UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ENUNCIADOS INDEPENDIENTES Y SUS CONSECUENCIAS EN LA EXTENSION DE FUNCIONES CONTINUAS DE VALOR DISCRETO EN ESPACIOS METRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMATICO

P R E S E N T A :

JONAS RAFFAEL MARTINEZ SANCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. MANUEL ALEJANDRO LARA MARY
2016

Ciudad Universitaria, CDMX

Datos del alumno
Martínez Sánchez Jonás Raffael 0445585654174 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 103000624
Datos del jurado
1. Datos del Tutor M. en C. Manuel Alejandro Lara Mary
2. Datos del Sinodal 1 Dr. Roberto Pichardo Mendoza
3. Datos del Sinodal 2 M. en C. Alejandro Darío Rojas Sánchez
4. Datos del Sinodal 3 Dr. David Meza Alcántara
5. Datos del Sinodal 4 Dr. Osvaldo Alfonso Téllez Nieto
Datos del trabajo escrito
Enunciados Independientes y sus consecuencias en la extensión de funciones continuas de valor discreto en espacios métricos. 82 pág. 2016

RESUMEN

Uno de los problemas principales de la topología general es el de la extensión de funciones continuas. El interés en este problema es motivado en gran parte por sus aplicaciones en análisis, por lo que muchos de los teoremas de extensión consideran funciones continuas de valor real. Así mismo, el análisis es una fuente importante de resultados de este tipo. Brower y Lebesgue prueban una versión inicial del clásico Teorema de Extensión de Tietze para espacios vectoriales reales de dimensión finita, la prueba de Tietze establece el resultado para espacios métricos y finalmente Urysohn hace la demostración general para espacios normales.

El presente trabajo tiene como base el artículo de John Kulesza, Ronnie Levy y Peter Nyikos, *Extending Discrete-valued Functions*, [18], en donde se estudia el problema de extender funciones continuas con dominio un subespacio S de un espacio métrico X, cuando éstas toman valores en un espacio discreto. Dados un espacio topológico X y un cardinal κ equipado con la topología discreta, decimos que $S \subset X$ está **κ-encajado** en X si toda función continua $f : S \longrightarrow \kappa$ admite una extensión continua $F : X \longrightarrow \kappa$. En dicho artículo se prueba en específico que para un espacio métrico separable es condición necesaria y suficiente que $S \subseteq X$ esté 2-encajado en X para que S esté κ-encajado para cualquier cardinal κ. Qué ocurre cuando X es un espacio métrico no separable es la motivación central de este trabajo.

Después de la introducción de la técnica de forcing por Paul Cohen para probar la independencia de la Hipótesis del Continuo de los axiomas clásicos de la teoría de conjuntos, las pruebas de consistencia se volvieron comunes en la investigación y los resultados que se obtienen a partir de asumir hipótesis adicionales a los axiomas de la teoría ZFC se han multiplicado. En el artículo de Kulesza, Levy y Nyikos se prueba que asumiendo que no existe un modelo interno de la teoría de conjuntos con un cardinal medible (es decir, una clase propia que es modelo de la teoría ZFC y contiene a todos los ordinales), es posible encontrar un espacio métrico con un subconjunto 2-encajado y no α- encajado para un α particular. Por otro lado se prueba que bajo hipótesis que se siguen del Axioma de Martin,

existe un espacio métrico con un subconjunto 2-encajado que no está ni siquiera ω-encajado. Este teorema hace uso de una versión de un espacio de Mrówka-Isbell, Ψ. Finalmente, se demuestra que asumiendo el *Product Measure Extension Axiom* (PMEA) tal Ψ no puede existir.

Nuestros objetivos con este trabajo son dos. En primer lugar desarrollar el estudio y los resultados que se presentan en *Extending Discrete-valued Functions*. Para esto introduciremos los temas sobre combinatoria infinita, invariantes cardinales, espacios de Mrówka-Isbell, PMEA, etc. que no suelen tratarse en cursos de licenciatura y son necesarios para varias pruebas realizadas en el artículo. En segundo lugar, exhibir ejemplos de la profunda relación entre tres grandes ramas de las matemáticas: topología, teoría de conjuntos y análisis.

El texto se encuentra organizado de la siguiente manera. Los primeros dos capítulos desarrollan la herramienta conjuntista de la que haremos uso en los capítulos 5 y 6. El capítulo 1 se ocupa de desarrollar un poco de la combinatoria infinita que forma parte de las hipótesis del teorema 5.9. Por su parte el capítulo 2 da un panorama sobre grandes cardinales (cardinales medibles y fuertemente compactos) que es indispensable para la introducción del PMEA en el capítulo 6. En ambos se introduce además terminología y notación.

En el capítulo 3 presentamos el primer resultado importante del artículo, el teorema 3.8: un subconjunto S de un espacio métrico separable X está 2-encajado en X si y sólo si está κ-encajado en X para cualquier cardinal κ. Damos un vistazo al ejemplo de un espacio con un subconjunto 2-encajado pero no κ-encajado para un κ infinito. Al final del capítulo se encuentra una aplicación de este resultado.

El capítulo 4 hace un breve compendio sobre la compactación de Stone-Čech del espacio discreto ω y lo exhibe como un punto de contacto entre la combinatoria infinita en ω y la topología del espacio. Como ejemplo de ello, en la proposición 4.7, se prueba que el número de pseudointersección, $\mathfrak{p}$, es el mínimo cardinal de una familia de cerrado abiertos de ω^* con la propiedad de la intersección finita cuya intersección tiene interior vacío (en ω^*). Tiene también el fin de presentar a los espacios de Mrówka-Isbell, que son fundamentales para el resultado principal del capítulo 5.

El primero de los resultados que involucran asumir hipótesis independientes de la teoría

ZFC se encuentra en el capítulo 5, el teorema 5.9: asumiendo $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$, existe una familia *MAD* $\mathcal{E}$ tal que todo subconjunto numerable de puntos no aislados de $\Psi_{\mathcal{E}}$ está 2-encajado en $\Psi_{\mathcal{E}}$. En este capítulo se muestra además como remplazar cada punto de un espacio X primero numerable con el fin de hallar un espacio con la misma estructura de cerrado abiertos, tal espacio es el llamado *erizo de* X, $\mathcal{H}(X)$. Este espacio es además metrizable como consecuencia del teorema de metrizabilidad de Frink, al cual está dedicado el apéndice A.

Finalmente, el resultado central del capítulo 6, el teorema 6.13, es mostrar que asumir PMEA impide la existencia de un espacio como el que se construye en el teorema 5.9. Con el fin de introducir PMEA y su consistencia con la teoría de conjuntos, en este capítulo presentamos de manera extremadamente breve el método de *forcing* y los reales aleatorios de Solovay. Hacemos una discusión corta de la relación del PMEA con otro problema relacionado con resultados de consistencia, la conjetura del espacio normal de Moore, que es un caso particular de otro de los problemas principales de la topología general, que es la metrizabilidad de un espacio topológico.

El apéndice B, recopila resultados sobre álgebras de Boole y filtros en álgebras potencia que son usados a lo largo del texto. Hemos intentado que el texto se contenga a sí mismo lo mejor posible. Siempre que los resultados han superado el alcance del texto o divergen mucho del tema principal se han agregado referencias para el lector. Si bien un curso básico de topología general basta para entender este texto, conocimientos un poco más avanzados de teoría de conjuntos son requeridos. En particular, es recomendable tener familiaridad con la teoría de ordinales y cardinales, su aritmética y la noción de cofinalidad.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: CARDINALES PEQUEÑOS

¿Cuántos subconjuntos infinitos tiene el conjunto de números naturales ω? La respuesta sencilla a esta pregunta es que tiene una cantidad no numerable pues $\wp(\omega)$ es no numerable y ω tiene sólo una cantidad numerable de conjuntos finitos. En específico, tantos como $|\wp(\omega)| = 2^{\omega} = \mathfrak{c}$. Si pretendemos saber el cardinal exacto de esa familia la respuesta es: existe una clase (una colección tan grande que no es un conjunto) entera de posibles candidatos y es consistente con la teoría de conjuntos que sea cualquiera de ellos. Si buscamos el más pequeño de ellos encontramos que es apenas el primer cardinal no numerable ω_1.

Como veremos en este capítulo, muchas veces preguntarnos por el mínimo cardinal de una familia de subconjuntos de ω con alguna propiedad particular nos lleva a definir cardinales que son no numerables y al mismo tiempo son menores o iguales que $\mathfrak{c}$. A los cardinales con dicha propiedad, ser mayores que ω pero menores o iguales que $\mathfrak{c}$, es a los que llamamos cardinales pequeños, cardinales característicos del continuo o invariantes cardinales.

Los invariantes cardinales están sujetos a quien sea $\mathfrak{c}$. Por ejemplo, si la Hipótesis del Continuo es cierta, todos ellos, así como $\mathfrak{c}$ son ω_1. También es consistente que $\mathfrak{c} = \omega_2$ y muchos de ellos sean ω_1, así como que todos ellos y $\mathfrak{c}$ sean ω_2. Sin embargo, hay relaciones de orden entre ellos demostrables en ZFC.

Los cardinales característicos del continuo no sólo son relevantes en teoría de conjuntos, su estado en el universo de la teoría de conjuntos tiene implicaciones en muchas otras ramas de las matemáticas. Prueba de ello es que muchos tengan definiciones en términos topológicos. Y como se muestra en los capítulo 5 y 6, suponer condiciones sobre ellos o determinar las funciones cardinales de un espacio topológico con ellos tiene consecuencias en topología y análisis.

Haremos una breve introducción a los invariantes cardinales en este capítulo. Para el lector que busque tratados especializados, los puede encontrar en [3], [22], [9] y [20].

1.1 Invariantes Cardinales

En adelante un ordinal será el conjunto de los ordinales más pequeños, siendo los ordinales finitos los números naturales, y un cardinal, un ordinal inicial. Diremos que ω es $\omega_0 = \aleph_0$, el primer cardinal infinito, y $\mathfrak{c} = 2^\omega$. Numerable tendrá el significado acostumbrado y por contable entenderemos finito o numerable.

Si X es un conjunto y κ es un cardinal, algunos conjuntos relevantes para nosotros son:

$$\begin{aligned} [X]^\kappa &= \{y \subseteq X : |y| = \kappa\}, \\ [X]^{<\kappa} &= \{y \subseteq X : |y| < \kappa\}, \\ {}^\kappa X &= \{f : f \text{ es función de } \kappa \text{ en } X\}. \end{aligned}$$

Definimos una relación en ${}^\omega\omega$ como sigue:

$$f \leqslant^* g \Leftrightarrow \{n \in \omega : g(n) < f(n)\} \text{ es finito (i.e. } \{n \in \omega : g(n) < f(n)\} \in [\omega]^{<\omega} \text{).}$$

Notemos que si $f \in {}^\omega\omega$, $\{i \in \omega : f(i) < f(i)\} = \emptyset$, por lo que $f \leqslant^* f$. Por otra parte, si $f \leqslant^* g$ y $g \leqslant^* h$, existen $n_1, n_2 \in \omega$ tales que, si $i \geqslant n_1$ y $j \geqslant n_2$, entonces $f(i) \leqslant g(i)$ y $g(j) \leqslant h(j)$. Sea $N = \max\{n_1, n_2\}$. Para $k \in \omega$, si $k \geqslant N$, entonces $f(k) \leqslant h(k)$; luego $\{k \in \omega : f(k) \geqslant h(k)\} \subseteq \{k \in \omega : k < N\}$ y éste último es finito, por lo que $f \leqslant^* h$. De esta manera, $\leqslant^*$ es un pre-orden en ${}^\omega\omega$ (una relación reflexiva y transitiva).

Definición 1.1. Una familia $\mathcal{B} \subseteq {}^\omega\omega$ es **no acotada** en ${}^\omega\omega$, si para todo $f \in {}^\omega\omega$ existe $g \in \mathcal{B}$ tal que $g \not\leqslant^* f$.

Definición 1.2. Una familia $\mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega$ es **dominante** en ${}^\omega\omega$ si para todo $f \in {}^\omega\omega$ existe $g \in \mathcal{D}$ tal que $f \leqslant^* g$

La primera relación que podemos encontrar entre ambas definiciones es la siguiente:

Proposición 1.3. *Sea $\mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega$. Si $\mathcal{D}$ es dominante, entonces $\mathcal{D}$ es no acotada.*

Demostración. Sea $\mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega$ una familia dominante y $f \in {}^\omega\omega$. Por hipótesis, podemos encontrar $g_1 \in \mathcal{D}$ tal que $f \leqslant^* g_1$. Si $g_2 \in {}^\omega\omega$ está definida por $g_2(n) = \max\{f(n), g_1(n)\} + 1$, $\{k \in \omega : g_2(k) < g_1(k)\}$ es vacío y tenemos que $g_1 \leqslant^* g_2$. Por hipótesis, para g_2

encontramos $g \in \mathcal{D}$ que cumple $g_2 \leqslant^* g$. Afirmamos que $g \nleq^* f$ pues $\{k \in \omega : g(k) < f(k)\} \subseteq \{k \in \omega : g(k) < g_2(k)\}$ y este último es finito. $\square$

Existen familias no acotadas que no son dominantes, como se muestra en el Ejemplo 1.4.

Ejemplo 1.4. *Considérese* $\mathcal{B} = \{f \in {}^{\omega}\omega : f(i) = 0$ *para toda* i *par* $\} \subseteq {}^{\omega}\omega$.
Para cada $f \in {}^{\omega}\omega$*, existe* $g \in \mathcal{B}$ *definida por:*

$$g(i) = \begin{cases} 0 & \textit{si } i \textit{ es par}, \\ f(i)+1 & \textit{si } i \textit{ es impar}, \end{cases}$$

tal que $g \nleq^* f$ *por lo que* $\mathcal{B}$ *es no acotada. Pero para* $h \in {}^{\omega}\omega$*, definida como:*

$$h(i) = \begin{cases} 1 & \textit{si } i \textit{ es par}, \\ 0 & \textit{si } i \textit{ es impar}, \end{cases}$$

no existe $g \in \mathcal{B}$ *que cumpla* $h \leqslant^* g$*, es decir,* $\mathcal{B}$ *no es dominante.*

Para $f \in {}^{\omega}\omega$ fija, se puede encontrar $g \in {}^{\omega}\omega$ tal que $f \leqslant^* g$, a saber, g definida como $g(n) = f(n) + 1$. En consecuencia, ${}^{\omega}\omega$ es dominante y no acotada. Podemos definir ahora los siguientes cardinales:

$$\mathfrak{b} := \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es no acotada}\},$$
$$\mathfrak{d} := \min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \text{ es dominante}\}.$$

Proposición 1.5. $\omega < \mathfrak{b}$.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{f_n : n \in \omega\} \subseteq {}^{\omega}\omega$ una familia numerable. Definimos $f \in {}^{\omega}\omega$ como $f(0) = 0$ y $f(n) = \max\{f_i(n) : i \in n\} + 1$. Para $i \in \omega$ fija, $f_i(n) < f(n)$ excepto, probablemente, para $n < i$, es decir, en un conjunto finito. Asi, $\mathcal{B}$ no es no acotada. $\square$

De lo anterior se deduce que $\omega < \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$.

Consideremos ahora $X \in [\omega]^{\omega}$ y $h : \omega \longrightarrow X$ una biyección de ω en X. Sea $A = \{h(2n) : n \in \omega\}$. Hay algunas propiedades de X y A que podemos hacer notar. En primer lugar, $A \in [\omega]^\omega$ y además, A es tal que $|A \cap X| = |X \setminus A| = \omega$. Si un conjunto $S \in [\omega]^\omega$ cumple lo anterior, es decir, $|S \cap X| = |X \setminus S| = \omega$, diremos que S *separa* a X (en inglés S *splits* X). Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.6. Una familia $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ es **separadora**, si para todo $A \in [\omega]^\omega$ existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $|S \cap A| = |A \setminus S| = \omega$.

De la discusión anterior sabemos que $[\omega]^\omega$ es, trivialmente, una familia separadora. Ahora tiene sentido la siguiente definición:

$$\mathfrak{s} := \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ es una familia separadora}\}.$$

Proposición 1.7. $\omega < \mathfrak{s}$

Demostración. Observamos que si $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ es una familia separadora, siempre existe $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, una familia separadora, con la propiedad de que para todo $s \in \mathcal{S}_0$ existe $X \in [\omega]^\omega$ tal que s separa a X. Podemos así considerar que $\mathcal{S}$ es una familia numerable que cumple tal propiedad y encontrar $B \in [\omega]^\omega$ que no es separado por algún elemento de $\mathcal{S}$.

Sea $\mathcal{S} = \{s_n : n \in \omega\}$. Definimos por recursión los siguientes subconjuntos de ω:

$$B_0 = \omega \setminus s_0,$$

y en general para $n \in \omega$ con $n \geqslant 1$:

$$B_n = \begin{cases} B_{n-1} \setminus s_n, & \text{si } |B_{n-1} \setminus s_n| = \omega, \\ B_{n-1} \bigcap s_n, & \text{si } |B_{n-1} \setminus s_n| < \omega. \end{cases}$$

Hagamos algunas observaciones sobre los B_n. Primero, ya que cada s_n separa a algún miembro de $[\omega]^\omega$, se sigue que $|s_n| = |\omega \setminus s_n| = \omega$ para cualquier $n \in \omega$. En consecuencia, $|B_0| = \omega$. Considérese ahora B_n para alguna $n \in \omega$ y supongamos que $|B_n| = \omega$. Si $|B_n \setminus s_{n+1}| = \omega$, es inmediato que $|B_{n+1}| = \omega$. En caso contrario, escribiendo $B_n = (B_n \cap s_{n+1}) \cup (B_n \setminus s_{n+1})$, notamos que también $|B_{n+1}| = \omega$. Inductivamente hemos probado que $|B_n| = \omega$ para cada $n \in \omega$. Por otro lado, de la definición se sigue que $B_{n+1} \subseteq B_n$ y más en general, si $i, j \in \omega$, con $i < j$, entonces $B_j \subseteq B_i$.

Ya que cada B_n es numerable, para toda $n \in \omega$ podemos elegir $b_n \in B_n$ tal que si $n \neq m$, entonces $b_n \neq b_m$. Sea $B = \{b_n : n \in \omega\} \in [\omega]^\omega$. Veamos que para cada $n \in \omega$, s_n no separa a B. Nos encontramos con tres casos

Caso 1. Si $n = 0$, para cada $m \in \omega$, $b_m \in B_m \subseteq B_0 = \omega \setminus s_0$ y entonces $|s_0 \cap B| < \omega$

Caso 2. Si $B_n = B_{n-1} \setminus s_n$, para cada $m > n$, $b_m \in B_m \subseteq (\omega \setminus s_n)$ y entonces $|s_n \cap B| < \omega$.

Caso 3. Si $B_n = B_{n-1} \cap s_n$, para cada $m > n$, $b_m \in B_m \subseteq s_n$ y entonces $|B \setminus s_n| < \omega$.

En cualquier caso observamos que s_n no separa a B y esto termina la prueba. $\square$

Es común en matemáticas hablar de colecciones disjuntas de conjuntos, el primero ejemplo de estas probablemente sean las particiones. Una familia casi disjunta generaliza a estas módulo conjuntos finitos. Como sabemos, para un conjunto X de cardinalidad κ, toda familia de subconjuntos de X ajenos y no vacíos debe tener a lo más κ elementos. Para una familia casi disjunta no es así.

Definición 1.8. Sean $x, y \in [\omega]^\omega$. Diremos que x y y son **casi disjuntos** (en inglés, **almost disjoint**) siempre que $x \cap y$ sea finito. Si $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es tal que para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}$, con $x \neq y$, se tiene que x y y son casi disjuntos, llamaremos a $\mathcal{A}$ una familia **casi disjunta**.

Ejemplo 1.9. *Para cada $n \in \omega$, $|{}^n\omega| = \omega$. Si se define ahora ${}^{<\omega}\omega := \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$, es inmediato que $|{}^{<\omega}\omega| = \omega$ y podemos escribir ${}^{<\omega}\omega = \{s_i : i \in \omega\}$, con $s_i \neq s_j$ siempre que $i \neq j$.*

Para cada $f \in {}^\omega\omega$ considere el siguiente conjunto:

$$x_f = \{i \in \omega : \exists n \in \omega\, (f|_n = s_i)\}$$

Para dos funciones distintas $f, g \in {}^\omega\omega$, existe $n_0 \in \omega$ tal que $f(n_0) \neq g(n_0)$ y, por lo tanto, si $k > n_0$, entonces $f|_k \neq g|_k$; de este modo concluimos que $|x_f \cap x_g| \leqslant n_0$. Finalmente, $\mathcal{A} = \{x_f : f \in {}^\omega\omega\}$ es una familia casi disjunta por la discusión anterior.

El ejemplo anterior puede parecer excesivo bajo la observación de que si $x = \{2n : n \in \omega\}$ y $z = \{2m + 1 : m \in \omega\}$, el conjunto $\mathcal{A} = \{x, z\}$ es una familia disjunta y, entonces, casi disjunta. El motivo de esto es que las familias casi disjuntas presentan características combinatorias más interesantes cuando son infinitas. Una familia *casi disjunta maximal* es una familia casi disjunta infinita que es maximal respecto al orden dado por la contención de conjuntos. A una familia de este tipo también se le conoce como **MAD** por sus siglas en inglés (*Maximal Almost Disjoint*). Resulta entonces que con tales familias podemos definir un nuevo cardinal.

$$\mathfrak{a} := \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ es una familia MAD}\}.$$

El cardinal $\mathfrak{a}$ está bien definido. Para ver esto consideremos $\mathcal{F}$, la colección de todas las familias casi disjuntas infinitas en $[\omega]^\omega$. En el Ejemplo 1.9 probamos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Si $\mathcal{C}$ es una cadena en $\langle \mathcal{F}, \subseteq \rangle$, es claro que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior para $\mathcal{C}$ y además es una familia casi disjunta, de donde, aplicando el Lema de Zorn, $\langle \mathcal{F}, \subseteq \rangle$ tiene un elemento maximal.

Es inmediato que $\mathfrak{a} \leqslant |\, [\omega]^\omega \,| = \mathfrak{c}$.

Proposición 1.10. $\omega < \mathfrak{a}$.

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{D_i : i \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia casi disjunta numerable (sin elementos repetidos). Veamos que $\mathcal{D}$ no es maximal.

Definimos por recursión una familia $\mathcal{E} = \{E_i : i \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ como sigue

$$\begin{aligned} E_0 &= D_0 \\ E_{n+1} &= D_{n+1} \setminus \bigcup_{i=0}^{n} D_i. \end{aligned}$$

De tal manera que $E_i \cap E_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$ y como

$$D_{n+1} \setminus \bigcup_{i=0}^{n} D_i = D_{n+1} \setminus \bigcup_{i=0}^{n} (D_{n+1} \cap D_i),$$

se deduce que $|E_n| = \omega$ para toda $n \in \omega$. Para cada $n \in \omega$ elegimos $e_n \in E_n$. Sea $E = \{e_n : n \in \omega\}$. Si $m > n$, $e_m \in \omega \setminus D_n$, por lo que $|E \cap D_n| \leqslant n + 1$, es decir, $\mathcal{D} \cup \{E\}$ es una familia casi disjunta. $\square$

Las familias casi disjuntas han sido extensamente estudiadas, muchas veces con el propósito de crear familias con propiedades combinatorias únicas, pues estas se ven reflejadas en propiedades topológicas para los espacios de Mrówka-Isbell (sección 4.2). Un pequeño ejemplo de esto es el Teorema 4.10 y un ejemplo más en forma es el Teorema 5.9.

Para definir el siguiente invariante recordemos que dada una familia de conjuntos $\mathcal{F}$, para toda $F \in \mathcal{F}$, $\cap\mathcal{F} \subseteq F$, más aún $\cap\mathcal{F}$ es el conjunto más grande (respecto al orden dado por la contención de conjuntos) que cumple dicha propiedad. El concepto de pseudointersección generaliza este hecho módulo conjuntos finitos, sin considerar además los casos triviales. De manera precisa:

Definición 1.11. Si X es un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos infinitos de X, diremos que $A \subseteq X$ es una **pseudointersección** para $\mathcal{F}$ si ocurre que $|A| \geqslant \omega$ y, para cada $F \in \mathcal{F}$, $|A \setminus F| < \omega$.

Definición 1.12. Si A y B son conjuntos infinitos y ocurre que $|A \setminus B| < \omega$, diremos que A está **casi contenido** en B, denotado por $A \subseteq^* B$.

De tal manera, una pseudointersección para $\mathcal{F}$ está casi contenida en cada uno de sus elementos y $\subseteq^*$ es un preorden. Esto último se sigue de que para cualesquiera conjuntos x, y y z; $x \setminus x = \emptyset$ y $x \setminus z \subseteq (x \setminus y) \cup (y \setminus z)$. Es claro que si una familia de conjuntos infinitos tiene intersección infinita, entonces tiene una pseudointersección, sin embargo este concepto es lo bastante general para ser de interés por sí mismo. Por ejemplo, ω es una pseudointersección para la familia $COF\,(\omega) = \{F \in [\omega]^\omega : |\omega \setminus F| < \omega\}$, sin ser la única claramente. Todo esto a pesar de que $\cap COF\,(\omega) = \emptyset$. Un hecho a notar en este ejemplo es que para cualquier subfamilia finita $\mathcal{C} \subseteq COF\,(\omega)$, es verdadero que $|\cap \mathcal{C}| = \omega$. Esto no es ninguna coincidencia como se verá después de la siguiente definición.

Definición 1.13. Decimos que una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ tiene la **propiedad de la intersección finita** (*PIF*) si y sólo si para cualquier subfamilia finita y no vacía $E \subseteq \mathcal{F}$, $\cap E \neq \emptyset$. Diremos que la familia tiene la **propiedad de la intersección finita fuerte** (*PIFF*) si no sólo $\cap E \neq \emptyset$, si no que además $\cap E$ es infinita. A una familia con la *PIFF* también se le conoce como una **familia centrada**.

Proposición 1.14. *Sea $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$. Si $\mathcal{F}$ es una familia con pseudointersección, entonces $\mathcal{F}$ es una familia centrada (es decir, tiene la PIFF).*

Demostración. Sea A una pseudointersección para $\mathcal{F}$ y $\{F_0, F_1, \ldots, F_n\} \subseteq \mathcal{F}$. Ya que A es una pseudointersección para $\mathcal{F}$, entonces si $0 \leqslant i \leqslant n$, se tiene que $A_i = A \cap F_i$ es infinito y $B_i = A \setminus A_i = A \setminus F_i$ es finito. De esa manera, $C = \bigcap_{i \leqslant n} A_i$ debe ser infinita, de otra manera $A = \left(\bigcup_{i \leqslant n} B_i\right) \cup C$ sería finito, lo que es una contradicción. $\square$

De este modo, el que $\mathcal{F}$ sea centrada es una condición necesaria para que $\mathcal{F}$ tenga una pseudointersección. Sin embargo, no siempre es una condición suficiente, a menos, por ejemplo, que $\mathcal{F}$ sea numerable.

Lema 1.15. *i) Existe una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ centrada sin pseudointersección.*
ii) Toda familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ centrada y numerable tiene una pseudointersección.

Demostración. *i)* Consideramos $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre en ω, es decir, un ultrafiltro tal que todos sus elementos son infinitos. Un ultrafiltro de este estilo se puede conseguir al extender el filtro de Fréchet utilizando el Lema de Zorn. $\mathcal{U}$ tiene la *PIF* simplemente por ser un filtro. Que sea una familia centrada se sigue del hecho de que es un filtro libre. Falta asegurar que $\mathcal{U}$ no tiene una pseudointersección. Para ver esto supongamos, por el contrario, que A es tal pseudointersección.

Ya que $\mathcal{U}$ es un filtro maximal, ocurre que $A \in \mathcal{U}$ o $\omega \setminus A \in \mathcal{U}$, y sólo una de las dos. Claramente no puede ocurrir $\omega \setminus A \in \mathcal{U}$ pues $A \not\subseteq^* \omega \setminus A$, por lo que $A \in \mathcal{U}$. Ya que $A \subseteq \omega$, $A = \{a_n : n \in \omega\}$, una lista de los elementos de A sin repeticiones. definimos $B = \{a_{2n} : n \in \omega\}$ y $C = A \setminus B$. De nuevo, dado que $\mathcal{U}$ es maximal y $B \cup C = A \in \mathcal{U}$, se concluye que $B \in \mathcal{U}$ o $C \in \mathcal{U}$, pero A no está casi contenido en ninguno de los dos, lo que es una contradicción. Esto concluye la prueba del inciso *i)*.

ii) Sea $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \omega\}$ una familia centrada numerable. Si definimos $D_n = \bigcap_{i \leqslant n} F_n$, es claro que para cada $n \in \omega$, D_n es infinito. De manera recursiva elegimos $d_0 \in D_0$ y habiendo escogido d_i para cada $i \leqslant n$, sea $d_{n+1} \in D_n \setminus \{d_0, d_1, \dots, d_n\}$. Observamos que $d_m \in D_n \subseteq F_n$ para cada $m \geqslant n$, por lo que $D = \{d_n : n \in \omega\}$ es una pseudointersección para $\mathcal{F}$. $\square$

De esa forma hemos construido una familia centrada de cardinalidad $\mathfrak{c}$ sin pseudointersección y probamos que toda familia centrada numerable tiene una. La respuesta a la pregunta ¿cuál es el mínimo cardinal de una familia centrada sin pseudointersección? es el último invariante de esta sección. Definimos:

$$\mathfrak{p} := \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \subseteq [\omega]^{\omega} \textit{ es una familia centrada sin pseudointersección}\}.$$

En la prueba del Lema 1.15 fue recurrente el uso del Axioma de Elección, el cual además implica que todos los cardinales menores a $\mathfrak{c}$ están bien ordenados. Más adelante nos interesarán algunas relaciones que se han probado ya desde la teoría axiomática usual para la Teoría de Conjuntos (ZFC). En específico las siguientes:

Proposición 1.16. $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{b}, \mathfrak{s}$.

Cuya demostración omitimos en este texto pero puede ser consultada en [3] Teoremas 6.8, 6.9 y 6.23.

Finalmente, incluimos una caracterización de $\mathfrak{b}$ que nos será de utilidad. La demostración de este hecho puede encontrarse en [22] o en español en [20].

Definición 1.17. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ familias de conjuntos numerables. Escribimos $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$ si y sólo si para toda $F \in \mathcal{F}$ y para toda $G \in \mathcal{G}$, $|F \cap G| < \omega$. Por otro lado, si existe S tal que para toda $F \in \mathcal{F}$, $F \subseteq^* S$ y para toda $G \in \mathcal{G}$, $|G \cap S| < \omega$, diremos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ **pueden ser separados**.

Proposición 1.18.

$$\mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq [\omega]^{\omega}, \exists \mathcal{C} \subseteq [\omega]^{\omega} \, (|\mathcal{C}| = \omega, \mathcal{B} \perp \mathcal{C}, \textit{ y } \mathcal{B} \textit{ y } \mathcal{C} \textit{ pueden ser separados})\}$$

CAPÍTULO 2: CARDINALES GRANDES

El primer cardinal infinito, ω es particular en muchos sentidos. Una de las razones es que para cualquier $n \in \omega$, $2^n \in \omega$, mientras que en general para cualquier cardinal límite λ, si $\mu < \lambda$, 2^μ bien podría ser λ. Por otro lado, es sabido que todos los cardinales sucesores son regulares (es decir, para un cardinal sucesor κ^+, $cof\,(\kappa^+) = \kappa^+$) y hay una gran cantidad ejemplos de cardinales límite singulares, sin embargo el único cardinal límite regular para el que es posible probar su existencia, es ω. Si bien éstas características podrían parecer sencillas, es natural preguntarse si existen cardinales mayores a ω con ellas y la pregunta es ya por sí misma interesante. A un cardinal regular límite mayor que ω se le denomina **inaccesible**. Si un cardinal κ cumple que para todo $\lambda < \kappa$, $2^\lambda < \kappa$, diremos que κ es un *límite fuerte*. Un cardinal regular mayor a ω que es además un límite fuerte se le llamará **fuertemente inaccesible**. La existencia de cardinales inaccesibles implica la consistencia de la teoría *ZFC*, por lo que la existencia de estos no puede probarse a partir de ella, una razón más para investigarlos. De la misma manera, la generalización de otras propiedades de ω lleva a la definición de nuevos cardinales que muchas veces resultan ser inaccesibles. Por ejemplo, existen ultrafiltros no principales sobre ω que son ω-completos, preguntarse sobre la existencia de un cardinal κ mayor a ω con un ultrafiltro no principal κ-completo sobre él, llevó a lo que conocemos como un cardinal medible. A los cardinales inaccesibles se les conoce como *grandes cardinales*.

En este capítulo haremos una breve descripción de los cardinales medibles, daremos y citaremos algunos resultados importantes relacionados con ellos y por último dejamos algunas referencias para el lector interesado. Finalmente mencionamos a los cardinales fuertemente compactos con sus respectivas referencias.

La importancia de los cardinales medibles y los fuertemente compactos para este trabajo consiste en que la existencia de un cardinal fuertemente compacto implica la consistencia del *Product Measure Extension Axiom* (**PMEA**). La cual se ve reflejada en el Capítulo 6, donde la consistencia del *PMEA* nos permite probar que un espacio de Tychonoff de carácter menor a $\mathfrak{c}$ es pseudocompacto si y sólo si no tiene un subconjunto discreto e infinito C^*-encajado. Esto contrasta con los resultados del Capítulo 5, en los que mostramos que bajo la hipótesis $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$ es posible hallar un espacio de Mrówka-Isbell pseudocompacto con un subconjunto discreto infinito C^*-encajado.

Para una discusión en forma sobre los cardinales medibles y fuertemente compactos, así como otros grandes cardinales, referimos al lector a [4].

2.1 Cardinales Medibles y Fuertemente Compactos

Existen dos maneras distintas de acercarse a los cardinales medibles. La primera de ellas es durante la búsqueda de ultrafiltros no principales κ-completos. Que implica la existencia de cardinales inaccesibles, como ya hemos mencionado y probamos en esta sección. La otra forma parte de la debilitación del Problema de la Medida, esto es, ¿existe una medida, no invariante bajo traslación, que extienda a la medida de Lebesgue y esté definida para todos los subconjuntos del intervalo $[0,1]$?. Esta sección está basada en el desarrollo seguido en [2] y en [1]. Recomendamos también al lector el Capítulo 5 de [14] para más información sobre este tema.

Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X se llama **κ-completo** si para cada familia $S \subseteq \mathcal{F}$ tal que $0 < |S| < \kappa$, $\cap S \in \mathcal{F}$. Sabemos que todo filtro es **ω-completo**. A un ultrafiltro no principal κ-completo lo llamaremos un **κ-ultrafiltro**. En la sección 6.5 pueden ser consultados más resultados y hechos relacionados a los filtros.

Definición 2.1. A un cardinal $\kappa > \omega$ se llama **medible**, si existe un κ-ultrafiltro sobre él.

Notemos que de la definición se sigue que si κ es un cardinal medible y $|X| = \kappa$, entonces existe un κ-ultrafiltro sobre X. A continuación seguiremos una línea de pensamiento completamente distinta a la de los κ-ultrafiltros con el fin de ilustrar por qué se utiliza el término *medible*.

Definición 2.2. Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{M} \subseteq \wp(X)$ es una **σ-álgebra** sobre X si:

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$.

2. Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $X \setminus E \in \mathcal{M}$.

3. Si $E_0,\, E_1,\, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$, $\bigcup\limits_{n\in\omega} E_n \in \mathcal{M}$.

Como un ejemplo sencillo observamos que dado cualquier conjunto X, $\wp(X)$ es una σ-álgebra sobre X. De tal manera para cada $E \subseteq \wp(X)$, se sigue fácilmente que $\cap\{\mathcal{M} \subseteq \wp(X) : \mathcal{M}$ *es una σ-álgebra que contiene a* $E\}$ es la menor σ-álgebra que contiene a E.

Definición 2.3. Una función $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ definida en una σ-álgebra $\mathcal{M}$ es una **medida** si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,

2. $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\omega} E_n\right) = \sum\limits_{n\in\omega} \mu(E_n)$ cada vez que $\{E_n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{M}$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Esta propiedad es conocida como **σ-aditividad**.

Definición 2.4. A la terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$, donde X es un conjunto, $\mathcal{M}$ una σ-álgebra sobre X y μ una medida sobre $\mathcal{M}$, se le llama un **espacio de medida** en X.

Ejemplo 2.5. *Sean X un conjunto, $\mathcal{M} \subseteq X$ una σ-álgebra y $x_0 \in X$ fijo. Definimos $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \{0, 1\}$ como:*

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x_0 \in E, \\ 0 & \textit{si } x_0 \notin E. \end{cases}$$

Esta es una medida llamada la medida unitaria concentrada *en x_0.*

La medida anterior no toma el valor real extendido ∞. A una medida de este tipo se le conoce como **medida finita**. Es además un ejemplo para la siguiente definición.

Definición 2.6. A una medida $\mu : \wp(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ que cumple $\mu(X) = 1$ y $\mu(\emptyset) = 0$ se le llama una medida **dos-valuada**.

Ejemplo 2.7. *Para todo conjunto X definimos $\gamma : \wp(X) \longrightarrow [0, \infty]$ como:*

$$\gamma(E) = \begin{cases} n & \textit{si } |E| = n, \\ \infty & \textit{si } \omega \leqslant |E|. \end{cases}$$

γ es una medida llamada la medida de conteo en X.

El siguiente teorema ilustra algunas propiedades básicas de los espacios de medida, lo dejaremos sin prueba pero se refiere al lector que necesite revisarla a [10], Sección 9 Teoremas A, D y E.

Teorema 2.8. *Si* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *es un espacio de medida, entonces:*

1. *Si* E, $F \in \mathcal{M}$ *y* $E \subseteq F$, *entonces:*

$$\mu(E) \leqslant \mu(F),$$

2. *Si* E, $F \in \mathcal{M}$, $E \subseteq F$, $\mu(E) < \infty$, *entonces:*

$$\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Nos encontramos, a veces, con la dificultad de no poder definir una medida interesante en todo $\wp(X)$ para algunos conjuntos, el ejemplo clásico es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Aquí el adjetivo interesante refiere a las propiedades que nos interesa que cumpla la medida en cuestión, para la medida de Lebesgue son: para cada intervalo I su medida es igual a su longitud, la medida es invariante bajo traslación, etc.

A nosotros que hablamos de cardinales medibles nos interesa, en primer lugar, encontrar cardinales κ sobre los cuales se pueda definir una medida en todo $\wp(\kappa)$. De acuerdo con el Ejemplo 2.7, todos los cardinales cumplen esto. Pidamos además que sea una medida finita. La medida $\mu : \wp(\kappa) \longrightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } \emptyset \notin E, \\ 1 & \text{si } \emptyset \in E. \end{cases}$$

tiene esas propiedades, sin embargo es una solución problemática en el sentido de que μ asigna medida positiva a un conjunto unitario. Llamaremos a estas medidas *triviales*, no en el sentido usual sino en el sentido utilizado por [2].

Nuestro problema ahora tiene la siguiente forma, *¿para cuáles cardinales* κ *es posible definir una medida finita no trivial en* $\wp(\kappa)$*?*. La primera observación es que ω no es uno de esos cardinales. Si $X \subseteq \omega$ tiene medida positiva, $X = \bigcup_{i \in X} \{i\}$ y por σ-aditividad algún $\{i\}$ tendría medida positiva. Se sigue que κ debe ser no numerable.

Hagamos una observación. Si $(X, \wp(X), \mu)$ es un espacio de medida y $f : X \longrightarrow Y$ es una función inyectiva, podemos definir una medida γ en $\wp(Y)$ como $\gamma(F) = \mu\left(f^{-1}(F)\right)$. La nueva medida γ conserva las propiedades de μ pues f es inyectiva. En vista de la discusión anterior. podemos buscar el mínimo cardinal con una medida finita no trivial sobre $\wp(\kappa)$.

Se prueba en [2] Teorema 4.1, que si κ es el mínimo cardinal con una medida finita no trivial γ sobre $\wp(\kappa)$, entonces $\kappa \leqslant \mathfrak{c}$ o $\wp(\kappa)$ tiene una medida no trivial dos-valuada. Tal γ presenta además propiedades aditivas extendidas, γ es **κ-aditiva**. si $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de subconjuntos de κ disjuntos dos a dos y $|A| < \kappa$, entonces:

$$\gamma\left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in A} \gamma(E_\alpha).$$

Tengamos presente que si $\{r_\alpha : \alpha \in A\}$ es una colección de números reales no negativos (posiblemente no numerable), se define

$$\sum_{\alpha\in A} r_\alpha = \sup\Big\{\sum_{\alpha\in B} r_\alpha : B \in [A]^{<\omega}\Big\}.$$

En caso que la suma anterior no sea ∞, entonces a lo sumo una cantidad numerable de r_α son distintos de 0.

Proposición 2.9. *Un cardinal κ es medible si y sólo si existe una medida no trivial, dos-valuada y κ-aditiva sobre $\wp(\kappa)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un κ-ultrafiltro. Definimos $\gamma : \wp(\kappa) \longrightarrow \{0,1\}$ como

$$\gamma(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \notin \mathcal{U}, \\ 1 & \text{si } E \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

Observamos que γ está bien definida. Además γ es no trivial pues $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal, de igual manera es inmediato que $\gamma(\emptyset) = 0$. Falta entonces sólo comprobar la κ-aditividad.

Sea $\{E_i : i \in I\} \subseteq \wp(\kappa)$ tal que $|I| < \kappa$ y para $i, j \in I$, $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$. Por esta razón $|\{E_i : i \in I\} \cap \mathcal{U}| \leqslant 1$ y $\sum\limits_{i\in I} \gamma(E_i)$ es 0 o 1. Así, se tiene lo siguiente:

1. $\sum\limits_{i\in I} \gamma(E_i) = 1$ si y sólo si existe un único $n \in I$ tal que $E_n \in \mathcal{U}$, de tal manera que $\gamma\left(\bigcup\limits_{i\in I} E_i\right) = 1$.

2. $\sum\limits_{i\in I} \gamma(E_i) = 0$ si y sólo si para toda $i \in I, E_i \notin \mathcal{U}$; y esto último equivale a que $\bigcup\limits_{i\in I} E_i \notin \mathcal{U}$ (esto se sigue de que $\mathcal{U}$ es κ-completo y las leyes de De Morgan) si y sólo si $\gamma\left(\bigcup\limits_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \gamma(E_i)$.

Por otra parte, si γ es una medida no trivial, dos-valuada y κ-aditiva sobre $\wp(\kappa)$, definimos:

$$\mathcal{F} = \{E \subseteq \kappa : \gamma(E) = 1\}$$

Afirmamos que $\mathcal{F}$ es un filtro. El que γ sea dos-valuada implica que $\mathcal{F}$ es no vacío, ya que $\kappa \in \mathcal{F}$, y el que sea no trivial implica que $\mathcal{F}$ es no principal. Naturalmente las medidas de un conjunto y su complemento no pueden ser simultáneamente cero por lo que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. Finalmente, para ver que el ultrafiltro $\mathcal{F}$ es κ-completo, basta ver que para toda partición de κ de cardinalidad menor a κ existe un elemento de la partición que pertenece a $\mathcal{F}$, este resultado es la Proposición 6.44. Supongamos que no ocurre tal situación y sea $\{P_i : i \in I\}$ una partición de κ tal que $|I| < \kappa$. Entonces, ya que γ es κ-aditiva:

$$\begin{aligned}\gamma(\kappa) &= \gamma\left(\bigcup_{i\in I} P_i\right)\\ &= \textstyle\sum_{i\in I} \gamma(P_i)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Una contradicción. $\square$

Mostraremos ahora que los cardinales medibles son fuertemente inaccesibles. Dado un cardinal medible κ y $\mathcal{U}$ un κ-ultrafiltro sobre él, lo primero que haremos es mostrar que κ es regular. Si ocurriera que κ es singular, entonces puede obtenerse como la unión de $cof(\kappa)$ conjuntos ajenos de cardinalidad menor a κ, es decir, $\kappa = \cup\{P_\alpha : \alpha < cof(\kappa)\}$. Ya que $\mathcal{U}$ es κ-completo, existe $\alpha < cof(\kappa)$ tal que $P_\alpha \in \mathcal{U}$ (Proposición 6.44). Pero P_α

puede obtenerse como la unión de menos de κ conjuntos unitarios y, de nuevo, por ser $\mathcal{U}$ κ-completo se deduce que alguno de ellos pertenece a $\mathcal{U}$. Esto es una contradicción pues $\mathcal{U}$ es no principal. De tal forma hemos mostrado que κ debe ser regular.

Lema 2.10. *Si κ es medible, entonces es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Ya hemos mostrado que κ es regular. Supongamos que existe $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geqslant \kappa$ y obtengamos una contradicción. Sean $S \subseteq {}^\lambda 2$ tal que $|S| = \kappa$ y $\mathcal{U}$ un κ-ultrafiltro sobre S. Para cada $\alpha < \lambda$, uno y sólo uno de los conjuntos $\{f \in S : f(\alpha) = 0\}$, $\{f \in S : f(\alpha) = 1\}$ es elemento del ultrafiltro $\mathcal{U}$. Definimos X_α como tal conjunto y x_α como el valor de $f(\alpha)$ para $f \in X_\alpha$. Ya que $\lambda < \kappa$ y $\mathcal{U}$ es κ-completo, $\bigcap_{\alpha\in\lambda} X_\alpha \in \mathcal{U}$. Pero $\bigcap_{\alpha\in\lambda} X_\alpha = \{g\}$, donde g es la función de λ en 2 definida por $g(\alpha) = x_\alpha$. Esto último es una contradicción a que $\mathcal{U}$ es no principal. $\square$

La definición de un cardinal medible en términos de ultrafiltros es utilizada en [1] para construir con ayuda de ultrapotencias una $\in$-estructura transitiva $\mathfrak{M} = \langle M, \in\rangle$, que es una subclase propia del universo de la teoría de conjuntos $\mathfrak{V} = \langle V, \in\rangle$, junto con un encaje elemental j de $\mathfrak{V}$ sobre $\mathfrak{M}$. Es decir, suponiendo la existencia de un cardinal medible es posible construir un modelo de $\mathfrak{V}$. Un resultado importante, entre muchos más, que aparece en [1] es el siguiente.

Teorema 2.11 (Scott)**.** *Si existe un cardinal medible, entonces $V \neq L$.*

Donde L es el universo construible de Gödel.

Un fortalecimiento directo al concepto de cardinal medible es el de cardinal fuertemente compacto.

Definición 2.12. Un cardinal $\lambda > \omega$ se llama **fuertemente compacto** si y sólo si cada filtro λ-completo sobre λ puede extenderse a un ultrafiltro λ-completo.

Como dijimos, es fácil notar que todo cardinal fuertemente compacto es también un cardinal medible. Se sigue de ésto que ellos también son fuertemente inaccesibles. El nombre fuertemente compacto hace referencia a un campo distinto al de los ultrafiltros como en el caso de los cardinales medibles, en este caso a la Lógica Infinitaria. Definimos, a muy grandes rasgos, para dos cardinales α y β, el lenguaje $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ como el que se obtiene a partir del lenguaje de la lógica de primer orden al permitir conjunciones y disyunciones de menos de α fórmulas y cuantificación sobre bloques de menos de β variables. El lenguaje de primer orden queda entonces determinado como $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$. Un cardinal κ es fuertemente compacto si y sólo si el análogo del Teorema de Compacidad para el lenguaje de la lógica de primer orden se cumple para el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$.

La existencia de un cardinal fuertemente compacto implica a su vez un resultado más fuerte que el del Teorema 2.11. Sea $L(x)$ la clase que resulta de reemplazar a $\emptyset$ en la construcción del universo construible L por cualquier conjunto transitivo x. Llamamos a ésta la clase de los conjuntos construibles a partir de x (o construibles relativos a x). En [4] Capítulo 5, sección 6, se prueba que $L(x)$ es un modelo de *ZF* y si x tiene un buen orden en $L(x)$, entonces $L(x)$ es también modelo del Axioma de Elección. El resultado al que nos referimos es el siguiente:

Teorema 2.13 (Vopěnka-Hrbáček)**.** *Si existe un cardinal fuertemente compacto, entonces* $V \neq L(x)$ *para cualquier conjunto* x.

La demostración puede consultarse en [4] Capítulo 10 Teorema 3.3. Kunen por su parte prueba en [15] la consistencia de "$V = L(x) + \exists$ un único cardinal medible". Por lo que en efecto el Teorema 2.13 es más fuerte que el Teorema 2.11.

Para más información acerca de los cardinales fuertemente compactos referimos al lector a [14].

CAPÍTULO 3: EXTENDIENDO FUNCIONES DE VALOR DISCRETO

El problema de extender funciones continuas de valor real ha sido ampliamente estudiado por sus aplicaciones en análisis. El teorema de extensión de Tietze por ejemplo es un teorema clásico y forma parte de los teoremas básicos de la topología general. En su formulación original, Tietze hace su demostración para espacios métricos. Tiempo después Urysohn generaliza la prueba para espacios normales.

Definición 3.1. Para un espacio topológico X se definen:

$$\begin{aligned} C(X) &= \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\} \\ C^*(X) &= \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada}\}. \end{aligned}$$

Un subconjunto $Z \subseteq X$ se llama un **conjunto nulo** si y sólo si existe $f \in C(X)$ tal que $Z = f^{-1}[\{0\}]$.

Por definición $C^*(X) \subseteq C(X)$. Diremos que un subconjunto S de X está C**-encajado** (C^***-encajado**) si y sólo si para cada $f \in C(S)$ ($g \in C^*(S)$) existe $F \in C(X)$ ($G \in C^*(X)$) que la extiende. Dos conjuntos $A, B \subseteq X$ están **completamente separados** en X si existe una función $f \in C^*(X)$ tal que $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f[B] \subseteq \{1\}$.

Teorema de extensión de Urysohn: Un subconjunto S de un espacio X está C^*-encajado en X si y sólo si cualesquiera dos conjuntos completamente separados en S, están completamente separados en X.

El **teorema de extensión de Tietze-Urysohn** dice lo siguiente: *En un espacio normal cualquier conjunto cerrado está C-encajado.* Ya que todo espacio métrico es normal, el resultado es válido para espacios métricos. Tenemos además la siguiente proposición

Proposición 3.2. *En un espacio métrico, un conjunto $S \subseteq X$ está C^*-encajado en X si y sólo si es cerrado.*

Demostración. Falta únicamente probar que si S está C^*-encajado, entonces debe ser cerrado. En un espacio primero numerable, como un espacio métrico, para cada $F \subseteq X$, $x \in Cl_X(F)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in x} \subseteq F$ que converge a x. Si $S \subseteq X$ está C^*-encajado y no es cerrado, consideramos $\sigma = \{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq S$ que converge a un punto $x' \in Cl_X(S) \setminus S$. Esto implica que en S, σ es discreto y numerable. Por lo que existen dos subconjuntos A y B de σ ajenos que a su vez son discretos y numerables. De esa manera, la función $f : A \cup B \longrightarrow [0,1]$ tal que $f[A] = \{0\}$ y $f[B] = \{1\}$ es continua y acotada de dominio cerrado en S, por lo que, debido al teorema de extensión de Tietze, admite una extensión continua F a todo S. Sin embargo, la función F no puede extenderse continuamente a una función F' en X. Para ver esto, basta observar que de existir, $F'(x') \in Cl_{[0,1]}F'[A] \cap Cl_{[0,1]}F'[B] = \{0\} \cap \{1\} = \emptyset$, una contradicción. □

Existen múltiples ejemplos de espacios con conjuntos C^*-encajados que no están C-encajados. Como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. *Sea σ un ultrafiltro libre en ω. Definimos el espacio $\Sigma = \{\sigma\} \cup \omega$ equipado con la topolog[ia en la que todos los puntos de ω son aislados y las vecindades de σ son de la forma $\{\sigma\} \cup U$, donde $U \in \sigma$.*

Afirmamos que con la topología generada por esos sistemas de vecindades σ es normal. Para ver esto consideramos dos cerrados ajenos en Σ, A y B. Podemos afirmar sin pérdida de generalidad que $\sigma \notin A$, por lo que A es unión de puntos aislados y por tanto abierto. Si $\sigma \notin B$, ocurren las mismas condiciones para B y hemos terminado. De otra manera, $\sigma \notin Cl_\Sigma(A)$ pues A es cerrado. Deducimos que $A \notin \sigma$, pues σ pertenece a la cerradura en Σ de $Y \subseteq \omega$ si y sólo si $Y \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \sigma$ (en particular σ está en la cerradura de cada uno de sus elementos), y como σ es un ultrafiltro, esto ocurre si y sólo si $Y \in \sigma$. De nuevo, ya que σ es un ultrafiltro, $\omega \setminus A \in \sigma$, por lo que existe un abierto $V \subseteq \Sigma \setminus A$ que tiene a σ. En este caso A y $B \cup V$ son dos abiertos ajenos que separan a A y a B.

Veremos a continuación que ω está C^*-encajado en Σ pero no C-encajado. Para empezar, la función $f : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(i) = i$ es continua, sin embargo no es posible definir una extensión continua en σ. Para ver esto, supongamos que existe F una extensión continua de f, y sea $r = F(\sigma)$. Sea $n \in \omega$ tal que $n > r$. Entonces

$F^{-1}\left[\left(r-\frac{1}{2}(n-r), r+\frac{1}{2}(n-r)\right)\right]$ *es una vecindad de* σ *que no intersecta al cofinito* $\omega \setminus n \in \sigma$*, esto es una contradicción pues hemos visto que* σ *está en la cerradura de cada uno de sus elementos.*

Falta únicamente comprobar que ω *está* C^**-encajado en* Σ*. Sea* $g \in C^*(\omega)$ *y digamos que* $g[\omega] \subseteq [-M, M]$*. Observamos que la familia* $F = \{Cl_{[-M,M]}(g[U]) : U \in \sigma\}$ *es una familia con la PIF porque* σ *lo es. Definimos una extensión de* g*,* $G : \Sigma \longrightarrow [-M, M]$ *definiendo* $G(\sigma) = r \in \cap F$*. Para ver que* G *es continua, basta ver que para cada* $A \subseteq \omega$ *si* $\sigma \in cl_{\Sigma}(A)$*, entonces* $r \in cl_{[-M,M]}(G[A])$*. Para lo cual hicimos la elección de* $G(\sigma) \in \cap F$*.*

De hecho existe un resultado que muestra la relación entre estar C^*-encajado y C-encajado. Tal es el siguiente teorema y su demostración puede consultarse en [8], capítulo 1, sección 18.

Teorema 3.4. *Un subconjunto* S *de un espacio topológico* X *que está* C^**-encajado en* X*, está* C*-encajado en* X *si y sólo si para cada* Z *nulo tal que* $S \cap Z = \emptyset$*,* S *y* Z *están completamente separados.*

Definición 3.5. Sea X un espacio topológico y κ un cardinal equipado con la topología discreta . Decimos que $S \subset X$ está κ**-encajado** en X si toda función continua $f : S \longrightarrow \kappa$ admite una extensión continua $F : X \longrightarrow \kappa$.

Hagamos algunas de observaciones. En el ejemplo anterior, el subespacio discreto de Σ, ω está 2-encajado en Σ. Por otro lado, ω es un subconjunto discreto, denso y numerable que está C^*-encajado pero no está C-encajado. En particular, en el ejemplo se muestra que ω no está ω-encajado en Σ. Esto debido a que, como veremos en la siguiente sección, Σ no es metrizable. Hecho que se sigue de que σ no tiene una base local numerable.

3.1 Espacios métricos separables

En esta sección mostraremos cómo extender una función continua de un subconjunto S de un espacio métrico separable X en un espacio discreto Y. Dado que un espacio discreto Y de cardinalidad κ es homeomorfo al espacio discreto $\langle \kappa, \wp(\kappa) \rangle$ en adelante nuestros espacios discretos serán cardinales.

Es importante observar que una función continua $f : S \longrightarrow \kappa$ induce una partición de S en cerrado abiertos (uno por cada fibra no vacía de f), y viceversa, a partir de una partición en cerrado abiertos de S, $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es posible definir una función continua de S en κ (sea $f : S \longrightarrow \kappa$ definida por $f(x) = \alpha$ si $x \in C_\alpha$). De tal manera, dada una función continua $f : S \longrightarrow \kappa$, si $\{C_i : i \in I\}$ es la partición que esta genera, una extensión continua F debe generar a su vez una partición de X, $\{W_i : i \in I\}$ tal que $W_i \cap S = C_i$. Esta relación entre la estructura de cerrado abiertos de un espacio y la posibilidad de extender funciones de valor discreto será fundamental en esta sección. Como ejemplo tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.6. *Sea X un espacio topológico. $S \subseteq X$ está 2-encajado en X si y sólo si S está n-encajado para cualquier $n \in \omega$.*

Demostración. Que S esté n-encajado para cada $n \in \omega$ es obviamente una condición suficiente. Veamos que es necesaria.

Sea $f : S \longrightarrow n$ con $n \in \omega$ una función continua. Definimos para cada $i < n$, $C_i = f^{-1}[\{i\}]$. La familia $\{C_i : i < n\}$ es una cubierta de S en cerrado abiertos ajenos (podría no ser una partición en caso de existir fibras vacías), de donde $f_i = \chi_{C_i} : S \longrightarrow 2$ (la función característica en C_i) es continua. Aplicando las hipótesis, sea F_i una extensión continua para f_i y definimos $W_i = F_i^{-1}[\{1\}]$. Se sigue que para cada $i < n$, W_i es un cerrado abierto y $W_i \cap S = C_i$.

Definimos por recursión la familia $V = \{V_i : i < n\}$ como $V_0 = X \setminus \cup\{W_j : 0 < j < n\}$ y $V_i = W_i \setminus \cup\{V_k : k < i\}$ para $0 < i < n$. Observamos que V es una familia de cerrado abiertos de X que cumple que $V_i \cap S \supseteq C_i$. V no es necesariamente una partición pues posiblemente consideramos fibras vacías. Sin embargo, $F : X \longrightarrow n$ definida por $F(x) = i$ siempre que $x \in V_i$ es una función continua que extiende a f. $\square$

Es inmediato preguntarse bajo qué condiciones un subespacio S que está 2-encajado estará ω-encajado. Responderemos de manera parcial a esta pregunta en cuanto tengamos el siguiente Lema técnico.

Lema 3.7. *Sea X un espacio primero numerable. Si $\{C_n : n \in \omega\}$ es una colección de cerrado abiertos de X ajenos dos a dos y $C = \cup\{C_n : n \in \omega\}$, entonces $Fr(C)$ es el* *conjunto*

$$L = \{x \in X : \textit{para toda } U, \textit{ vecindad de } x, U \cap C_n \neq \emptyset \textit{ para una infinidad de } n \in \omega\}.$$

Demostración. Sean $\{C_n : n \in \omega\}$ y C como en las hipótesis . Consideremos $x \in Fr\,(C)$ y supongamos que existe U_0 una vecindad de x abierta (sin pérdida de generalidad) tal que $R = \{n \in \omega : U_0 \cap C_n \neq \emptyset\}$ es finito. Ya que X es primero numerable, existe una base local de vecindades anidadas en x, $\{V_n : n \in \omega\}$, tal que $U_0 \supset V_0$.

Para cada $k \in \omega$ definimos $R_k = \{n \in \omega : V_k \cap C_n \neq \emptyset\}$. Se observa que para toda $k \in \omega$, $R_k \neq \emptyset$, esto porque $x \in Fr\,(C)$, y $R \supset R_0 \supset R_1 \supset R_2 \ldots$. De lo anterior podemos concluir que existe $r \in R$ tal que para cada $k \in \omega$, $r \in R_k$. De esa manera $x \in Cl\,(C_r) = C_r$ y entonces $x \notin Fr\,(C)$, una contradicción. Así $Fr\,(C) \subset L$

Por otra parte, si $x \in L$ claramente $x \in Cl\,(C)$ pero $x \notin C$ por lo tanto $x \in Fr\,(C)$, lo que concluye la demostración. □

Teorema 3.8. *Sea $\langle X, \tau_d \rangle$ un espacio métrico separable (con métrica d) y $S \subset X$. Si S está 2-encajado en X, entonces S está ω-encajado en X.*

Demostración. Dada $f : S \longrightarrow \omega$ continua, sea $C_i = f^{-1}[\{i\}]$. Construiremos a partir de $\{C_i : i \in \omega\}$ una partición en cerrado abiertos para X y finalmente definiremos una extensión continua F.

Dada $i \in \omega$ definimos $f_i : S \longrightarrow 2$ como $f_i\,(s) = \chi_{C_i}\,(s)$. Ya que C_i es cerrado abierto, f_i es continua. La hipótesis, S está 2-encajado en X, implica que existe $F_i : X \longrightarrow 2$ continua, tal que si $W_i = F_i^{-1}[\{1\}]$, $W_i \cap S = C_i$.

Cada elemento de la colección $\{W_i : i \in \omega\}$ es cerrado abierto en X. Es posible que dicha colección aún no sea una partición de X, sin embargo, podemos construir una a partir de ella.

Definimos por recursión la familia $\{U_i : i \in \omega\}$, de la siguiente manera: $U_0 = W_0$ y en general, para $i \in \omega$, $U_i = W_i \setminus \cup\{U_k : k < i\}$. De esta manera los conjuntos U_i son cerrado abiertos, ajenos dos a dos y $U_i \cap S = C_i$, para cada $i \in \omega$.

En este punto podríamos apresurarnos a definir F como $F\,(x) = i$, si $x \in U_i$, y $F\,(x) = 0$ (u otra constante) en cualquier otro caso. Sin embargo, tal F no es necesariamente continua, pues $\cup\{U_i : i \in \omega\}$ podría no ser cerrado. Corregiremos estos detalles enseguida.

De acuerdo con el lemma 3.7, si $U = \cup\{U_i : i \in \omega\}$,

$$Fr\,(U) = \{x \in X : \textit{para toda } V,\ \textit{vecindad de } x,\ V \cap U_i \neq \emptyset \textit{ para una infinidad de } i \in \omega\}.$$

Para cada $x \in Fr\,(U)$ y cada $n \in \omega$, $n > 1$, definimos

$$B_n^x = \{k \in \omega : \textit{para toda vecindad cerrado abierta } A \textit{ de } C_k,\ \textit{en } X,\ A \cap S_{1/n}(x) \neq \emptyset\},$$

donde $S_{1/n}(x) = \{y \in X : d\,(x,y) < \dfrac{1}{n}\}$. Es inmediato que $B_n^x \supset B_{n+1}^x$.

El siguiente paso es observar que para $x \in Fr\,(U)$ fija, existe $m \in \omega$ tal que B_m^x es finito. De otra manera podemos encontrar una sucesión $k_1, k_2, k_3, \ldots$ tal que $k_i \neq k_j$ siempre que $i \neq j$ y, para toda $i \in \omega$, $k_i \in B_i^x$. Definimos $g : S \longrightarrow 2$ como $g\,(z) = 0$ si $z \in C_{k_{2i}}$ para alguna $i \in \omega$ y $g\,(z) = 1$ en cualquier otro caso. Ya que $\{C_n : n \in \omega\}$ es una partición de S en cerrado abiertos se tiene que g es continua. De tal manera que, por hipótesis, existe $G : X \longrightarrow 2$ una extensión continua de g. Luego, $G\,(x) = 0$ ó $G\,(x) = 1$. Consideremos el caso $G\,(x) = 0$ (el otro caso es análogo). Por la continuidad de G existe $n \in \omega$ tal que $G\left[S_{1/n}(x)\right] = \{0\}$. Por otro lado, por la definición de B_m^x y la elección de los k_j, podemos hallar $i \in \omega$ tal que la intersección de cada vecindad cerrado abierta de $C_{k_{2i+1}}$ con $S_{1/n}(x)$ es no vacía. Lo cual es una contradicción pues $G\left[C_{k_{2i+1}}\right] = \{1\}$. Podemos entonces encontrar para cada $x \in Fr\,(U)$ un natural m para el que B_m^x es finito, digamos $B_m^x \subset \{0, 1, 2, 3, \ldots, m_0^x\}$.

Así, dada $x \in Fr\,(U)$ si $m \in \omega$ es tal que B_m^x es finito, definimos:

$$V_x = S_{1/m}(x) \setminus \cup\{U_i : 0 \leqslant i \leqslant m_0^x\}$$

una vecindad abierta de x. De esa manera para cada $x \in Fr\,(U)$ y $n \in \omega$ existe una vecindad cerrado abierta de C_n, W_n^x tal que $W_n^x \subset U_n$ y $V_x \cap W_n^x = \emptyset$. Esto es, dada $x \in Fr\,(U)$ existe una vecindad que para cada $n \in \omega$ no intersecta a las vecindades cerrado abiertas de C_n, en particular, no intersecta a C_n. Esto nos permitirá encoger a los U_i de manera que su frontera sea vacía y sea posible extender a f como en nuestro primer intento.

La colección $\{V_x : x \in Fr\,(U)\}$ es una cubierta de $Fr\,(U)$. Ya que $Fr\,(U)$ es un cerrado en X, un espacio métrico separable (entonces Lindelöf), podemos encontrar $\{V_{x_0}, V_{x_1}, \dots\} \subset \{V_x : x \in Fr\,(U)\}$ una subcubierta numerable de $Fr\,(U)$. Para cada $k \in \omega$ y $k > 1$ sea

$$R_k = \cap\{W_k^{x_i} : 1 \leqslant i \leqslant k\}$$

Observamos que cada $R_k \subset U_k$ es un cerrado abierto, de donde $R = \cup\{R_k : k \in \omega\}$ es un abierto. Veamos que R es también cerrado. Por el Lema(3.7), $Fr\,(R)$ es el conjunto

$$M = \{x \in X : \textit{para toda } V, \textit{ vecindad de } x, V \cap R_k \neq \emptyset \textit{ para una infinidad de } k \in \omega\}.$$

Dado $x \in X$ existen tres posibilidades, $x \in X \setminus U$, $x \in U$ ó $x \in Fr\,(U)$, si $M \neq \emptyset$, sea $x \in M$. Es fácil ver que no es posible que $x \in U \cup (X \setminus U)$, entonces $x \in Fr\,(U)$, de donde $x \in V_{x_j}$ para alguna j, pero $V_{x_j} \cap R_l \neq$ si y sólo si $l < j$, una contradicción a la suposición inicial $x \in M$. Por tanto M es vacío y R es cerrado.

Finalmente, $F : X \longrightarrow \omega$ definida por: $F\,(x) = k$ si $x \in R_k$ y $F\,(x)$ en cualquier otro caso, es una extensión continua de f. $\square$

Hacemos notar que la prueba anterior funciona para cualquier espacio Lindelöf primero numerable. La razón de trabajar con hipótesis más fuertes se dará después de la siguiente definición.

Definición 3.9. En un espacio topológico X, a una familia de abiertos no vacíos ajenos por pares C se le llama una *familia celular*. La *celularidad* de X, denotada $c\,(X)$ es definida como
$\sup\{|C| : C \textit{ es una familia celular en } X\}$.

Entonces, un espacio métrico separable X tiene celularidad contable hereditaria. De tal manera, para todo ordinal no numerable α, ningún subespacio de X admite una función continua sobreyectiva en α. Es decir, tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 3.10. *Si X es un espacio métrico separable y $S \subset X$ está 2-encajado, entonces S está α-encajado para cualquier ordinal α.*

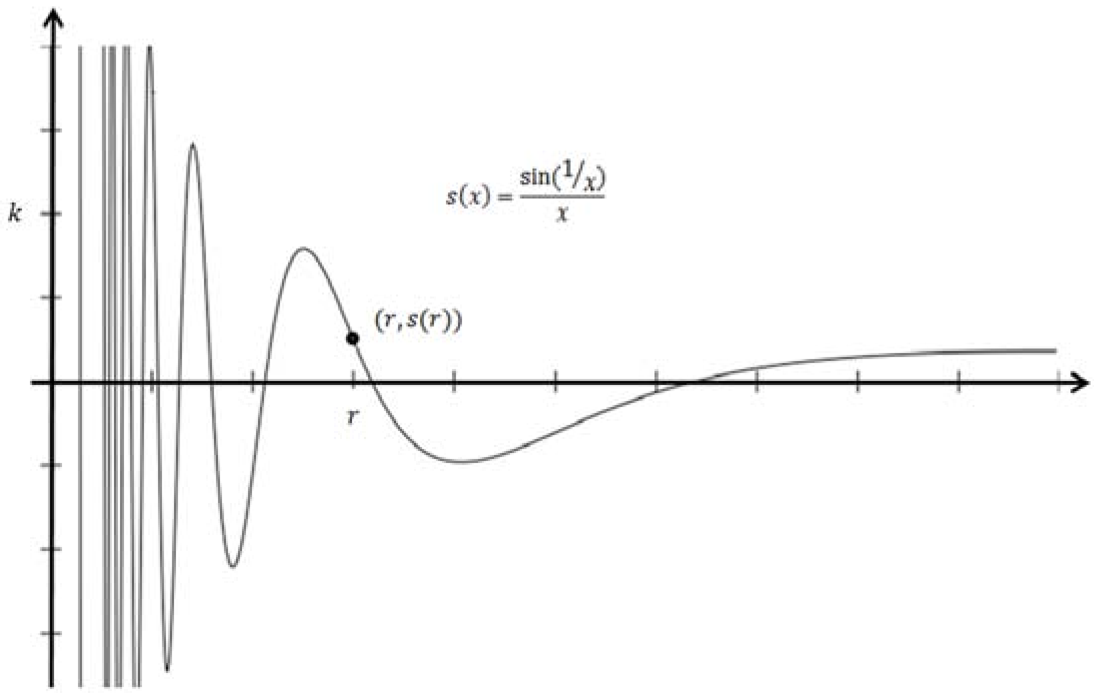

Figure 3.1: Gráfica de $s(x) = \dfrac{sen(1/x)}{x}$.

Demostración. Sean $S \subset X$, X un espacio métrico separable y $f : S \longrightarrow \alpha$ una función continua. El resultado cuando $f[S]$ es finito fue probado en la proposición 3.6. Para el caso $f[S]$ infinito nuestras hipótesis, como hemos dicho en el párrafo previo a este corolario, implican que existe una función biyectiva $g : f[S] \longrightarrow \omega$; más aún, esta función es un homeomorfismo entre espacios discretos. Definimos $h = g \circ f$, la cual es continua, y sea H una extensión continua para h (garantizada por el teorema 3.8). De esta manera $F = g^{-1} \circ H$ es una extensión continua de f. $\square$

Finalmente, es fácil ver que si un subconjunto de cualquier espacio está κ-encajado, para algún cardinal κ, entonces está λ-encajado para cualquier $\lambda < \kappa$.

Antes de seguir, motivaremos el siguiente resultado con un ejemplo.

Ejemplo 3.11. *Tomemos $X = \mathbb{R}^2$, $S \subset X$ la cerradura en X de la gráfica de la función $s : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $s(x) = \dfrac{\sin(1/x)}{x}$ y $Y = S$. Figura 3.1.*

Consideramos $f : S \longrightarrow Y$ una función continua y acotada. Entonces se cumple que $f[S]$ es conexo y pasa sólo una de las siguientes condiciones: $f[S]$ está contenida en el *eje* $\mathcal{Y}$ *ó* $f[S]$ *está contenida en la gráfica de la función* s *(que es el conjunto* $Y \setminus \mathcal{Y}$*). De otra manera, sea* $M > 0$ *tal que* $f[S] \subseteq [-M, M]^2$ *y supongamos que* $A = f[S] \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ *y* $B = f[S] \cap (Y \setminus \mathcal{Y}) \neq \emptyset$*. Para* $(r, s(r)) \in B$ *existe* $t \in (0, r)$ *tal que* $s(t) > M$ *(para cada* $k \in \omega$ *se tiene que* $\frac{2}{(4k+1)\pi} < \frac{1}{k+1}$ *por lo que* $\lim_{k\to\infty} \frac{2}{(4k+1)\pi} = 0$*; además un cálculo sencillo muestra que* $k < s\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)$*). Sean* $U = \{(x, y) \in Y : y < t\}$ *y* $V = \{(x, y) \in Y : y > t\}$*,* U *y* V *son abiertos ajenos no vacíos de* Y *tales que* $f[S] \subset U \cup V$*, una contradicción.*

Por lo anterior, f *puede considerarse como una función continua de* S*, un cerrado en un espacio normal, a un espacio homeomorfo a* $\mathbb{R}$*. Y concluimos por el Teorema de extensión de Tietze que existe* $F : X \longrightarrow Y$ *una extensión continua de* f*.*

Por otro lado la función identidad $i : S \longrightarrow Y$ *no admite una extensión continua a* X *pues este es conexo por trayectorias y* Y *no lo es.*

El Ejemplo 3.11 muestra la existencia de un espacio métrico separable X, un espacio Y y S, un subconjunto de X, para el que toda función $f : S \longrightarrow Y$ continua y acotada se extiende (de manera continua) a todo X, pero tales que no ocurre lo mismo si f se considera solamente continua. El siguiente resultado muestra que si $Y \subset \mathbb{R}$, la hipótesis "toda función continua y acotada de S en Y se extienda a X" implica que cualquier función continua de S en Y se extiende.

Teorema 3.12. *Sea* X *un espacio métrico separable y* S *un subconjunto de* X*. Sea* $Y \subset \mathbb{R}$ *tal que cada función continua y acotada* $f : S \longrightarrow Y$ *se extiende a una función continua* $F : X \longrightarrow Y$*. Entonces toda función continua* $f : S \longrightarrow Y$ *se extiende de manera continua a una función* $F : X \longrightarrow Y$*.*

Demostración. Para comenzar, notemos que el caso no trivial es en el que Y es un subconjunto no acotado de $\mathbb{R}$. En seguida, ya que para cualquier $r \in \mathbb{R}$ el espacio $\{y - r : y \in Y\}$ es homeomorfo a Y, supondremos sin pérdida de generalidad que $0 \in Y$. Por otra parte dada $f : S \longrightarrow Y$ continua, definimos $f^+ = \max\{0, f\}$ y $f^- = \max\{0, (-f)\}$, las cuales son continuas y no negativas. Si ocurre que f^+ y f^- admiten extensiones continuas a X, F^+ y F^- respectivamente, es claro que $F = F^+ - F^-$ es una extensión continua de f. Podemos entonces suponer que f es no negativa. Bajo estas condiciones distinguimos dos casos

Caso 1. Y contiene un intervalo de la forma (b, ∞), donde $b > 0$. La hipótesis, toda función $f : S \longrightarrow Y$ continua y acotada se extiende a una función continua de X en Y dice en realidad que S está C^*-encajado en X, el cual es un espacio métrico separable. Se sigue que S es cerrado en X (ver proposici[on 3.2).

Consideramos ahora $h : Y \longrightarrow [0, b+2)$ un encaje tal que $h(y) = y$ para cada $y \in Y \cap [0, b+1]$. De esa manera $h(Y) \subset Y$ y $h \circ f$ es una función continua y acotada de S en Y. Por hipótesis $h \circ f$ se extiende a una función continua $g : X \longrightarrow Y$. Definimos $G : X \longrightarrow [0, b+2]$ como $G = g \wedge (b+2)$, la que es nuevamente una extensión continua de $h \circ f$. Si $A = G^{-1}([0, b+1]) \cup S$ y $B = G^{-1}(\{b+2\})$, A y B son dos cerrados de X. La normalidad de X nos permite hallar una función continua $k : X \longrightarrow \left[\frac{b+1}{b+2}, 1\right]$ tal que $k(a) = 1$ para cada $a \in A$ y $k(b) = \frac{b+1}{b+2}$ para cada $b \in B$. De esta manera $k \cdot G : X \longrightarrow [0, b+1)$, pues $0 \leqslant k \cdot G(x) \leqslant G(x)$, y si $s \in S$, $(k \cdot G)(s) = 1 \cdot G(s) = h \circ f(s)$. Finalmente sea $F = h^{-1} \circ (k \cdot G) : X \longrightarrow Y$, la cual es continua y extiende a f.

Caso 2. Y no contiene un intervalo de la forma (a, ∞). De esta manera Y no acotado en $\mathbb{R}$ puede escribirse de la forma $Y = \cup\{C_n : n \in \omega\}$, donde cada C_n es un cerrado abierto de Y y para toda $n \in \omega$, los elementos de C_{n+1} son más grandes que cada elemento de C_n. Es decir, cada C_n es la intersección con Y de un intervalo con extremos a_n, b_n donde $a_n < b_n$ y es posible que $b_n = a_{n+1}$.

Sea f de X en Y una función continua no acotada y $\mathcal{B} = \{B_n = f^{-1}[C_n] : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$ definimos $f_n : S \longrightarrow Y$ como $f_n(s) = f(s)$ siempre que $s \in B_n$ y 0 en cualquier otro caso. Para toda $n \in \omega$, f_n es una función continua (porque B_n es cerrado abierto) y acotada de S en Y y por tanto existe $F_n : X \longrightarrow Y$ que la extiende continuamente. Sea $W_n = F_n^{-1}[C_n]$.

En este caso como en el Teorema 3.8, f genera la familia $\mathcal{B}$, una cubierta de S formada por cerrado abiertos (de S), ajenos dos a dos. Si seguimos este razonamiento, una extensión continua para f generará a su vez una familia $\{A_n : n \in \omega\}$ de cerrado abiertos de X, ajenos dos a dos, que cubra a X, y cumpla que $B_n \subseteq A_n$ y $A_n \cap S = B_n$ (llamaremos a esta última condición (*)). Más aún, si existe una familia $\{A_n : n \in \omega\}$ con tales características y que además cumpla $A_n \subseteq W_n$, la función $F^{'} : X \longrightarrow Y$ definida por $F^{'}(x) = F_n(x)$ siempre que $x \in A_n$ es una extensión continua de f. Mostraremos que las propiedades de X son suficientes para encontrar dicha cubierta y la extensión de f será muy similar a $F^{'}$.

Empezamos por elegir, para cada $n \in \omega$, $y_n \in C_n$. Sea $\Omega = \{y_n : n \in \omega\}$. Ω, como subespacio de Y es homeomorfo al espacio discreto ω. Dada una función continua y acotada $g : S \longrightarrow \Omega$, si i denota la inclusión de Ω en Y, $i \circ g$ es acotada y por hipótesis se extiende a una función continua $g' : X \longrightarrow Y$. Definimos la función $h : Y \longrightarrow \Omega$ como $h(y) = y_n$ siempre que $y \in C_n$, la cuál es continua pues $h^{-1}[\{y_n\}] = C_n$. De manera que $G = h \circ g'$ es una extensión continua de g. Lo anterior muestra que S está n-encajado para toda $n \in \omega$. Así, S está 2-encajado. Lo anterior y las hipótesis sobre X nos permite concluir, por el Teorema 3.8, que S está ω-encajado en X. De tal manera, la función continua $h \circ f$ genera la cubierta $\mathcal{B}$ y se extiende de manera continua a una función $f_1 : X \longrightarrow \Omega$. La familia $\{D_n = f_1^{-1}[\{y_n\}] : n \in \omega\}$ es una cubierta de X de cerrado abiertos ajenos que cumple (*).

Para cada $n \in \omega$ sea $A_n = W_n \cap D_n$. Por construcción $A = \{A_n : n \in \omega\}$ es una familia de cerrado abiertos de X, ajenos, cumple (*) y además $A_n \subseteq W_n$ pero puede que aún no cubra a X. Afirmamos que $\cup A$ es cerrado abierto, para ver esto notemos que para cada $x \in Cl(\cup A)$, x pertenece a un único D_n, de manera que $x \in Cl(A_n) = A_n \subseteq \cup A$. Sea entonces $\mathcal{A} = A \cup \{X \setminus \cup A\}$ y $F : X \longrightarrow Y$ definida por $F(x) = F_n(x)$ siempre que $x \in A_n$ y $F(x) = y_0$ en otro caso. F extiende a f pues para cada $s \in S$, $F(s) = F_n(s) = f_n(s)$. Y finalmente, F es continua en cada A_n pues $F \restriction A_n = F_n$ y estos son cerrado abiertos ajenos, y si $U \subseteq C_0$ es un abierto que tiene a y_0, $F^{-1}[U] = \left(F_0^{-1}[U] \cap A_0\right) \cup (X \setminus \cup A)$ que es un abierto. $\square$

CAPÍTULO 4: ESPACIOS PARTICULARES

4.1 El espacio $\beta\omega$

Dado un espacio topológico X, una compactación de X es un espacio Y, compacto de Hausdorff, acompañado de un encaje $e : X \longrightarrow Y$ tal que $e[X]$ es denso en Y. En general para un espacio topológico de Hausdorff completamente regular X, βX denota a su compactación de Stone–Čech. Como sabemos tal compactación está caracterizada tener a X como un subespacio C^*-encajado, corolario 3.6.2 de [5]. En esta sección revisaremos algunas propiedades de $\beta\omega$ que nos servirán más adelante y aprovecharemos para fijar algo de notación.

Existen dos maneras comunes de construir a βX. La primera de ellas obtiene a βX como la cerradura de un subespacio del espacio producto $[0,1]^{\lambda}$, donde $\lambda = |C^*(X)|$. Referimos al lector al primer capítulo de [23] para todos los detalles de esta construcción. La segunda forma consiste en dar una topología al conjunto de todos los z-ultrafiltros de X de manera que cumpla ser la compactación de Stone–Čech para X. Recordemos que $A \subseteq X$ es nulo siempre que exista $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f^{-1}[\{0\}] = A$ y un $\mathcal{U} \subseteq \wp(X)$ es un z-ultrafiltro si y sólo si es una familia no vacía de subconjuntos nulos de X con la PIF tal que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y si $E \in \mathcal{U}$ y F es un subconjunto nulo de X tal que $E \subseteq F$, entonces $F \in \mathcal{F}$. Nosotros trabajaremos de la segunda manera y nos ocuparemos del caso en que X es un espacio discreto, para la discusión del caso general referimos al lector al capítulo 6 de [8].

Una manera intuitiva de ver a las compactaciones consiste en pensar que estamos agregando puntos con el fin de hacer que cada familia de cerrados con la *PIF* tenga intersección no vacía. Para un espacio completamente regular basta considerar familias de nulos con la *PIF* pues estos forman una base para los cerrados del espacio. Ya que los z-filtros son familias con la *PIF* y cada familia de nulos con la *PIF* puede extenderse a un z-filtro, es normal pensar que los puntos a agregar tengan que ver con la convergencia de los z-filtros. Más sencillo aún, ya que cada z-filtro puede extenderse a un z-ultrafiltro, basta hacer que estos tengan intersección no vacía. La idea detrás de todo esto es hacer que cada z-ultrafiltro converja a él mismo.

Sea βX la colección de todos los z-ultrafiltros de X. Sea X un espacio discreto. Se cumple entonces que cada uno de sus subconjuntos es un nulo. De esa manera cada ultrafiltro en X es un z-ultrafiltro y viceversa. Para un conjunto $A \subseteq X$, definimos el *conjunto de Stone* de A como:

$$\widehat{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}.$$

La topología de βX es la que genera el conjunto:

$$\mathcal{B} = \{\widehat{A} : A \subseteq X\},$$

como base. $\mathcal{B}$ se llama la *base de Stone* para βX. Es inmediato que $\widehat{\emptyset} = \emptyset$ y $\widehat{X} = \beta X$. Las siguientes afirmaciones dependen únicamente de propiedades de los ultrafiltros y el lector puede verificarlas fácilmente; $\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$, $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$ y $\widehat{X \setminus A} = \beta X \setminus \widehat{A}$. Que $\mathcal{B}$ sea cerrado bajo intersecciones finitas y la igualdad $\widehat{X} = \beta X$ nos dice que existe una única topología en βX que tiene a $\mathcal{B}$ por base de abiertos. Llamaremos a ésta la *topología de Stone*.

Es claro que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo complementos, de donde βX es *cero*-dimensional. Por otro lado, dados p y q, dos ultrafiltros distintos en X, podemos afirmar que existe $A \subseteq X$ tal que $A \in p$ y $X \setminus A \in q$ por lo que $\widehat{A}$ y $\widehat{X \setminus A}$ son dos abiertos básicos y ajenos que los separan. Deducimos así que βX es un espacio de Hausdorff y podemos concluir que es también completamente regular. De esa manera empezamos a justificar que nombráramos βX a éste espacio. Acabaremos de justificar nuestro abuso después de citar algunas propiedades básicas de los conjuntos de Stone cuya demostración es sencilla.

Proposición 4.1. *Para cualesquiera $A, B \subseteq X$, se cumple que:*

(a) $A = \emptyset$ si y sólo si $\widehat{A} = \emptyset$.

(b) $A \subseteq B$ si y sólo si $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$.

(c) $A = B$ si y sólo si $\widehat{A} = \widehat{B}$.

(d) $A = X$ *si y sólo si* $\widehat{A} = \beta X$.

Lema 4.2. *Si* X *es un espacio discreto y* $e : X \longrightarrow \beta X$ *es la función que asigna a cada elemento* x *de* X *el ultrafiltro principal generado por* x*, es decir,* $e(x) = \{B \subseteq X : \{x\} \subseteq B\}$*, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) e *es inyectiva y su imagen es la colección de todos lo ultrafiltros principales en* X.

(ii) Para cada $A \subseteq X$, $Cl_{\beta X}(e[A]) = \widehat{A}$.

(iii) Para cada $A \subseteq X$, $\widehat{A} \cap e[X] = e[A]$.

(iv) e *es un encaje.*

(v) $e[X]$ *es denso en* βX.

Demostración. *(i)* Ya que $x \neq y$, $\{x\} \neq \{y\}$, de donde $e(x) \neq e(y)$. Si $p \in \beta X$ es principal, existe $z \in X$ tal que $p = \{B \subseteq X : \{z\} \subseteq B\} = e(z)$.

(ii) Observamos que $A \in e(a)$ si y sólo si $e(a) \in \widehat{A}$, por lo que $\widehat{A}$ es un cerrado que contiene a $e[A]$, así $Cl_{\beta X}(e[A]) \subseteq \widehat{A}$. Para probar que $\widehat{A} \subseteq Cl_{\beta X}(e[A])$, tomamos $p \in \widehat{A}$ y supongamos que existe $\widehat{U}$ una vecindad de p tal que $\widehat{U} \cap e[A] = \emptyset$, esto es, para cada $a \in A$, $\widehat{U} \cap \{e(a)\} = \widehat{U} \cap \widehat{\{a\}} = \emptyset$. De donde $U \cap A = \emptyset$, así $U \subseteq X \setminus A$ y $p \in \widehat{U} \subseteq \widehat{X \setminus A}$, lo que es una contradicción.

(iii) Es directo de *(i)*.

(iv) Por *(i)* y *(iii)*, e es continua y biyectiva en su imagen, y *(ii)* asegura que e es cerrada sobre su imagen. Por lo que podemos concluir que es un encaje.

(v) Sea $\widehat{U}$ un abierto básico de βX no vacío. Entonces U es no vacío y es claro que $e(u) \in \widehat{U}$ para cada $u \in U$. □

Corolario 4.3. *Para un espacio discreto* X, βX *junto con* e *es una compactación de* X.

Demostración. Falta únicamente comprobar que βX es compacto. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de βX y supongamos sin pérdida de generalidad que los elementos de $\mathcal{C}$ son básicos, esto es, $\mathcal{C} = \{\widehat{A_i} : i \in I\}$. Si $\mathcal{C}$ no tiene una subcubierta finita, la familia $\{X \setminus A_i : i \in I\}$ tiene la *PIF*, por lo que existe p un ultrafiltro que la contiene. Finalmente, observamos que para cada $i \in I$, $p \notin \widehat{A_i}$, lo que contradice que $\mathcal{C}$ es una cubierta para βX. □

Falta sólo ver que X está C^*-encajado en βX para comprobar que, de quién hemos estado hablando, es en realidad la compactación de Stone–Čech para X. Para la prueba de esto introduciremos una noción de convergencia para una familia $\{r_x : x \in X\} \subseteq R$ con respecto a algún filtro en X.

Definición 4.4. Dada una función entre dos espacios topológicos $\sigma : X \longrightarrow R$ tal que $\sigma(x) = r_x$ y p un filtro en X, un punto $r \in R$ se llama un ***p*-límite** para $\{r_x : x \in X\}$ si y sólo si para toda vecindad U de r, $\sigma^{-1}[U] \in p$. Si r es un p-límite para $\{r_x : x \in X\}$, lo denotaremos por $p\text{-}\lim_{x\in X} r_x = r$.

Los hechos que utilizaremos acerca de los p-límites se encuentran en el siguiente Lema.

Lema 4.5. *Sean X y R espacios topológicos y $\sigma : X \longrightarrow R$ una función y denotemos $\sigma(x) = r_x$. Son verdaderas las siguientes afirmaciones:*

(a) Si R es un espacio compacto de Haussdorff, para cada ultrafiltro p en X, $p\text{-}\lim_{x\in X} r_x$ existe y además es único.

(b) Dada $a \in X$, si p_a denota al ultrafiltro principal egenerado por a, entonces $p_a\text{-}\lim_{x\in X} r_x = r_a$.

Demostración. (a) Fijemos a p un ultrafiltro en X y supongamos por el contrario que para cada $r \in R$ existe una vecindad de r U_r tal que $\sigma^{-1}[U_r] \notin p$. La familia $\{U_r : r \in R\}$ forma una cubierta para R, sea entonces $\{U_{r_0}, U_{r_1}, U_{r_2}, \ldots, U_{r_n}\}$ una subcubierta finita para ella. Se obtiene que $\bigcap_{k\leqslant n}[R \setminus U_{r_k}] = \emptyset$. Ya que p es un ultrafiltro, para cada $k \leqslant n$, $X \setminus \sigma^{-1}[U_{r_k}] = \sigma^{-1}[R \setminus U_{r_k}] \in p$. De esa manera $\emptyset = \sigma^{-1}\left[\bigcap_{k\leqslant n}(R \setminus U_{r_k})\right] = \bigcap_{k\leqslant n}\sigma^{-1}[(R \setminus U_{r_k})] \in p$, lo que es una contradicción.

Si r y s son dos puntos distintos de R, sean un U_r y U_s vecindades ajenas de ellos, ya que $\sigma^{-1}[U_r] \cap \sigma^{-1}[U_s] = \emptyset$, se sigue que r y s no pueden ser p-límites para un mismo filtro p.

(b) Dada $a \in X$, $a \in \sigma^{-1}[U]$ para toda vecindad U de r_a, es decir, $\sigma^{-1}[U] \in p_a$ para toda vecindad U de r_a. $\square$

Teorema 4.6. *Dado un espacio discreto X, $e[X]$ está C^*-encajado en βX.*

Demostración. Nombremos $S = e[X]$ y consideramos $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada. Hagamos $f(s) = r_s$. Definimos $F : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $F(p) = p\text{-}\lim_{s\in S} r_s$. Ya que, f es acotada, el lema 4.5 asegura que F está bien definida y extiende a f. Veamos que es continua.

Sean $r \in F[\beta X]$, $r = F(p)$ para alguna $p \in \beta X$, una vecindad de r U y escogemos V, alguna vecindad de r, tal que $Cl_{\mathbb{R}}V \subseteq U$ (recuerde que $\mathbb{R}$ es un espacio normal). De tal forma, $f^{-1}[V] \in p$ y además $f^{-1}[V] = e[A]$ para alguna $A \subseteq X$. Basta ahora probar que $F\left[\widehat{A}\right] \subseteq U$. Por el lema 4.2, *(ii)* se tiene que:

$$F\left[\widehat{A}\right] = F\left[Cl_{\beta X}(e[A])\right] = F\left[Cl_{\beta X}\left(f^{-1}[V]\right)\right] \subseteq Cl_{\mathbb{R}}(V) \subseteq U,$$

lo que termina la prueba. □

Al trabajar con compactaciones es usual identificar al espacio X con su imagen bajo el encaje, por lo que supondremos ahora a X contenido en βX. El caso particular $X = \omega$ es de importancia en este trabajo, pero en general su residuo $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ cumple una mayor cantidad de peculiaridades. En seguida listamos algunas de las propiedades de $\beta\omega$ y ω^* y referimos al lector a [5] y a [23] para las demostraciones y más información.

1. La cardinalidad de $\beta\omega$ es $2^{\mathfrak{c}}$.
2. El peso de $\beta\omega$ es $\mathfrak{c}$.
3. Cada subconjunto infinito cerrado de $\beta\omega$ contiene un subespacio homeomorfo a $\beta\omega$.
4. El espacio $\beta\omega$ no tiene sucesiones convergentes no triviales.
5. Ningún punto de ω^* es aislado.
6. $\beta\omega$ no es un espacio secuencial ni secuencialmente compacto.
7. ω^* no tiene la *countable chain condition.*
8. Ningún punto de ω^* es un G_δ.

Para concluir esta sección incluimos dos resultados que relacionan a $\beta\omega$ con este trabajo y sirven de alguna manera como preámbulo al teorema 5.9. La proposición 4.8 nos da otra manera de construir a $\Psi_{\mathcal{A}}$ en la sección 4.2.

Proposición 4.7. *$\mathfrak{p}$ es el mínimo cardinal de una familia de cerrado abiertos de ω^* con la PIF cuya intersección tiene interior vacío (en ω^*).*

Demostración. Si κ es el mínimo cardinal de una familia con las características que describe la proposición, probaremos que *i)* $\kappa \leqslant \mathfrak{p}$ y *ii)* $\mathfrak{p} \leqslant \kappa$. Antes de seguir recordemos que para todo $A \subseteq \omega$, $\widehat{A}$ representa el conjunto de Stone de A, esto es el conjunto de todos los ultrafiltros en ω que tienen a A como elemento. Durante la prueba denotaremos $A^* = \widehat{A} \cap \omega^*$ siempre que $A \subseteq \omega$.

$i)$ Sea $\mathcal{C} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia centrada de cardinalidad $\mathfrak{p}$ sin pseudointersección. La familia $\mathcal{C}' = \{C^* : C \in \mathcal{C}\}$ es una familia de cerrado abiertos de ω^*. Probar que $\mathcal{C}'$ tiene la *PIF* se reduce a mostrar que dada $\{C_0^*, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*\} \subseteq \mathcal{C}'$, existe $U \in \bigcap_{i \leqslant n} C_i^*$. Esto es, existe un ultrafiltro libre U tal que para cada $i \leqslant n$, $C_i \in U$, pero claramente la familia $COF(\omega) \cup \{\bigcap_{i \leqslant n} C_i\}$ tiene la *PIF* pues $\mathcal{C}$ tiene la *PIFF*. Por lo que es posible extenderla a un ultrafiltro libre que cumple con los requisitos listados arriba.

Para ver que $int_{\omega^*}\left(\bigcap \mathcal{C}'\right) = \emptyset$ probaremos que de no ser así es posible encontrar una pseudo-intersección para la familia $\mathcal{C}$. Sea entonces $U \in int_{\omega^*}\left(\bigcap \mathcal{C}'\right)$ y D^* un cerrado abierto básico de ω^* tal que $U \in D^* \subseteq int_{\omega^*}\left(\bigcap \mathcal{C}'\right)$. Se sigue que cualquier ultrafiltro libre que tenga a D debe tener a C, para todo $C \in \mathcal{C}$. De manera equivalente, no existe un ultrafiltro libre que tenga a D y al complemento de algún $C \in \mathcal{C}$, de donde $D \cap (\omega \setminus C) = D \setminus C$ es finito. En otras palabras D es una pseudo-intersección para $\mathcal{C}$, una contradicción.

Falta únicamente observar que $|\mathcal{C}'| \leqslant \mathfrak{p}$, y por ende $\kappa \leqslant \mathfrak{p}$.

$ii)$ Sea ahora $\mathcal{F}$ una familia de cerrado abiertos de ω^* con la *PIF* y cuya intersección tiene interior vacío, y cuya cardinalidad sea κ. Ya que ω^* es compacto y $\mathcal{F}$ tiene la *PIF*, podemos encontrar $U \in \bigcap \mathcal{F}$. Para cada $F \in \mathcal{F}$ sea E_F^* un cerrado abierto básico de ω^* tal que $U \in E_F^* \subseteq F$. Sean $\mathcal{E}' = \{E_F^* : F \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{E} = \{E_F : F \in \mathcal{F}\}$. Si notamos que $U \in E_F^*$ implica que $E_F \in U$, esto para toda $F \in \mathcal{F}$, es fácil concluir que $\mathcal{E}$ tiene la *PIFF*. Si ocurriera que $\mathcal{E}$ tiene una pseudo-intersección D, entonces para toda $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $D \cap (\omega \setminus E_F) = D \setminus E_F$ es finito, por lo que no existe un ultrafiltro libre que extienda a $\{D, \omega \setminus E_F\}$, es decir $D^* \subseteq \bigcap \mathcal{E}' \subseteq \bigcap \mathcal{F}$. En seguida, dado que $COF(\omega) \cup \{D\}$ tiene la *PIFF*, puede extenderse a un ultrafiltro y $D^* \neq \emptyset$, por lo que llegaríamos a una contradicción.

Finalmente $|\mathcal{E}| \leqslant \kappa$, así $\mathfrak{p} \leqslant \kappa$. $\square$

Proposición 4.8. *Sea* $e : \omega \longrightarrow \beta\omega$ *el encaje que asigna a cada* $n \in \omega$ *el ultrafiltro principal* $\mathrm{n} = \{B \subseteq \omega : n \in B\}$ *y para cada* $E \subseteq \omega$ *sea* $\mathrm{E} = e[E]$*. Entonces:*

i) $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ *es una familia casi disjunta (AD) si y sólo si la familia* $\{(Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A} : A \in \mathcal{A}\}$ *es una familia de cerrado abiertos de* ω^* *ajenos.*

ii) $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ *es una familia casi disjunta maximal (MAD) si y sólo si la familia* $\{(Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A} : A \in \mathcal{A}\}$ *es una familia de cerrado abiertos de* ω^* *ajenos cuya unión es densa en* ω^**.*

Demostración. *i)* Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ casi disjunta. Para cada $E \subseteq \omega$ se tiene que $Cl_{\beta\omega}\mathrm{E} = \widehat{E}$, donde $\widehat{E}$ representa el conjunto de Stone de E, y además $Cl_{\beta\omega}\mathrm{E} \cap e\,[\omega] = \mathrm{E}$. De lo anterior deducimos que para cada $A \in \mathcal{A}$, $(Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A} = \widehat{A} \cap \omega^* = A^*$, de esa forma $\{(Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A} : A \in \mathcal{A}\}$ es una familia de cerrado abiertos. Por otro lado si A y B son subconjuntos de ω casi disjuntos, $U \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$ si y sólo si $A, B \in U$, de dónde $A \cap B \in U$ por lo que U es principal y $[(Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A}] \cap [(Cl_{\beta\omega}\mathrm{B}) \setminus \mathrm{B}] = A^* \cap B^* = \emptyset$.

Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ es una familia tal que $\{(Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A} : A \in \mathcal{A}\}$ es una familia de cerrado abiertos de ω^* ajenos. Hemos visto que $Cl_{\beta\omega}\mathrm{A} = \widehat{A}$ por lo que si $\left(\widehat{A} \setminus A\right) \cap \left(\widehat{B} \setminus B\right) = \emptyset$, podemos afirmar que $\{A, B\}$ no tiene la *PIFF*, lo que es equivalente a afirmar que los elementos de la familia $\mathcal{A}$ son casi disjuntos.

ii) Si suponemos que además $\mathcal{A}$ es *MAD* y consideramos E^* un cerrado abierto básico de ω^*, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|E \cap A| = \omega$. De esa manera la familia $COF\,(\omega) \cup \{E \cap A\}$ tiene la *PIFF* y existe un ultrafiltro libre U que la extiende. Claramente $U \in E^* \cap [(Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A}]$, con lo que queda probado que la unión de $\{(Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A} : A \in \mathcal{A}\}$ es densa en ω^*.

De la otra manera, si $\mathcal{A}$ es una familia tal que $\{(Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A} : A \in \mathcal{A}\}$ es una colección de cerrado abiertos de ω^* ajenos cuya unión es densa en ω^*, ya hemos probado que $\mathcal{A}$ es *AD*. Si $E \in [\omega]^{\omega}$, entonces $E^* \cap (Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A} \neq \emptyset$ para alguna $A \in \mathcal{A}$, es decir, existe U un ultrafiltro libre tal que $E, A \in U$ por lo que $|E \cap A| = \omega$ y concluimos que $\mathcal{A}$ debe ser maximal. □

4.2 Espacios de Mrówka-Isbell

En esta sección discutimos brevemente a los espacios de Mrówka-Isbell que son fundamentales para los resultados de la sección 5.1. Los espacios de Mrówka-Isbell son introducidos en [17] con el fin de, entre otras cosas, dar un ejemplo de que existe un espacio topológico con una única compactación. A partir de estos resultados los espacios de Mrówka-Isbell han sido una gran fuente de ejemplos en topología. Como una muestra, uno de ellos es un ejemplo de un espacio pseudocompacto, no normal y no numerablemente compacto (teorema 4.10 y corolarios 4.12 y 4.13, recordemos que todo espacio normal y pseudocompacto es numerablemente compacto). La frase anterior y el título de esta sección dejarán ver al lector que hay un gran número de estos espacios.

Como veremos las propiedades de estos espacios están relacionadas con la familia casi disjunta, AD por sus siglas en inglés (*almost disjoint*), que se utilice para construirlo. Este es uno de los hechos que ha motivado la investigación en familias casi disjuntas. Encontrar familias AD con propiedades combinatorias o topológicas especiales es notoriamente difícil de hacer. La relación entre familias casi disjuntas y la topología es discutida en [13].

Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia AD. Definimos las vecindades abiertas básicas para los puntos de $\Psi_\mathcal{A} = \omega \cup \mathcal{A}$ de la siguiente manera: si $n \in \omega$, n es un punto aislado y si $A \in \mathcal{A}$, sus vecindades abiertas básicas son de la forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, donde $F \in [A]^{<\omega}$. Con esta topología es muy fácil comprobar que $\Psi_\mathcal{A}$ es un espacio de Hausdorff, primero numerable y con ω como un subconjunto denso, por lo que es separable. Mostraremos algunas propiedades más de $\Psi_\mathcal{A}$ que serán de utilidad más adelante.

Lema 4.9. *Para cualquier familia AD, $\Psi_\mathcal{A}$ es un espacio:*

i) cero-dimensional,

ii) localmente compacto y

iii) completamente regular

Demostración. *i)* Basta probar que las vecindades abiertas básicas son también cerradas. Lo anterior es claro para $n \in \omega$. Si $A \in \mathcal{A}$ y consideramos la vecindad $U = \{A\} \cup (A \setminus F)$ probaremos que $\Psi_\mathcal{A} \setminus U$ es abierto. Sea $x \in \Psi_\mathcal{A} \setminus U$. Si $x \in \omega$, $\{x\}$ es una vecindad abierta de x talque $\{x\} \cap U = \emptyset$; si $x \in \mathcal{A}$, $V = \{x\} \cup [F \cup (x \cap A)]$ es una vecindad abierta de x que cumple $V \cap U = \emptyset$.

ii) Para cada $n \in \omega$, $\{n\}$ es una vecindad de n cuya cerradura es compacta. Demostraremos que si $A \in \mathcal{A}$, cualquier vecindad básica $U = \{A\} \cup (A \setminus F)$ es compacta. Sean $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de U, $C_0 \in \mathcal{C}$ tal que $A \in C_0$ y U_0 una vecindad básica tal que $A \in U_0 \subseteq C_0$. $U_0 = \{A\} \cup (A \setminus E)$ con $E \in [\omega]^{<\omega}$, de esa manera $U \setminus C_0 \subseteq U \setminus U_0 \subseteq F \cup E \in [\omega]^{<\omega}$. Si $U \setminus C_0 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, entonces una colección $\{C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $b_i \in C_i$ si

$0 < i \leqslant n$, es una subcubierta finita de $\mathcal{C}$ para U.

iii) Se sabe todo espacio de Hausdorff *cero*-dimensional (o Hausdorff localmente compacto) es completamente regular. $\square$

Teorema 4.10. *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD, entonces $\Psi_{\mathtt{A}}$ es pseudocompacto.*

Demostración. Consideremos a $\Psi_{\mathcal{A}}$ para $\mathcal{A}$ una familia *MAD*. La demostración consiste en probar que toda función continua $f : \Psi_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada si restringimos su dominio a ω. De tal manera $f[\Psi_{\mathcal{A}}] = f[Cl_{\Psi_{\mathcal{A}}}(\omega)] \subseteq Cl_{\mathbb{R}}(f[\omega])$ sería acotada. Para ver esto supongamos que no es así, es decir, que existen $f : \Psi_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $E = \{n_k : k \in \omega\} \subseteq \omega$ infinito tal que $f(n_k) > f(n_l)$ siempre que $k > l$ y para cada $m \in \omega$ existe $k(m) \in \omega$ tal que $f\left(n_{k(m)}\right) > m$. Es posible encontrar, ya que $\mathcal{A}$ es maximal, $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap E$ es infinito. Sea $r = f(A)$. Para cada abierto $(r - \epsilon, r + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ existe $n_{k(\epsilon)}$ tal que para toda $m \geqslant n_{k(\epsilon)}$, $f(m) \notin (r - \epsilon, r + \epsilon)$. Esto último es, no existe una vecindad abierta básica de A contenida en $f^{-1}[(r - \epsilon, r + \epsilon)]$, una contradicción pues f es continua. $\square$

Proposición 4.11. *Sea $\mathcal{A}$ una familia AD. En $\Psi_{\mathcal{A}}$ todo subconjunto $E \subseteq \mathcal{A}$ es discreto y cerrado.*

Demostración. Basta observar que para cada $F \in \mathcal{A}$, $\{F\} = (\{F\} \cup F) \cap \mathcal{A}$. $\square$

Corolario 4.12. *Si $\mathcal{A}$ es una familia AD infinita, entonces Ψ_{A} no es numerablemente compacto.*

Corolario 4.13. *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD, $\Psi_{\mathcal{A}}$ no es normal.*

Demostración. De esa manera si $E \subseteq \mathcal{A}$ es numerable, podemos enumeralo sin repeticiones, digamos $E = \{A_n : n \in \omega\}$. Por la proposición 4.11, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(A_n) = n$ es continua. De ser $\Psi_{\mathcal{A}}$ normal, por el Teorema de Extensión de Tietze, existe una extensión de f, $F : \Psi_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y no acotada, contradiciendo el Teorema 4.10. $\square$

Existe otra manera de construir al espacio $\Psi_{\mathcal{A}}$ cuando $\mathcal{A}$ es una familia *MAD*. Ésta consiste en crear un cociente en $\beta\omega$ identificando los puntos de $Cl_{\beta\omega}(A) \setminus A$ para cada

$A \in \mathcal{A}$ en un punto p_A y dejar a ω intacto. Ya que $\mathcal{A}$ es *MAD*, $\{(Cl_{\beta\omega}\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A} : A \in \mathcal{A}\}$ es una familia de cerrado abiertos de ω^* ajenos cuya unión es densa en ω^* (proposición 4.8). De esa manera cada punto en ω^* está en $Cl_{\beta\omega}A$ para una única $A \in \mathcal{A}$ y concluimos que tal cociente está bien definido. Llamaremos a este espacio $\beta\omega_{/\mathcal{A}}$.

Teorema 4.14. *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD, entonces $\Psi_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo a $\beta\omega_{/\mathcal{A}}$.*

Demostración. Definamos la función $f : \Psi_{\mathcal{A}} \longrightarrow \beta\omega_{/\mathcal{A}}$ como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \omega, \\ p_x & \text{si } x \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

La cual está bien definida y es biyectiva por el Teorema 4.8. Para concluir que f es un homeomorfismo basta comprobar que para cada vecindad abierta básica V de $A \in \mathcal{A}$, $f[V]$ es una vecindad de p_A y viceversa, que para cada vecindad U de p_A, $f^{-1}[U]$ es una vecindad de A.

Para comprobar que f es abierta y continua hace falta considerar únicamente vecindades de puntos no aislados. Tomemos $V = \{A\} \cup (A \setminus F)$ una vecindad básica de A en $\Psi_{\mathcal{A}}$. $f[V] = \{p_A\} \cup A \setminus F$, cuya imagen inversa bajo la identificación es el abierto de $\beta\omega$, $\widehat{A} \setminus F$. Por otro lado si U es una vecindad de p_x en $\beta\omega_{/\mathcal{A}}$, la imagen inversa de ésta es una vecindad de $Cl_{\beta\omega}(x)$ que intersecta a todos excepto a una cantidad finita de elementos de x y se sigue el resultado deseado. □

Dado un espacio topológico X y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X, para cada $x \in X$ se define la *estrella de x* con respecto a la cubierta $\mathcal{U}$, denotada por $st(x, \mathcal{U})$, como el conjunto $\cup\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$. Dado un espacio topológico X una sucesión de cubiertas abiertas para X, $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ es un *desarrollo* (para X) si y sólo si para cada $x \in X$, $\{st(x, \mathcal{U}_i) : i \in \omega\}$ es una base local de x. A un espacio topológico con un desarrollo se le llama *espacio desarrollable.*

Definición 4.15. Un espacio topológico regular desarrollable es llamado un **espacio de Moore**.

Para finalizar, relacionaremos un poco más a los espacios de Mrówka-Isbell con los temas del Apéndice A y la Conjetura del Espacio Normal de Moore ($NMSC$) (ver el Ejemplo 5.6). Para cada $x \in \Psi_{\mathcal{A}}$ y cada $n \in \omega$ definimos $V_x(n)$ como: $V_x(n) = \{x\}$ si $x \in \omega$ y como $V_x(n) = \{x\} \cup (x \setminus n)$ si $x \in \mathcal{A}$. La familia $\mathcal{U}_n = \{V_x(n) : x \in \Psi_{\mathcal{A}}\}$ es una cubierta abierta de $\Psi_{\mathcal{A}}$, esto para cada $n \in \omega$. Es además fácil comprobar que la colección $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ es un desarrollo para $\Psi_{\mathcal{A}}$ (Definición 6.17), por lo que podemos concluir que $\Psi_{\mathcal{A}}$ es un espacio de Moore. Remarcamos además el parecido entre la definición de los espacios $\Psi_{\mathcal{A}}$ y la construcción del Plano de Moore. El Teorema 3.9 de [13] es el resultado que cierra esta sección.

Teorema 4.16. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe un espacio normal de Moore separable y no metrizable.*
2. *Existe una familia AD no numerable $\mathcal{A}$ tal que $\Psi_{\mathcal{A}}$ es normal.*

CAPÍTULO 5: ALGUNOS EJEMPLOS

En este capítulo construiremos, a partir de un espacio primero numerable, un espacio metrizable con la misma estructura de cerrado abiertos. De esa manera el problema de encontrar un ejemplo de un espacio métrico con un subconjunto 2-encajado pero no ω-encajado se reduce a exhibir un espacio primero numerable con esas características. El capítulo culmina con la construcción de un espacio de Mrówka-Isbell pseudocompacto con un subconjunto discreto infinito 2-encajado a partir de la hipótesis $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$.

5.1 Erizos, erizar espacios y un teorema de metrizabilidad

Como primer ejemplo mostraremos un espacio metrizable con un subconjunto 2-encajado que no esté a la vez ω-encajado. Tal espacio será no separable como consecuencia del Teorema 3.8.

Consideramos en primera instancia un cardinal κ y, por cada $\alpha \in \kappa$, sea $\mathbb{I}_\alpha = [0,1] \times \{\alpha\}$. En el conjunto $\bigcup_{\alpha\in\kappa} \mathbb{I}_\alpha$ la relación

$$(r,\alpha)\,\Re\,(s,\beta) \text{ siempre que } r = 0 = s \text{ o } r = s \text{ y } \alpha = \beta$$

es de equivalencia. Se cumple que $r \neq 0$ si y sólo si $[(r,\alpha)] = \{(r,\alpha)\}$. De manera equivalente $(r,\alpha)\,\Re\,(s,\beta)$ con $\alpha \neq \beta$ si y sólo si $r = 0 = s$. Sea J el conjunto cociente que resulta. Definimos la función $\rho : J \times J \longrightarrow [0,\infty)$

$$\rho\left([(r,\alpha)], [(s,\beta)]\right) = \begin{cases} |r-s| & \text{si } \alpha = \beta, \\ r+s & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

.

Afirmación. ρ define una métrica en J.

Demostración. Observemos que $(r_1,\alpha_1)\,\Re\,(r_2,\alpha_2)$ implica en cualquier caso $r_1 = r_2$ por lo que ρ está bien definida. Falta comprobar que, en efecto, es una métrica.

1) $[(r,\alpha)] = [(s,\beta)]$ *si y sólo si* $\rho([(r,\alpha)], [(s,\beta)]) = 0$.

$[(r,\alpha)] = [(s,\beta)]$ si y sólo si $r = 0 = s$ o $r = s$ y $\alpha = \beta$, si y sólo si $r + s = 0$ o $|r - s| = 0$ y $\alpha = \beta$, si y sólo si $\rho([(r,\alpha)], [(s,\beta)]) = 0$. Ya que $r, s > 0$.

2) $\rho([(r,\alpha)], [(s,\beta)]) = \rho([(s,\beta)], [(r,\alpha)])$.

Es directo de la definición.

3) $\rho([(r,\alpha)], [(s,\beta)]) \leqslant \rho([(r,\alpha)], [(t,\gamma)]) + \rho([(t,\gamma)], [(s,\beta)])$

Caso 1.) Si $\alpha = \beta$. Se tiene entonces $\alpha = \gamma = \beta$ o bien $\alpha \neq \gamma \neq \beta$, de donde:

$$\begin{aligned}
\rho([(r,\alpha)], [(s,\beta)]) &= |r - s| \\
&\leqslant |r - t| + |t - s| \\
&= \rho([(r,\alpha)], [(t,\gamma)]) + \rho([(t,\gamma)], [(s,\beta)])
\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}
\rho([(r,\alpha)], [(s,\beta)]) &= |r - s| \\
&= |r + t - t - s| \\
&= |r + t + (-t - s)| \\
&\leqslant |r + t| + |-t - s| \\
&= |r + t| + |t + s| \\
&= (r + t) + (t + s) \\
&= \rho([(r,\alpha)], [(t,\gamma)]) + \rho([(t,\gamma)], [(s,\beta)])
\end{aligned}$$

Caso 2.) Si $\alpha \neq \beta$. La prueba es muy similar al caso anterior.

Por tanto, ρ es una métrica. □

Hacemos notar que, hasta ahora, el propósito de κ es únicamente indexar, por lo que un conjunto S con esa cardinalidad podría reemplazarlo sin mayor inconveniente. A J con la topología inducida por ρ se le conoce como el *Hedgehog* o *Erizo* de κ espinas (la traducción literal es *espinosidad* κ), que denotaremos como $J(\kappa)$ o simplemente J cuando no haya lugar a confusiones. Es fácil ver algunas de las propiedades básicas de $J(\kappa)$, como por ejemplo que es conexo y primero numerable, sin embargo es más importante que sus funciones cardinales están determinadas por el número de espinas.

Sea ahora X un espacio topológico y $\lambda = |X|$. Si $J = J(\lambda)$ es el Erizo de λ espinas indexado por X, es decir, J es el cociente de $\bigcup_{x \in X} [0,1] \times \{x\}$ módulo $\Re$ con la topología inducida por ρ. Definimos $S_x = \{[(r,x)] : (r,x) \in [0,1] \times \{x\}\}$, la espina con punta $p_x = [(1,x)]$.

Lo que ahora haremos es reemplazar los puntos de X con erizos y darle una topología conveniente. Definimos las vecindades para $(x,y) \in X \times J$ fijo de la siguiente manera: si $y \neq p_x$, entonces $W = \{x\} \times V$ con V una vecindad de y en J, y si $y = p_x$ $W = U \times V$ donde U y V son vecindades de x y y respectivamente. Definidos esos sistemas de vecindades, al espacio $X \times J$ con la topología que resulta lo llamaremos el *Erizo de* X y lo denotaremos $\mathcal{H}(X)$.

Usaremos el siguiente teorema para probar que $\mathcal{H}(X)$ es metrizable. Una prueba de él puede hallarse en el Apéndice A.

Teorema 5.1. *(Frink) Un espacio topológico X es metrizable si y sólo si para cada $x \in X$ existe $\{V_x(n) \subseteq X : n \in \omega\}$ una base local de vecindades numerable con la siguiente propiedad: Dada una pareja (x,i) fija, existe $j(x,i) = j \in \omega$ tal que si $V_x(j) \cap V_y(j) \neq \emptyset$, entonces $V_y(j) \subseteq V_x(i)$.*

Teorema 5.2. *Si X es primero numerable, $\mathcal{H}(X)$ es metrizable.*

Demostración. Para cada $x \in X$, sea $\{V_x(n) \subseteq X : n \in \omega\}$ una base local anidada y sea $B_y(n) = \{h \in J : \rho(h,y) < \dfrac{1}{n+1}\}$. Definimos $U_{(x,y)}(n)$ como:

i) $U_{(x,y)}(n) = \{x\} \times B_y(n)$ si $y \neq p_x$.

ii) $U_{(x,y)}(n) = V_x(n) \times B_y(n)$ si $y \neq p_x$.

Notamos que en $\mathcal{H}(X)$, $\{x\} \times J$ es una copia del espacio J. De manera que si $y \neq p_x$, $U_{(x,y)}(n)$ es el conjunto de los puntos (x,z) con $\rho(y,z) < \dfrac{1}{n+1}$. Por otra parte, $U_{(x,p_x)}(n)$ está formado por puntos de la forma (w,z) con $w \in V_x(n)$ y $\rho(p_x,z) < \dfrac{1}{n+1}$, esto último implica que $z \in S_x$. Naturalmente $\{U_{(x,y)}(n) : n \in \omega\}$ es una base local para (x,y) en $\mathcal{H}(X)$. Verificaremos que cumplen la condición del Teorema 5.1.

Sean (x,y) y $n \in \omega$ fijos. Para (x,y) distinguimos tres casos:

Caso 1) $y \notin S_x$. Deducimos que $y \neq p_x$ por lo que $U_{(x,y)}(n) = \{x\} \times B_y(n)$. Entonces existe $\tilde{y} \in X$ tal que $y \in S_{\tilde{y}}$. Elegimos $r \geqslant n$ tal que $x \notin V_x(r)$. Si consideramos ahora $m > r$, $U_{(x,y)}(m) \cap U_{(x',y')}(m) \neq \emptyset$ implica que $x = x'$ y $y' \neq p_x$ pues $\rho(y,y') < 1$ (ya que $m > 0$). De manera que también $U_{(x,y')}(n) = \{x\} \times B_{y'}(n)$.

Si $m \geqslant r$ es tal que cumpla $\dfrac{3}{m+1} < \dfrac{1}{r+1}$, supongamos que existe $(a,b) \in U_{(x,y)}(m) \cap U_{(x',y')}(m)$, entonces $x = x'$. Sea $(x,z) \in U_{(x,y')}(m)$, calculando:

$$\begin{aligned}
\rho(y,z) &\leqslant \rho(y,b) + \rho(b,z) \\
&\leqslant \rho(y,b) + \rho\left(b,y'\right) + \rho\left(y',z\right) \\
&= \frac{3}{m+1} \\
&< \frac{1}{r+1} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Así $U_{(x,y')}(m) \subseteq U_{(x,y)}(n)$.

Caso 2) $y \in S_x$ y $y \neq p_x$. De nuevo $U_{(x,y)}(n) = \{x\} \times B_y(n)$. Elegimos $r \geqslant n$ tal que $\rho(y,p_x) > \dfrac{2}{r+1}$. De esa manera aseguramos que si $U_{(x,y)}(m) \cap U_{(x',y')}(m) \neq \emptyset$, $y' \neq p_x$. De donde $x = x'$ y si pedimos como en el caso anterior que $\dfrac{3}{m+1} < \dfrac{1}{r+1}$, el resultado se sigue de manera similar al anterior.

Caso 3) $y = p_x$ En este caso $U_{(x,y)}(n) = V_x(n) \times B_y(n)$. Tomemos $m \in \omega$ tal que $\dfrac{3}{m+1} < \dfrac{1}{r+1}$ y supongamos que $U_{(x,y)}(m) \cap U_{(x',y')}(m) \neq \emptyset$. Basta examinar el caso $(x,y) \neq (x',y')$. Por la elección para m podemos afirmar que $\rho(p_x,y') < 1$, de donde $U_{(x',y')}(m) \subseteq V_{x'} \times S_x$ por lo que $y' \neq p_{x'}$, entonces $U_{(x',y')}(m) = \{x'\} \times B_{y'}(m)$. Se concluye que $x' \in V_x(m) \subseteq V_x(n)$ y si $(x',z) \in U_{(x',y')}(m)$, como en los casos anteriores, $\rho(y,z) = \dfrac{3}{m+1} < \dfrac{1}{n+1}$. Por lo tanto $U_{(x',y')}(m) \subseteq U_{(x,y)}(n)$.

Concluimos por el Teorema 5.1 que $\mathcal{H}(X)$ es metrizable. □

No es cierto en general que dada una vecindad V de x en X, $\{x\} \times V$ sea una vecindad en la topología producto, por lo que ésta y la topología de $\mathcal{H}(X)$ no siempre coinciden. A pesar de eso la primera proyección de $\mathcal{H}(X)$ en X, π_1 es continua para cualquier X. Si x es un punto de X y $V \subseteq X$ una vecindad de x, veamos que para cada $(x, y) \in \pi_1^{-1}[V]$ existe una vecindad $W \subseteq \mathcal{H}(X)$ tal que $\pi_1[W] \subseteq V$. Basta tomar $W = \{x\} \times J$ si $y \neq p_x$ y $V \times J$ en el otro caso.

El siguiente lema muestra la estricta relación entre la estructura de cerrados abiertos de X y $\mathcal{H}(X)$, pero antes de pasar a ello describiremos un poco a los cerrado abiertos de $\mathcal{H}(X)$. Debido a que para toda $x \in X$, el subespacio $\{x\} \times J$ es una copia de J, podemos afirmar que es conexo. Se sigue que si $(x, y) \in C$ y C es cerrado abierto, entonces $\{x\} \times J \subseteq C$. Concluimos que $C = K \times J$, donde $K = \pi_1[C]$ para ser precisos.

Lema 5.3. *$K \times J$ es un cerrado abierto de $\mathcal{H}(X)$ si y sólo si K es cerrado abierto de X.*

Demostración. La continuidad de π_1 prueba la parte de suficiencia en el Lema. Supongamos ahora que $K \times J$ es un cerrado abierto de $\mathcal{H}(X)$. Tomemos $w \in X$ un punto de acumulación de K y consideremos (w, p_w). Ya que K se acumula en w, para cualquier vecindad V de w, $V \cap K \neq \emptyset$, de donde $(V \times U) \cap (K \times J) \neq \emptyset$ para cada vecindad $V \times U$ de (w, p_w). Es decir, $K \times J$ se acumula en (w, p_w), lo que implica que $(w, p_w) \in K \times J$. Así, $w \in K$. Deducimos que K es cerrado y observamos que de manera análoga podemos probar que $X \setminus K$ también lo es pues la prueba anterior sólo ocupa que K es cerrado abierto y es claro que $(X \times J) \setminus (K \times J) = (X \setminus K) \times J$. Lo que prueba que K es cerrado abierto. $\square$

El lema 5.3 afirma entre otras cosas que toda partición de X en cerrado abiertos induce una para $\mathcal{H}(X)$ y viceversa. Para nuestros fines esto es:

Corolario 5.4. *Existe una función continua de X sobre κ si sólo si existe una de $\mathcal{H}(X)$ sobre κ.*

Estamos cerca de empezar con los ejemplos. Antes un Lema técnico.

Lema 5.5. *Sean D un subespacio discreto de X y κ un cardinal, entonces D está κ-encajado en X si y sólo si $P_D = \{(x, p_x) : x \in D\}$ está κ-encajado en $\mathcal{H}(X)$.*

Demostración. Si $\varphi : D \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ se define como $\varphi(x) = (x, p_x)$, entonces φ es continua porque D es discreto. Supongamos que cada $f : D \longrightarrow \kappa$ se extiende a una función

$F : X \longrightarrow \kappa$ y sea $g : P_D \longrightarrow \kappa$ continua. Consideremos $s = g \circ \varphi : D \longrightarrow \kappa$, la cual es continua, y sea $\sigma : X \longrightarrow \kappa$ una extensión continua para ella. Definimos ahora $G = \sigma \circ \pi_1$ una función continua y para $(d, p_d) \in P_D$ calculemos $G(d, p_d) = \sigma \circ \pi_1 (d, p_d) = \sigma(d) = s(d) = g \circ \varphi(d) = g(d, p_d)$.

De la otra forma, supongamos a P_D κ-encajado en $\mathcal{H}(X)$ y sea $f : D \longrightarrow \kappa$ continua. Definimos $h_f : \{(x, p_x) : x \in D\} \longrightarrow \kappa$ como $h_f = f \circ \pi_1 \restriction P_D$, de esa forma h_f es continua. Sea $H_f : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \kappa$ una extensión para h_f. Si llamamos $C_\alpha = H_f^{-1}[\alpha]$ para cada $\alpha \in \kappa$, entonces $C_\alpha = K_\alpha \times J$ por ser cerrado abierto, por lo que $\{K_\alpha \times J : \alpha \in \kappa\}$ es una cubierta de cerrado abiertos ajenos para $\mathcal{H}(X)$ y además $\{K_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una cubierta de X con las mismas propiedades por el Lema 5.3. Como consecuencia, función $F : X \longrightarrow \kappa$ definida por $F(x) = H_f(x, p_x)$ es continua y si $d \in D$ calculamos $F(d) = H_f(d, p_d) = h_f(d, p_d) = f \circ (\pi_1 \restriction P_D)(d, p_d) = f(d)$. Lo que prueba que F es una extensión de f. $\square$

Juntos, el teorema 5.2 y el lema 5.5 nos permite encontrar espacios metrizables con subconjuntos discretos 2-encajados que no están α-encajados a partir de espacios primero numerables con esa propiedad. En particular, asumiendo que no existe un modelo interno de la teoría de conjuntos con un cardinal medible, definición 2.1, esto es: No existe una subclase N del universo de la teoría de conjuntos V tal que $N \models ZFC$ y que contenga a OR, la clase de todos los ordinales, en el que exista un cardinal medible, Fleissner construyó un espacio normal de Moore cero-dimensional M y una familia $\{C_\lambda : \lambda \in \kappa\} \subseteq \wp(M)$ de cerrados que exhibe no ser *colectivamente normal*. M además puede ser escrito como $F \cup Q$, donde los puntos de Q son aislados en M y F es fuertemente zero-dimensional, un espacio es fuertemente cero-dimensional si cualesquiera dos conjuntos nulos completamente separados están separados por cerrado abiertos ajenos tales que, sin pérdida de generalidad, cubren al espacio.

La construcción de M es delineada en [6], secciones 7 y 8. En 7 se hace una construcción suponiendo la hipótesis del continuo y en 8 se abstraen las propiedades del ejemplo hecho en 7 para describir a M. Son de particular importancia las secciones 7.2, donde se prueba que M es normal y se afirma que F es fuertemente zero-dimensional, y 7.3, donde se describe a la familia $\{C_\lambda : \lambda \in \kappa\}$ como una familia de subconjuntos de F.

Ejemplo 5.6. *Si no existe un modelo interno de la teoría de conjuntos con un cardinal medible, entonces existe un espacio métrico X, un cardinal κ y $S \subseteq X$ el cual está 2-encajado pero no κ-encajado en X.*

En vista de la discusión anterior, basta entonces hallar un espacio primero numerable con un subconjunto discreto S que cumpla estar 2-encajado pero no κ-encajado en X.

Con base en el espacio M construido por Fleissner, sea $Y = M \times [0,1]$. Definimos la descomposición:

$$X = \{\{(m,t)\} : m \in M \ y \ t \in [0,1)\} \cup \{C_\lambda \times \{1\} : \lambda < \kappa\} \cup \{\{(m,1)\} : \forall \lambda < \kappa, m \notin C_\lambda\},$$

y lo equipamos con la topología cociente.

Si para cada $\lambda < \kappa$ hacemos $p_\lambda = C_\lambda \times \{1\}$, $D = \{p_\lambda : \lambda < \kappa\}$, es un subconjunto discreto de X pues la familia $\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ es una familia discreta de cerrados.

1) D no está κ-encajado en X. Si consideramos la función continua $f : D \longrightarrow \kappa$ definida por $f(p_\lambda) = \lambda$, una extensión continua de f, $F : X \longrightarrow \kappa$ genera una partición en cerrado abiertos de X, $\{X_\lambda : \lambda < \kappa\}$ tal que para cada $\lambda < \kappa$, $p_\lambda \in X_\lambda$. De tal manera $Y_\lambda = \cup X_\lambda$ es un cerrado abierto de Y y $\{Y_\lambda : \lambda < \kappa\}$ es una partición de Y tal que $p_\lambda \subseteq Y_\lambda$.

Por otro lado el espacio $M \times \{1\}$ es homeomorfo a M y la familia de abiertos $Y_\lambda \cap M \times \{1\}$ separa a la familia $\{C_\lambda \times \{1\} : \lambda < \kappa\}$. Lo que contradice el hecho de que $\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ no podía ser separada por abiertos.

2) D está 2-encajado en X. Fue observado en el capítulo 3 que extender una función continua $f : S \longrightarrow \alpha$, cuando S es un subespacio de X y α es un espacio discreto, es equivalente a generar una partición de X en cerrado abiertos que induzca la misma partición de S en cerrado abiertos (de S) que induce f.

Sean $f : D \longrightarrow 2$ continua y hagamos $S = \bigcup_{\lambda<\kappa} C_\lambda$. Definimos $g : S \longrightarrow 2$ como $g(s) = f(p_\lambda)$ siempre que $(s,1) \in p_\lambda$. Ya que la familia $\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ es una partición de S, g es una función bien definida. Además g es continua pues la familia $\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ es discreta. Recordamos ahora que $M = F \cup Q$, donde los puntos de Q son aislados y F es un cerrado fuertemente zero-dimensional. Sean $H = g^{-1}[\{0\}]$ y $K = g^{-1}[\{1\}]$. Por la normalidad de M, H y K están completamente separados en F. De tal manera, ya que F es fuertemente *cero-dimensional, existen cerrado abiertos de de F, H^+ y K^+ tales que $H \subseteq H^+$ y $K \subseteq K^+$, $H^+ \cap K^+ = \emptyset$ y $H^+ \cup K^+ = F$. Observamos además que H^+ y K^+ son cerrados ajenos en M. Utilizando de nuevo la normalidad de M, podemos encontrar dos abiertos U' y V' tales que $H^+ \subseteq U'$ y $K^+ \subseteq V'$. En seguida, $M = U' \cup V' \cup \left(Q \setminus U' \cup V'\right)$, es decir, M es la unión de tres abiertos ajenos. Si $U_0 = U' \times [0,1]$ y $V_0 = \left(V' \cup \left(Q \setminus U'\right)\right) \times [0,1]$, $\{U_0, V_0\}$ es una partición de $M \times [0,1]$ en cerrado abiertos.*

Sean $U = \{x \in X : \forall (s,t) \in x\, (s \in U_0)\}$ y $V = \{x \in X : \forall (s,t) \in x\, (s \in V_0)\}$. Para cada $x \in X$ ocurre una y sólo una de las siguientes condiciones: $x = \{(m,t)\}$ con $m \in M$ y $t \neq 1$ o para alguna $\lambda < \kappa$, $x = p_\lambda$. En el primer caso $x \in U$ o $x \in V$ y sólo una de tales condiciones es verdadera. Por otro lado, supongamos que $x = p_\lambda$. Para p_λ ocurre que $f(x) = 0$ o $f(x) = 1$ y sólo una de ellas. Supongamos primero que, sin pérdida de generalidad, $f(x) = 0$, entonces para todo $m \in C_\lambda$, $g(m) = 0$. De donde $C_\lambda \subseteq H \subseteq U_0$. Así $p_\lambda \in U$. En el otro caso, cuando $f(x) = 1$, se deduce que $p_\lambda \in V$. Por lo que $\{U, V\}$ es una partición de X en la que además $\cup U = U_0$ y $\cup V = V_0$, lo que implica que es de hecho una partición en cerrado abiertos. A continuación, $p_\lambda \in f^{-1}[\{0\}]$ si y sólo si $C_\lambda \subseteq H \subseteq U_0$ y esto último ocurre si y sólo si $p_\lambda \in U$, lo que prueba que $f^{-1}[\{0\}] = U \cap D$. De manera similar se prueba que $f^{-1}[\{1\}] = V \cap D$, lo que termina la prueba.

El ejemplo anterior no muestra como obtener un espacio métrico con un subconjunto 2-encajado que no esté ω-encajado. Mostraremos que asumiendo $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$ podemos construir un espacio con estas características. Notemos que $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$ se sigue del Axioma de Martin (MA implica $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$). Antes dos lemas técnicos.

Proposición 5.7. *Existe $f : \mathfrak{c} \longrightarrow [\mathfrak{c}]^{\leqslant\omega}$ tal que:*

i) Para cada $n \in \omega$, $f(n) \subseteq \omega$.

ii) Siempre que $\omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}$, $f(\alpha) \subseteq \alpha$.

iii) Para cada $A \in [\mathfrak{c}]^{\leqslant\omega}$, $|f^{-1}[\{A\}]| = \mathfrak{c}$.

Demostración. El inciso *iii)* nos dice que $\{f^{-1}[\{A\}] : A \in [\mathfrak{c}]^{\leqslant\omega}\}$ es una partición de $\mathfrak{c}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ con elementos también de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Con el fin de definir f crearemos una partición de ese estilo que además haga que f cumpla *i)* y *ii)*.

Sea $\{P_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}\}$ una partición de $\mathfrak{c} \setminus \omega$ tal que $|P_\alpha| = \mathfrak{c}$ para cada α. Tal partición existe como consecuencia de que para todo cardinal infinito κ, $|\kappa \times \kappa| = \kappa$.

Definamos R_α como $P_\alpha \setminus \alpha$ y coloquemos $P_\alpha^{'} = R_\alpha$ si $\alpha \in \cup\{R_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}\}$ o como $P_\alpha^{'} = R_\alpha \cup \{\alpha\}$ de otra forma. Entonces $\{P_\alpha^{'} : \omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}\}$ es una partición tal que $\alpha \leqslant \gamma$ para todo $\gamma \in P_\alpha^{'}$, por lo que podemos suponer que desde un inicio $\{P_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}\}$ tiene esas características.

Ya que $|P_\alpha| = \mathfrak{c}$, consideremos una partición de P_α, $\{Q_\alpha(\beta) : \beta < \mathfrak{c}\}$ tal que $|Q_\alpha(\beta)| = \mathfrak{c}$. Recordemos que $\mathfrak{c} = 2^\omega \leqslant |\gamma^\omega| \leqslant \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$ siempre que $\gamma < \mathfrak{c}$, de esa manera $[\gamma]^{<\omega} = \{A_\alpha(\beta) : \beta < \mathfrak{c}\}$.

Finalmente, sea $\{S_n : n \in \omega\}$ una colección infinita de subconjuntos infinitos de ω. Definimos $f : \mathfrak{c} \longrightarrow [\mathfrak{c}]^{\leqslant\omega}$ como:

$$f(\gamma) = \begin{cases} A_\alpha(\beta) & \text{siempre que } \gamma \in Q_\alpha(\beta), \\ S_\gamma & \text{si } \gamma \in \omega. \end{cases}$$

La función f está bien definida y es fácil ver que cumple las propiedades *i)* y *iii)* simplemente por definición. Para que f cumpliera *ii)* fue importante hacer que $\alpha \leqslant \gamma$ para todo $\gamma \in P_\alpha$.

□

Proposición 5.8. *Dadas $\{S_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia AD y $\{A_\alpha : \alpha \leqslant \omega\} \subseteq [\omega]^{<\omega}$. Es posible construir una familia $\{D_\alpha : \alpha \leqslant \omega\}$ tal que:*

i) Para toda $n \in A_\alpha$, $S_n \subseteq^* D_\alpha$,

ii) Para cada $n \in \omega \setminus A_\alpha$, S_n y D_α son casi disjuntos.

Demostración. Sean $\{S_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia AD y $\{A_\alpha : \alpha \leqslant \omega\} \subseteq [\omega]^{<\omega}$. Dada $\alpha \leqslant \omega$ consideramos tres casos:

Caso1) A_α finito. Hacemos $D_\alpha = \bigcup_{n \in A_\alpha} S_n$. Es claro que; para toda $n \in A_\alpha$, $S_n \subseteq D_\alpha$ y si $n \in \omega \setminus A_\alpha$, $D_\alpha \cap S_n = \bigcup_{i \in A_\alpha} (S_i \cap S_n)$ el cual es finito.

Caso2) $\omega \setminus A_\alpha$ finito. Hacemos $D_\alpha = \bigcup_{n \in A_\alpha} \left(S_n \setminus \bigcup_{m \in \omega \setminus A_\alpha} S_m\right)$. En este caso para cada $n \in A_\alpha$, $S_n \setminus D_\alpha \subseteq \bigcup_{m \in \omega \setminus A_\alpha} S_n \cap S_m$ que es finito, es decir, $S_n \subseteq^* D_\alpha$, y $D_\alpha \cap S_m = \emptyset$ siempre que $m \in \omega \setminus A_\alpha$.

Caso3) A_α y $\omega \setminus A_\alpha$ infinitos. Sean $\{B_i : i \in \omega \text{ y } \exists n \in A_\alpha (B_i = S_n)\}$ y $\{C_i : i \in \omega \text{ y } \exists n \in$

$\omega \setminus A_\alpha\,(C_i = S_n)\}$. Hacemos $D_\alpha = \bigcup_{i\in\omega}\left(B_i \setminus \bigcup_{j<i} C_i\right)$. Si $n \in A_\alpha$, $S_n = B_i$ para alguna $i \in \omega$ y entonces $S_n \subseteq^* B_i \setminus \bigcap_{j<i} C_i \subseteq^* D_\alpha$. Finalmente si $m \in \omega \setminus A_\alpha$, sea $C_i = S_m$, $D_\alpha \cap S_m = \bigcup_{j<i} B_j \cap C_i$ el cual es finito. □

Teorema 5.9. *Asumiendo $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$, existe una familia MAD $\mathcal{E}$ tal que todo subconjunto numerable de puntos no aislados de $\Psi_{\mathcal{E}}$ está 2-encajado en $\Psi_{\mathcal{E}}$.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una lista de todos los subconjuntos contables de $\mathfrak{c}$ que cumple lo siguiente:

i) Para toda $n \in \omega$, $A_n \subseteq \omega$,

ii) Siempre que $\omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}$, $A_\alpha \subseteq \alpha$,

iii) Para cada $A \in [\mathfrak{c}]^{\leqslant\omega}$, $|\{\beta < \mathfrak{c} : A = A_\beta\}| = \mathfrak{c}$,

(Ver Propsición 5.7). Sea además $\{Z_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}\}$ una lista de todos los subconjuntos numerables de ω. Consideremos $\{S_n : n \in \omega\}$ una familia AD de subconjuntos infinitos de ω. Para cada $\alpha \leqslant \omega$ construimos $D_\alpha \subseteq \omega$ tal que; *1)*Para toda $n \in A_\alpha$, $S_n \subseteq^* D_\alpha$ y para toda $n \in \omega \setminus A_\alpha$, S_n y D_α son casi disjuntos, como en la Proposición 5.8.

Buscamos colecciones $\{S_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y $\{D_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ que extiendan a las iniciales y que para cada $\omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}$ cumplan:

1) $\{S_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es una familia AD tal que para cada $\omega \leqslant \alpha < \gamma$, $S_\alpha \subseteq Z_\alpha$, S_α es no vacía si y sólo si S_α es infinita y $Z_\alpha \cap S_\beta$ es finito para cada $\beta < \alpha$, y finalmente para $\beta < \alpha$, S_α está casi contenido o es casi disjunto de D_β.

2) Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, $D_\alpha \subseteq \omega$ y D_α casi contiene a S_β si $\beta \in A_\alpha$ y es casi disjunta de cada S_β con $\beta \in \alpha \setminus A_\alpha$.

Procedemos entonces de manera inductiva, supongamos que $\gamma < \mathfrak{c}$ y $\{S_\alpha : \alpha < \gamma\}$ y $\{D_\alpha : \alpha < \gamma\}$ han sido definidos y cumplen *1)* y *2)*. Si $Z_\gamma \cap S_\beta$ es infinita para alguna $\beta < \gamma$, hacemos $S_\gamma = \emptyset$. De otra manera, usando $\mathfrak{s} = \mathfrak{c}$, la familia $\{D_\alpha \cap Z_\gamma : \alpha < \gamma\}$ no es separadora en $[Z_\gamma]^\omega$. Es decir, existe $S \subseteq Z_\gamma$ infinito tal que está casi contenido en o es casi disjunto de $D_\alpha \cap Z_\gamma \subseteq D_\alpha$ para cada $\alpha < \gamma$. Hacemos $S_\gamma = S$ en este caso. Para elegir D_γ hagamos $\mathcal{B} = \{S_\alpha : \alpha \in \gamma \setminus A_\gamma\}$ y $\mathcal{C} = \{S_\alpha : \alpha \in A_\gamma\}$ en la Proposición[1.18]. De esa manera, observando que $|\mathcal{B}| \leqslant |\gamma|$ y que $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$ (ver Definición 1.17) concluimos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ pueden ser separados, esto es, existe D tal que para cada $S_n \in \mathcal{B}$, $|S_n \cap D| < \omega$, y para cada $S_m \in \mathcal{C}$, $S_m \subseteq^* D$. Sea $D_\gamma = D$.

Afirmación 1. $\mathcal{E} = \{S_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es *MAD*. Sea $X \subseteq \omega$, $X = Z_\beta$ para alguna $\beta < \mathfrak{c}$. Por la propiedad *1)*, si $S_\beta = \emptyset$ es porque existe $\gamma < \beta$ tal que $Z_\beta \cap S_\gamma = X \cap S_\gamma$ es infinito. De otra manera $S_\beta \subset Z_\beta$ y es infinito por la construcción de S_β para $\omega \leqslant \beta < \mathfrak{c}$.

Afirmación 2. Si N es un subconjunto numerable de puntos no aislados de $\Psi_{\mathcal{E}}$, entonces N está 2-encajado en $\Psi_{\mathcal{E}}$. Para probar esto, notemos primero que existe $H \in [\mathfrak{c}]^\omega$ tal que $N = \{S_\alpha : \alpha \in H\}$. Sea $\beta = \sup\{\alpha : \alpha \in H\}$ y $f : N \longrightarrow \{0,1\}$ una función (cualquiera de tales f es continua por la Proposición 4.11). De esa manera, existe una partición de H en conjuntos H_0 y H_1 tales que para $i \in \{0,1\}$, $N_i = f^{-1}[\{i\}] = \{S_\alpha : \alpha \in H_i\}$. Por la condición *iii)* podemos encontrar $\gamma \geqslant \beta$ tal que $A_\gamma = H_0$; se sigue que $H_1 \subseteq \gamma \setminus A_\gamma$. Deducimos que D_γ casi contiene a cada elemento de N_0 y es casi disjunto de cada elemento de N_1. Esto es verdad en general para cualquier $\alpha < \mathfrak{c}$ por la maximalidad de $\mathcal{E}$, cada S_α o bien está casi contenido en D_γ o bien es casi disjunto de él. La función $F : \Psi_{\mathcal{E}} \longrightarrow \{0,1\}$ definida como $F(x) = 0$ siempre que $x \in Cl_{\Psi_{\mathcal{E}}} D_\gamma$ y como $F(x) = 1$ en otro caso, es una extensión continua de f si probamos que $Cl_{\Psi_{\mathcal{E}}} D_\gamma$ es un cerrado abierto de $\Psi_{\mathcal{E}}$ que contiene a N_0. Para ello, el primer paso es notar que si $S_\alpha \subseteq^* D_\gamma$, entonces $S_n \in Cl_{\Psi_{\mathcal{E}}} D_\gamma$ ya que cualquier vecindad básica de S_n tiene una intersección no vacía con D_γ. La afirmación contraria, $S_\alpha \in Cl_{\Psi_{\mathcal{E}}} D_\gamma$ implica que $S_\alpha \subseteq^* D_\gamma$, es verdadera en este caso particular debido a la maximalidad de $\mathcal{E}$. Que $Cl_{\Psi_{\mathcal{E}}} D_\gamma$ es cerrado es evidente, por lo que solo falta probar que es abierto. Para ello, mostraremos que todo $x \in Cl_{\Psi_{\mathcal{E}}} D_\gamma$ es un punto interior, si $x \in \omega$ una vecindad de x contenida en $Cl_{\Psi_{\mathcal{E}}} D_\gamma$ es $\{x\}$; si $x \in \mathcal{E}$, x debe estar casi contenido en D_γ por una observación anterior, de esa forma $\{x\} \cup (x \cap D_\gamma)$ hace a x un punto interior. Esto termina la prueba. $\square$

Una conseciencia del Teorema de Extensión de Urysohn es que cualquier subespacio discreto 2-encajado está C^*-encajado, por lo que el ejemplo anterior muestra que es consistente la existencia de un espacio $\Psi_{\mathcal{E}}$ con un subespacio discreto, infinito y C^*-encajado.

Corolario 5.10. *Asumiendo $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$ existe un espacio con un subconjunto 2-encajado que no está también ω-encajado.*

Demostración. Si N y $\Psi_{\mathcal{E}}$ son como en el teorema 5.9 una biyección entre N y $\{n \in \mathbb{R} :$

$n \in \omega\}$ es una función continua que de extenderse a $\Psi_{\mathcal{E}}$ contradice la Proposición 4.10.

$\square$

CAPÍTULO 6: UN EJEMPLO ASUMIENDO PMEA

En este capítulo mostraremos que asumiendo el *Axioma de Extensión de la Medida Producto*, o PMEA por sus siglas en inglés, un espacio pseudocompacto de carácter menor a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ no puede tener un subconjunto discreto, infinito y C^*-encajado. En particular, el espacio del teorema 5.9 no puede ser construido.

Antes de demostrar tal teorema hacemos una breve introducción a PMEA, que en su desarrollo involucra un bosquejo de una prueba de consistencia, la hipótesis del continuo y un caso particular de otro de los problemas fundamentales de la topología general, los teoremas de metrizabilidad.

6.1 Medida Producto y PMEA

Definición 6.1. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, llamaremos a μ una **medida de probabilidad** siempre que $\mu(X) = 1$. A un espacio de medida con una medida de probabilidad se le conoce como **espacio de probabilidad**.

Ejemplo 6.2. *La medida en* $X = \{0,1\}$ *y* $\mathcal{M} = \wp(X)$ *definida por* $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \dfrac{1}{2}$, *es una medida de probabilidad. Esta medida es llamada "medida de la moneda justa" (fair coin measure en inglés).*

Sea κ un cardinal y para cada $\alpha \in \kappa$, sea $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ un espacio de probabilidad. Consideramos $X = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ y sea $\mathcal{M}$ la σ-álgebra generada por la familia de conjuntos $\mathcal{E}$ de la forma $\prod_{\alpha\in\kappa} Z_\alpha$, donde para toda $\alpha \in \kappa$, $Z_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$ y el conjunto $\{\alpha < \kappa : Z_\alpha \neq X_\alpha\}$ es finito. Para el conjunto X y la σ-álgebra $\mathcal{M}$ existe una única medida μ tal que para cada $\prod_{\alpha\in\kappa} Z_\alpha \in \mathcal{E}$, $\mu\left(\prod_{\alpha\in\kappa} Z_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in\kappa} \mu_\alpha(Z_\alpha)$ (ver [10] Capítulo 7, sección 38, Teorema B). A μ se le conoce como la **medida producto usual**. Hacemos notar que el cardinal κ tiene únicamente la función de indexar y puede ser reemplazado por cualquier otro conjunto de índices.

Ejemplo 6.3. *Sea I un conjunto de índices y para cada $i \in I$, sea $X_i = \{0,1\}$, $\mathcal{M} = \wp(\{0,1\})$ y μ_i la medida de la moneda justa. De esa manera $X = {}^{I}2$ y $\mathcal{M}$ está generada por la familia de todos los conjuntos de la forma $E_i = \{t \in^I 2 : t(i) = 0\}$.*

La medida producto usual en 2^{κ} vista en el Ejemplo 6.3 es de particular interés. Se prueba en [7] 254K que la medida producto en 2^{ω} es isomorfa módulo un conjunto nulo a la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Esto es, dados los espacios de medida $(2^{\omega}, \mathcal{M}, \mu)$ y $([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$, donde μ es la medida producto en 2^{ω} y λ la medida de Lebesgue en $[0,1]$, existen conjuntos de medida cero $A_1 \subseteq 2^{\omega}$ y $A_2 \subseteq [0,1]$; y una función biyectiva $\phi : 2^{\omega} \setminus A_1 \longrightarrow [0,1] \setminus A_2$ tal que:

1. Para cada $L \in \mathcal{L}$, $\phi^{-1}[L] \in \mathcal{M}$ y $\mu\left(\phi^{-1}[L]\right) = \lambda(L)$,

2. Para cada $M \in \mathcal{M}$, $\phi[M] \in \mathcal{L}$ y $\lambda(\phi[M]) = \mu(M)$.

De tal manera la medida producto en 2^{ω} adopta las consideraciones conjuntistas del problema de la medida de Lebesgue. Por ejemplo, ¿ cuándo es posible extender la medida producto a todo 2^{ω}?. Igual que con el problema de la medida, responder esta pregunta involucra resultados de consistencia y llevó a lo que se conoce con el nombre de Axioma de Extensión de la Medida Producto (**PMEA** por sus siglas en inglés) o Axioma de Fisher.

Product Measure Extension Axiom: Para cada cardinal λ, la medida producto usual en ${}^{\lambda}2$ puede extenderse a una medida $\mathfrak{c}$-aditiva definida en todo ${}^{\lambda}2$.

Es decir, si identificamos $A \subseteq \lambda$ con la función característica $\chi_A \in {}^{\lambda}2$, entonces PMEA dice lo siguiente: Para cada cardinal λ existe una medida $\mathfrak{c}$-aditiva, μ, definida en todo $\wp(\lambda)$ tal que para cada $F \in [\lambda]^{<\omega}$, $\mu(\{A \subseteq \lambda : F \subseteq A\}) = 2^{-|F|}$.

Kunen prueba que la consistencia de PMEA se sigue de asumir que existe un cardinal fuertemente compacto (Definición 2.12), sin embargo PMEA no se sigue de la teoría ZFC pues éste implica la existencia de un cardinal medible. Ambos, cardinales medibles y fuertemente compactos, son grandes cardinales como se prueba en el Capítulo 2.

6.2 Consistencia de PMEA

Un conjunto de enunciados del lenguaje de la teoría de conjuntos (LTC), Σ, es consistente si para ningún enunciado ψ del LTC se cumple que $\Sigma \vdash \psi$ y $\Sigma \vdash \neg\psi$. La consistencia de Σ se denotará con $Con\,(\Sigma)$. Un enunciado φ es independiente de la teoría ZFC si y sólo si la consistencia de ZFC implica tanto la consistencia ZFC+φ como la de ZFC+$\neg\varphi$. Probar que un enunciado φ es consistente con los axiomas de la teoría ZFC se reduce, por el *Teorema de Correctud-Completud*, a mostrar un modelo de ZFC+φ.

Haremos un esbozo de la prueba de que $Con\,(\exists\kappa \textit{ fuertemente compacto }) \Rightarrow Con\,(PMEA)$ haciendo uso de la técnica de *Forcing* introducida por Paul Cohen en 1963. De esta manera podremos mostrar la estrecha relación entre el PMEA y la Conjetura del Espacio Normal de Moore (NMSC por sus siglas en inglés) que se hace presente en parte del trabajo de Peter Nyikos. No buscamos profundizar en los detalles formales y técnicos del Forcing, que son numerosos, y referimos al lector a consultarlos en [14] y [16].

6.2.1 Un poco de Forcing: reales aleatorios

A grandes rasgos (y de manera informal), la idea del método forcing consiste en añadir un objeto nuevo a un modelo transitivo de la teoría de conjuntos, obtener una extensión de él que a su vez sea modelo de ZFC (es decir, la extensión genérica resulta de añadir el objeto y cerrar al modelo bajo los axiomas de ZFC) y observar si la existencia de ese objeto produce consecuencias negativas en el universo de la teoría de conjuntos. De no hacerlo, podemos asegurar que es consistente "ZFC+ $\exists$ tal objeto". Como veremos, usualmente no agregamos el objeto como tal, sino un filtro genérico sobre un álgebra de Boole o sobre un orden parcial conveniente que de existir nos permita construirlo. Antes seguir, el lector debe estar consciente sobre algunos hechos que nuestra noción intuitiva de forzar pasará por alto.

Como consecuencia del segundo Teorema de Incompletud de Gödel: *En toda teoría aritmética recursiva consistente T, $T \nvdash Con\,(T)$*, la teoría de conjuntos no puede demostrar su propia consistencia, por lo que no podemos exhibir un modelo de ZFC que sea un conjunto. Sin embargo, cualquier objeto matemático (como un orden parcial, un álgebra de Boole o el filtro genérico que deseamos agregar al universo) precisa únicamente una cantidad finita de axiomas para ser descrito. Y para cualquier cantidad finita de enunciados podemos encontrar un modelo transitivo (ver [16] capítulo IV, sección 7). De tal manera, no necesitamos un modelo de toda la teoría ZFC y podemos considerar desde un inicio que nuestro modelo es suficiente para describir cualquier objeto que tratemos al hacer forcing.

Las nociones básicas sobre álgebras de Boole que necesitaremos más adelante pueden encontrarse en el Apéndice B.

Dada un álgebra booleana completa $\mathfrak{B}$, un modelo booleano del universo de la teoría de conjuntos es una generalización del modelo V de los conjuntos bien fundados. Definimos por recursión sobre ordinales el modelo booleano valuado $V^{\mathfrak{B}}$ como:

$$\begin{aligned}
V_0^{\mathfrak{B}} &= \emptyset, \\
V_{\alpha+1}^{\mathfrak{B}} &= \{x : x \text{ } \textit{es función} \text{ }, dom\,(x) \subseteq V_\alpha^{\mathfrak{B}}, ran\,(x) \subseteq \mathfrak{B}\}, \\
V_\alpha^{\mathfrak{B}} &= \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{\mathfrak{B}};\ \textit{Si } \alpha \in LIM, \\
V^{\mathfrak{B}} &= \bigcup_{\alpha \in OR} V_\alpha^{\mathfrak{B}}.
\end{aligned}$$

Notemos que $V^{\{0,1\}} = V$. El objetivo detrás de esto es asignar a cada enunciado φ del LTC un elemento del álgebra $\mathfrak{B}$, su *valor booleano*, esto es, crear una asignación $\varphi \mapsto ||\varphi||$, donde $||\varphi|| \in \mathfrak{B}$. Esto con el fin de que la "verdad" en el modelo $V^{\mathfrak{B}}$ esté determinada por un ultrafiltro $\mathcal{U}$. De manera un poco más precisa; $V^{\mathfrak{B}} \models \varphi$ si y sólo si $||\varphi|| \in \mathcal{U}$. En el modelo $V = V^{\{0,1\}}$, $\mathcal{U} = \{1\}$.

Definición 6.4. Si $\mathfrak{M}$ es un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Boole completa, un ultrafiltro G en $\mathfrak{B}$ es llamado genérico (sobre $\mathfrak{M}$) si y sólo si $X \subseteq G$ y $X \in \mathfrak{M}$ implica que $\prod X \in G$.

Hacer forcing con un álgebra de boole consiste en crear un modelo booleano valuado con un álgebra completa conveniente y agregar un ultrafiltro genérico, G, al modelo $V^{\mathfrak{B}}$ para que decida la verdad en la extensión genérica $V^{\mathfrak{B}}[G]$. Para cada conjunto x en la extensión genérica $V^{\mathfrak{B}}[G]$, existe un nombre $\check{x}$ para él en el modelo base $V^{\mathfrak{B}}$, de tal manera el **Teorema de Forcing** dice lo siguiente: $V^{\mathfrak{B}}[G] \models \varphi\,(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ si y sólo si $||\varphi\,(\check{x}_0, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\,|| \in G$. Puede revisarse la prueba del Teorema de Forcing y el resto de los detalles de la técnica de forcing para álgebras de Boole en [14], sección 18.

Supondremos ahora la existencia de un cardinal medible κ y delinearemos la construcción de un modelo de $ZFC +$ "$2^{\aleph_0} = \kappa$". Para tal fin añadiremos κ "números reales" (en realidad agregaremos subconjuntos de ω) a un modelo transitivo numerable de (una cantidad suficiente de enunciados de) ZFC. Sea λ un cardinal medible tal que $\lambda^{\aleph_0} = \lambda$. Consideramos el conjunto $X = {}^{\lambda\times\omega}2$ y sea $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0,1]$ la medida producto en X. Sea $\mathcal{I}_\mu = \{A \in \mathcal{M} : \mu(A) = 0\}$ el σ-ideal de conjuntos de medida cero en $\mathcal{M}$ y sea $\mathfrak{B} = \mathcal{M}_{/\mathcal{I}_\mu}$. Para probar que la cardinalidad de $\mathcal{M}_{/\mathcal{I}_\mu}$ es λ necesitaremos el siguiente Lema, cuya demostración puede consultarse en [11], Teorema 10.23.

Teorema 6.5. *Si X es un conjunto y $\mathcal{E} \subseteq \wp(X)$ una familia de cardinalidad $\kappa \geqslant 2$ tal que $\emptyset \in \mathcal{E}$, entonces la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, tiene cardinalidad menor o igual a $\kappa^{\aleph_0}$.*

Lema 6.6. *Son verdaderas las siguientes afirmaciones:*

1. *$\mathcal{M}$ es un álgebra de Boole numerablemente completa y $|\mathcal{M}| = \lambda$,*

2. *$\mathfrak{B} = \mathcal{M}_{/\mathcal{I}_\mu}$ es un álgebra de Boole completa, satisface la c.c.c. y $|\mathfrak{B}| = \lambda$.*

Demostración. *1*. La σ-álgebra $\mathcal{M}$ es un algebra de conjuntos σ-completa. Por otro lado, como vimos en el ejemplo 6.3, $\mathcal{M}$ está generada por la familia $\mathcal{E} = \{E_x : x \in \lambda \times \omega\}$. De donde $\lambda \leqslant |\mathcal{M}|$. La desigualdad $|\mathcal{M}| \leqslant \lambda^{\aleph_0} = \lambda$ es consecuencia del Teorema 6.5 y las hipótesis.

2. Ya que el espacio $(X, \mathcal{M}, \mu)$ tiene una medida finita (y entonces σ-finita), $\mathfrak{B}$ es un álgebra booleana completa como consecuencia del Teorema 6.36 y la Proposición 6.34.

Si consideramos la familia $\mathcal{E}$ definida en el punto *1.*, entonces la proyección $\pi(A) = [A]$ restringida a $\mathcal{E}$ es inyectiva y por tanto $|\mathfrak{B}| \geqslant \lambda$. Además, la proyección es suprayectiva, por lo que $|\mathfrak{B}|$ es exactamente λ.

Finalmente, si existe una familia ajena en $\mathfrak{B}$ de cardinalidad $\aleph_1$, entonces existe una familia de cardinalidad $\aleph_1$ de subconjuntos de X incomparables de medida positiva en $\mathcal{M}$, lo que contradice que $\mathcal{I}_\mu$ sea $\aleph_1$-saturado (Proposición 6.34). □

Sea $\mathfrak{M}$ un modelo numerable transitivo de ZFC, consideramos un ultrafiltro $\mathfrak{M}$-genérico sobre $\mathfrak{B}$. Ya que $\mathfrak{B}$ tiene la *c.c.c.*, la extensión genérica $\mathfrak{M}[G]$ preserva cardinales ([14] Lema 19.1). Argumentaremos ahora por qué en $\mathfrak{M}[G]$, $2^{\aleph_0} = \lambda$. El siguiente lema establece una relación entre el cardinal de la potencia de un conjunto en la extensión genérica y el cardinal de las funciones del conjunto en el álgebra $\mathfrak{B}$ en el modelo base. Su demostración hace uso de nombres en $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ para los subconjuntos de un cardinal λ y puede ser consultada en [14] Lema 19.4.

Lema 6.7. *Sea λ un cardinal en un modelo numerable transitivo de ZFC, $\mathfrak{M}$. Si G es un ultrafiltro $\mathfrak{M}$-genérico en un álgebra booleana $\mathfrak{B}$, entonces:*

$$\left(2^{\lambda}\right)^{\mathfrak{M}[G]} \leqslant \left(\left|\mathfrak{B}^{\lambda}\right|\right)^{\mathfrak{M}}.$$

De esa manera, tenemos que $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\mathfrak{M}[G]} \leqslant \left(\left|\mathfrak{B}^{\aleph_0}\right|\right)^{\mathfrak{M}} = \lambda$. Falta ahora únicamente exhibir λ subconjuntos distintos de ω en $\mathfrak{M}[G]$.

Para cada $\alpha < \lambda$ y cada $n < \omega$, definimos $u_{\alpha,n} = [U_{\alpha,n}]$, donde $U_{\alpha,n} \in \mathcal{M}$ se define como:

$$U_{\alpha,n} = \{t \in {}^{\lambda\times\omega}\{0,1\} : t(\alpha,n) = 1\}.$$

Para cada $\alpha < \lambda$, sea $\dot{x}_\alpha = \{n < \omega : ||\check{n} \in \dot{x}_\alpha|| = u_{\alpha,n}\}$. Sea ahora x_α la interpretación bajo G de $\dot{x}_\alpha$, es decir, $n \in x_\alpha$ si y sólo si $n \in \dot{x}_\alpha$ y $||\check{n} \in \dot{x}_\alpha|| = u_{\alpha,n} \in G$. Afirmamos que $x_\alpha \neq x_\beta$ siempre que $\alpha \neq \beta$, más aún, $||\dot{x}_\alpha = \dot{x}_\beta|| = 0$.

Sea $\kappa \in \omega$. Entonces:

$$||\dot{x}_\alpha \cap \check{k} = \dot{x}_\beta \cap \check{k}|| = [N_{\alpha,\beta,k}],$$

donde:

$$N_{\alpha,\beta,k} = \{t : \forall n < k,\, t(\alpha,n) = t(\beta,n)\}.$$

Esto último ocurre pues $t(\alpha,n) = t(\beta,n)$ si y sólo si $u_{\alpha,n}$ y $u_{\beta,n}$ son compatibles o sus complementos lo son, y esto ocurre si y sólo si $n \in x_\alpha \cap x_\beta$ o $n \notin x_\alpha \cup x_\beta$ en la extensión genérica. En seguida, $N_{\alpha,\beta,k}$ es la intersección de k conjuntos de la forma $U_{\alpha,n}$ (si $t(\alpha,n) = 1$) o $X \setminus U_{\alpha,n}$ (si $t(\alpha,n) = 0$). Como cada uno de ellos tiene medida $\frac{1}{2}$, $\mu(N_{\alpha,\beta,k}) = \frac{1}{2^k}$.

Finalmente, $||\dot{x}_\alpha = \dot{x}_\beta|| = \prod_{k\in\omega} ||\dot{x}_\alpha \cap \check{k} = \dot{x}_\beta \cap \check{k}|| = \prod_{k\in\omega} [N_{\alpha,\beta,k}] = \left[\bigcap_{k\in\omega} N_{\alpha,\beta,k}\right] = 0$, pues $\mu\left(\bigcap_{k\in\omega} N_{\alpha,\beta,k}\right) = 0$. Lo que termina la prueba de que en $\mathfrak{M}[G]$, $\lambda = 2^{\aleph_0}$.

Puede probarse que para cada $\alpha < \lambda$, el número real asociado a $x_\alpha \subseteq \omega$ en $\mathfrak{M}[G]$ no estaba en el modelo base. A estos reales se le llama reales aleatorios (**random reals**) o reales de Solovay. En [21] Solovay introduce el random forcing como una variante del forcing de Cohen con la finalidad de probar la consistencia de un modelo de la teoría de conjuntos en el cuál todo subconjunto de números reales es Lebesgue medible.

Teorema 6.8 (Solovay)**.** *Sea κ un cardinal medible en el modelo base $\mathfrak{M}$, sean además $\mathfrak{B}$ un álgebra de medida (en $\mathfrak{M}$) y G un ultrafiltro $\mathfrak{M}$-genérico en $\mathfrak{B}$. Entonces en $\mathfrak{M}[G]$, existe una medida no trivial κ-aditiva sobre κ.*

A partir de esto, K. Kunen prueba que:

Teorema 6.9 (Kunen)**.** *Si $\mathfrak{M}[G]$ es un modelo construido añadiendo κ reales aleatorios, donde κ es un cardinal fuertemente compacto en $\mathfrak{M}$, entonces PMEA es verdadero en $\mathfrak{M}[G]$.*

Las demostraciones de los dos teoremas anteriores involucran un mayor conocimiento de la técnica de forcing y escapan del alcance de nuestra discusión previa. Se refiere al lector interesado en consultarlas a [6].

6.2.2 El Teorema de Nyikos

En el capítulo 5, se hace uso de un espacio normal de Moore no colectivamente normal, M, construido en [6] como la base para la construcción de un espacio con un subconjunto infinito 2-encajado y no α-encajado para un α particular. Tal espacio se construye asumiendo que no existe un modelo interno con un cardinal medible. M es no metrizable pues un espacio X es metrizable si y sólo si es un espacio de Moore colectivamente normal, [19] teorema 5.5. De tal manera, que no exista un modelo interno con un cardinal medible implica la negación de la conjetura del espacio normal de Moore (NMSC), esto es, existe un espacio normal de Moore que es no metrizable.

En la sección anterior delineamos la construcción de un modelo donde PMEA es verdadero bajo la suposición de que existe un cardinal fuertemente compacto (y entonces un cardinal medible). Tal hecho no es extraño pues Peter Nyikos prueba que:

Teorema 6.10 (Nyikos)**.** *Asumiendo PMEA. Cualquier colección normalizada en un espacio de carácter menor a $\mathfrak{c}$ está separada. En particular, los espacios normales de Moore son metrizables.*

Estos dos hechos muestran que NMSC requiere al menos de la existencia de un cardinal medible para ser consistente, y ya que la existencia de cardinales medibles es independiente de la teoría ZFC, lo mismo ocurre con NMSC.

La NMSC fue por muchos años uno de los problemas más estudiados, debido a que el problema de la metrizabilidad (así como el de la extensión de funciones continuas) es uno de los problemas más importantes en topología general. De la misma manera el interés en la NMSC es probablemente debido a que, en palabras de Franklin D. Tall, ha estado "at the cutting edge of set-theoretic topology, very frequently being the first topological consumer of a new set-theoretic technique", [19] pag. 1811. Prueba de tal relación es uno de los primeros acercamientos a dar una solución a la NMSC hecho por Burton Jones, quién probó que un espacio normal de Moore separable es metrizable haciendo uso de la hipótesis adicional $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, que es una consecuencia de la Hipótesis del Continuo y al mismo tiempo independiente de la teoría ZFC.

Para una descripción detallada de la historia de NMSC hacemos referencia a [19], un texto del mismo Peter Nyikos.

6.3 Consecuencias de PMEA

En esta sección probaremos que, como consecuencia de PMEA, ningún espacio pseudocompacto de carácter menor a $\mathfrak{c}$ puede tener un subconjunto discreto e infinito que esté C^*-encajado en él. De esa manera, un espacio pseudocompacto de carácter menor a $\mathfrak{c}$ puede tener un subconjunto discreto e infinito 2-encajado. Si tenemos en cuenta que:

Proposición 6.11. *Un espacio X es pseudocompacto si y sólo si no tiene un subespacio homeomorfo al espacio discreto ω que esté C-encajado.*

De esa manera podemos caracterizar a los espacios pseudocompactos de carácter menor a $\mathfrak{c}$ en términos de sus subconjuntos C^*-encajados. Probemos primero la proposición 6.11.

Demostración. [De la proposición 6.11] Supongamos que X es pseudocompacto y sea $S = \{s_i : i \in \omega\} \subseteq X$ homeomorfo a ω y C-encajado en X. La función $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(s_i) = i$ es continua, por lo cual tiene una extensión continua $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con imagen no acotada, una contradicción.

Por otro lado, si existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y no acotada, es posible hallar $T = \{t_i : i \in \omega\} \subseteq f[X] \subseteq \mathbb{R}$ un discreto numerable. Consideramos el conjunto $S = f^{-1}[\{t_i\}]$, que es de igual manera un discreto numerable, esta vez de X. De esa forma, $h = f^{-1} \restriction T$ es continua. Veamos que S está C-encajado en X. Consideramos $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. La composición $g \circ h$ es una función continua de T, un cerrado de $\mathbb{R}$, en $\mathbb{R}$. Ya que todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ está C-encajado (como consecuencia del Teorema de Extensión de Tietze-Urysohn), existe φ una extensión continua de $g \circ h$. Definimos $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi \circ f$, la cual es continua y extiende a g pues, para cada $s \in S$:

$$G(s) = \varphi \circ f(s) = \varphi(f(s)) = g \circ h(f(s)) = g(s).$$

$\square$

La siguiente es una caracterización de los espacios de Tychonoff pseudocompactos. Una familia $\{A_s : s \in S\}$ de subconjuntos de un espacio X se llama **localmente finita** si y sólo si para todo $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que $\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}$ es finito. En particular, una familia discreta es localmente finita

Teorema 6.12. *Un espacio de Tychonoff X es pseudocompacto si sólo si toda familia localmente finita de abiertos es finita.*

Teorema 6.13. *Asumiendo PMEA, para un espacio Tychonoff X de carácter menor a $\mathfrak{c}$ son equivalentes:*

1. X es pseudocompacto,

2. Ningún subconjunto discreto e infinito de X está C^*-encajado.

Demostración. *2 ⇒ 1.* Si suponemos que toda función de $S \subseteq X$ en $\mathbb{R}$ se extiende a todo X, ésto ocurre en particular para toda función continua y acotada de S en $\mathbb{R}$. De tal forma, que S esté C-encajado en X implica que también está C^*-encajado en X. Por lo que, si X no tiene subconjuntos discretos e infinitos C^*-encajados, X no tiene subconjuntos discretos e infinitos C-encajados y la implicación se sigue de la proposición 6.11.

1 ⇒ 2. Utilizaremos la caracterización del teorema 6.12. Supongamos que existe $P = \{p_n :$

$n \in \omega\}$ un subconjunto discreto C^*-encajado de X. Construiremos una familia discreta de abiertos $\{O_i : i \in \omega\}$ tal que para toda $i \in \omega$, $p_i \in O_i$.

Para cada $S \subseteq P$ consideramos $f_S : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $f[S] = 0$ y $f[P \setminus S] = 1$. Tales funciones se consiguen, por ejemplo, al considerar las funciones continuas $h_S : P \longrightarrow [0,1]$ definidas por $h_S(p) = 1 - \chi_S(p)$, donde χ_S es la función característica en S, y el hecho de que P está C^*-encajado en X. Definimos para cada $S \subseteq P$ y $x \in X$ fija, $N_S(x)$ como:

$$\begin{aligned} N_S(x) &= f_S^{-1}\left[\left(f_S(x) - \frac{1}{8}, f_S(x) + \frac{1}{8}\right)\right] \\ &= f_S^{-1}\left[S_{1/8}(f_S(x))\right]. \end{aligned}$$

De tal manera el diámetro en $\mathbb{R}$ de $f_S[N_S(x)]$ es menor que $\frac{1}{4}$.

Utilizando PMEA y el hecho de que hay una biyección entre $\wp(P)$ y ${}^P2$, afirmamos que existe una medida $\mathfrak{c}$-aditiva definida en $Z = \wp(\wp(P))$, $\mu : Z \longrightarrow [0,1]$, que cumple $\mu(\wp(P)) = 1$ y tal que para todo $F \subseteq P$ finito, $\mu(\{A \subseteq P : F \subseteq A\}) = \frac{1}{2^{|F|}}$.

Mostraremos ahora que utilizando la $\mathfrak{c}$-aditividad de μ y que el carácter de X es menor que $\mathfrak{c}$, para cada $x \in X$ podemos encontrar una vecindad $N(x)$ tal que:

$$\mu(\{S \subseteq P : N(x) \subseteq N_S(x)\}) > \frac{15}{16}.$$

En particular, $\{N(p_i) : i \in \omega\}$ es la familia discreta que buscamos. Probaremos la primera afirmación. Para ver esto fijemos $x \in X$ y consideramos una base local $V(x) = \{V_\alpha : \alpha < \lambda < \mathfrak{c}\}$. Definimos la función $\varphi : \wp(P) \longrightarrow \lambda$ como $\varphi(S) = min\{\alpha : V_\alpha \subseteq N_S(x)\}$, con el fin de generar una partición de $\wp(P)$ en λ conjuntos. De manera explícita $\mathcal{Q} = \{Q_\alpha = \varphi^{-1}[\{\alpha\}] : \alpha < \lambda\}$ es una partici]on de $\wp(P)$.

Ahora, para cada $\alpha \in \lambda$, sea $r_\alpha = \mu(Q_\alpha)$. Afirmamos que $\{\alpha < \lambda : r_\alpha > 0\}$ es numerable. Supongamos que la afirmación es falsa y derivemos una contradicción. Para cada $n \in \omega$, sea $E_n = \{\alpha < \lambda : r_\alpha \geqslant \frac{1}{n}\}$. Ya que la unión numerable de conjuntos contables es contable, podemos encontrar $n_0 \in \omega$ tal que E_{n_0} es no numerable, de tal manera por la

$\mathfrak{c}$-aditividad de μ:

$$\begin{aligned}1=\mu\left(\wp\left(P\right)\right) &= \mu\left(\bigcup_{\alpha<\lambda}Q_{\alpha}\right)\\ &= \sum_{\alpha<\lambda}\mu\left(Q_{\alpha}\right)\\ &\geqslant \sum_{\alpha\in E_{n_0}}\mu\left(Q_{\alpha}\right),\end{aligned}$$

donde el último término de la desigualdad no converge. La contradicción que buscábamos.

Sea $\mathcal{Q}^{'}$ la subfamilia de $\mathcal{Q}$ con elementos de medida positiva y $E=\{\alpha_i : i\in\omega\}$ una numeración del conjunto $\{\alpha<\lambda : Q_{\alpha}\in\mathcal{Q}^{'}\}$. De tal manera:

$$\begin{aligned}1=\mu\left(\wp\left(P\right)\right) &= \mu\left(\bigcup_{\alpha<\lambda}Q_{\alpha}\right)\\ &= \sum_{\alpha<\lambda}\mu\left(Q_{\alpha}\right)\\ &= \sum_{\alpha\in\lambda\setminus E}\mu\left(Q_{\alpha}\right)+\sum_{\alpha\in E}\mu\left(Q_{\alpha}\right)\\ &= \sum_{\alpha\in E}\mu\left(Q_{\alpha}\right).\end{aligned}$$

Por lo que para $\frac{1}{16}=\varepsilon>0$ existe $m\in\omega$ tal que $\sum_{i>m}\mu\left(Q_{\alpha_i}\right)<\frac{1}{16}$. Colocamos $N\left(x\right)=\bigcap_{j\leqslant m}V_{\alpha_j}$. Se sigue que $N\left(x\right)$ es una vecindad abierta de x. Haciendo el cálculo tenemos:

$$\begin{aligned}\mu\left(\{S\subseteq P : N\left(x\right)\subseteq N_S\left(x\right)\}\right) &\geqslant \mu\left(\bigcup_{j\leqslant m}Q_{\alpha_j}\right)\\ &= \sum_{j\leqslant m}\mu\left(Q_{\alpha_j}\right)\\ &= 1-\sum_{i>m}\mu\left(Q_{\alpha_i}\right)\\ &> \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

Finalmente probaremos que $\{N\left(p_i\right) : i\in\omega\}$ es una familia discreta de abiertos. Hemos observado ya que para cada $x\in X$, $N\left(x\right)$ es una vecindad abierta, veamos que si ocurre que $N\left(x\right)\cap N\left(p_i\right)\neq\emptyset$, entonces para toda $i\neq j$, $N\left(x\right)\cap N\left(p_j\right)=\emptyset$. Para cada $x\in X$

hacemos $K_x = \{S \subseteq P : N(x) \subseteq N_S(x)\}$. Notemos primero que, para cada $S \in K_x$ y para cada $T \in K_{p_i}$, $N_S(x) \cap N_T(p_i) \neq \emptyset$. Además $\mu(K_x \cap K_{p_i}) \geqslant \frac{14}{16}$. De esa forma $\mu\left(\{S \subseteq P : f_S[N(x)] \subseteq S_{1/2}(f_S(p_i))\}\right) \geqslant \mu(K_x \cap K_{p_i}) \geqslant \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$.

Por otro lado, para $i \neq j$, $\mu(\{S \subseteq P : f_S(p_i) \neq f_S(p_i)\}) = \mu(\{S \subseteq P : p_i \in S \text{ y } p_j \notin S\}) = \frac{1}{2}$. Por lo que $\mu(\{S \subseteq P : N_S(x) \cap N_S(p_j) = \emptyset\}) \geqslant \frac{3}{8}$. Pero hemos visto que para cualquier $n \in \omega$, si $N(x) \cap N(p_n) \neq \emptyset$, entonces $\mu(K_x \cap K_{p_n}) \geqslant \frac{7}{8}$. Por lo que $N(x) \cap N(p_j) = \emptyset$.

$\square$

Corolario 6.14. *Asumiendo PMEA no existe una familia MAD $\mathcal{A}$ tal que el espacio de Mrowka-Isbell $\Psi_{\mathcal{A}}$ tiene un subconjunto discreto infinito 2-encajado.*

Esto último es, asumiendo PMEA el espacio $\Psi_{\mathcal{E}}$ del teorema 5.9 no puede ser construido. Lo que prueba el siguiente resultado.

Teorema 6.15. *ZFC+MA+PMEA no es consistente.*

APÉNDICE A: DOS TEOREMAS DE METRIZABILIDAD

Durante el desarrollo de esta sección supondremos que todos los espacios topológicos considerados cumplen el primer axioma de separación, es decir, para todo par de elementos distintos x y y de un espacio X, existe una vecindad abierta U de x tal que $y \notin U$.

Definición 6.16. Dado un espacio topológico X y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X, para cada $x \in X$ se define la *estrella de x* con respecto a la cubierta $\mathcal{U}$, denotada por $st\,(x, \mathcal{U})$, como el conjunto $\cup\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$.

Definición 6.17. Sea X un espacio topológico y $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ una sucesión de cubiertas abiertas para X.

i) $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ es un *desarrollo* para X si y sólo si para cada $x \in X$, $\{st\,(x, \mathcal{U}_i) : i \in \omega\}$ es una base local de x. A un espacio topológico con un desarrollo se le llama *espacio desarrollable.*

ii) Dada $i \in \omega$ fija. Si para cualesquiera $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_{i+1}$ tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ existe $V \in \mathcal{U}_i$ que cumple $U_1 \cup U_2 \subseteq V$, llamaremos a $\mathcal{U}_{i+1}$ un $2 - refinamiento$ de $\mathcal{U}_i$.

Si $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ es un desarrollo y para toda $i \in \omega$ $\mathcal{U}_{i+1}$ es un 2-refinamiento de $\mathcal{U}_i$, diremos que $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ es un *desarrollo regular.*

Ejemplo 6.18. *En un espacio métrico X la sucesión $\{B_i : i \in \omega\}$ donde $B_i = \{S_{2^{-2i}}\,(x) : x \in X\}$ es un desarrollo regular de X.*

Demostración. Observamos que si $S_{2^{-2i-2}}\,(x)\,, S_{2^{-2i-2}}\,(y) \in B_{i+1}$ son tales que $S_{2^{-2i-2}}\,(x) \cap S_{2^{-2i-2}}\,(y) \neq \emptyset$ entonces la distancia de z a x es menor a 2^{-2i} para todo $z \in S_{2^{-2i-2}}\,(y)$. De esa manera $S_{2^{-2i-2}}\,(x) \cup S_{2^{-2i-2}}\,(y) \subseteq S_{2^{-2i-2}}\,(x)$. Y en particular $st\,(x, B_{i+1}) \subseteq S_{2^{-2i}}\,(x)$. $\square$

Teorema 6.19. *(Alexandroff-Urysohn) Un espacio X es metrizable si y sólo si tiene un desarrollo regular.*

El Teorema de metrizabilidad de Frink es un corolario del Teorema de Alexandroff-Urysohn. Incluimos primero la prueba del Teorema de metrizabilidad de Frink por su importancia en este trabajo pero el lector interesado puede encontrar la prueba del Teorema 6.19 inmediatamente después.

Teorema 6.20. *(Frink) Un espacio topológico X es metrizable si y sólo si para cada $x \in X$ existe $\{V_x(n) \subseteq X : n \in \omega\}$ una base local de vecindades numerable con la siguiente propiedad: Dada una pareja (x,i) fija, existe $j(x,i) = j \in \omega$ tal que si $V_x(j) \cap V_y(j) \neq \emptyset$, entonces $V_y(j) \subseteq V_x(i)$.*

Demostración. Si X es un espacio metrizable, definimos $V_x(n) = S_{1/n+1}(x)$ y $j(x,i) = 4(i+1)$.

Supongamos ahora que para cada $x \in X$ existe $\mathcal{V}_x = \{V_x(n) \subseteq X : n \in \omega\}$ con la propiedad descrita en el Teorema. Sea $W_x(n) = \bigcap_{m \leqslant n} V_x(n)$. Fijemos $i \in \omega$, $x \in X$ y colocamos $j_1 = j(x,1)$, $j_2 = j(x,2)$, $\ldots$, $j_i = j(x,i)$ y $j_0 = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_i\}$. Si suponemos que $W_x(j_0) \cap W_y(j_0) \neq \emptyset$, entonces $V_x(j_k) \cap V_y(j_k) \neq \emptyset$ para $1 \leqslant k \leqslant i$ pues $W_x(j_0) \subseteq V_x(j_k)$ y $W_y(j_0) \subseteq V_y(j_k)$. Así mismo para toda $z \in X$, $W_z(m) \subseteq W_z(n)$ siempre que $m \geqslant n$ y $V_y(j_k) \subset V_x(k)$. De lo anterior $W_y(j_0) \subseteq V_y(j_k) \subseteq V_x(k)$, esto para $1 \leqslant k \leqslant i$ y podemos deducir que $W_y(j_0) \subseteq W_x(i)$. Lo anterior prueba que podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{V}_x$ está anidada.

Para cada $x \in X$, sea $1(x) = 1$, $2(x) = j(x, 1(x))$, $3(x) = j(x, 2(x))$, etc. Notemos que, debido a que las bases $\mathcal{V}_x$ están anidadas, podemos pedir que $1(x) < 2(x) < 3(x) < \ldots$ y en consecuencia $j \leqslant j(x)$ para cada $x \in X$ y $j > 1$. Definimos para $i \in \omega$ e $i \geqslant 1$, las cubiertas $\mathcal{U}_i = \{U_x(i) : x \in X\}$ donde $U_x(i) = V_x(i(x))$. Llamemos $\mathcal{U}$ a la sucesión $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$.

Afirmación. $\mathcal{U}$ es un desarrollo regular para X.

Empecemos por ver que $\mathcal{U}_{i+1}$ es un 2-refinamiento para $\mathcal{U}_i$. Sean $U_x(i+1), U_y(i+1) \in \mathcal{U}_{i+1}$ tales que $U_x(i+1) \cap U_y(i+1) \neq \emptyset$. Si $(i+1)(x) = s$ y $(i+1)(y) = t$, entonces $V_x(s) \cap V_y(t) \neq \emptyset$, por la definición de $U_x(i)$. Para s y t ocurren dos casos:

Caso 1) $s \geqslant t$. De esa forma $V_x(s) \cap V_y(t) \neq \emptyset$ implica que $V_x(t) \cap V_y(t) \neq \emptyset$. Ya que $t = (i+1)(y) = j(y, i(y))$, se obtiene $V_x(s) \subseteq V_x(t) \subseteq V_y(i(y))$. Concluimos en este caso que $U_x(i+1) \cup U_y(i+1) \subseteq V_y(i(y)) = U_y(i) \in \mathcal{U}_i$.

Caso 2) $t \geqslant s$. De manera análoga concluimos que $V_y(t) \subseteq V_y(s) \subseteq V_x(i(x))$ y en ese caso $U_x(i+1) \cup U_y(i+1) \subseteq V_x(i(x)) = U_x(i) \in \mathcal{U}_i$.

En seguida, para ver que $\mathcal{U}$ es un desarrollo de X, observemos que para cada $i \in \omega \setminus \{0\}$,

$U_x(i) \subseteq V_x(i)$, por lo que para cada $x \in X$, $\{U_x(i) : i \in \omega \setminus \{0\}\}$ es también una base local para x. Probaremos que existe una subfamilia de $\{st(x, \mathcal{U}_i) : i \in \omega \setminus \{0\}\}$ que es ya una base local para x.

Sea $j_i = (i+1)(x)$. Afirmamos que la familia $\{st(x, \mathcal{U}_{j_i})\, i \in \omega \setminus \{0\}\}$ es una base local para x. Para ver esto basta probar que $st(x, \mathcal{U}_{j_i}) \subseteq U_x(i)$. Si ocurre que $x \in U_z(j_i)$, dado que $U_z(j_i) = V_z(j_i(z)) \subseteq V_z(j_i)$, se tiene $x \in V_x(j_i) \cap V_z(j_i) \neq \emptyset$ y ya que $j_i = (i+1)(x)$, $V_z(j_i) \subseteq V_x(i(x)) = U_x(i)$. Así $st(x, \mathcal{U}_{j_i}) = \cup\{U_z(j_i) \in \mathcal{U}_{j_i} : x \in U_z(j_i)\} \subseteq U_x(i)$.

Concluimos entonces que $\mathcal{U}$ es un desarrollo regular y, como consecuencia del Teorema 6.19, X es metrizable. □

Demostración. Del Teorema 6.19

Debido al Ejemplo 6.18 falta sólo comprobar que un espacio X con un desarrollo regular es metrizable. Si $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ es un desarrollo regular para X, el proceso a seguir será definir una función "distancia" $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ que induzca la topología de X y a partir de ella una métrica que conserve tal propiedad.

Definimos a d como

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in st(x, \mathcal{U}_j) \text{ p.t. } j \in \omega \\ 2^{-i} & \text{donde } i = \min\{n \in \omega : y \notin st(x, \mathcal{U}_n)\}. \end{cases}$$

.

La función d está bien definida y para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple:

(**1**) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Directamente de la definición se tiene que $x = y$ implica $d(x, y) = 0$. Por otro lado, si $x \neq y$, hay una vecindad abierta de x, sin pérdida de generalidad básica, $st(x, \mathcal{U}_n)$ que no tiene a y. De esa manera $d(x, y) \geqslant 2^{-n} > 0$.

(**2**) $d(x, y) = d(y, x)$.

Inmediato de la definición.

(**3**) $d(x, y) \leqslant 2 \cdot \max\{d(x, z), d(z, y)\}$.

Si $\max\{d(x, z), d(z, y)\} = 0$, entonces $x = y = z$. De otra manera sea $n \in \omega$ tal que $\max\{d(x, z), d(z, y)\} = 2^{-n}$, por hipótesis $\mathcal{U}_{n+1}$ es un 2-refinamiento de $\mathcal{U}_n$ y un refinamiento para $\mathcal{U}_k$ para toda $k \leqslant n$ (esto se sigue de tomar $U_1 = U_2$ en la Definición 6.17 inciso *ii*)). Deducimos entonces que $\min\{j \in \omega : y \notin st\,(x, \mathcal{U}_j)\} \geqslant n$, de donde $d\,(x,y) \leqslant 2^{-n} < 2^{-n+1} = 2 \cdot 2^{-n} = 2 \cdot \max\{d\,(x,z)\,, d\,(z,y)\}$.

(**4**) $\{y \in X : d\,(x,y) < 2^{-n}\} = st\,(x, \mathcal{U}_n)$.

Primero, si $d\,(x,y) < 2^{-n}$, entonces $y \in st\,(x, \mathcal{U}_n)$. Por lo que $\{y \in X : d\,(x,y) < 2^{-n}\} \subseteq st\,(x, \mathcal{U}_n)$. De la otra forma, ya que $\mathcal{U}_{n+1}$ refina a $\mathcal{U}_n$, $\min\{j \in \omega : x \notin st\,(x, \mathcal{U}_j)\} > n$ y tenemos que $d\,(x,y) < 2^{-n}$. Por lo tanto $st\,(x, \mathcal{U}_n) \subseteq \{y \in X : d\,(x,y) < 2^{-n}\}$ y la afirmación es cierta.

El problema con esta "distancia" es que es posible que no cumpla la desigualdad del triángulo. Para corregir esto definimos $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$ como:

$$D\,(x,y) = \inf\{d\,(x,x_1) + d\,(x_1,x_2) + \cdots + d\,(x_{n-1},x_n) + d\,(x_n,x_y)\}$$

Donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones finitas de la forma $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, y$. Esta nueva función cumple lo siguiente:

(**5**) $D\,(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$

(**6**) $D\,(x,y) = D\,(y,x)$.

(**7**) $D\,(x,y) \leqslant D\,(x,z) + D\,(z,y)$.

(**8**) $\dfrac{d\,(x,y)}{4} \leqslant D\,(x,y) \leqslant d\,(x,y)\,.$

Los puntos **(5)** y **(6)** son consecuencia de la definición de D y las propiedades **(1)** y **(2)** de d. Para el punto **(7)** observamos que:

$$\begin{aligned}
\inf\{d\,(x,x_1) + d\,(x_1,x_2) + \cdots + d\,(x_n,x_y)\} &\leqslant \inf\{d\,(x,x_1) + d\,(x_1,x_2) + \cdots + d\,(x_m,x_z) \\
&\quad +d\,(z,x_{m+1}) + \cdots + d\,(x_{n-1},x_n) + d\,(x_n,x_y)\} \\
&\leqslant \inf\{d\,(x,x_1) + d\,(x_1,x_2) + \cdots + d\,(x_k,z)\} \\
&\quad +\inf\{d\,(z,z_1) + \cdots + d\,(z_{j-1},z_j) + d\,(z_j,y)\} \\
&= D\,(x,z) + D\,(z,y)\,.
\end{aligned}$$

En **(8)** la desigualdad $D\,(x,y) \leqslant d\,(x,y)$ se sigue de la definición de D. Para probar la otra desigualdad, probaremos por inducción sobre n la afirmación: Para cualesquiera

$x, y \in X$ y $n \in \omega$ ocurre que:

$$d(x,y) \leqslant 2d(x,x_1) + 4d(x_1,x_2) + \cdots + 4d(x_{n-1},x_n) + 2d(x_n,y).$$

La cual es trivialmente cierta para cualquier par $x, y \in X$ y $n = 1$ por **(3)**. Supongamos ahora que para cualquier par $x, y \in X$ y cualquier cadena $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \subseteq X$ con $n < N$ la afirmación es verdadera, y probémosla para cadenas con N elementos.

Para cada r entre 1 y N ocurre que $d(x,y) \leqslant 2d(x,x_r)$ o $d(x,y) \leqslant 2d(x_r,y)$ (posiblemente ambas) por la propiedad **(3)**. Consideremos $k = \max\{r : d(x,y) \leqslant 2d(x_r,y)\}$, se sigue que:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leqslant 2d(x_k,y) \\ d(x,y) &\leqslant 2d(x,x_{k+1}). \end{aligned}$$

De tal forma tenemos, por lo anterior y la hipótesis de inducción, que:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leqslant d(x,x_{k+1}) + d(x_k,y) \\ &\leqslant (2d(x,x_1) + 4d(x_1,x_2) + \cdots + 4d(x_{k-1},x_k) + 2d(x_k,x_{k+1})) \\ &\quad + (2d(x_k,x_{k+1}) + 4d(x_{k+1},x_{k+2}) + \cdots + 4d(x_{N-1},x_N) + 2d(x_N,y)). \end{aligned}$$

Lo que prueba la afirmación. Se sigue entonces que:

$$d(x,y) \leqslant 4D(x,y)$$

y queda establecida la desigualdad. Falta observar que dada $i \in \omega$:

$$\{y \in X : d(x,y) < 2^{-i-2}\} \subseteq S_{2^{-i}}(x) \subseteq \{y \in X : d(x,y) < 2^{-i}\}.$$

Bajo la propiedad **(3)** esto es:

$$st(x, \mathcal{U}_{i+2}) \subseteq S_{2^{-i}}(x) \subseteq st(x, \mathcal{U}_i)$$

Lo que nos dice que la topología que induce la métrica es la misma que la topología que inducen las familias de estrellas en un punto x como bases de vecindades, y esta última es la topología de X. $\square$

Un último comentario respecto a esta prueba es que la construcción de d se atribuye a Alexandroff y Urysohn y la construcción de D a A. Frink (ver [12]).

6.4 Álgebras de Boole

Definición 6.21. Una **retícula** es un conjunto parcialmente ordenado $(R, \leqslant)$ donde para cualquier par de elementos $x, y \in R$, $\inf\{x, y\}$ y $\sup\{x, y\}$ existen. Denotaremos a una retícula $(R, \leqslant)$ simplemente como R cuando no haya lugar a confusiones.

Proposición 6.22. *Dada una retícula R, $+ : R \times R \longrightarrow R$ y $\cdot : R \times R \longrightarrow R$ definidas como:*

$$\begin{aligned} \cdot\,(x, y) &= x \cdot y = \inf\{x, y\}, \\ +\,(x, y) &= x + y = \sup\{x, y\}, \end{aligned}$$

son operaciones binarias con las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad,

2. Asociatividad,

3. Idempotencia,

4. Absorción, es decir, para cualesquiera $x, y \in R$, $x + (x \cdot y) = x$ y $x \cdot (x + y) = x$.

Demostración. *1*, *2* y *3* son inmediatas de la definición. Para probar *4* recordemos que $x \cdot y = \inf\{x, y\}$ y $x + y = \sup\{x, y\}$ está caracterizados por:

$$\begin{aligned} x \leqslant x + y;\ y \leqslant x + y \quad &y \quad (x \leqslant z,\ y \leqslant z) \Rightarrow x + y \leqslant z, \\ x \cdot y \leqslant x;\ x \cdot y \leqslant y \quad &y \quad (z \leqslant x,\ z \leqslant y) \Rightarrow z \leqslant x \cdot y. \end{aligned}$$

De esa manera $x \leqslant x + (x \cdot y)$ y $x \cdot (x + y) \leqslant x$. Por otro lado, $x \leqslant x$ y $x \cdot y \leqslant x$ por lo que $x + (x \cdot y) \leqslant x$ de donde $x + (x \cdot y) = x$. De manera análoga se concluye que $x \leqslant x \cdot (x + y)$ y por tanto $x \cdot (x + y) = x$. $\square$

Si una retícula tiene mínimo, se conviene en llamarlo 0. Así mismo, el máximo de una retícula se denota con 1.

Definición 6.23. En una retícula con mínimo y máximo R, dado $x \in R$, un elemento $y \in R$ es un **complemento para** x si y sólo si $x \cdot y = 0$ y $x + y = 1$. A una retícula donde todo elemento tiene complemento se denomina una **retícula complementada** Una retícula es una **retícula distributiva** si ocurre que $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ y $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Es posible probar que para que una retícula sea distributiva basta pedir que sea verdadera $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ o $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$. Además, si una retícula es distributiva el complemento de un elemento x de la retícula es único.

Definición 6.24. Un **álgebra de Boole** o **álgebra booleana** $\mathfrak{B} = (B, \leqslant)$ es una retícula distributiva y complementada.

Se sigue entonces que en un álgebra de Boole cada elemento x tiene un único complemento, el cual denotaremos por $-x$. También se cumple que 0 es el complemento de 1.

Proposición 6.25. *Un álgebra booleana es una estructura* $\mathfrak{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$*, donde* $+$ *y* $\cdot$ *son operaciones binarias,* $-$ *es una función de* B *en* B *y* $0, 1$ *son elementos distinguidos con las siguientes propiedades, para cualesquiera* $x, y, z \in B$*:*

1. $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$; *(Conmutatividad)*

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$; *(Asociatividad)*

3. $x + (x \cdot y) = x$, $x \cdot (x + y) = x$; *(Absorción)*

4. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$; $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$; *(Distributividad)*

5. $x \cdot -x = 0$ *y* $x + -x = 1$.

De manera inversa, dada una estructura $\mathfrak{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *que cumple las propiedades anteriores. La relación* $\leqslant$ *definida en* B *como* $x \leqslant y$ *si y sólo si* $x + y = y$ *es orden parcial y el par* $(B, \leqslant)$ *es una retícula complementada y distributiva.*

Demostración. Hemos argumentado ya la primera parte en la discusión anterior y la proposición 6.22. Probaremos que la relación $\leqslant$ en una estructura como la descrita en la proposición genera un álgebra de Boole. Sean $\mathfrak{B}$ y $\leqslant$ como en la proposición. Empecemos por ver que $\leqslant$ es un orden parcial.

Reflexividad: $x = x + (x \cdot x) = (x + x) \cdot (x + x) = (x + x) \cdot x + (x + x) \cdot x = x + x$.

Antisimetría: Si ocurre que $x \leqslant y$ y $y \leqslant X$, entonces $x = x + y = y + x = y$.

Transitividad: Supongamos que $x \leqslant y$ y $y \leqslant z$, entonces $x + y = y$ y $y + z = z$, entonces $x + z = x + (y + z) = (x + y) + z = y + z + z$.

De tal manera, $(B, \leqslant)$ es un orden parcial. Además de la definición y la prueba de que $\leqslant$ es reflexiva se tiene que $x + (x + y) = (x + x) + y = x + y = x + (y + y) = (x + y) + y = y + (x + y)$. Es decir, $x + y$ es cota superior de x y también lo es de y. Supongamos que $x \leqslant z$ y $y \leqslant z$, así $(x + y) + z = (x + y) + (z + z)$=$(x + z) + (y + z) = z + z = z$. Por lo que $sup\{x, y\}$ existe y es $x + y$.

Para probar que $inf\{x, y\}$ existe y es igual a $x \cdot y$ necesitamos probar que $x \leqslant y$ si y sólo si $x \cdot y = x$. Para ver esto supongamos que $x \leqslant y$, entonces $x \cdot y = x \cdot (x + y) = x$. Si suponemos ahora que $x \cdot y = x$, tenemos que $x + y = (x \cdot y) + y = y$. Ya que para todo $x \in B$ se tiene $x \leqslant x$, se sigue que $x \cdot x = x$. Probemos que $\inf\{x, y\} = x \cdot y$. Primero, $x \cdot (x \cdot y) = (x \cdot x) \cdot y = x \cdot y = x \cdot (y \cdot y) = (x \cdot y) \cdot y$, y deducimos que $(x \cdot y) \leqslant x$ y $(x \cdot y) \leqslant y$. Finalmente, si $w \leqslant x$ y $w \leqslant y$, entonces $w \cdot (x \cdot y) = (w \cdot w) \cdot (x \cdot y) = (w \cdot x) \cdot (w \cdot y) = w \cdot w = w$. Concluimos que $inf\{x, y\} = x \cdot y$.

Para ver que 0 es mínimo y 1 máximo, basta observar que para todo $x \in B$, $x + 1 = x + (x + -x) = (x + x) + -x = x + -x = 1$ y $x \cdot 0 = x \cdot (x \cdot -x) = (x \cdot x) \cdot -x = x \cdot -x = 0$. Concluimos que $(B, \leqslant)$ es una retícula con mínimo y máximo, complementada y distributiva, ésto último por hipótesis. □

Proposición 6.26. *En un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ el complemento es una operación idempotente y son verdaderas las leyes de De Morgan, esto es, para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{B}$:*

a) $-(-x) = x$,

b) $-(x + y) = -x \cdot -y$; $-(x \cdot y) = -x + -y$.

Demostración. *a)* Se sigue de que el complemento en una retícula distributiva complementada es único. b) En primer lugar veamos que $-x \cdot -y$ es el complemento de $x + y$:

$$
\begin{aligned}
(x+y) + -x \cdot -y &= (x + (1 \cdot y)) + -x \cdot -y \\
&= (x + ((x + -x) \cdot y)) + -x \cdot -y \\
&= (x + ((x \cdot y) + (-x \cdot y))) + -x \cdot -y \\
&= (x + (x \cdot y)) + -x \cdot y + -x \cdot -y \\
&= x + -x\,(y + -y) \\
&= x + -x \cdot 1 \\
&= x + -x = 1. \\
(x+y) \cdot (-x \cdot -y) &= (x \cdot -x \cdot -y) + (y \cdot -x \cdot -y) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

. Así $-x \cdot -y = -(x+y)$. De manera análoga es posible probar que $-(x \cdot y) = -x + -y$.

□

Los ejemplos de álgebras de Boole son numerosos en lógica, si bien el más común es $(\wp(X), \subseteq)$ podemos encontrarlos en muchas otras áreas. Por ejemplo, la colección de abiertos regulares de un espacio topológico forma un álgebra de Boole, al mismo tiempo, en análisis las σ-álgebras son álgebras de Boole (definición 2.2), etc. El álgebra de abiertos regulares de un espacio topológico cumple además que cada uno de sus subconjuntos no vacíos (no necesariamente finitos) tiene supremo e ínfimo, a un álgebra con esta propiedad la llamamos un **álgebra completa**. El álgebra de abiertos regulares es de particular importancia pues cada orden parcial se puede ver como un subconjunto denso del algebra de Boole de abiertos regulares de su cociente separativo ([14] capítulo 3, sección 17). Este último hecho es de notoria importancia en muchos resultados que emplean la técnica de forcing. El ejemplo que damos nosotros de un álgebra de Boole completa tiene que ver con espacios de medida y es de relevancia en el Cap[itulo 6 para mostrar la existencia de un modelo de $ZFC + PMEA$. Pero primero necesitamos revisar algunos resultados sobre cocientes en álgebras de Boole.

Definición 6.27. Un subconjunto no vacío $\mathcal{I}$ de un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es un ideal si y sólo si:

1) $1 \notin \mathcal{I}$,

2) Si $a \in \mathcal{I}$ y $b \leqslant a$, entonces $b \in \mathcal{I}$,

3) Si $a, b \in \mathcal{I}$, también $a + b \in \mathcal{I}$.

Por otro lado un conjunto no vacío $\mathcal{F}$ contenido en un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es un filtro si y sólo si:

1) $0 \notin \mathcal{F}$,

2) Si $a \in \mathcal{F}$ y $a \leqslant b$, entonces $b \in \mathcal{F}$,

3) Si $a, b \in \mathcal{F}$, también $a \cdot b \in \mathcal{I}$.

Observemos que $0 \in \mathcal{I}$ para cualquier ideal $\mathcal{I}$ y $1 \in \mathcal{F}$ para cada filtro $\mathcal{F}$.

Ejemplo 6.28. *En un espacio de medida* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *tal que* $\mu(X) > 0$*, el conjunto* $I_\mu\{A \in \mathcal{M} : \mu(A) = 0\}$ *es un ideal. En efecto, por hipótesis* $X \notin I_\mu$ *y por la monotonía de* μ *se cumple 2. Finalmente, la aditividad de* μ *implica que se cumple 3.*

Definición 6.29. Un filtro $\mathcal{U}$ en un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es un ultrafiltro si y sólo si para todo $b \in \mathfrak{B}$ ocurre que $b \in \mathcal{U}$ o bien $-b \in \mathcal{U}$.

Proposición 6.30. *Dado un ideal* $\mathcal{I}$ *en un álgebra de Boole* $\mathfrak{B}$*. La relación* $\sim$ *definida en* $\mathfrak{B}$ *como:*

$$x \sim y \text{ si y sólo si } (x \cdot -y) + (y \cdot -x) \in \mathcal{I},$$

es una relación de equivalencia y $\mathfrak{B}_{/\sim}$ *el conjunto de clases de equivalencia de* $\mathfrak{B}$ *bajo la relación* $\sim$ *es un álgebra de Boole con operaciones:*

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x + y], \\ [x] \cdot [y] &= [x \cdot y], \\ -[x] &= [-x], \end{aligned}$$

y elementos distinguidos $[0]$ *y* $[1]$*.*

Demostración. Veamos que $\sim$ es de equivalencia:

Reflexividad: Para cada $x \in \mathfrak{B}$, $(x \cdot -x) + (x \cdot -x) = 0 \in \mathfrak{I}$. Por lo que $x \sim x$.

Simetría: Se sigue de la conmutatividad de $+$.

Transitividad: Supongamos que $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $(x \cdot -y) + (y \cdot -x) \in \mathfrak{I}$ y $(y \cdot -z) + (z \cdot -y) \in \mathfrak{I}$. En seguida $x \cdot -z = [x \cdot (y + -y)] \cdot -z = x \cdot y \cdot -z + x \cdot -y \cdot -z$. Pero $x \cdot y \cdot -z \leqslant y \cdot -z \leqslant (y \cdot -z) + (z \cdot -y) \in \mathfrak{I}$. Así $x \cdot y \cdot -z \in \mathfrak{I}$. Por otro lado $x \cdot -y \cdot -z \leqslant x \cdot -y \leqslant (x \cdot -y) + (y \cdot -x) \in \mathfrak{I}$. Así $x \cdot -z = [x \cdot (y + -y)] \cdot -z = x \cdot y \cdot -z + x \cdot -y \cdot -z \in \mathfrak{I}$. De manera similar probamos que $z \cdot -x \in \mathfrak{I}$. De donde $(x \cdot y \cdot -z) + (z \cdot -x) \in \mathfrak{I}$. Concluimos que $x \sim z$.

Veamos que las operaciones entre clases de equivalencia están bien definidas, para lo cual basta probar; *(1)* Si $x \sim x'$ y $y \sim y'$, entonces $x + y \sim x' + y'$; *(2)* Si $x \sim x'$ y $y \sim y'$, entonces $x \cdot y \sim x' \cdot y'$; *(3)* Si $x \sim x'$, entonces $-x \sim -x'$.

(*1*) Supongamos que $x \sim x'$ y $y \sim y'$, así $(x \cdot -x') + (x' \cdot -x) \in \mathfrak{I}$ y $(y \cdot -y') + (y' \cdot -y) \in \mathfrak{I}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
(x + y) \cdot -\left(x' + y'\right) &= (x + y) \cdot \left(-x' \cdot -y'\right) \\
&= \left(x \cdot -x' \cdot -y'\right) + \left(y \cdot -x' \cdot -y'\right) \\
&\leqslant \left(x \cdot -x'\right) + \left(y \cdot -y'\right) \\
&= \left(x \cdot -x'\right) + \left(x' \cdot -x\right) + \left(y \cdot -y'\right) + \left(y' \cdot -y\right) \in \mathfrak{I}.
\end{aligned}
$$

De manera análoga probamos que $(x' + y') \cdot -(x + y) \in \mathfrak{I}$ y de tal manera concluimos que $x + y \sim x' + y'$.

(*3*) Si $x \sim x'$, entonces $-x \sim -x'$, es decir, $(x \cdot -x') + (x' \cdot -x) \in \mathfrak{I}$. De tal manera: $(- - x \cdot -x') + (- - x' \cdot -x) = (-x \cdot - - x') + (-x' \cdot - - x) \in \mathfrak{I}$. (*2*) Se sigue de *(1)*, *(2)* y las leyes de De Morgan. Por último, es fácil notar que las operaciones en el cociente heredan las propiedades de las operaciones en el álgebra de Boole por definición. $\square$

Definición 6.31. Dados un álgebra booleana $\mathfrak{B}$ y un ideal $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{B}$, al álgebra descrita en la proposición 6.30 se le llama **álgebra cociente modulo** $\mathfrak{I}$ y se denota $\mathfrak{B}_{/\mathfrak{I}}$.

Definición 6.32. 1. Un subconjunto A de un álgebra booleana $\mathfrak{B}$ es una **familia disjunta** si para cualesquiera $a, b \in A$ distintos $a, b > 0$ y $a \cdot b = 0$.

2. La **saturación** de un álgebra booleana $\mathfrak{B}$ se define como $sat(\mathfrak{B}) = \min\{\lambda \in CAR : \textit{para toda familia disjunta } X \subseteq \mathfrak{B}, \lambda > |X|\}$. Decimos que el álgebra booleana $\mathfrak{B}$ cumple la **condición de la κ-cadena** si $sat(\mathfrak{B}) \leqslant \kappa$. La condición de la $\aleph_1$-cadena es llamada la condición de la cadena contable o **c.c.c.**

3. Un ideal $\mathfrak{I}$ en un álgebra booleana $\mathfrak{B}$ es **κ-saturado** si y sólo si para toda familia $C \subseteq \mathfrak{B}$ de elementos mutuamente incomparables tal que $|C| = \kappa$ existe $c \in C \cap \mathfrak{I}$.

Definición 6.33. Una medida μ (definición2.3) se llama **σ-finita** si el espacio es unión contable de conjuntos medibles de medida finita.

Proposición 6.34. *Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finito, entonces el ideal de conjuntos de medida cero I_μ es un ideal $\aleph_1$-saturado.*

Demostración. Dadas las hipótesis, supongamos que $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$, donde $\mu(X_n) < \infty$ para cada $n \in \omega$. Supongamos que existe $A = \{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una $\aleph_1$-sucesión de conjuntos medibles ajenos de medida positiva. Por la σ-aditividad de μ, para cada $\alpha < \omega_1$ debe existir $n \in \omega$ tal que $\mu(A_\alpha \cap X_n) > 0$. Más aún, existe $m \in \omega$ tal que $\mu(A_\alpha \cap X_n) \geqslant \dfrac{1}{m}$. Sean $g, h : \omega_1 \longrightarrow \omega$ definidas como, $g(\alpha) = \min\{n \in \omega : \mu(A_\alpha \cap X_n) > 0\}$ y $h(\alpha) = \min\{m \in \omega : \mu(A_\alpha \cap X_n) \geqslant \dfrac{1}{m}\}$. De tal manera $\mu\left(A_\alpha \cap X_{g(\alpha)}\right) \geqslant \dfrac{1}{h(\alpha)}$. Ya que $|A| = \aleph_1$, debe existir una pareja (n, m) tal que $\{\alpha : g(\alpha) = n, h(\alpha) = m\}$ es infinito. De esa manera, para tales n y m, existen una cantidad infinita de subconjuntos medibles ajenos de X_n con medida mayor o igual que $\dfrac{1}{m}$, lo que contradice el hecho de que X_n tiene medida finita. □

Definición 6.35. Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Boole y κ es un cardinal, $\mathfrak{B}$ se llama **κ-completa** si cualquier subconjunto de $\mathfrak{B}$ de cardinalidad menor a κ tiene supremo e ínfimo. A un álgebra de Boole $\aleph_1$-completa también la llamaremos **numerablemente completa**.

Teorema 6.36. *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra booleana numerablemente completa e $\mathcal{I}$ es un ideal numerablemente completo $\aleph_1$-saturado, entonces el álgebra $\mathfrak{B}_{/\mathcal{I}}$ es completa.*

Demostración. Nuestro objetivo es probar que para cada $A \subseteq \mathfrak{B}_{/\mathcal{I}}$, $\sup A$ existe. Supongamos sin pérdida de generalidad que $0 \notin A$. Los elementos de $A \subseteq \mathfrak{B}_{/\mathcal{I}}$ son clases de equivalencia de elementos de $\mathfrak{B} \setminus \mathcal{I}$. Sea $D = \{b \in \mathfrak{B} \setminus \mathcal{I} : \exists a \in \cup A, b \leqslant a\}$. Sea Q la colección de todas las familias ajenas en D y consideremos el orden parcial $(Q, \subseteq)$. Consideramos una cadena $C \subseteq Q$, naturalmente C cumple las hipótesis del Lema de Zorn, por lo que existe E un elemento maximal en Q. Ya que $E \subseteq D \subseteq \mathfrak{B} \setminus \mathcal{I}$, E está compuesto de elementos incompatibles y además $\mathcal{I}$ es $\aleph_1$-saturado, $|E| = \aleph_0$. Puesto que $\mathfrak{B}$ es numerablemente completo, concluimos que $\sup E$ existe. Sea $w = \sup E$. Si $\pi : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}_{/\mathcal{I}}$ es la proyección canónica $\pi(x) = \{y \in \mathfrak{B} : (x \cdot -y) + (y \cdot -x) \in \mathcal{I}\}$, afirmamos que $\pi(w) = \sup A$. Veamos primero que $\pi(w)$ es cota superior de A. Sea $\pi(a) \in A$, y supongamos que $\pi(a) \lneqq \pi(w)$, entonces $\pi(a) \cdot -\pi(w) \neq \pi(0)$, por lo que $a \cdot -w \notin \mathcal{I}$. Además $a \cdot -w \leqslant a \in \cup A$ por lo que $a \cdot -w \in D$ y $a \cdot -w$ es incompatible con $w = \sup E$. De esa manera, la familia $E \cup \{a \cdot -w\}$ es una familia de elementos incompatibles de D que contiene propiamente a E, una contradicción.

Falta únicamente probar que $\pi(w)$ es la mínima cota superior. Si $\pi(z)$ es una cota superior para A, entonces para cada $\pi(a) \in A$ se cumple que $\pi(a) \leqslant \pi(z)$, de tal manera $\pi(a) \cdot -\pi(z) = \pi(0)$ y $a \cdot -z \in \mathcal{I}$. Para cada $v \in E$, se cumple que existe $a \in \cup A$ tal que $v \leqslant a$, de tal manera el elemento $v \cdot -z \leqslant a \cdot -z \in \mathcal{I}$, por lo que la familia $V = \{v \cdot -z : v \in E\} \subseteq \mathcal{I}$. Debido a que $\mathcal{I}$ es numerablemente completo y $|V| \leqslant |E| = \aleph_0$, $\sup V = t$ existe y $t \in \mathcal{I}$. En seguida, para cada $v \in E$, $v \leqslant z + (v \cdot -z) \leqslant z + t$. Es decir, $z + t$ es cota superior de E. De manera que $w \leqslant z + t$. Así, $\pi(w) \leqslant \pi(z + t) = \pi(z) + \pi(t) = \pi(z)$. $\square$

6.5 Filtros e Ideales

Los filtros y su concepto dual, los ideales, son objetos combinatorios utilizados en muchas ramas de las matemáticas. Para la teoría de Álgebras Booleanas, donde son utilizados probablemente con mayor generalidad, es fundamental el Teorema del Ideal Primo. Éste da lugar al Teorema de representación de Stone que relaciona a las Álgebras de Boole con álgebras de subconjuntos (el álgebra de cerrado abiertos) del espacio de Stone correspondiente. En Lógica son equivalentes el Teorema de Compacidad y que el espacio de Stone para el álgebra de Lindenbaum-Tarsky sea compacto. Para un espacio topológico X completamente regular es equivalente ser compacto y que todo ultrafiltro de conjuntos nulos de X sea fijo. Los anteriores son sólo algunos ejemplos, veremos su utilidad en más ocasiones dentro de este texto.

Definición 6.37. Un **filtro** sobre un conjunto X es una familia $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ no vacía, que cumple:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(ii) Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G \subseteq X$, entonces $G \in \mathcal{F}$,

(iii) Si F, $G \in \mathcal{F}$, también $F \cap G \in \mathcal{F}$.

Trataremos algunos resultados relacionados a los filtros. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, ocurre que $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$ o bien $\cap\mathcal{F} = \emptyset$. Llamaremos a $\mathcal{F}$ un **filtro fijo** si ocurre la primera condición y un **filtro libre** si ocurre la segunda. Si $\mathcal{F}$ es tal que para cada $A \subseteq X$ se cumple que $A \in \mathcal{F}$ o bien $X \setminus A \in \mathcal{F}$ se le conoce como un **ultrafiltro**.

Ejemplo 6.38. *En ω, $COF(\omega) = \{F \subseteq \omega : |\omega \setminus F| < \omega\}$, la colección de todos los subconjuntos de ω de complemento finito (cofinitos), es un filtro libre, llamado Filtro de Fréchet. Más en general. Para un conjunto infinito X, si definimos $COF(X)$ de manera análoga, éste es un filtro.*

Ejemplo 6.39. *Para cualquier conjunto X y para cada $x \in X$ la colección $\{F \subseteq X : x \in F\}$ es un ultrafiltro, a un ultrafiltro con esta forma se le conoce como un ultrafiltro principal.*

Es fácil observar que la intersección de una familia de filtros sobre un mismo conjunto es de nuevo un filtro. De manera similar si consideramos familias anidadas de filtros, su unión será un filtro. Si consideramos $\mathcal{A}$ la familia de todos los filtros sobre ω que contienen al filtro de Fréchet, la unión de una cadena en $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$ es de nuevo un filtro. Aplicando el Lema de Zorn podemos encontrar un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que contiene al filtro de Fréchet. En general, un filtro sobre X es libre si y sólo si contiene al filtro $COF(X)$. La existencia de ultrafiltros libres no es algo que pueda probarse desde la teoría *ZF*.

A continuación mostramos cuales son las familias de conjuntos que pueden extenderse a un filtro.

Definición 6.40. Decimos que una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ tiene la **propiedad de la intersección finita** (*PIF*) si y sólo si para cualquier subfamilia $E \subseteq \mathcal{F}$ finita $\cap E \neq \emptyset$. Diremos que la familia tiene la **propiedad de la intersección finita fuerte** (*PIFF*) si no sólo $\cap E \neq \emptyset$, si no que además $\cap E$ es infinita.

Lema 6.41. *Sea X un conjunto:*

i) Si $\mathcal{E} \subseteq \wp(X)$ tiene la PIF, entonces existe $\mathcal{F}$ un filtro en X tal que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$.

ii) Si X es infinito y $\mathcal{E} \subseteq \wp(X)$ es tal que $COF(X) \cup \mathcal{E}$ tiene la PIFF, entonces existe un filtro libre en X, $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$.

Demostración. *i*) La familia $\{G \subseteq X : \exists H \subseteq \mathcal{E}\,(|H| < \omega \text{ y } \cap H \subseteq G)\}$ es, por construcción, un filtro que contiene a $\mathcal{E}$.

ii) Aplicamos el inciso *i*) para obtener $\mathcal{U}$ y, como dijimos antes, $\mathcal{U}$ es libre si y sólo si contiene a $COF(X)$. □

Lema 6.42. *Para un conjunto X y un filtro $\mathcal{F}$ sobre X son equivalentes:*

i) $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.

ii) Para cualesquiera $F, G \subseteq X$ si $F \cup G \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}$ o $G \in \mathcal{F}$.

iii) $\mathcal{F}$ es un filtro maximal respecto a la contención.

iv) Si $Y \subseteq X$ y $\mathcal{F} \cup \{Y\}$ es una familia con la PIF, entonces $Y \in \mathcal{F}$.

Demostración. *1* ⇒ *2*. Suponemos *1.*, que $F \cup G \in \mathcal{F}$ y que por el contrario $F, G \notin \mathcal{F}$. Deducimos por *1.* que $X \setminus (F \cup G) = (X \setminus F) \cap (X \setminus G) \in \mathcal{F}$, una contradicción.

2 ⇒ *3*. Sea $\mathcal{U}$ un filtro tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Afirmamos que para cada $G \in \mathcal{U}$, $G \in \mathcal{F}$. Esto se debe a que $X = (X \setminus G) \cup G \in \mathcal{F}$, a *2.* y a que $\mathcal{F}$ está contenido en el filtro $\mathcal{U}$.

3 ⇒ *4*. De otra manera, la familia $\mathcal{F} \cup \{Y\}$ puede extenderse a un ultrafiltro que contiene propiamente a $\mathcal{F}$.

4 ⇒ *1*. Para cualquier $A \subseteq X$, se tiene que alguna de las dos familias $\{A\} \cup \mathcal{F}$ o $\{X \setminus A\} \cup \mathcal{F}$ tiene la PIF. De otra manera, sean $F, G \in \mathcal{F}$ tales que $A \cap F = \emptyset$ y $(X \setminus A) \cap G = \emptyset$ ocurre entonces que $G \subseteq A$ y $F \subseteq \setminus A$. De donde $\emptyset \in \mathcal{F}$ una contradicción. El resto se sigue de *4*. □

Finalmente, observamos que todo filtro es cerrado bajo intersecciones de familias de cardinalidad menor a ω. Esta propiedad motiva el concepto de filtro κ-completo.

Definición 6.43. Sea κ un cardinal infinito. Un filtro $\mathcal{F}$ se llama **κ-completo** si para toda $\lambda < \kappa$ y toda familia $E \subseteq \mathcal{F}$ tal que $|E| = \lambda$, $\cap E \in \mathcal{F}$.

Proposición 6.44. *Un ultrafiltro sobre X, $\mathcal{U}$, es κ-completo si y sólo si para toda partición de X, $\mathcal{P}$, tal que $|\mathcal{P}| < \kappa$ existe $P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{U}$.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ-completo y sea $\mathcal{P} = \{P_\alpha : \alpha < \lambda < \kappa\}$ es una partición de X. Si para cada $\alpha < \lambda$, $P_\alpha \notin \mathcal{U}$, para toda $\alpha < \lambda$, $Q_\alpha = X \setminus P_\alpha \in \mathcal{U}$. De donde $\emptyset = \cap\{Q_\alpha : \alpha < \lambda\} \in \mathcal{U}$, lo que es una contradicción.

Por otro lado, supongamos que para cada partición $\mathcal{P}$ de X de cardinalidad menor a κ, existe $P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{U}$ y considerémos una familia $\{G_\alpha : \alpha < \lambda < \kappa\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\cap\{G_\alpha : \alpha < \lambda\} = G \notin \mathcal{U}$. De esa manera $\{X \setminus G_\alpha : \alpha < \lambda\} \cup \{G\}$ es una partición de X de cardinalidad $\lambda < \kappa$ que no comparte elementos con $\mathcal{U}$. Y obtenemos de nuevo una contradicción. □

La existencia de ultrafiltros libres κ-completos está íntimamente relacionada con los grandes cardinales como se observa en el Capítulo 2.

BIBILIOGRAFÍA

[1] John L. Bell, *Measurable Cardinals*, Expositions and Course Notes, Department of Philosophy, University of Western Ontario.

[2] Edgar A. Bering IV, *A brief introduction to measurable cardinals*, Waterloo Mathematics Review 2 (2013), no. 2, 2–13.

[3] Andreas Blass, *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum*, por aparecer en Handbook of Set Theory.

[4] Frank R. Drake, *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 76, North-Holland Publishing Co., London, 1974.

[5] R. Engelking, *General Topology*, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[6] W. G. Fleissner, Normal Moore spaces and large cardinals, Handbook of set Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, New York, and Oxford, 1984, pp. 733-760.

[7] D. H. Fremlin, *Measure Theory: the Broad Fundations*, **completar** vol 2

[8] L. Gillman y M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1960.

[9] Lorenz J. Halbeisen, *Combinatorial Set Theory, with a gentle introduction to forcing*, Springer, Berlin, 2011.

[10] Paul R. Halmos, *Measure theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1974.

[11] E. Hewitt y K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[12] Richard E. Hodel, *Classical Metrization Theorems*, Encyclopedia of General Topology, Durham, NC, USA,2002, pp.228-230.

[13] Michael Hrušák, *Almost Disjoint Families and Topology*, Recent Progress in General Topology III, Atlantis Press, 2014, 601-638.

[14] Thomas Jech, *Set theory*, Academic Press, New York, 1978.

[15] K. Kunen, *Some applications of iterated ultrapowers in set theory*, Ann. Math. Logic 1, 179-227, 1970.

[16] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[17] S. Mrówka, *Some set-theoretic constructions in topology*, Fundamenta Mathematicae 94.2 (1977): 83-92.

[18] J. Kulesza, R. Levy y P. Nyikos, *Extending Discrete-valued Functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 324(1991), no.1, 293-302.

[19] Peter J. Nyikos, *A History of the Normal Moore Space Problem*, Handbook of the History of General Topology Vol. 3, Springer-Science+Business Media, New York, 2001, pp. 1179

[20] Ulises Ariet Ramos García,*Algunos Cardinales Pequeños No Numerables y su Relación con la Topología*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2004.

[21] Robert M. Solovay, A Model of Set-Theory in Wich Every Set of Reals is Lebesgue Measurable, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol 92, No.1, 1-56, 1970.

[22] E. K. Van Dowen, The Integers and Topology, Handbook of set Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, New York, and Oxford, 1984, pp. 111-167.

[23] Russell C. Walker, *The Stone–Čech compactification*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.