



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES DE PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS
ELÁSTICOS ESTRATIFICADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

LAURA GÓMEZ BUSTAMANTE

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES



CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO

MAYO, 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Gómez

Bustamante

Laura

55 56 01 09 04

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Física

308534342

2. Datos del tutor

Dr.

Juan Adrián

Reyes

Cervantes

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Rosalío Fernando

Rodríguez

Zepeda

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Omar Guillermo

Morales

Saavedra

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Carlos Ignacio

Mendoza

Ruiz

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Marcos

Ley

Koo

7. Datos del trabajo escrito

Propiedades de propagación de ondas en medios elásticos estratificados

94 p

2016

A Mireya y Victor, mis padres;

y a Elisa, mi hermana

Agradecimientos

Antes de continuar es importante mirar hacia atrás, reconocer que éste es un logro en conjunto y agradecer a todos los que han formado parte del largo trayecto.

Comenzaré por mis padres, quiénes siempre me han apoyado y no pierden la esperanza en mí, gracias por ser los pilares que me sostienen en todo momento y porque, a pesar de estar lejos de casa siempre encontraron la manera de hacerme sentir que estaban cerca; gracias por las llamadas de todos los días sin importar si era muy temprano o muy tarde, gracias por todo el esfuerzo, porque después de tantas idas y venidas lo hemos logrado. Gracias mamá por ser una mujer tan fuerte, por preocuparte y ocuparte siempre de Elisa y de mí, y por esas palabras que siempre me aliviaron cuando perdía el equilibrio. Gracias papá por todo lo que haces por nosotras, por ser la persona más responsable que conozco, por exigirme tanto y por decirme que esto era cuestión de resistencia; tenías razón. Gracias también a ti Elisa; por los chistes, los videos, las alitas, las canciones, las películas y todo lo que compartimos cuando no tenemos que hacer tarea, gracias también por la compañía en las noches de desvelo, por los regaños cuando no me ponía a trabajar, por las pláticas en la noche mientras cenábamos y preparábamos el desayuno del otro día, por recordarme las anécdotas de cuando estábamos chicas y nuestra mayor preocupación en la vida era que el día no se acabara para poder seguir jugando. A ustedes tres, gracias por tanto.

Gracias a los más grandes y también más sabios de la familia; mis abuelos. A Malena, por preocuparse siempre por mí, por la confianza y el amor que siempre me tuvo, por su amor a la vida y por luchar incansablemente aún cuando el pronóstico era desfavorable, porque sé que aún sigue con nosotros. A Jesús, por enseñarnos que no hay nada más importante que la familia. A Serafin, por ser un ejemplo de trabajo, por las pláticas que compartimos los fines de semana, por los sabios consejos y por la frase «lista a lo que diga la maestra» siempre me hacía irme con una sonrisa. A Sabina, por ser una mujer extraordinaria, por enseñarme a aceptar las cosas y no quejarse de ellas.

Gracias también a mi tío Roge, por las panditas que fueron mi salvación en tantas noches de desvelo.

Al Dr. Alejandro Estrada, quien me motivó a estudiar física y me advirtió que eso implicaba tener que hacer muchos sacrificios; y efectivamente así fue. Gracias por

prepararme para ello.

A Erick, por ser mi mejor amigo desde hace tantos años, porque aunque nos vemos poco, siempre estás para mí.

A Fer, David, Miguel, Madelyn, Mónica, Juan Carlos, Ale Trejo y Salvador, por ser mis amigos cuando empezó este camino.

A Gaby, Darío, Edgar, David, Josafat, Katya, Esteban, Ana Paula, Jorge, Arturo, Hiroki, Alejandro y Vega; por los buenos ratos, las clases y las pláticas que compartimos, por ser un gran equipo para resolver tareas.

Especialmente a Gaby y a Darío gracias por ser los mejores amigos y mis hermanos durante el paso por la universidad, por estar en las buenas, en las malas y en las peores. Gracias Gaby porque desde esa tarea examen de mecánica en segundo semestre has estado incondicionalmente, por escucharme siempre, por aguantar mis quejas, porque como te digo siempre: yo no sé que haría sin ti. Gracias Darío por ser siempre sincero, por los abrazos, las risas y también el llanto, por sentarte conmigo cuando empecé a escribir la tesis y ayudarme a entender lo que tenía que hacer.

A Esteban, Alejandro y Hiroki gracias por su amistad. Gracias Esteban por darme ánimos para terminar esta tesis. Gracias Alejandro por haber estado en esos momentos difíciles. Gracias Hiroki por las buenas charlas mientras intentábamos hacer los experimentos del último laboratorio.

A Daniel, Rafa y Gaby Luna gracias por ayudarme con las dudas académicas, y por las salidas y las comidas que llegaban en el momento oportuno para descansar de la tesis.

Gracias a mi asesor, el Dr. Adrián Reyes por la paciencia y el apoyo que me brindó durante la realización de este trabajo, gracias por compartir su conocimiento y por responder todas mis dudas, por sus consejos, y por aventarse las talachas enormes en el pizarrón cuando no entendía.

Gracias también a mis sinodales por el tiempo dedicado para revisar este trabajo, por sus comentarios y sus correcciones.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México por abrirme las puertas y haber sido mi hogar durante casi seis años.

Gracias también a CONACYT por el apoyo otorgado.

Por mi raza hablará el espíritu

Índice general

Resumen	VI
Introducción	VII
1. Propiedades de los cristales líquidos	1
1.1. Cristales líquidos termotrópicos	1
1.2. Densidad de energía libre	7
2. Teoría de la Elasticidad	12
2.1. Tensor de elongación	12
2.2. Tensor de esfuerzos	15
2.3. Termodinámica de las deformaciones	18
2.4. Energía libre para un sistema homogéneo e isótropo	22
3. Ondas elásticas en un medio isótropico	26
3.1. Ecuaciones de equilibrio para cuerpos isótropicos	26
3.2. Ecuaciones de movimiento para medios elásticos isótropicos	27
3.3. Onda elástica plana en un medio isótropico infinito	28
3.4. Reflexión y refracción de una onda plana, monocromática y elástica en un medio y una frontera plana	31
4. Ondas elásticas en un medio estratificado	45
4.1. Descripción del medio estratificado	45
4.2. Flujo de energía en un medio elástico	48
4.3. Ondas elásticas en incidencia oblicua y normal sobre el medio estratificado	50
4.4. Relaciones de ortogonalidad y representación de medios no absorbentes en la base de ψ	53

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
4.5. Medios estratificados con planos de discontinuidad	55
4.6. Ondas elásticas en el sólido helicoidal	57
Apéndice A	70
Apéndice B	75
Bibliografía	82

Resumen

Se estudia la propagación de ondas elásticas en medios isotrópicos y homogéneos así como en medios estratificados. Se realiza un breve estudio de los cristales líquidos, específicamente de los coléstericos puesto que su estructura es similar a la de los medios estratificados. Se describe un medio elástico homogéneo e isotrópico a partir de la Ley de Hooke, el medio elástico más general queda caracterizado por 21 módulos elásticos independientes. Se analiza la reflexión y refracción de una onda elástica, plana y monocromática en un medio homogéneo e isotrópico y una frontera plana; a partir de ello se deducen expresiones para las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas en términos de la amplitud de la onda incidente, el ángulo de incidencia y las propiedades elásticas (módulo de Young y constante de Poisson) del medio en cuestión. Estas relaciones juegan el papel de coeficientes de Fresnel para ondas electromagnéticas.

La descripción de los medios estratificados se hace a partir de la Ley de Hooke, pero en su representación de componentes independientes. Se considera que las propiedades de tal medio varían a lo largo del eje Z , por lo que la ecuación que los caracteriza es función tanto de la coordenada z como de los módulos elásticos del material. Utilizando esta ecuación y la segunda Ley de Newton en su versión para medios continuos, se obtiene una ecuación de eigenvalores que representa al medio estratificado y a las ondas que se propagan en él. Se propone como solución la superposición de seis ondas, tres propagándose hacia el frente; y las otras tres propagándose hacia atrás.

Se deducen expresiones para la potencia elástica transportada por las ondas, para la corriente de flujo elástica que juega el papel de vector de Poynting en electromagnetismo; y para la matriz de transferencia que relaciona las amplitudes de las ondas transmitidas con las ondas incidentes y reflejadas.

Se analiza una onda elástica incidiendo normalmente en la superficie de un sólido helicoidal, este material es un medio estratificado anisotrópico cuya hélice gira alrededor del eje Z . La descripción de este sistema se realiza rotando un ángulo qz a la ecuación de eigenvalores que describe al medio estratificado. La ecuación de eigenvalores que caracteriza al sólido helicoidal se resuelve aplicando una rotación en sentido inverso a la asociada a la geometría helicoidal. Se obtienen los valores propios asociados a tal ecuación. A partir de ellos se genera una relación de dispersión, es decir, la frecuencia de la onda en función del número de onda. Al graficar esta relación se observa un espectro de bandas fonónicas. Para materiales anisotrópicos aparecen bandas de reflexión en tal espectro, las cuales indican que para ciertas frecuencias, las ondas no se propagan; en cambio, para materiales isotrópicos las bandas de reflexión se cierran. Los correspondientes vectores propios que representan a las seis ondas propagándose en el sólido helicoidal son también obtenidos, adicionalmente se demuestra su ortogonalidad.

Introducción

Estudios sobre la propagación de ondas en medios estratificados han sido de gran interés para los investigadores en los campos de geofísica, acústica y electromagnetismo. Aplicaciones de estos estudios incluyen importantes áreas tecnológicas tales como predicción de terremotos, mapeo subterráneo de fallas, exploración de petróleo y gas, reducción del ruido arquitectónico; y el diseño de materiales estratificados avanzados compuestos de fibras. Común a todos estos estudios es el grado de interacción entre las capas, que se manifiesta en forma de agentes de reflexión y transmisión; y por lo tanto dan lugar a dispersión geométrica. Estas interacciones dependen entre muchos otros factores, de las propiedades, dirección de propagación, frecuencia, número y naturaleza de las condiciones interfaciales. [1]

Particularmente, la propagación de ondas acústicas a través de medios estratificados ha sido objeto de un gran estudio teórico durante los años pasados. La motivación de muchos de los primeros trabajos fue el deseo de dar una descripción precisa de la propagación de ondas sísmicas a través de la corteza terrestre, cuya densidad y propiedades elásticas varían con la distancia de la superficie de la Tierra. Para ello se consideró a la corteza como una pila de capas elásticas homogéneas, cada una con su propia densidad y módulo elástico. El estudio de ondas elásticas propagándose en tales medios se redujo a la solución de las ecuaciones de movimiento de la teoría de Elasticidad para el campo de desplazamientos en cada capa; y al cumplimiento de las condiciones de frontera en cada interface. [2]

Los medios anisotrópicos estratificados son empleados en una gran variedad de situaciones y la propagación de ondas allí, es usualmente analizada por métodos matriciales. [3, 4, 5] Utilizando la teoría de Floquet-Lyapunov, es posible utilizar un método matricial de 6×6 para examinar la propagación de ondas en medios anisotrópicos estratificados.[6] De manera breve, un medio estructuralmente quiral puede ser concebido como una pila de placas uniaxiales de

constitución y grosor idénticos. Cada placa puede hacerse mediante la incorporación de fibras paralelas que se extiende normalmente respecto al espesor. Las fibras en un placa dada difieren un pequeño ángulo fijo en el plano xy con respecto a las fibras en la placa justo debajo, por lo tanto la dirección de las fibra varía paso a paso helicoidalmente a lo largo del eje Z . [3]

Dentro de los medios helicoidales más relevantes se encuentran los cristales líquidos colestéricos que gracias a sus propiedades ópticas únicas han sido el objeto de intensa investigación durante más de un siglo. En particular, se han encontrado soluciones completamente analíticas y exactas para ondas electromagnéticas propagándose a lo largo del eje de la hélice. Este tipo de materiales son comunes en la naturaleza y son fáciles de obtener artificialmente; por ejemplo, los avances en técnicas de depositación han permitido fabricar cristales sólidos teniendo la misma estructura que los cristales líquidos colestéricos e incluso se han podido insertar defectos a partir de los cuales se han obtenido aplicaciones fotónicas. [7]

Estructuras sólidas helicoidales hechas de materiales anisotrópicos cuyo tensor de elasticidad es girado uniformemente alrededor de x_3 son también de interés para aplicaciones sónicas. Al considerar estructuras helicoidales sin acoplamiento entre las deformaciones longitudinales y transversales, se ha encontrado que las propiedades de las ondas transversales son muy similares a las propiedades ópticas de cristales líquidos colestéricos. [7]

Teniendo como antecedente todo el estudio anterior de los medios estratificados, en este trabajo se toma como objeto de estudio a un medio estratificado general y se realiza un análisis teórico de la propagación de ondas elásticas a través de él. De manera específica, se resuelven las ecuaciones para ondas elásticas incidiendo de manera normal al medio estratificado, las soluciones de tales ecuaciones son completamente analíticas.

Este trabajo está compuesto de 4 capítulos y una sección más dedicada a las conclusiones. En el capítulo 1 se hace una descripción de los cristales líquidos y sus propiedades, se establece una clasificación termotrópica, es decir que depende únicamente de la temperatura, lo que da lugar a las fases nemáticas, colestéricas y esmécticas. Se pone especial atención y se lleva a cabo una descripción más detallada de los cristales líquidos colestéricos ya que su estudio fue la motivación para llevar a cabo el presente trabajo. Este tipo de materiales tiene una estructura similar a la de los medios estratificados helicoidales y lo que se estudia es la propagación de ondas electromagnéticas, de ahí que se pretendiera hacer una analogía al estudiar a los medios estratificados; pero considerando ondas elásticas.

En el capítulo 2 se revisan conceptos esenciales de la teoría de Elasticidad,

tales como el tensor de esfuerzos y el de elongación, así como la ley generalizada de Hooke, que es una ecuación constitutiva que permite escribir al tensor de esfuerzos en términos del tensor de elongación, mediante la incorporación del tensor de rigidez. De aquí se establece que el medio elástico más general tiene asociados 21 módulos elásticos independientes y; dependiendo de las simetrías, este número de módulos disminuye.

En el capítulo 3 se estudia la propagación de ondas elásticas en medios isotrópicos. Se analizan primero las ecuaciones de equilibrio para tales medios y posteriormente se revisan las ecuaciones de movimiento. En la sección 3.4 se plantean tres sistemas para los cuales se analiza la reflexión y refracción de una onda plana, monocromática y elástica en un medio con frontera plana. En el primer y segundo sistema incide una onda longitudinal; en ambos sistemas el medio de incidencia es el acero; sin embargo, para el primer sistema se tiene que el medio de transmisión es el vacío mientras que para el segundo, el medio de transmisión es un sólido isotrópico distinto. Para el tercer sistema se considera que la onda incidente es ahora una onda transversal, que yace en un plano perpendicular al plano de incidencia, los medios de incidencia y de reflexión para este sistema son el acero y el cobre, respectivamente. Utilizando la ecuación constitutiva de Hooke e imponiendo condiciones de frontera, se obtienen expresiones para las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas en términos de la amplitud de la onda incidente, el ángulo de incidencia y las propiedades elásticas del medio.

En el capítulo 4 se describe a los medios estratificados a partir de la ecuación constitutiva de Hooke, la cual es escrita en términos de vectores de seis componentes, que se forman a partir de los seis elementos independientes de los tensores de esfuerzos y de elongación. Se estudia también el flujo de energía elástica, y se obtienen expresiones para la potencia instantánea transportada por las ondas elásticas y para la corriente de flujo de energía elástica. Adicionalmente, se toma la ecuación constitutiva de Hooke en componentes independientes y la segunda ley de Newton en su versión para medios continuos y se obtiene una ecuación de eigenvectores en forma matricial que contiene la información tanto del medio estratificado, como de las ondas elásticas que se propagan en él. Se proponen soluciones para tal ecuación, encontrándose que la solución general es la superposición de seis ondas, tres propagándose hacia adelante y tres propagándose hacia atrás. A partir de ello se obtiene una expresión para la matriz de transferencia, que es la que relaciona las amplitudes de las ondas incidentes y reflejadas con las amplitudes de las ondas transmitidas. Por último, se considera el caso de una onda elástica incidiendo normalmente en la superficie de un sólido helicoidal (que es un medio estratificado helicoidal), se toma la matriz

de la ecuación de eigenvalores y se encuentran sus valores propios. A partir de éstos se obtiene la relación de dispersión, es decir, la frecuencia de la onda en función del número de onda. Para graficar la relación anterior se toman en cuenta dos medios, el primero de ellos completamente anisotrópico y el segundo con simetría hexagonal, como resultado se observa un espectro de bandas fonónicas. Finalmente se calculan los vectores propios correspondientes.

Concluimos este trabajo reiterando nuestras contribuciones para lo cual describimos brevemente nuestra metodología. Asimismo se mencionan las posibles extensiones y perspectivas de este trabajo.

Capítulo 1

Propiedades de los cristales líquidos

1.1. Cristales líquidos termotrópicos

El término cristal líquido es utilizado para referirse a un tipo de materia que presenta propiedades tales como la fluidez de un líquido, pero al mismo tiempo sus propiedades ópticas son aquéllas que caracterizan a los cristales sólidos. También son conocidos de manera más apropiada como mesofases o fases mesomórficas.

Su estudio inició en el año de 1888 por el botánico austríaco F. Reinitzer, quién al estar investigando sobre ésteres colestéricos, observó dos puntos de fusión. A $145,5^{\circ}\text{C}$ “the cholesteryl benzoate” se fusionó de sólido a un líquido turbio y a $178,5^{\circ}\text{C}$ se tornó en un líquido claro. Un comportamiento inusual en los colores también fue observado; primero un color azul pálido apareció conforme el líquido se volvió turbio y después un color azul-violeta brillante conforme el líquido turbio se cristalizó. Reinitzer envió estas muestras al cristalógrafo alemán F. Lehmann, quién observó que dichas sustancias fluían como líquidos y exhibían propiedades ópticas como las de los cristales. Lehmann primero se refirió a ellos como *cristales fluyentes* y posteriormente utilizó el término “cristales líquidos”. [8] Tiempo después, a principios del siglo XX, otros personajes se fueron sumando para formar parte del desarrollo de los cristales líquidos. A continuación se enuncian algunos de los principales contribuyentes respecto al tema.

Año	Personaje	Aportación
1888	F. Reinitzer y F. Lehmann	Describen las propiedades insólitas de los cristales líquidos.
~1900	D. Voländer	Preparó varios centenares de nuevos cristales líquidos.
	J. Friedel	Propone la primera clasificación.
	S. Oseen y J. Zocher	Fundan una teoría de elasticidad.
~1930	V.K. Frederiks y V.N. Tsvetkov	Investigan propiedades eléctricas y ópticas

Como regla, una sustancia que presente el estado de cristal líquido debe ser fuertemente anisotrópica en algunas de sus propiedades y al mismo tiempo exhibir un cierto grado de fluidez que, en algunos casos podría ser comparable con la de un líquido ordinario. [9]

Con respecto a las moléculas que forman cristales sólidos, se sabe que en ellos, éstas están ordenadas mientras que en un líquido no lo están. La existencia de orden en un cristal es usualmente posicional y orientacional, es decir, las moléculas están condicionadas tanto a ocupar un espacio específico en la red del cristal como a tener su eje molecular apuntando en direcciones específicas. Contrario a esto, las moléculas en los líquidos se difunden de una manera desordenada a través del contenedor en que sea depositado, con los ejes moleculares desordenados en todas direcciones.

Ahora bien, si un material molecular compuesto de moléculas anisotrópicas es calentado en su fase sólida, existe la posibilidad de que en el punto de fusión, el orden posicional de las moléculas se pierda total o parcialmente y algún grado de orden orientacional se mantenga. En este caso, la fase que se obtiene es la llamada cristal líquido nemático (LC). En esta fase únicamente los ejes de las moléculas permanecen en promedio paralelos uno respecto a otro, dando lugar a una dirección preferencial en el espacio. Es conveniente describir la dirección local de alineamiento por un vector unitario \mathbf{n} , el director, el cual da en cada punto de la muestra, la dirección del eje preferencial.

Dependiendo de la estructura geométrica de las moléculas, los cristales líquidos pueden ser clasificados en dos grupos. Aquellos que están formados por

moléculas tipo barra son llamados *calamíticos*, mientras que los que están formados por moléculas en forma de disco son conocidos como *discóticos*.



Figura 1. Modelos de moléculas en cristales líquidos. A la izquierda moléculas tipo barra y a la derecha moléculas tipo disco.

Continuando con la clasificación de los cristales líquidos, se sabe que es posible llevar a cabo transiciones entre mesofases a través de dos formas diferentes. La primera de ellas implica un proceso meramente térmico que gobiernan a los cristales líquidos *termotrópicos*; la segunda involucra el uso de solventes y permite obtener cristales líquidos *liotrópicos*.

Únicamente se hará una breve descripción de los cristales líquidos termotrópicos porque en ellos están incluidos los cristales líquidos colestéricos y, como se mencionó en la introducción, estamos interesados en este tipo de materiales. La gran mayoría de cristales líquidos termotrópicos están compuestos de moléculas de tipo barra. Siguiendo la nomenclatura propuesta originalmente por Friedel, los termotrópicos se clasifican generalmente en tres tipos: *nemáticos*, *colestéricos* y *esméticos*. [10]

- **Nemáticos:** sus moléculas que poseen un alto grado de orden orientacional; pero no traslacional, como se muestra en la Figura 2. Dichas moléculas se orientan espontáneamente con sus ejes largos aproximadamente paralelos; sin embargo, para su estudio se considera que las moléculas se alinean en

una dirección general definida por el vector director \mathbf{n} . En general, las moléculas nemáticas son centrosimétricas, es decir, sus propiedades físicas son las mismas en las direcciones $+\mathbf{n}$ y $-\mathbf{n}$. Este tipo de mesofase posee fluidez al grado de que las moléculas se deslizan fácilmente una sobre la otra manteniendo aún su paralelismo.

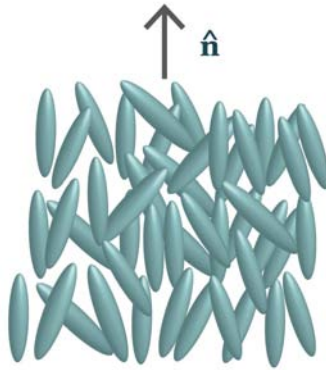


Figura 2. Arreglo molecular en un cristal líquido nemático.

- Colestéricos: también llamados nemáticos quirales (es decir que difieren de su imagen especular), son termodinámicamente equivalentes a un nemático uniaxial excepto que hay un giro quiral espontáneo en el director de manera que las moléculas tienden a alinearse en un arreglo helicoidal como se observa en la Figura 3. Esta estructura helicoidal puede presentar un giro hacia la derecha o hacia la izquierda dependiendo de la conformación molecular. El arreglo de las moléculas en este tipo de sustancias da lugar a propiedades ópticas únicas, tales como; reflexión selectiva de luz circularmente polarizada y un poder rotativo miles de veces mayor que el de una sustancia ordinaria con actividad activa. Un comportamiento de esta naturaleza ha sido observado en los ésteres colestéricos, de ahí que esta mesofase sea llamada colestérica.

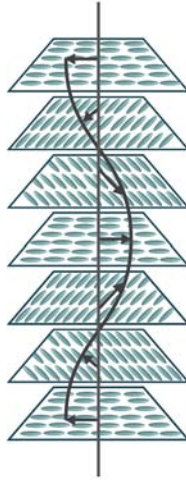


Figura 3. Moléculas de un cristal líquido colestérico.

- Esméticos: sus moléculas poseen orden posicional y forman estructuras estratificadas. Para cada estratificación hay varios arreglos moleculares posibles como puede apreciarse en la Figura 4. En los esméticos A las moléculas están ordenadas de forma vertical en cada capa, con sus centros espaciados irregularmente. Las atracciones entre capas son débiles comparadas con las fuerzas laterales entre moléculas y en consecuencia, es relativamente fácil que las capas se deslicen una sobre otra. Los esméticos C son una forma inclinada de los esméticos A, es decir, las moléculas están inclinadas con respecto a la capa normal. A parte de los tipos A y C, se conocen algunas otras modificaciones esmécticas, como aquellas que poseen alto grado de orden posicional tridimensional como en un cristal.

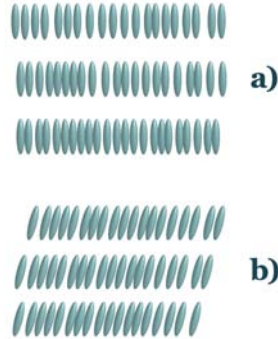


Figura 4. a) Moléculas en un cristal líquido Esméctico A. b) Moléculas en un cristal líquido Esméctico C.

Puesto que estamos interesados en el estudio de cristales líquidos colestéricos, se hará una descripción más detallada de este tipo de sustancias. Localmente, como en los nemáticos, no hay orden traslacional por parte de las moléculas, sin embargo la orientación molecular muestra un eje preferencial descrito por el director \mathbf{n} . La asimetría de las moléculas constituyentes genera una pequeña rotación gradual del director \mathbf{n} . Esta rotación gradual de \mathbf{n} describe una hélice que tiene un paso específico (periodo espacial) $p = \frac{2\pi}{q_0}$ dependiente de la temperatura, en donde q_0 representa el número de onda helicoidal; y su signo determina si el giro de la hélice se realiza hacia la derecha o hacia la izquierda. El paso p de la hélice es definido como la distancia longitudinal en la cual el ángulo de giro ha hecho una revolución completa de 360° . [8, 11] Puesto que el nemático quiral presenta un giro a lo largo de un eje preferencial, supongamos que ese eje (el de la hélice) coincide con el eje Z, como en el diagrama de la Figura 3, entonces \mathbf{n} tendría las siguientes componentes:

$$\begin{aligned}
 n_x &= \cos \theta \\
 n_y &= \sin \theta \\
 n_z &= 0 \\
 \theta &= q_0 z + \phi.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Para las expresiones anteriores de la hélice, tanto su eje (Z) como el valor de ϕ son arbitrarios. Los estados \mathbf{n} y $-\mathbf{n}$ son equivalentes como en cualquier cristal líquido uniaxial. La estructura es periódica a lo largo de z con período espacial L igual a la mitad del paso, es decir, $L = \frac{\pi}{|q_0|}$.

Esta clase de material puede obtenerse en placas delgadas de unos $100\mu\text{m}$ de espesor siempre y cuando las condiciones de frontera en ambos lados de las placas sean tangenciales. A este tipo de arreglo se le conoce como textura planar. Una forma de lograr la configuración anterior consiste en depositar el material entre una superficie de vidrio pulida y una superficie libre. En la superficie de vidrio, en donde $z = 0$, el ángulo $\theta(0)$ se fija de acuerdo a la dirección de pulido; en la superficie libre, i.e. en $z = d$, el ángulo $\theta(d)$ se ajusta libremente. La otra forma de obtener un cristal líquido colestérico implica tenerlo entre dos placas de vidrio pulidas, en este caso los dos ángulos ($\theta(0)$ y $\theta(d)$) quedan fijos. El paso de la hélice se ajustará dependiendo de la condición impuesta.

1.2. Densidad de energía libre

El orden existente en los cristales líquidos destruye la isotropía (todas las direcciones son equivalentes) e introduce la anisotropía (todas las direcciones no son equivalentes) en el sistema. Esta anisotropía se manifiesta en propiedades elásticas, eléctricas, magnéticas y ópticas del material. Muchas aplicaciones de los cristales líquidos termotrópicos dependen de sus propiedades físicas y de la manera en que responden a perturbaciones externas. Las propiedades físicas pueden ser propiedades escalares o no escalares. Dentro del primer conjunto se encuentran los parámetros de transición termodinámicos (refiriéndonos con ello a las posibles transiciones de mesofase), tales como la temperatura de transición, entropía de transición, cambios de entropía, entre otros. Los coeficientes dieléctricos, diamagnéticos, ópticos, elásticos y viscosos son propiedades no escalares importantes.

Nos limitaremos a tratar únicamente lo referente a coeficientes elásticos. Nuevamente, el orden existente en cristales líquidos tiene consecuencias interesantes en las propiedades mecánicas de estos materiales puesto que exhiben comportamiento elástico. Cualquier intento de deformar la alineación de los directores da como resultado una fuerza restitutiva elástica. Las constantes de proporcionalidad entre los esfuerzos de deformación y restauración son conocidas como constantes elásticas.

Consideremos un medio débilmente deformado, es decir, las variaciones en la orientación del director sólo se vuelven perceptibles arriba de una distancia

l_0 mucho mayor que a_0 (la distancia promedio entre moléculas).[8, 11] Estas deformaciones son fácilmente observadas ópticamente. El estado de deformación tiene asociada una energía libre (elástica o “distortion energy”) que depende completamente del director.

La energía libre asociada a las deformaciones resulta ser la energía libre de Helmholtz¹, esto debido a que los cristales líquidos son considerados sistemas isotérmicos cuyo volumen permanece inalterado.

Para describir la deformación de una fase nemática o colestérica a una temperatura fija T , es necesario utilizar el campo director $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Dado que $\frac{a_0}{l_0} \ll 1$ en cualquier punto, entonces las componentes del gradiente del director, i.e., $\nabla \mathbf{n} = \frac{\partial n_i}{\partial n_j} = n_{i,j}$ cumplen lo siguiente:

$$|n_{i,j}| \ll \frac{1}{a_0}. \quad (1.2)$$

La ecuación anterior (1.2) implica que el medio puede ser tratado como uno continuo y las distorsiones pueden ser descritas en términos de una teoría continua omitiendo los detalles de estructura en la escala molecular. La idea consiste en que una vez que el director es definido en algún punto, considerando sus pequeñas variaciones con la posición, éste puede ser definido en otros puntos por continuidad y la energía libre elástica puede ser expresada en términos de las constantes elásticas correspondientes a los posibles modos de deformación.

La densidad de energía libre para cristales líquidos nemáticos o colestéricos debe ser invariante bajo cualquier operación que preserve la orientación local de \mathbf{n} [12]. Por ejemplo, la invariancia ante la operación $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$, que es una operación de simetría que no afecta físicamente a las moléculas.

Para los nemáticos, la inversión central sobre cualquier punto y la rotación a lo largo de \mathbf{n} son operaciones de simetría que también preservan la orientación local de \mathbf{n} .

Sin embargo, en los colestéricos no se presenta la inversión central porque transformaría un colestérico con giro a la derecha en uno con giro a la izquierda. La invariancia bajo rotaciones de π alrededor del director \mathbf{n} , del eje de la hélice χ y del eje transversal $\tau = \chi \times \mathbf{n}$ preservan, en este caso la orientación local de \mathbf{n} .

Tanto en los nemáticos como en los coléstericos basta con desarrollar la densidad de energía libre a términos cuadráticos en $\nabla \mathbf{n}$, porque la restricción descrita en (1.2) establece que el gradiente de \mathbf{n} es muy pequeño.

¹La energía libre de Helmholtz (F) cumple la siguiente relación; $dF = -SdT + PdV$

Únicamente la divergencia y el producto interno con el rotacional de \mathbf{n} , es decir, $\nabla \cdot \mathbf{n} = n_{i,j}$ y $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} = \epsilon_{ijk} n_k n_i$ (donde ϵ_{ijk} es un tensor unitario antisimétrico conocido como el tensor de Levi-Civita) son escalares invariantes lineales en $n_{i,j}$ e invariantes bajo cualquier rotación; sin embargo $\nabla \cdot \mathbf{n}$ es impar en \mathbf{n} por lo que debe ser excluida de la expansión de la densidad de energía libre. Por otro lado, $(\nabla \cdot \mathbf{n})^2$ sí debe ser incluida para ambos: nemáticos y colestéricos. Respecto al otro escalar: $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{n}$ conviene hacer notar que cambia de signo bajo inversión de \mathbf{n} , por tanto sólo puede aparecer en la densidad de energía libre de un colestérico; pero no de un nemático. Finalmente, el escalar cuadrático invariante $(\nabla \times \mathbf{n})^2$ aparece en ambas mesofases.

De esta manera, la densidad de energía libre limitada a derivadas de primer orden, para el caso nemático está dada por la siguiente expresión:

$$f_{FO} = \frac{1}{2}K_1(\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}K_2(\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}K_3[\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})]^2. \quad (1.3)$$

Para la expresión anterior se utilizó la identidad $(\nabla \times \mathbf{n})^2 = (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + [\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})]^2$. La densidad de energía libre de la ecuación (1.3) es conocida como densidad de energía de Frank-Oseen con constantes elásticas de Frank K_1, K_2 y K_3 . [12] Estas constantes están asociadas con los tres tipos básicos de deformación: separación (splay), torsión (twist) y flexión o pandeamiento (bend), respectivamente.

Por la presencia del término $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}$, en la fase colestérica, la expresión para la densidad de energía libre está dada por:

$$f_{FO} = \frac{1}{2}K_1(\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}K_2(\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} + q_0)^2 + \frac{1}{2}K_3[\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})]^2. \quad (1.4)$$

en donde q_0 se definió previamente como el número de onda helicoidal. Para fines de notación, q_0 será positivo para un colestérico con giro a la derecha, y negativo para un colestérico con giro a la izquierda, considerando que el sistema coordenado es derecho.

Conviene mencionar que hay términos que fueron ignorados en las expresiones (1.3) y (1.4); sin embargo, si se quisiera estudiar tanto el bulto como la superficie del cristal líquido, sería conveniente incluirlos. Por tanto, los términos que representan la contribución de energía libre superficial son:

$$f_{13} + f_{24} = K_{13}\nabla \cdot (\mathbf{n}\nabla \cdot \mathbf{n}) - K_{24}\nabla(\mathbf{n}\nabla \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})), \quad (1.5)$$

en donde K_{13} es la constante elástica conocida como pandeamiento mixto (mixed splay bend), y K_{24} es el módulo de elasticidad de silla de montar (saddle splay).

La naturaleza de los términos f_{13} y f_{24} permite representar la integral de volumen $\int(f_{13} + f_{24})dV$ como una integral de superficie con ayuda del Teorema de Gauss. Las integrales de energía para f_{13} y f_{24} así como la integral $\int f_{FO}dV$ escalan en general linealmente con el tamaño del sistema deformado.[12] Por tanto, la funcional de energía libre total está dada por $\int(f_{FO} + f_{13} + f_{24})dV$; K_{13} y K_{24} no contribuyen a la energía del bulto; sin embargo, pueden contribuir a la energía e influir en el equilibrio del director a través de condiciones de frontera en la superficie.

Si consideramos ahora que el director tiene las siguientes componentes; $n_x = \cos \varphi$, $n_y = \sin \varphi$, $n_z = 0$, en donde estamos empleando coordenadas cilíndricas, notemos entonces que $\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{r}$ y $\nabla \times \mathbf{n} = 0$. A partir de lo anterior, los términos K_2 y K_3 en las expresiones (1.3) y (1.4) desaparecen y únicamente sobrevive el término K_1 , que es llamado módulo elástico de “splay” o de separación. La Figura 5a. muestra la representación geométrica de la constante de Frank K_1 .

Tomando ahora $n_x = \cos qz$, $n_y = \sin qz$, $n_z = 0$ como las componentes del director, el único término no nulo en las expresiones 1.3 y 1.4 es $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}$. La constante de Frank K_2 asociada con este término es llamada módulo elástico de “twist” o de torsión. En la Figura 5b. se aprecia la geometría de K_2 . En lo anterior, $q = \frac{\alpha}{d} = \frac{2\pi}{p} > 0$, α es el ángulo de giro en cada plano, d es el grosor del plano y p el paso del colestérico.

Por último, escribamos las componentes del director en coordenadas cilíndricas como: $n_x = \sin \varphi$, $n_y = \cos \varphi$, $n_z = 0$. De esta manera, el único término que no desaparece es $\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})$. Este término queda asociado con la constante de Frank K_3 que se conoce como módulo elástico de “bend” o de flexión, y se muestra en la Figura 5c. Dicha constante tiene un significado geométrico preciso, $\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})$ es un vector normal a la envolvente del campo director, y su longitud ($|\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})| = \frac{1}{r}$) es la curvatura.

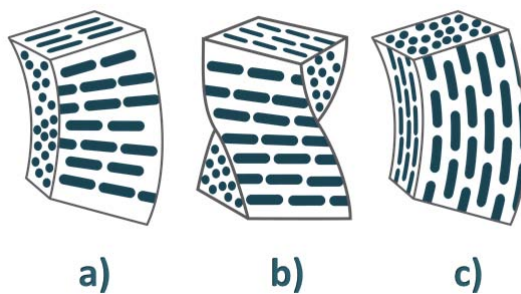


Figura 5. Representación geométrica de los módulos elásticos; a) K_1 , módulo elástico de separación (splay); b) K_2 , módulo elástico de torsión (twist); c) K_3 , módulo elástico de pandeamiento (bend).

Capítulo 2

Teoría de la Elasticidad

En el capítulo previo se mencionó que la anisotropía de los cristales líquidos se manifiesta en sus propiedades elásticas, eléctricas, magnéticas y ópticas; y estas propiedades se ven alteradas cuando el material sufre perturbaciones externas. En lo que a nosotros concierne, nos interesa únicamente estudiar lo relacionado con las propiedades elásticas del material. En el presente capítulo se tratarán conceptos fundamentales de la Elasticidad con el propósito de estudiar posteriormente a un sólido elástico helicoidal, dicho material se construye al hacer girar un sustrato sobre el cual serán depositadas capas delgadas de un material sólido anisotrópico.[21]

Los sistemas que se estudian en Elasticidad son macroscópicos y están formados por moléculas, es decir por elementos discretos. Sin embargo, los detalles del comportamiento de estos elementos discretos no interesan en la descripción fenomenológica que se va a realizar, entonces se considera a los sistemas como medios continuos. Esto significa que al hablar de un punto en el sistema, de hecho se está haciendo referencia a un elemento de volumen o de área, según el caso, que es grande comparado con el tamaño de las moléculas y pequeño desde el punto de vista macroscópico. [13]

2.1. Tensor de elongación

Al considerar cuerpos sólidos y aplicar fuerzas sobre ellos, éstos presentan cambios en su forma y volumen. Si se separa la traslación y rotación sin movimiento relativo entre sus partes, entonces los desplazamientos entre diferentes

puntos del cuerpo únicamente serán debidos a las deformaciones. Consideremos un punto particular P en un cuerpo que ha sido deformado, como se muestra en la Figura 6, y designemos a \mathbf{r} (con coordenadas $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) como el vector de posición de dicho punto antes de ser deformado; y a \mathbf{r}' (con coordenadas $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = z'$) como la posición del punto después de la deformación.

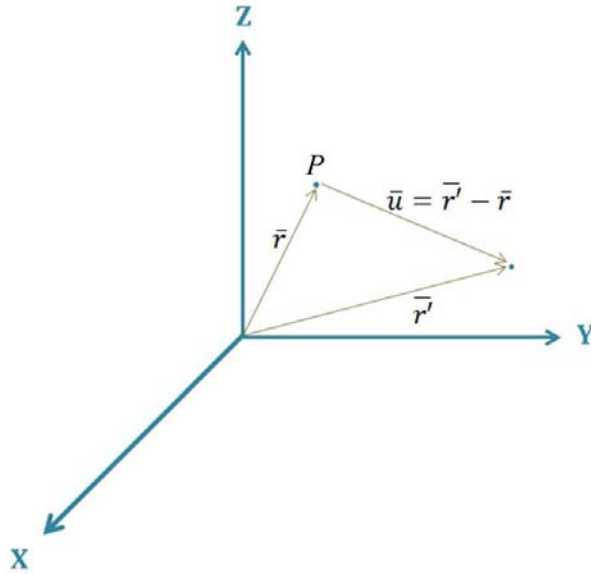


Figura 6. Desplazamiento \mathbf{u} de un punto en un cuerpo debido a que ha sufrido una deformación.

Entonces el desplazamiento que ha sufrido dicho punto debido a la deformación será denotado por \mathbf{u} :

$$u_i = x'_i - x_i. \quad (2.1)$$

El vector \mathbf{u} es conocido como el vector de desplazamiento, y por supuesto u_i son las componentes de tal vector. Consideremos ahora dos puntos que están muy cerca entre sí. Cuando el cuerpo es deformado la distancia entre estos puntos cambia. Si el vector que une a esos puntos antes de la deformación lo denotamos como dx_i , entonces el vector que une a esos mismos puntos después de la deformación en el cuerpo deformado será: $dx'_i = dx_i + du_i$. La

distancia entre los puntos será entonces: $dl^2 = dx_i dx_i$ antes de la deformación y $dl'^2 = dx'_i dx'_i = (dx_i + du_i)^2$ después de la deformación. Escribiendo los desplazamientos infinitesimales como $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ podemos reescribir dl'^2 de la siguiente manera:

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_k dx_j. \quad (2.2)$$

De la expresión anterior notemos que $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ es un tensor de segundo orden, por tanto puede descomponerse en un parte simétrica y una antisimétrica, es decir:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.3)$$

Dicho lo anterior, si expresamos el segundo término de la derecha de la ecuación (2.2) en su forma simétrica explícita (despreciando el segundo término puesto que corresponde a rotaciones[13]) e intercambiamos los sufijos i y j del tercer término de la derecha de esa misma ecuación, entonces la expresión final para dl'^2 es:

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k \quad (2.4)$$

en donde el tensor u_{ik} se define como:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (2.5)$$

y es llamado el *tensor de elongación*. La expresión (2.5) da el cambio en un elemento de longitud cuando el cuerpo es deformado.[14]

En la práctica la mayoría de las elongaciones son pequeñas, esto significa que el cambio en cualquier distancia en el cuerpo es pequeña comparada con las dimensiones del cuerpo. Por tanto, si un cuerpo es sujeto a una pequeña deformación, entonces todas las componentes del tensor de elongación serán pequeñas. El vector de desplazamiento u_i también será pequeño excepto para casos especiales como deformaciones en varillas delgadas o elastómeros. Considerando únicamente los casos en que u_i y sus derivadas son pequeños para deformaciones pequeñas, podemos entonces despreciar el último término en la expresión general (2.5) por ser de segundo orden. Finalmente, para deformaciones pequeñas el tensor de elongación está dado por:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.6)$$

Notemos que la ecuación anterior (2.6) corresponde a la primera parte de la ecuación (2.3), es decir, a la parte simétrica. De ahí que el tensor de elongación sea un tensor simétrico:

$$u_{ik} = u_{ki}. \quad (2.7)$$

2.2. Tensor de esfuerzos

El arreglo molecular en un cuerpo que no presenta deformaciones corresponde a un estado de equilibrio termodinámico. En este caso todas las partes del cuerpo están en equilibrio mecánico. Lo anterior significa que si se considera alguna porción del cuerpo, la resultante de las fuerzas en esa porción será cero.

Al ocurrir una deformación, el arreglo de las moléculas cambia y por tanto el cuerpo deja de estar en su estado de equilibrio original. Como consecuencia de ello, surgen fuerzas que tienden a restablecer el estado de equilibrio del cuerpo. Dichas fuerzas, que aparecen únicamente cuando el cuerpo sufre una deformación, son llamadas esfuerzos internos. Los esfuerzos internos son debidos a fuerzas moleculares y son resultado de fuerzas de corto alcance (en la teoría de elasticidad, las fuerzas que tienen rango de acción muy corto son las fuerzas moleculares), es decir, de aquellas que solamente actúan en la vecindad de algún punto. De aquí se sigue que las fuerzas ejercidas sobre cualquier parte de un cuerpo actúan únicamente en la superficie de esa parte. [14]

Consideremos ahora la fuerza total en alguna porción del cuerpo. Ésta es igual a la suma de todas las fuerzas sobre todos los elementos de volumen en esa porción del cuerpo y puede escribirse como la integral de volumen: $\int \mathbf{F} dV$. Entonces, la fuerza total puede ser vista como la suma de las fuerzas ejercidas sobre la porción del cuerpo que se está estudiando; dichas fuerzas son generadas por las porciones que se encuentran alrededor de la porción del cuerpo en cuestión. Por tanto, para cualquier parte del cuerpo, cada una de las tres componentes $\int F_i dV$ de la resultante de los esfuerzos internos puede ser transformada en una integral sobre la superficie. Del cálculo vectorial sabemos que la integral de un escalar sobre un volumen arbitrario puede ser transformado en una integral sobre la superficie que limite al volumen, si ese escalar es la divergencia de un vector. En este caso tenemos la integral de un vector y no de un escalar. Por tanto, el vector F_i debe ser la divergencia de un tensor de rango dos, es decir:

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.8)$$

Finalmente, de (2.8) se sigue que la fuerza sobre cualquier volumen puede escribirse como una integral sobre la superficie cerrada que contiene a dicho volumen:

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} n_k dS = \oint F_i \cdot \hat{n} ds. \quad (2.9)$$

En donde σ_{ik} es llamado el *tensor de esfuerzos*. De (2.9) notemos que $\sigma_{ik} n_k$ es la i ésima componente de la fuerza en el elemento de superficie dS , dicho en otras palabras, es la i ésima componente de la denominada fuerza superficial, que se escribe como

$$\mathbf{F}_s = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.10)$$

Al tomar elementos de área en los planos xy , yz , zx , encontramos que la componente σ_{ik} del tensor de esfuerzos es la i ésima componente de la fuerza por unidad de área perpendicular al eje x_k . Particularmente, la fuerza por unidad de área perpendicular al eje x , normal al área (a lo largo del eje x), es σ_{xx} y la fuerzas tangenciales (a lo largo de los ejes y y z) son σ_{yx} y σ_{zx} .

La representación matricial del tensor de esfuerzos es de la siguiente manera:

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Los elementos de la diagonal son conocidos como *esfuerzos normales* y los elementos fuera de la diagonal son los llamadas *esfuerzos cortantes* o *de cizallamiento*.

En los párrafos anteriores únicamente nos hemos ocupado de las fuerzas de corto alcance o fuerzas superficiales; sin embargo existen fuerzas que actúan sobre todo el cuerpo y son conocidas como fuerzas volumétricas. Dentro de ellas se encuentran la fuerza gravitacional, las eléctricas, magnéticas, inerciales, etc. Para referirnos a estas últimas escribiremos ρF_v , donde ρ representa la densidad y F_v la fuerza por unidad de masa.

Si tomamos ahora un elemento de volumen V de un cuerpo, en donde están actuando tanto fuerzas superficiales como volumétricas, entonces la condición de equilibrio para dicho cuerpo será una fuerza total nula actuando sobre él. Lo anterior puede expresarse de la siguiente manera:

$$\int_V \rho \mathbf{F}_v dV + \int_S \mathbf{F}_s ds = 0. \quad (2.12)$$

O bien, tomando (2.9) podemos reescribir (2.12) como :

$$\int_V \left(\rho F_{v_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) dV. \quad (2.13)$$

Debido a que el volumen V es arbitrario, también se cumple que:

$$\rho F_{v_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.14)$$

la ecuación anterior garantiza la existencia de equilibrio traslacional y resulta ser la segunda ley de Newton en equilibrio en su versión para medios continuos. De manera general se cumple que

$$\rho F_{v_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Puesto que las fuerzas de superficie no son uniformes, es decir, varían de punto a punto en el cuerpo en cuestión, puede entonces existir una torca interna y puede también una torca externa actuar sobre el cuerpo. Por lo anterior se debe imponer una condición de equilibrio rotacional, lo cual implica que la torca debe anularse, es decir, de (2.12) se sigue que:

$$\int \epsilon_{ijk} \rho x_j F_{v_k} dV + \int_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{km} n_m dS = 0. \quad (2.16)$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia al segundo término de la ecuación anterior y tomando en cuenta que el símbolo de Levi-Civita es constante obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{km} n_m dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_m} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{km}) dV \\ &= \int_V \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{km}}{\partial x_m} dV + \int_V \epsilon_{imk} \sigma_{km} dV. \end{aligned}$$

Utilizando (2.14) en el primer término de la ecuación anterior y sustituyendo en (2.16) llegamos a la siguiente expresión:

$$\int_V \epsilon_{ijk} \rho x_j F_{v_k} dV + \int_V \epsilon_{ijk} x_j (-\rho F_{v_k}) dV + \int_V \epsilon_{imk} \sigma_{km} dV = 0 \quad (2.17)$$

de donde se sigue que:

$$\int_V \epsilon_{imk} \sigma_{km} dV = 0. \quad (2.18)$$

Puesto que el volumen V considerado es arbitrario, entonces:

$$\epsilon_{imk} \sigma_{km} = 0. \quad (2.19)$$

Además, como ϵ_{imk} es un tensor antisimétrico (ya que cualquier intercambio de dos de sus índices provoca un cambio de signo), entonces σ_{km} debe ser un tensor simétrico para que haya equilibrio rotacional, es decir, para que se cumpla la condición (2.16). Por tanto:

$$\sigma_{km} = \sigma_{mk}. \quad (2.20)$$

2.3. Termodinámica de las deformaciones

Consideremos ahora un cuerpo deformado; y consideremos también que la deformación es tal que el vector de desplazamiento u_i cambia únicamente en una pequeña cantidad δu_i . A partir de lo anterior queremos determinar el trabajo hecho por los esfuerzos internos como consecuencia de dicha deformación, para ello tomemos la fuerza de la expresión (2.8) y multipliquémosla por el desplazamiento δu_i , al integrar sobre el volumen del cuerpo obtendremos:

$$\int dW = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dV. \quad (2.21)$$

Tomando en cuenta la siguiente igualdad $\frac{\partial \sigma_{ik} \delta u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i + \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k}$ y sustituyendo el primer término de la derecha de esta expresión en (2.21) tenemos que:

$$\int dW = \int \frac{\partial \sigma_{ik} \delta u_i}{\partial x_k} dV - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV$$

aplicando el Teorema de la Divergencia al primer término del lado derecho de la expresión anterior, ésta se reescribe de la siguiente manera:

$$\int dW = \oint \sigma_{ik} \delta u_i n_k dS - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV.$$

Si consideramos que el medio en cuestión es un medio infinito, el cual no es deformado en infinito, entonces hacemos que la superficie de integración del

primer término tienda a infinito, lo que implica que $\sigma_{ik} = 0$ en la superficie y por tanto la primera integral es cero. Puesto que el tensor de esfuerzos σ_{ik} es simétrico, entonces la segunda integral puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \int dW &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dV \\ &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV \end{aligned}$$

utilizando la expresión (2.6), finalmente encontramos

$$dW = -\sigma_{ik} \delta u_{ik}. \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) nos da el trabajo por unidad de volumen en términos del cambio en el tensor de elongación.

De ahora en adelante tomemos en cuenta que las únicas deformaciones que sufre el cuerpo son elásticas, es decir, son tales que permiten que el cuerpo regrese a su estado original. Además, estamos considerando que este proceso de deformación es un proceso termodinámico reversible, por lo que el estado del cuerpo quedará expresado en términos de variables termodinámicas. Considerando la energía interna U y la entropía S , ambas por unidad de volumen, podemos escribir la ecuación TdS :

$$dU = TdS - dW. \quad (2.23)$$

Sustituyendo la expresión del trabajo (2.22) obtenemos:

$$dU = TdS + \sigma_{ik} du_{ik} \quad (2.24)$$

en donde $U = U(S, u_{ik})$. Si elegimos a la temperatura T y al tensor de elongación u_{ik} como variables independientes, entonces podemos utilizar a la energía libre de Helmholtz F ¹ como el potencial termodinámico que permitirá describir al sistema, es decir:

$$F = U - TS$$

¹La energía libre de Helmholtz (F) satisface la relación $dF = -SdT + PdV$, la cual implica que la temperatura y el volumen deben permanecer constantes. El sistema que estamos considerando, es decir, el cuerpo deformado es un sólido isotérmico y por supuesto incompresible. Por ello, para describirlo se utiliza este tipo de energía.

con $F = F(u_{ik}, T)$. Tomando la diferencial de F y utilizando la ecuación (2.24), obtenemos :

$$\begin{aligned} dF &= dU - TdS - SdT \\ &= \sigma_{ik}du_{ik} - SdT. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Por otro lado,

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T du_{ik} + \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{u_{ik}} dT \quad (2.26)$$

y se cumple que:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T, \quad S = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{u_{ik}}. \quad (2.27)$$

Si consideramos un proceso isotérmico, es decir, $T = 0$ entonces notemos que:

$$dF = \sigma_{ik}du_{ik},$$

$$\text{y también } dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T du_{ik}.$$

Por tanto, si σ_{ik} es una función lineal de u_{ik} , i.e. $\sigma_{ik} = \lambda u_{ik}$, entonces $F = F(\lambda u_{ik})$ y además:

$$dF = \lambda u_{ik} du_{ik}. \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) indica que F es una función homogénea de Euler de orden 1 en u_{ik} y por tanto:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right) u_{ik} \\ \text{o bien} \quad F &= \frac{1}{2} \sigma_{ik} u_{ik}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

en donde se utilizó la definición de función homogénea de orden n^2 , se derivó a la función $F(\lambda u_{ik})$ respecto a λ y finalmente se consideró $\lambda = 1$.

Ahora, escribamos al tensor de esfuerzos como:

$$\sigma_{ik} = \lambda_{ikmn} u_{mn} \quad (2.30)$$

en donde λ_{ikmn} debe ser un tensor de orden 4 puesto que relaciona a dos tensores de segundo orden. La ecuación (2.30) representa la relación constitutiva entre

²Por definición, una función homogénea de orden n satisface la siguiente igualdad: $f(\alpha \bar{v}) = \alpha^n f(\bar{v})$

el tensor de esfuerzos y el de elongación y es conocida como la Ley generalizada de Hooke para un medio elástico continuo lineal, además λ_{ikmn} es denominado el tensor de elasticidad o de rigidez.

De las expresiones (2.29) y (2.30) podemos reescribir al potencial termodinámico (energía libre de Helmholtz) F , como:

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{ikmn} u_{mn} u_{ik}. \quad (2.31)$$

La ecuación anterior asegura la existencia del potencial elástico, lo que significa que existe una función F , cuadrática en las componentes del tensor de elongación y además dependiente únicamente de las deformaciones, más no de la trayectoria seguida para llegar al estado deformado. [13]

Aún hay más que decir respecto a la función F . Como podemos notar, F depende únicamente de las componentes del tensor de elongación; además es un función continua y diferenciable al menos hasta según orden C^2 , entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{ik} \partial u_{mn}} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_{mn} \partial u_{ik}} \quad (2.32)$$

es decir, las segundas derivadas cruzadas son iguales, lo que implica que $\lambda_{ikmn} = \lambda_{mnik}$. Entonces, en un medio continuo tridimensional, el tensor de elasticidad debería tener $3^4 = 81$ componentes que podrían ser acomodadas en una matriz de 9×9 ; sin embargo la existencia de la simetría implica que de los elementos fuera de la diagonal, es decir, $81 - 9 = 72$, únicamente la mitad son independientes. Notemos entonces que la existencia del potencial conlleva a que el tensor de elasticidad esté formado por 36 componentes independientes que pueden escribirse como las entradas C_{ik} de una matriz de 6×6 , análogamente, dejando de lado la diagonal se tendrán $36 - 6 = 30$ módulos. Si tomamos en cuenta que tanto el tensor de esfuerzos como el tensor de elongación son simétricos, entonces solamente $\frac{30}{2} = 15$ serán los módulos elásticos independientes de la matriz con entradas C_{ik} .

Por tanto, la matriz con entradas C_{ik} conectará las seis componentes independientes del tensor de esfuerzos con las seis componentes independientes del tensor de elongación como se muestra en seguida:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ 2u_{xy} \\ u_{yy} \\ 2u_{xz} \\ 2u_{yx} \\ u_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Las ecuaciones (2.33) son la forma matricial de las ecuaciones esfuerzo-elongación para un medio general elástico que obedece la Ley de Hooke.

Notemos que el factor 2 que aparece en las componentes fuera de la diagonal del tensor de elongación en las ecuaciones (2.33) es resultado de la simetría de dicho tensor, pues éstos términos aparecen dos veces en la suma del lado derecho de la ecuación (2.30).[15] En una notación más concisa, es posible escribir las ecuaciones (2.33) como:

$$\bar{\sigma}_i = C_{ik} \bar{u}_k \quad (2.34)$$

en donde $\bar{\sigma}_i$ y \bar{u}_k son matrices de una columna con seis entradas, formadas por las componentes independientes del tensor de esfuerzos y del tensor de elongación respectivamente; y las entradas C_{ik} son los módulos elásticos. Es importante notar que el número máximo de módulos elásticos independientes es 21 y corresponden a un medio continuo muy general, sin embargo, si el medio continuo considerado posee simetrías particulares, entonces el número de módulos elásticos independientes podrá reducirse. Los módulos elásticos son obtenidos experimentalmente. En este trabajo se considerará el medio más general posible, es decir, aquél que es anisotrópico y cuyos 21 módulos elásticos son diferentes.

2.4. Energía libre para un sistema homogéneo e isótropo

Consideremos ahora un cuerpo isotrópico de manera que sus deformaciones sean pequeñas. Lo que queremos encontrar ahora es la energía libre asociada a tal cuerpo. De la ecuación (2.31) notemos que la energía libre es función de u_{ik} por lo que podemos expandir F en potencias de este último.

Al considerar un cuerpo deformado a cierta temperatura (constante en todo el cuerpo), tenemos que considerar también que el estado sin deformación es aquél en que el cuerpo está en ausencia de fuerzas externas y a esa misma

temperatura. Entonces, para $u_{ik} = 0$, los esfuerzos internos también son cero, i.e., $\sigma_{ik} = 0$. La expresión (2.27) muestra que $\sigma_{ik} = \partial F / \partial u_{ik}$, de ahí se sigue que no hay término lineal en la expansión de F en potencias de u_{ik} . [14] Puesto que la energía libre es un escalar, cada término en la expansión de F debe ser también un escalar. Hay dos maneras de obtener escalares de segundo grado de las componentes del tensor simétrico u_{ik} ; tomando el cuadrado de la suma de las componentes de la diagonal (u_{ii}^2) y la suma de los cuadrados de todas las componentes (u_{ik}^2). Por tanto, la energía libre F expandida hasta segundo orden en términos de u_{ik} es:

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \lambda u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2. \quad (2.35)$$

La ecuación (2.35) es la expresión general para la energía libre de un cuerpo isotrópico deformado. Las cantidades λ y μ son los coeficientes de Lamé.

Cualquier deformación en un cuerpo puede representarse como la suma de una cizalla pura (cambio de forma; pero no de volumen) y una compresión hidrostática (cambio de volumen; pero no de forma). [14] Lo anterior se representa mediante la siguiente identidad:

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \quad (2.36)$$

en donde el primer término representa una deformación de cizalla pura (puesto que la suma de su diagonal es cero); y el segundo término una compresión hidrostática.

Sustituyendo la expresión (2.36) en la ecuación (2.35) se obtiene una expresión general para la energía libre de un cuerpo isotrópico deformado, es decir:

$$F = \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2 + \frac{1}{2} K u_{ll}^2 \quad (2.37)$$

en donde el término constante F_0 ha sido omitido, pues representa la energía libre del cuerpo sin deformación; y lo que nos interesa es que F sea únicamente la energía libre de deformación (la energía libre elástica como es llamada).

La cantidad K en la ecuación (2.37) es el llamado módulo volumétrico o módulo de compresión hidrostática, mientras que μ es el módulo de cizallamiento o de rigidez.³ K está relacionada con los coeficientes de Lamé por medio de la siguiente expresión:

³Los módulos de compresión y rigidez son siempre positivos, $K > 0$, $\mu > 0$. Para una deformación ésto implica que hay un aumento en la energía elástica.

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (2.38)$$

Los coeficientes de Lamé están relacionados con el módulo de Young E y la constante de Poisson ν mediante:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} . \quad (2.39)$$

El módulo de Young también es conocido como módulo longitudinal y relaciona el esfuerzo normal σ_{ii} con la elongación u_{ii} . La constante de Poisson por su parte, es la razón de la compresión transversal respecto a la extensión longitudinal. Tanto E como ν dependen del material en cuestión.⁴

Por tanto, tomando las relaciones de (2.39) y sustituyendo en (2.37) podemos reescribir la energía libre como:

$$F = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(u_{ik}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ll}^2 \right). \quad (2.40)$$

Ahora vamos a utilizar la relación termodinámica general (2.27) para determinar el tensor de esfuerzos. Para calcular las derivadas $\partial F / \partial u_{ik}$, escribimos la diferencial total dF (para temperatura constante):

$$dF = \frac{E}{1+\nu} \left(u_{ik} du_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ll} du_{ll} \right) \quad (2.41)$$

pero, si escribimos a du_{ll} como $\delta_{ik} du_{ik}$, entonces tendríamos:

$$dF = \frac{E}{1+\nu} \left(u_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ll} \delta_{ik} \right) du_{ik} \quad (2.42)$$

y finalmente tenemos que el tensor de esfuerzos en términos del tensor de elongación es:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu} \left(u_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ll} \delta_{ik} \right). \quad (2.43)$$

La expresión es válida para medios isótropos y homogéneos; y es conocida como ecuación constitutiva o Ley de Hooke.

⁴El módulo de Young tiene unidades de Pa , mientras que la razón de Poisson es una constante adimensional y varía entre -1 (para $K = 0$) y $\frac{1}{2}$ (para $\mu = 0$); sin embargo en la práctica ν solamente varía entre 0 y $\frac{1}{2}$.

Los conceptos de la teoría de Elasticidad revisados en esta sección serán utilizados en los siguientes dos capítulos; primero para llevar describir la propagación de ondas elásticas en un medio isotrópico y posteriormente para realizar la descripción del medio estratificado.

Capítulo 3

Ondas elásticas en un medio isotrópico

Hemos estado considerando que las deformaciones en los cuerpos son pequeñas y también hemos estado suponiendo que estas deformaciones permanecen estáticas. Si en cambio ahora tomamos en cuenta que posibles variaciones temporales en las distorsiones de los cuerpos deformados, entonces los movimientos considerados por la teoría de elasticidad serán oscilaciones elásticas u ondas elásticas debido a las deformaciones pequeñas que sufren los cuerpos.

En este capítulo se considerará la propagación de ondas elásticas particularmente en la frontera entre dos medios isotrópicos.

3.1. Ecuaciones de equilibrio para cuerpos isotrópicos

Consideremos un sólido isotrópico sobre el cual actúan tanto fuerzas superficiales como volumétricas, entonces para que la fuerza total sea nula, se debe cumplir la condición de equilibrio (2.12) y como consecuencia también las relaciones (2.14). Ahora bien, si el cuerpo está en un campo gravitacional, entonces la fuerza volumétrica correspondiente sería $\mathbf{F}_v = \rho \mathbf{g}$, en donde ρ representa la densidad y \mathbf{g} es el vector de aceleración gravitacional, por lo tanto, se tiene :

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0. \quad (3.1)$$

Si tomamos la ecuación constitutiva (2.43) y derivamos respecto a x_k tendríamos:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} \quad (3.2)$$

sustituyendo al tensor de elongación como $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ llegaríamos a que las ecuaciones de equilibrio toman la forma:

$$\frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial k_k \partial x_k} + \frac{E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0. \quad (3.3)$$

La ecuación anterior puede reescribirse en notación vectorial. Notemos que las cantidades $\partial^2 u_i / \partial x_k \partial x_k$ son componentes del vector $\Delta \mathbf{u}$ y $\partial u_l / \partial x_l$ representa la $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Por tanto, las ecuaciones de equilibrio se convierten en:

$$\frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (3.4)$$

3.2. Ecuaciones de movimiento para medios elásticos isotrópicos

Vamos ahora a considerar que en el sólido isotrópico las deformaciones cambian con el tiempo y dan lugar a movimiento, es decir, hay oscilaciones elásticas u ondas elásticas. En este caso la temperatura en general no es constante, varía tanto en tiempo como en espacio; sin embargo, el calor transferido de una parte del cuerpo a otra ocurre muy lentamente por mera conducción térmica. Si el intercambio de calor durante intervalos de tiempo del orden del período de los movimientos oscilatorios en el cuerpo es despreciable, entonces, podemos considerar cualquier parte del cuerpo como térmicamente aislada, es decir, se tendrá un movimiento adiabático.

En las deformaciones adiabáticas los tensores de esfuerzos y de deformación permanecen inalterados; pero los valores del módulo de Young y la constante de Poisson deben ser reemplazados por sus valores adiabáticos¹. En lo que sigue se entenderá que E y ν toman sus correspondientes valores adiabáticos.

¹ $E_{ad} = E + \frac{E^2 T \beta^2}{9C_p}$, $\nu_{ad} = \nu + \frac{(1 + \nu) E T \beta^2}{9C_p}$. En donde C_p es el calor específico por unidad de volumen a presión constante y β representa el coeficiente térmico de dilatación volumétrico del cuerpo. Para el desarrollo de las expresiones anteriores ver referencia [14] pp. 14,15.

Las ecuaciones de movimiento para un medio elástico se obtienen al igualar la fuerza de tensión interna al producto de la aceleración (\ddot{u}_i) y la masa por unidad de volumen del cuerpo (la densidad), es decir la ecuación general de movimiento está dada por la ecuación (2.15); y en ausencia de fuerzas volumétricas se expresa como:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \ddot{u}_i. \quad (3.5)$$

Para un medio elástico isotrópico, la ecuación de movimiento puede escribirse en analogía con la ecuación (3.4) y (3.5), por lo que tendríamos:

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (3.6)$$

3.3. Onda elástica plana en un medio isotrópico infinito

Particularmente, analicemos el caso de una onda elástica plana en un medio isotrópico infinito, esto significa que tomaremos una onda en la cual la deformación \bar{u} únicamente es función de una coordenada (x , por ejemplo) y del tiempo. Por tanto, las derivadas respecto a y y z en la ecuación (3.6) son cero; y las ecuaciones para las componentes del vector \mathbf{u} son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Notemos que la ecuación para u_z es la misma que para u_y , por simplicidad vamos a tomar únicamente la ecuación para u_y .

De las ecuaciones (3.7) se definen los parámetros c_p y c_s como:

$$c_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}. \quad (3.8)$$

En consecuencia, las ecuaciones de movimiento para las componentes del vector \bar{u} se reescriben como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{3.9}$$

Las expresiones anteriores son ecuaciones de onda ordinarias en una dimensión y los parámetros c_p y c_s representan las velocidades de propagación de dicha onda.

Por tanto, una onda elástica está formada esencialmente por dos ondas que se propagan independientemente. Una de ellas (u_x) se propaga con velocidad c_p y su desplazamiento es en la dirección de propagación, este tipo de onda es llamada *longitudinal*. La otra onda (u_y, u_z) se propaga con velocidad c_s y su desplazamiento es un plano perpendicular a la dirección de propagación; ésta se conoce como *onda transversal*. Por consiguiente, c_p y c_s son las velocidades longitudinal y transversal respectivamente.

Las ondas longitudinales involucran compresiones y expansiones del cuerpo puesto que satisfacen que $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$. En las ondas transversales no hay componente u_x y las otras dos componentes no dependen ni de y ni de z , por tanto $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y no hay ningún cambio de volumen implicado.

Para cualquier onda elástica arbitraria es posible separar la onda en dos partes propagándose independientemente con diferentes velocidades. Reescribiendo la ecuación (3.6) en términos de las velocidades c_p y c_s tenemos:

$$\ddot{\mathbf{u}} = c_p^2 \Delta \mathbf{u} + (c_p^2 - c_s^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}).\tag{3.10}$$

Podemos escribir al vector \mathbf{u} como la suma de dos partes, es decir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s\tag{3.11}$$

en donde $\mathbf{u}_p = \nabla \phi \zeta$ y $\mathbf{u}_s = \nabla \times \mathbf{A}^3$, entonces se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\nabla \times \mathbf{u}_p = 0\tag{3.12}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0.\tag{3.13}$$

²El cambio de volumen en una deformación está dado por la suma de los términos de la diagonal del tensor de esfuerzos, es decir, por $u_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

³Siempre es posible representar a un vector como la suma del rotacional de un vector y el gradiente de un escalar. [22]

Sustituyendo la expresión para \mathbf{u} (3.11) en (3.10) obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{u}}_p + \ddot{\mathbf{u}}_s = c_t^2 \Delta (\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s) + (c_p^2 - c_s^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (3.14)$$

Tomando ahora la divergencia en ambos lados de la ecuación anterior y utilizando la ecuación (3.13) obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}_p &= c_s^2 \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}_p) + (c_p^2 - c_s^2) \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}_p) \\ \nabla \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_p - c_p^2 \Delta \mathbf{u}_p) &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Notemos que el rotacional de la expresión en paréntesis de (3.15) es también cero, lo anterior tomando en cuenta la ecuación (3.12). Entonces, si ambos, la divergencia y el rotacional de un vector son cero; ese vector tiene que ser exactamente cero. Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_p}{\partial t^2} - c_p^2 \Delta \mathbf{u}_p = 0. \quad (3.16)$$

Análogamente, al tomar el rotacional en ambos lados de la expresión (3.14) y utilizando la ecuación (3.12), llegamos a que:

$$\nabla \times (\ddot{\mathbf{u}}_s - c_s^2 \Delta \mathbf{u}_s) = 0. \quad (3.17)$$

La divergencia de la expresión en paréntesis de la ecuación anterior es cero y obtenemos una ecuación de la misma forma que (3.16), es decir:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \mathbf{u}_s = 0. \quad (3.18)$$

Las ecuaciones (3.16) y (3.18) son ecuaciones de onda ordinarias en tres dimensiones. Cada una representa la propagación de una onda elástica, con velocidad c_p y c_s respectivamente.

Para una onda elástica monocromática, el vector de desplazamiento está dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{u} = \text{Re} \{ \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \} \quad (3.19)$$

sustituyendo la expresión anterior en (3.10), vemos que \mathbf{u}_0 , que es función de las coordenadas satisface, la siguiente ecuación:

$$c_s^2 \Delta \mathbf{u}_0 + (c_p^2 - c_s^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) + \omega^2 \mathbf{u}_0 = 0. \quad (3.20)$$

Por otro lado, las partes longitudinal y transversal de una onda monocromática satisfacen las ecuaciones:[14]

$$\Delta \mathbf{u}_p + k_p^2 \mathbf{u}_p = 0, \quad \Delta \mathbf{u}_s + k_s^2 \mathbf{u}_s = 0 \quad (3.21)$$

en donde $k_p = \frac{\omega}{c_p}$ y $k_s = \frac{\omega}{c_s}$ son los números de onda de las ondas longitudinal y transversal respectivamente.

3.4. Reflexión y refracción de una onda plana, monocromática y elástica en un medio y una frontera plana

Revisemos ahora el caso en que una onda plana, elástica y monocromática incide en la frontera entre dos medios elásticos diferentes. Si tomamos en cuenta que una onda puramente longitudinal, o bien, puramente transversal incide en una superficie de separación, entonces se reflejará y transmitirá una onda mixta, es decir, una onda que contenga ambas partes: longitudinal y transversal. En general, la naturaleza de la onda cambia al reflejarse y transmitirse excepto en el caso de incidencia normal sobre la superficie de separación o cuando las oscilaciones de una onda transversal incidente son paralelas al plano de separación.

Si tomamos a θ y a θ' como los ángulos de incidencia y reflexión o bien refracción, respectivamente, y a c y c' como las velocidades de las ondas, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c}{c'} \quad (3.22)$$

es decir, se cumple la Ley de Snell a pares, la cual es una consecuencia de pedir la continuidad de las fases de los vectores de campo sobre la frontera entre ambos medios.

Como primer caso vamos a considerar que una onda longitudinal monocromática incide con un ángulo arbitrario θ_0 sobre la superficie de un cuerpo, dicha superficie está en la interfaz entre algún medio elástico (acero) y vacío, como se muestra en la Figura 7.

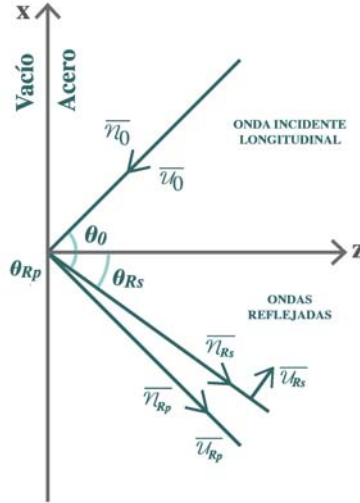


Figura 7. Onda longitudinal monocromática incidiendo a un ángulo θ_0 sobre una superficie que separa a un medio elástico del vacío; y las respectivas ondas reflejadas

En el momento en que la onda se refleja, su naturaleza se altera, es decir, pasa de ser una onda longitudinal a descomponerse en otra longitudinal y una transversal. Los vectores \mathbf{n}_0 , \mathbf{n}_{Rp} y \mathbf{n}_{Rs} son los vectores unitarios en la dirección de propagación de las ondas incidente, longitudinal reflejada y transversal reflejada, sus componentes explícitas en base a la Figura 7 son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_0 &= (-\sin \theta_0, 0, -\cos \theta_0) \\
 \mathbf{n}_{Rp} &= (-\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0) \\
 \mathbf{n}_{Rs} &= (-\sin \theta_{Rs}, 0, \cos \theta_{Rs})
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

en donde el ángulo de incidencia θ_0 y el ángulo reflejado longitudinal θ_{Rp} cumplen la siguiente relación:

$$\theta_0 = \theta_{Rp},
 \tag{3.24}$$

es decir, dichos ángulos son iguales debido a la naturaleza de la onda incidente. Además, el ángulo de incidencia y el reflejado transversal están relacionados por:

$$\sin \theta_{Rs} = (c_s/c_p) \sin \theta_0. \quad (3.25)$$

Las expresiones (3.24) y (3.25) son consecuencia de la ecuación (3.22).

Por otro lado, \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_{Rp} y \mathbf{u}_{Rs} son los correspondientes vectores de desplazamiento; tanto \mathbf{u}_0 como \mathbf{u}_{Rp} son paralelos a \mathbf{n}_0 y a \mathbf{n}_{Rp} respectivamente; pero $\mathbf{u}_{Rs} = \mathbf{a} \times \mathbf{n}_{Rs}$, en donde $\mathbf{a} = (0, 1, 0)$ es un vector unitario, perpendicular al plano de incidencia. Entonces, tomando en cuenta lo anterior, el desplazamiento total en el cuerpo está dado por la superposición de la onda incidente y las ondas reflejadas de los dos tipos. Todas ellas planas y monocromáticas, es decir

$$\mathbf{u} = A_0 \mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + R_p \mathbf{u}_{Rp} e^{i\mathbf{k}_{Rp} \cdot \mathbf{r}} + R_s \mathbf{u}_{Rs} e^{i\mathbf{k}_{Rs} \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.26)$$

En la expresión anterior se ha omitido el factor común $e^{-i\omega t}$, por brevedad. Las magnitudes de los vectores de onda son $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_{Rp} = \omega/c_p$ y $\mathbf{k}_{Rs} = \omega/c_s$. Sustituyendo esto en la expresión (3.26) podemos reescribir el desplazamiento total del cuerpo como:

$$\mathbf{u} = A_0 \mathbf{n}_0 e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}}{c_p}} + R_p \mathbf{n}_{Rp} e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_{Rp} \cdot \mathbf{r}}{c_p}} + R_s (\mathbf{a} \times \mathbf{n}_{Rs}) e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_{Rs} \cdot \mathbf{r}}{c_s}}. \quad (3.27)$$

Las componentes u_{xx} , u_{zz} y u_{zx} del tensor de elongación en la frontera, es decir, en $z = 0$ las obtenemos a partir de la expresión (2.6) y son:

$$u_{xx}|_{z=0} = \frac{i\omega}{c_p c_s} [(A_0 + R_p) c_s \sin^2 \theta_0 - R_s c_p \cos \theta_{Rs} \sin \theta_{Rs}] \quad (3.28)$$

$$u_{zz}|_{z=0} = \frac{i\omega}{c_p c_s} [(A_0 + R_p) c_s \cos^2 \theta_0 + R_s c_p \cos \theta_{Rs} \sin \theta_{Rs}] \quad (3.29)$$

$$u_{zx}|_{z=0} = \frac{i\omega}{2c_p c_s} [(A_0 - R_p) c_s \sin 2\theta_0 + R_s c_p \cos 2\theta_{Rs}] \quad (3.30)$$

y la traza es:

$$u_{ll} = \frac{i\omega (A_0 + R_p)}{c_p}. \quad (3.31)$$

Nuevamente se está omitiendo el factor común $e^{-\frac{i\omega x \sin \theta_0}{c_p}}$ debido a que como mencionamos anteriormente, hemos pedido la continuidad de las fases. Ahora, para escribir las componentes del tensor de esfuerzos es conveniente sustituir las expresiones (3.8) en la ecuación (2.43), por lo que la ecuación constitutiva quedará ahora en términos de las velocidades de las ondas, es decir:

$$\sigma_{ik} = 2\rho c_s^2 u_{ik} + \rho (c_p^2 - 2c_s^2) u_{ll} \delta_{ik}. \quad (3.32)$$

Las condiciones de frontera en la superficie libre del medio son $\sigma_{ik} n_k = 0$, esto garantiza que dicha superficie que separa a los dos medios no está sometida a ninguna fuerza normal ni de cizallamiento, por consiguiente se debe cumplir que,

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \sigma_{zx}|_{z=0} = 0. \quad (3.33)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones generado a partir de las condiciones de frontera anteriores y utilizando las relaciones entre los ángulos de las ecuaciones (3.24) y (3.25), se obtienen expresiones para las amplitudes de las ondas reflejadas como función de la amplitud y el ángulo de incidencia de la onda incidente. Las expresiones explícitas de estas amplitudes se ven como;

$$R_p = -A_0 \frac{\cos^2(2 \arcsin(q \sin \theta_0)) - q^2 \sin 2\theta_0 \sin(2 \arcsin(q \sin \theta_0))}{\cos^2(2 \arcsin(q \sin \theta_0)) + q^2 \sin 2\theta_0 \sin(2 \arcsin(q \sin \theta_0))} \quad (3.34)$$

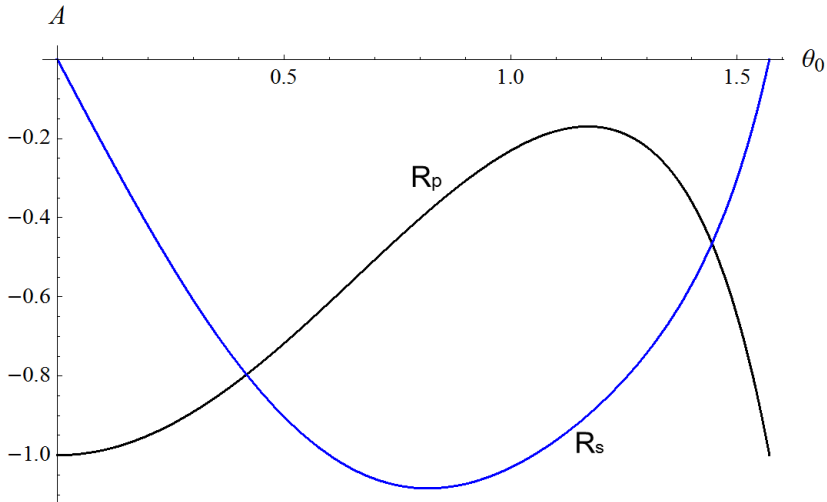
$$R_s = \frac{-2A_0 q \cos(2 \arcsin(q \sin \theta_0)) \sin 2\theta_0}{\cos^2(2 \arcsin(q \sin \theta_0)) + q^2 \sin 2\theta_0 \sin(2 \arcsin(q \sin \theta_0))} \quad (3.35)$$

en donde $q = c_s/c_p$ es la razón entre velocidades transversal y longitudinal.

Para $\theta_0 = 0$, es decir, en incidencia normal, se tendría que $R_p = -A_0$ y $R_s = 0$, es decir, la onda se reflejaría como una onda puramente longitudinal.

Puesto que queremos graficar las amplitudes dadas por las ecuaciones (3.34) y (3.35) entonces debemos utilizar las expresiones (3.8) para las velocidades y sustituir el módulo de Young y la constante de Poisson por sus valores adiabáticos. Estamos considerando que el medio en donde incide la onda es acero, por tanto los parámetros que se tomaron en cuenta para obtener los valores adiabáticos del módulo de Young y la constante de Poisson fueron los siguientes; $E = 210 \times 10^9 Pa$ [16], $\nu = 0,293$ [16], $\beta = 7 \times 10^{-7} K^{-1}$ [16] y

$C_p = 4,5 \times 10^6 J/m^3 K^4$. Finalmente, las amplitudes de las ondas reflejadas como función del ángulo de incidencia se muestran en la Gráfica 1.



Gráfica 1. Amplitudes de las ondas reflejada longitudinal (R_p) y reflejada transversal (R_s) en función del ángulo de incidencia θ_0 .

En la gráfica anterior se está considerando que la amplitud de la onda incidente es la unidad, es decir, $A_0 = 1$. Se puede observar que efectivamente en incidencia normal, $R_s = 0$ y $R_p = -1$. Aquí, el signo está asociado con el cambio de fase de $-\pi$ de la onda reflejada. Otro punto notable de estos espectros es la presencia de un mínimo en la magnitud de R_p para θ_0 alrededor de $1,2 \simeq 69^\circ$, en donde la onda longitudinal reflejada exhibe su menor amplitud; y un punto notable más, cerca de $\theta_0 \simeq 0,8 \simeq 45^\circ$ es en donde la onda transversal generada por la reflexión obtiene su máxima amplitud. La posición específica de ambos puntos depende del parámetro q , el cual es sólo una función de la razón de Poisson del medio.

El siguiente caso es similar al que acabamos de revisar, con la diferencia de que en lugar de tener vacío ahora la superficie estará en la interfaz entre dos medios elásticos (cobre y acero). Nuevamente la onda incidente será una onda longitudinal; pero ahora se tendrán tanto ondas reflejadas como transmitidas

⁴ C_p representa el calor específico por unidad de volumen a presión constante, dicho valor fue obtenido al multiplicar $c_p = 573 J/kg K$ [17] por la densidad del acero $\rho = 7830 kg/m^3$ [16].

(al transmitirse la onda, su naturaleza se altera y se generan tanto una onda longitudinal como una transversal), ésto se muestra en el diagrama de la Figura 8.

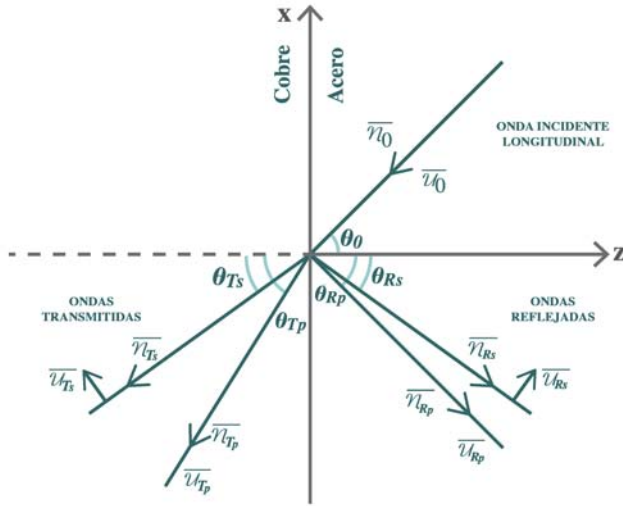


Figura 8. Onda longitudinal monocromática que incide con ángulo θ_0 sobre una superficie que separa a dos medios elásticos. Se muestran también las respectivas ondas reflejadas y transmitidas con sus correspondientes ángulos y vectores unitarios en la dirección de propagación.

Ahora, de la Figura 8 se tiene que los vectores unitarios en la dirección de propagación de las ondas correspondientes serán:

$$\mathbf{n}_0 = (-\sin \theta_0, 0, -\cos \theta_0) \quad (3.36)$$

$$\mathbf{n}_{Rp} = (-\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0) \quad \mathbf{n}_{Rs} = (-\sin \theta_{Rs}, 0, \cos \theta_{Rs}) \quad (3.37)$$

$$\mathbf{n}_{Tp} = (-\sin \theta_{Tp}, 0, -\cos \theta_{Tp}) \quad \mathbf{n}_{Ts} = (-\sin \theta_{Ts}, 0, -\cos \theta_{Ts}). \quad (3.38)$$

en donde los subíndices R están relacionados con las ondas reflejadas y los subíndices T con las ondas transmitidas. Además, a partir de la ecuación (3.22), válida cuando la fase de las ondas es continua a través de la frontera, las relaciones que se cumplen entre el ángulo de incidencia y los reflejados y transmitidos son;

$$\theta_{Rp} = \theta_0 \quad \sin \theta_{Rs} = \frac{c_{s1}}{c_{p1}} \sin \theta_0 \quad (3.39)$$

$$\sin \theta_{Tp} = \frac{c_{p2}}{c_{p1}} \sin \theta_0 \quad \sin \theta_{Ts} = \left(\frac{c_{s2}}{c_{p1}} \right) \sin \theta_0. \quad (3.40)$$

En este caso se tendrán dos vectores de desplazamiento; para el primer medio, en donde incide la onda, el vector de desplazamiento estará dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{u}_1 = A_0 \bar{u}_0 e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}}{c_{p1}}} + R_p \mathbf{u}_{Rp} e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_{Rp} \cdot \mathbf{r}}{c_{p1}}} + R_s \mathbf{u}_{Rs} e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_{Rs} \cdot \mathbf{r}}{c_{s1}}} \quad (3.41)$$

en donde \mathbf{u}_0 que es paralelo a \mathbf{n}_0 , \mathbf{u}_{Rp} que es paralelo a \mathbf{n}_{Rp} y $\mathbf{u}_{Rs} = (\mathbf{a} \times \mathbf{n}_{Rs})$ son los respectivos vectores de desplazamiento de las ondas longitudinal incidente y reflejada; y transversal reflejada. Además, \mathbf{a} nuevamente es un vector perpendicular al plano de incidencia, es decir, $\mathbf{a} = (0, 1, 0)$. Por su parte c_{p1} y c_{s1} son las velocidades de la onda longitudinal y transversal en el primer medio. Para el segundo medio, en el cual se transmite la onda, tenemos que el vector de desplazamiento es:

$$\mathbf{u}_2 = T_p \mathbf{u}_{Tp} e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_{Tp} \cdot \mathbf{r}}{c_{p2}}} + T_s \mathbf{u}_{Ts} e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_{Ts} \cdot \mathbf{r}}{c_{s2}}} \quad (3.42)$$

en donde \mathbf{u}_{Tp} es el vector de desplazamiento de la onda longitudinal transmitida y es paralelo a \mathbf{n}_{Tp} . Además $\mathbf{u}_{Ts} = (\mathbf{n}_{Ts} \times \mathbf{a})$ representa la dirección del desplazamiento de la onda transversal transmitida. El vector \mathbf{a} es el mismo que se estableció en el párrafo anterior.

Tanto en la ecuación (3.41) como en la (3.42) se vuelve a omitir el factor común $e^{-i\omega t}$.

Análogamente al primer caso, se obtienen las componentes u_{xx} , u_{zz} y u_{zx} del tensor de elongación de los dos medios. Explícitamente para el primer medio tenemos que las componentes del tensor de elongación sobre la frontera son:

$$u_{xx1}|_{z=0} = \frac{i\omega}{c_{p1}c_{s1}} [(A_0 + R_p) c_{s1} \sin^2 \theta_0 - R_s c_{p1} \cos \theta_{Rs} \sin \theta_{Rs}] \quad (3.43)$$

$$u_{zz1}|_{z=0} = \frac{i\omega}{c_{p1}c_{s1}} [(A_0 + R_p) c_{s1} \cos^2 \theta_0 + R_s c_{p1} \cos \theta_{Rs} \sin \theta_{Rs}] \quad (3.44)$$

$$u_{zx1}|_{z=0} = \frac{i\omega}{2c_{p1}c_{s1}} [(A_0 - R_p) c_{s1} \sin 2\theta_0 + c_{p1} R_s \cos 2\theta_{Rs}] \quad (3.45)$$

y para el segundo tensor de elongación en el segundo medio pero evaluado en la frontera se tiene:

$$u_{xx2}|_{z=0} = \frac{i\omega \sin \theta_0}{c_{p1}^2} (T_p c_{p2} \sin \theta_0 - T_s c_{p2} \sin \theta_0) \quad (3.46)$$

$$u_{zz2}|_{z=0} = \frac{i\omega}{c_{p1}c_{p2}} (T_p c_{p1} \cos^2 \theta_{Tp} + T_s c_{p2} \cos \theta_{Tp} \sin \theta_0) \quad (3.47)$$

$$u_{zx2}|_{z=0} = -\frac{1}{2} i\omega \left[T_s \left(\frac{\cos^2 \theta_{Ts}}{c_{s2}} - \frac{c_{s2} \sin^2 \theta_0}{c_{p1}^2} \right) - T_p \frac{\sin 2\theta_{Tp}}{c_{p2}} \right]. \quad (3.48)$$

De la ecuación (3.43) a la ecuación (3.48) se han utilizado las relaciones para los ángulos mencionadas previamente y se ha omitido también el factor común $e^{\frac{i\omega \sin \theta_0}{c_{p1}}}$ que resulta ser el mismo gracias a la condición de continuidad de las fases.

Las trazas de los tensores de elongación en los dos medios elásticos son:

$$u_{ll1} = \frac{i\omega}{c_{p1}} (A_0 + R_p) \quad (3.49)$$

$$u_{ll2} = \frac{i\omega T_p}{c_{p2}} \left(\cos^2 \theta_{Tp} + \frac{c_{p2}^2 \sin^2 \theta_0}{c_{p1}^2} \right). \quad (3.50)$$

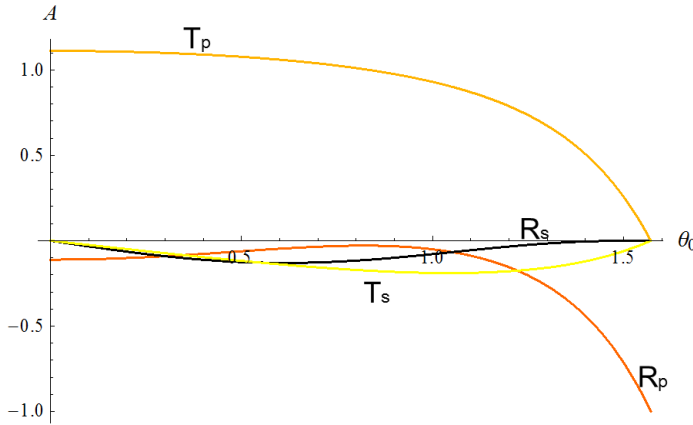
Las condiciones de frontera que se deben cumplir son cuatro, dos de ellas garantizan la continuidad de los esfuerzos tanto normales como de cizallamiento a través de la frontera. Esto para dar cumplimiento a la tercera ley de Newton. Por otro lado, las otras dos condiciones obligan a que los desplazamientos normales y transversales sean continuos a través de la interfase de ambos medios, es decir suponemos que ambos medios están pegados y no resbala uno sobre el otro. Las condiciones explícitas son las siguientes:

$$\sigma_{zz1|z=0} = \sigma_{zz2|z=0}, \quad \sigma_{zx1|z=0} = \sigma_{zx2|z=0} \quad (3.51)$$

$$u_{z1|z=0} = u_{z2|z=0}, \quad u_{x1|z=0} = u_{x2|z=0}. \quad (3.52)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones determinado por las condiciones de frontera y utilizando las relaciones (3.39) y (3.40) se obtienen R_p , R_s , T_p y T_s en términos de A_0 y θ_0 . Las expresiones explícitas se muestran en el Apéndice A.

Al igual que en el primer caso, se grafican las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas como función del ángulo de incidencia θ_0 , se considera $A_0 = 1$. Nuevamente se deben utilizar las expresiones para las velocidades y los respectivos valores adiabáticos del módulo de Young y la constante de Poisson. Se está considerando que el medio de incidencia es acero, por tanto los parámetros utilizados son los mismos que en el caso anterior. Para el medio de transmisión que es el cobre, los parámetros respectivos son; $E = 129,8 \times 10^9 Pa$ [16], $\nu = 0,343$ [16], $\beta = 5,1 \times 10^{-7} K^{-15}$ y $C_p = 3,44 \times 10^6 J/m^3 K^6$.



Gráfica 2. Amplitudes de las ondas reflejadas (R_p y R_s) y transmitidas (T_p y T_s) como función del ángulo de incidencia θ_0 .

⁵Por tratarse de un medio isotrópico, $\beta = 3\alpha$, con α el coeficiente térmico de dilatación lineal. Para el cobre, $\alpha = 17 \times 10^{-6} K^{-1}$ [16].

⁶Análogo al caso anterior, C_p se obtiene al multiplicar $c_p = 24,45 J/mol K$ [18] por la masa molar del cobre ($0,06345 \times 10^{-2} kg/mol$) y por su densidad $\rho = 8960 kg/m^3$ [16].

En la Gráfica 2 puede observarse que en incidencia normal, las amplitudes de las ondas transversales tanto reflejada como transmitida se anulan, i.e. $R_s = T_s = 0$, lo cual es consistente porque como comentamos previamente, en incidencia normal no hay conversión de ondas de un tipo a otro. También se observa que en incidencia normal, la amplitud de la onda longitudinal transmitida es máxima, además esta amplitud va decayendo conforme el ángulo de incidencia aumenta. Notemos que las ondas reflejadas y la transversal transmitida tienen amplitudes negativas, esto se justifica con el cambio de fase de $-\pi$ de tales ondas. Uno de los puntos notables de esta gráfica se encuentra en $\theta_0 \simeq 1,6 \simeq 90^\circ$, en donde las amplitudes de las ondas transmitidas y de la reflejada transversal son nulas, mientras que la amplitud de la onda reflejada longitudinal es máxima. Otro punto importante es en $\theta_0 \simeq 0,8 \simeq 45^\circ$ para el cual la onda reflejada longitudinal exhibe su menor amplitud. Respecto al ángulo $\theta_0 \simeq 1,1 \simeq 63^\circ$ se puede notar que hay un máximo en la amplitud de la onda transversal reflejada y en $\theta_0 = 0,7 \simeq 40^\circ$ se encuentra el máximo de amplitud de la onda longitudinal reflejada. El valor de estos puntos notables depende de los parámetros q , q_s y q_p (que aparecen en el Apéndice A) que relacionan las velocidades de las ondas reflejadas y transmitidas; y que son función del módulo de Young y de la constante de Poisson de ambos medios.

Si ahora analizamos el caso en que el medio de transmisión es muy blando, como el vacío, es decir cuando el módulo de Young del segundo medio es considerablemente menor que el del primero, entonces $c_{p2} \rightarrow 0$ y $c_{s2} \rightarrow 0$, de ahí que $q_p \rightarrow 0$ y $q_s \rightarrow 0$; y por lo tanto, las expresiones para R_p y R_s toman la misma forma que las ecuaciones (3.34) y (3.35) respectivamente. Es decir, las expresiones del Apéndice A para las transmitancias y reflectancias son consistentes en el límite mencionado.

Si el medio de incidencia y el medio de transmisión son iguales, entonces $c_{s2} = c_{p2}$ y $c_{s1} = c_{p1}$; de ahí que $q_s \rightarrow q$ y $q_p \rightarrow 1$, por tanto, las amplitudes de las ondas transmitidas y de la transversal reflejada son cero y la amplitud de la onda longitudinal reflejada es el doble de la amplitud de la onda incidente, es decir, $R_p = 2A_0$.

Nótese en la Figura 8 que el sistema incluye tanto ondas longitudinales como transversales cuya polarización permanece en el plano de la Figura, es decir en el plano de incidencia. Sin embargo, las ondas transversales al igual que las ondas electromagnéticas tienen dos polarizaciones independientes y la polarización perpendicular al plano de incidencia no se encuentra presente en el sistema de la Figura 8. Por esta razón analizaremos de manera independiente dichas ondas que por incidir de tal forma que sus desplazamientos permanecen siempre tangentes a la frontera, no son capaces de inducir además desplazamientos

longitudinales en ninguno de los dos medios.

Consideremos nuevamente una superficie que separa a dos medios elásticos (acero y cobre) y sobre la cual incide una onda transversal, cuyas oscilaciones ($\bar{u}_0, \bar{u}_{Rs}, \bar{u}_{Ts}$) son perpendiculares al plano de incidencia. Debido a la condición anterior, la onda incidente es completamente reflejada y transmitida como una onda del mismo tipo, es decir, como una onda transversal. En la Figura 9 se muestra la situación anterior.

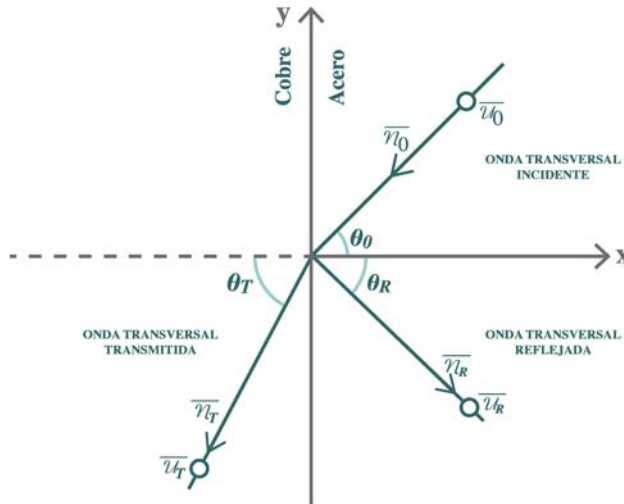


Figura 9. Onda transversal monocromática incidiendo con un ángulo θ_0 sobre una superficie que separa a dos medios elásticos; cobre y acero. También se observan las ondas reflejada y transmitida; y sus respectivos vectores unitarios en la dirección de propagación. Las oscilaciones de las tres ondas son perpendiculares al plano de incidencia.

De la Figura 9 es claro que los respectivos vectores unitarios en la dirección de propagación de las ondas son:

$$\mathbf{n}_0 = (-\sin \theta_0, 0, -\cos \theta_0) \tag{3.53}$$

$$\mathbf{n}_{R_s} = (-\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0) \quad (3.54)$$

$$\mathbf{n}_{T_s} = (-\sin \theta_{T_s}, 0, -\cos \theta_{T_s}). \quad (3.55)$$

Las relaciones entre los ángulos nuevamente quedan determinadas por la ley de Snell dada por la ecuación (3.22);

$$\theta_0 = \theta_{R_s} \quad (3.56)$$

$$\sin \theta_{T_s} = \frac{c_{s2}}{c_{s1}} \sin \theta_0. \quad (3.57)$$

Los vectores de desplazamiento para cada medio son:

$$\mathbf{u}_1 = A_0 \mathbf{u}_0 e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}}{c_{s1}}} + R_s \mathbf{u}_{R_s} e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_{R_s} \cdot \mathbf{r}}{c_{s1}}} \quad (3.58)$$

y

$$\mathbf{u}_2 = T_s \mathbf{u}_{T_s} e^{\frac{i\omega \mathbf{n}_{T_s} \cdot \mathbf{r}}{c_{s2}}} \quad (3.59)$$

en donde

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{R_s} = \mathbf{u}_{T_s} = (0, 1, 0). \quad (3.60)$$

La ecuación (3.60) representa la dirección de oscilación de las ondas incidente, reflejada y transmitida. De igual forma que en los casos anteriores, se está omitiendo el factor común $e^{-i\omega t}$.

Para este caso únicamente es necesario conocer la componente u_{zy} del tensor de elongación, entonces tenemos (omitiendo el factor común $e^{\frac{i\omega \sin \theta_0}{c_{s1}}}$ que resulta ser igual debido a que se cumple la ley de Snell):

$$u_{zy1}|_{z=0} = -\frac{i\omega (A_0 - R_s) \sin \theta_0}{2c_{s1}} \quad (3.61)$$

$$u_{zy2}|_{z=0} = -\frac{i\omega T_s \cos \theta_{T_s}}{2c_{s2}}. \quad (3.62)$$

Las condiciones de frontera requieren que el desplazamiento en la dirección perpendicular al plano de incidencia así como la componente zy del tensor de esfuerzos, que corresponde a un esfuerzo de cizallamiento sean continuas. Es decir, que los medios permanezcan unidos en la frontera y no se deslicen unos

sobre otros. Asimismo, el esfuerzo de corte razante a la frontera entre ambos medios debe ser continuo para que se cumpla la tercera ley de Newton. Lo anterior se traduce en:

$$u_{y1|z=0} = u_{y2|z=0} \tag{3.63}$$

$$\sigma_{zy1|z=0} = \sigma_{zy2|z=0}. \tag{3.64}$$

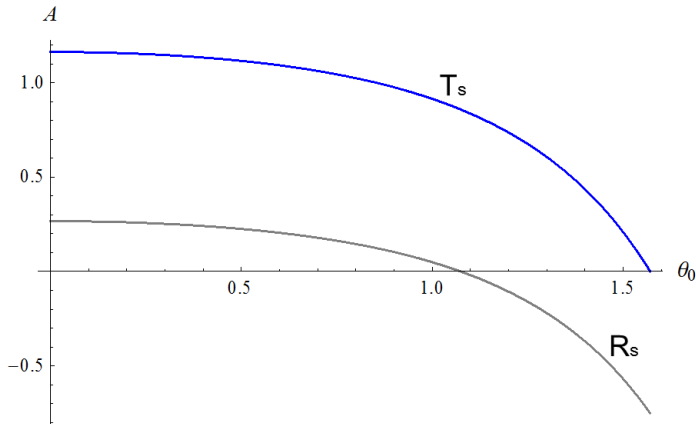
Resolviendo (3.63) y (3.64) para R_s y T_s obtenemos las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida en términos de los parámetros de la onda incidente. Las expresiones (3.56) y (3.57) han sido utilizadas para simplificar el resultado.

$$R_s = A_0 \frac{\cos \theta_0 - q * \sqrt{1 - q^{*2} \sin^2 \theta_0}}{\cos \theta_0 + q \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \theta_0}} \tag{3.65}$$

$$T_s = A_0 \frac{2 \cos \theta_0}{\cos \theta_0 + q * \sqrt{1 - q^{*2} \sin^2 \theta_0}} \tag{3.66}$$

en donde hemos introducido el parámetro $q^* = (c_{s2}/c_{s1})$ que proporciona el cociente entre las velocidades transversales de ambos medios.

Análogamente a los dos casos previos, se grafican las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida en función del ángulo de incidencia θ_0 . El medio de incidencia es nuevamente acero y el de transmisión cobre.



Gráfica 3. Amplitudes de las ondas reflejada transversales reflejada (R_s) y transmitida (T_s) como función del ángulo de incidencia θ_0 .

De la Gráfica 3 podemos notar que en incidencia normal la amplitud de la onda transmitida es mayor que la amplitud de la onda reflejada, esto debido al contraste entre el módulo de Young de ambos medios, además en incidencia normal la amplitud de la onda transmitida es máxima. En cambio, para el ángulo de incidencia $\theta_0 \simeq 1,6 \simeq 90^\circ$ la onda transmitida se anula y únicamente hay onda reflejada, precisamente para este ángulo es que la amplitud de la onda reflejada es máxima. Nótese que la amplitud de la onda transmitida siempre es positiva, es decir no cambia de fase para ningún ángulo de incidencia; sin embargo, para la onda reflejada hay un cambio de fase de $-\pi$ en el ángulo de incidencia $\theta_0 \simeq 1,1 \simeq 60^\circ$, este ángulo es conocido como ángulo de polarización o de Brewster. Su posición depende del parámetro q^* que es función del módulo de Young y la constante de Poisson de ambos medios.

Si tomamos el límite cuando $q^* \rightarrow 1$, es decir, los medios de incidencia y transmisión son iguales, entonces no habrá onda reflejada y la amplitud de la onda transmitida será el doble de la amplitud de la onda incidente.

En las Gráficas 1, 2 y 3, al considerar $A_0 = 1$, lo que se está mostrando son los coeficientes de reflexión y de transmisión, es decir, se está tomando la razón de las amplitudes de las ondas tanto reflejadas como transmitidas y la amplitud de la onda incidente, como es de esperarse. Esto resulta ser análogo a los coeficientes de Fresnel en la teoría Electromagnética.

La propagación de ondas elásticas en medios isotrópicos, así como la reflexión y transmisión de éstas en la frontera entre dos medios elásticos nos servirán de base para el problema principal que queremos tratar; una onda incidiendo normalmente en la frontera entre un medio elástico y un sólido elástico estratificado.

Notemos que al tomar los coeficientes R_s o R_p y dividirlos entre la amplitud de la onda incidencia, es decir entre A_0 se obtendrán las reflectancias, mientras que al dividir los coeficientes T_s y T_p entre A_0 se conocerán las transmitancias.

Capítulo 4

Ondas elásticas en un medio estratificado

En los medios estratificados, los parámetros utilizados para su descripción varían en una determinada dirección. De aquí en adelante se va a considerar que la variación es en la dirección del eje Z .

Un medio estratificado puede ser construido mediante el proceso de deposición física de vapor.[21] Este tipo de sistema resulta tener propiedades similares a las de un cristal líquido colestérico. En los colestéricos, la orientación molecular de cada plano queda determinada por el vector director, éste adquiere una pequeña rotación gradual plano por plano y, como consecuencia, se forma una hélice, lo que da lugar a un medio anisotrópico e inhomogéneo. Por su parte, el medio estratificado está formado por estratos de espesor pequeño, caracterizados por los vectores de la red cristalina; si éstos giran en torno a un eje, formarán también una hélice y se tendrá un medio estratificado helicoidal, cuya estructura será análoga a la de un cristal líquido colestérico. Específicamente se tomará el caso en que los vectores principales de la estructura cristalina giran en torno al eje Z .[19]

4.1. Descripción del medio estratificado

Debido a que el medio estratificado es un medio elástico continuo, entonces a partir de la Ley generalizada de Hooke (2.30) se pueden describir sus propiedades elásticas. Retomando lo descrito en el capítulo 2 respecto a la representación

en componentes independientes (2.34) de dicha Ley, es posible escribir una expresión análoga a (2.34) para el sistema en cuestión; esta expresión se ve como:

$$\bar{\sigma}'_i = S_{ik}(z)\bar{u}'_k, \quad (4.1)$$

en donde $S_{ik}(z)$ es una matriz semejante a la matriz C_{ik} de la ecuación (2.34); sin embargo, $S_{ik}(z)$ da la relación entre las componentes independientes del tensor de esfuerzos ($\bar{\sigma}'_i$) y el de elongación (\bar{u}'_k) en el medio estratificado, además las componentes de $S_{ik}(z)$ son funciones tanto de z como de los módulos elásticos del material en cuestión, recordando que los módulos elásticos son las componentes de la matriz C_{ik} .

Para obtener las componentes de la matriz $S_{ik}(z)$ se debe aplicar una transformación a la ecuación (2.34), es decir, se deben transformar las componentes independientes de los tensores de esfuerzo y elongación. A pesar de que únicamente se quieren transformar las componentes independientes del tensor de esfuerzos, i.e., $\bar{\sigma}_i$, será necesario transformar todo el tensor de esfuerzos y posteriormente separar las componentes que nos interesan. Es importante tomar en cuenta que el tensor de esfuerzos se transforma de la siguiente manera:

$$\sigma'_{ik} = R_{ik}\sigma_{km}R_{mj} \quad (4.2)$$

en donde R representa la matriz de transformación que permite cambiar del medio homogéneo isotrópico al medio estratificado.

Ahora bien, las componentes de $\bar{\sigma}'_i$ se obtienen al transformar σ_{ik} y posteriormente reacomodar únicamente los seis elementos independientes del tensor en un vector de seis componentes, ordenadas de la misma forma utilizada en la sección 2.3. Por tanto, las componentes independientes del tensor de esfuerzos en el medio estratificado son:

$$\bar{\sigma}'_i = R_r\bar{\sigma}_i. \quad (4.3)$$

De manera similar a lo anterior se deben transformar las componentes independientes del tensor de elongación. En este caso la matriz de rotación será [15]:

$$M_R = FR_rF^{-1} \quad (4.4)$$

en donde las componentes de F están dadas por:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

El factor 2 que aparece en la matriz F es resultado de la simetría del tensor de elongación, tal como se muestra en la ecuación (2.33).

De lo anterior se tiene que las seis componentes independientes del tensor de elongación en el medio estratificado son:

$$\bar{u}'_k = M_R \bar{u}_k. \quad (4.6)$$

Sustituyendo la ecuación (4.6) en (4.1) e igualando con la expresión (4.3) se obtiene:

$$\bar{\sigma}'_i = R_r \bar{\sigma}_i = S_{ik} M_R \bar{u}_k. \quad (4.7)$$

Multiplicando lo anterior por R_r^{-1} , se despeja $\bar{\sigma}_i$:

$$\bar{\sigma}_i = R_r^{-1} S_{ik} M_R \bar{u}_k. \quad (4.8)$$

Como R_r está dada por la matriz (??) y M_R está dada por la matriz (4.4), se sigue que $R_r^{-1} = M_R^T$. [15] La expresión (4.8) se reescribe como:

$$\bar{\sigma}_i = M_R^T S_{ik} M_R \bar{u}_k. \quad (4.9)$$

Tomando la ecuación anterior y comparándola con la ecuación (2.34) se concluye que

$$C_{ik} = M_R^T S_{ik} M_R. \quad (4.10)$$

Finalmente, se despeja S_{ik} de la expresión anterior, de manera que

$$S_{ik} = M_R C_{ik} M_R^T. \quad (4.11)$$

Es importante notar que se está tomando $M_R^{-1} = M_R^T$. Las componentes de la matriz S_{ik} son función de z y de los módulos elásticos del material en cuestión. Además, por la manera en que se construyó S_{ik} entonces también es una matriz simétrica con 21 módulos elásticos independientes.

4.2. Flujo de energía en un medio elástico

Se va a calcular ahora la energía elástica que fluye por unidad de tiempo a través de una superficie de control. Para ello es necesario calcular la potencia transferida por las ondas elásticas para deformar al medio elástico. Se sabe que la potencia instantánea ejercida por una partícula por una fuerza externa está dada por $P = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$; en este caso la fuerza es una fuerza superficial local en un medio elástico y se calcula a partir del tensor esfuerzos, como se muestra en la ecuación (2.10) $\mathbf{F}_s = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Por ende, al tomar esta cantidad y multiplicarla por la derivada temporal del vector de desplazamientos; y sumando todas las contribuciones en la superficie que encierra al cuerpo se obtiene la potencia total

$$P = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.12)$$

en donde podemos definir el vector

$$\mathbf{J} = - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \overleftrightarrow{\sigma} \quad (4.13)$$

que proporciona la corriente de flujo de potencia elástica. Este vector juega el papel del vector de Poynting para las ondas electromagnéticas.

Se va a deducir ahora la ecuación que gobierna a este vector, utilizando para esto la segunda ley de Newton en su versión de medios continuos dada por la ecuación (2.15). Multiplicando dicha ecuación por $\partial \mathbf{u} / \partial t$ se tiene

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (4.14)$$

El primer término de la ecuación se puede sustituir por la derivada del producto $\sigma_{ik} u_{ik}$ menos un término adicional, mientras que el segundo miembro se puede escribir como una derivada total temporal, esto es

$$\frac{\partial(\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial t})}{\partial x_k} - \sigma_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \rho f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right). \quad (4.15)$$

Se ha supuesto que la densidad de masa no depende del tiempo. Por otro lado, si se intercambian las derivadas del segundo término se llega a

$$\sigma_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = \sigma_{ik} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \sigma_{ik} \frac{\partial}{\partial t} u_{ik} \quad (4.16)$$

en donde u_{ik} continua siendo el tensor de elongaciones definido en la ecuación (2.6) que por construcción es simétrico. La segunda condición de esta expresión se cumple porque el tensor de esfuerzos es simétrico y que la contracción de un tensor simétrico con un antisimétrico siempre es nula. En este punto es necesario utilizar la ecuación constitutiva para un medio lineal general, para simplificar aún más este término. Sustituyendo (2.30) en la ecuación (4.15) se obtiene:

$$\rho f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial(\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial t})}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \lambda_{ikjm} u_{jm} \frac{\partial}{\partial t} u_{ik}, \quad (4.17)$$

que puede expresarse finalmente como

$$\rho f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial J_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} E_{el}, \quad (4.18)$$

en donde E_{el} es la densidad volumétrica de energía elástica definida por

$$E_{el} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} u_{ik} \quad (4.19)$$

y se ha sustituido nuevamente a σ_{ik} . También se ha supuesto que el tensor de rigidez no cambia con el tiempo. Nótese que el segundo término de esta expresión es precisamente la densidad de energía libre de Helmholtz dada por la ecuación (2.29) para el caso particular de un medio isotrópico y homogéneo. El primer término es una contribución cinética asociada a los cambios temporales del vector de desplazamiento.

La ecuación (4.18) para el vector de flujo de energía elástica J_k juega el papel en elasticidad del teorema de Poynting en electromagnetismo. Es posible integrar dicha ecuación dentro de un volumen de control y después de aplicar el teorema de Gauss encontrar

$$\oint_{S_c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} E_{el} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV \quad (4.20)$$

que establece que la integral de flujo de energía elástica por unidad de tiempo en una superficie cerrada es igual a menos el cambio de la energía total elástica dentro del volumen de control más la potencia inyectada por las fuerzas volumétricas.

En resumen, P definido por la ecuación (4.12) provee la potencia instantánea transportada por las ondas elásticas. Si particularmente se tienen desplazamientos armónicos con frecuencia ω , entonces la potencia también oscilará;

pero con el doble de frecuencia ya que de la ecuación (4.13) se puede inferir que el vector de flujo de energía es proporcional al cuadrado de los desplazamientos. Cuando las oscilaciones son muy rápidas o la frecuencia es muy grande, la cantidad relevante a calcular es la potencia promedio en un intervalo temporal que es el periodo $T = 2\pi/\omega$ de las oscilaciones. Si la onda es armónica, es decir, $\mathbf{u} = \text{Re}[\mathbf{u}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$ con Re denotando la parte real, entonces utilizando la ecuación constitutiva de Hooke, ecuación (2.30), se puede mostrar que el tensor de esfuerzos está dado por $\sigma = \text{Re}[\sigma_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$ y por tanto la corriente promedio de energía $\bar{\mathbf{J}}$ en un periodo está dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}} &= -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \sigma dt = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{(-i\omega \mathbf{u}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + i\omega \mathbf{u}_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t})}{2} \\ &\quad \cdot \frac{(\sigma_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \sigma_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t})}{2} dt \\ &= \frac{1}{4} (-i\omega \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \cdot \sigma_0^*(\mathbf{r}) + i\omega \mathbf{u}_0^*(\mathbf{r}) \cdot \sigma_0(\mathbf{r})) = -\frac{i\omega}{2} \text{Im}[\mathbf{u}_0^*(\mathbf{r}) \cdot \sigma_0(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (4.21)$$

en donde Im se refiere a la parte imaginaria y los asteriscos indican complejo conjugado. Finalmente, la potencia promedio de estos desplazamientos armónicos en términos de las amplitudes complejas del desplazamiento y el tensor de esfuerzos queda como

$$\bar{P} = -\frac{i\omega}{2} \int_S \text{Im}[\mathbf{u}_0^*(\mathbf{r}) \cdot \sigma_0(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} dS$$

en donde S es una superficie cerrada que incluye a la fuente y se halla muy lejos, la cual es común tomarla como una esfera.

4.3. Ondas elásticas en incidencia oblicua y normal sobre el medio estratificado

Se va a considerar una onda elástica de frecuencia ω propagándose a lo largo del eje Z que incide de manera oblicua sobre la superficie del medio estratificado. El comportamiento de estas ondas se describe a partir de las ecuaciones (2.15) y (4.1). Nótese que en la ecuación de Newton (2.15) las componentes del tensor de esfuerzos y del vector de desplazamientos también deben estar en el sistema del medio estratificado, es decir,

$$\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x'_k} = \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2}. \quad (4.22)$$

Como se mencionó previamente, se está considerando que las propiedades del medio estratificado varían solamente a lo largo del eje z , de ahí que las componentes de la matriz S_{ik} sean funciones explícitas de z ; y por tanto las soluciones de estas ecuaciones no pueden ser ondas planas $Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ como en el caso de un medio homogéneo, en donde las componentes de C_{ik} son constantes. Sin embargo, debido a que S_{ik} no depende de las coordenadas transversales x y y , ni de t , es posible suponer que el comportamiento en tales direcciones sigue siendo el de una onda plana. En consecuencia, las soluciones de los elementos del tensor de esfuerzos y del tensor de desplazamientos serán ondas cuasiplanas, cuyas amplitudes dependerán de z , es decir

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik}(x, y, z) &= \sigma_{ik}(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ u'_i(x, y, z) &= u_i(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Al sustituir las soluciones anteriores en la expresión (4.1) y hacer las derivadas correspondientes se obtendrán seis ecuaciones para las componentes independientes del tensor de esfuerzos. Para hacer este desarrollo es conveniente expresar las componentes del tensor de elongación en términos de las componentes del vector de desplazamientos, como en la ecuación (2.6). Sustituyendo también estas soluciones en la expresión (4.22) se tendrán tres ecuaciones en las cuales las únicas derivadas involucradas serán de los elementos σ_{xz} , σ_{yz} y σ_{zz} . A partir de lo anterior se toman las tres primeras ecuaciones de (4.1), es decir las ecuaciones para σ'_{xx} , σ'_{xy} y σ'_{yy} ; y se sustituyen en las tres ecuaciones de Newton. Tomando las ecuaciones de Newton y las ecuaciones restantes de (4.1) se tendrán seis ecuaciones resultantes de donde se despejan las derivadas respecto a z de $u_x(z)$, $u_y(z)$, $u_z(z)$, $\sigma_{xz}(z)$, $\sigma_{yz}(z)$ y $\sigma_{zz}(z)$.

Si se define un vector Ψ , cuyos elementos sean

$$\Psi = \begin{pmatrix} u_x(z) \\ u_y(z) \\ u_z(z) \\ \sigma_{xz}(z) \\ \sigma_{yz}(z) \\ \sigma_{zz}(z) \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

entonces es posible escribir las seis ecuaciones resultantes en una expresión matricial de la forma:

$$\frac{d}{dz}\Psi = iM\Psi, \quad (4.25)$$

en donde M es una matriz de 6×6 , los elementos de esta matriz son los que se muestran en el Apéndice C de la referencia [19]; pero multiplicados por un factor de $-i$.

Retomando la expresión (4.21) de la corriente promedio de energía $\bar{\mathbf{J}}$, obtenemos que ésta en la dirección z está dada por

$$J_z = -\frac{i\omega}{2} \text{Im} [\mathbf{u}_x^*(\mathbf{r}) \sigma_{xz}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_y^*(\mathbf{r}) \sigma_{yz}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_z^*(\mathbf{r}) \sigma_{zz}(\mathbf{r})] = -\frac{i\omega}{2} \Psi^\dagger L \Psi, \quad (4.26)$$

en donde L es una matriz cuyas componentes son

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si el material no sufre pérdidas por absorción, entonces $dJ_z/dz = 0$.

Ahora, como la ecuación para Ψ está dada por (4.25), por tanto para Ψ^\dagger se tiene

$$\frac{d\Psi^\dagger}{dz} = -i\Psi^\dagger M^\dagger \quad (4.27)$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{dJ_z}{dz} &= -\frac{i\omega}{2} \left(\frac{d\Psi^\dagger}{dz} L \Psi + \Psi^\dagger L \frac{d\Psi}{dz} \right) = -\frac{i\omega}{2} (-i\Psi^\dagger M^\dagger L \Psi + i\Psi^\dagger L M \Psi) \\ &= \frac{\omega}{2} \Psi^\dagger (LM - M^\dagger L) \Psi \end{aligned} \quad (4.28)$$

así, la condición para conservación de energía es

$$M^\dagger L = LM \quad (4.29)$$

o equivalentemente

$$L^{-1}M^\dagger L = M \quad (4.30)$$

en donde se ha utilizado las propiedades $(L\Psi)^\dagger = \Psi^\dagger L^\dagger$ y $L^\dagger = L^{-1}$. Se puede demostrar que la condición anterior para M se cumple siempre y cuando las componentes del tensor de rigidez sean reales.

La cantidad $\Psi_b^\dagger L \Psi_a$ que aparecerá repetidamente en lo que sigue tiene una analogía evidente con el producto escalar, en donde L juega el papel de un tensor métrico como en la teoría de relatividad. La cantidad anterior será llamada el producto escalar (Ψ_a, Ψ_b) de Ψ_a con Ψ_b en el espacio del vector Ψ . Esta norma es real pero no necesariamente positiva. Con esta definición para el producto escalar, la propiedad de la matriz L definida por la ecuación (4.30) implica que

$$(M\Psi_a, \Psi_b) = (\Psi_a, M\Psi_b). \quad (4.31)$$

Esto significa que el operador M es auto adjunto. Al tomar en cuenta que éste es el operador que gobierna la evolución espacial del vector de desplazamientos y de algunas componentes del tensor de esfuerzos, como se ve en la ecuación (4.25), entonces esta propiedad tiene consecuencias importantes para la teoría general. Consecuencias similares a aquellas derivadas en mecánica cuántica a partir del hecho de que el Hamiltoniano es auto adjunto.

4.4. Relaciones de ortogonalidad y representación de medios no absorbentes en la base de ψ

Para medios homogéneos la matriz M es independiente de z ; sin embargo, si el medio es helicoidal, entonces la aplicación de una rotación uniforme en torno al eje de la hélice da lugar a una matriz M en la ecuación (4.25) cuyos elementos también son constantes (véase la sección 4.6). De esta manera la ecuación de propagación, ecuación (4.25) admite soluciones del tipo

$$\Psi = \Psi^J e^{i\lambda_j z} \quad (4.32)$$

que representa las seis ondas elásticas propias (tres propagándose hacia adelante y tres hacia atrás) para cierto valor de la frecuencia. Insertando esta ecuación en la expresión (4.25) da lugar a la siguiente relación para M

$$M\Psi^J = \lambda_j \Psi^J. \quad (4.33)$$

Tomando ahora dos vectores propios Ψ^i y Ψ^j y considerando la ecuación (4.31) que establece la hermiticidad del operador M , escrita explícitamente toma la forma

$$(M\Psi_a, \Psi_b) - (\Psi_a, M\Psi_b) = \Psi_b^\dagger L M \Psi_a - (M\Psi_b)^\dagger L \Psi_a = 0 \quad (4.34)$$

entonces al sustituir la ecuación (4.33) en la expresión anterior se obtiene

$$\Psi_b^\dagger L \lambda_a \Psi_a - (\lambda_b \Psi_b)^\dagger L \Psi_a = (\lambda_a - \lambda_b^*) (\Psi_a, \Psi_b) = 0. \quad (4.35)$$

Si se toma $a = b$ esta ecuación muestra que los vectores propios de un eigenvalor complejo propio tienen norma nula, físicamente esto implica que los vectores representan ondas evanescentes. Este es un caso que requiere un análisis por separado. De hecho, de la ecuación (4.31) se puede demostrar que los valores propios de M ocurren en pares λ_i y $\lambda_j = \lambda_i^*$. Más aún, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 son el conjunto de valores propios de M entonces el conjunto de valores propios de M^\dagger y de $L^{-1}M^\dagger L$ son $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$ y λ_4^* y los dos conjuntos coinciden ya que M es de hecho hermitiano. La ecuación (4.35) muestra además que dos vectores propios que corresponden a diferentes valores propios reales, son adicionalmente ortogonales. Para el caso degenerado de valores propios $\lambda_a = \lambda_b$ el producto escalar (Ψ_a, Ψ_b) puede ser distinto de cero. Sin embargo, en este caso cualquier combinación lineal de Ψ_a y Ψ_b es un vector propio asociado a λ y en este espacio vectorial bidimensional siempre es posible escoger un par de vectores ortogonales. Por tanto se puede escribir

$$\Psi_j^\dagger L \Psi^i = N_i \delta_{ij}, \quad (4.36)$$

o equivalentemente

$$N_i^{-1} \Psi_j^\dagger L \Psi^i = \delta_{ij}, \quad (4.37)$$

en donde N_i es la norma del vector Ψ^i . Si escogemos los índices 1, 2 y 3 para denotar las ondas que se propagan hacia adelante y 4, 5 y 6 para las otras tres ondas que se propagan hacia atrás, entonces N_1, N_2 y N_3 serán positivas mientras que N_4, N_5 y N_6 serán negativas. De esta manera es natural asumir como condiciones de normalización:

$$N_1 = N_2 = N_3 = 1, \quad N_4 = N_5 = N_6 = -1. \quad (4.38)$$

Por tanto, la solución general de la ecuación (4.25) está dada por la superposición de los seis eigenvectores, es decir

$$\Psi = \sum_{j=1}^6 f_j \Psi^j = T\phi \quad (4.39)$$

en donde ϕ está dado por

$$\phi = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

y T es la matriz cuyos elementos t_{ij} es la componente i -ésima del vector Ψ^j . Esto significa que las columnas de T son los vectores columna $\Psi^1, \Psi^2, \Psi^3, \Psi^4, \Psi^5, \Psi^6$ y los vectores $\Psi_1^\dagger, \Psi_2^\dagger, \Psi_3^\dagger, \Psi_4^\dagger, \Psi_5^\dagger$ y Ψ_6^\dagger son columnas de T^\dagger . Las relaciones de ortogonalidad dadas por la ecuación (4.37) pueden reescribirse como

$$N^{-1}T^\dagger LT = \mathbb{I} \quad (4.41)$$

en donde N es la matriz diagonal cuyos elementos no nulos están dados por las normas N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 y N_6 de los vectores propios de M e \mathbb{I} es la matriz unitaria de 6×6 .

La ecuación (4.41) muestra también que el inverso de la matriz T está dado por

$$T^{-1} = N^{-1}T^\dagger L. \quad (4.42)$$

4.5. Medios estratificados con planos de discontinuidad

Se considerará ahora una onda plana que incide sobre un conjunto de N capas homogéneas o helicoidales separadas por $N + 1$ planos localizados en $z = z_n$ ($n = 0, 1, \dots, N$), con el objeto de encontrar expresiones analíticas para las ondas reflejadas y transmitidas.

Tómese el caso para $N = 0$ que corresponde a una sola interface situada en $z = 0$. Utilizando la notación de la sección anterior, las ondas incidente y transmitida se pueden representar en términos de vectores ϕ tomando $f_4 = f_5 =$

$f_6 = 0$ y $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$ y $f_3 = a_3$ para la onda incidente. Así los vectores ϕ para ambos lados de la frontera plana están dados por

$$\phi(0^-) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}, \quad \phi(0^+) = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

en donde los coeficientes a_i , r_i y t_i ($i = 1, 2, 3$) corresponden a las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas. Lo que se quiere es expresar las amplitudes de las transmitidas en términos de las ondas incidentes y reflejadas.

La continuidad de todas las componentes de desplazamiento y esfuerzos normal y tangenciales a la frontera situada en $z = 0$ se puede exigir simultáneamente con la condición

$$\Psi(0^-) = \Psi(0^+). \quad (4.44)$$

De estas expresiones se puede inferir el papel que tienen los vectores ϕ y Ψ . El primero se relaciona directamente con las condiciones de frontera ya que está formado con las tres componentes del vector de desplazamientos y tres elementos del tensor de esfuerzos. El segundo está expresado en términos de las cantidades que son de interés desde el punto de vista experimental que son las reflectancias y transmitancias, las cuales están dadas por $|r_i/a_j|^2$ y $|t_i/a_j|^2$ ($i, j = 1, 2, 3$). Las transformaciones T establecen una relación entre las condiciones de frontera y las reflectancias y transmitancias.

A partir de las ecuaciones anteriores y de la relación $\Psi = T\phi$, se obtiene inmediatamente

$$\phi(0^-) = T_i^{-1} T_r \phi(0^+) \quad (4.45)$$

en donde T_i y T_r son las matrices T del primer y segundo medio, respectivamente. Estas ecuaciones proporcionan seis ecuaciones lineales para los tres coeficientes de reflexión y los otros tres coeficientes de transmisión y por ende pueden considerarse la solución formal del problema.

Entonces, si se considera el caso para el que $N = 1$ que corresponde a una sola capa heterogénea entre dos planos situados en $z = 0$ y $z = z_1$; al imponer la continuidad de los vectores ϕ en ambas fronteras se obtienen relaciones del tipo anterior, es decir

$$\phi(0^-) = T_i^{-1} T \phi(0^+) \quad (4.46)$$

$$\phi(z_1^-) = T^{-1} T_r \phi(z_1^+) \quad (4.47)$$

en donde la matriz T sin índices está asociada al medio interior. La relación entre $\phi(0^+)$ y $\phi(z_1^-)$ está dada por

$$\phi(z_1^-) = e^{-i\lambda_j z_1} \phi(0^+) \quad (4.48)$$

en donde λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) son los valores propios de la matriz M para representar el medio central.

De las ecuaciones (4.45) y (4.47) se puede obtener inmediatamente

$$\phi(0^-) = T_i^{-1} U T_r \phi(z^+) \quad (4.49)$$

en donde U es la matriz de transferencia para los vectores ϕ dentro de la capa, implícitamente definido por $\Psi(z_1) = U\Psi(0)$. Aquí U está dada por

$$U = T K^{-1}(z_1) T^{-1} \quad (4.50)$$

o equivalentemente

$$U = \sum_{j=1}^4 \Psi^j e^{-i\lambda_j z_1} \bar{\Psi}_j \quad (4.51)$$

en donde $\bar{\Psi}_j$ son los renglones de la matriz T^{-1} . Para el caso general de N capas, la solución del sistema está dada por la ecuación (4.50) en donde U es la matriz de transferencia del conjunto de capas y se construye multiplicando las N matrices de transferencia de cada capa. Todos estos resultados son ampliamente conocidos.

4.6. Ondas elásticas en el sólido helicoidal

Considérese ahora un medio helicoidal cuyo eje de la hélice está en la dirección z , este medio es por supuesto un medio estratificado helicoidal. Para resolver el problema de propagación de ondas elásticas en tal medio, es necesario conocer la forma explícita de la matriz $S_{ik}(z)$. Entonces, en este caso la transformación que nos permite ir del medio homogéneo e isotrópico al medio estratificado helicoidal es una rotación.

La matriz de transformación en la ecuación (4.2) para un medio helicoidal es

$$R = \begin{pmatrix} \cos(qz) & -\sin(qz) & 0 \\ \sin(qz) & \cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

A partir de ella se conoce explícitamente la matriz S (cuyas componentes pueden consultarse en el Apéndice A de la referencia [19]) y con esto también la forma explícita de la matriz M , que aparece en la ecuación (4.25). Los elementos de M se muestran en el Apéndice C de la referencia [19]; pero multiplicados por un factor de $-i$. Tanto las componentes de S como de M son función de los módulos elásticos C_{ik} y de z .

Si la onda elástica incide de manera normal sobre la superficie del sólido helicoidal, entonces $k_x = k_y = 0$ y por lo tanto la matriz M tendrá los siguientes coeficientes:

$$M_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ia_1 & -ia_2 & -ia_3 \\ 0 & 0 & 0 & -ia_2 & -ia_4 & -ia_5 \\ 0 & 0 & 0 & -ia_3 & -ia_5 & a_6 \\ -i\rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Explícitamente, los coeficientes a_i con $i = 1, 2, \dots, 6$ aparecen en el capítulo 4 de la referencia [19] y son combinaciones de los elementos de la matriz S , es decir, de los módulos elásticos C_{ik} y de z .

La ecuación (4.25) es válida para describir la propagación de ondas elásticas en este tipo de sistemas. Conviene recordar que el sólido helicoidal está rotado un ángulo $\theta = qz$ respecto al medio estratificado natural; sin embargo, si se observa al sistema plano por plano pareciera ser que se trata de un medio anisotrópico y al mismo tiempo homogéneo. Por lo anterior, para resolver la ecuación (4.25) resulta conveniente aplicar al sistema la rotación inversa a la asociada con la geometría helicoidal. Entonces, se va a utilizar el siguiente cambio de variable $\Phi = R_{\phi}\Psi$, en donde R_{ϕ} es la matriz que rota simultáneamente respecto al eje Z al vector Φ que contiene elementos del tensor de esfuerzos y del vector de desplazamiento. R_{ϕ} se construye siguiendo un razonamiento análogo al que se utilizó para rotar a la matriz C_{ik} en la sección 4.1 pero con la rotación opuesta. Para obtener las componentes de la matriz R_{ϕ} primero es necesario rotar por

separado a σ'_i y a u'_i ; y posteriormente reacomodar los elementos rotados que nos interesan de acuerdo a la notación utilizada en el vector Ψ de seis componentes. [19] Explícitamente las componentes de esta matriz son

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos(qz) & \sin(qz) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(qz) & \cos(qz) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(qz) & -\sin(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(qz) & -\cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Retomando el cambio de variable y multiplicándolo por la izquierda por R_ϕ^{-1} se obtiene $\Psi = R_\phi^{-1}\Phi$, de aquí que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (R_\phi^{-1}\Phi) = \frac{\partial R_\phi^{-1}}{\partial z} \Phi + R_\phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (4.55)$$

retomando la ecuación (4.25) también se tiene

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = iM\Psi = iMR_\phi^{-1}\Phi \quad (4.56)$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por R_ϕ

$$R_\phi \frac{\partial \Psi}{\partial z} = iR_\phi MR_\phi^{-1}\Phi$$

y por la expresión (4.55) es equivalente a

$$R_\phi \frac{\partial R_\phi^{-1}}{\partial z} \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = iR_\phi MR_\phi^{-1}\Phi$$

que puede reescribirse como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = iP\Phi \quad (4.57)$$

en donde

$$P = R_\phi MR_\phi^{-1} + iR_\phi \frac{\partial R_\phi^{-1}}{\partial z}.$$

Las componentes explícitas de P son las que aparecen en el Apéndice D de la referencia [19] pero multiplicadas por $-i$. Ahora bien, si se toma el caso en

que la onda elástica incide de manera normal, entonces la matriz P toma la siguiente forma

$$P_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & -iq & 0 & ib_1 & ib_2 & ib_3 \\ iq & 0 & 0 & ib_2 & ib_4 & ib_5 \\ 0 & 0 & 0 & ib_3 & ib_5 & ib_6 \\ i\omega^2\rho & 0 & 0 & 0 & -iq & 0 \\ 0 & i\omega^2\rho & 0 & iq & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\omega^2\rho & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

en donde b_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) son coeficientes constantes y son combinaciones de los módulos elásticos que aparecen en la matriz C_{ik} , es decir

$$b_1 = \frac{C_{55}C_{66} - C_{56}^2}{A}$$

$$b_2 = \frac{C_{46}C_{56} - C_{45}C_{66}}{A}$$

$$b_3 = \frac{C_{45}C_{56} - C_{46}C_{55}}{A}$$

$$b_4 = \frac{C_{44}C_{66} - C_{46}^2}{A}$$

$$b_5 = \frac{C_{45}C_{46} - C_{44}C_{56}}{A}$$

$$b_6 = \frac{C_{44}C_{55} - C_{45}^2}{A}$$

con

$$A = C_{46}^2C_{55} - 2C_{45}C_{46}C_{56} + C_{45}^2C_{66} + C_{44}(C_{56}^2 - C_{55}C_{66}).$$

Puesto que los elementos de la matriz P_{\perp} son constantes, entonces la ecuación (4.57) es equivalente a un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con coeficientes constantes, que puede desacoplarse para generar una única ecuación diferencial de sexto orden con coeficientes constantes; y su solución está dada por

$$\Phi = \Phi_0 e^{ilz} \quad (4.59)$$

en donde Φ_0 es un vector constante, no nulo y l representa el número de onda. Al sustituir la expresión anterior en la ecuación (4.57) y recordando que se está considerando el caso de incidencia normal, se tiene

$$il\Phi_0 = P_{\perp}\Phi_0$$

o equivalentemente

$$(P_{\perp} - l\mathbb{I})\Phi_0 = 0, \quad (4.60)$$

esta ecuación únicamente tiene solución no trivial si $\det(P_{\perp} - l\mathbb{I}) = 0$, resolviendo el determinante se llega a la siguiente expresión

$$\Gamma_1\omega^6 + \Gamma_2\omega^4 + \Gamma_3\omega^2 + \Gamma_4 = 0, \quad (4.61)$$

los coeficientes Γ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) son funciones del número de onda l y están dados por

$$\Gamma_1 = -\rho^3 [b_3^2 b_4 - 2b_2 b_3 b_5 + b_2^2 b_6 + b_1 (b_5^2 - b_4 b_6)]$$

$$\Gamma_2 = -\rho^2 [q^2 (b_3^2 + b_5^2 - (b_1 + b_4) b_6) + l^2 (b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_4 + b_5^2 - b_1 b_6 - b_4 b_6)]$$

$$\Gamma_3 = \rho [q^4 b_6 + q^2 l^2 (b_1 + b_4 - 2b_6) + l^4 (b_1 + b_4 + b_6)]$$

$$\Gamma_4 = l^6 - 2q^2 l^4 + q^4 l^2.$$

Si se introducen los cambios de variable $l^2 = q^2 \tilde{l}$ y $\rho\omega^2 = \tilde{\omega}q^2$ en los coeficientes Γ_i se puede reescalar el número de onda y la frecuencia en términos del número de onda q del medio helicoidal¹. A partir de esto y sustituyendo los valores de

¹Este número de onda, q es análogo al número de onda q_0 en los cristales líquidos colestéricos.

las b_i , la ecuación (4.61) puede reescribirse como una ecuación de tercer grado, es decir

$$\tilde{\omega}^3 + \Lambda_1 \tilde{\omega}^2 + \Lambda_2 \tilde{\omega} + \Lambda_3 = 0 \quad (4.62)$$

en donde los coeficientes Λ_1 , Λ_2 y Λ_3 son función de \tilde{l} , explícitamente se tiene

$$\Lambda_1 = -C_{66}\tilde{l} - (\tilde{l} + 1)(C_{44} + C_{55})$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 = & -C_{45}^2 (\tilde{l} - 1)^2 - (C_{46}^2 + C_{56}^2 - C_{55}C_{66})\tilde{l}(\tilde{l} + 1) + \\ & C_{44} \left(C_{55} (\tilde{l} - 1)^2 + C_{66}\tilde{l}(\tilde{l} + 1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_3 = & [-2C_{45}C_{46}C_{56} + C_{45}^2C_{66} + C_{44}(C_{56}^2 - C_{55}C_{66})] (\tilde{l} - 1)^2 \tilde{l} + \\ & C_{46}^2C_{55}\tilde{l} - 2C_{46}^2C_{55}\tilde{l}^2 + C_{46}^2C_{55}\tilde{l}^3. \end{aligned}$$

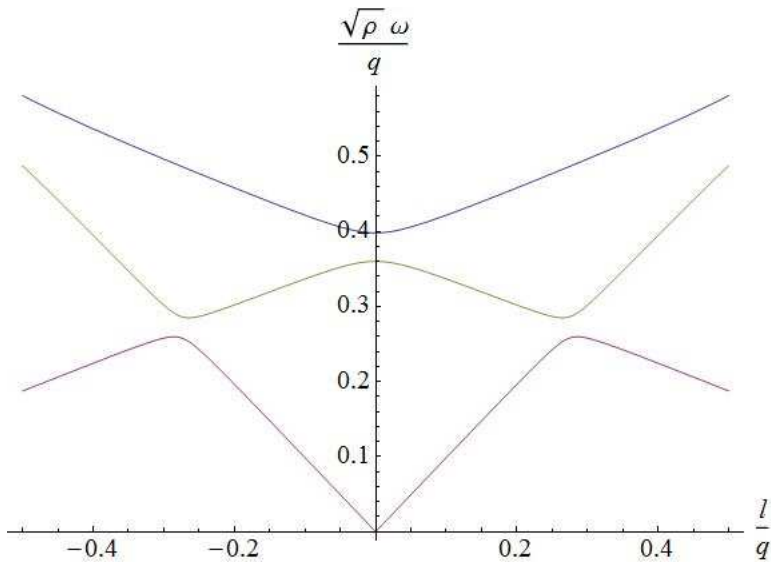
Puesto que la (4.62) es una ecuación algebraica de tercer grado con coeficientes reales, entonces se puede utilizar el método de Cardano para resolverla, sus soluciones están dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 = & -\frac{\Lambda_1}{3} + \left[\sqrt[3]{2} (\Lambda_1^2 - 3\Lambda_2) \right] / \left[3 (-2\Lambda_1^3 + 9\Lambda_1\Lambda_2 - 27\Lambda_3 + \right. \\ & \left. \sqrt{-4(\Lambda_1^2 - 3\Lambda_2)^3 + (2\Lambda_1^3 - 9\Lambda_1\Lambda_2 + 27\Lambda_3)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \Big] + \\ & \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \left[-2\Lambda_1^3 + 9\Lambda_1\Lambda_2 - 27\Lambda_3 + \right. \\ & \left. \sqrt{-4(\Lambda_1^2 - 3\Lambda_2)^3 + (2\Lambda_1^3 - 9\Lambda_1\Lambda_2 + 27\Lambda_3)^2} \right]^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2 = & -\frac{\Lambda_1}{3} + \left[(1 + i\sqrt{3}) (3\Lambda_2 - \Lambda_1^2) \right] / \left[3\sqrt[3]{4} (-2\Lambda_1^3 + 9\Lambda_1\Lambda_2 - \right. \\ & \left. 27\Lambda_3 + \sqrt{-4(\Lambda_1^2 - 3\Lambda_2)^3 + (2\Lambda_1^3 - 9\Lambda_1\Lambda_2 + 27\Lambda_3)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \Big] - \\ & \frac{(1 - i\sqrt{3})}{6\sqrt[3]{2}} \left[-2\Lambda_1^3 + 9\Lambda_1\Lambda_2 - 27\Lambda_3 + \right. \\ & \left. \sqrt{-4(\Lambda_1^2 - 3\Lambda_2)^3 + (2\Lambda_1^3 - 9\Lambda_1\Lambda_2 + 27\Lambda_3)^2} \right]^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_3 = & -\frac{\Lambda_1}{3} + \left[(1 - i\sqrt{3}) (3\Lambda_2 - \Lambda_1^2) \right] / \left[3\sqrt[3]{4} (-2\Lambda_1^3 + 9\Lambda_1\Lambda_2 - \right. \\ & \left. 27\Lambda_3 + \sqrt{-4(\Lambda_1^2 - 3\Lambda_2)^3 + (2\Lambda_1^3 - 9\Lambda_1\Lambda_2 + 27\Lambda_3)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \Big] - \\ & \frac{(1 + i\sqrt{3})}{6\sqrt[3]{2}} \left[-2\Lambda_1^3 + 9\Lambda_1\Lambda_2 - 27\Lambda_3 + \right. \\ & \left. \sqrt{-4(\Lambda_1^2 - 3\Lambda_2)^3 + (2\Lambda_1^3 - 9\Lambda_1\Lambda_2 + 27\Lambda_3)^2} \right]^{\frac{1}{3}} . \end{aligned}$$

Al graficar las tres soluciones anteriores para l como función de ω se genera una estructura de bandas como se muestra enseguida. Si se considera Albite ($NaAlSi_3O_8$), un material completamente anisotrópico, es decir que depende de los 21 módulos elásticos se obtiene la siguiente estructura de bandas

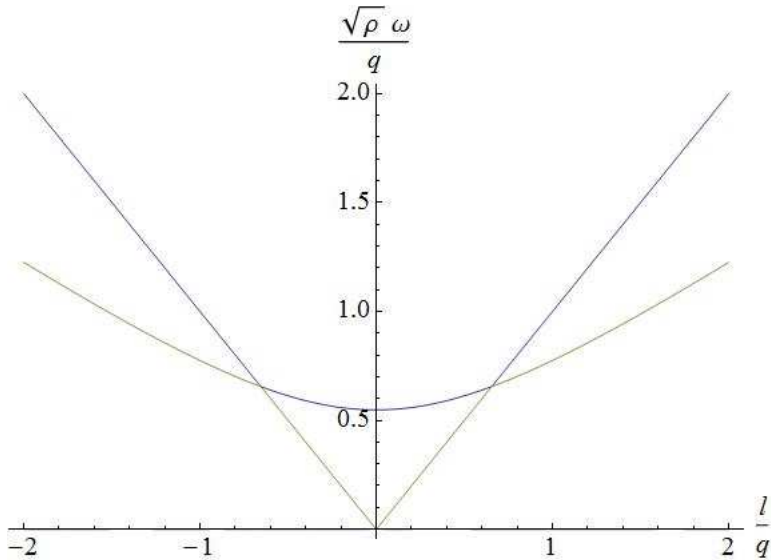


Gráfica 4. Espectro de bandas fonónicas para Albite ($NaAlSi_3O_8$) estratificado con módulos elásticos $C_{44} = \frac{26,8}{179,5}$, $C_{55} = \frac{24,9}{179,5}$, $C_{45} = \frac{-2,4}{179,5}$, $C_{46} = \frac{7,1}{179,5}$, $C_{56} = \frac{-8,7}{179,5}$ y $C_{66} = 1$. Los módulos elásticos fueron adimensionados con el módulo C_{66} .²

Para la gráfica anterior, los módulos elásticos fueron divididos por el módulo C_{66} con el fin de usar variables adimensionales.

Si ahora se considera un material menos general, particularmente uno con simetría hexagonal (B_eO) entonces la estructura de bandas cambia y se obtiene lo siguiente:

²Los módulos elásticos de este material fueron tomados de la referencia [20].



Gráfica 5. Espectro de bandas fonónicas para el cristal hexagonal B_eO con módulos elásticos $C_{44} = 0$, $C_{55} = \frac{14,77}{49,16}$, $C_{45} = 0$, $C_{46} = 0$, $C_{56} = 0$ y $C_{66} = 1$. Los módulos elásticos fueron adimensionados con el módulo C_{66} .³

De la Gráfica 5 notemos que a diferencia de lo que ocurre en un material completamente anisotrópico, en un material con simetrías las bandas de reflexión se cierran.

En este punto conviene recordar que al calcular el $\det(P_{\perp} - l\mathbb{I}) = 0$ se obtuvieron los valores propios de la matriz P_{\perp} , siendo éstos $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ así como sus negativos, es decir $-\tilde{\omega}_1$, $-\tilde{\omega}_2$ y $-\tilde{\omega}_3$. Lo que sigue ahora es determinar los vectores propios asociados a estos valores propios, para ello se debe resolver $(P_{\perp} - \lambda\mathbb{I}) \cdot \mathbf{x} = 0$, en donde λ es cualquiera de los valores propios y \mathbf{x} es un vector columna con seis entradas, es decir

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}.$$

³Los módulos elásticos del B_eO se obtuvieron de la referencia [23].

Para que la ecuación (4.60) tenga solución no trivial, se pide que $\det(P_{\perp} - \lambda \mathbb{I}) = 0$. A partir de esta condición, se garantiza entonces que el sistema tiene múltiples soluciones. Ahora bien, al resolver $(P_{\perp} - \lambda \mathbb{I}) \cdot \mathbf{x} = 0$ para cada uno de los valores propios se sabe que al menos una de las ecuaciones que conforman al sistema es linealmente dependiente, por lo tanto se puede eliminar una de las ecuaciones, en principio cualquiera de ellas y; a partir de las cinco restantes encontrar los valores de \mathbf{x} . De esta manera, una de las componentes de \mathbf{x} podrá elegirse arbitrariamente. En este caso se eliminó la primer ecuación de $(P_{\perp} - \lambda \mathbb{I}) \cdot \bar{x} = 0$ y se propuso $x_3 = 1$.

Los seis vectores propios obtenidos son $\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \Phi^5$ y Φ^6 ; y están asociados a los valores propios $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, -\tilde{\omega}_1, -\tilde{\omega}_2$ y $-\tilde{\omega}_3$ respectivamente. Sus componentes explícitas se muestran en el Apéndice B. Cabe destacar que los vectores propios son función de los módulos elásticos C_{ik} del material en cuestión.

Debido a que la matriz P_{\perp} es de coeficientes constantes entonces se garantiza que los valores propios son reales, lo que implica que las ondas elásticas sí se están propagando en el sólido helicoidal y no son ondas evanescentes. Además los vectores propios asociados son ortogonales como se mostró en la sección 4.4.

En este capítulo se consideró un medio estratificado para el cual se describieron sus propiedades elásticas; asimismo se introdujo el concepto de flujo de potencia elástica que resulta ser análogo al vector de Poynting en ondas electromagnéticas. Se estudió también la incidencia oblicua y normal de ondas elásticas sobre dicho medio; y se obtuvo un sistema de ecuaciones que describe la propagación de tales ondas. Se consideró el caso particular de un sólido helicoidal y se resolvieron las ecuaciones gobernantes para una onda incidiendo normalmente sobre la superficie, de esta manera se obtuvo la relación de dispersión y como consecuencia un espectro de bandas fonónicas. En tal espectro se observa la presencia de bandas de reflexión, que indican que se reflejará el modo cuya helicidad coincide con el giro del sólido helicoidal. Específicamente, se obtuvo la relación de dispersión para dos materiales, uno de ellos completamente anisotrópico y el otro con simetría hexagonal. Se observó que en el material con simetrías las bandas de reflexión se cierran, es decir, en este tipo de material está presente la isotropía por lo que los modos de las ondas no se verán afectados y siempre se van a propagar. Finalmente se encontraron los valores propios asociados a la matriz que describe al sistema helicoidal, así como sus vectores propios correspondientes; estos últimos representan las ondas que se propagan en el sólido helicoidal y son ortogonales.

Conclusiones

Partiendo del hecho de que los cristales líquidos han sido estudiados desde principios del siglo pasado se puso especial atención en los cristales líquidos colestéricos y la propagación de ondas electromagnéticas a través de ellos. El comportamiento de esta clase de sistemas es bien conocido. En relación con lo anterior se decidió estudiar un sistema con características similares a las de los cristales líquidos colestéricos, tal sistema fue un medio estratificado y las ondas de interés fueron de tipo elástico.

En primer lugar se consideraron medios homogéneos e isotrópicos y se estudió la reflexión y refracción de una onda plana, monocromática y elástica en tal medio y una frontera plana. Se estudiaron ondas incidentes tanto longitudinales como transversales. Debido a que el ángulo de incidencia fue arbitrario entonces la naturaleza de la onda cambió al reflejarse y al transmitirse, es decir, la onda longitudinal incidente al momento de reflejarse se descompuso en otra onda longitudinal; y una más transversal. El único caso en que la naturaleza de la onda permaneció inalterada fue para una onda transversal oscilando en un plano perpendicular al plano de incidencia o bien, para incidencia normal a la frontera. Se utilizó la ecuación constitutiva, que establece una relación entre el tensor de esfuerzos y el de elongación; y al imponer condiciones de frontera sobre los esfuerzos y desplazamientos se obtuvieron expresiones para las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas como función de la amplitud de la onda incidente, del ángulo de incidencia y de las propiedades elásticas de ambos medios. Se determinó que las únicas propiedades elásticas involucradas en las expresiones de las amplitudes reflejadas y transmitidas fueron el módulo de Young y la constante de Poisson de los medios que se estudiaron; particularmente se consideró como medio de incidencia al acero y como medio de transmisión al cobre. Además, tales relaciones juegan el papel de los coeficientes de Fresnel para ondas electromagnéticas.

Posteriormente se consideró un medio estratificado que es un medio no ho-

mogéneo, por lo que sus propiedades elásticas varían a lo largo de un eje determinado, en este caso se tomó al eje z . La descripción de este medio se hizo a partir de la ley de Hooke en su representación de componentes independientes, fue necesario aplicar una transformación a un sistema homogéneo para convertirlo en el medio estratificado. Por lo tanto la ecuación que describe al medio estratificado depende tanto de los módulos elásticos del material como de la coordenada z .

Se estudió también el flujo de energía en un medio elástico general, en donde se encontró una expresión para la potencia instantánea ejercida para deformar al medio elástico, que es precisamente la potencia instantánea que transportan las ondas elásticas. Relacionado con esto se definió un vector \mathbf{J} que proporciona la densidad de corriente de flujo de potencia elástica y que juega el papel del vector de Poynting para ondas electromagnéticas.

Se tomó en cuenta la propagación de ondas elásticas incidiendo de manera oblicua sobre el medio estratificado. A partir de la ecuación constitutiva que describe al medio, es decir de la Ley de Hooke transformada y de la segunda ley de Newton en su versión para medios continuos se definió un vector de seis elementos, tres de los cuales son las componentes del vector de desplazamientos y los otros tres son elementos del tensor de esfuerzos; con ellos se llegó a una ecuación de eigenvalores en forma matricial que contiene la información tanto del medio estratificado como de las ondas que se están propagando.

Puesto que las propiedades del medio estratificado varían a lo largo del eje Z , se calculó especialmente la corriente promedio en un período temporal de energía en esa dirección; y en conjunto con la ecuación de eigenvalores que describe al medio se obtuvo la condición para conservación de energía. De aquí se encontró que la matriz que gobierna a la ecuación de eigenvalores es un operador auto adjunto.

Se propuso como solución para la ecuación de eigenvalores un vector de seis entradas en donde cada entrada representa una onda elástica, tres de ellas propagándose hacia adelante y las otras tres hacia atrás para los tres valores posibles de polarización.

Debido a que se tenía una ecuación de eigenvalores, se analizaron también las propiedades de sus vectores propios y se encontró que los valores propios de la matriz M (la matriz de eigenvalores) ocurren en pares, es decir el valor y su conjugado. Además, si los vectores propios corresponden a diferentes valores propios entonces son ortogonales. La solución general de la ecuación de eigenvalores es entonces la superposición de los seis eigenvectores, es decir, de las seis ondas que se están propagando.

Se consideró también al medio estratificado como un conjunto de N capas

separadas por $N + 1$ planos sobre los que incide una onda plana. A partir de esto es que se obtuvo una expresión para la matriz de transferencia que relaciona las amplitudes de las ondas transmitidas con las de las ondas incidentes y reflejadas.

Finalmente se toma el caso de un sólido helicoidal, que es un medio estratificado helicoidal, cuya eje de la hélice gira alrededor del eje Z . Para describir la helicidad de este sistema fue necesario rotar un ángulo qz a la ecuación de eigenvalores que caracteriza al medio estratificado. Se resolvieron las ecuaciones que gobiernan al medio helicoidal pero únicamente para el caso en que la onda incide normalmente, esto da lugar a que la matriz en la ecuación de eigenvalores sea de coeficientes constantes; lo que garantiza que los valores propios serán reales y por tanto las ondas elásticas sí se estarán propagando en el medio y no serán evanescentes. La ecuación de eigenvalores del medio helicoidal se resuelve aplicando primero una rotación al sistema respecto al eje Z , pero dicha rotación va en sentido inverso al asociado a la geometría helicoidal. Se encontraron los valores propios asociados a esta ecuación. Éstos representan una relación entre el número de onda y la frecuencia de la onda. Al graficar a la frecuencia en función del número de onda se obtuvo un espectro de bandas fonónicas, en donde se observa la presencia de bandas de reflexión, las cuales indican que para ciertas frecuencias, las ondas elásticas no se propagan.

Para graficar la relación de dispersión se tomaron dos medios, el primero de ellos completamente anisotrópico (Albite) y el segundo con simetrías, específicamente un cristal hexagonal (B_eO). En las gráficas se aprecia que en el medio hexagonal las bandas de reflexión se cierran, esto sucede por la isotropía del medio, es decir, cualquier modo de las ondas elásticas se va a propagar. En cambio, en el medio anisotrópico, aparecen dos bandas de reflexión que indica que el modo de la onda cuya helicidad coincida con el giro de la estructura, se reflejará; mientras que el modo restante podrá propagarse.

Por último se encuentran los vectores propios asociados a estos valores propios; puesto que los vectores propios son distintos se concluye que los vectores propios son ortogonales e indican las seis ondas propagándose en el medio helicoidal, tres hacia adelante y tres hacia atrás.

Debido a que en este trabajo únicamente se resolvieron las ecuaciones para el caso en que la onda incide de manera normal al medio estratificado helicoidal, queda por resolver el caso más general, es decir el de incidencia oblicua para el cual sería necesario utilizar métodos numéricos puesto que la matriz gobernante ya no será de coeficientes constantes.

Apéndice A

Al considerar en la sección 3.4 el caso particular en que una onda longitudinal incide en una superficie que separa a dos medios elásticos, las amplitudes de las ondas reflejadas (R_p y R_s) y de las ondas transmitidas (T_p y T_s) son función tanto de la amplitud de la onda incidente A_0 como del ángulo de incidencia θ_0 . Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (3.51) y (3.52) se obtienen las expresiones correspondientes para las amplitudes R_p , R_s , T_p y T_s . Se han utilizado los siguientes cambios de variable para simplificar las expresiones; $q = c_{s1}/c_{p1}$, $q_p = c_{p2}/c_{p1}$, $q_s = c_{s2}/c_{p1}$, $\alpha = 2 \arcsin(q \sin \theta_0)$, $\alpha_1 = 2 \arcsin(q_p \sin \theta_0)$, $\alpha_2 = 2 \arcsin(q_s \sin \theta_0)$, $\beta = \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \theta_0}$, $\beta_1 = \sqrt{1 - q_p^2 \sin^2 \theta_0}$, $\beta_2 = \sqrt{1 - q_s^2 \sin^2 \theta_0}$.

$$R_p = \frac{a}{b}, \quad (4.63)$$

en donde

$$\begin{aligned} a = & -4A_0 \{ q \sin \theta_0 (4q_p^2 q_s^3 (q_s^2 - q^2) \sin^5 \theta_0 + 4q_p^2 q_s (q_s^2 - q^2) \sin^3 \theta_0 \times \\ & (q_s^2 \times \sin^2 \theta_0 - 1) + (4q^2 q_s^2 \cos^2 \theta_0 \sin \alpha_1 - 4q^2 q_p^2 \cos \theta_0 \times \\ & \sin \theta_0 + 2q_s^2 (1 - 2q^2 + 2q_s^2 \sin^2 \theta_0) \sin \alpha_1) \beta_2) + 2qq_p \cos \alpha (2 \times \\ & q_p q_s^3 \sin^4 \theta_0 - 2q^2 q_p q_s \sin^4 \theta_0 + (-q_p \cos \theta_0 + (1 - q^2 + q_s^2 + (q^2 - \\ & q_s^2) \cos 2\theta_0) \beta_1) \beta_2) + \frac{1}{4} \beta (16q^2 q_s^3 \cos^2 \theta_0 \sin \theta_0 \sin \alpha_1 + q_s (16 \times \\ & q^2 q_s^2 \sin^3 \theta_0 \sin \alpha_1 + \sin \theta_0 (-8q^4 q_p^2 \sin 2\theta_0 + q_p^2 (2q^2 + q_p^2 - 2q_s^2) \\ & (2q^2 - q_s^2) \sin 4\theta_0 + 8(1 - 2q^2) q_s^2 \sin \alpha_1) + 8q_p (1 - 2q_s^2 \sin^2 \theta_0) \\ & \times \beta_1 + 8q_s (q^2 - q_s^2) \sin 2\theta_0 \sin \alpha_1 \beta_2) + 4q_p \cos \theta_0 (q_p q_s (-2q^2 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1 + q_p^2 - 3q_s^2) + (q_p^2 - 2q_s^2) (q_s^2 - 1) - (2q^2 + q_p^2 - 2q_s^2) \cos \alpha_2) \times \\
 & \sin^2 \theta_0 + q_p q_s (1 + 2q^2 - q_s^2 + (q_s^2 - 2q^2) \cos 2\theta_0 + \cos \alpha_2) \times \\
 & (q_p^2 \sin^2 \theta_0 - 1) + 8q^2 (q_s^2 - q^2) \sin^2 \theta_0 \beta_1 \beta_2)) \} \\
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

y

$$\begin{aligned}
 b = & -8q q_p \cos \alpha \{ 2q^2 q_p q_s \sin^2 \theta_0 - 2q_p q_s^3 \sin^4 \theta_0 + (q^2 - q_s^2 - 1 + \\
 & (q_s^2 - q^2) \cos 2\theta_0) \beta_1 \beta_2) + 16q^2 q_s \cos^2 \theta_0 \sin \theta_0 (q q_p^2 \cos \alpha \times \\
 & \sin \theta_0 + q_s \sin \alpha_1 (q_s \beta + q \beta_2)) + q_s (4q \sin \theta_0 (4q_p^2 (q^2 - q_s^2) \times \\
 & \sin^3 \theta_0 + 8q_p^2 q_s^2 (q_s^2 - q^2) \sin^5 \theta_0 + 2q_s (1 - 2q^2 + q_s^2 - q_s^2 \times \\
 & \cos 2\theta_0) \sin \alpha_1 \beta_2) + \beta (16q^2 q_s^2 \sin^3 \theta_0 \sin \alpha_1 + \sin \theta_0 (8 \times \\
 & q^4 q_p^2 \sin 2\theta_0 - q_p^2 (2q^2 + q_p^2 - 2q_s^2) (2q^2 - q_s^2) \sin 4\theta_0 + 8 \times \\
 & (1 - 2q^2) q_s^2 \sin \alpha_1) + 8q_p (1 - 2q_s^2 \sin^2 \theta_0) \beta_1 + 8q_s (q_s^2 - q^2) \times \\
 & \sin 2\theta_0 \sin \alpha_1 \beta_2)) + 4q_p \cos \theta_0 (2q q_p (q^2 + \cos \alpha - q^2 \times \\
 & \cos 2\theta_0) \beta_2 + (q_s q_p (2q^2 (1 + q_p^2 - 3q_s^2) - (q_p^2 - 2q_s^2) (q_s^2 - 1) + \\
 & (2q^2 + q_p^2 - 2q_s^2) \cos \alpha_2) \sin^2 \theta_0 + q_p q_s (1 + 2q^2 - q_s^2 + (q_s^2 - \\
 & 2q^2) \cos 2\theta_0 + \cos \alpha_2) (1 - q_p^2 \sin^2 \theta_0) + 8q^2 (q^2 - q_s^2) \times \\
 & \sin^2 \theta_0 \beta_1 \beta_2) \}. \\
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$R_s = \frac{c}{d}, \tag{4.66}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 c = & -8A_0 \{ -q_s \cos \theta_0 (2q_p^2 \sin \theta_0 + q_p (8q^4 q_p - q_p q_s^2 (6 + q_p^2 - 3q_s^2) + \\
 & q_p (2q^2 q_p^2 + q_p^2 q_s^2 - 2q_s^4) \cos 2\theta_0 - q^2 (q_p^3 + 8q_p q_s^2 + 4q_s \times \\
 & \sqrt{2 - q_p^2 + q_p^2 \cos 2\theta_0} \sqrt{2 - q_s^2 + q_s^2 \cos 2\theta_0})) \sin^3 \theta_0 + 2q_p^4 \times \\
 & q_s^2 \sin^5 \theta_0 + 2 (1 - 2q^2) q_s \sin \alpha_1 \beta_2 + 4q_s^3 \sin^2 \theta_0 \sin \alpha_1 \beta_2) + \\
 & \beta_2) + q_p (q_p q_s (q^2 q_p^2 + q_s^4) \cos 3\theta_0 \sin^3 \theta_0 + q_p q_s ((2q^2 - 1) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (q_s^2 \sin^2 \theta_0 - 1) \sin 2\theta_0 + q^4 \sin^3 2\theta_0 - q^2 q_s^2 \sin^2 \theta_0 \sin 4\theta_0) - \\ & 2q^2 (2q^2 - 1) \sin 2\theta_0 \beta_1 \beta_2) + 4q^2 \cos^3 \theta_0 (-2q_p^2 q_s^3 \sin^3 \theta_0 - q_s^2 \times \\ & \sin \alpha_1 \beta_2 + q_p \sin \theta_0 (q_p q_s + 2q^2 \beta_1 \beta_2)) \} \end{aligned} \quad (4.67)$$

y

$$\begin{aligned} d = & -8qq_p \cos \alpha \{ 2q^2 q_p q_s \sin^2 \theta_0 - 2q_p q_s^3 \sin^4 \theta_0 + (q^2 - q_s^2 - 1) (q_s^2 - \\ & q^2) \cos 2\theta_0) \beta_1 \beta_2) + 16q^2 q_s \cos^2 \theta_0 \sin \theta_0 (qq_p^2 \cos \alpha \sin \theta_0 + \\ & q_s \sin \alpha_1 (q_s \beta + q\beta_2)) + q_s (4q \sin \theta_0 (4q_p^2 (q^2 - q_s^2) \sin^3 \theta_0 + \\ & 8q_p^2 q_s^2 (q_s^2 - q^2) \sin^5 \theta_0 + 2q_s (1 - 2q^2 + q_s^2 - q_s^2 \cos 2\theta_0) \sin \alpha_1 \times \\ & \beta_2) + \beta (16q^2 q_s^2 \sin^3 \theta_0 \sin \alpha_1 + \sin \theta_0 (8q^4 q_p^2 \sin 2\theta_0 - q_p^2 \times \\ & (2q^2 + q_p^2 - 2q_s^2) (2q^2 - q_s^2) \sin 4\theta_0 + 8(1 - 2q^2) q_s^2 \sin \alpha_1) + 8q_p \times \\ & (1 - 2q_s^2 \sin^2 \theta_0) \beta_1 + 8q_s (q_s^2 - q^2) \sin 2\theta_0 \sin \alpha_1 \beta_2)) + 4q_p \times \\ & \cos \theta_0 (2qq_p (q^2 + \cos \alpha - q^2 \cos 2\theta_0) \beta + (q_p q_s (2q^2 (1 + q_p^2 - \\ & 3q_s^2) - (q_p^2 - 2q_s^2) (q_s^2 - 1) + (2q^2 + q_p^2 - 2q_s^2) \cos \alpha_2) \sin^2 \theta_0 + \\ & q_p q_s (1 + 2q^2 - q_s^2 + (q_s^2 - 2q^2) \cos 2\theta_0 + \cos \alpha_2) (1 - q_p^2 \times \\ & \sin^2 \theta_0) + 8q^2 (q^2 - q_s^2) \sin^2 \theta_0 \beta_1 \beta_2) \} . \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$T_p = \frac{e}{f}, \quad (4.69)$$

en donde

$$\begin{aligned} e = & 16A_0 q_p \{ q^2 \sin \theta_0 \sin 2\theta_0 (q_s \beta + q\beta_2) + 2q^2 \cos^3 \theta_0 (q_s \beta (1 + 2 \times \\ & (q^2 - q_s^2) \sin^2 \theta_0) + q \cos \alpha \beta_2 + 2q^3 \sin^2 \theta_0 \beta_2) + \cos \theta_0 \left(\frac{1}{2} \times \right. \\ & q_s \beta (2 - 2q^2 - q^4 - 2q_s^2 + q^2 q_s^2 - 2(q^2 - q_s^2) \cos 2\theta_0 + q^2 (q^2 - q_s^2) \\ & \times \cos 4\theta_0) - q \cos \alpha (2q^2 - q_s^2 - 1 + q_s^2 \cos 2\theta_0) \beta_2 + 4q^3 \times \\ & \left. \sin^2 \theta_0 (q_s^2 \sin^2 \theta_0 - q^2) \beta_2 \right\} \end{aligned}$$

$$(4.70)$$

y

$$\begin{aligned}
 f = & -8qq_p \cos \alpha \{ 2q^2 q_p q_s \sin^2 \theta_0 - 2q_p q_s^3 \sin^4 \theta_0 + (q^2 - q_s^2 - 1 + \\
 & (q_s^2 - q^2) \cos 2\theta_0) \beta_1 \beta_2 \} + 16q^2 q_s \cos^2 \theta_0 \sin \theta_0 (qq_p^2 \cos \alpha \times \\
 & \sin \theta_0 + q_s \sin \alpha_1 (q_s \beta + q \beta_2)) + q_s (4q \sin \theta_0 (4q_p^2 (q^2 - q_s^2) \times \\
 & \sin^3 \theta_0 + 8q_p^2 q_s^2 (q_s^2 - q^2) \sin^5 \theta_0 + 2q_s (1 - 2q^2 + q_s^2 - q_s^2 \times \\
 & \cos 2\theta_0) \sin \alpha_1 \beta_2) + \beta (16q^2 q_s^2 \sin^3 \theta_0 \sin \alpha_1 + \sin \theta_0 (8 \times \\
 & q^4 q_p^2 \sin 2\theta_0 - q_p^2 (2q^2 - q_p^2 - 2q_s^2) (2q^2 - q_s^2) \sin 4\theta_0 + 8(1 - 2 \times \\
 & q^2) q_s^2 \sin \alpha_1) + 8q_p (1 - 2q_s^2 \sin^2 \theta_0) \beta_1 + 8q_s (q_s^2 - q^2) \sin 2\theta_0 \\
 & \times \sin \alpha_1 \beta_2)) + 4q_p \cos \theta_0 (2qq_p (q^2 + \cos \alpha - q^2 \cos 2\theta_0) \beta_2 + \\
 & \beta (q_p q_s (2q^2 (1 + q_p^2 - 3q_s^2) - (q_p^2 - 2q_s^2) (q_s^2 - 1) + (2q^2 + q_p^2 - 2 \times \\
 & q_s^2) \cos \alpha_2) \sin^2 \theta_0 + q_p q_s (1 + 2q^2 - q_s^2 + (q_s^2 - 2q^2) \cos 2\theta_0 + \\
 & \cos \alpha_2) (1 - q_p^2 \sin^2 \theta_0) + 8q^2 (q^2 - q_s^2) \sin^2 \theta_0 \beta_1 \beta_2)) \}.
 \end{aligned}
 \tag{4.71}$$

$$T_s = \frac{g}{h}, \tag{4.72}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 g = & 4A_0 \{ qq_p \sin 2\theta_0 (-2q_p \cos \alpha (2q^2 - q_s^2 + q_s^2 \cos 2\theta_0) + 2q^4 q_p \times \\
 & \sin^2 \theta_0 + 4q (1 - 2q^2) \beta \beta_1) + 8q^2 q_p \cos^3 \theta_0 \sin \theta_0 (qq_p \cos \alpha \\
 & + 2(q_s^2 - q^2) \beta \beta_1) - 4 \cos \theta_0 (-4q^3 q_p^2 q_s^2 \sin^5 \theta_0 + (2q^2 - 1) q_s^2 \times \\
 & \beta \sin \alpha_1 - 2q^2 q_s^2 \beta \sin^2 \theta_0 \sin \alpha_1 + 4q^4 q_p \sin^3 \theta_0 (qq_p + \beta \beta_1)) \}
 \end{aligned}
 \tag{4.73}$$

y

$$\begin{aligned}
 h = & -8qq_p \cos \alpha \{ 2q^2 q_p q_s \sin^2 \theta_0 - 2q_p q_s^3 \sin^4 \theta_0 + (q^2 - q_s^2 - 1 + \\
 & (q_s^2 - q^2) \cos 2\theta_0) \beta_1 \beta_2 \} + 16q^2 q_s \cos^2 \theta_0 \sin \theta_0 (qq_p^2 \cos \alpha \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin \theta_0 + q_s \sin \alpha_1 (q_s \beta + q \beta_2) + q_s (4q \sin \theta_0 (4q_p^2 (q^2 - q_s^2) \times \\
& \sin^3 \theta_0 + 8q_p^2 q_s^2 (q_s^2 - q^2) \sin^5 \theta_0 + 2q_s (1 - 2q^2 + q_s^2 - q_s^2 \times \\
& \cos 2\theta_0) \sin \alpha_1 \beta_2) + \beta (16q^2 q_s^2 \sin^3 \theta_0 \sin \alpha_1 + \sin \theta_0 (8 \times \\
& q^4 q_p^2 \sin 2\theta_0 - q_p^2 (2q^2 + q_p^2 - 2q_s^2) \sin 4\theta_0 + 8 (1 - 2q^2) q_s^2 \times \\
& \sin \alpha_1) + 8q_p (1 - 2q_s^2 \sin^2 \theta_0) \beta_1 + 8q_s (q_s^2 - q^2) \sin 2\theta_0 \times \\
& \sin \alpha_1 \beta_2) + 4q_p \cos \theta_0 (2qq_p (q^2 + \cos \alpha - q^2 \cos 2\theta_0) \beta_2 \\
& + \beta (q_p q_s (2q^2 (1 + q_p^2 - 3q_s^2) - (q_p^2 - 2q_s^2) (q_s^2 - 1) + (2q^2 + q_p^2 - \\
& 2q_s^2) \cos \alpha_2) \sin^2 \theta_0 + q_p q_s (1 + 2q^2 - q_s^2 + (q_s^2 - 2q^2) \cos 2\theta_0 \\
& + \cos \alpha_2) (1 - q_p^2 \sin^2 \theta_0) + 8q^2 (q^2 - q_s^2) \sin^2 \theta_0 \beta_1 \beta_2) \}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

A partir de los coeficientes anteriores se grafican las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas en función del ángulo de incidencia. Esto se observa en la Gráfica 3.

Apéndice B

Al tomar la matriz P_{\perp} , ecuación (4.58) y calculando el $\det(P_{\perp} - l\mathbb{I}) = 0$ se obtienen los valores propios asociados a esta matriz. Si ahora se toma por separado cada valor propio y se resuelve $(P_{\perp} - \lambda\mathbb{I}) \cdot \bar{x} = 0$ entonces se obtiene el vector propio asociado a dicho valor. En seguida se muestran las componentes de cada uno de los vectores propios. Se denotará como Φ^i ($i = 1, 2, \dots, 6$) al vector propio correspondiente y como Φ_j^i ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) a las componentes de dicho vector.

Φ^1 vector propio asociado a $\tilde{\omega}_1$

$$\Phi^1 = \begin{pmatrix} \Phi_1^1 \\ \Phi_2^1 \\ \Phi_3^1 \\ \Phi_4^1 \\ \Phi_5^1 \\ \Phi_6^1 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

en donde

$$\Phi_1^1 = -\frac{1}{g_1} [\tilde{\omega}_1^5 - ib_2\tilde{\omega}_1^2q\omega^2\rho + ig_3q\omega^4\rho^2 + \tilde{\omega}_1^3(-q^2 + (b_4 + b_6)\omega^2\rho) - \tilde{\omega}_1 \times \omega^2\rho(b_5^2\omega^2\rho + b_6(q^2 - b_4\omega^2\rho))]$$

$$\Phi_2^1 = -\frac{i}{g_1} [\tilde{\omega}_1^4q + ib_2\tilde{\omega}_1^3\omega^2\rho - g_4q\omega^2\rho - ig_3\tilde{\omega}_1\omega^4\rho^2 - \tilde{\omega}_1^2q(q^2 + (b_4 - b_6) \times \omega^2\rho)]$$

$$\Phi_3^1 = 1$$

$$\Phi_4^1 = -\frac{i}{g_2} [\tilde{\omega}_1^4 + g_4 \omega^2 \rho + \tilde{\omega}_1^2 (q^2 + (b_4 + b_6) \omega^2 \rho)]$$

$$\Phi_5^1 = \frac{1}{g_2} [2\tilde{\omega}_1^3 q + ib_2 \tilde{\omega}_1^2 \omega^2 \rho + 2b_6 \tilde{\omega}_1 q \omega^2 - ig_3 \omega^4 \rho^2]$$

$$\Phi_6^1 = \frac{i\omega^2 \rho}{\tilde{\omega}_1}$$

Φ^2 vector propio asociado a $\tilde{\omega}_2$

$$\Phi^2 = \begin{pmatrix} \Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \\ \Phi_3^2 \\ \Phi_4^2 \\ \Phi_5^2 \\ \Phi_6^2 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

en donde

$$\Phi_1^2 = -\frac{1}{g_5} [\tilde{\omega}_2^5 - ib_2 \tilde{\omega}_2^2 q \omega^2 \rho + ig_3 q \omega^4 \rho^2 + \tilde{\omega}_2^3 (-q^2 + (b_4 + b_6) \omega^2 \rho) - \tilde{\omega}_2 \times \omega^2 \rho (b_5^2 \omega^2 \rho + b_6 (q^2 - b_4 \omega^2 \rho))]$$

$$\Phi_2^2 = -\frac{i}{g_5} [\tilde{\omega}_2^4 q + ib_2 \tilde{\omega}_2^3 \omega^2 \rho - g_4 q \omega^2 \rho - ig_3 \tilde{\omega}_2 \omega^4 \rho^2 - \tilde{\omega}_2^2 q (q^2 + (b_4 - b_6) \times \omega^2 \rho)]$$

$$\Phi_3^2 = 1$$

$$\Phi_4^2 = -\frac{i}{g_6} [\tilde{\omega}_2^4 + g_4 \omega^2 \rho + \tilde{\omega}_2^2 (q^2 + (b_4 + b_6) \omega^2 \rho)]$$

$$\Phi_5^2 = \frac{1}{g_6} [2\tilde{\omega}_2^3 q + ib_2 \tilde{\omega}_2^2 \omega^2 \rho + 2b_6 \tilde{\omega}_2 q \omega^2 - ig_3 \omega^4 \rho^2]$$

$$\Phi_6^2 = \frac{i\omega^2 \rho}{\tilde{\omega}_2}.$$

Φ^3 vector propio asociado a $\tilde{\omega}_3$

$$\Phi^3 = \begin{pmatrix} \Phi_1^3 \\ \Phi_2^3 \\ \Phi_3^3 \\ \Phi_4^3 \\ \Phi_5^3 \\ \Phi_6^3 \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

en donde

$$\Phi_1^3 = -\frac{1}{g_7} [\tilde{\omega}_3^5 - ib_2 \tilde{\omega}_3^2 q \omega^2 \rho + ig_3 q \omega^4 \rho^2 + \tilde{\omega}_3^3 (-q^2 + (b_4 + b_6) \omega^2 \rho) - \tilde{\omega}_3 \times \omega^2 \rho (b_5^2 \omega^2 \rho + b_6 (q^2 - b_4 \omega^2 \rho))]$$

$$\Phi_2^3 = -\frac{i}{g_7} [\tilde{\omega}_3^4 q + ib_2 \tilde{\omega}_3^3 \omega^2 \rho - g_4 q \omega^2 \rho - ig_3 \tilde{\omega}_3 \omega^4 \rho^2 - \tilde{\omega}_3^2 q (q^2 + (b_4 - b_6) \times \omega^2 \rho)]$$

$$\Phi_3^3 = 1$$

$$\Phi_4^3 = -\frac{i}{g_8} [\tilde{\omega}_3^4 + g_4 \omega^2 \rho + \tilde{\omega}_3^2 (q^2 + (b_4 + b_6) \omega^2 \rho)]$$

$$\Phi_5^3 = \frac{1}{g_8} [2\tilde{\omega}_3^3 q + ib_2 \tilde{\omega}_3^2 \omega^2 \rho + 2b_6 \tilde{\omega}_3 q \omega^2 - ig_3 \omega^4 \rho^2]$$

$$\Phi_6^3 = \frac{i\omega^2 \rho}{\tilde{\omega}_3}.$$

Φ^4 vector propio asociado a $-\tilde{\omega}_1$

$$\Phi^4 = \begin{pmatrix} \Phi_1^4 \\ \Phi_2^4 \\ \Phi_3^4 \\ \Phi_4^4 \\ \Phi_5^4 \\ \Phi_6^4 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

en donde

$$\Phi_1^4 = -\frac{1}{g_9} [\tilde{\omega}_1^5 + ib_2 \tilde{\omega}_1^2 q \omega^2 \rho - ig_3 q \omega^4 \rho^2 + \tilde{\omega}_1^3 (-q^2 + (b_4 + b_6) \omega^2 \rho) - \tilde{\omega}_1 \times \omega^2 \rho (b_5^2 \omega^2 \rho + b_6 (q^2 - b_4 \omega^2 \rho))]$$

$$\Phi_2^4 = \frac{i}{g_9} [\tilde{\omega}_1^4 q - ib_2 \tilde{\omega}_1^3 \omega^2 \rho - g_4 q \omega^2 \rho + ig_3 \tilde{\omega}_1 \omega^4 \rho^2 - \tilde{\omega}_1^2 q (q^2 + (b_4 - b_6) \times \omega^2 \rho)]$$

$$\Phi_3^4 = 1$$

$$\Phi_4^4 = \frac{i}{g_{10}} [\tilde{\omega}_1^4 + g_4 \omega^2 \rho + \tilde{\omega}_1^2 (q^2 + (b_4 + b_6) \omega^2 \rho)]$$

$$\Phi_5^4 = \frac{1}{g_{10}} [2\tilde{\omega}_1^3 q - ib_2 \tilde{\omega}_1^2 \omega^2 \rho + 2b_6 \tilde{\omega}_1 q \omega^2 + ig_3 \omega^4 \rho^2]$$

$$\Phi_6^4 = -\frac{i\omega^2\rho}{\tilde{\omega}_1}.$$

Φ^5 vector propio asociado a $-\tilde{\omega}_2$

$$\Phi^5 = \begin{pmatrix} \Phi_1^5 \\ \Phi_2^5 \\ \Phi_3^5 \\ \Phi_4^5 \\ \Phi_5^5 \\ \Phi_6^5 \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

en donde

$$\Phi_1^5 = -\frac{1}{g_{11}} [\tilde{\omega}_2^5 + ib_2\tilde{\omega}_2^2q\omega^2\rho - ig_3q\omega^4\rho^2 + \tilde{\omega}_2^3(-q^2 + (b_4 + b_6)\omega^2\rho) - \tilde{\omega}_2 \times \omega^2\rho(b_3^2\omega^2\rho + b_6(q^2 - b_4\omega^2\rho))]$$

$$\Phi_2^5 = \frac{i}{g_{11}} [\tilde{\omega}_2^4q - ib_2\tilde{\omega}_2^3\omega^2\rho - g_4q\omega^2\rho + ig_3\tilde{\omega}_2\omega^4\rho^2 - \tilde{\omega}_2^2q(q^2 + (b_4 - b_6) \times \omega^2\rho)]$$

$$\Phi_3^5 = 1$$

$$\Phi_4^5 = \frac{i}{g_{12}} [\tilde{\omega}_2^4 + g_4\omega^2\rho + \tilde{\omega}_2^2(q^2 + (b_4 + b_6)\omega^2\rho)]$$

$$\Phi_5^5 = \frac{1}{g_{12}} [2\tilde{\omega}_2^3q - ib_2\tilde{\omega}_2^2\omega^2\rho + 2b_6\tilde{\omega}_2q\omega^2 + ig_3\omega^4\rho^2]$$

$$\Phi_6^4 = -\frac{i\omega^2\rho}{\tilde{\omega}_2}.$$

Φ^6 vector propio asociado a $-\tilde{\omega}_3$

$$\Phi^6 = \begin{pmatrix} \Phi_1^6 \\ \Phi_2^6 \\ \Phi_3^6 \\ \Phi_4^6 \\ \Phi_5^6 \\ \Phi_6^6 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

en donde

$$\Phi_1^6 = -\frac{1}{g_{13}} [\tilde{\omega}_3^5 + ib_2\tilde{\omega}_3^2q\omega^2\rho - ig_3q\omega^4\rho^2 + \tilde{\omega}_3^3(-q^2 + (b_4 + b_6)\omega^2\rho) - \tilde{\omega}_3 \times \omega^2\rho (b_5^2\omega^2\rho + b_6(q^2 - b_4\omega^2\rho))]$$

$$\Phi_2^6 = \frac{i}{g_{13}} [\tilde{\omega}_3^4q - ib_2\tilde{\omega}_3^3\omega^2\rho - g_4q\omega^2\rho + ig_3\tilde{\omega}_3\omega^4\rho^2 - \tilde{\omega}_3^2q(q^2 + (b_4 - b_6) \times \omega^2\rho)]$$

$$\Phi_3^6 = 1$$

$$\Phi_4^6 = \frac{i}{g_{14}} [\tilde{\omega}_3^4 + g_4\omega^2\rho + \tilde{\omega}_3^2(q^2 + (b_4 + b_6)\omega^2\rho)]$$

$$\Phi_5^6 = \frac{1}{g_{14}} [2\tilde{\omega}_3^3q - ib_2\tilde{\omega}_3^2\omega^2\rho + 2b_6\tilde{\omega}_3q\omega^2 + ig_3\omega^4\rho^2]$$

$$\Phi_6^6 = -\frac{i\omega^2\rho}{\tilde{\omega}_3}$$

con

$$g_1 = \tilde{\omega}_1\omega^2\rho [b_5(2i\tilde{\omega}_1q - b_2\omega^2\rho) + b_3(\tilde{\omega}_1^2 + q^2 + b_4\omega^2\rho)]$$

$$g_2 = \tilde{\omega}_1 [b_5 (2i\tilde{\omega}_1 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_1^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_3 = (b_3 b_5 - b_2 b_6)$$

$$g_4 = [-b_5^2 \omega^2 \rho + b_6 (q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_5 = \tilde{\omega}_2 \omega^2 \rho [b_5 (2i\tilde{\omega}_2 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_2^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_6 = \tilde{\omega}_2 [b_5 (2i\tilde{\omega}_2 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_2^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_7 = \tilde{\omega}_3 \omega^2 \rho [b_5 (2i\tilde{\omega}_3 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_3^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_8 = \tilde{\omega}_3 [b_5 (2i\tilde{\omega}_3 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_3^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_9 = \tilde{\omega}_1 \omega^2 \rho [b_5 (-2i\tilde{\omega}_1 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_1^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_{10} = \tilde{\omega}_1 [b_5 (-2i\tilde{\omega}_1 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_1^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_{11} = \tilde{\omega}_2 \omega^2 \rho [b_5 (-2i\tilde{\omega}_2 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_2^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_{12} = \tilde{\omega}_2 [b_5 (-2i\tilde{\omega}_2 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_2^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_{13} = \tilde{\omega}_3 \omega^2 \rho [b_5 (-2i\tilde{\omega}_3 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_3^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

$$g_{14} = \tilde{\omega}_3 [b_5 (-2i\tilde{\omega}_3 q - b_2 \omega^2 \rho) + b_3 (\tilde{\omega}_3^2 + q^2 + b_4 \omega^2 \rho)]$$

Bibliografía

- [1] A. H. Nayfeh, *The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media*, J. Acoust. Soc. Am. **89**(4), 1521-1531 (1991).
- [2] R.E. Camley, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski and A. A. Maradudin, *Transverse elastic waves in periodically layered infinite and semi-infinite media*, Phys. Rev. B **27**, 7218-7329 (1983).
- [3] A. Lakhtakia, *Elastodynamic wave propagation in a continuously twisted structurally chiral medium along the axis of spirality*, J. Acoust. Soc. Am. **95**, 597-600 (1994).
- [4] A. K. Mal, *Wave propagation in layered composite laminates under periodic surface loads*, Wave motion **10**(3), 257-266 (1988).
- [5] W. T. Thomson, *Transmission of elastic waves through a stratified solid medium*, J. Appl. Phys. **21**(2), 89-93 (1950).
- [6] A. M. Braga and G. Hermann, *Floquet waves in anisotropic periodically layered composites*, J. Acoust. Soc. Am. **91**(3), 1211-1227 (1992).
- [7] C. Oldano, J. A. Reyes and S. Ponti, *Twist defects in helical sonic structures*, Phys. Rev. E **67**, 056624 (2003).
- [8] S. Singh and D. A. Dunmur, *Liquid crystals: fundamentals*. (World Scientific, Singapore, 2002).
- [9] S. Pikin and L. Blinov, *Cristales Líquidos*. (Mir Moscú, URSS, 1985).
- [10] S. Chandrasekhar, *Liquid Crystals*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [11] P. G. de Gennes and J. Prost, *The physics of liquid crystals*, 2nd ed. (Oxford University Press, USA, 1993).
- [12] M. Kleman and O. D. Lavrentovich, *Soft matter physics: an introduction*. (Springer Science & Business Media, USA, 2003).
- [13] R. M. Velasco Belmont, *Introducción a la elasticidad*. (Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2009).

- [14] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics Volume 7 Theory of Elasticity*, 3rd ed. (Pergamon Press, UK, 1986).
- [15] M. A. Slawinski, *Waves and rays in elastic continua*, 2nd ed. (World Scientific, Singapore, 2007), pp. 63-70, 93-101.
- [16] B. G. Livshits, V. S. Kraposhin and Ya. L. Linetski, *Propiedades físicas de metales y aleaciones*, 2nd ed. (Editorial Mir Moscú, URSS, 1982).
- [17] D.P. Bentz and K. R. Prasad, *Thermal Performance of Fire Resistive Materials I. Characterization with Respect to Thermal Performance Models*, NISTIR **7401**, (2007).
- [18] G. K. White and S. J. Collocott, *Heat Capacity of Reference Materials: Cu and W*, J. Phys. Chem. **13**, (1984).
- [19] A. Villegas Juárez, *Tesis de Licenciatura: Espectro de bandas fotónicas y fonónicas en un medio helicoidal*. (Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2015).
- [20] J. M. Brown, E. H. Abramson and R. J. Angel, Triclinic elastic constants for low albite, Phys. Chem. Minerals **33**(4), 256-265 (2006).
- [21] K. Roobie, M. J. Brett and A. Lakhtakia, *First thin film realization of a helicoidal bianisotropic medium*, J. Vac. Sci. Technol. A **13**(6), 2991-2993 (1995).
- [22] G. B. Arfken, H. J. Weber and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physics*, 7th ed. (Academic Press, USA, 2013).
- [23] C. F. Cline, H. L. Dunegan and G. W. Henderson, *Elastic constants of hexagonal BeO, ZnS and CdSe*, J. Appl. Phys. **38**(4), 1944-1948 (1967).