medida del lado recto es el resultado de restar a la abscisa de S la abscisa de R, es decir, $2p - (-2p) = 4p$

TAREA 9. PARÁBOLAS SIMÉTRICAS.

Tiempo total: 65 minutos

Indicaciones generales

Se continuará con la estrategia STAD y con el mismo equipo. Los estudiantes trabajarán en equipos durante veinticinco minutos contestando un cuestionario y el profesor cuarenta minutos exponiendo el tema.

Cuestionario

1. ¿Qué elementos de una parábola vertical se ven afectados por el parámetro p cuando es negativo?
2. ¿Es cierto que en toda parábola con vértice en el origen la ecuación de la directriz contiene al parámetro *p* multiplicado por -1?
3. ¿Cuánto mide el lado recto de una parábola horizontal cuya rama abre hacia la izquierda si p = 5?
4. Las parábolas verticales son funciones cuadráticas en la variable *x*, si la rama de la parábola abre hacia abajo ¿cómo es la concavidad de la función?
5. En las parábolas verticales la ecuación del eje de simetría está dada por la abscisa del vértice ¿qué sucede con las parábolas horizontales?

Respuestas:

1) Las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la ecuación canónica.
2) Sí.
3) 20
4) Negativa.
5) La ecuación de la directriz está dada por la ordenada del vértice de la parábola.

El texto propuesto para esta tarea presenta a las parábolas con parámetro *p* negativo como resultado de una transformación en el plano cartesiano conocida como simetría axial, entonces los estudiantes deberían de entender que en una parábola vertical cuya rama abre hacia abajo, la ordenada del foco de la parábola es negativa, este número es el parámetro *p* y el signo que precederá al coeficiente *4p* está ahí para señalar que el valor de la ordenada de cada punto que pertenece a la parábola vertical es negativo.

Del mismo modo, se muestra la ecuación de una parábola horizontal cuya rama abre hacia la izquierda en forma canónica. En el primer caso se muestra la tabla 3.5 y en el segundo la tabla 3.6 que resumen las representaciones algebraicas de los elementos más importantes de la parábola cuando su vértice todavía es el origen del plano cartesiano. Finalmente con una pregunta intercalada, estrategia propuesta por Díaz Barriga y Hernández (2002) se trata de explicar la diferencia entre la distancia focal y el parámetro *p*.

Exposición del profesor

Parábola vertical con rama que abre hacia abajo.

Para conocer la ecuación de una parábola vertical cuya rama abre hacia abajo se usará un movimiento del plano llamado simetría axial. A la parábola cuya rama abre hacia arriba se le conocerá como parábola original y a aquélla cuya rama abre hacia abajo se le llamará parábola simétrica a la original. Si se observa la figura 3. 35 ambas parábolas poseen el mismo eje de simetría que coincide con el *eje y*.

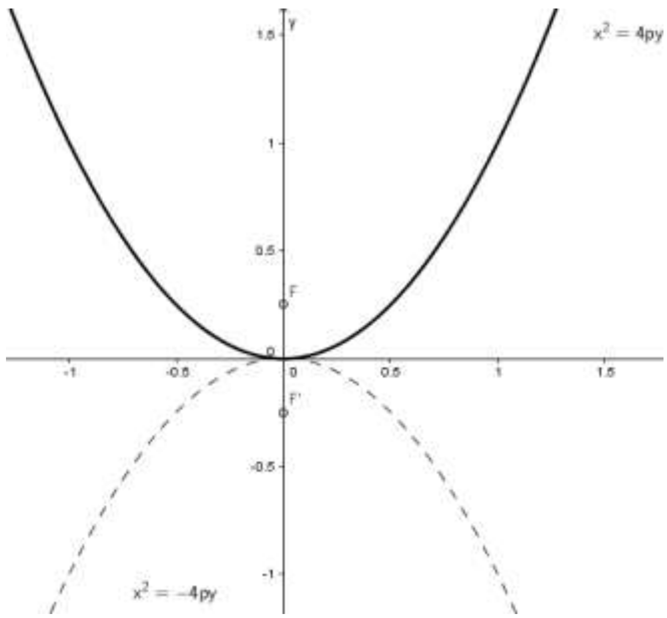


Figura 3.35 Parábola original y su simétrica.

La parábola original tiene su foco en las coordenadas F(0, p) y su directriz es la recta $y= -p$. Recuérdese que el foco de la parábola indica el sentido hacia donde abre la rama de la parábola. Si la rama de la parábola abre hacia arriba, su foco tiene ordenada positiva y esta cantidad se transforma en algo que se llamará parámetro *p*; pero si su rama abre hacia abajo el parámetro *p* es negativo y las coordenadas del foco son F"(0, -p), como ocurre en la parábola simétrica a la original.

También recuérdese que la directriz está en el sentido opuesto al cual abre la rama la parábola. En la parábola original el parámetro *p* es positivo y su directriz tiene ecuación con un número negativo, es decir, la ecuación de la directriz es $y = -p$ y claro la parábola está arriba del *eje x*. En la parábola simétrica el parámetro *p* es negativo, la ecuación de la directriz es $y = p$ y su directriz está arriba del *eje x*.

¿Cuál es la ecuación canónica de la parábola simétrica?

La respuesta no requiere usarse operaciones algebraicas, en ambas parábolas se conservan la distancia focal, el lado recto, el eje de simetría y el vértice. Sólo cambia el parámetro *p*. Un lector atento habrá notado que las ordenadas de los puntos que forman la rama de la parábola simétrica a la original son negativas al igual que el parámetro p para esta parábola específicamente. Si se sustituye el valor del parámetro, es decir se coloca *–p* en el lugar de *p* en la ecuación de la parábola original, se obtiene la ecuación de la parábola simétrica a la original que es:

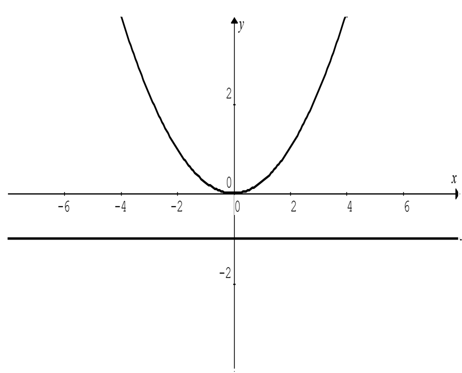
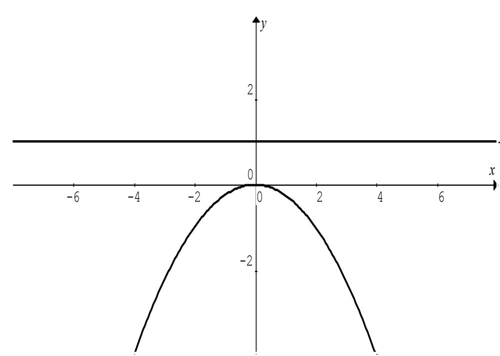
$$\boxed{x^2 = -4py}$$

¿Qué sucede cuando la parábola es vertical y su rama abre hacia abajo?

La medida del *lado recto* entre parábolas simétricas es un **invariante**, un elemento que se conserva, en ambas mide *4p*. No obstante, surgiría la preocupación por saber si la medida es negativa cuando *p* es negativo (cuando la rama de la parábola abre hacia abajo o hacia la izquierda). Las distancias no son negativas y se calculan en valor absoluto por ello el lado recto se obtiene efectuando la operación $|4p|$.

Si se consulta la tabla 3.5 se encontrará el resumen de las parábolas verticales con vértice en el origen, al considerar al parámetro p como un criterio de clasificación.

Tabla 3.5 Parábolas verticales con vértice en el origen

Parámetro	$p > 0$	$p < 0$
Ecuación canónica	$x^2 = 4py$	$x^2 = 4(-p)y$
Foco	F(0,p)	F(0,-p)
Directriz	y = -p	y = -(-p)
Eje de simetría	x = 0 [eje *y*]	
Sentido en que abre su rama	arriba	abajo
Posible gráfica		

Parábola horizontal cuya rama abre hacia la izquierda.

Siendo el *eje y* el eje de simetría axial entre la parábola horizontal cuya rama abre hacia la derecha [parábola original] y la parábola horizontal cuya rama abre hacia la izquierda [parábola simétrica a la original]; la ecuación de la parábola original es $y^2 = 4px$, su foco está ubicado en G(p, 0) y la ecuación de su directriz es $x = -p$. En cambio para la parábola simétrica a la original el foco está ubicado en G"(-p, 0) y su directriz es x = p.

Las directrices no están mostradas, pero la figura 3.36 ubica a las parábolas simétricas horizontales con vértice en el origen.

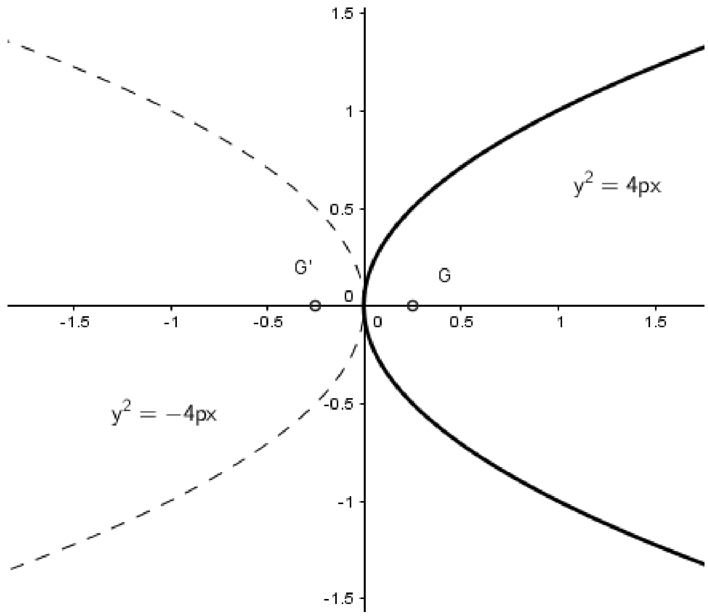


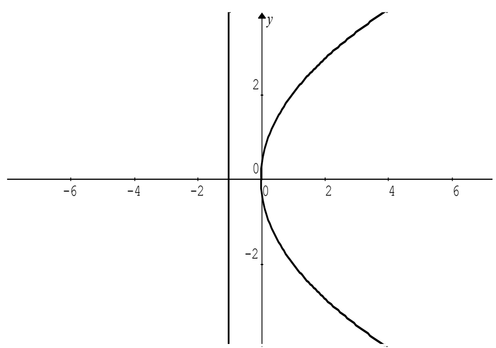
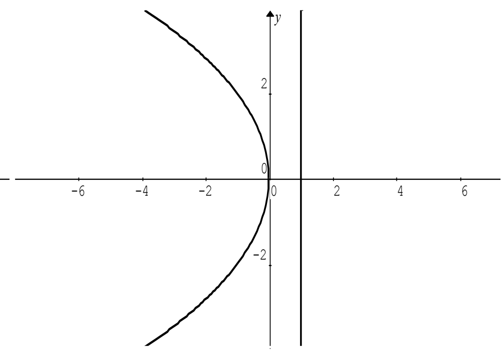
Figura 3.36 Parábolas horizontales simétricas entre sí.

Como la abscisa del punto G" es negativa, el parámetro *p* es negativo y las abscisas de los puntos que pertenecen a ella son negativas. Al sustituir *p* por *-p* en la ecuación de la parábola original, se obtiene la ecuación de la parábola horizontal cuya rama abre hacia la izquierda.

$$\boxed{y^2 = -4px}$$

En la tabla 3.6 se resumen elementos y características de las parábolas horizontales con vértice en el origen.

Tabla 3.6 Parábolas horizontales con vértice en el origen.

Parámetro	***p* > 0**	***p* < *0***
Ecuación canónica	y^2 = 4px	y^2 = 4(-p)x
Foco	F(p,0)	F(-p,0)
Directriz	x = -p	x = -(-p)
Eje de simetría	y =0 [eje *x*]	
Sentido en que abre su rama	derecha	izquierda
Posible gráfica		

En el cuadro sinóptico del diagrama 3.3 no se incluyó al parámetro p como elemento de la parábola, porque no se había visto como construir la parábola simétrica a una parábola vertical con vértice en el origen y cuya rama abre hacia arriba.

De ahora en adelante debe considerarse el parámetro p para cualquier parábola como un valor asociado a la abscisa o la ordenada del foco de la parábola.

¿Qué diferencia hay entre la distancia focal y el parámetro p?

La distancia focal es la medida de un segmento que une al *vértice* de la parábola con el *foco* de ésta y se calcula con $|p|$. Por otra parte, el parámetro *p* es la ordenada del foco si la parábola es vertical; o la abscisa del foco si la parábola es horizontal y en ambos casos su vértice es el origen del plano cartesiano. El parámetro *p* puede ser positivo o negativo. La distancia focal no es negativa.

SESIÓN 5

Objetivos de la sesión:

1. Participar en una discusión guiada que resume lo visto en la sesión anterior previo al examen.
2. Realizar una prueba.

Acciones a realizar:

El docente:

- Resolverá dudas.
- Vigilará la aplicación de la prueba.

Los alumnos:

Resolver la prueba con honestidad.

TAREA 10. DISCUSIÓN GUIADA

Tiempo total: 50 minutos

Indicaciones generales:

Los estudiantes realizarán una discusión guiada junto con el profesor la cual responderá a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la parábola simétrica a aquélla cuya ecuación canónica es $x^2 = -4py$?
2. Si la parábola abre hacia la izquierda ¿cuánto mide la distancia de la directriz al vértice?
3. ¿Cuánto medirá la distancia de la directriz al foco?
4. Si el foco de una parábola es $F\left(0, -\frac{2}{5}\right)$ ¿cuánto mide su parámetro?
5. Si el foco de una parábola es F(-7.5, 0) ¿hacia dónde abrirá la rama de la parábola?
6. Si la ecuación del eje de simetría de una parábola es $y = 0$ ¿cuál es la orientación de ésta?
7. ¿Cuánto mide el lado recto de una parábola?

El objetivo es revisar algunos conceptos tratados en las tareas anteriores. Se cerrará con la interpretación de las tablas 3.6 y 3.7 que resumen la mayor parte del tema. Las respuestas dadas por los estudiantes deberán ser anotadas en el pizarrón y ellos anotarán las respuestas correctas en sus apuntes.

TAREA 11. PRUEBA DE PARÁBOLAS SIMÉTRICAS

Tiempo total: 60 minutos

Indicaciones generales:

Los estudiantes realizarán una prueba escrita individual y fotocopiada, anexando la hoja que extrajeron de su cuaderno y que utilizaron para resolver los ítems de la prueba.

Matemáticas III.
Prueba semanal 2

Nombre: ____ Grupo: ______

Subraya la respuesta correcta.

1. Para la parábola cuya ecuación es $x^2 = 6y$ ¿cuáles son las coordenadas del foco?
   $F(0, \frac{3}{2})$
2. $F(0, -\frac{3}{2})$
3. $F(1.5, 0)$

2. Para la parábola cuya ecuación es $y^2 = \frac{1}{2}x$ ¿cuánto mide su lado recto?
a) 2
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{8}$

3. Para la parábola cuya ecuación es $y^2 + 10x = 0$ ¿cuál es la ecuación de su directriz?
a) $x = 5$
b) $x = \frac{10}{4}$
c) $x = -\frac{10}{4}$

4. ¿Cuánto vale el parámetro *p* para una parábola de la ecuación $y^2 = -5x$?
a) $p = 2.5$
b) $p = -\frac{5}{4}$
c) $p = -5$

5. ¿Cuál es la ecuación canónica de una parábola si su foco es F (-9,0) y su directriz es x = 9?
   a) $x^2 = -\frac{9}{4}y$
   b) $y^2 = -\frac{9}{4}x$
   c) $y^2 = -36x$

Las respuestas correctas son:
1. a)
2. b)
3. c)
4. b)
5. c)

SESIÓN 6

Objetivos de la sesión:
1. Analizar la traslación de una parábola vertical con parámetro p >0 hacia el primer cuadrante del plano cartesiano.
2. Reconocer los elementos de parábolas con ecuaciones ordinarias.

Tareas a realizar:
El docente:
- Actuar como supervisor del trabajo de nuevos equipos.
- Informar sobre objetivos de la sesión y las acciones a realizar en ésta.
- Resolver dudas.

Los estudiantes en equipo:
- Analizarán la traslación de una parábola con vértice en el origen para que su vértice esté en otra parte del plano cartesiano.
- Hallarán la ecuación ordinaria de la parábola trasladada.
- Revisarán las tablas que contienen los elementos de parábolas con vértice distinto al *origen*.

TAREA 12. TRASLACIÓN DE PARÁBOLAS.

Tiempo total: 60 minutos

Indicaciones generales

Los estudiantes en nuevos equipos de cinco integrantes, formados por ellos mismos, realizarán la estrategia de aprendizaje cooperativo *Jigsaw II*. Los estudiantes disponen de veinticinco minutos para su sección individual, veinte minutos con su grupo de expertos y quince minutos de vuelta en su equipo. Los estudiantes en veinticinco minutos deben leer todo el texto, pero sobre todo su parte y de este modo el profesor intervendrá en el grupo de expertos para verificar dudas específicas.

El texto explica brevemente a las parábolas cuyo vértice no es el origen del plano cartesiano como fruto de una transformación en el plano cartesiano conocida como traslación. En ella se utiliza un vector que en un plano se representa como un segmento de recta dirigido o como un par ordenado.

Es altamente probable que los estudiantes desconozcan la representación de un vector como un par ordenado y haya confusión entre el vector y las coordenadas de sus extremos. Debido a que los extremos son puntos, unidades figurales de dimensión 0 de acuerdo con Duval (1999) y porque los estudiantes en cursos previos de Física no han utilizado el vector como la suma de vectores paralelos a los ejes coordenados del plano cartesiano.

Además de las idas y venidas entre las figuras y el discurso del texto, los estudiantes deben reconocer a la parábola original y a la trasladada en todo momento. También es difícil imaginar que se tienen unos ejes coordenados y luego otros que son resultado de la traslación.

La sección 1 muestra la traslación sin analizar las coordenadas del foco, el parámetro *p* y la ecuación de la directriz de cada parábola como ocurre en la sección 2. La sección 3 obtiene una ecuación en forma canónica para la parábola trasladada y luego en ella se sustituyen las ecuaciones que describen a los ejes coordenados x'' e y'' para así obtener la ecuación en forma ordinaria de una parábola vertical.

La sección 4 muestra un ejemplo de traslación de una parábola cuyo vértice es el origen del plano cartesiano y resume las consecuencias de la traslación de dicha parábola a través de la tabla 3.7.

Sección 1.

Imagina que a una parábola vertical cuya ecuación es $x^2 = y$, se le quiere trasladar a otra región del plano cartesiano con ayuda del vector $\mathbf{u} = (3, 5)$. Existe un movimiento en el plano que permite trasladar una figura con ayuda de un vector, a dicho movimiento se le denomina traslación.

Un vector en el plano cartesiano puede representarse como un *par ordenado*. Lo anterior permite que a la parábola con la ecuación canónica dada se le llame parábola original y la resultante de la traslación se le llame parábola trasladada.

La figura 3.37 muestra al vector *u* como un segmento dirigido donde su extremo de inicio es el origen del plano cartesiano.

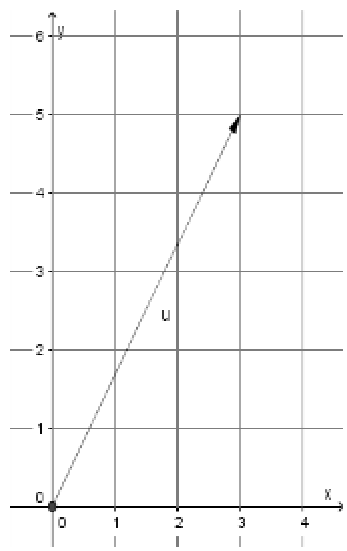


Figura 3.37 .Vector *u* como segmento dirigido.

En la parábola original el vértice es el origen, para trasladar parábolas el extremo de inicio del vector de traslación debe ser el vértice de la parábola original.

El vector permite crear un nuevo sistema de ejes coordenados *y‟* y x‟. De manera que el extremo final del vector *u* es el origen de este nuevo sistema de coordenadas, como lo muestra la figura 3.38.

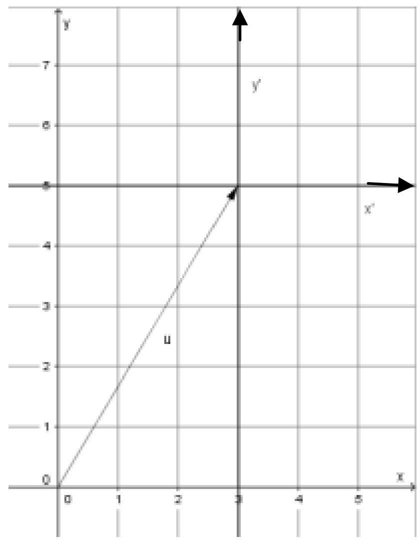


Figura 3.38 Nuevos ejes coordenados y‟ y x‟

El eje coordenado x‟ corresponde con la recta *y = 5* y el eje coordenado y‟ corresponde con la recta *x = 3*, como lo muestra la figura 3.38.

Un punto P que en la parábola original está ubicado en $P(x, y)$; en el sistema de coordenadas de los ejes ya trasladados tendrá ubicación en $R(x', y')$ como lo muestra la figura 3.39.

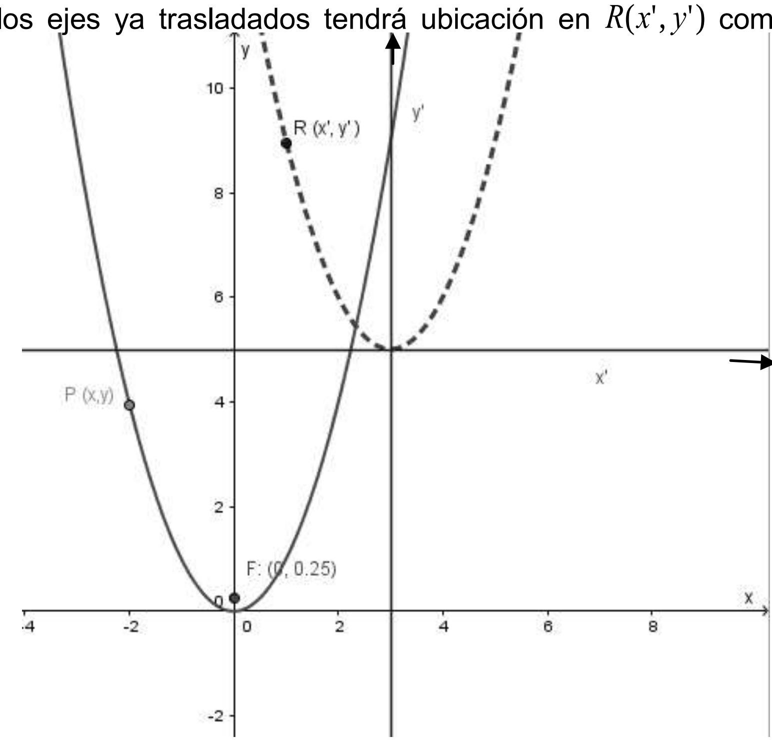


Figura 3.39 Parábola original y su parábola trasladada.

Es necesario saber cuánto vale el parámetro *p* de la parábola original. Debe recordarse que la medida del lado recto en cualquier parábola es *4p*. Si se compara la ecuación de la parábola original con la ecuación $x^2 = 4py$ se concluye que el lado recto mide una unidad de longitud y por lo tanto, el parámetro vale $p = 0.25$.

Sección 2

¿Para qué se obtuvo el valor de *p*?

El valor del parámetro *p* es necesario porque con él se obtienen la ecuación de la *directriz* y las coordenadas del *foco* de la parábola original.

De acuerdo con la ecuación $x^2 = 4py$ el foco F de la parábola tiene coordenadas en F (0, p) y su directriz tiene por ecuación $y = -p$. Así pues, la parábola cuya ecuación es $x^2 = y$ tiene como directriz la recta $y = -0.25$ y su foco tiene coordenadas en F (0, 0.25), simplemente se sustituyó el valor del parámetro *p* hallado anteriormente.

¿Cómo son las coordenadas del vértice de la nueva parábola?

Esta es una respuesta compleja porque se hablará de dos sistemas de ejes coordenados, el primer sistema con los conocidos *eje x* y eje y, y un nuevo sistema que tiene dos ejes, el eje *x’* y el *eje y’*.

Si se sabe que la ecuación para una abscisa en el sistema de coordenadas *x’ y’* es $x' = x - 5$ y para una nueva ordenada es $y' = y - 8$; entonces el *vértice* de la parábola trasladada tiene coordenadas en y = 0 y x= 0 con respecto al sistema de ejes coordenados $x'\,y'$. Esto implica que las coordenadas del vértice sean W(5, 8) con respecto al sistema de ejes coordenados *xy*.

El foco H de la parábola trasladada tiene coordenadas en H (x', y') y surge la acción de determinar dichas coordenadas. Por lo tanto se recuerda que la *distancia focal* es un **invariante**. Los invariantes son elementos que miden lo mismo en la parábola original y en la trasladada como son: la distancia focal, el lado recto y el parámetro *p*. Nótese que entre las parábolas simétricas se conservan invariantes tanto el vértice como el eje de simetría; pero en las parábolas relacionadas por una traslación en el plano esto no sucede.

Observando que el foco en la parábola original está arriba del vértice a una distancia $p = 0.25$, es necesario sumar *p* a la ordenada del foco en la parábola trasladada; la abscisa no requiere esa suma porque en el foco de la parábola original F su abscisa es x = 0, como lo muestra la figura 3.32. Las coordenadas de dicho foco H son $H(x-5, y-8+p)$ en el sistema de coordenadas *xy.*

*A*l usar el nuevo sistema de coordenadas x'y'' se tiene que el foco de la parábola trasladada se ubica en $H(0,\ 0.25)$.

¿Cuál es la ecuación de la directriz de la parábola trasladada?

En vista de que la directriz de la parábola original tiene por ecuación y = -0.25, la directriz de la parábola trasladada en el sistema de ejes coordenados *x'y'* es *y' = -0.25.* Sin embargo, en el sistema de coordenadas *xy* su ecuación es *y = 5 –p*, es decir, *y = 4.75.*

Sección 3.

Si se ubica un punto S de coordenadas S(x‟, -0.25) con respecto del sistema de ejes coordenados *x'y'*. El punto S que tiene la misma abscisa x‟ que el punto R, como lo muestra la figura 3.40.

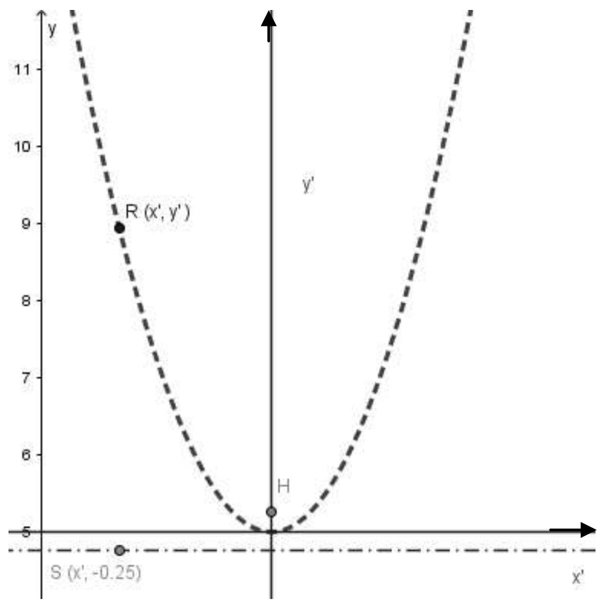


Figura 3.40 Parábola trasladada con su foco, su directriz y el punto S

Se establece una ecuación cuyo miembro izquierdo es la medida del segmento $\overline{RS}$ y su miembro derecho es la medida del segmento $\overline{HR}$. La ecuación es: $\overline{RS} = \overline{HR}$

El miembro derecho se obtiene de calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. El miembro izquierdo se calcula al sumarle a la ordenada del punto R, el valor de la ordenada del punto S.

$$\sqrt{(x'-0)^2 + (y'-0.25)^2} = y'+0.25$$

$$(x')^2 + (y'-0.25)^2 = (y'+0.25)^2$$

Al desarrollar los binomios al cuadrado y luego, reducir los términos semejantes, queda la ecuación:

$$(x')^2 = (y')$$

La ecuación obtenida es la ecuación de la parábola trasladada con respecto al sistema de coordenadas *x'y'*.

¿Cómo será la ecuación de la parábola trasladada con respecto de los ejes coordenados originales?

Para resolver esta pregunta lo único que debe hacerse es sustituir x' por $x' = x - 5$, así como, y' por $y' = y - 8$. Obteniéndose por resultado la **ecuación ordinaria** de la parábola trasladada que es:

$$(x-5)^2 = (y-8)$$

De manera similar, se puede hallar la ecuación ordinaria de cualquier parábola con vértice en el origen que sea trasladada a cualquier punto del plano cartesiano. Cuando el vértice de una parábola no es el origen su ecuación se llama **ecuación ordinaria**. El vértice de una parábola con ecuación ordinaria es el punto a donde fue trasladada una parábola con vértice en el origen.

Sección 4.

Problema 1. Proporcionar la ecuación ordinaria de la parábola que resulta de trasladar la parábola $y = -8x^2$ con el vector $v = (5,8)$.

1) Ubicar en un plano cartesiano el vector dado como lo muestra la figura 3.41

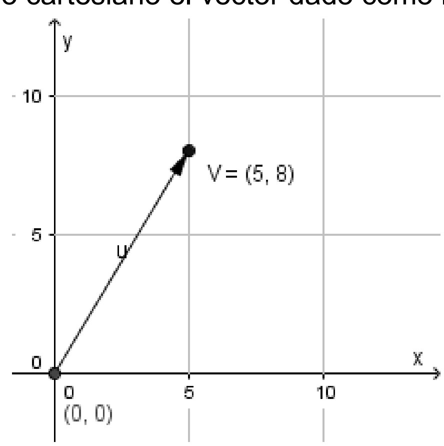


Figura 3.41 Gráfica del vector v= (5, 8)

2) Ubicar la parábola original, para ello se sigue el siguiente procedimiento:

   a. Identificar dentro de la tabla 3.6 la parábola cuya forma es similar a la ecuación dada. La parábola es vertical porque la ecuación dada se parece a $y = 4px^2$.

   b. Al consultar la tabla 3.6 se descubre que la rama de una parábola vertical abre hacia abajo cuando $p < 0$. En este caso, el factor -2 cumple esta condición porque $-2 < 0$ y la rama de la parábola original abre hacia abajo.

   c. De la tabla 3.6 se deduce que a la ecuación canónica $y = -8x^2$ le corresponde un vértice con coordenadas V(0, 0).

   d. Como la rama de la parábola abre hacia abajo, su gráfica es la figura 3.42.

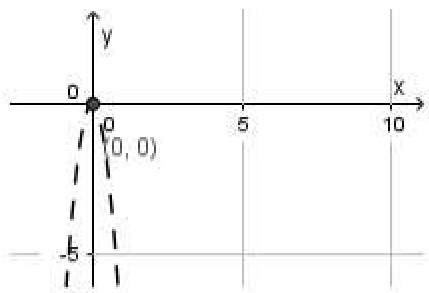


Figura 3.42 Gráfica de la parábola con vértice en el origen y ecuación y=-8x^2

3) Se comentó anteriormente que en la traslación de parábolas el parámetro *p* es invariante, es decir, no cambia, por lo tanto su valor es $p = -2$.
4) Cambia el vértice que ahora es la intersección de los ejes y'' y x''. Las ecuaciones de dichos ejes son: $x' = x - 5$ y $y' = y - 8$.

Sección 5.

5) La ecuación requerida es una ecuación canónica de la forma $y' = -8(x')^2$, pero los ejes coordenados que interesan son x'' e y''.
6) Se sustituyen las ecuaciones del paso 4 en la ecuación del paso 5 y se obtiene: $y - 8 = -8(x - 5)^2$
7) Se dibuja una parábola de la misma forma y tamaño que la parábola original con vértice en el punto V de coordenadas $V(5,8)$.

La figura 3.43 muestra a la parábola original cuya ecuación es $y = -8x^2$ con su vértice en el origen y la parábola trasladada con vértice en $V(5,8)$.

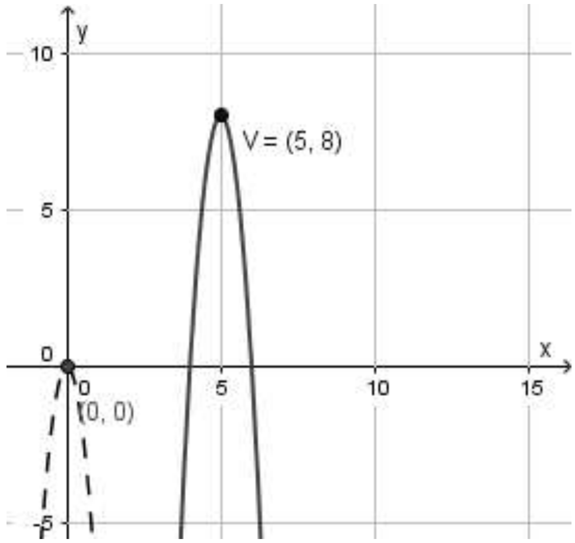


Figura 3.43 Gráficas de las parábolas del problema 1

La traslación de ejes coordenados permite entender cómo obtener la ecuación ordinaria de una parábola sin recurrir a recursos algebraicos. Sin embargo, en la sesión siguiente se muestran problemas que permiten utilizar las tablas 3.7 y 3.8, las cuales resumen a las parábolas verticales y horizontales sin importar en donde se encuentre su vértice.

Tabla 3.7 Parábolas verticales con vértice en V(h, K)

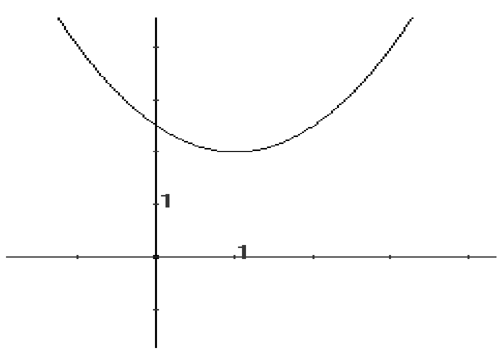
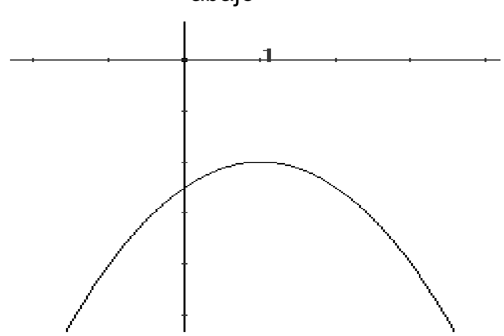
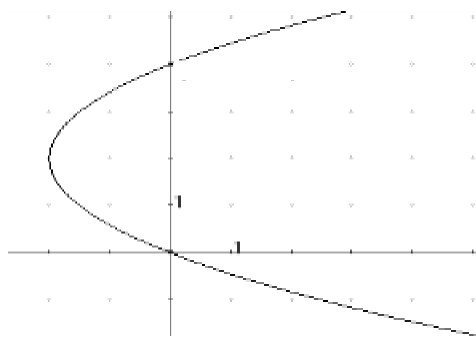
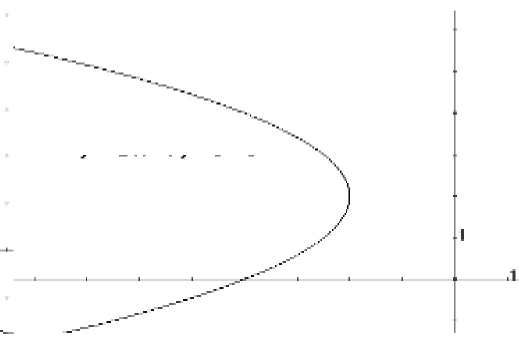
Parámetro	$p > 0$	$p < 0$
Ecuación ordinaria	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$(x - h)^2 = 4(-p)(y - k)$
Foco	F(h, k + p)	F(h, k + (-p))
Directriz	$y = k - p$	$y = k - (-p)$
Eje de simetría	$x = h$	
Sentido en el que abre su rama	Arriba	abajo
Posible gráfica		

Tabla 3.8. Parábolas horizontales con vértice en V (h, k)

Parámetro	$p > 0$	$p < 0$
Ecuación ordinaria	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	$(y - k)^2 = 4(-p)(x - h)$
Foco	$F(h + p, k)$	$F(h + (-p), k)$
Directriz	$x = h - p$	$x = h - (-p)$
Eje de simetría	$y = k$	
Sentido en el que abre su rama	Derecha	izquierda
Posible gráfica		

SESIÓN 7

Objetivos de la sesión:

1. Participar en un torneo donde se hallen ecuaciones ordinarias de la parábola en las siguientes situaciones:
    a. Ecuación canónica y vector de traslación conocidos.
    b. Coordenadas conocidas del foco y del vértice.
    c. Ecuación de la directriz y vértice conocidos.
2. Analizar cómo la traslación afecta a los elementos de la parábola que cambian.

Acciones a realizar:

El docente:

- Fungirá como mediador en el caso de conflictos internos en los equipos.
- Dirigirá el torneo y dará la participación a quienes aporten ideas interesantes
- Resolverá dudas.

TAREA 13. PROBLEMAS PARA PARÁBOLAS TRASLADADAS

Tiempo total: 90 minutos

Indicaciones generales

I. En equipos de tres integrantes se usará la estrategia TGT. Los estudiantes determinarán la ecuación ordinaria de la parábola que cumpla con las siguientes condiciones:

1. La parábola original tiene ecuación $x = -5y^2$ y se usa el vector $w = (3,2)$
2. Su foco es $F(2,4)$ y su directriz es: $y = -2$
3. Su vértice es $V(-5,5)$ y su foco es $F(5,8)$.
4. La parábola original tiene ecuación $x^2 = 10y$ y se usa el vector $s = (3,\frac{5}{2})$

Las ecuaciones estarán dentro de una caja y un representante de cada equipo la elegirá desconociendo su contenido y contestarán en diez minutos. El profesor debe explicar los problemas propuestos en treinta minutos y los estudiantes tendrán veinte minutos para estudiar el material. El docente debe señalar las respuestas correctas durante el torneo para agilizar tiempo en la sesión.

Texto expuesto por el profesor

Problema 2. Determinar la ecuación ordinaria de la parábola original siendo la parábola trasladada que tiene vértice en V(2, 1) y cuya directriz es: y = -2

1) Obtener la ecuación de la parábola trasladada.

a. Ubicar en un plano cartesiano el vértice V y graficar la directriz y = -2, como se muestra en la figura 3.44.

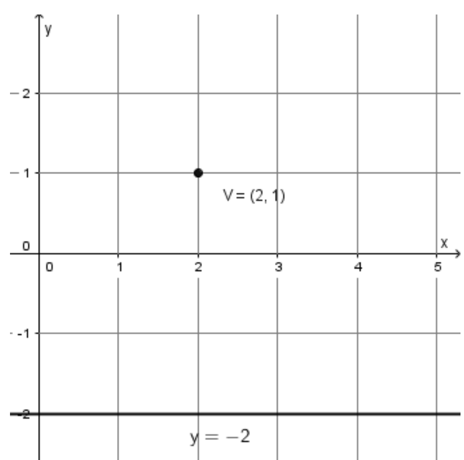


Figura 3.44 Gráfica de la parábola con vértice V (2,1) y directriz y = -2

La directriz está debajo del vértice, se concluye que la parábola es vertical y que su rama abre hacia arriba.

b. Calcular el valor del parámetro *p*

4) El valor del parámetro *p* es la medida de la distancia del *vértice* a la *directriz,* para lo cual primeramente se ubica al punto A de coordenadas y = -2 y x = 2, que un lector atento habrá notado que tiene la misma abscisa del vértice o punto V.

5) La distancia del vértice V al punto A se calcula al restarle a la ordenada del punto V la ordenada del punto A; es decir $1-(-2)=1+2=3$

6) El valor del parámetro *p* es $p=3$.

c. Identificar en la tabla 3.7 la ecuación de la parábola vertical cuya parábola abre hacia arriba. La ecuación ordinaria solicitada es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

d. Sustituir las variables x e y utilizadas en la tabla 3.7 por las variables x" e y".

El cambio se explica porque en el paso 1) se está obteniendo la ecuación de una parábola trasladada.

$$(x'-h)^2 = 4p(y'-k)$$

e. Sustituir las coordenadas del vértice en la ecuación ordinaria propuesta en el paso anterior.

$$(x'-2)^2 = 4p(y'-(-1))$$

f. Sustituir en la ecuación anterior el valor del parámetro *p*.

$$(x'-2)^2 = 4(3)(y'+1)$$

La ecuación ordinaria de la parábola con vértice en V (2, 1) y directriz *y* = - *2* es:

$$(x'-2)^2 = 12(y'+1)$$

2) Obtener la ecuación canónica de la parábola original.

Para ello se usarán ejes coordenados x e y en lugar de los ejes y" e x".

a. Determinar las ecuaciones correspondientes a los ejes coordenados. Dichas ecuaciones son: $x = x'-2$ y $y = y'+1$

b. Colocar en lugar de esas ecuaciones las variables y" y x" en la ecuación del paso 1.

$$x^2 = 12y$$

Problema 3. Determine la ecuación de la parábola en su forma ordinaria y su forma general cuando tiene el vértice en $V(2,2)$ y foco en $F(4,2)$.

1) Ubicar en el plano cartesiano el vértice V y el foco F de la parábola, como lo muestra la figura 3.45.

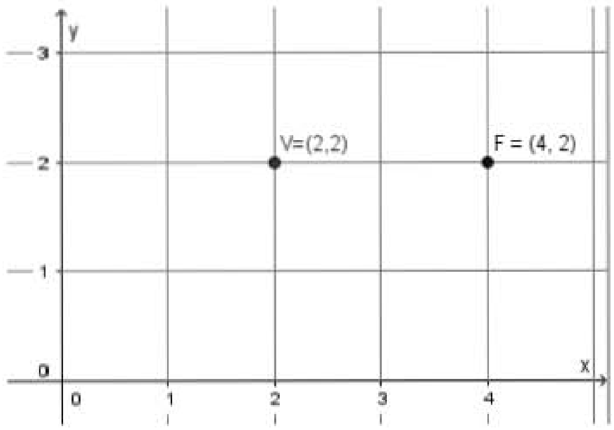


Figura 3.45 Vértice V (2,2) y foco F (4,2)

2) Obsérvese que la distancia entre el vértice $V(2,2)$ y el foco $F(4,2)$ es igual a 2 unidades, por lo tanto la *distancia focal* es 2, dicho de otro modo $p=2$.

3) Debido a que la rama abre hacia la derecha, la ecuación de la parábola en su forma ordinaria es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

4) Sustituir los valores de las coordenadas del vértice

$$(y-2)^2 = 4p(x-2)$$

5) Luego al sustituir el valor de $p=2$ [distancia focal]:

$$(y-2)^2 = 4(2)(x-2)$$

$$(y-2)^2 = 8(x-2)$$

Problema 4. Determina la ecuación de la parábola si su vértice es $V(3,1)$ y directriz es $y = 2$.

1) Ubicar en el plano cartesiano el vértice V y la directriz como lo muestra la figura 3.46.

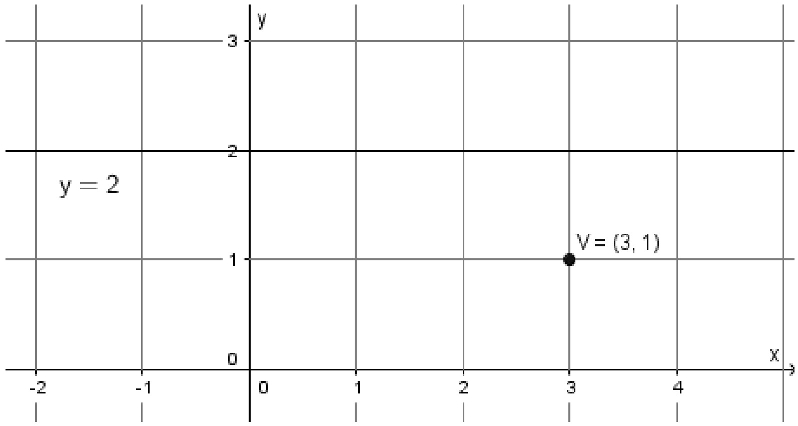


Figura 3.46 Vértice V (3,1) y directriz y =2

2) Obtener el valor del parámetro *p*.

El parámetro *p* se obtiene al calcular la distancia del *vértice* a la *directriz*; para ello se usa un punto auxiliar B de coordenadas y = 2 y x= 3 como lo muestra la figura 3. 47.

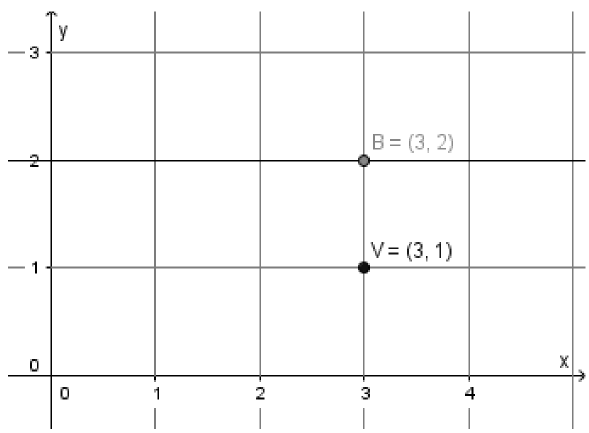


Figura 3.47 Vértice V (3,1) y punto B (3,2)

El valor del parámetro p se obtiene al restarle a la ordenada del punto B la ordenada del punto V, esto significa que *p = 1*.

3) Determinar en qué sentido abre la rama de la parábola.

Como consecuencia de que la directriz se encuentra arriba del vértice de la parábola, su rama abre hacia abajo.

4) Determinar la forma de la ecuación de la parábola.

Al consultar la tabla 3.7 la ecuación de la parábola en su forma ordinaria correspondiente es:

$$(x\text{-}h)^2 = -4p(y\text{ - }k)$$

6) Sustituir los valores de las coordenadas del vértice en la ecuación del paso anterior

$$(x-3)^2 = -4p(y-1)$$

7) Luego al sustituir el valor del parámetro *p*

$$(x-3)^2 = -4(1)(y-1)$$

$$(x-3)^2 = -4(y-1)$$

TAREA 14. ECUACIÓN ORDINARA

Tiempo total: 60 minutos

Indicaciones generales:

La tarea se realizará entre dos sesiones. Los estudiantes formarán equipos de cuatro y se confiará en ellos para elegir a los compañeros con quienes trabajarán, se procurará que nadie quede solo. El profesor trabajará junto con ellos una lluvia de ideas para resolver los problemas propuestos.

El listado del modelo de Chadwick del capítulo 2 es mostrado a los estudiantes en una diapositiva, ellos intentarán reproducir los pasos expuestos para resolver cada uno de los problemas. El profesor debe ayudarlos si hay dudas y permitir que ellos prescindan del listado si es necesario.

Ellos nombrarán el vocero de su equipo. Para asignar la participación de cada equipo si el grupo tiene veinticinco estudiantes se puede lanzar un dado y a cada equipo le corresponderá el dígito asociado a cada cara; en caso de que fueran veintiocho estudiantes se usará un octaedro y la octava cara le corresponderá al profesor, sólo que el resolverá cualquier duda del último equipo que participó.

Consigna: Determina la ecuación ordinaria de la parábola que cumpla con las siguientes condiciones:

a) Vértice V (-1,1); directriz x = -2
b) Vértice V(4, 1) y foco F(4, 3)

El problema 1 requiere reconocer el foco de la parábola dados el vértice de la parábola, que no es el origen y su directriz, la tabla 3.8 ayuda a encontrar la ecuación ordinaria correspondiente. En cambio el problema 2 requiere que ellos encuentren la representación gráfica de estos puntos y razonen cuál es la distancia focal, cómo se obtiene el parámetro y que sean capaces de usar la tabla 3.7.

Las respuestas a los problemas de la consigna son:

1. $(y-1)^2 = 4(x+1)$, parábola horizontal cuya rama abre hacia la derecha.
2. $(x-4)^2 = 8(y-1)$, parábola vertical cuya rama abre hacia arriba.

Se anotarán en el pizarrón las propuestas y se pedirá a los estudiantes que anoten todo señalando claramente la propuesta de resolución que es correcta.

SESIÓN 8

TAREA 15. ECUACIONES DE PARÁBOLAS

Tiempo total: 65 minutos

Indicaciones generales

En esta sesión se trabajará la construcción de ecuaciones de parábolas con vértice distinto del origen con datos conocidos como coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz de una parábola dada y la medida de su lado recto. Se realizará la estrategia de aprendizaje cooperativo TGT en equipos de tres estudiantes. Los problemas del torneo requieren hallar la ecuación para una parábola con las siguientes condiciones:

1. Extremos del lado recto R(5, -1) y S(-11, -1) y directriz *y* = -9.
2. Extremos del lado recto L(5, 1) y M(5, -7) y vértice en V(3, -3).

Los jóvenes sólo tendrán diez minutos para contestar cada pregunta del torneo y el profesor expondrá durante treinta minutos, ellos contarán con quince minutos para apropiarse del material.

Las respuestas del torneo son:

1. $(x+3)^2 = 16(y+5)$
2. $(y+3)^2 = 8(x-3)$

Problemas propuestos

Problema 5. Establezca la ecuación ordinaria de una parábola, si los extremos de su lado recto son A (-2, 4) y B (5, 4) y su vértice está dado por $V(1.5, 2.25)$.

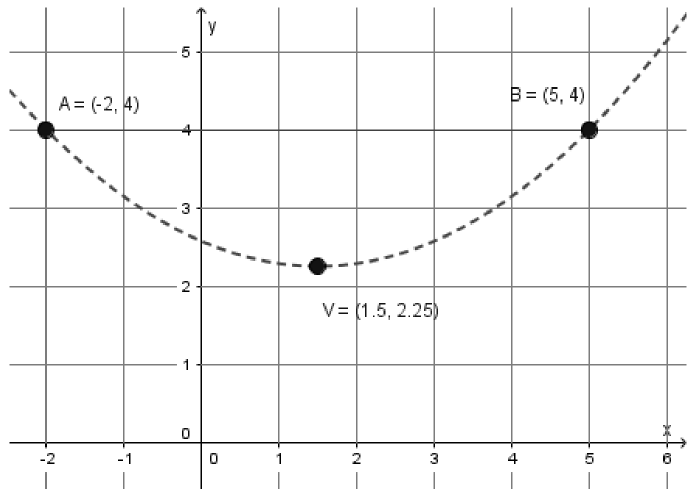


Figura 3.48 Gráfica de la ecuación de la parábola con lado recto definido por A (-2, 4) y B (5, 4) y el vértice es $V(1.5, 2.25)$.

Los pasos mostrados a continuación son una posibilidad de resolución del problema planteado.

1) En un sistema de coordenadas cuadriculado, se ubican los puntos correspondientes al vértice y a los extremos del lado recto de la parábola del problema, como se muestra en la figura 3.48.

2) Al observar esta figura, la longitud del segmento que une a los puntos A y B es igual a 7 unidades de longitud.

3) El vértice de la parábola está debajo del lado recto, por eso la parábola abre hacia arriba.

4) A la parábola del problema le corresponde la ecuación ordinaria:
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

5) Para saber cuánto mide p, la distancia focal, se recurre a una ecuación que asocia lo que mide el segmento AB con lo que mide un lado recto en cualquier parábola.

Si $\overline{AB} = 7$ y $\overline{AB} = 4p$ entonces $7 = 4p$.

6) Se resuelve la ecuación planteada. La solución de la ecuación es: $p = \frac{7}{4}$.

7) Se sustituyen las coordenadas del vértice y el valor del parámetro *p* donde corresponde en la ecuación ordinaria del paso 4. El resultado de la sustitución es :

$$(x-1.5)^2 = 4\left(\frac{7}{4}\right)(y-2.25)$$

Después de multiplicar 4 por siete cuartos en el miembro derecho de la ecuación queda el resultado:

$$(x-1.5)^2 = 7(y-2.25)$$

Problema 6. Determine la ecuación general de la parábola que tiene como directriz la ecuación x = 3 y su lado recto está definido por los puntos A(-2, 6) y B(-2, -4).

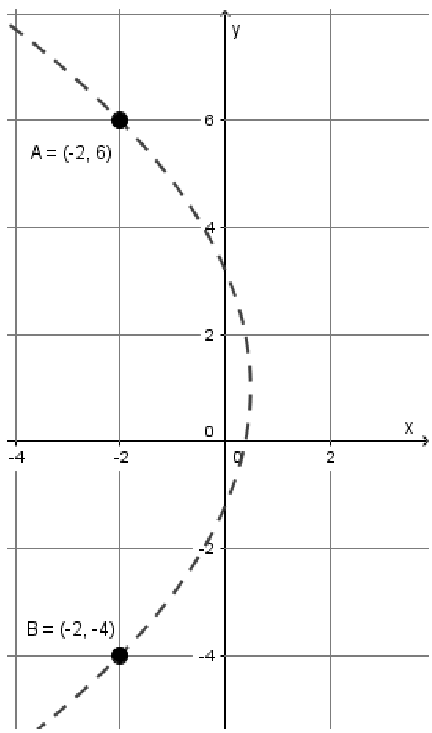


Figura 3.49 Gráfica de una parábola con lado recto definido por: A (-2, 6) y B (-2, -4), cuya directriz es: x = 3.

Los pasos mostrados a continuación son una posibilidad de resolución del problema planteado.

1) Trazar la directriz $x = 3$.

2) Trazar el lado recto al utilizar de las coordenadas de los puntos A y B.

3) Obtener lo que mide el lado recto.

Restar a la ordenada del punto A la ordenada del punto B lo que da por resultado 10 unidades de longitud.

4) Obtener el valor del parámetro *p.*

Si el lado recto es igual a 4 veces la distancia focal *p*, por lo tanto, debe resolverse la ecuación de primer grado: $4p = 10$, cuya solución es $p = \frac{5}{2}$.

5) Encontrar la forma ordinaria correspondiente a la parábola.

Por estar el lado recto a la izquierda de la directriz se concluye que la rama de la parábola abre hacia la izquierda, entonces su ecuación ordinaria es de la forma:

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

6) Hallar las coordenadas del *foco*.

El foco es el punto medio entre los puntos A y B, por lo tanto, sus coordenadas se calculan de dos formas:

a. Al usar las fórmulas para coordenadas de punto medio:

$$x_m = \frac{x_a + x_b}{2} \qquad y_m = \frac{y_a + y_b}{2}$$

b. Al observar que la abscisa del *foco* es la misma que tienen los puntos A y B. Después se obtiene su ordenada de esta forma:
   i. Dividir por dos a la longitud del lado recto.
   ii. Restar esa cantidad a la ordenada de A, o bien, sumar esa cantidad a la ordenada de B.

Finalmente el l *foco* es el punto F (-2,1)

7) Hallar las coordenadas del *vértice*.

El *vértice* de la parábola es el punto medio entre el *foco* F y un punto C, que pertenece a la directriz cuyas coordenadas son y =1 y x = 3. Después de conocer las coordenadas de F y de C, se procede de dos formas:

a. Usar las fórmulas requeridas para obtener las coordenadas del punto medio entre los puntos F y C, y sustituir las coordenadas de dichos puntos en las fórmulas.

b. Calcular las coordenadas del vértice al advertir que la ordenada del vértice es la ordenada del foco, por lo tanto se realiza:

i. Al dividir la longitud del segmento $\overline{FC}$ en dos partes iguales, se obtiene un segmento que mide $\frac{5}{2}$ unidades de longitud.

ii. Sumar esas $\frac{5}{2}$ unidades de longitud a la abscisa de F, lo que da por resultado $\frac{1}{2}$ o 0.5.

Entonces las coordenadas del vértice son y = 1 y x =0.5.

8) Sustituir las coordenadas del vértice y el valor del parámetro *p* en la ecuación descrita en el paso 5 y simplificar fracciones si es necesario.

$$(y-1)^2 = -4\left(\frac{5}{2}\right)(x-0.5)$$

$$(y-1)^2 = -10(x-0.5)$$

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

4.1 CONDICIONES DE APLICACIÓN

La sección A del grupo 301 fue asignada por la Secretaría Académica del CCH Naucalpan en el turno matutino. A los estudiantes no se les aplicó una evaluación diagnóstica porque no había tiempo, sólo se consiguió permiso para trabajar con los estudiantes del 9 al 13 de noviembre de 2015 de acuerdo con el OFICIO/CP/MADEMS/389/2015. Los jóvenes estaban sorprendidos al tener que trabajar con otro profesor, pero se acoplaron al ritmo de trabajo del docente emergente.

El grupo 301A en cuanto a género está conformada por dieciséis mujeres y doce hombres. Se desconoce la distribución de la edad y si alguien debía cursos anteriores de Matemáticas en CCH. Es importante mencionar que el grupo no mostraba ansiedad, no se descubrieron líderes que quisieran acaparar la atención en clase. Existen distintos grupos de amigos establecidos quienes en un momento dado se relacionan para conseguir una buena calificación, sin que se entienda que ellos son utilitaristas. Algunos de los jóvenes presentan resistencia a convivir con alguien ajeno a su grupo de pares y también mostraron oposición a los grupos formales de trabajo, al parecer los estudiantes se motivan a trabajar en equipo por corto tiempo.

A través de preguntas escritas, se supo que a los estudiantes no les agradó leer y revisar cuestiones teóricas del tema de la parábola, están acostumbrados a aprendizajes procedimentales en matemáticas, a resolver tipos de problemas revisados en geometría analítica. Ellos querían aplicaciones de la vida real, que no fue posible revisarlas primero por cuestiones de tiempo y segundo, porque sólo se pudo revisar la ecuación de la parábola en forma canónica y no se revisaron problemas que implican obtener ecuaciones de la parábola al tenerse como datos de inicio a las coordenadas del vértice y del foco o bien, las coordenadas del vértice y la ecuación de la directriz.

Por ser adolescentes de entre dieciséis y dieciocho años, se observó la actitud despreocupada ante la posible reprobación del semestre. Entre ellos son identificables los estudiantes que son líderes por sus conocimientos, su seguridad y su carisma. También hay quienes son inseguros, se sintieron incómodos con su equipo y después de tres sesiones, cuando se entregó la prueba y se dieron las respuestas correctas de ésta, no quisieron responder las respuestas que solicitó la docente para evaluar las sesiones abordadas con ellos.

4.2 RESOLUCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA INDAGADA

Es conveniente señalar que este documento trabaja con un caso real de los diversos casos que pueden ofrecerse como base de investigación para el tema de la enseñanza de la parábola y su ecuación cartesiana, hay un análisis cualitativo sobre los resultados arrojados en el grupo de intervención, quien fue asignada de forma arbitraria a la docente por la secretaria académica.

La problemática planteada no se resolvió satisfactoriamente porque no se dispuso de todas las sesiones planeadas para trabajar con el grupo de intervención. Sólo se solicito una semana de trabajo con los adolescentes. Los resultados, debe admitirse son parciales y no se obtuvieron evidencias suficientes para elaborar un contraste sobre cómo razonan los estudiantes y si analizaron la relación entre los elementos de la parábola para hallar la ecuación de esta.

4.3 EVALUACIÓN DE LA PRIMERA SESIÓN.

La evaluación formativa conlleva analizar las interacciones entre el docente y los estudiantes, al emitir un juicio sobre las tareas realizadas y los productos obtenidos. En la primera sesión la docente formó equipos; informó sobre la evaluación semanal y resolvió dudas en los grupos de trabajo.

Por otra parte, los estudiantes en equipo: analizaron una lectura mediante la técnica *Jigsaw*, resolvieron un cuestionario, identificaron los elementos de una parábola que está ubicada en una cuadrícula.

En las rúbricas diseñadas para evaluar el trabajo realizado al interior de cada equipo durante la primera sesión se intentó valorar diversos aspectos de la interacción durante la implementación de la estrategia *Jigsaw*; sin embargo era difícil revisar dudas, visitar a todos los equipos y percatarse de la comunicación entre ellos o bien, de los pequeños problemas relacionados con los conocimientos previos que requería el texto que trabajaron con la estrategia *Jigsaw*. No obstante se hizo una valoración y se asignó una calificación que no fue incluida en la calificación individual. La rúbrica serviría de base para conservar el equipo o deshacerlo para la sesión 4, la cual se planeó, pero no se llevo a cabo. En el momento de formación de los equipos se mencionaron los roles a su interior, pero los voceros no hablaron durante las respuestas del cuestionario y los observadores, que eran el resto de los integrantes del equipo no presentaron un reporte de lo que sucedió.

El equipo 1 de acuerdo con la rúbrica mostrada en la tabla 4.1 promedió 8.0. Era un equipo que platicaba mucho y en ocasiones era ruidoso, el liderazgo lo asumió Carolina, quien es trabajadora y segura de sí misma.

Tabla 4.1 Rúbrica del equipo 1

Aspecto	Deficiente 5	Regular 6	Buena 8	Muy buena 10
Realización de los roles asignados			x	
Comunicación entre sus integrantes				x
Resolución de conflictos			x	
Uso de notación			x	
Proporción directa			x	
Origen de ecuaciones de parábolas			x	
Problema de la duplicación del cubo			x	
Visualización de parábolas			x	
Sección cónica		X		

El equipo 2 de acuerdo con la rúbrica mostrada en la tabla 4.2 promedió 7.7. Era un equipo un poco apático, el liderazgo lo asumió Alizet quien es intuitiva y posee experiencia en ítems por pares, los jóvenes la seguían y había molestia porque quizás el trabajo les parecía intrascendente

Tabla 4.2 Rúbrica del equipo 2

Aspecto	Deficiente 5	Regular 6	Buena 8	Muy buena 10
Realización de los roles asignados			x	
Comunicación entre sus integrantes			x	
Resolución de conflictos			x	
Uso de notación			x	
Proporción directa			x	
Origen de ecuaciones de parábolas			x	
Problema de la duplicación del cubo			x	
Visualización de parábolas			x	
Sección cónica		x		

El equipo 3 de acuerdo con la rúbrica mostrada en la tabla 4.3 promedió 6.7. Era un equipo donde hubo bastante apatía de parte de Samantha, quien trabajaba de modo independiente. Miranda y Fernanda por ser amigas trabajaban juntas, pero Lupita no mostró interés, aunque no mostraba distancia física como lo hizo Samantha. Alejandro y Ricardo abordaron las dudas que planteaba Fernanda.

Tabla 4.3 Rúbrica del equipo 3

Aspecto	Deficiente 5	Regular 6	Buena 8	Muy buena 10
Realización de los roles asignados			x	
Comunicación entre sus integrantes	x			
Resolución de conflictos		x		
Uso de notación			x	
Proporción directa			x	
Origen de ecuaciones de parábolas			x	
Problema de la duplicación del cubo		x		
Visualización de parábolas		x		
Sección cónica		x		

El equipo 4 de acuerdo con la rúbrica mostrada en la tabla 4.3 promedió 7.3. En este equipo se notó una separación por género, los muchachos hacían preguntas, cuidaban que Michelle registrará lo que debía escribirse, Zaira mostraba desinterés.

Tabla 4.4 Rúbrica del equipo 4

Aspecto	Deficiente 5	Regular 6	Buena 8	Muy buena 10
Realización de los roles asignados		x		
Comunicación entre sus integrantes			x	
Resolución de conflictos			x	
Uso de notación			x	
Proporción directa			x	
Origen de ecuaciones de parábolas			x	
Problema de la duplicación del cubo		x		
Visualización de parábolas			x	
Sección cónica		x		

El equipo 5 de acuerdo con la rúbrica mostrada en la tabla 4. 5 promedió 7.1. En el equipo Kevin mostraba habilidades y disposición para el trabajo, Fernanda era muy tímida, Carmen colaboraba, la única que mostraba un poco de inseguridad era Graciela.

Tabla 4.5 Rúbrica del equipo 5

Aspecto	Deficiente 5	Regular 6	Buena 8	Muy buena 10
Realización de los roles asignados			x	
Comunicación entre sus integrantes		x		
Resolución de conflictos			x	
Uso de notación			x	
Proporción directa		x		
Origen de ecuaciones de parábolas		x		
Problema de la duplicación del cubo			x	
Visualización de parábolas			x	
Sección cónica		x		

Debe destacarse que esta experiencia indica que deben elaborarse rúbricas con pocos aspectos a observar y equipos con un solo rol, es decir, con un líder. Por supuesto, la lección aprendida por la docente es que debe realizarse evaluación diagnóstica, así en la rúbrica sólo se evaluarán los contenidos más representativos de la sesión.

4.3.1 EVALUACIÓN DE LOS PRODUCTOS OBTENIDOS

En la primera sesión se realizó un cuestionario y un ítem por pares en donde los estudiantes identificaban los elementos de la parábola. En la tabla 4.6 se muestran los aciertos obtenidos en el ítem por pares. Cada columna indica una asociación entre un elemento geométrico de la figura 3.1 y su nombre como elemento de la parábola; su respuesta correcta puede ser cotejada con lo ya expuesto en el capítulo tercero. En las asociaciones cuatro y cinco lo correcto era no contestar.

Tabla 4.6 Respuestas al ítem de identificación por equipo

	Elementos requeridos								
Equipo	1	2	3	4	5	6	7	8	Aciertos
1	d	f	c			b	a	e	6
2	d	f	c			b	a	e	6
3	d	f	c			b	a	e	6
4	d	f	c		b		a	e	4
5			c			b	a		3

Los equipos 1, 2 y 3 no se equivocaron, en tanto que el equipo 4 cometió un error y el equipo 5 no terminó, entregó con premura sólo tres respuestas del ítem propuesto en fotocopia. Probablemente al equipo 5 le faltó tiempo para abordar el producto a entregar porque se avocaron a entender el texto proporcionado.

En la tabla 4.7 se muestran las respuestas del cuestionario que fue revisado entre las dos sesiones, ya que los equipos 2 y 3 no entregaron el cuestionario en la fotocopia, ellos lo realizaron en su cuaderno.

Tabla 4.7 Respuestas al cuestionario

	Pregunta					
Equipo	1	2	3	4	5	Aciertos
1	1	1	0	1	1	4
2	1	1	0	1	1	4
3	1	1	0	1	0	3
4	1	1	0	1	1	4
5	1	1	0	0	0	2

Todos los equipos se equivocaron en la pregunta tres, al parecer no comprendieron qué es un reto y no hallaron la respuesta relacionada con el Problema de Pappus. Por otra parte, el equipo 3 no respondió la pregunta cinco.

4.4 EVALUACIÓN DE LA SEGUNDA SESIÓN

En la segunda sesión el docente a cargo de la secuencia didáctica resolvió dudas. Por otra parte los estudiantes en equipo: identificaron y trazaron el lado recto de una parábola así como su eje de simetría; hallaron la distancia focal y la ecuación canónica de una parábola a partir de una gráfica que muestre la rama de la parábola, el foco y la directriz; hallaron la distancia focal y las coordenadas del foco de una parábola a partir de la ecuación canónica e identificaron la gráfica de la parábola correspondiente a una ecuación canónica.

Este análisis se realizará por equipo mostrando los resultados de ternas o binas formadas al interior de cada equipo, en cada ejercicio. Las columnas indican las respuestas de los incisos y en el caso de los incisos *b* de cada ejercicio se registraron los trazos realizados. Se comenta lo que hizo cada equipo y las conjeturas que se pueden realizar a partir de las respuestas proporcionadas por los estudiantes.

4.4.1 EJERCICIO 1

El objetivo de este ejercicio era analizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico en una parábola vertical cuya rama abre hacia arriba, de modo que los estudiantes pudieran hallar la ecuación de la parábola correspondiente en su forma canónica. Lo anterior se realizaría tras la identificación de lado recto y la medida de distancia focal, se solicitó también la medida del lado recto.

En la tabla 4.8 se muestran los resultados del equipo 1 en el cual Carolina estuvo ausente a causa de un problema de salud, para no generar inequidad en el grupo su calificación se vio mermada por esta situación. No hubo errores para identificar los elementos de la parábola solicitados ni hubo problemas para calcular el lado recto.

Tabla 4.8 Resultados del equipo 1

		Inciso			
Integrantes	Subequipo	a	b	c	d
Rafael Heli Jocelyn Erick	1	2	LR	8	C
Armando Israel Cynthia Daniela	2	2	LR	8	C
Carolina		NP	NP	NP	NP

Nota: NP significa que el estudiante no realizó la tarea adjudicada al equipo.

En la tabla 4.9 se muestran los resultados del equipo 2, del cual sólo en la terna 1 se observaron problemas para identificar el lado recto, pues ellos se quedaron con el coeficiente cuatro que multiplica a la distancia focal y ubicaron la recta y = 4; parece ser que no supieron leer la gráfica que tenía graduados a los ejes coordenados sólo con enteros. Entonces si la distancia focal mide dos unidades de longitud el lado recto mide ocho unidades de longitud y debía trazarse de un punto K de coordenadas y = 2 y x = -4 al punto L de coordenadas y= 2 y x = 4.

Tabla 4.9 Resultados del equipo 2

		Inciso			
Integrantes	Subequipo	a	b	c	d
Cristian Israel Daniela	1	2	LR y segmento	8	C
Rebeca Alizet Guadalupe Viviana	2	2	LR	8	C

En la tabla 4.10 se muestran los resultados obtenidos por el equipo 3, en ambas ternas que lo constituyeron, hubo error al elegir en el inciso d, la opción A cuya respuesta es $x^2 = 4y$ y no la opción C cuya respuesta es $x^2 = 8y$. Probablemente se apegaron a la ecuación canónica de parábolas verticales cuya rama abre hacia arriba que es $x^2 = 4py$, sin identificar que *p* es la medida de la distancia focal.

Tabla 4.10 Resultados del equipo 3

		Inciso			
Integrantes	Subequipo	a	b	c	d
Ricardo Angel María Guadalupe Alejandro	1	2	LR	8	A
María Fernanda Miranda Samantha Karel	2	2	LR	8	A

En la tabla 4,11 se muestran los resultados obtenidos por el equipo 4, del cual la terna 1 manifestó uso de unidades del Sistema Internacional de Unidades, quizás por su estudio simultáneo de la ciencia física en este semestre, al leer unidades de longitud en el texto redactado para la sesión, sintieron la necesidad de usar una letra *u* porque desconocían si se usaron centímetros o milímetros como unidad de longitud.

Tabla 4.11 Resultados del equipo 4

		Inciso			
Integrantes	Subequipo	a	b	c	d
Daniela Michelle Zaira	2	2	LR	8	C
Rafael Alejandro Robert Héctor Gerardo	1	2u	LR	8u	C

En la tabla 4.12 se muestra lo realizado por el equipo 5, el cual mostró inconsistencia para identificar el lado recto de la parábola dada, quizás al recordar la definición de lado recto ellos necesitaron reconocer y medir la distancia focal. También es posible que se hayan equivocado. Aunque la terna uno rectificó el ejercicio escribiendo la respuesta correcta en su hoja de trabajo.

Tabla 4.12 Resultados del equipo 5

		Inciso			
Integrantes	Subequipo	a	b	c	d
Alexis María del Carmen María Fernanda	2	2	LR y DF	8	C
Graciela Samantha Kevin Alexis	1	2	LR y DF	8	C

4.4.2 EJERCICIO 2

El objetivo de este ejercicio era analizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico en una parábola horizontal cuya rama abre hacia la derecha, de modo que los estudiantes pudieran hallar la ecuación de la parábola en su forma canónica. Lo anterior se realizaría tras la identificación del eje de simetría y la medida de distancia focal, se solicitaba también identificar con qué eje coordenado coincidía el eje de simetría de la parábola.

En el equipo 1 no se presentaron incidentes y para ellos bastó con indicar la variable asociada al *eje x* para escribir la respuesta del inciso *c*. Los resultados del equipo 1 se muestran en la tabla 4.13.

Tabla 4.13 Resultados del equipo 1

		Inciso			
Integrantes	Subequipo	a	b	c	d
Rafael Heli Jocelyn Erick	1	3	ES	x	C
Armando Israel Cynthia Daniela	2	3	ES	x	C
Carolina		NP	NP	NP	NP

La tabla 4.14 expone lo hecho por el equipo 2, del cual se observa que la terna 2 si advirtió que el eje de simetría coincidía con el *eje x*. En cambio la terna 1, se sintió satisfecha con indicar como respuesta coordenado *x*, fue un poco menos específica.

Tabla 4.14 Resultados del equipo 2

		Inciso			
Integrantes	Subequipo	a	b	c	d
Cristian Israel Daniela	1	3	ES	coordenado "x"	C
Rebeca Alizet Guadalupe Viviana	2	3	ES	esta en el eje x	C

En la tabla 4.15 se muestran los resultados del equipo 3, el cual tuvo problemas en ambas ternas para identificar al *eje x*, es probable que haya problemas para identificar a la recta como un conjunto de puntos y sólo atinaron a señalar las coordenadas del origen.

Tabla 4.15 Resultados del equipo 3

		Inciso			
Integrantes	Subequipo	a	b	c	d
Ricardo Angel María Guadalupe Alejandro	1	3	LR	(0,0)	C
María Fernanda Miranda Samantha Karel	2	3	LR	(0,0)	C

La tabla 4.16 expone los resultados obtenidos por el equipo 4 en conjunto. En este equipo la terna 1 muestra confusión puesto que la *abscisa* es una coordenada, un número y su significado no está asociado al uso de la variable *x* para denotar al *eje x*. Aunque la respuesta se dió por buena omitiendo la aclaración que quisieron hacer con la palabra abscisa.

Tabla 4.16 Resultados del equipo 4

		Inciso			
Integrantes	Subequipo	a	b	c	d
Daniela Michelle Zaira	2	3	LR	x	C
Rafael Alejandro Robert Héctor Gerardo	1	3u	LR	x o absisa	C

La tabla 4.17 expone los resultados obtenidos por el equipo 5. En la terna 2 la respuesta fue muy precisa el eje de simetría de la parábola horizontal coincide con el eje de las abscisas. En cambio la respuesta de la terna 1 muestra que se usa la variable *x*, sin advertir que la abscisa es un número. En la terna 2 no se puede asegurar que comprenden el concepto de variable y que distinguen lo qué es una abscisa.

Tabla 4.17 Resultados del equipo 5

		Inciso			
Integrantes	Subquipo	a	b	c	d
Alexis María del Carmen María Fernanda	2	3	ES y LR	con el de las abscisas	C
Graciela Samantha Kevin Alexis	1	3	ES y LR	x abscisa	C

4.4.3 EJERCICIOS 3 Y 4

El ejercicio 3 intentó analizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico en una parábola vertical; mientras que el ejercicio 4 analizó la conversión entre registro algebraico y gráfico en el sentido mencionado en una parábola horizontal. Quizás la actividad estuvo demasiado dirigida por las preguntas y no permitió que se permearán más errores de parte de los estudiantes.

En el caso del equipo 3 se observa una vez más la confusión entre foco y distancia focal y se usa la letra F como si fuera una variable a la cual se le asigna como valor la medida de la distancia focal. En el caso del equipo 4 es probable que asociaran el término foco con el término centro de la circunferencia y sintieron la necesidad de denotarlo con la letra C, o bien tuvieron la necesidad de asignarle un nombre al punto como se acostumbra hacerlo tradicionalmente en geometría; cabe mencionar que este equipo anotó la orientación vertical de la parábola del ejercicio 3 y también la orientación horizontal de la parábola del ejercicio 4.

Las tablas 4.18 y 4.19 carecen de integrantes en cada equipo porque éstos no fueron subdivididos en ternas o binas.

Tabla 4.18. Resultados del ejercicio 3 por equipo.

	Pregunta		
Equipo	1	2	3
1	2.5	(0, 2,5)	c
2	2.5	(0, 2,5)	c
3	2.5	(0, 2.5)	c
4	2.5	C(0, 2,5)	c
5	2.5	(0, 2,5)	c

Tabla 4.18 Resultados del ejercicio 4 por equipo.

	Pregunta		
Equipo	1	2	3
1	1	x=-1	b
2	1	X=-1	b
3	F=1	X=-1	b
4	1	x=-1	b
5	1	x=-1	b

4.5 ANÁLISIS DE LA PRUEBA

En la tabla 4.20 se muestra el total de aciertos obtenidos por estudiante junto con las respuestas que proporciono cada quien a los ítems de opción múltiple que se les presentaron. La tabla 4.21 es la continuación de la tabla 4.20 y muestra las respuestas que dió cada estudiante en ítems de complementación.

Cabe señalar que los estudiantes están acostumbrados a que los docentes les den una caja con las palabras a utilizar y en su momento se les dieron pistas como la palabra parábola y paraboloide. Las faltas de ortografía provienen de las propias pruebas.

Las respuestas correctas de la prueba pueden ser consultadas en el capítulo tercero. Sólo veintiséis estudiantes presentaron la prueba el 13 de noviembre de 2015.

Tabla 4.20 Resultados de la prueba semanal

	Item								
Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Daniela Michelle	c	b	b	a	a	c	a	c	c
Cristian	c	c	c	a	a	b	a	c	c
Rafael	a	b	a	a	a	c	a	c	c
Ricardo Angel	c	b	c	a	a	b	a	c	c
Graciela Samantha	a	b	c	a	c	c	a	b	c
María Guadalupe	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
Daniela	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
María Fernanda	a	c	a	a	c	a	a	c	c
Rafael Alejandro	a	c	b	c	c	a	c	c	c
Rebeca	a	b	c	c	a	c	a	c	c
Israel	a	b	c	b	a	a	a	a	c
Alexis	a	c	NC	c	c	a	c	b	c
Alejandro	a	b	a	a	a	c	c	c	c
María del Carmen	a	c	a	a	a	c	b	a	c
Armando Israel	a	b	a	a	a	c	a	a	c
Robert	c	b	a	b	a	b	a	c	b
Miranda	a	c	c	c	c	a	c	a	a
Alizet Guadalupe	c	b	b	a	a	c	a	a	c
Kevin Alexis	c	b	b	c	a	c	a	c	c
Zaira	a	c	a	a	a	c	a	a	c
Héctor Gerardo	a	b	b	a	a	c	a	c	c
Heli Jocelyn	b	b	a	a	a	c	a	c	c
Carolina	c	b	b	c	a	c	a	b	c
María Fernanda	a	b	a	a	a	c	a	c	c
Daniela	a	b	a	a	a	c	a	a	c
Erick	c	b	b	b	a	b	a	c	b
Viviana	a	a	a	c	c	c	b	c	a
Samantha Karel	a	a	b	a	a	c	b	c	b

Nota: NP significa que el ítem no se realizó, la prueba no se realizó.
NC significa que el ítem no tuvo respuesta.

En la tabla 4.20 se muestran los resultados para los ítems de opción múltiple. En el ítem 1 la gran mayoría optó por la opción *a* debido a que el reto planteado por Apolonio fue denominado por Descartes como Problema de Pappus. Las personas que leyeron cuidadosamente el texto y lo estudiaron fueron quienes acertaron en la respuesta.

En el ítem 2 la mayoría acertó, a excepción de quien no analizó que la opción *a* no podía ser correcta porque una cónica es una curva, no un plano. Otros integrantes del equipo 3 no consideraron la fotocopia mostrada por la docente donde se observa a las cónicas como cortes sobre la superficie de conos que se mostró en la sesión 2, o bien, no hicieron una apropiada lectura del texto previa al examen.

En el ítem 3 parece ser que los distractores funcionaron puesto que sólo quienes leyeron con detenimiento acertaron en su respuesta. La mayoría de los estudiantes verificó el caso del vértice como un punto que pertenece a la parábola; pero al parecer no pensó en cualquier otro punto y por ello contestaron la opción *a*.

En el caso del ítem 4 los estudiantes recordaron la solución hallada por Apolonio en la cual el plano de corte debe ser paralelo a la generatriz del cono, sin embargo la opción *a* habla de un corte paralelo a la base del cono, lo cual generaría una circunferencia. Los conceptos de perpendicularidad y paralelismo les generan dudas a los estudiantes, aunque en equipo eso no fue notorio, en cambio en la ejecución individual salió a relucir. El ítem 4 tenía como objetivo describir el hallazgo de Menecmo sobre los conos rectángulos; cierto es que el hallazgo de Menecmo es un caso particular del hallazgo de Apolonio, puesto que como lo muestra la figura 3.6 los ángulos rectos son correspondientes entre paralelas. No obstante, se calificó como incorrecta toda respuesta con la opción *a*.

Los ítems 5, 6 y 7 estaban relacionados, afortunadamente la mayoría de los estudiantes tuvieron éxito para hallar las respuestas correctas. Probablemente los ejercicios 3 y 4 que realizaron en la sesión 2 en equipo les auxiliaron a resolver esta parte de la prueba.

Para el ítem 6 la directriz de la parábola está dibujada en la figura correspondiente al ítem 5, los estudiantes sólo tuvieron que aplicar lo dicho por el inciso *a* del ítem 3 para hallar la respuesta correcta. Los estudiantes que fallaron en este ítem tres de ellos corresponden al equipo 3 y quizás esto afectó, persiste confusión para encontrar rectas o puntos en el plano cartesiano, eso en parte explica por qué uno de ellos optó por la opción *b* como ecuación de la directriz y otros dos optaron por la opción *a*.

La pareja que optó por la opción *a* aún no ha entendido que las ordenadas negativas están debajo del eje x, mientras que quien optó por la opción *b* no imaginó que una recta con ecuación $x = -6$ es paralela al eje y, no puede ser directriz de la parábola solicitada.

Para el ítem 7 parece que la ecuación canónica de una parábola cuya rama abre hacia arriba no les fue difícil de recordar y además encadenaron el hecho de que la distancia focal multiplicada por cuatro es el coeficiente de la variable *y*, por ello acertaron al optar por la opción *a*.

En el ítem 8 se pretendió indagar si los jóvenes conocían la ecuación que define al eje x que era la ecuación del eje de simetría. Este tipo de preguntas no fueron revisadas en clase, e implica pasar del registro algebraico al gráfico. No necesariamente se debe graficar la parábola; si los estudiantes se percataron que la parábola solicitada era horizontal y recordaron las figuras 3.21 y 3.22 habrían tenido indicios de qué eje coordenado era el eje de simetría de la parábola horizontal. Por otra parte, no han reflexionado que el *eje x* es aquel donde todos los puntos tienen ordenada igual a cero.

La mayoría contesto la opción *c*, de manera que confundieron al eje de simetría con una falsa directriz, puesto que la directriz de la parábola cuya ecuación canónica es $8x = y^2$, es $x = -2$. Quienes contestaron la opción *a*, probablemente no advirtieron que con base en la ecuación dada la parábola solicitada era horizontal y no vertical, además está la posibilidad de que sólo conozcan la ecuación del eje y que es $x = 0$.

En el ítem 9 la opción correcta era la *c*, probablemente los estudiantes después de los ítems anteriores dedujeron la opción correcta, o buscaron una parábola horizontal con foco de coordenadas F (2, 0) que era el caso más adecuado para la ecuación $8x = y^2$.

Tabla 4.2 Continuación de la tabla 4.20

	Item					
Nombre	10	11_a	11_b	12	13	Aciertos
Daniela Michelle	Menecmo	paraboloide	parabola	foco	4	11
Cristian	Menecmo	cono	parabolico	centro	Cuatro	5
Rafael	Menecmo	paraboloide	parabola	foco	Cuatro	9
Ricardo Angel	Menecmo	cono	parabolpido	centro	4	6
Graciela Samantha	NC	paraboloide	parabola	foco	NC	8
María Guadalupe	NP	NP	NP	NP	NP	0
Daniela	NP	NP	NP	NP	NP	0
María Fernanda	Meneco	NC	parábola	NC	el doble	3
Rafael Alejandro	Menecmo	paraboloide	vertice	NC	2	4
Rebeca	Menecmo	Cono	parabola	foco	Dos	8
Israel	Pappus	Paraboloide	parabola	foco	4	8
Alexis	Menecmo	Paraboloide	vertice	NC	Dos	4
Alejandro	Apolonio	Paraboloide	parabola	foco	Cuatro	9
María del Carmen	Menecmo	Paraboloide	parabola	foco	Cuatro	7
Armando Israel	Pappus	Parábolоide	parábola	foco	Cuatro	9
Robert	Menecmo	Cono	paraboloide	centro	4	5
Miranda	Menecno	Paraboloide	parábola	foco	Dos	4
Alizet Guadalupe	Menegmo	Paraboloide	parabola	foco	4	11
Kevin Alexis	NC	Paraboloide	parabola	foco	2	11
Zaira	Menecmo	Paraboloide	parábola	foco	cuatro	8
Héctor Gerardo	Apolonio	Paraboloide	parabola	foco	dos	10
Heli Jocelyn	Menecmo	Cono	parabola	eje de simetria	2	6
Carolina	NC	Paraboloide	parabola	foco	NC	12
María Fernanda	NC	Cono	triangulo	foco	4	7
Daniela	Pappus	Paraboloide	parabola	foco	cuatro	9
Erick	Menecmo	Cono	paraboloide	centro	4	6
Viviana	Pappus	Corte	generatriz	NC	2	2
Samantha Karel	NC	NC	NC	NC	NC	3

Nota: NP significa que el ítem no se realizó, la prueba no se realizó.
NC significa que el ítem no tuvo respuesta.

De la tabla 4.21 se realizarán conjeturas sobre las respuestas incorrectas halladas por ítem, de este modo se tiene que:

En el caso del ítem 10 Rafael Alejandro deslizó la pregunta sobre cómo se pronunciaba Menecmo, la docente aclaro que el nombre es Menecmo, aunque en algunos libros se encuentra Menecme, pero no indicó que esa fuera la respuesta correcta; sin embargo muchos estudiantes así lo entendieron.

En el ítem 11-a probablemente algunos estudiantes se confundieron porque la docente les explicó cómo construir un cono al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, la idea de la docente era ayudarlos a imaginar los conos de la figura 3.5; ya que a ellos se les dificultó imaginar el recorrido de la generatriz sobre la circunferencia directriz. Probablemente esta imagen mental inadecuada para el ítem fue lo primero que rescataron de su memoria a largo plazo para contestarle.

En el ítem 11-b María Fernanda conservó el recuerdo de la interacción con la docente en la sesión 1, de modo que asoció las palabras cono y triángulo. Robert y Erick asociaron las palabras cono y paraboloide. Alexis y Rafael Alejandro asociaron las palabras paraboloide y vértice. Por otra parte, Viviana asoció las palabras corte y generatriz, probablemente usó las palabras que recordó y no pensó bien lo que contestaba.

En el ítem 12, Robert quien participó en el equipo 4 confundió los términos foco y centro como se conjeturó anteriormente al analizar los resultados del ejercicio 3. La misma confusión se presentó en los estudiantes Cristian del equipo 2 y Ricardo Ángel del equipo 3.

En el ítem 13 los estudiantes que intentaron contestar la relación entre la distancia focal y el lado recto de una parábola, escribieron el doble, dos o el dígito dos. Heli reconoció que a ella le ayudaron sus compañeros de equipo a entender partes del tema, que quizás olvidó en la ejecución de la prueba. En cuanto a María Fernanda y Miranda quienes participaron en el equipo 3, la falta de compromiso de parte de todos los integrantes fue definitiva para que no se resolvieran dudas mientras se realizaron los ejercicios previos a la prueba, esto pudo influir en las respuestas otorgadas el día 13 de noviembre.

Del grupo 301-A presentaron la prueba veintiséis estudiantes de un total de veintiocho, en la tabla 4.22 se muestra el número de estudiantes que proporcionaron la respuesta acertada por cada ítem de la prueba. De los catorce ítems en total, nueve son de opción múltiple con dos distractores de respuesta y cinco son ítems de complementación. Entre los catorce ítems el más exitoso fue el ítem 5 con veintiún estudiantes que acertaron y el menos exitoso fue el ítem 10 con dos estudiantes que respondieron de forma correcta.

Tabla 4.22 Frecuencia de respuesta de los ítems

Ítem	Tipo	No. de estudiantes que contestaron acertadamente
1		8
2		17
3		8
4		7
5	Opción Múltiple	20
6		17
7		19
8		3
9		21
10		2
11a		16
11b	Complementación	17
12		16
13		14

El éxito del ítem 5 se explica por mostrar una parábola vertical y porque el análisis que se hizo en los ítems 5, 6 y 7 es similar al efectuado en los ejercicios 1 y 2 de la segunda sesión. El bajo éxito del ítem 10 se explica por los hábitos de estudio de los estudiantes o porque la comprensión del texto abordado en la primera sesión fue descuidada.

4.6 Evaluación del grupo

Primero que todo debe hacerse un análisis de las calificaciones obtenidas y después se emitirá un juicio de valor sobre lo que el grupo aprendió y sobre los posibles avances que tendría si continuara desarrollando estrategias de aprendizaje cooperativo en el aula. En la tabla 4.23 se muestran las calificaciones obtenidas por los estudiantes en las tareas realizadas en clase, las cuales fueron dadas como información a su profesor titular para que estuviera al tanto de lo que el grupo 301-A había realizado.

Tabla 4.23 Calificaciones de las tareas

Estudiante	Equipo	Ejercicios 3y 4	Ejercicios 1 y 2	Identifica	Cuestio nario
Ambriz Pérez Daniela Michelle	4	10	8,75	8,33	8
Anaya Matilde Cristian	2	10	10	10	8
Bernal Hernández Rafael	1	10	10	10	8
Borja Portillo Ricardo Ángel	3	8,33	7,5	10	8
De la O Baltazar Graciela Samantha	5	10	10	5	6
Delgadillo García María Guadalupe	3	8,33	7,5	10	NE
Domínguez M. Daniela	2	10	10	10	8
Espinoza Rocío María Fernanda	3	8,33	7,5	10	NE
Flores Álvarez Rafael Alejandro	4	10	8,75	8,33	8
Flores Barrientos Rebeca	2	10	10	10	8
Flores Romero Israel	2	10	10	10	8
Garduño Martínez Alexis	5	10	10	5	6
Gordiano Flores Alejandro	3	8,33	7,5	10	8
Hernández Moguel Armando Israel	1	10	10	5	6
Hernández Romero Robert	4	10	10	10	8
Hernández Gutiérrez María del Carmen	5	10	8,75	8,33	8
Hurtado Aguilar Miranda	3	8,33	7,5	10	8
Jasso Aguilar Alizet Guadalupe	2	10	10	10	8
Medel Serrano Kevin Alexis	5	10	10	5	6
Morales Amador Zaira	4	10	8,75	8,33	8
Morín Saldivar Héctor Gerardo	4	10	8,75	8,33	8
Najar Guarneros Heli Jocelyn	1	10	10	10	8
Nápoles Hernández Carolina	1	NP	NP	10	8
Pineda Juárez María Fernanda	5	10	10	5	6
Ríos Calixto Daniela	1	10	10	10	8
Talavera Martínez Erick	1	10	10	10	8
Velázquez Rojas Viviana	2	10	10	10	8
Velázquez Sánchez Samantha Karel	3	8,33	7,5	10	NE

Se observa que los mejores resultados se obtuvieron en los ejercicios 3 y 4; mientras que en el cuestionario se deterioró la intención de evaluarles por equipo, debido a que no se vigiló que se siguieran las instrucciones de forma clara y precisa. Los ejercicios 1 y 2 tuvieron resultados óptimos para los equipos más integrados, en tanto el equipo 3 presentó problemas de falta de compromiso y dudas que no fueron subsanadas adecuadamente, por eso su desempeño fue bajo durante la semana en la cual se desarrolló la secuencia didáctica.

Se comentó en la primera sesión que el 55% de la calificación consistiría en trabajos en equipo y el 45% restante en la prueba individual. En la tabla 4.24 se muestra el promedio de las tareas realizadas, la calificación de la prueba y la calificación final por estudiante. Sólo existieron siete reprobados por no entregar trabajos o no presentar la prueba.

Tabla 4.24 Calificaciones finales.

Alumno	Promedio de tareas	Prueba	Calificación final
Ambriz Pérez Daniela Michelle	8,77	7,86	8,36
Anaya Matilde Cristian	9,50	3,57	6,83
Bernal Hernández Rafael	9,50	6,43	8,12
Borja Portillo Ricardo Angel	8,46	4,29	6,58
De la O Baltazar Graciela Samantha	7,75	5,71	6,83
Delgadillo García María Guadalupe	6,46	NP	3,55
Domínguez M. Daniela	9,50	NP	5,23
Espinoza Rocío María Fernanda	6,46	2,14	4,52
Flores Álvarez Rafael Alejandro	8,77	2,86	6,11
Flores Barrientos Rebeca	9,50	5,71	7,80
Flores Romero Israel	9,50	5,71	7,80
Garduño Martínez Alexis	7,75	2,86	5,55
Gordiano Flores Alejandro	8,46	6,43	7,54
Hernández Moguel Armando Israel	7,75	6,43	6,51
Hernández Romero Robert	9,50	3,57	8,12
Hernández Gutiérrez María del Carmen	8,77	5,00	6,43
Hurtado Aguilar Miranda	8,46	2,86	5,94
Jasso Aguilar Alizet Guadalupe	9,50	7,86	8,76
Medel Serrano Kevin Alexis	7,75	7,86	7,80
Morales Amador Zaira	8,77	5,71	7,40
Morín Saldivar Héctor Gerardo	8,77	7,14	8,04
Najar Guarneros Heli Jocelyn	9,50	4,29	7,15
Nápoles Hernández Carolina	4,50	8,57	6,33
Pineda Juárez María Fernanda	7,75	5,00	6,51
Ríos Calixto Daniela	9,50	6,43	8,12
Talavera Martínez Erick	9,50	4,29	7,15
Velázquez Rojas Viviana	9,50	1,43	5,87
Velázquez Sánchez Samantha Karel	6,46	2,14	4,52

Una de las estudiantes avisó que no podía presentar la prueba porque el viernes 13 de noviembre le retirarían el yeso de su pie derecho. El martes 17 de noviembre no se le aplicó la prueba para no perjudicar la planeación del profesor titular.

4.7 Conclusiones

En la hipótesis de este trabajo se planteó la posible obtención de aprendizajes significativos a través de estrategias de aprendizaje cooperativo en grupos formales. Se trabajó en el grupo 301A con grupos formales, dos de ellos de cinco y los otros tres de seis integrantes. Se intentó el análisis de una lectura previa al tema de parábola y ejercicios de conversión entre los registros.

La siguiente matriz de valoración representada en la tabla 4.25 evalúa el logro de los objetivos de la sesión 1.

Tabla 4.25 Rúbrica para evaluar el logro de los objetivos de la sesión 1.

Objetivo	Logro			
	Deficiente 5	Regular 6	Bueno 8	Excelente 10
1. Entender en qué forma la parábola es una sección cónica.		x		
2. Conocer brevemente el origen de la Geometría Analítica y su aplicación en el contexto científico.			x	
3. Conocer la definición analítica de la parábola.			x	
4. Identificar los elementos geométricos de la parábola.			x	
5. Conocer la propiedad de reflexión de los *paraboloides*.		x		

La siguiente matriz de valoración mostrada en la tabla 4. 25 evalúa el logro de los objetivos de la sesión 2.

Tabla 4.25 Rúbrica para evaluar el logro de los objetivos de la sesión 2.

Objetivo	Logro			
	Deficiente 5	Regular 6	Bueno 8	Excelente 10
1. Deducir las ecuaciones canónicas de una parábola vertical cuya rama abre hacia arriba y de una parábola horizontal cuya rama abre hacia la derecha.			x	
2. Realizar ejercicios en donde se construya la ecuación canónica a partir de una representación gráfica de la parábola.			x	
3. Realizar ejercicios en donde se reconozca la gráfica de una parábola a partir de la ecuación canónica.			x	

Los estudiantes no están acostumbrados a comprender textos con información sobre historia de las Matemáticas, además están habituados al aprendizaje procedimental y hasta cierto punto mecánico de las secciones cónicas analizadas en un curso de Geometría Analítica. Cabe señalar que se dispuso de una secuencia de tres sesiones para tratar de forma resumida lo qué es una parábola y la ecuación de la parábola en forma canónica cuando la parábola tiene parámetro *p* positivo.

Es apresurado juzgar si los aprendizajes obtenidos por los estudiantes fueron significativos. La primera razón son las escasas sesiones en las cuales se abordo la secuencia didáctica, la segunda razón es que el aprendizaje implica cambios en la estructura cognitiva, cambios que no son evidentes en el corto plazo. Sería necesario regresar con este grupo de adolescente y revisar que fue lo que aprendieron.

Los grupos formales que se construyeron carecieron de una evaluación previa y existió un desconocimiento sobre los liderazgos del grupo. Existen jóvenes que cooperan y se acoplan a las circunstancias sociales y materiales como lo fueron los integrantes de los equipos dos, cuatro y uno. En el equipo cinco se requirió más tiempo para revisar los materiales, son jóvenes que acostumbran desmenuzar la información individualmente y quizás no confían en el trabajo de análisis de otra persona.

El equipo tres es un grupo donde se descubrieron problemas para trabajar con la notación de las coordenadas de un punto y el concepto de lugar geométrico, el cual debieron revisarlo en la primera unidad del curso de Matemáticas III. Hubo inseguridad entre sus integrantes y un poco de apatía. Tal vez pensaron en la calificación individual del profesor titular y no se ocuparon por aprender a cooperar o quizás no son prácticos. Algunos de ellos reaccionaron con cierto desenfado ante las bajas calificaciones, quizás protegen su autoestima al asumir una actitud de no afectación.

El logro de los objetivos fue bueno, en vista de las tres sesiones que se realizaron, puede suponerse que la secuencia didáctica fue razonablemente exitosa.

ANEXO 1. ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

De acuerdo con Ribnikov (1991) las matemáticas elementales coinciden con el currículo de matemáticas previas a la formación universitaria, en este conjunto de contenidos se encuentran los conocimientos aritméticos, algebraicos y geométricos previos al cálculo infinitesimal. El periodo histórico durante el cual se desarrollaron las matemáticas elementales comprende un milenio aproximadamente, comienza en el siglo V a. n. e. y termina en el siglo XVI.

Por su parte, Socas *et al*. (1996) comentan que el desarrollo del álgebra tiene tres periodos que son mostrados en la tabla A.1 y que la notación que se usa en álgebra se ha desarrollado como lo señala la tabla A.2.

Tabla A.1. Desarrollo histórico del álgebra.

Fase	Periodo	Sucesos
1	1700 a. n. e. hasta 1700 n. e.	Invención de símbolos y resolución de ecuaciones. Algebra geométrica (Grecia antigua) Notación de François Viète (1540 n. e.-1603 n. e.) Teoría de los “cálculos con cantidades de distintas clases” de Leonhard Euler (1707 n. e. -1783 n. e.)
2	Siglo XVIII al siglo XIX	Resolución de ecuaciones algebraicas. Galois (1801 n. e.-1832 n. e.) Teoría de ecuaciones algebraicas. Aplicación de la teoría de grupos.
3	Del siglo XIX hacia el presente	Algebra Moderna. Axiomas sobre operaciones entre vectores, *cuaterniones* de Hamilton (1805 n. e.-1865 n. e.), matrices y determinantes.

Tabla A.2 Desarrollo de la notación algebraica.

Etapa	Síntesis
Retórico	No hay símbolos, los métodos se describen de forma práctica. Abarca el periodo de 1700 a. n. e. a 250 a. n. e.
Sincopado o abreviado	Uso de abreviaciones para indicar operaciones. Trabajo de Diofanto abarca el periodo del 250 a. n. e hasta el siglo XVI.
Simbólico	Uso de símbolos y signos. Notación usada por René Descartes (1596 n. e. – 1650 n. e.) y cuyo desarrollo coincide con la segunda fase del álgebra.

Mientras que Socas *et al*. comentan en su análisis de historia de las matemáticas las aportaciones de culturas originales como Egipto Mesopotamia, pues algunos de sus habitantes resolvían ecuaciones lineales y cuadráticas de forma práctica con lenguaje retórico; Ríbnikov considera más importante el legado del álgebra geométrica de los griegos. Además, Socas *et al*. continúan el desarrollo histórico del álgebra comentando trabajos en álgebra moderna y álgebra lineal. Ríbnikov en sus capítulos tercero y cuarto hace un vínculo histórico entre oriente y occidente, destaca el interés de los griegos en la geometría y permite entender por qué la notación algebraica actual es una contribución europea, ya que en el mundo islámico se hicieron aportaciones matemáticas en álgebra y trigonometría, pero se continuó con el uso de notación sincopada. Con el fin de la edad media europea comenzó su declive económico y cultural y la mayor parte de los conocimientos matemáticos desde entonces han surgido en Europa occidental.

Los egipcios de acuerdo a lo analizado en el papiro de Rhind (1650 a. n. e.), resolvían ecuaciones lineales o ecuaciones de primer grado, con el *método de la falsa posición*, donde se prueba un valor como solución y si éste falla se busca otra solución por medio de cálculos aritméticos. Para calcular la solución correcta los egipcios usaban muchas operaciones con fracciones cuyo numerador es la unidad. Socas *et al.,* comentan que en la antigua Babilonia se le dio más importancia a las ecuaciones cuadráticas y a los sistemas de ecuaciones lineales que a la resolución de ecuaciones lineales. En la antigua India, Brahmagupta en el siglo VII n. e. expresó de forma sincopada cómo resolver ecuaciones de primer grado y entre los siglos IX y X de n. e. Abu Kamil redactó un libro para resolver ecuaciones lineales con el *método de doble falsa posición*.

En la Grecia antigua desde el siglo VI al VI a. n. e. actuaron diferentes escuelas científico naturales; destacaron entre ellas la escuela "jónica (siglos VII al VI a. n. e.), la pitagórica (siglos VI al V a. n. e.) y la ateniense (desde la segunda mitad del siglo V hasta nuestra era)" (Ríbnikov, 1991, p. 51). El cálculo aritmético, las mediciones y construcciones geométricas fueron constituyendo una rama científica independiente conocida como logística. En esta rama de las matemáticas se encontraban conocimientos como cálculo con ábaco, cálculo con fracciones y resolución de problemas que requieren plantear ecuaciones de primer y segundo grado. La escuela pitagórica recopiló hechos matemáticos abstractos en sistemas teóricos. Como lo reconoce Ríbnikov (1991): "Los griegos antiguos conocieron muy temprano la rigurosa demostración lógica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ por la vía de reducción al absurdo" (p. 53); los números irracionales les trajeron dificultades en el plano geométrico y en el teórico- numérico. Fue oportuno para los griegos antiguos construir un cálculo geométrico que incluyó magnitudes racionales e irracionales llamado *álgebra geométrica*.

En el caso griego, se presentaron problemas matemáticos irresolubles con regla y compás, uno de ellos la duplicación del volumen de un cubo, permitió posteriormente el desarrollo de la teoría de las secciones cónicas, como se comenta en la sección 2. 6. 1.

Es importante señalar la contribución de los trece libros conocidos como los Elementos de Euclides, redactados en el siglo III a. n. e., que durante más de veinte siglos constituyeron un sistema matemático cuya rigurosidad lógica no fue superable. En el primer libro se exponen los axiomas [nociones comunes] y postulados importantes. Los primeros cuatro axiomas se usan para resolver ecuaciones lineales:

i. Cosas iguales a una y la misma son iguales entre sí.
ii. Y si las cosas iguales se añaden otras iguales, las totales son iguales.
iii. Y si de cosas iguales se quitan otras iguales, las restantes son iguales.
iv. Y si a cosas desiguales se añaden otras iguales, las totales son desiguales.

(Euclides como se cita en García Bacca, 1992, p. 13).

Cabe mencionar que los Elementos de Euclides exponen el carácter deductivo de la matemática. A partir de los métodos de demostración establecidos en ellos, la matemática es concebida como "una sucesión lógica de teoremas y problemas sobre construcciones y que utiliza un mínimo de condiciones iniciales" (Ríbnikov, 1991, p. 66). De los trabajos de Diofanto de Alejandría, se conservan seis libros de Aritmética, en los cuales son introducidas las reglas de: los signos de multiplicación y operaciones con polinomios; también se añade la resolución de ecuaciones lineales. Diofanto, quien vivió en el siglo III a. n. e., elaboró una simbología algebraica basada en abreviaturas, en sus obras se dio el paso del álgebra retórica al álgebra sincopada.

Ríbnikov expone que Diofanto usó el símbolo para denotar una cantidad desconocida $\dot{\xi}$, la palabra *isos* para denotar igualdad entre cantidades, un símbolo especial ↑ para indicar una resta o sustracción. Para expresar el cuadrado de una cantidad, usó la palabra *dinamis* [cuyo significado es potencia] y para el cubo de una cantidad, la palabra *cubos*, a las cantidades que ahora son llamadas términos independientes los llamó *monas*. Un ejemplo del álgebra sincopada diofantina es:

"$\dot{\xi}\,\dot{\xi}\,\alpha\rho\alpha\overline{\iota\mu}^{o}\,\lambda\overline{\iota\sigma}o\iota\epsilon\iota\sigma\iota\nu\xi\xi^{\iota\sigma}\,\iota\alpha\mu\delta^{\gamma}\,\alpha\sigma\overline{\iota\epsilon}$ que significa $10x+30=11x+5$" (Ríbnikov, 1991, p. 102).

Socas *et al.* (1996) comentan que Diofanto resolvió ecuaciones lineales de la forma $ax+by=c$, donde los coeficientes de las variables son números racionales que admiten soluciones enteras. Se resuelven al calcular el máximo común divisor de los coeficientes de las variables, de modo que sea divisor del término independiente.

Los matemáticos griegos resolvían ecuaciones cuadráticas con el método de anexión de áreas, el cual recibía el nombre de elíptico si sobraba área, hiperbólico si faltaba esta magnitud, o parabólico si no había ni exceso ni defecto de ella. Una limitación de los griegos y de los matemáticos de la antigüedad es que sólo obtenían la solución positiva de una ecuación cuadrática. El matemático griego Herón siglo II n. e. resolvió ecuaciones cuadráticas al buscar un cuadrado perfecto. En la India Aryabhata en el siglo VI n. e. en forma retórica expresaba la solución de ecuaciones cuadráticas con una fórmula semejante a la fórmula general moderna. Los hindúes usaron el *método de completar cuadrados,* que aprendieron los árabes y ellos hicieron pruebas geométricas de cómo resolver ecuaciones cuadráticas con este método.

Ríbnikov en su cuarto capítulo da importancia al siglo VII n. e. cuando surgieron los reinos islámicos, que conquistaron el norte de África y la India, quienes auspiciaron el desarrollo científico que tomó como punto de partida el legado cultural de los pueblos conquistados; construyeron observatorios y tradujeron los Elementos de Euclides, tratados de Arquímedes y libros de Apolonio del griego al árabe; también usaron el sistema de numeración decimal creado en India para sus cálculos cotidianos y el sistema de numeración sexagesimal heredado de Babilonia en cálculos astronómicos.

Los matemáticos árabes calcularon números irracionales por el método conocido actualmente como método de Ruffini-Horner y establecieron la adecuación de la incomensurabilidad geométrica con la irracionalidad aritmética. Surge el álgebra como una nueva ciencia donde hay números, magnitudes medibles y desconocidas que se determinan con base en relaciones aritméticas entre los números y las magnitudes desconocidas. En la primera mitad del s. IX n. e. Muhammad ibn Musa al Khuwarizmi escribió el libro titulado en árabe *Hisab al jabr wa al muqabala* dicho texto, de acuerdo con Ríbnikov, habló sobre las operaciones de restablecimiento *jabr* y las de reducción *qabala*. Socas *et al.* (1996); comentan que *al jabr wa al muqabala* "significa „ciencia de la restauración y oposición" o „transposición o eliminación"" (p. 38); además comparten que para Boyer, *al jabr* es transferencia de términos en el otro miembro de la ecuación, mientras que *al muqabala* es la cancelación de términos idénticos entre los miembros de la ecuación. La solución de ecuaciones se consideró una ciencia independiente.

"Los trabajos algebraicos árabes de los siglos IX -- XV, además de la resolución de ecuaciones de 1º y 2º grado incluían también las ecuaciones cúbicas" (Ríbnikov, 1991, p. 114). Las ecuaciones cúbicas resultaban de solucionar problemas como la trisección de un ángulo y la medida del lado de un polígono regular de nueve lados, por ejemplo. Resolvían ecuaciones cúbicas por el método iterativo de Kashi [1420 n. e.], por el método de prueba de Biruni [972 n.e. – 1048 n. e.] y a través de obtener la imagen geométrica de la raíz positiva de la ecuación en la intersección de secciones cónicas, pero el álgebra árabe carecía de lenguaje simbólico. Omar Kayan [1050 n. e.-1123 n. e.] consideraba que las ecuaciones cúbicas sólo eran resolubles por métodos geométricos.

Europa en la edad media no desarrolló conocimientos matemáticos debido a la filosofía escolástica, las matemáticas eran parte de las siete artes liberales que se estudiaban en una facultad de artes, concretamente se hallaban en el *cuadrivium* formado por la geometría, la aritmética, la astronomía y la música. En los siglos XII y XIII trece surgieron las primeras universidades de Europa Occidental, las universidades de Oxford y París se fundaron en 1167. Fue en el siglo XIII cuando comenzó a lucharse contra la escolástica. Roger Bacon [1214 n. e. – 1294 n. e.] propuso a "la experiencia como la única fuente de conocimiento" (Ríbnikov, 1991, p. 120) y consideró que las matemáticas eran "el abecedario de toda filosofía natural" (Ríbnikov, 1991, p. 120). Leonardo de Pisa en la décimo quinta parte de su obra expone brevemente conocimientos algebraicos y su contemporáneo Nemorarius representó números arbitrarios mediante letras. Luego Nicole Oresme [1328 n. e. – 1382 n. e.] de la Universidad de París, introdujo los exponentes fraccionarios de una potencia y una simbología especial para representarles.

El álgebra que se usaba era sincopada, en los siglos XV y XVI los *cosistas* [matemáticos del sur de Alemania] llamaron *cosa* a la incógnita de una ecuación. Los viajes para llegar a las Indias y el descubrimiento de América incrementaron la necesidad del conocimiento matemático. Fue a partir de un duelo entre Foire y Nicolo Tartaglia en 1535, que se llegó a una fórmula para resolver ecuaciones cúbicas. Girolamo Cardano [1501 n. e. – 1576 n. e.] obtuvo el secreto de Tartaglia y en su libro *Ars Magna* de 1545 expuso métodos de resolución para ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas y algunos elementos de la teoría general de ecuaciones algebraicas. Cardano llamó a las raíces complejas de una ecuación cuadrática raíces sofisticadas y describió la ecuación $x^3 + 6x = 20$ como "*cubus 6 rebus aequalis 20" (*Ríbnikov, 1991, p. 132); cuya solución es:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

Cardano escribió esta solución como:

$$R_x\ u\ \ cu\ R_x\ 108\ \ p\,10\,|\,m\ R_x\ u\ \ cu\ R_x\ 108\ \ m\,10$$

La expresión $R_x\ u\ \ cu$ significa *radix universalis cubica* en latín, esto es la raíz cúbica de un número. Este ejemplo muestra la dificultad del lenguaje algebraico sincopado, los símbolos de este lenguaje eran diversos y no tenían lógica ni siquiera dentro de un mismo libro.

Al parecer François Viète [1540 n. e. – 1603 n. e.] en su intento por un nuevo sistema astronómico que sustituiría al propuesto por Copérnico, consideró que el número de ecuaciones algebraicas era grande, sesenta y seis de acuerdo con lo expuesto por Cardano y además era necesario “conjugar la efectividad de los métodos algebraicos con las construcciones geométricas antiguas” Ríbnikov (1991, p. 133), los cuales él considero modelos de verdadero análisis científico. El cálculo de Viète está dividido en tres partes: *Zeteticque*, arte de resolver ecuaciones; *Porifticque*, arte de demostrar la exactitud de las soluciones y *Exegeticque*, la teoría general d ecuaciones.

En su simbología las consonantes representan variables conocidas y las incógnitas son representadas por vocales. Los números no tienen dimensiones y las magnitudes sí. Una magnitud con segunda potencia se llama área y una magnitud con tercera potencia se llama cuerpo. Aceptaba la suma y resta de magnitudes unidimensionales, en tanto que al efectuar una multiplicación o una división implicaba un cambio de magnitud.

En opinión de Ribnikov la simbología de Viète no siempre es comprensible porque tiene palabras abreviadas y otras que no lo están; sin embargo gracias a ella fue posible expresar ecuaciones mediante fórmulas generales. Un ejemplo de la simbología de Viète es el siguiente: $Acubus + Bplanum\ in\ A_3\ aequatur\ D$, traducida al lenguaje algebraico actual es: $A^3 + 3BA = D$. Harriot contemporáneo de Viète comenzó el perfeccionamiento de la simbología hecha por el matemático francés.

El signo igual tiene su origen en los trabajos de Robert Recorde quien utilizó en 1557 dos rectas paralelas para denotar igualdad entre expresiones algebraicas. Recorde escribió “[p]ondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o líneas gemelas de una misma longitud, así: $=$, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales” (Recorde como se cita en Bosch y Gómez, 2010, p. 15).

Por su parte, Socas *et al*., comentan que Viète resolvió ecuaciones cuadráticas al asociar la solución de éstas con las intersecciones de una parábola con el *eje x*; también coinciden en que Descartes hizo posible la combinación de métodos geométricos y algebraicos que originaron la Geometría Analítica.

Resolver algunas ecuaciones cúbicas invitó a los matemáticos europeos a preguntarse si se podía resolver una ecuación algebraica de cualquier grado. Abel en el siglo XIX demostró que las ecuaciones de grado mayor a 4 no se resuelven en radicales. Galois, por su parte, relacionó a cada ecuación con un grupo especial de permutaciones de sus raíces y redujo el problema a la investigación de la estructura de este grupo. Los trabajos de Galois señalan el camino hacia el álgebra moderna, cuyo desarrollo histórico se sintetiza en el diagrama A.1.

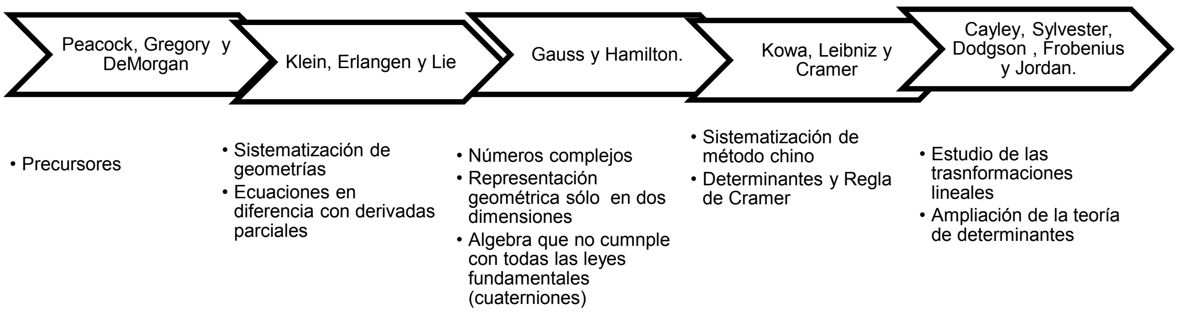


Diagrama A.1 Desarrollo histórico del álgebra abstracta

FUENTES CONSULTADAS

Aguirre, P. (27 de julio de 2002). *Matriz de valoración para una presentación oral.* Eduteka. Tecnologías de Información y Comunicaciones para Enseñanza Básica y Media Recuperado de http://www.eduteka.org/proyectos/RubricPresentacion.php3

Alegría, P. (2002). *Utilidad de las matemáticas. Las cónicas y sus aplicaciones.* Recuperado el 18 de septiembre de 2015, de http://www.ehu.eus/~mtpalezp/conicas.pdf

Amado, M. G.; Brito, R.; García, A.; Guerrero, M. T. y Cuervo, C. (2009). *Estilos de aprendizaje de estudiantes del Instituto Tecnológico de Mexicali, México y la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.* En 2° Congreso Internacional *Las matemáticas un lenguaje universal*. Asociación Latinoamericana de Maestros de Matemáticas Investigadores A. C. Congreso llevado a cabo en Tunja, Colombia. Recuperado de http://www.alammi.info/2congreso/memorias/Documentos/jueves/Estilos%20de%20aprendizaje%20corregido.pdf

Bosch, C. y Gómez, C. (2010). *Encuentro con las matemáticas tercero* (p. 15). Querétaro: Nuevo México.

Camelo, A.; García, N.; Merchán, S. y Castillo, L. (enero-junio de 2009). Estrategias de enseñanza del aprendizaje cooperativo. *Revista Actualidades Pedagógicas (53),* 109-121. Recuperado de http://revistas.lasalle.edu.co/index.php/ap/article/viewFile/1049/954

Cruz, A. (2003). *Uso de estrategias de aprendizaje cooperativo para la enseñanza de la biología en estudiantes de educación media superior de la Universidad Autónoma de Nuevo León. (*Tesis de Maestría en la Enseñanza de las Ciencias con Especialidad en Biología). Recuperado de http://cdigital.dgb.uanl.mx/te/1020149429.pdf

Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2002). Capítulo 4. Aprendizaje cooperativo y proceso de enseñanza. En *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista* (2a. ed., pp. 99-135). México: Mc Graw Hill.

Diaz Barriga, F. y Hernández, G. (2002). Capítulo 5. Estrategias de enseñanza para la promoción de un aprendizaje significativo. En *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista* (2a. ed., pp. 137-229). México: Mc Graw-Hill.

Díaz Barriga, F.; Hernández, G. (2002). Capítulo 8. Constructivismo y evaluación psicoeducativa. En *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista* (2a. ed., pp. 352-383, 387-414). México: Mc Graw Hill.

Díaz Barriga, F. (2013). *Evaluación auténtica a través de portafolios y rúbricas. UNAM.* Recuperado de http://es.slideshare.net/amigon60/portafolios-y-rubricasfridadiazb

Duval, R. (1999). Capítulo I. Registro de Representación. Comprensión y aprendizaje. En *Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (pp. 25-78). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). Capítulo II. Las funciones discursivas de una lengua. En *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (pp. 79-120). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). Capítulo IV. Figuras geométricas y discurso matemático. En *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (pp. 147-175). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). Capítulo VI. La comprensión de textos. En *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (pp. 263-300). Calí: Universidad del Valle.

Euclides. (1992). En J. D. García Bacca (Trad.), *Euclides. Elementos de la Geometría. Tomos I-II* (p. 98-119). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Fernández, Y. (28 de noviembre de 2011). *Paraboloide elíptico*. EcuRed. Conocimiento con todos y para todos. Recuperado de http://www.ecured.cu/index.php/Paraboloide_el%C3%ADptico

Florez, R. (1994). Capítulo 6. La enseñabilidad de las ciencias. En *Hacia una pedagogía del conocimiento* (pp. 75-106). Mc Graw Hill.

Gallego, D. y Nevot, A. (septiembre de 2007). Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 19(1),* 95-112. Recuperado de http://revistas.ucm.es/edu/11302496/articulos/RCED0808120095A.PDF

Gil, E.; Ortega, D.; Pol, R.; Tur, F. y Abia, A. (6 de abril de 2010). *El laberinto del ángulo. Las cónicas de Apolonio.* Recuperado de http://ag-ellaberintodelangulo.blogspot.mx/2010/04/las-conicas-de-apolonio.html

Goikoetxea, E. y Pascual, G. (2002). Aprendizaje Cooperativo: Bases teóricas y hallazgos empíricos que explican su eficacia. *Educación XX1 5(1),* 227-248. Recuperado de http://e-spacio.uned.es/revistasuned/index.php/educacionXX1/article/view/392/342

González, J. (diciembre de 1992). *Apolonio de Perga: Las secciones cónicas.* Universidad de la Laguna. Recuperado de http://fundacionorotava.org/archivos%20adjuntos/publicaciones/actas/hgg_pdf_web/cap13_web.pdf

González Urbaneja, P. (2001). *Apolonio. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas*. Recuperado de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&task=view&id=3320&Itemid=33&showall=1

Hargreaves, A.; Earl, L. y Ryan, J. (1998). Capítulo 8. La evaluación. En *Una educación para el cambio* (pp. 183 -221). Octaedro Ediciones.

Herreid, C. F. (2007). Chapter 19. Why Isn‟t Cooperative Learning Used To Teach Science*?* En *Start with a story. The Case Study Method of Teaching College Science* (pp. 128, 130 -133). National Science Teachers Association Press. Recuperado de http://www.gvsu.edu/cms3/assets/526F4779-E0C8-71E0-2B3496752EE01356/cooperative_learning_in_science.pdf

Johnson, D. W. y Johnson, R. (1999). Apéndice. En *Aprender juntos y solos. Aprendizaje cooperativo, competitivo e individualista* (1a. ed, pp. 5-34). Buenos Aires: Aique. Recuperado de http://www.terras.edu.ar/jornadas/14/biblio/14JOHNSON-David-JOHNSON-Roger-Apendice.pdf

Justin, J.; Oliveira, C. y Moreno, L. (2014). Registros de representación semiótica y Geometría analítica. Una experiencia con futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , 17* (2), 137-144. doi: 10.12082/relime.13.1721

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Investigación y experiencias didácticas. *Enseñanza de las ciencias 7 (3)*, 229-240. Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/51268/93013

Lafourcade, P. (1972). Capítulo 4. Clasificación y análisis de las pruebas de comprobación del rendimiento escolar (I). En *Evaluación de los aprendizajes* (pp. 90-93). Madrid: Cincel.

Lafourcade, P. (1972). Capítulo 5. Clasificación y análisis de las pruebas de comprobación de rendimiento escolar (II). En *Evaluación de los aprendizajes* (pp. 106 -128). Madrid: Cincel.

Lafourcade, P. (1972). Capítulo 6. Clasificación y análisis de las pruebas de comprobación de rendimiento escolar (III). En *Evaluación de los aprendizajes* (pp. 129-140). Madrid: Cincel.

Leithold, L. (1994). Capítulo 3. Graficas y Ecuaciones. La parábola. En *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (pp. 175-185). México: Harla.

López, O.; Hederich-Martínez, C. y Camargo, A. (diciembre de 2012). Logro en matemáticas, autorregulación del aprendizaje y estilo cognitivo. *Suma psicológica, 19(2),* 39-50. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=134225567002

Muñoz, E. (2009). Las habilidades sociales en la práctica docente. *Revista Digital Innovación y Experiencias educativas (17),* 1-8. Recuperado de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_17/ELISA_MUNOZ_2.pdf

Muñoz, L. y Avila, J. (2012). Capítulo 2. Características de ingreso de la población escolar. En L. Román (Ed.), *Población Estudiantil del CCH ingreso, tránsito y egreso. Trayectoria Escolar: siete generaciones 2006-2012* (pp. 13-31). México: Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/PoblacionEstudiantilDelCCH.pdf

Muñoz, L. (2014) Informe sobre la Gestión Directiva 2010-2014. México: Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/informe2010_2014.pdf

del Olmo, V. (27 de enero de 2014). *Antenas, radiación y salud*. Hablando de Ciencia. Recuperado de http://www.hablandodeciencia.com/articulos/2014/01/27/antenas-radiacion-y-salud/

Payán, F. (2005). *Cónicas. Un poco de historia*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/conicas_jpj/Conicas.htm

Pinelo, F. (febrero de 2008). Estilos de enseñanza de los profesores de la carrera de psicología. *Revista Mexicana de Orientación Educativa, 5(13),* 17-24. Recuperado de http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-75272008000100005

Pulido, I. (2009). Habilidades sociales del docente. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas (25),* 1-9. Rcuperado de 2015 de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_25/INMACULADA_PULIDO_2.pdf

Ríbnikov, K. (1991). Capítulo 3. Formación de las primeras teorías matemáticas. En C. Valdés (Trad.) *Historia de las matemáticas* (pp. 51-106). Moscú: Mir.

Ribnikov, K. (1991). Capítulo 4. Desarrollo de las matemáticas elementales. En C. Valdés (Trad.) *Historia de las Matemáticas* (pp. 107-138). Moscú: Mir.

Riddle, D. (2001). 5. Secciones cónicas. En D. Riddle, *Geometría Analítica* (6a. ed, pp. 128 y 155). México: International Thomson Editores.

Salazar, W. (noviembre de 2011). *Introducción al cálculo a través de algunas curvas* (Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia*).* Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/5918/1/70829946.2012.pdf

Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M. y Hernández, J. (1996). 4. Enseñanza-aprendizaje del álgebra. En L. Rico Romero, J. M. Fortuny y L. Puig Espinosa (Eds.), *Iniciación al álgebra* (pp. 92-121). Madrid: Síntesis.

Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M. y Hernández, J. (1996). 5. Lenguaje visual y lenguaje algebraico. En L. Rico Romero, J. M. Fortuny y L. Puig Espinosa (Eds.), *Iniciación al álgebra* (pp. 139-144). Madrid: Sínteis.

Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M. y Hernández, J. (1996). 2. Marco histórico del álgebra. En L. Rico Romero, J. M. Fortuny y L. Puig Espinosa (Eds.), *Iniciación al álgebra* (pp. 37-68). Madrid: Síntesis.

Solórzano, L. (1999). *Historia en las secciones cónicas.* Secciones cónicas. Objetos para aprendizaje. Universidad de Guadalajara. Recuperado de http://sitios.usac.edu.gt/seccionesconicas/elementos_historicos.html

Universidad Nacional Autónoma de México. (2004). *Programas de Estudio de matemáticas. Semestre I y IV.* Elaborados por la Comisión de Revisión de los Programas del CCH. México: UNAM.

Vaello, J. (s.f.). *La ESE: Un antídoto contra los conflictos.* Curso de Capacitación Padegógica de García, E. y Añón, M. Universidad de Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/moaroig/MATERIALCOMPLEMENTARIO/Un%20antidoto%20contra%20los%20conflictos.pdf

del Valle, G. y López, M. B. (3 de noviembre de 2003). *Aprendizaje cooperativo y colaborativo. Su implementacion en carreras universitarias.* Congreso Latinoamericano de Educacion Superior en el siglo XXI. Congreso llevado a cabo en San Luis, Argentina. Recuperado de http://blog.pucp.edu.pe/item/26953/distincion-entre-aprendizaje-colaborativo-y-cooperativo

Varela, M. (2006). *Estilos de aprendizaje.* Recuperado de 2013, de http://bq.unam.mx/Wikidep/uploads/MensajeBioquimico/Mensaje_Bioq06v30p1_11_Margarita_Varela.pdf

William H. Hannon Library (marzo de 2016) APA: Quote and Paraphrase. LibGuides at Loyo Marymount University. Recuperado de http://libguides.lmu.edu/c.php?g=324079&p=2174127

Zavala, S. (2012). Guía a la redacción en el estilo APA, 6ta ed. Recuperado de http://www.suagm.edu/umet/biblioteca/pdf/GuiaRevMarzo2012APA6taEd.pdf