



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

**MODELOS ESTOCÁSTICOS DE TASA DE
INTERÉS. APLICACIÓN A MÉXICO.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

PRESENTA:

LUIS EDUARDO PAVÓN TINOCO

DIRECTOR DE TESIS:

M. C. RAÚL ÁLVAREZ DEL CASTILLO PENNA



MÉXICO D.F.

MES DE 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Act. Mauricio Aguilar González

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente.

Se le informa que se ha revisado el trabajo escrito:

“Modelos Estocásticos de Tasa de Interés. Aplicación a México.”

Realizado por **Luis Eduardo Pavón Tinoco** con número de registro **30626357-4** quien cubrió los créditos de la carrera de Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con el voto aprobatorio.

Director de Tesis M. C. Raúl Álvarez del Castillo Penna

Propietario Dr.

Propietario Dr.

Suplente Dr.

Suplente Dr.

Agradecimientos

"Si Buscas Resultados Distintos, No Hagas Siempre lo Mismo"
Albert Einstein

Resumen

El objetivo primordial de esta tesis es la estimación de curvas de rendimiento para instrumentos del mercado mexicano (Bonos M y Udibonos). Poniendo especial atención en los diferentes métodos que existen para la estimación de estas curvas. Se expone principalmente las ventajas y desventajas de utilizar métodos estocásticos sobre métodos determinísticos. En la segunda parte se muestra la aplicación de la estimación de las curvas de rendimientos en valuación de opciones sobre tasas de interés y extracción de información implícita. El principal aporte al mercado financiero es el comparativo entre estimar una curva de rendimiento del mercado mexicano bajo diferentes modelos existentes.

Abstract

The main objective of this thesis is the estimated of Yield Curve to Mexican securities (M Bond and Linked-Inflation Bond). Comparing between differents models that exist in the financial market. Also, I show the advantage and disadvantage between stochastics models and non-stochasticas models to Yield Curve. In the second part, I applied the estimated Yield Curve with the best model to valuate interest rate derivatives and extracting implied information in the estimated Yield Curve. The main contribution in the Mexican´s Financial Market is the comparative between the differnts models to estimated the Yield Curve with Mexican securities.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	V
Motivación	XIII
Introducción	XV
1. Principio de finanzas matemáticas.	1
1.1. Conceptos básicos	1
1.2. Modelo Matemáticos para el Precio de un Bono	8
1.3. Teoría de la estructura temporal	10
2. Estimación de curvas teóricas de tasas de interés	13
2.1. Estimación de la Curva de Rendimiento a través de métodos numéricos.	15
2.1.1. Interpolación Lineal	16
2.1.2. Splines Cúbicos.	16
2.2. Estimación de la Curva de Rendimiento a través de modelos parametricos no estocásticos. . .	17
2.2.1. Modelo de Nelson-Siegel	18
2.2.2. Modelo Svensson	22
2.3. Estimación de la Curva de Rendimiento a través de modelos estocásticos.	26
2.3.1. Marco Teórico	28
2.4. Modelos de Estructura Afín.	30
2.4.1. Modelo Vasicek	31
2.4.2. Modelo Cox-Ingersoll-Ross	36
2.5. Conclusión	41
3. Valuación de opciones sobre tasas de interés.	43
3.1. Mercado de Derivados	44
3.2. Derivados sobre tasas de interés	46
3.3. Modelo Black 76	48
3.4. Aplicación de los modelos en la valuación de opciones.	52
3.5. Conclusión	54
A. Fundamentos de Probabilidad	55

A.1. Probabilidad	55
A.2. Procesos Estocásticos.	56
A.3. Calculo Estocástico.	58
B. Teoría de Bonos	61
C. Estimación por método histórico de los modelos estocásticos.	63
D. Códigos	81
D.1. Códigos de teoría de bonos.	81
D.2. Códigos del Modelo Nelson-Siegel.	84
D.3. Códigos para los modelos Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross.	85
D.3.1. Método transversal	85
D.3.2. Método Histórico	88
Bibliografía	97

Índice de gráficas

1.	Tasa de referencia para países seleccionados	XVII
2.	Diferentes curvas de rendimiento.	XVIII
1.1.	Curva cupón cero.	3
1.2.	Gráfica de la función $t \mapsto P(t, T)$	4
2.1.	Superficie de tasas de interés. Bonos M.	14
2.2.	Superficie de tasas de interés. Udibonos.	15
2.3.	Curva Yield Generada por el Modelo Nelson-Siegel.	22
2.4.	Factor de descuento generado por el Modelo Nelson-Siegel.	23
2.5.	Modelo Svensson contra Modelo Nelson-Siegel.	24
2.6.	Curva Yield Generada por el Modelo Nelson-Siegel.	26
2.7.	Factor de descuento generado por el Modelo Nelson-Siegel.	27
2.8.	Simulación del Modelo Vasicek con parámetros, $r_0 = 2\%$, $k = 0,045$, $\theta = 3,4\%$, $\sigma = 1,1\%$	32
2.9.	Curva de rendimiento de Udibonos estimada bajo el modelo Vasicek.	35
2.10.	Curva de rendimiento de Bonos estimada bajo el modelo Vasicek.	37
2.11.	Simulación del Modelo CIR con parámetros, $r_0 = 3\%$, $k = 2,11$, $\theta = 3,2\%$, $\sigma = 3,7\%$	39
2.12.	Curva de rendimiento de Bonos estimada bajo el modelo CIR.	41
3.1.	Tipo de subyacente: — Tipo de Cambio, — Tasas de interés, — Acciones, — Materias primas, — CDS, — No identificado	45
3.2.	Vencimiento: — FRA, — Swaps, — Opciones.	45
3.3.	Vencimiento: — Un año o menos, — Entre un año y cinco años, — Un año o menos,.	46
C.1.	Simulación del comportamiento del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo Vasicek con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.2.	Distribución a un año para el periodo correspondiente del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo Vasicek con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.3.	Curva de descuento para el periodo correspondiente bajo el modelo Vasicek para el Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo Vasicek con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.4.	Simulación del comportamiento del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo Vasicek con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.5.	Distribución a un año para el periodo correspondiente del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo Vasicek con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.6.	Curva de descuento para el periodo correspondiente bajo el modelo Vasicek para el Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo Vasicek con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.7.	Simulación del comportamiento del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo CIR con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.8.	Distribución a un año para el periodo correspondiente del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo CIR con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.9.	Curva de descuento para el periodo correspondiente bajo el modelo CIR para el Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo CIR con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.10.	Simulación del comportamiento del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo CIR con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.11.	Distribución a un año para el periodo correspondiente del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo CIR con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	
C.12.	Curva de descuento para el periodo correspondiente bajo el modelo CIR para el Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo CIR con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente	

Índice de tablas

1.1. Formas en las que Devenga la Tasa de Interés.	5
2.1. Datos del Mercado Mexicano de Bonos	21
2.2. Mínimos de las Funciones Objetivo. Modelo Nelson-Siegel	21
2.3. Datos del Mercado Mexicano de Bonos	25
2.4. Mínimos de las Funciones Objetivo. Modelo Nelson-Siegel	25
2.5. Modelos Estocásticos de Tasa Corta.	28
2.6. Parámetros que determinan la estructura afín para los modelos Vasicek y CIR.	30
2.7. Modelo Empleados por los Bancos Centrales.	42
3.1. Opciones sobre tasas de interés dentro y fuera del dinero.	48
3.2. Prima como porcentaje del nominal de una opción cap ATM bajo Cetes 28 días.	53
3.3. Prima como porcentaje del nominal de una opción floor ATM bajo Cetes 28 días.	53
3.4. Prima como porcentaje del nominal de una opción cap ATM bajo Cetes 28 días.	53
3.5. Prima como porcentaje del nominal de una opción floor ATM bajo Cetes 28 días.	54
C.1. Errores entre el valor estimado y el valor real en el método Montecarlo.	64
C.2. Resumen estadístico de la curva de Cetes para el periodo del 6 de junio de 2014 a 9 de julio de 2015.	64
C.3. Resumen estadístico de la curva de Cetes para el periodo del 8 de marzo de 2013 a 9 de julio de 2015	65
C.4. Estimación bajo el modelo Vasicek de la curva de Cetes para el periodo del 6 de junio de 2014 a 9 de julio de 2015	
C.5. Estimación bajo el modelo Vasicek de la curva de Cetes para el periodo del 8 de marzo de 2013 a 9 de julio de 2015	
C.6. Estimación bajo el modelo Cox-Ingersoll-Ross de la curva de Cetes para el periodo del 6 de junio de 2014 a 9 de julio de 2015	
C.7. Estimación bajo el modelo Cox-Ingersoll-Ross de la curva de Cetes para el periodo del 6 de junio de 2014 a 9 de julio de 2015	

Motivación

La estimación de la curva de rendimiento ha sido abordada por diferentes trabajos teóricos y prácticos, en miras de mejorar el ajuste que se obtenga a través del modelo teórico contra la curva de mercado. Al generar una curva teórica consistente con la curva de mercado el inversionista puede valorar instrumentos financieros, el gobierno federal puede usar esta curva para definir a que plazo o a que rendimiento quiere emitir un nuevo bono, el banco central puede medir a través de la curva de rendimiento los efectos de política monetaria.

Además la curva de rendimiento contiene información implícita, tal como inflación o expectativas de cambios en la tasa de referencia del banco central, mientras que una curva de rendimiento teórica permite observar primas por liquidez (si un bono esta muy concentrado por algún participante del mercado), prima por plazo (*term premium*), primas de riesgo, etc.

Se busca a largo plazo que este trabajo pueda ayudar a diferentes participantes del mercado a estimar la curva de rendimiento bajo el mejor modelo que ajuste a los instrumentos de deuda que emite el gobierno federal mexicano. Con esto valorar de mejor manera derivados de tasa de tasa de interés, que el banco central pueda medir de mejor manera los canales de transmisión de su política monetaria en la curva de rendimiento o que ayude al gobierno federal en la estimación de la tasa de rendimiento en nuevas emisiones de bonos.

Introducción

La economía de un país está determinada por ciertas variables macroeconómicas como lo son tasas de interés, paridad cambiaria, inflación, tasa de desempleo, producto interno bruto (PIB), etc. De todas estas variables, los bancos centrales pueden incentivar el crecimiento económico alterando la paridad cambiaria o las tasas de interés, esto a través de política cambiaria ¹ o política monetaria. Sin embargo, la estructura de tasa de interés se ve afectada principalmente por las decisiones que tenga el organismo encargado de la política monetaria, concepto que se define a detalle a continuación.

Definición 1 (Política Monetaria). Por política monetaria se entiende al uso de la liquidez monetaria como variable para controlar estabilidad económica, es decir, mantener una inflación baja y estable.

Sin embargo, los Banco Centrales o ministros de finanzas no pueden controlar la inflación directamente, para esto utilizan instrumentos como la tasa de interés.

Definición 2 (Tasa de Interés). La tasa de interés es la compensación que paga el prestatario por usar el capital de un prestador, así que la tasa de interés puede entenderse como una forma de renta que el prestamista paga al prestador compensándolo por el no uso de su capital.

Una definición alternativa es que el interés es el precio del dinero por unidad de tiempo, es decir, el porcentaje de crecimiento o decrecimiento de este activo en un determinada periodo.

Por otra parte, la tasa de interés desempeña un papel fundamental en el proceso de ahorro y prestamos, ya que conforme las tasas de interés se eleve, los demandantes de fondos no encontraran redituable pedir préstamos y se les expulsara del mercado, en tanto que se les inducirá a los inversionistas a demandar más instrumentos de deuda para aprovechar las tasa de interés más altas.

Por lo tanto, dado el movimiento que decida el Banco Central sobre la tasa de interés la base monetaria se verá afectada. La política montaría tiene dos vertientes:

Política Monetaria Expansiva: Si el organismo encargado de manejar la política monetaria decide aumentar la cantidad de dinero dentro del sistema, esta institución puede decidir bajar la tasa de interés. Esto fomenta el gasto y en corto plazo puede incentivar el crecimiento económico. A esto se le llama política monetaria expansiva.

¹ Es una rama de la política económica la cual se refiere al manejo del tipo de cambio. A grandes rasgos esta puede dividirse en dos partes:

- i) **Tipo de Cambio Fijo:** La autoridad financiera del país (Banco Central o Ministro de Finanzas) determina un tipo de cambio objetivo. Con esto, el organismo competente se encarga de vender o comprar la divisa extranjera para compensar una posible demanda u oferta de esta divisa tal que ocasione que el tipo de cambio fluctué fuera del objetivo. Este mecanismo implica un manejo constante de las reservas internacionales para lograr el objetivo de tipo de cambio.
- ii) **Tipo de Cambio de Libre Flotación:**El tipo de Cambio está determinado por la Ley de Oferta y Demanda que se observa en el mercado cambiario. Los Bancos Centrales no utilizan de manera constante sus reservas internacionales, ya que solo son empleadas para el apoyar el buen comportamiento del mercado cambiario.

Política Monetaria Restrictiva: Si el organismo encargado del manejo de la política monetaria decide disminuir su cantidad de dinero en el sistema, la institución puede optar por aumentar la tasa de interés. Este movimiento implica un mayor ahorro lo que lleva a un menor gasto dentro de la economía. A esto se le llama política monetaria restrictiva.

Las implicaciones que tiene el manejo de la política monetaria en la inflación son:

Si las tasas de interés suben, el ahorro se incrementa y esto se traduce en un menor gasto. Por ende los productores deben compensar esta baja en la demanda de sus productos con una caída en los precios, es decir un descenso en la inflación. Ahora, si las tasa de interés bajan, el ahorro se disuado y esto se traduce en mayor gasto, debido al incremento en la demanda de ciertos productos, lo ofertantes de estos deciden incrementar los precios, es decir un aumento en la inflación.

Para el caso Mexicano, Banco de México es el encargado del manejo de la política monetaria. El mandato constitucional de Banxico es proveer a la economía del país de moneda nacional y su objetivo primordial es procurar la estabilidad de precios (inflación), cuya principal herramienta es la tasa de interés objetivo, la cual es empleada como ancla nominal para mantener la inflación en el rango que determine adecuado la Junta de Gobierno. Actualmente el rango objetivo para la inflación es 3% +/- 1%.

Sin embargo, la tasa de referencia y la que es empleada en diversos contratos financieros es la tasa TIIIE (Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio)², que es la tasa de fondeo bancario (tasa a la cual se realizan los préstamos interbancarios) más aproximadamente 30 puntos base, TIIIE se empleó a partir de 1995 y su principal objetivo es reflejar las condiciones de Mercado de Dinero Interbancario en México, los plazos de esta tasa son 28 días, 91 días y 182 días.

A nivel internacional cada banco central tiene diferentes mandatos, por ende sus objetivos están anclados en diferentes variables macroeconómicas. Por ejemplo:

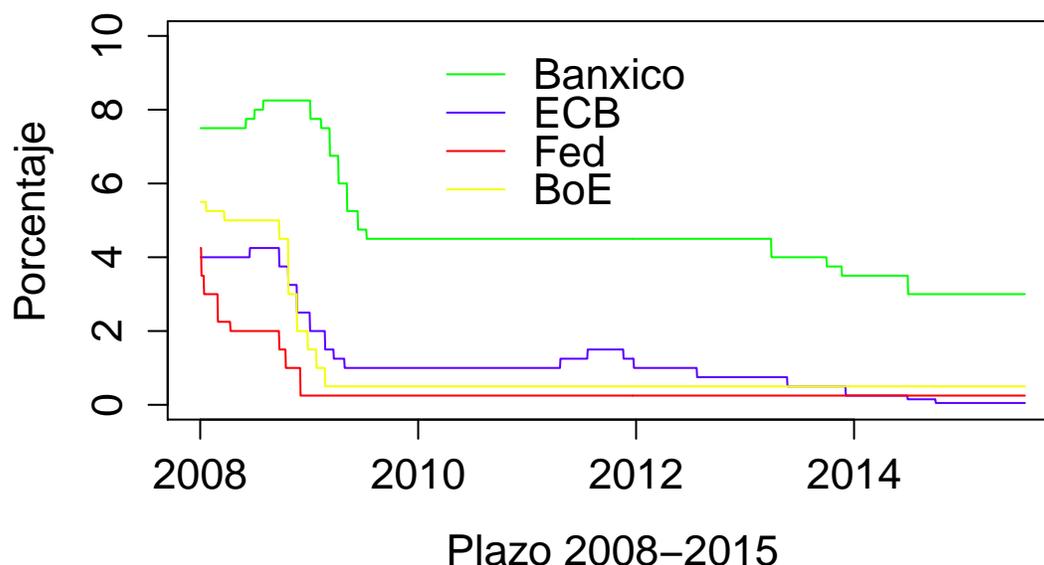
Federal Reserve: La Reserva Federal tiene un mandato dual, por un lado el congreso de Estados Unidos le ha encomendado la estabilidad de precios, así como promover un entorno de pleno empleo. Por pleno empleo no se debe considerar un 100% de ocupación, si no que se debe garantizar que el desempleo se mantenga en niveles mínimos. La política monetaria de Estados Unidos es manejada a través de la tasa de interés de fondeo (Fed Funds) en la cual se fija un rango de operación (Actualmente el rango es 0% a 0.25%).

Bank of England: El Banco de Inglaterra tiene por mandato la estabilidad de precios (baja inflación), así como apoyar al gobierno en sus objetivos de crecimiento y desempleo. La principal herramienta de política monetaria es la tasa de interés de referencia (BOE Rate). La estabilidad de precios la definen como un objetivo de inflación del 2% (Su rango objetivo es del 2% +/- 1%).

European Central Bank: El Banco Central Europeo tiene por principal objetivo mantener la estabilidad de precios. Este banco central busca mantener su inflación por debajo del 2%, su principal herramienta es la tasa de interés de referencia como ancla nominal.

²En el contexto internacional, la tasa de referencia es la tasa LIBOR (London Interbank Offer Rate) la cual es usada en diversos contratos financieros.

Tasas de interés de referencia



Gráfica 1: Tasa de referencia para países seleccionados

Como se observa la tasa de interés es empleada en casi todos los casos para el manejo de la política monetaria en el mundo, por ende las tasas de interés (en un contexto generalizado la curva de tasas de interés o estructura de plazo de tasa de interés, concepto que se define a continuación) se ven afectado por el entorno macroeconómico de cada país.

Definición 3 (Estructura de Plazo de Tasa de Interés.). La estructura de plazo es la relación que hay entre las tasas de interés y el plazo de vencimiento. Esta se puede ilustrar mejor con un gráfico de los rendimientos³ de varios instrumentos financieros diferidos solo en el plazo. Dicho gráfico se conoce como Curva de Rendimiento, la cual se construye siguiendo una serie de pasos:

- i) Seleccionar una lista de instrumentos de renta fija del mismo emisor que se encuentren en circulación a diferentes plazos.
- ii) Determinar la tasa de interés que un inversionista ganaría si lo compra en la fecha de emisión o de valuación y lo mantiene hasta el vencimiento.
- iii) Tomar los rendimientos para cada valor y su correspondiente plazo, marcar este punto sobre el plano.
- iv) Definir una función matemática que ajuste de la mejor manera estos puntos .

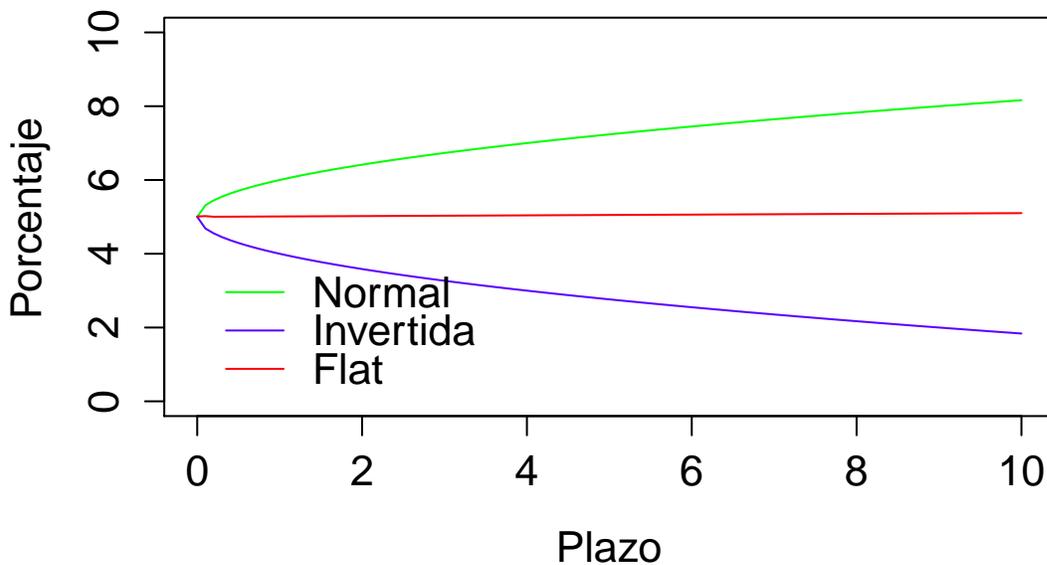
Muchos economistas mencionan que la curva de rendimiento “normal” es aquella con pendiente positiva, dicha curva sugiere que los inversionistas normalmente necesitan una tasa de interés más alta para mantener dichos instrumentos a plazos largos, ya que el inversionista requiere un premio en forma de rendimientos mayores para compensar el riesgo adicional por pérdidas de capital asociado a plazos mayores. Sin embargo, en la economía se han presentado curvas de otro tipo, por ejemplo, una curva con pendiente negativa indica que el inversionista prefiere tener posiciones largas en instrumentos de largo plazo contra aquellos de corto plazo.

³El concepto de rendimiento se usa algunas veces de manera indistinta con el de tasa de interés, aun que el primer término está referido al prestamista.

Otro caso que se ha presentado son aquellas curvas que tienen prácticamente pendiente cero, lo que sugiere que al inversionista le es indiferente el plazo a invertir.

Es decir, en la curva de tasas de interés se reflejan ciertas variables económicas, como los son la inflación. Además la curva de rendimientos no solo se utiliza para la extracción de información económica, puede ser utilizada para valorar instrumentos financieros como los son Bonos o Derivados. Por esto, es importante tener un modelo el cual ajuste de manera adecuada a la curva de mercado. Se busca hacer un análisis detallado sobre los siguientes modelos empleados para la construcción de curvas de rendimiento teóricas. Los modelos son: Estimación lineal, Splines, Nelson-Siegel, Svensson o Nelson-Siegel extendido, Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross. Para cada uno de estos modelos se comparará el ajuste con la curva de mercado y su correspondiente curva de descuento.

Tipo de curvas de interés



Gráfica 2: Diferentes curvas de rendimiento.

Principio de finanzas matemáticas.

1.1. Conceptos básicos

Los bonos son instrumentos financieros que pueden estar indexados a una tasa fija o una tasa variable, son contratos emitidos por instituciones públicas, privadas, bancos y gobierno con el principal fin de obtener financiamiento en el mercado. El emisor se compromete a devolver la inversión inicial al comprador más una compensación, llamada intereses o cupones, estos cupones pueden ser del tipo fijo o variable. Los bonos se pueden clasificar por: entidad emisora, riesgo de mercado¹, riesgo de contraparte², vencimiento, número de cupones que se le entrega al inversionista y tasa de interés, siendo esta última variable la más importante para la determinación del precio del bono. A partir de este instrumento se desarrolla la mayor parte de la teoría de Finanzas Matemáticas, en el Apéndice 2 se encuentra un mayor análisis acerca de las variables que afectan el precio de un bono, método para determinar dicho precio y las diferentes medidas de sensibilidad. Ahora, se describe los principios de finanzas matemáticas necesarios para modelar la estructura de tasas de interés.

Definición 4 (Cuenta Bancaria). Definimos $B(t)$ como el valor al tiempo $t \geq 0$ de una cuenta bancaria, suponemos que $B(0) = 1$ y la cuenta evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial:

$$dB(t) = r_t B(t) dt \text{ con } B(0) = 1 \quad (1.1)$$

Donde r_t es una función positiva del tiempo y r_t es llamada tasa corta o tasa spot.

Al analizar la cuenta bancaria al tiempo $t + \Delta t$ resulta:

$$\begin{aligned} B(t + \Delta t) &= B(t) + B(t)r_t\Delta t \\ B(t + \Delta t) &= B(t)[1 + r_t]\Delta t \\ \Rightarrow \left(\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{B(t)} \right) &= r_t\Delta t \end{aligned}$$

Esto nos indica que esta cuenta bancaria en el intervalo $[t, t + \Delta t)$ crece a una tasa de r_t .

Se sabe que un concepto importante en matemáticas financieras es el valor presente o factor de descuento, para desarrollar esta definición suponemos que r es constante, entonces si en el tiempo cero depositamos A u.m.

¹Es la pérdida potencial en el valor de los activos financieros debido a movimientos adversos en los factores que determinan su precio, en este caso la tasa de interés.

²Existe cuando una de las partes del contrato financiero es incapaz de cumplir con las obligaciones contraídas, provocando que la otra parte incurra en una pérdida.

al tiempo t tendremos $AB(t)$ u.m. , análogamente para el tiempo $t < T$ se tendrá $AB(T)$ u.m. , ahora suponiendo que al tiempo T se tendrá 1 u.m. entonces:

$$AB(T) = 1$$

por lo tanto inicialmente se tuvo $A = \frac{1}{B(T)}$ u.m. de esto se puede concluir que en el tiempo $t < T$ se tienen $AB(t) = \frac{B(t)}{B(T)}$ u.m. . Dado este análisis se introduce la siguiente definición.

Definición 5 (Factor de Descuento Estocástico). El Factor de Descuento Estocástico $D(t, T)$ entre dos fechas t y T es la cantidad al tiempo t que es equivalente a una unidad monetaria pagada al tiempo T .

$$D(t, T) := \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \quad (1.2)$$

El bono más simple que existe en el mercado es el bono cupón cero, este instrumento cotiza a descuento, es decir, en vencimiento le da a su poseedor 1 u.m. sin cupones intermedios, a continuación se define.

Definición 6 (Bono Cupón Cero o Descuento Puro). Un Bono Cupón Cero con vencimiento en T es un contrato que garantiza a su poseedor el pago de 1 u.m. al tiempo T , sin pagos intermedios, el valor de contrato en el instante $t < T$ es denotado por $P(t, T)$ o $T - Bono$, donde $P(T, T) = 1 \forall T$.

Teóricamente se asumen como ciertas las siguientes hipótesis

- i) Para toda $T > 0$ existe en el mercado un $T - Bono$.
- ii) $P(t, T)$ es diferenciable en T .

El primer supuesto no se ajusta a las condiciones del mercado, ya que no se negocian bonos para cualquier maduración³, el segundo supuesto es meramente técnico ya que este implica que la estructura de plazo del bono cupón cero o curva de descuento es una curva suave, como se muestra en la siguiente gráfica , la definición se da a continuación.

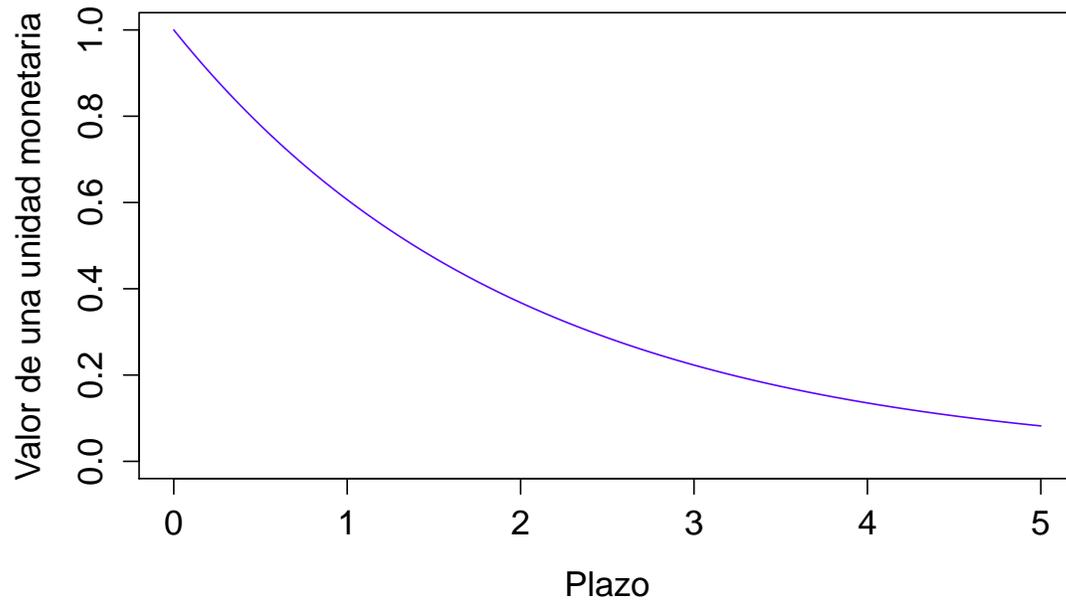
Definición 7 (Curva Bono Cupón Cero). La curva de descuento o estructura de plazo del bono cupón cero es la grafica de la función:

$$T \longrightarrow P(t, T) \text{ con } T > t$$

Para tasas positivas la función decrece desde $P(T, T) = 1$.

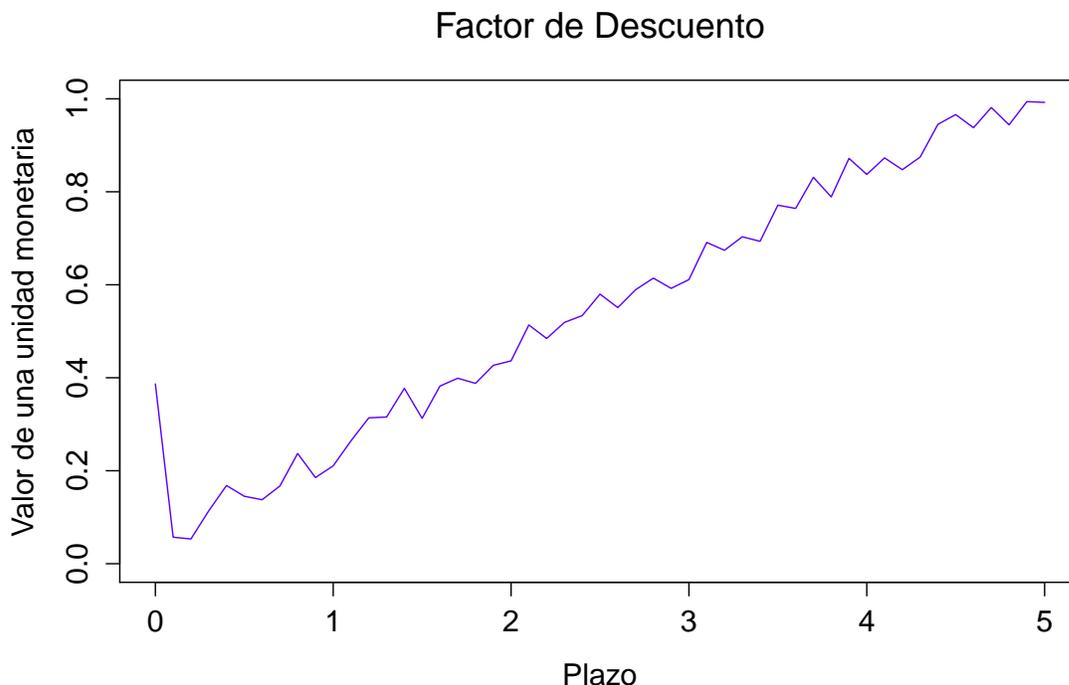
³En México los CETES (Certificados de Tesorería) normalmente tienen una maduración de 28, 91, 182 y 364 días.

Curva cupón cero



Gráfica 1.1: Curva cupón cero.

Nota 1. Si r_t es determinístico entonces la función $D(\cdot, \cdot)$ es una función determinística y se cumple $D(t, T) = P(t, T)$ para todo par (t, T) .



Gráfica 1.2: Gráfica de la función $t \mapsto P(t, T)$

Si se tiene un instrumento financiero, por ejemplo un $T - Bono$, en la fecha t el tiempo de vencimiento de dicho contrato es la cantidad $T - t$ de tiempo en años, ahora si t y T están expresadas en el formato día/mes/año, la cantidad de días que hay entre estas dos fechas no es única ya que dependerá de la forma que lo calcula el mercado, como se muestra a continuación.

Definición 8 (Convención de mercado para los días de descuento). Denotamos por $\tau(t, T)$ la medida de tiempo elegida entre t y T que es la fracción de año de dichas fechas, la elección para medir esta cantidad es lo que se conoce como convención de días y son:

i) Actual/365

En esta convención se toman los años de 365 días y la fracción de año es la diferencia que hay entre las dos fechas en días, es decir

$$\frac{\text{días que hay entre } t \text{ y } T}{365}$$

ii) Actual/360

En esta convención se toman los años de 360 días y la fracción de año es la diferencia que hay entre las dos fechas en días, es decir

$$\frac{\text{días que hay entre } t \text{ y } T}{360}$$

iii) 30/360

En esta convención los meses se toman de 30 días y años de 360 días, si las fechas tienen el siguiente formato $t = d_1/m_1/y_1$ y $T = d_2/m_2/y_2$ entonces se tiene que la fracción de año es:

$$\frac{(30 - d_1)_+ + \min(d_2, 30) + 360(y_2 - y_1) + 30(m_2 - m_1 - 1)_+}{360}$$

Nota 2. Inglaterra se basa en la convención Actual/365 mientras que en México y Estados Unidos utilizan Actual/360.

En la siguiente tabla se resume las diferentes formas en que devengan las tasas spot que aplican del tiempo t con vencimiento T , esta es una aplicación directa a las definiciones anteriores.

Forma en la que Devenga	Tasa Spot	Factor de Descuento
Continúa	$R(t, T) := \frac{-\ln P(t, T)}{\tau(t, T)}$	$P(t, T) = e^{-R(t, T)\tau(t, T)}$
Simple	$L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}$	$P(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)}$
Compuesta Anualmente	$Y(t, T) := \frac{1}{[P(t, T)]^{\frac{1}{\tau(t, T)}}} - 1$	$P(t, T) = \frac{1}{(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)}}$
Compuesta k-veces por año	$Y^k(t, T) := \frac{k}{[P(t, T)]^{\frac{1}{k\tau(t, T)}}} - k$	$P(t, T) = \frac{1}{(1 + \frac{Y^k(t, T)}{k})^{k\tau(t, T)}}$

Tabla 1.1: Formas en las que Devenga la Tasa de Interés.

Se define de manera más formal la estructura temporal de tasas

Definición 9 (Curva de Rendimiento). La estructura de plazo de tasas de interés o curva de rendimiento es un grafico en el tiempo t de todas las tasas simples con maduración menor o igual a un año y todas las tasas compuestas con maduración mayor a un año, es decir:

$$T \longrightarrow \begin{cases} L(t, T) & t \leq T \leq t + 1 \text{ años} \\ y(t, T) & T > t + 1 \text{ años} \end{cases} \quad (1.3)$$

Una tasa de interés importante es la llamada tasa forward, está tasa puede ser observada hoy para inversiones futuras, está caracterizada por tres tiempos $t < T < S$, en el tiempo t se observa la tasa, en el instante T empieza la inversión y en S madura; la tasa forward se define a través de un contrato llamado Forward Rate Agreement.

Definición 10 (Forward Rate Agreement). Es un contrato que involucra tres instantes de tiempo $t < T < S$ este le da a su poseedor una tasa que aplica entre T y S es pactada en t , es decir, al vencimiento recibe el poseedor $\tau(T, S)kN$ u.m. y por esto da un pago de $\tau(T, S)L(T, S)N$, donde N es el valor nominal del contrato. Entonces el valor al vencimiento o al tiempo S de dicho contrato es:

$$N\tau(T, S)[K - L(T, S)] \quad (1.4)$$

Sabiendo que $L(T, S) = \frac{1 - P(T, S)}{\tau(T, S)P(T, S)}$, sustituyendo esta expresión en (1.4) resulta

$$N \left[\tau(T, S)K - \frac{1}{P(T, S)} + 1 \right] \quad (1.5)$$

Dada esta definición la pregunta natural es ¿Cuánto vale el contrato a la fecha de emisión?, es decir, en el instante t . Para esto definimos $A := \frac{1}{P(T, S)}$ u.m. en el tiempo S , entonces el monto A al instante T se obtiene de multiplicar $AP(T, S) = \frac{1}{P(T, S)}P(T, S) = 1$ por lo tanto al tiempo t , A vale $P(t, T)$.

Ahora definiendo $B := \tau(T, S)k + 1$ en el instante S , el valor de B en el tiempo t es

$$P(t, S)B = P(t, S)\tau(T, S)k + P(t, S)$$

De esto se concluye que el valor del Forward Rate Agreement en el instante t es

$$F.R.A(k) := N[\tau(T,S)KP(t,S) + P(t,S) - P(t,T)] \quad (1.6)$$

Con esta expresión la deducción de la tasa forward es natural y se da a continuación.

Definición 11 (Tasa de Interés Forward Compuesta de Forma Simple). La tasa de interés forward o tasa forward es aquella tasa que aplica del tiempo T a S y es pactada en t con $t < T < S$, se denota por $F(t;T,S)$ y se define como

$$F(t;T,S) = \frac{1}{\tau(T,S)} \left[\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1 \right] \quad (1.7)$$

Que se obtiene de igualar a cero la expresión (1.6) y despejar a k .

Nota 3. Sustituyendo en (1.6) la expresión (1.7) resulta

$$F.R.A(k) = NP(t,S)\tau(T,S)[k - F(t;T,S)]$$

Ahora si el contrato Forward Rate Agreement le da a su poseedor una tasa que aplica del instante t a T con $t < T$, esto induce una nueva tasa forward.

Definición 12 (Tasa de Interés Forward Instantánea). La tasa de interés forward instantánea que aplica del instante t a T con $t < T$, está definida por:

$$f(t,T) := \lim_{S \rightarrow T^+} F(t;T,S) = - \lim_{S \rightarrow T^+} \frac{1}{P(t,S)} \frac{P(t,S) - P(t,T)}{S - T} = \frac{-1}{P(t,S)} \frac{\partial P(t,T)}{\partial T} = - \frac{\partial \ln[P(t,T)]}{\partial T}$$

Nota 4. Dada esta definición se da una nueva caracterización del bono cupón cero.

$$P(t,T) = \exp \left(- \int_t^T f(t,u) du \right) \quad (1.8)$$

Una tasa de interés clave en todos los modelos y por lo tanto fundamental en este trabajo es la tasa corta⁴ que se define a continuación.

Definición 13 (Tasa Corta). La tasa corta al tiempo t se define como:

$$r(t) := f(t,t) = \lim_{T \rightarrow t^+} f(t,T) \quad (1.9)$$

Una generalización de un Forward Rate Agreement es el Interest Rate Swap, que es un contrato donde dos partes o patas intercambian una tasa fija por una flotante (En la ingeniería financiera usualmente es LIBOR para el caso mexicano THIE) o viceversa, es decir, intercambio de tasa flotante a tasa fija, es un instrumento de cobertura, se presentan dos formas de cotización:

- i) **Swap pagadero de tasa fija :** Es un contrato que involucra un número de fechas futuras $T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n$ donde T_n es la maduración del Swap, una tasa fija k y el valor nominal del contrato denotado por N . Al instante T_i con $i = 1, \dots, n$ el poseedor del contrato

⁴Para el caso mexicano se le llama tasa de fondeo bancario.

- a) Paga $k\tau(T_{i-1}, T_i)N$.
 b) Recibe $F(T_{i-1}, T_i)\tau(T_{i-1}, T_i)N$.

Entonces el flujo de efectivo en T_i es $[F(T_{i-1}, T_i) - k]\tau(T_{i-1}, T_i)N$, es decir largo⁵ en un $F.R.A(K)$, por lo tanto utilizando (1.6) se tiene que el valor al tiempo $t \leq T_0$ del flujo en T_i es $N[P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) - k\tau(T_{i-1}, T_i)P(t, T_i)]$, por lo tanto el valor del contrato al tiempo $t \leq T_0$ es

$$\Pi_P = \sum_{i=1}^n P(t, T_i) ([F(T_{i-1}, T_i) - k]\tau(T_{i-1}, T_i)N) = N[P(t, T_0) - P(t, T_n) - k \sum_{i=1}^n P(t, T_i)\tau(T_{i-1}, T_i)]$$

Donde la ultima igualdad se da utilizando (1.6) y resolviendo la serie telescópica

$$\sum_{i=1}^n [P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)] = P(t, T_0) - P(t, T_n)$$

- ii) **Swap en el cual se recibe tasas fija:** Es un contrato que involucra las mismas condiciones que el instrumento pasado, pero al instante T_i con $i = 1, \dots, n$ el poseedor del contrato

- a) Paga $F(T_{i-1}, T_i)\tau(T_{i-1}, T_i)N$.
 b) Recibe $k\tau(T_{i-1}, T_i)N$.

Con esto el flujo de efectivo en T_i es $[k - F(T_{i-1}, T_i)]\tau(T_{i-1}, T_i)N$ lo que implica que el valor del contrato al instante $t \leq T_0$ es

$$\Pi_R = \sum_{i=1}^n P(t, T_i) ([k - F(T_{i-1}, T_i)]\tau(T_{i-1}, T_i)N) = N[k \sum_{i=1}^n P(t, T_i)\tau(T_{i-1}, T_i) + P(t, T_n) - P(t, T_0)]$$

Nota 5. Se tiene la siguiente relación para estos dos contratos

$$\Pi_P = -\Pi_R$$

En México la manera en que cotizan estos contratos son de acuerdo al número de revisiones de tasa, normalmente TIE que se da cada 28 días con plazos de 3 meses hasta 30 años, es decir, en el mercado se encuentran cotizaciones de swaps que van desde $3x1, 6x1, 9x1, 13x1, 65x1, 130x1, 195x1, 260x1$ y $390x1$, donde esta nomenclatura indica el número de revisiones de tasa de interés procedido de “x1”, cabe recalcar que la mayor liquidez de este instrumento se encuentra en los primero 10 años.

La manera en al que se negocian estos contratos es a través de la llamada tasa par swap, que se define a continuación.

Definición 14 (Tasa Par Swap). La tasa forward par swap o también llamada tasa par swap denotada por $R_{swap}(t)$ al tiempo $t \leq T_0$ es aquella tasa fija k tal que $\Pi_P = \Pi_R = 0$, entonces

$$R_{swap}(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n P(t, T_i)\tau(T_{i-1}, T_i)} \quad (1.10)$$

⁵Se tiene una posición corta en un contrato financiero si es emisor del mismo, se tiene una posición larga si es poseedor de dicho contrato.

1.2. Modelo Matemáticos para el Precio de un Bono

Se sabe que por (1.1) una cantidad $B(t)$ sigue la siguiente dinámica:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt$$

En esta sección se asume que $r(t)$ lleva una ley de un proceso estocástico con las características de tener trayectorias continuas (c.s.), ser un proceso markoviano continuo⁶ esto lleva a afirmar que $r(t)$ esta descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = v(t,r)dt + \rho(t,r)dW(t) \quad r(0) = r_0 \quad (1.11)$$

donde $v(t,r)$ es la media, $\rho(t,r)$ es la difusión del proceso y $W(t)$ es un \mathbb{P} -movimiento browniano.

Por otro lado sabemos que el precio de un $T - Bono$ esta caracterizado por dos variables, fecha de emisión (t) y fecha de maduración (T) pero este instrumento se puede pensar como una función de la tasa corta, *i.e.*

$$P(t, T) := P(t, T, r(t))$$

Sabiendo que $r(t)$ sigue una dinámica estocástica (1.11) entonces por el *Lema de Itô* (Ver **apéndice A.3**) se tiene que

$$dP(t, T, r) = \left(\frac{dP(t, T, r)}{dt} + v(t, r) \frac{dP(t, T, r)}{dr} + \frac{1}{2} \rho^2(t, r) \frac{d^2 P(t, T, r)}{dr^2} \right) dt + \rho(t, r) \frac{dP(t, T, r)}{dr} \quad (1.12)$$

Haciendo

$$\mu(t, T) = \frac{1}{P(t, T, r)} \left[\frac{dP(t, T, r)}{dr} + v(t, r) \frac{dP(t, T, r)}{dr} + \frac{1}{2} \rho^2(t, r) \frac{d^2 P(t, T, r)}{dr^2} \right] \quad (1.13)$$

$$\sigma(t, T) = \frac{-1}{P(t, T, r)} \rho(t, r) \frac{dP(t, T, r)}{dr} \quad (1.14)$$

resulta

$$dP(t, T, r) = P(t, T, r) \mu(t, T) dt - P(t, T, r) \sigma(t, T) dW(t) \quad (1.15)$$

Para simplificar notación y sabiendo que la fecha de maduración es fija se omitirá que este instrumento depende de T .

Otro supuesto a emplear es que no existen costos de transacción y la información es simétrica para todos los inversionistas, entonces suponga que un inversionista en el tiempo t esta corto en un $T_1 - Bono$ y largo en un $T_2 - Bono$, *i.e.* el portafolio en t vale

$$\Pi(t) = P_2(t, T_2, r) - P_1(t, T_1, r) \quad (1.16)$$

⁶Esta caracterizado por el estado actual, sin importar la trayectoria que tomo el proceso

Utilizando *Lema de Itô* y (1.15) sobre la expresión anterior resulta que el portafolio varía con respecto al tiempo de acuerdo a

$$d\Pi(t) = (P_2(t, r)\mu(t, T_2) - P_1(t, r)\mu(t, T_1))dt - (P_2(t, r)\sigma(t, T_2) - P_1(t, r)\sigma(t, T_1))dW(t) \quad (1.17)$$

Suponiendo que

$$P_1(t, r) = \Pi(t) \left[\frac{\sigma(t, T_2)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} \right]$$

$$P_2(t, r) = \Pi(t) \left[\frac{\sigma(t, T_1)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} \right]$$

Resulta que

$$d\Pi(t) = \Pi(t) \left[\frac{\sigma(t, T_1)\mu(t, T_2) - \sigma(t, T_2)\mu(t, T_1)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} \right] dt \quad (1.18)$$

de esto se puede concluir que este portafolio es libre de riesgo, además por (1.1) se concluye que

$$r(t) = \left[\frac{\sigma(t, T_1)\mu(t, T_2) - \sigma(t, T_2)\mu(t, T_1)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} \right] \quad (1.19)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu(t, T_1) - r(t)}{\sigma(t, T_1)} = \frac{\mu(t, T_2) - r(t)}{\sigma(t, T_2)}$$

Ahora como T_1, T_2 son números fijos podemos definir el proceso

$$\lambda(t, r) = \frac{\mu(t, r(t)) - r(t)}{\sigma(t, r(t))}$$

Esta expresión es llamada "*Prima de Riesgo de Mercado*" y mide la diferencia de rendimiento de un activo comparada con una inversión libre de riesgo ($r(t)$) por unidad de riesgo y tomando $r(t) = r$ se tiene la expresión para la ecuación diferencial del precio de un bono, llamada *Ecuación de Estructura de Plazo*, tomando

$$\mu(t, T, r) - r = \lambda(t, r)\sigma(t, T, r)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P(t, r)} \left[\frac{dP(t, r)}{dr} + v(t, r)\frac{dP(t, r)}{dt} + \frac{1}{2}\rho^2(t, r)\frac{d^2P(t, r)}{dr^2} \right] - r = \lambda(t, r) \left[\frac{-1}{P(t, T, r)}\rho(t, r)\frac{dP(t, T, r)}{dr} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dP(t, r)}{dt} + (v + \rho\lambda)\frac{dP(t, r)}{dr} + \frac{1}{2}\rho^2\frac{d^2P(t, r)}{dr^2} - rP(t, r) = 0 \quad t \leq T \quad (1.20)$$

Resulta una ecuación diferencial del tipo parabólico o elíptico, el precio del bono puede ser obtenido resolviendo 1.20 con condición de frontera $P(T, T, r) = 1$.

El siguiente teorema da una expresión probabilista para obtener el precio de un bono este es una aplicación del teorema de **Feynman-Kac** que en términos generales liga una ecuación diferencial parcial con procesos de difusión.

Teorema 1. El precio del bono al ser solución de 1,20 tiene por expresión:

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda^2(u, r) du + \int_t^T \lambda(u, r) dW(u) \right) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Nota 6. Si $\mu(t, r) = r$ entonces el valor del bono al tiempo t esta dado por $P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \mid \mathcal{F}_t \right]$

1.3. Teoría de la estructura temporal

Existen diferentes teorías económicas que intentan explicar el comportamiento de la curva de rendimiento, estas son llamadas **Teorías de la Estructura de Plazo** y se explican a continuación:

1. **Teoría de las Expectativas:** Esta teoría fue expuesta por el economista *Irving Fisher* en el año 1896, en donde indicó que la estructura de plazo está determinada por las expectativas de mercado, es decir, la diferencia entre tener una posición larga en un bono con vencimiento de un año y tener una posición larga en un bono con vencimiento de dos años es la inflación y la prima de riesgo, estos factores deben ser compensados en el rendimiento de esta estrategia. Es decir, los nodos de la curva son sustitutos perfectos. Ya que se se si se define:

$i_t :=$ la tasa de rendimiento que se obtiene de una inversión de una unidad monetaria que inicia en t y vence en $t + 1$.

$i_{t+1}^e :=$ la tasa de rendimiento esperada, observada al tiempo t y que aplica al tiempo $t + 1$ y vence en $t + 2$.

$i_{2t} :=$ la tasa de rendimiento que se obtiene de una inversión de una unidad monetaria que inicia en t y vence en $t + 2$.

El rendimiento que se obtiene al mantener una posición larga hasta al vencimiento de un bono con vencimiento dos años es:

$$1 + r = (1 + i_{2t})^2 = 1 + 2i_{2t} + i_{2t}^2$$

suponiendo que $i_{2t} \approx 0$ se tiene que:

$r \approx 2i_{2t}$ ahora el rendimiento que se obtiene por mantener una posición larga hasta el vencimiento de un bono que vence en un año y después renovar esa posición, adquiriendo otro bono con las mismas características es:

$$1 + r = (1 + i_t)(1 + i_{t+1}^e)$$

Sí $(i_{t+1}^e)(i_t) \approx 0$ se tiene que $r \approx i_t + i_{t+1}^e$.

Por lo tanto, dada esta teoría el rendimiento de estas dos estrategia tendría que ser el mismo:

$$i_{2t} = \frac{i_t + i_{t+1}^e}{2}$$

En general,

$$i_{nt} = \frac{i_t + \sum_{j=1}^{n-1} i_{t-j}^e}{n}$$

Se tiene que bajo esta teoría las tasas de largo plazo son un promedio aritmético de la tasa de corto plazo junto con las tasas forward, de esto se concluye que las tasas de largo plazo se mueven junto con las tasas de corto plazo. Además, las tasas de largo plazo presentan menor volatilidad en relación a las tasas de corto plazo. La expresión la estructura temporal bajo la teoría de expectativas es:

$$R(t, T) = \frac{1}{\tau(t, T)} \int_t^T \mathbb{E}[r_s | \mathcal{F}_t] ds \quad (1.21)$$

2. **Teoría de Preferencia de Liquidez:** Esta teoría fue propuesta por el economista *John Richards Hicks* en el año 1946, quien propone que en condiciones normales los inversionistas son adversos al riesgo y prefieren tomar posiciones largas en instrumentos de corto plazo y solo cambiarían su posición si reciben una compensación. Esta teoría indica que el rendimiento de un bono debe estar determinado por inflación, un rendimiento libre de riesgo (el cual proviene de la teoría de expectativas) y una prima de riesgo, lo que convierte a este instrumento en un activo riesgoso debido a la inflación y la prima de riesgo. Esta teoría indica que el rendimiento en la curva de tasas de interés son sustitutos, sin embargo, no pueden llegar a ser sustitutos perfecto.

Por lo tanto, el rendimiento está determinado por la siguiente expresión:

$$i_{nt} = \frac{i_t + \sum_{j=1}^{n-1} i_{t-j}^e}{n} + l_{nt}$$

Donde l_{nt} es la prima por riesgo que requiere el inversionista por mantener en su portafolio un bonos con vencimiento en n .

Por lo tanto, dada esta expresión se puede concluir que las tasas de interés de corto plazo se mueven junto con las tasas de interés de largo plazo. Otra conclusión importante es que esta teoría muestra que en casi todos los casos la curva de interés tiene una pendiente positiva. La expresión para la estructura temporal de tasas dada la teoría de preferencia de liquidez es:

$$R(t, T) = \frac{1}{\tau(t, T)} \left[\int_t^T \mathbb{E}[r_s | \mathcal{F}_t] ds + \int_t^T L(s, T) ds \right] \quad (1.22)$$

donde $L(s, T) > 0$.

3. **Teoría del Hábitat Preferido:** Esta teoría fue presentada por Modigliani y Sutch en 1966, e indica que la curva de tasas de interés esta determinada por mercados segmentados, es decir, los inversionistas mantienen posiciones largas en plazos determinados de la curva y estos no cambiaran su portafolio a menos que reciban una compensación por este movimiento. La curva de tasas de interés tiene la siguiente expresión:

$$R(t, T) = \frac{1}{\tau(t, T)} \left[\int_t^T \mathbb{E}[r_s | \mathcal{F}_t] ds + \int_t^T L(s, T) ds \right] \quad (1.23)$$

donde $L(s, T) \in \mathbb{R}$.

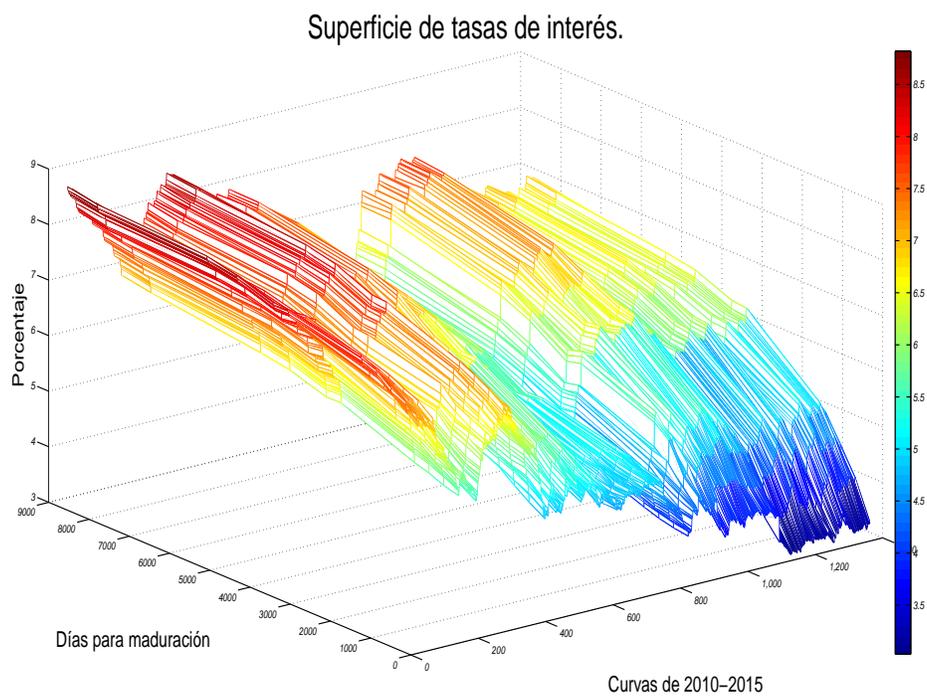
Estimación de curvas teóricas de tasas de interés

En México la institución encargada de la emisión y colocación de instrumentos de renta fija es la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) y el agente financiero en la colocación de dicha deuda es el Banco de México (Banxico). La deuda emitida por el gobierno federal denominada en pesos cuenta con una gama diversa de instrumentos de renta fija:

- i) CETES (Certificados de la Tesorería de la Federación)
Son bonos cupón cero los cuales tienen vencimiento principalmente 28,91,182 y 360 días. Su valor nominal es de 10 pesos.
- ii) Bondes D (Bonos de desarrollo del gobierno federal)
Son bonos que pagan intereses cada 28 días a una tasa ponderada de fondeo bancario. Estos instrumentos tienen vencimiento principalmente en 3,5 y 7 años. Su valor nominal es de 100 pesos.
- iii) Bonos M (Bonos de desarrollo del gobierno federal con tasa de interés fija)
Son bonos que pagan intereses cada 182 días el cual es determinado en la fecha de emisión del instrumento. Actualmente la curva de bonos va desde Diciembre de 2015 hasta Noviembre de 2042, con 20 nodos.
- iv) Udibonos (Bonos de desarrollo del gobierno federal con tasa de interés fija denominados en unidades de inversión)
Son bonos con las mismas características que los bonos M. Sin embargo, estos instrumentos están indexados a las udis¹. Su valor nominal es de 100 udis. Actualmente la curva de udibonos va desde Junio 2016 hasta Diciembre 2046, con 9 nodos.

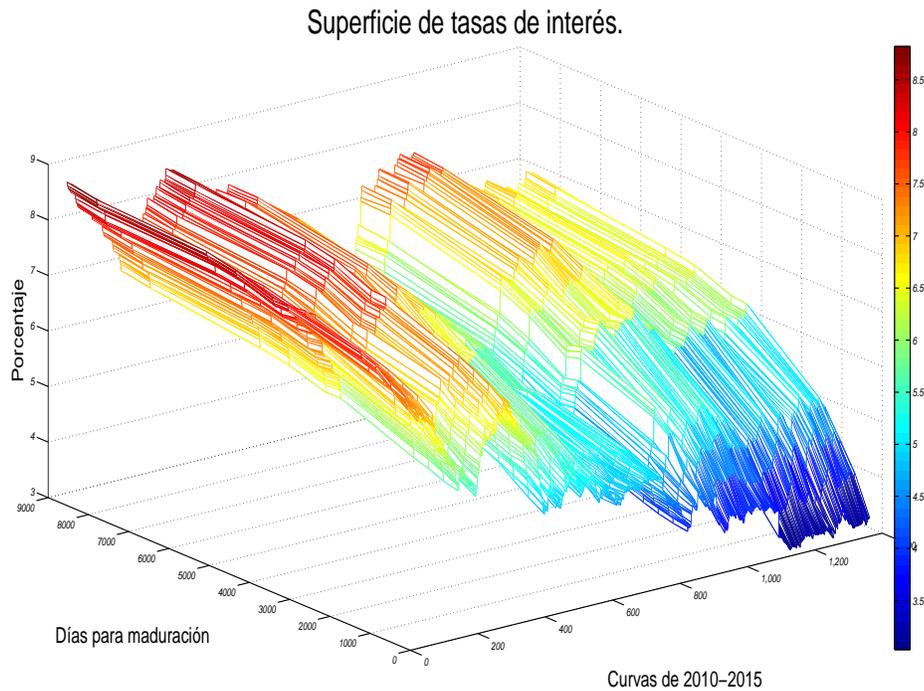
¹Las Unidades de Inversión (UDIS) se crearon en 1995 y son unidades de valor que se basan en el incremento de los precios.

Este trabajo se centra en la estimación de curvas teóricas para los Bonos M. Se muestra la evolución de las curvas de rendimientos para estos instrumentos.



Gráfica 2.1: Superficie de tasas de interés. Bonos M.

Además, se utiliza la curva de Udibonos para poder analizar que modelos permiten ajustar curvas con nodos no positivos. Se muestra la evolución de las curvas de rendimientos para los Udibonos.



Gráfica 2.2: Superficie de tasas de interés. Udibonos.

Para este trabajo se desarrollaron calculadoras en *Visual Basic for Application* de Excel para cada modelo que se muestra a continuación, cada calculadora esta programada para poder cambiar la convención de días (Act/360 o Act/365) y además genera solo días hábiles con la convención Next². La curva de rendimiento de mercado corresponde a la observada el 2 de octubre de 2015, los datos fueron obtenidos a través del portal de Banco de México³.

2.1. Estimación de la Curva de Rendimiento a través de métodos numéricos.

En 1977 el economista Milton Fridman ⁴ en su trabajo “Time perspective in demand for Money” menciona la necesidad de un modelo flexible para el ajuste de la curva de rendimiento, ya que los primeros intentos para aproximar la curva de rendimientos se basaban en ajustar los puntos a través de líneas rectas o piezas polinómicas, estos métodos se describen a continuación.

²Esta convención para generar días hábiles consiste en que si el día a analizar es no laboral o fin de semana se toma el día inmediato superior laboral.

³<http://www.banxico.org.mx/mercsecd/inicia?tabla=N>

⁴Nació en Nueva York en 1912, obtuvo el grado de matemático en el año de 1932 continuando sus estudios de maestría en Chicago en el área de Economía. Sus intereses científicos se orientan en la relevancia del dinero y los límites de la política monetaria. En 1976 fue ganador del Premio Nobel de Economía.

2.1.1. Interpolación Lineal

En este método de estimación de la curva de rendimiento, se asume que entre cada nodo de la curva existe una línea recta que los une. Es decir,

Sea (t_i, r_i) y (t_{i+1}, r_{i+1}) , donde $t_i :=$ fecha de vencimiento del nodo i y $r_i :=$ rendimiento del bono con vencimiento t_i .

Entonces la relación que existe entre el par ordenado antes mencionado, está dado por la siguiente ecuación:

$$r - r_i = \frac{r_{i+1} - r_i}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i) \quad (2.1)$$

La estimación de las curvas de Bonos M y Udibonos se muestran a continuación.

Bonos M

La curva de rendimiento y la curva de descuento para los Bonos M es la siguiente:

Poner curvas.

Udibonos

La curva de rendimiento y la curva de descuento para los Udibonos es la siguiente:

Poner curvas.

2.1.2. Splines Cúbicos.

Esta herramienta de análisis numérico consiste en interpolar n nodos de la curva, $(t_1, r_1), \dots, (t_n, r_n)$ utilizando $n - 1$ polinomios de tercer grado. Es decir, la relación que hay entre el nodo (t_i, r_i) y (t_{i+1}, r_{i+1}) es la siguiente:

$$r = S(t) = a_i(t - t_i)^3 + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i) + d_i \text{ con } t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (2.2)$$

Por lo tanto, se tiene $4(n - 1)$ incógnitas, así que se desea obtener el mismo número de condiciones para poder resolver el sistema de ecuaciones antes mencionado, con parámetros, a_i, b_i, c_i y d_i . Estas condiciones se mencionan a continuación.

- i) Cada polinomio debe pasar por los puntos dados, es decir

$$S_i(t_i) = r_i \text{ con } i = 1, \dots, n - 1$$

Con esto se tienen $n - 1$ condiciones.

- ii) Esta curva debe ser continua, es decir, el valor extremo superior del polinomio i debe ser el extremo inferior del polinomio $i + 1$.

$$S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) = r_{i+1} \text{ con } i = 1, \dots, n-1$$

y $S_{n-1}(t_n) = r_n$. Con esto se generan $n-1$ condiciones.

iii) La curva debe ser derivable, por lo tanto

$$S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i) \text{ con } i = 2, \dots, n-1$$

con esto se generan $n-2$ condiciones.

iv) La curva generada debe ser continua al menos por una lado, por lo tanto se define las siguientes condiciones de frontera:

$$S'_1(t_1) = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} \text{ y } S'_1(t_n) = \frac{r_n - r_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$$

Se tienen dos condiciones más.

v) Las pendientes de los nodos interiores de la curva deben ser iguales, se define esta pendiente como el promedio ponderado de las dos rectas formadas por los nodos adyacentes:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}m_{i-1,i} + \frac{2}{3}m_{i,i+1} & (m_{i-1,i})(m_{i,i+1}) > 0 \\ 0 & (m_{i-1,i})(m_{i,i+1}) \leq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

donde $m_{i,i+1} = \frac{r_{i+1} - r_i}{t_{i+1} - t_i}$ Por lo tanto se tiene otras $n-2$ condiciones.

Con esto, dadas las condiciones mencionadas el sistema de ecuaciones (2.2) tiene solución.

La aplicación de este método a la estimación de curvas de rendimiento se muestra a continuación.

Bonos M

La curva de rendimiento y la curva de descuento para los Bonos M es la siguiente:

Poner curvas.

Udibonos

La curva de rendimiento y la curva de descuento para los Udibonos es la siguiente:

Poner curvas.

2.2. Estimación de la Curva de Rendimiento a través de modelos paramétricos no estocásticos.

En 1987 Charles R. Nelson y Andrew F. Siegel propone un modelo paramétrico, es decir, se estima la curva de tasas forward dada una función que depende de ciertos parámetros.

$$\mathbb{R}^+ \in x \longrightarrow f(t_0, t_0 + x) = \Phi(x; z)$$

En este caso la curva forward tiene por parámetros el vector Z ; este tipo de funciones son producto de un polinomio con términos exponenciales, es decir

$$P_1(x)e^{-\alpha_1 x} + \dots + P_n(x)e^{-\alpha_n x}$$

donde $P_i(x)$ denota un polinomio de grado n_i , este supuesto viene respaldado ya que las tasas forward están asociadas a soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo grado con raíces reales:

$$\ddot{f} + \alpha_1 \dot{f} + \alpha_2 f = 0 \tag{2.4}$$

Dichas funciones para tener un ajuste adecuado deben tener ciertas características

- i) Flexible: Las funciones deben ajustar de manera adecuada todas las formas que toma la curva de rendimiento, estas son: monótonas, cóncava y algunas veces en forma de S.
- ii) Parsimoniosa: Se debe de ajustar la curva con un mínimo de parámetros.
- iii) Regular: La curva de rendimiento debe ser suave.
- iv) Consistente: La familia de funciones debe ser compatible con la dinámica de la tasa de interés.

Los modelos propuestos por *Nelson & Siegel (1987)* y *Svensson (1994)* cumplen las características antes mencionadas y se explican a detalle a continuación.

2.2.1. Modelo de Nelson-Siegel

Si la tasa instantánea forward vista en el instante t_0 con vencimiento m está dada por la solución de la ecuación diferencial de segundo orden (2.4) que tiene dos raíces distintas, entonces esta función esta expresada por medio de:

$$f(t_0, m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{-m}{\lambda_1}\right) + \beta_2 \exp\left(\frac{-m}{\lambda_2}\right) \tag{2.5}$$

Donde λ_1, λ_2 son constantes de tiempo asociadas a la ecuación diferencial y $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ son determinados por las condiciones iniciales de la misma.

Nota 7. Los parámetros $Z = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2)$ son lineales.

Nota 8. Esta ecuación genera las diferentes formas que tiene la estructura de plazo de la curva de rendimiento y están determinadas por los parámetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2$.

Nota 9. Los parámetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ son funciones del tiempo para simplificar la notación no se muestra, además en lo siguiente denotaremos $f(t_0, m) := f(m)$.

Este modelo no cumple la condición de ser parsimonioso ya que Nelson y Siegel observaron que al variar los valores de λ_1, λ_2 no mejoraba el ajuste, es decir, los cambios en los valores de $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ eran despreciables,

entonces proponen un modelo que es solución de (2.4) pero con la condición que las raíces deben ser iguales, este ajuste genera una nueva función

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{-m}{\lambda}\right) + \beta_2 \frac{m}{\lambda} \exp\left(\frac{-m}{\lambda}\right) \quad (2.6)$$

Una observación importante para poder generalizar el modelo, es el hecho de que puede ser visto como una constante más una función de *Laguerre*⁵.

Sabemos que $P(0, m) = \exp\left[-\int_0^m f(u) du\right]$ (1.8) y $R(0, m) = \frac{-\ln[P(0, m)]}{m}$ por lo tanto la curva yield está dada por

$$R(0, m) = \frac{1}{m} \int_0^m f(u) du = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{\lambda}\right)}{\frac{m}{\lambda}} \right] - \beta_2 \exp\left(\frac{-m}{\lambda}\right) \quad (2.7)$$

La estructura de plazo de la curva de rendimiento permite rescatar las expectativas de política monetaria y estas se ven reflejadas en este modelo; β_0 es independiente del vencimiento, este componente se puede interpretar como la tasa a largo plazo, *i.e.*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = \beta_0 \quad (2.8)$$

Ahora, los componentes β_0 y β_1 son términos asociados a la tasa corta, ya que

$$\lim_{m \rightarrow 0^+} f(m) = \beta_0 + \beta_1 \quad (2.9)$$

Nota 10. Dados (2.8) y (2.9) se concluye que $\beta_0 > 0$ y $\beta_0 + \beta_1 > 0$; además $\lambda > 0$.

Estimación del Modelo

Para estimar los parámetros del modelo de Nelson-Siegel, se asume que se conoce n tasas de mercado $R(t, t_i)$ y usando una transformación de (2.7).

$$R(t, t_i) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\lambda}\right)}{\frac{-t_i}{\lambda}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\lambda}\right)}{\frac{-t_i}{\lambda}} - \exp\left(\frac{-t_i}{\lambda}\right) \right]$$

Se busca calibrar $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ y λ con la información de mercado, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} R(t, t_1) \\ R(t, t_2) \\ \vdots \\ R(t, t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - \exp\left(\frac{-t_1}{\lambda}\right)}{\frac{-t_1}{\lambda}} & \frac{1 - \exp\left(\frac{-t_1}{\lambda}\right)}{\frac{-t_1}{\lambda}} - \exp\left(\frac{-t_1}{\lambda}\right) \\ 1 & \frac{1 - \exp\left(\frac{-t_2}{\lambda}\right)}{\frac{-t_2}{\lambda}} & \frac{1 - \exp\left(\frac{-t_2}{\lambda}\right)}{\frac{-t_2}{\lambda}} - \exp\left(\frac{-t_2}{\lambda}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1 - \exp\left(\frac{-t_n}{\lambda}\right)}{\frac{-t_n}{\lambda}} & \frac{1 - \exp\left(\frac{-t_n}{\lambda}\right)}{\frac{-t_n}{\lambda}} - \exp\left(\frac{-t_n}{\lambda}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

⁵Estas funciones consisten de un polinomio y términos exponenciales decrecientes, son utilizadas para aproximar curvas.

Y el sistema puede reescribirse de la siguiente manera

$$R_t = \mathbf{X}_{\lambda_t} \beta_t \quad (2.10)$$

Donde R_t es un vector n – *dimensional*, \mathbf{X}_{λ_t} es una matriz de tamaño $n \times 3$ y β_t es un vector 3 – *dimensional*.

El encontrar el valor óptimo de los parámetros $z = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda)$ en (2.10) implica

$$\min_z \sum_{i=1}^n \left(\beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\lambda}\right)}{\frac{-t_i}{\lambda}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\lambda}\right)}{\frac{-t_i}{\lambda}} - \exp\left(\frac{-t_i}{\lambda}\right) \right] - R(t, t_i) \right)^2 = \min_z (\mathbf{X}_{\lambda_t} \beta_t - R_t)^t (\mathbf{X}_{\lambda_t} \beta_t - R_t)$$

En 2008 *Krishan* propone utilizar los precios de los bonos en el mercados, *i.e.*, asumir que se conocen n precios de bonos con diferentes vencimientos (m_1, \dots, m_n) y además precios generados por el modelo, entonces se busca

$$\min_z \sum_{i=1}^n \left(\widehat{P}_t(m_i) - P_t(m_i) \right)^2 \quad (2.11)$$

Donde $\widehat{P}_t(m_i)$ es el valor teórico en tiempo t del bono con vencimiento m_i y $P_t(m_i)$ es el valor del bono en el mercado al tiempo t con vencimiento m_i .

Calibración del modelo Nelson-Siegel con Bonos M.

El método que se emplea para la estimación de la curva de rendimiento, se basa en la minimizar la diferencia entre el precio teórico del bono y el precio de mercado de este instrumento, además del método donde dichas diferencias son ponderadas por la Duración de Maculey, ambos explicados en las secciones anteriores. Los datos se muestran a continuación.

Bonos	Tasa Cupón	Vencimiento	Precio Sucio
Bonos M	8%	17/12/2015	102,49
Bonos M	6,25%	16/06/2016	102,77
Bonos M	7,25%	15/12/2016	105,06
Bonos M	5%	15/06/2017	101,70
Bonos M	7,75%	14/12/2017	107,97
Bonos M	4,75%	14/06/2018	100,27
Bonos M	8,5%	13/12/2018	112,48
Bonos M	5%	11/12/2019	99,14
Bonos M	8%	11/06/2020	111,17
Bonos M	6,5%	10/06/2021	104,91
Bonos M	6,5%	09/06/2022	104,90
Bonos M	8%	07/12/2023	114,41
Bonos M	10%	05/12/2024	130,10
Bonos M	7,5%	03/06/2027	111,65
Bonos M	8,5%	31/05/2029	121,27
Bonos M	7,75%	29/05/2031	114,66
Bonos M	7,75%	23/11/2034	115,54
Bonos M	10%	20/11/2036	142,01
Bonos M	8,5%	18/11/2038	124,89
Bonos M	7,75%	13/11/2042	116,59

Tabla 2.1: Datos del Mercado Mexicano de Bonos

El modelo que se implemento fue Nelson-Siegel; para calcular el precio teórico del bono, se utilizó la hipótesis de que el precio de cualquier instrumento financiero es el valor presente de todos los flujos futuros, donde la tasa de descuento es la generada por el modelo y sabiendo que la tasa cupón de estos bonos revisa semestralmente.

Utilizando la herramienta Solver de Excel se minimiza los errores para cualquiera de los dos métodos. Los resultados se encuentran en la tabla 2.2.2.

Diferencia entre el Precio Teórico y Precio de Mercado	19
Diferencia entre el Precio Teórico y Precio de Mercado, Ponderado	1,16

Tabla 2.2: Mínimos de las Funciones Objetivo. Modelo Nelson-Siegel

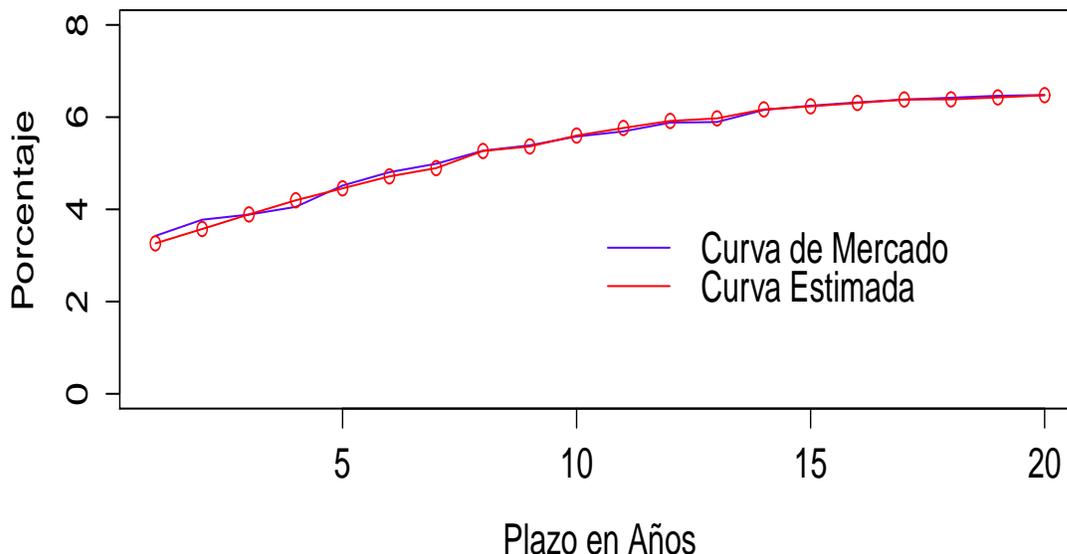
Mientras que la curva de rendimiento está determinada por la función

$$R(t, m) = 6,95\% + (-3,95\%) \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{419,18}\right)}{\frac{m}{419,18}} \right] + (-2,94\%) \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{419,18}\right)}{\frac{m}{419,18}} - \exp\left(\frac{-m}{419,18}\right) \right]$$

Nota 11. La tasa a largo plazo según el modelo es 6,95%, mientras que la tasa corta es 3%.

Donde $t = 2$ de Octubre del 2015. Las curvas generadas son: 2.6 ,

Curva Yield estimada con el modelo Nelson–Siegel



Gráfica 2.3: Curva Yield Generada por el Modelo Nelson-Siegel.

2.2.2. Modelo Svensson

Para incrementar la flexibilidad y mejorar el ajuste *Svensson en 1994* propone agregar un factor más al modelo de Nelson & Siegel, este término le da al modelo una curvatura más, la curva forward⁶ que propone es

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{-m}{\lambda_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\lambda_1} \exp\left(\frac{-m}{\lambda_1}\right) + \beta_3 \frac{m}{\lambda_2} \exp\left(\frac{-m}{\lambda_2}\right) \quad (2.12)$$

Utilizando el mismo argumento que en (2.7) la curva de rendimiento está dada por

$$R(0, m) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{\lambda_1}\right)}{\frac{-m}{\lambda_1}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{\lambda_1}\right)}{\frac{-m}{\lambda_1}} - \exp\left(\frac{-m}{\lambda_1}\right) \right] + \beta_3 \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{\lambda_2}\right)}{\frac{-m}{\lambda_2}} - \exp\left(\frac{-m}{\lambda_2}\right) \right]$$

En el gráfico siguiente se muestra el efecto que tiene el factor $\beta_3 \frac{m}{\lambda_2} \exp\left(\frac{-m}{\lambda_2}\right)$ en el modelo.

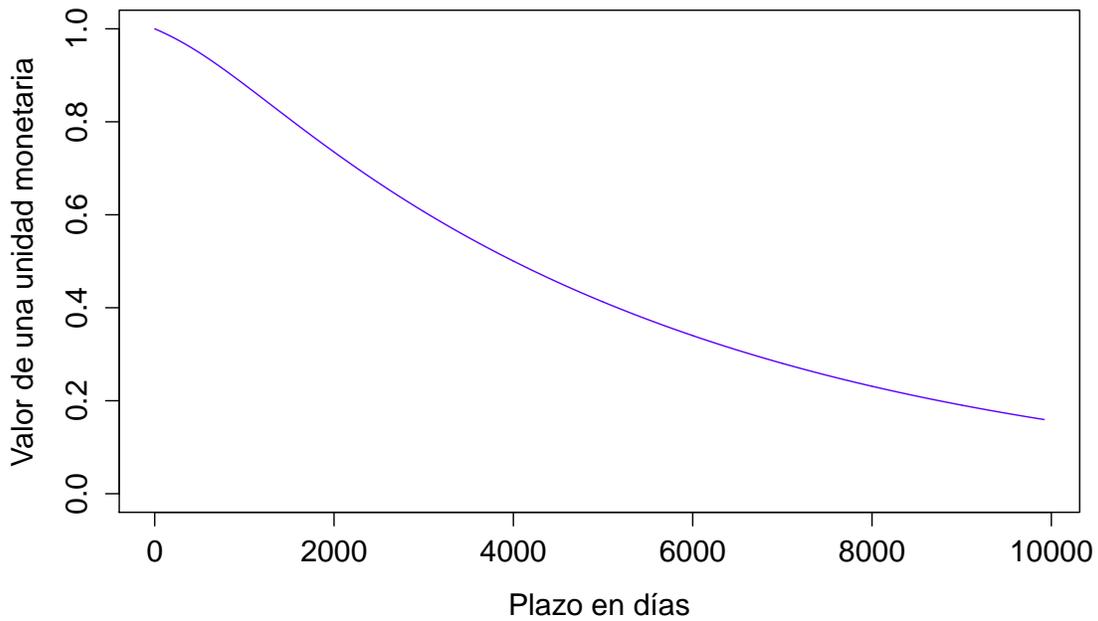
Estimación del Modelo

Un método para estimar los parámetros del modelo Svensson⁷ es una mejora al propuesto por *Krishan*, donde la diferencia entre el precio teórico y el de mercado es ponderado por la *duración de Maculey*.

⁶Este modelo también es conocido como Nelson-Siegel Extendido.

⁷Este método también se puede utilizar en el modelo de Nelson & Siegel

Factor de descuento bajo el modelo Nelson–Siegel



Gráfica 2.4: Factor de descuento generado por el Modelo Nelson-Siegel.

Sea $R(0, m) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{\lambda_1}\right)}{\frac{-m}{\lambda_1}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{\lambda_1}\right)}{\frac{-m}{\lambda_1}} - \exp\left(\frac{-m}{\lambda_1}\right) \right] + \beta_3 \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{\lambda_2}\right)}{\frac{-m}{\lambda_2}} - \exp\left(\frac{-m}{\lambda_2}\right) \right]$
 donde $z = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda_1, \lambda_2)$ es estimado mediante el siguiente método

$$\min_z \sum_{i=1}^n (w_i \varepsilon_i)^2 \quad (2.13)$$

Y $\varepsilon_i = \widehat{P}_t(m_i) - P_t(m_i)$, n es el número de bonos en el mercado y las ponderaciones están dadas por la duración de Maculay denotadas por d_i .

$$w_i = \frac{1}{d_i}$$

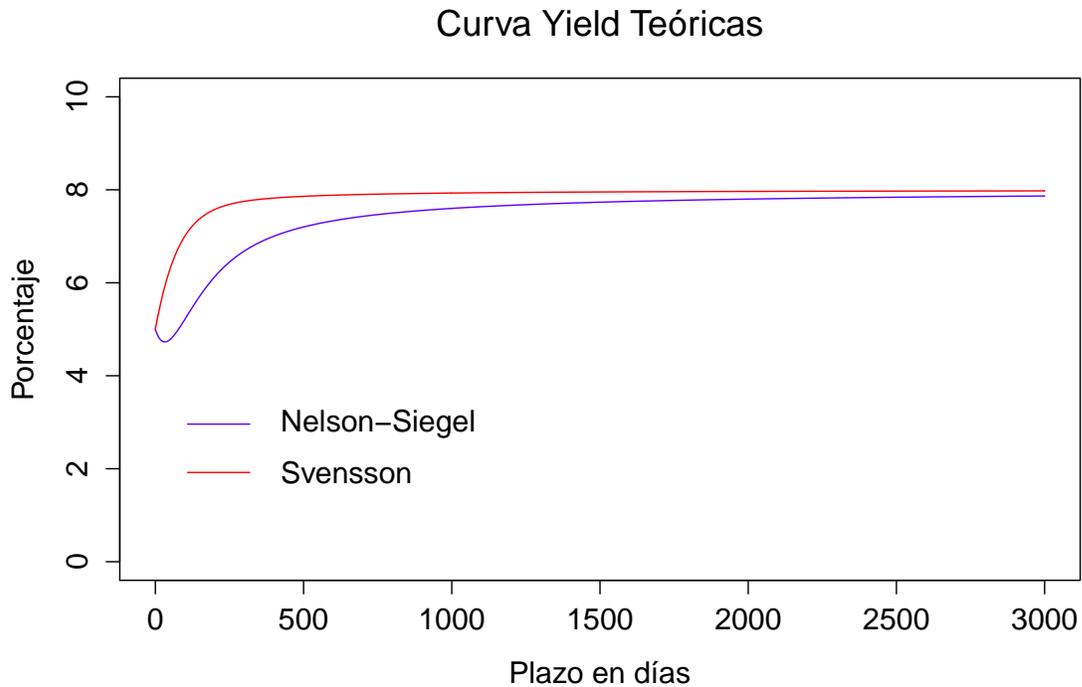
s.a

$$R(0, m_{\min}) \geq 0$$

$$R(0, \infty) \geq 0$$

$$\exp[-R(0, m_k)m_k] \geq \exp[-R(0, m_{k+1})m_{k+1}] \geq 0 \quad \forall m_k < m_{\max}$$

Las restricciones aseguran que la función de descuento sea no-creciente, positiva al corto y largo plazo.



Gráfica 2.5: Modelo Svensson contra Modelo Nelson-Siegel.

Calibración del modelo Svensson con Bonos M.

El método que se emplea para la estimación de la curva de rendimiento, se basa en la minimizar la diferencia entre el precio teórico del bono y el precio de mercado de este instrumento, además del método donde dichas diferencias son ponderadas por la Duración de Maculey, ambos explicados en las secciones anteriores. Los datos fueron extraídos del portal de Banco de México⁸ a la fecha de 6 de julio del 2015, estos se muestran en 2.2.2.

⁸<http://www.banxico.org.mx/mercsecd/inicia?tabla=N&locale=esES>

Bonos	Tasa Cupón	Maduración	Precio Sucio
Bonos M	8 %	17/12/2015	102,49
Bonos M	6,25 %	16/06/2016	102,77
Bonos M	7,25 %	15/12/2016	105,06
Bonos M	5 %	15/06/2017	101,70
Bonos M	7,75 %	14/12/2017	107,97
Bonos M	4,75 %	14/06/2018	100,27
Bonos M	8,5 %	13/12/2018	112,48
Bonos M	5 %	11/12/2019	99,14
Bonos M	8 %	11/06/2020	111,17
Bonos M	6,5 %	10/06/2021	104,91
Bonos M	6,5 %	09/06/2022	104,90
Bonos M	8 %	07/12/2023	114,41
Bonos M	10 %	05/12/2024	130,10
Bonos M	7,5 %	03/06/2027	111,65
Bonos M	8,5 %	31/05/2029	121,27
Bonos M	7,75 %	29/05/2031	114,66
Bonos M	7,75 %	23/11/2034	115,54
Bonos M	10 %	20/11/2036	142,01
Bonos M	8,5 %	18/11/2038	124,89
Bonos M	7,75 %	13/11/2042	116,59

Tabla 2.3: Datos del Mercado Mexicano de Bonos

El modelo que se implemento fue Nelson-Siegel; para calcular el precio teórico del bono, se utilizó la hipótesis de que el precio de cualquier instrumento financiero es el valor presente de todos los flujos futuros, donde la tasa de descuento es la generada por el modelo y sabiendo que la tasa cupón de estos bonos revisa semestralmente.

Utilizando la herramienta Solver de Excel se minimiza los errores para cualquiera de los dos métodos. Los resultados se encuentran en la tabla 2.2.2.

Diferencia entre el Precio Teórico y Precio de Mercado	19
Diferencia entre el Precio Teórico y Precio de Mercado, Ponderado	1,16

Tabla 2.4: Mínimos de las Funciones Objetivo. Modelo Nelson-Siegel

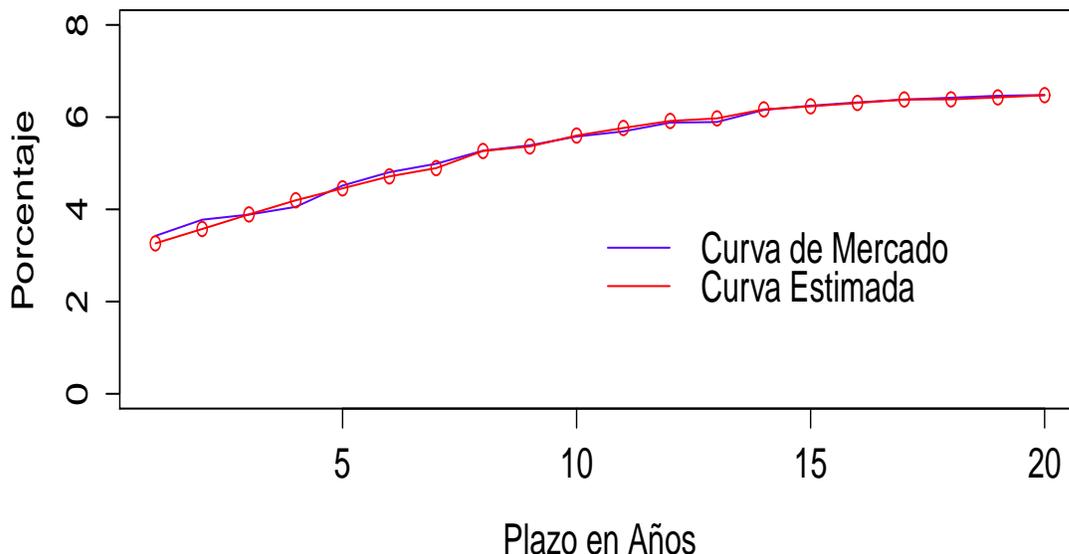
Mientras que la curva de rendimiento está determinada por la función

$$R(t, m) = 6,95 \% + (-3,95 \%) \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{419,18}\right)}{\frac{m}{419,18}} \right] + (-2,94 \%) \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-m}{419,18}\right)}{\frac{m}{419,18}} - \exp\left(\frac{-m}{419,18}\right) \right]$$

Nota 12. La tasa a largo plazo según el modelo es 6,95 %, mientras que la tasa corta es 3 %.

Donde $t = 6$ de Julio del 2015. Las curvas generadas son: 2.6 ,

Curva Yield estimada con el modelo Nelson–Siegel



Gráfica 2.6: Curva Yield Generada por el Modelo Nelson-Siegel.

2.3. Estimación de la Curva de Rendimiento a través de modelos estocásticos.

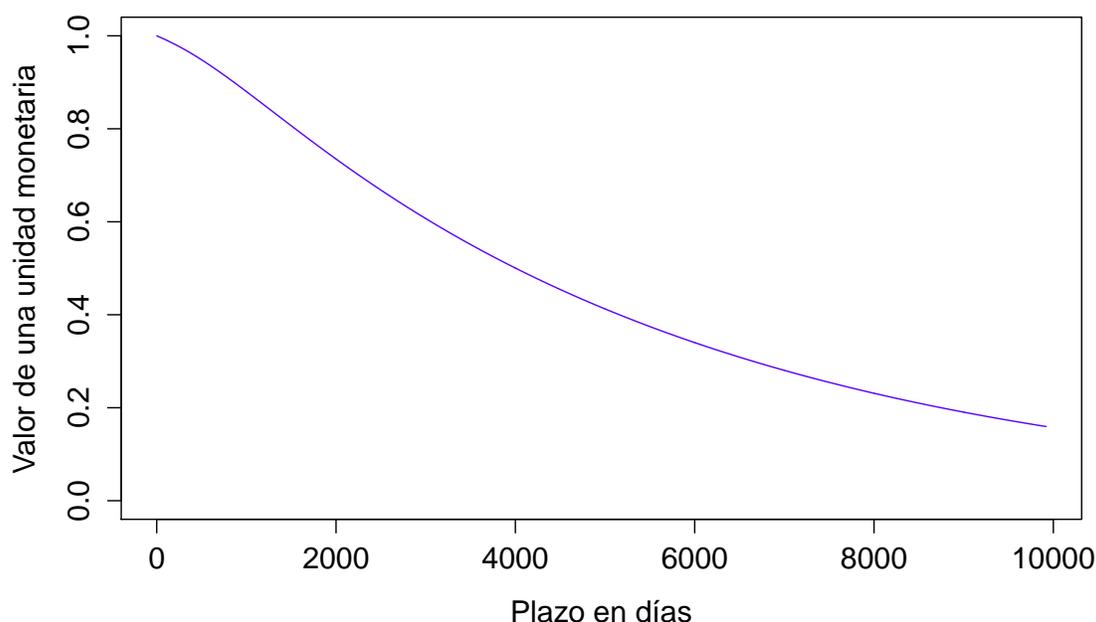
La teoría matemática ha sido una herramienta clave en muchas áreas de las ciencias como economía, biología, química, física y fue hasta 1900 que *Louis Bachelier* desarrolló los primeros modelos financieros que se enfocaban en los precios de las acciones de la Bolsa de Valores de París, el modelo que propuso fue una expresión lineal del movimiento browniano ($S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$), sin embargo el modelo tenía limitantes importantes, entre el que destaca la probabilidad positiva de que el proceso estocástico presente valores negativos, a pesar de esto, el modelo que propuso Louis Bachelier es la base de lo que hoy se conoce como *Finanzas Matemáticas*.

La aportación importante a nivel teórico que marco la pauta en esta área fue el *calculo estocástico* desarrollado por *Kiyoshi Itô* en el año de 1944 y fue casi 30 años después que en 1973 un grupo de matemáticos incorporan esta herramienta a las finanzas, *Fisher Black, Myron Scholes* y *Robert Merton* logran calcular el precio de una opción europea por medio del movimiento browniano geométrico y ecuaciones diferenciales parciales, esto los llevo a ganar el premio nobel de economía en el año de 1995.

Mientras que en el tema central de este trabajo, fue cuatro año después del modelo de Black-Scholes que *Oldrich Vasicek* propone un modelo estocástico para la tasa corta ($dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$) como todo trabajo pionero, tiene diversas incongruencias con el comportamiento que hay en el mercado, el más importante de este modelo es el soporte del mismo, toma valores en toda la recta real con probabilidad positiva⁹, el siguiente modelo incorpora un factor que impide este hecho, el modelo Cox-Ingersoll-Ross o CIR ($dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$) propuesto en el año de 1985 por *Jonh Cox, Jonatha Ingerssol* y *Stephe Ross*. La evolución de estos modelos ha sido en vías de mejorar el ajuste con las curvas de mercado, la principal característica de estos es que pertenecen a la familia de modelos **endógenos** esto significa que lo parámetros no dependen de la estructura

⁹Este supuesto implica que la tasa de interés es negativa, este hecho no es común en los mercados financieros, sin embargo, en países como México se ha observado bonos con tasas reales negativas en el corto plazo

Factor de descuento bajo el modelo Nelson–Siegel



Gráfica 2.7: Factor de descuento generado por el Modelo Nelson-Siegel.

temporal de tasas observada a la fecha de análisis, además tienen en común que a largo plazo la tasa corta converge a una constante, a este comportamiento se le llama **reversión a la media**.

Para obtener modelos eficientes se buscan parámetros adecuados que generen curvas lo más parecida a las existentes en el mercado, sin embargo modelos como Vasicek y CIR no logran capturar de manera adecuada todas las formas que tiene la estructura temporal de tasas.

Para mejorar el ajuste se proponen otros tipos de modelos, los llamados **exógenos** que toman la estructura temporal de mercado como un insumo, se puede transformar modelos endógenos a exógenos haciendo variar los parámetros en el tiempo y que dependa de la estructura temporal de tasas y la volatilidad de mercado, ya sea por medio de modelos estadísticos o econométricos *i.e.*

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \Rightarrow dr_t = k(\theta_t - r_t)dt + \sigma_t\sqrt{r_t}dW_t$$

Existen modelos específicos para diferentes supuestos como los son: *Hull-White* que puede ser una extensión del modelo Vasicek o CIR y *Black-Karasinski*. La necesidad de encontrar modelos que ajusten de mejor manera a las curvas de mercado ha llevado a proponer ecuaciones más robustas como lo son los modelos multifactores donde la tasa corta ya no solo depende de un movimiento browniano y la principal ventaja de estos modelos es que la correlación entre las tasas de corto plazo y las tasas de largo plazo es menor que en un modelo de un factor donde se tiene que la correlación es prácticamente uno, los modelos multifactores se basan en Vasicek y CIR, alternativamente también se han propuesto modelos con saltos, estos buscan romper la rigidez del modelo unifactor ya que cambios bruscos en el mercado no logran ser captados de buena manera, estos también se basan en los modelos antes mencionados. **Este trabajo se centra en los modelos Vasicek y CIR, en los caso endógenos.**

La pregunta natural es ¿Qué modelo elegir?, si se desea hacer un ajuste adecuado a las curvas de mercado lo mejor es elegir un modelos multifactor, el inconveniente de esto es que computacionalmente y analíticamente es

complicado, ya que expresiones importantes como bonos cupón cero no tienen una expresión analítica sencilla bajo el supuesto de que la tasa corta tiene un comportamiento estocástico multifactorial, por otro lado, elegir un modelo sencillo como Vasicek conlleva a que posiblemente el ajuste no sea el adecuado, ya que su soporte es la recta real; muchas de estas cuestiones han llevado a no tener una unificación¹⁰ en el modelaje de tasa de interés, ya que todos los modelos cuentan con ventajas y desventajas, muchos textos recomiendan el modelo CIR ya que cumple con el supuesto de no negatividad y los costos computacionales no son tan altos como para un modelo multifactor, a continuación se presenta una tabla en forma de resumen de los modelos más representativos, donde EAB indica expresión analítica del bono cupón cero y MM modelo multifactor. Esta tabla esta basada en [1]

Modelo	Dinámica	Tasa Positiva	Distribución	EAB	MM
Vasicek(1977)	$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t$	No	Normal	Si	Si
CIR(1985)	$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$	Si	Ji-Cuadrada	Si	Si
Dothan(1978)	$dr_t = r_t[adt + \sigma dW_t]$	Si	Log-Normal	Si	Si
Vasicek Exp.(1990)	$dr_t = r_t([\eta - a \ln(r_t)]dt + \sigma dW_t)$	Si	Log-Normal	No	Si
Hull-White(1990)	$dr_t = k[\theta_t - r_t]dt + \sigma dW_t$	No	Normal	Si	Si
Black-Karasinski(1991)	$dr_t = r_t([\eta_t - a \ln(r_t)]dt + \sigma dW_t)$	Si	Log-Normal	No	Si

Tabla 2.5: Modelos Estocásticos de Tasa Corta.

2.3.1. Marco Teórico

En el capítulo anterior se demostró la existencia de un proceso llamado *Prima de riesgo de mercado* denotado por $\lambda(t)$, este proceso es clave para los modelos de tasa de interés, el supuesto importante para llegar a la existencia de este proceso es que la tasa corta tiene una dinámica estocástica dada por $dr_t = v(r,t)dt + \rho(r,t)dW_t^{\mathbb{P}}$ donde W_t es un \mathbb{P} -movimiento browniano y recordando que r_t es una tasa para inversiones libres de riesgo.

Asumiendo que todos los precios de los activos están en equilibrio *i.e.* los procesos de precios X_t, Y_t, r_t etc. está dado por la ley de oferta y demanda de los agentes económicos, además se asume **ausencia de arbitraje**, esto quiere decir que para ningún tiempo t se puede construir un portafolio libre de riesgo en el cual se gane una tasa de rendimiento mayor a r_t .

Sea $X_t > 0$ un proceso de precios de un activo que no paga dividendos cuya dinámica del rendimiento de dicho activo bajo la medida \mathbb{P} es

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dW_t \quad (2.14)$$

Si es el proceso estocástico $\lambda(t)$ cumple la condición técnica $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^T |\lambda(s)|^2 ds \right) \right] < \infty$ por el teorema de Girsanov existe una medida equivalente(\mathbb{Q}) a \mathbb{P} definida por la derivada de Radon-Nikodym al tiempo t

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s)ds - \int_0^t \lambda(s)dW_s^{\mathbb{P}} \right) \quad (2.15)$$

entonces $W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \lambda(s)ds$, donde $W_t^{\mathbb{Q}}$ es un \mathbb{Q} -movimiento browniano.

¹⁰El modelo Black-Scholes a pesar de los supuestos sobre los que se apoya ha logrado unificar la valuación de opciones.

Sabiendo que $\mu(x,t) = r(t) + \lambda(t)\sigma(x,t)$ resulta que (2.14) bajo la medida \mathbb{Q} es

$$\frac{dX_t}{X_t} = r(t)dt + \sigma(x,t)dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (2.16)$$

donde \mathbb{Q} es llamada medida neutral al riesgo.

Las medidas \mathbb{Q} y \mathbb{P} tienen diversas interpretaciones económicas, la medida \mathbb{P} puede ser interpretada como la medida del *mundo real* es decir la expectativa de ganancia o pérdida que tiene un inversor, mientras que \mathbb{Q} es la expectativa de ganancia o pérdida en una inversión *libre de riesgo*, cabe recalcar que la clave para pasar de una medida a otra es el proceso *Prima de riesgo de mercado*.

Denotando \hat{X}_t al proceso descontado con un factor de acumulación $\beta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$

$$\hat{X}_t = \frac{X_t}{\beta(t)} \quad (2.17)$$

Los siguientes dos teoremas son fundamentales en la obtención de precios, dada la finalidad del trabajo estos solo se enuncian.

Teorema 2. El proceso descontado $\hat{X}_t = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)X_t$ es una martingala bajo \mathbb{Q} .

Teorema 3 (Regla Fundamental para la Obtención de un Precio).

$$X_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) X_T \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta_t}{\beta_T} X_T \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (2.18)$$

Este desarrollo teórico fue para cualquier contingente que no paga dividendos, para la teoría financiera un instrumento clave es el el bono cupón cero, ya que la mayoría de los contingentes puede ser replicado por este instrumento entonces definiendo $X_t = P(t, T)$ i.e. un T -bono se tiene que

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

por (2.17) se tiene que $\hat{P}(t, T) = \frac{P(t, T)}{\beta(t)}$ y por los teoremas anteriores se tiene que

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta_t}{\beta_T} P(T, T) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

como β_t es \mathcal{F}_t -medible y $P(T, T) = 1$

$$\Rightarrow P(t, T) = \beta_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(\beta_T)^{-1} \mid \mathcal{F}_t \right] = \beta_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Nota 13. Esta expresión en el capítulo anterior se dedujo utilizando de hipótesis de que $\mu(t) = r$.

Por lo tanto se tiene una relación entre el bono cupón cero o el factor de descuento natural y la tasa corta i.e. conociendo la dinámica estocástica de $r(t)$ se puede valorar opciones, construir curvas, replicar bonos, etc.

2.4. Modelos de Estructura Afín.

Entre los modelos presentados en la tabla (2.3), existen aquellos que presentan una forma cerrada para el precio del bono cupón cero, a estos modelos se les llama modelos de estructura afín, esto implica que la tasa de rendimiento es de la forma

$$R(t, T) = \alpha(t, T) + \beta(t, T)r(t)$$

donde α y β son funciones del tiempo no estocásticas, por lo tanto el precio del bono es de la forma

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (2.19)$$

con $\alpha(t, T) = \frac{-\ln[A(t, T)]}{T-t}$ y $\beta(t, T) = \frac{B(t, T)}{T-t}$.

Existe un criterio para discernir entre modelos de estructura afín y modelos que no poseen esta característica, la siguiente proposición da una regla para poder determinar esto.

Proposición 1. El modelo de tasa corta $dr_t = b(t, r)dt + \sigma(t, r)dW_t^{\mathbb{Q}}$ bajo la medida neutral al riesgo (\mathbb{Q}) pertenece a la familia de estructura afín si y solo si los parámetros de difusión y drift son de la forma

$$\sigma(t, r) = \rho(t) + \eta(t)r \text{ y } b(t, r) = \gamma(t, r) + \delta(t)r$$

con ρ, η, δ y γ funciones continuas

Las funciones A y B pueden ser obtenidas de resolver

$$\frac{\partial}{\partial t}B(t, T) + \rho(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B(t, T)^2 + 1 = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln[A(t, T)] - \eta(t)B(t, T) + \frac{1}{2}\delta(t)B(t, T)^2 = 0 \quad (2.21)$$

con condiciones de frontera para (2.20) $B(T, T) = 0$ y (2.21) $A(T, T) = 1$; para la mayoría de los modelos resolver las ecuaciones antes presentadas implica la implementación de herramientas numéricas para su solución.

Para los casos Vasicek y CIR estas ecuaciones tienen solución, los parámetros se encuentran en 1 .

	Vasicek	CIR
$\rho(t)$	$-k$	$-k$
$\gamma(t)$	0	σ^2
$\delta(t)$	σ^2	0
$\eta(t)$	$k\theta$	$k\theta$

Tabla 2.6: Parámetros que determinan la estructura afín para los modelos Vasicek y CIR.

A continuación se presenta un análisis a detalle de estos dos modelos.

2.4.1. Modelo Vasicek

En el año de 1977 el matemático checo *Oldrich Alfons Vasicek* propone un modelo de difusión para la tasa corta que es descrito por el proceso Ornstein-Uhlenbeck con coeficientes constantes, donde su principal característica es el ser un proceso con reversión a la media, es decir, el proceso tiende en el infinito a una constante, este supuesto no está muy distante de los factores económicos que afectan a la tasa de interés, ya que si esta sube los prestatarios no ven redituable un préstamo esto ocasiona menos demanda de capital, concluyendo en una baja de tasa de interés mientras que si esta baja los prestatarios solicitarían más fondos y esto obliga a los prestamistas a incrementar la tasa a la que otorga los fondos.

Definición 15 (Modelo Vasicek bajo la medida \mathbb{Q}). El modelo de Vasicek bajo la medida neutral al riesgo esta descrito por la ecuación

$$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \text{ con } r(0) = r_0 \quad (2.22)$$

θ es la media o constante a la cual converge el proceso.
 k la velocidad a la cual converge r_t .
 σ la volatilidad del proceso de difusión bajo el modelo Vasicek.

Proposición 2. Sea W_t , con $t \geq 0$, un movimiento browniano, el modelo Vasicek esta dado por

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

donde k, θ, σ son constantes positivas. Esta ecuación diferencial tiene por solución:

$$r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-s)} dW_u^{\mathbb{Q}} \quad (2.23)$$

condicionando al proceso r_t con \mathcal{F}_s y $s \leq t$.

Demostración. Sea $f(t, x) = e^{-kt} r_0 + \theta(1 - e^{-kt}) + \sigma e^{-kt} x$, sabemos que

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = k(\theta - f(t, x))$$

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \sigma e^{-kt}$$

$$\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} = 0$$

Por otro lado tomando el proceso estocástico $X_t = \int_0^t e^{ks} dW_s^{\mathbb{Q}}$, ahora aplicando el *Lema de itô* a este proceso bajo esta función, se tiene que

$$\partial f(t, X_t) = k(\theta - f(t, X_t))dt + \sigma e^{-kt} (e^{kt} dW_t) = k(\theta - f(t, X_t))dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Por lo tanto $f(t, X_t)$ es solución de (2.22)

□

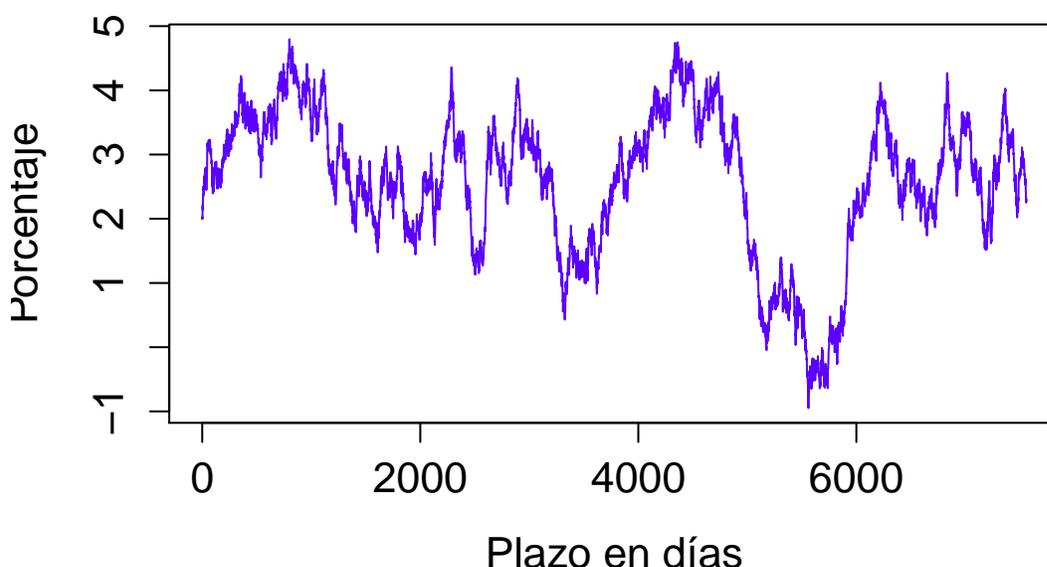
De la solución antes obtenida y del hecho que la esperanza matemática de la integral *Lema de Itô* es cero se tiene que r_t es un proceso Gaussiano, con las siguientes expresiones para la media y varianza

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (2.24)$$

$$\text{Var}^{\mathbb{Q}} [r_t | \mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2k} [1 - e^{-2k(t-s)}] \quad (2.25)$$

Por lo tanto $\mathbb{Q}[r(t) < 0 | \mathcal{F}_t] > 0$ este hecho es el principal inconveniente de este modelo ya que la naturaleza de una tasa de interés no incluye el caso que esta sea no positiva.

Modelo Vasicek



Gráfica 2.8: Simulación del Modelo Vasicek con parámetros, $r_0 = 2\%$, $k = 0,045$, $\theta = 3,4\%$, $\sigma = 1,1\%$

Por otro lado cuando $t \rightarrow \infty$ se concluye que el proceso converge a θ , la tendencia de proceso es positivo si r_t esta por debajo de su media y es negativo si r_t esta por arriba de θ , este movimiento es *empujado* a una velocidad k para estar lo más cercano a θ .

Como se menciono anteriormente este modelo pertenece a la familia de procesos con estructura afín, esto quiere decir que el precio del bono cupón cero esta dado por

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r_t}$$

con $A(t, T) = \exp \left[\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) [B(t, T) - (T - t)] - \frac{\sigma^2}{4k} B(t, T)^2 \right]$ y $B(t, T) = \frac{1}{k} [1 - e^{-k(T-t)}]$.

Sea r_0, r_1, \dots, r_n observaciones de **mercado** del proceso r_t y se desea calibrar el modelo dado estos datos, la observación importante que se tiene que hacer es que estos datos provienen del *mundo real*, es decir, en términos de medida corresponde a \mathbb{P} por lo tanto la dinámica (2.22) no es consistente con los datos, para esto se tiene la siguiente definición.

Definición 16 (Modelo Vasicek bajo la medida \mathbb{P}). El modelo de Vasicek bajo la medida del mundo real esta descrito por la ecuación

$$dr_t = [k\theta - (k + \lambda\sigma)r_t]dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}} \text{ con } r(0) = r_0 \quad (2.26)$$

donde λ es un nuevo parámetro, dado por el proceso *Prima de Riesgo de Mercado*¹¹

Nota 14. Si $\lambda = 0$ se tiene que las dinámicas (2.26) y (2.22) concuerdan.

Por lo tanto se tiene que estimar los parámetros k, θ, λ y σ con la información dada, sin embargo, todos los precios de mercado están calculados a través de la medida neutral al riesgo, mas aún cuando se calibra el modelo para precios de derivados se necesita usar la dinámica bajo \mathbb{Q} .

Entonces se tiene que combinar estas dos difusiones (esto en el contexto de las contantes que definen los procesos), se tiene que bajo las dos medidas el termino de difusión (σ) es el mismo, resta calibrar k y θ tomando en cuenta el proceso *Prima de Riesgo de Mercado*, por lo tanto el proceso que se tiene que calibrar es

$$dr_t = k^*[\theta^* - r_t]dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}} \text{ con } r(0) = r_0$$

con $\theta^* = \frac{k\theta}{k+\lambda\sigma}$ y $k^* = k + \lambda\sigma$.

Sin embargo, en este trabajo la calibración es con precios de bonos esto implica que la dinámica utilizada es bajo la medida \mathbb{Q} .

Modelo endógeno y su implementación

Para este trabajo se realizó la estimación de los parámetros por medio del método transversal el cual consiste en estimar parámetros a través de la curva observada en un día, es decir los parámetros representan la dinámica observada para el día de análisis. La estimación puede llegar a ser más satisfactoria comparado con modelos no estocásticos (método lineal, splines, bootstrapping y Nelson-Siegel). En este trabajo este método es utilizado para la curva de bonos gubernamentales (*Bonos M*) y bonos ligado a la inflación (*Udibonos*). Los datos fueron obtenidos de la misma fuente que se uso en lo modelos anteriores

En esta sección se muestra la calibración del modelo Vasicek:

$$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (2.27)$$

por medio del método transversal, para ilustrar mejor el ajuste que puede llegar a generar este modelo se tomó la curva gubernamental de Udibonos para el 2 de octubre de 2015 ya que la parte corta de la estructura temporal presenta tasas negativas. Además se calibra este modelo para la curva de Bonos M.

Para la implementación de este modelo, se busca minimizar la diferencia entre el precio teórico (precio generado por el modelo) y el precio de mercado. *i.e.*

Sea P_t el precio del bono o udibono al tiempo t y sea \hat{P}_t el precio del bono o udibono generado por el modelo Vasicek (o Cox-Ingersoll-Ross), suponiendo que existen n nodos de la curva entonces la función a minimizar es

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{1}{d_i} \right) (\hat{P}_t - P_t) \right]^2 \quad (2.28)$$

donde d_t es la duración de Bono M o Udibono P_t ; con este método se busca ponderar la parte corta mejorando el ajuste y así con esto estimar de mejor manera el vector $z = (\theta, k, \sigma)$ de parámetros de 2,27.

¹¹Para este modelo se tiene que $\lambda(t) = \lambda r(t)$

Los precios fueron calculados a través de las formulas programadas (**Ver Apéndice**), finalmente la función (2.28) se minimizó con el paquete *Solver de Excel*.

Además de las curvas observadas, el modelo necesita la tasa corta(r_0), para el caso de la curva de udibonos esta tasa no es observable directamente en el mercado, sin embargo, para su estimación se utilizó la tasa con plazo a un día generada por al estimación por el método de splines cúbicos.

Mientras que para la curva gubernamental de bonos, la tasa corta es la tasa de fondeo gubernamental publicada por *Banxico*. Cabe destacar que diversos autores sugieren estimar la curva teórica por medio de instrumentos de corto y largo plazo, para el caso mexicano estos instrumentos sería los Cetes y largo plazo los Bonos M. Sin embargo, la curva de Cetes ha sufrido una distorsión, esto debido a la exceso de demanda, ya que el la tasa de rendimiento se encuentra muchas veces por debajo de la tasa de referencia puesta por el Banco Central.

Udibonos.

Para la siguiente curva de Udibonos y tasa corta $r_0 = 0,179\%$

Instrumento	Vencimiento	Tasa de Rendimiento	Tasa Cupón
Udibono	16/06/2016	-0,12	5
Udibono	14/12/2017	0,891	3,5
Udibono	13/06/2019	1,779	4
Udibono	10/12/2020	2,198	2,5
Udibono	09/06/2022	2,509	2
Udibono	04/12/2025	2,886	4,5
Udibono	22/11/2035	3,447	4,5
Udibono	15/11/2040	3,597	4
Udibono	08/11/2046	3,603	4

Con esto minimizando el precio de mercado con respecto al precio obtenido por el modelo se obtuvieron los siguientes parámetros:

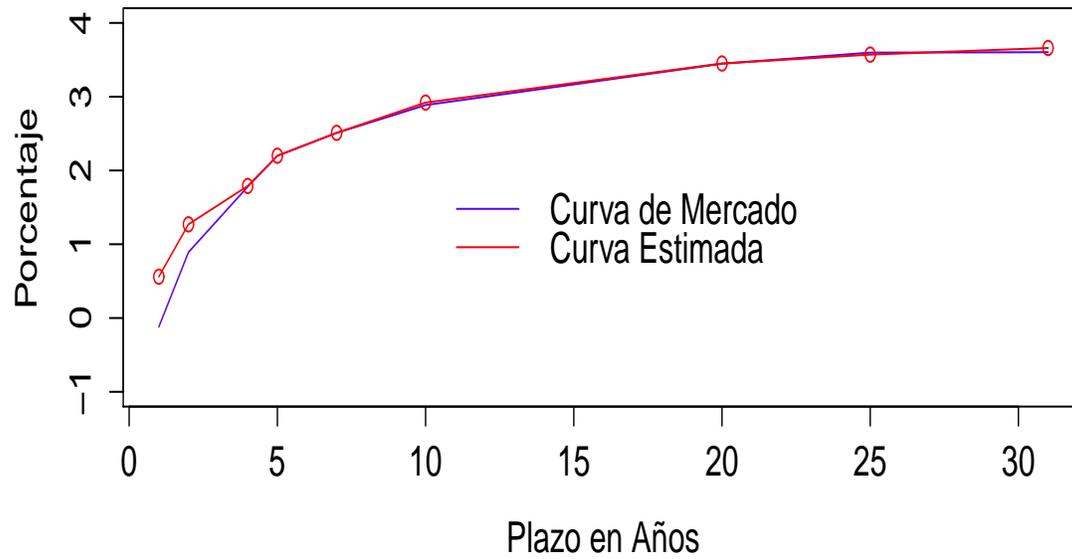
Parámetro	Valor
r_0	0,179 %
θ	4,31 %
k	30,53 %
σ	0,086 %

las discrepancias entre los precios obtenidos acumulan 3.4 pesos a lo largo de toda la curva

Por lo tanto el modelo Vasicek para la curva de Udibonos es

$$dr_t = 30,53\% (4,31\% - r_t)dt + 0,0860\% dW_t^{\textcircled{Q}}$$

Curva de rendimiento estimada con el modelo Vasicek



Gráfica 2.9: Curva de rendimiento de Udibonos estimada bajo el modelo Vasicek.

PONER GRAFICAS

Bonos M.

Para la siguiente curva de Bonos M y tasa corta $r_0 = 3\%$
se obtiene los siguientes parámetros

Bonos	Vencimiento	Tasa de Rendimiento	Tasa Cupón
Bonos M	17/12/2015	3,222 %	8 %
Bonos M	16/06/2016	3,539 %	6,25 %
Bonos M	15/12/2016	3,84 %	7,25 %
Bonos M	15/06/2017	4,14 %	5 %
Bonos M	14/12/2017	4,37 %	7,75 %
Bonos M	14/06/2018	4,58 %	4,75 %
Bonos M	13/12/2018	4,80 %	8,5 %
Bonos M	11/12/2019	5,08 %	5 %
Bonos M	11/06/2020	5,20 %	8 %
Bonos M	10/06/2021	5,50 %	6,5 %
Bonos M	09/06/2022	5,73 %	6,5 %
Bonos M	07/12/2023	5,96 %	8 %
Bonos M	05/12/2024	5,98 %	10 %
Bonos M	03/06/2027	6,22 %	7,5 %
Bonos M	31/05/2029	6,34 %	8,5 %
Bonos M	29/05/2031	6,48 %	7,75 %
Bonos M	23/11/2034	6,60 %	7,75 %
Bonos M	20/11/2036	6,64 %	10 %
Bonos M	18/11/2038	6,72 %	8,5 %
Bonos M	13/11/2042	6,73 %	7,75 %

Parámetro	Valor
r_0	3 %
θ	9,40 %
k	23,13 %
σ	4,16 %

Así se tiene que las discrepancias entre los precios obtenidos acumulan 3.8 pesos a lo largo de toda la curva. El modelo Vasicek ajustado a la curva de Bonos es

$$dr_t = 23,13 \% (9,40 \% - r_t) dt + 4,16 \% dW_t^{\mathbb{Q}}$$

PONER GRAFICAS

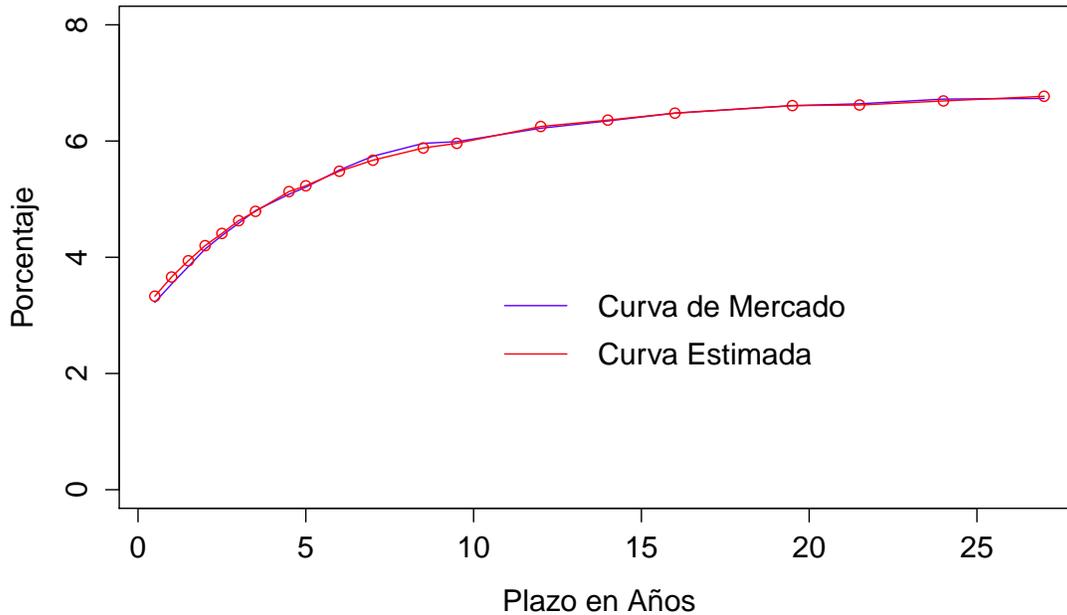
2.4.2. Modelo Cox-Ingersoll-Ross

En el año de 1985 los matemáticos John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll y Stephen A. Ross proponen una mejora al modelo Vasicek. Este principal ajuste se da en el soporte del proceso de la tasa corta, ya que el modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR) es no negativo, este modelo es el más popular dentro del mercado financiero debido a este hecho. Sin embargo, la distribución de probabilidad que asume (Ji-cuadrada) este modelo ocasiona que computacional y teóricamente sea más robusto.

Definición 17 (Modelo CIR bajo la medida \mathbb{Q}). El modelo de CIR bajo la medida neutral al riesgo esta descrito por la ecuación

$$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sqrt{r_t}\sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \text{ con } r(0) = r_0 \tag{2.29}$$

Curva de rendimiento estimada con el modelo Vasicek



Gráfica 2.10: Curva de rendimiento de Bonos estimada bajo el modelo Vasicek.

Proposición 3. Sea W_t , con $t \geq 0$, un movimiento browniano, el modelo CIR esta dado por

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sqrt{r_t}\sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

donde k, θ, σ son constantes positivas. Se tiene que la esperanza matemática y la varianza están dadas por las expresiones que se muestran a continuación, asumiendo que el proceso r_t es \mathcal{F}_s -medible y $s \leq t$.

Demostración. Sea $f(t, x) = e^{kt}x$, aplicando el *Lema de Itô* para el proceso de la tasa corta descrita por el modelo CIR, se tiene que: $\partial f(t, x) = e^{kt}k\theta dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}}e^{kt}$ por lo tanto $\partial e^{kt}x = e^{kt}k\theta dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}}e^{kt}$, ahora integrando de s a t resulta que

$$e^{kt}r_t - r_s e^{ks} = \theta[e^{kt} - 1] + \sigma \int_s^t e^{ku} \sqrt{r_u} dW_u^{\mathbb{Q}}$$

Tomando la esperanza y sabiendo que el valor esperado de una integral de *Itô* es cero resulta que:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \theta[1 - e^{-k(t-s)}]$$

Por otro lado, para el cálculo de la varianza se define el siguiente proceso estocástico $X_t = r_t e^{kt}$ y la siguiente función continua $f(t, x) = x^2$, aplicando el *Lema de Itô* resulta que:

$$dX_t^2 = 2[X_t e^{kt} k \theta dt + e^{kt/2} \sigma X_t^{3/2} dW_t^{\mathbb{Q}}]$$

Ahora integrando la ecuación diferencial estocástica de s a t se tiene que:

$$X_t^2 = X_s^2 + (2k\theta + \sigma^2) \int_s^t e^{ku} X_u du + 2\sigma \int_s^t e^{ku/2} X_u^{3/2} dW_u^{\mathbb{Q}}$$

tomando el operador esperanza matemática

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [X_t^2 | \mathcal{F}_s] = r_s^2 + \frac{2k\theta + \sigma^2}{k} (r_s - \theta) (e^{k(t-s)} - 1) + \frac{2k\theta + \sigma^2}{2k} \theta (e^{2k(t-s)} - 1)$$

Finalmente, como $Var[r_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[r_t^2] - (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[r_t])^2$ resulta que:

$$Var^{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{k} r_s (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \frac{\theta\sigma^2}{2k} (1 - 2e^{-k(t-s)} + e^{-2k(t-s)})$$

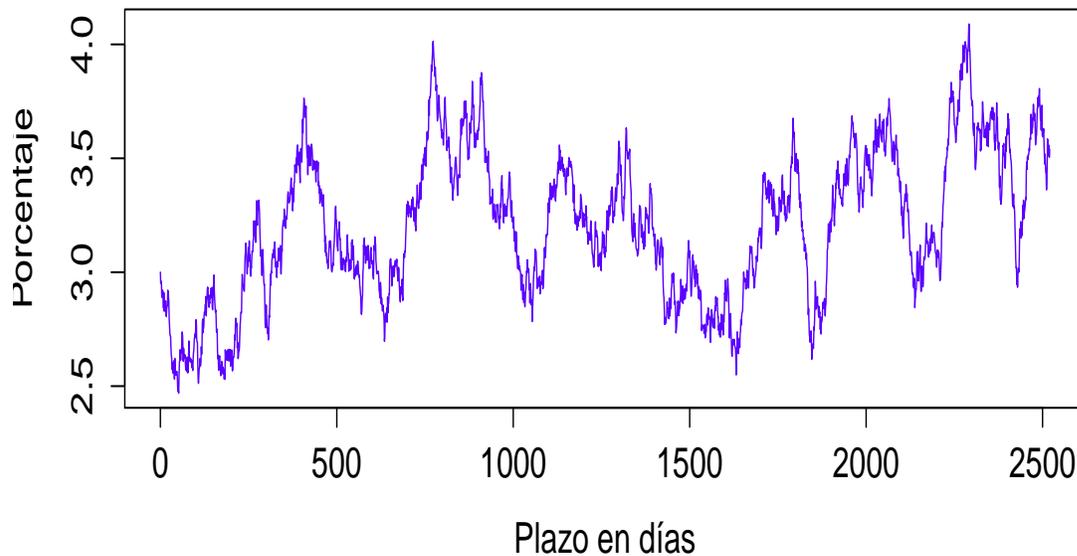
□

Asumiendo la condición técnica de $2k\theta > \sigma^2$ se tiene que el proceso $\{r_t\}$ es no negativo con probabilidad positiva.

El factor $k(\theta - r_t)$ es el mismo que el modelo Vasicek. Por lo tanto, la tasa converge a θ a una velocidad de k . El término de volatilidad σ es multiplicado por $\sqrt{r_t}$, con esto se elimina la principal "desventaja" que tiene el modelo Vasicek.

Cabe destacar que cuando la tasa corta se aproxima a cero $\sigma\sqrt{r_t}$ es prácticamente despreciable, con esto el término aleatorio es nulo, implicando una tasa corta no negativa. Por otro lado, cuando la tasa de interés es alta el término aleatorio tiene una mayor fluctuación.

Modelo Cox–Ingersoll–Ross



Gráfica 2.11: Simulación del Modelo CIR con parámetros, $r_0 = 3\%$, $k = 2,11$, $\theta = 3,2\%$, $\sigma = 3,7\%$

Como ya se menciono, la función de densidad del modelo Cox-Ingersoll-Ross es un *Ji-Cuadrada*, con la siguiente expresión:

$$P_{r_t}(t) = c_t P_{\chi^2(v, \lambda_t)}(c_t x) \quad (2.30)$$

con

$$c_t = \frac{4k}{\sigma^2(1 - \exp(-4k))}$$

$$v = \frac{4k\theta}{\sigma^2}$$

$$\lambda_t = c_t r_0 \exp(-kt)$$

donde χ^2 es una función de densidad *Ji-cuadrada* con v – *grados* de libertad.

Este modelo al igual que el modelo Vasicek pertenece a la familia de modelos de estructura afín, esto implica que existe una expresión cerrada para el bono cupón cero al tiempo t con maduración T y esta dado por

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r_t} \quad (2.31)$$

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp((k+h)(T-t)/2)}{2h + (k+h)(\exp((T-t)h) - 1)} \right]^{(2k\theta/\sigma^2)}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp((T-t)h) - 1)}{2h + (k+h)(\exp((T-t)h) - 1)}$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

Definición 18 (Modelo CIR bajo la medida \mathbb{P}). El modelo Cox-Ingersoll-Ross bajo la medida del mundo real esta descrito por

$$dr_t = (k\theta - (k + \lambda\sigma)r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{P}}$$

donde λ es un nuevo parámetro, dado por el proceso *Prima de Riesgo de Mercado*¹²

Por lo tanto, bajo cambios de variables se tiene que los procesos (18) y (2.30) son equivalentes si $\theta^* = \frac{k}{k + \lambda\sigma}$, $k^* = k + \lambda\sigma$ y $\sigma^* = \sigma\sqrt{r_t}$.

Cabe recordar que para la estimación de los parámetros se utiliza el proceso bajo la medida \mathbb{Q} . Para la estimación de parámetros se emplearon los dos métodos utilizados en Vasicek.

En esta sección se muestra la estimación del modelo CIR bajo la medida neutral al riesgo

$$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sqrt{r_t}\sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (2.32)$$

No se logró calibrar la curva de Udibonos para el 9 julio de 2015 ya que en la parte corta de la curva las tasas son negativas, esto es un punto en contra para el modelo CIR contra el modelo Vasicek. Mientras que para Bonos se utilizó la curva del día antes mencionado, la estimación se realizó minimizando la ecuación (2.28) antes descrita.

¹²dado por $\lambda(t) = \lambda\sqrt{r_t}$

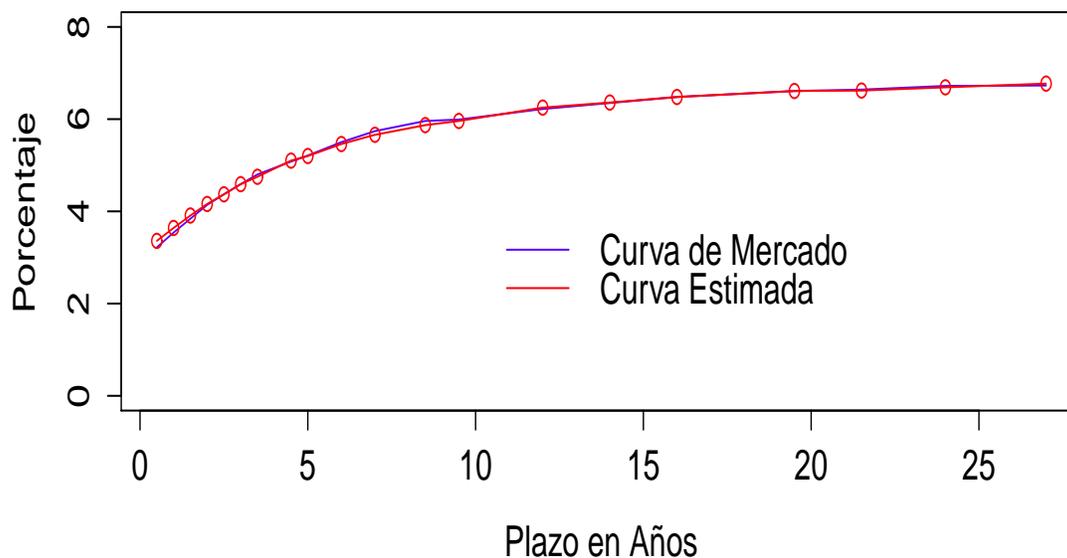
Bonos M.

Para la curva 9 de Bonos M y tasa corta $r_0 = 3\%$

se obtiene los siguientes parámetros

Parámetro	Valor
r_0	3,0%
θ	8,58%
k	24,42%
σ	12,03%

Curva de rendimiento estimada con el modelo CIR



Gráfica 2.12: Curva de rendimiento de Bonos estimada bajo el modelo CIR.

Así se tiene que las discrepancias entre los precios obtenidos acumulan 3.7 pesos a lo largo de toda la curva. El modelo CIR ajustado a la curva de Bonos es

$$dr_t = 24,42\% (8,58\% - r_t)dt + 12,03\%dW_t$$

2.5. Conclusión

Los modelos Nelson & Siegel y Svensson juegan un rol muy importante en la política monetaria del mundo, esto se resume en la siguiente tabla, donde se muestra que modelos empleados en cada banco central y el tipo de método de estimación empleada.

Banco Central	Modelo	Método de Estimación
Bélgica	Nelson & Siegel y Svensson	Precio del Bono Ponderado
Canadá	Svensson	Precio del Bono Ponderado
Finlandia	Nelson & Siegel	Precio del Bono Ponderado
Francia	Nelson & Siegel y Svensson	Precio del Bono Ponderado
Alemania	Svensson	Tasas Yield
Italia	Nelson & Siegel	Precio del Bono Ponderado
Japón	Splines	Precio del Bono
Noruega	Svensson	Tasas Yield
España	Svensson	Precio del Bono Ponderado
Suecia	Svensson	Tasas Yield
Gran Bretaña	Svensson	Tasas Yield
Estados Unidos	Splines ^a	Precios del Bono

^aSon funciones definidas por polinomios, se utilizan para interpolar puntos y ajustar curvas.

Tabla 2.7: Modelo Empleados por los Bancos Centrales.

Valuación de opciones sobre tasas de interés.

Los mercados financieros han sido parte de la globalización, un inversionista hoy en día tiene en su portafolio diversos instrumentos financieros los cuales están denominados en diferentes divisas y por ende en diferentes tasas de interés, esto lo expone a diversos riesgos. Debido a la necesidad de cubrir futuras pérdidas por movimientos en el mercado (tipo de cambio y tasas de interés) se han desarrollado los instrumentos financieros derivados.

Los derivados financieros pueden ser empleados no solo para la administración de riesgos, con un buen manejo de estos instrumentos, un inversionista puede reducir costos, mejorar rendimientos y les permite manejar su cartera con mayor certidumbre y precisión. Sin embargo, usados con fines especulativos pueden ser instrumentos muy riesgosos, ya que le permite al poseedor tener exposiciones a diferentes riesgos de mercado a cambio de un monto inicial (prima), lo cual es llamado apalancamiento. Por otra parte, la liquidez de estos instrumentos ha generado que diversos inversionistas utilicen los productos financieros derivados como medida de posicionamiento del mercado sobre un activo, por ejemplo, un inversionista puede extraer información implícita a cerca de la volatilidad, sesgo (Risk Reversal), curtosis (Butterfly) del peso mexicano a través de las opciones cambiarias vigentes en el mercado. Por otro lado, a través del posicionamiento en swaps de tasas de interés el inversionista puede interpretar que el mercado espera que el Banco Central mueva o deje sin cambios su tasa de referencia a un horizonte temporal dado.

Los primeros instrumentos financieros derivados se desarrollaron en Estados Unidos cerca del año 1850 (aunque se consideraban más una apuesta que un instrumento financiero), estos fueron principalmente forwards sobre materias primas (inicialmente maíz). Sin embargo, fue hasta 1919 donde se crearon reglas para la transacción de estos instrumentos, con esto nació *The Chicago Mercantile Exchange, CME*. Un evento importante para que el mercado de derivados dejase de ser casi en su totalidad sobre materias primas, fue el rompimiento del tratado de Bretton Woods ¹ con esto la creación de estos instrumentos sobre divisas retomaría mayor importancia. Los productos financieros derivados son negociados a través de dos diferentes mercados: Mercado organizado o Mercado bursátil, Mercado extrabursátil u OTC (Over The Counter).

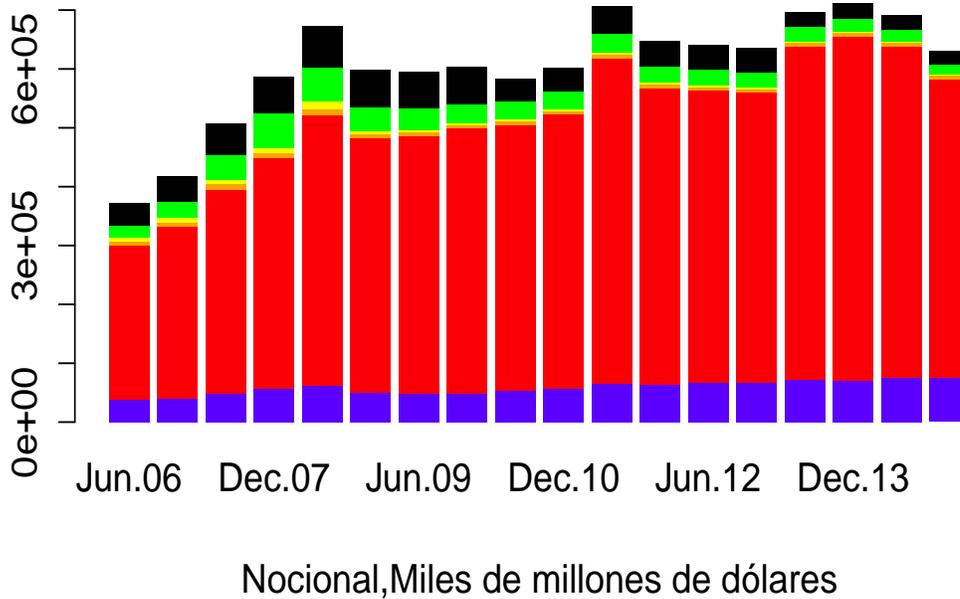
Estos cambios y la necesidad de un mejor manejo de los riesgos han llevado a desarrollar instrumentos financieros sobre otros activos o derivados más complejos. La evolución de estos instrumentos no ha parado, en estos días el principal cambio viene por modificaciones en el marco regulatorio, lo que se ha visto reflejado en cambios en la valuación así como nuevos supuestos para el desarrollo de estos instrumentos(ej: Credit Value Adjustment, CVA).

¹En este acuerdo se había pactado una equivalencia entre el oro y el dólar, con esto se buscaba mantener fija la divisa norteamericana y las divisas europeas tendrían que fluctuar en una banda del 1% con respecto al dólar

3.1. Mercado de Derivados

El Banco Internacional de Pagos (BIS) realiza una encuesta trianual acerca de los contratos vigentes en el mercado OTC de derivados, en los últimos datos (Diciembre de 2014) se muestra que el volumen de operación en este mercado ha caído aproximadamente 9%, de 691,670 a 630,150 mil millones de dólares.

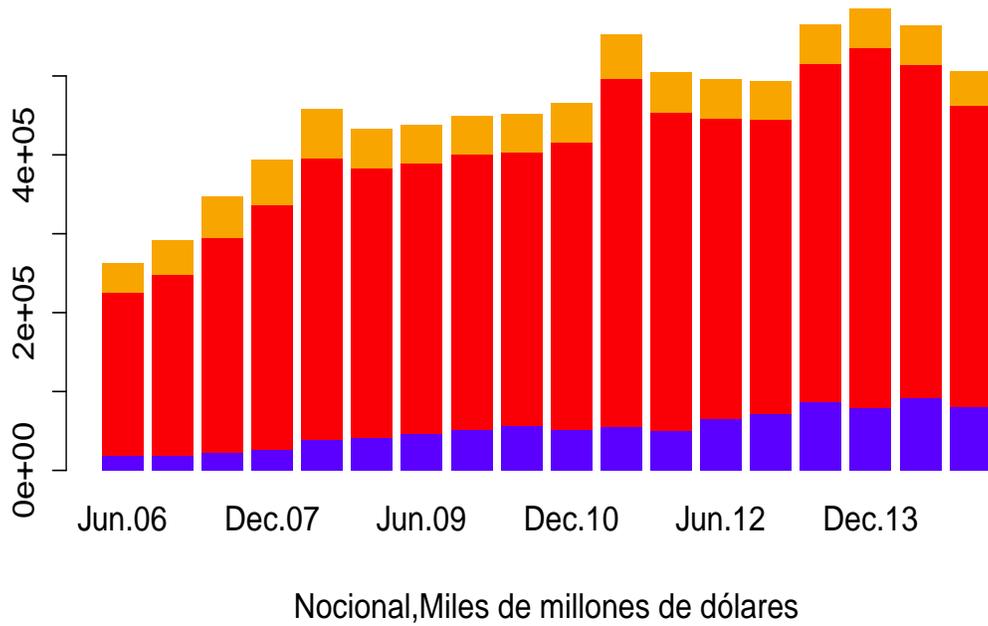
Contratos vigentes en el mercado OTC por subyacente



Gráfica 3.1: Tipo de subyacente:— Tipo de Cambio,— Tasas de interés,— Acciones,— Materias primas,— CDS,— No identificado.

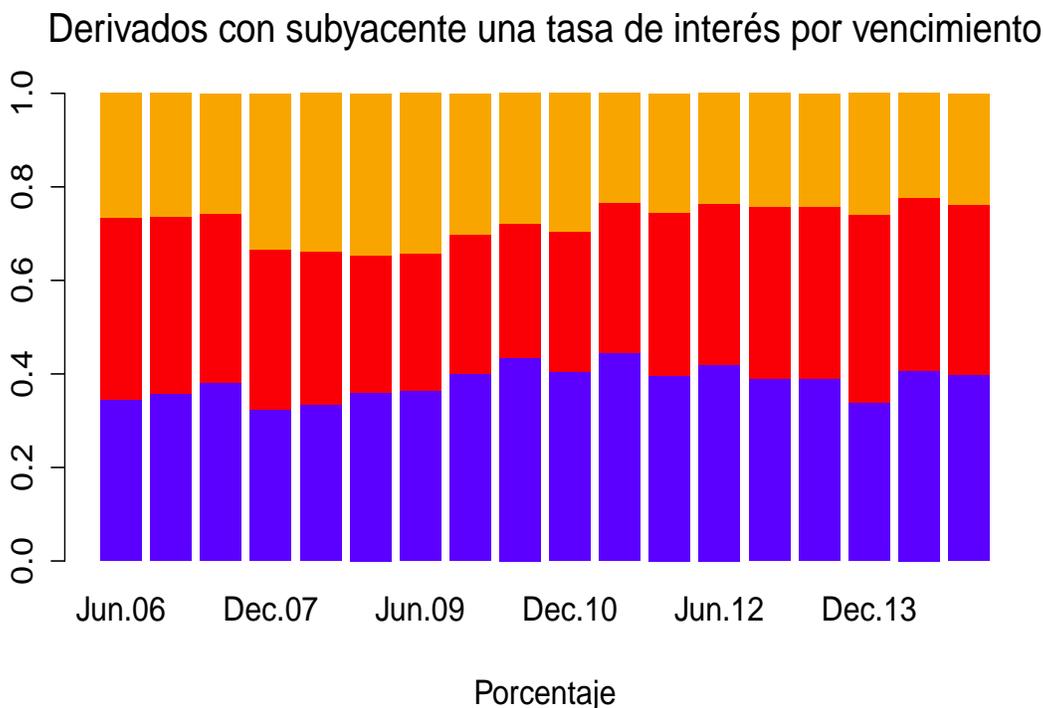
Sin embargo como se observa en la gráfica anterior, el principal subyacente en estos instrumentos es una tasa de interés, el cual representa el 80% del total de derivados vigentes, es decir, 505,454 mil millones de dólares. En el detalle, los swaps sobre tasas de interés representan más del 50% de este volumen (381,028 mil millones de dólares).

Derivados con subyacente una tasa de interés por instrumento



Gráfica 3.2: Vencimiento: — FRA, — Swaps, — Opciones.

La mayor liquidez de los derivados sobre tasas de interés se observa en aquellos instrumentos con vencimientos menores a un año, que en su mayoría son swaps y forwards mientras que las opciones tienen en su mayoría vencimientos entre uno y tres años.



Gráfica 3.3: Vencimiento: — Un año o menos, — Entre un año y cinco años, — Un año o menos,.

Este trabajo se centra en la valuación de opciones sobre tasas de interés, dado los datos publicados por el BIS se muestra la importancia que tienen estos instrumentos en el mercado financiero. Se busca presentar una forma de valuación distinta a la valuación clásica de los derivados sobre tasas de interés (Black 76).

3.2. Derivados sobre tasas de interés

Definición 19 (Derivado Financiero). Un producto financiero derivado es un instrumento que le da a su poseedor el derecho más no la obligación de comprar (call) o vender (put) un bien subyacente a una fecha pactada.

A continuación se define estos instrumentos cuando el subyacente es una tasa de interés

Definición 20 (Cap). Un cap es definido a través de una serie de caplets concatenados, es decir una serie de instrumentos que la fecha vencimiento del título i corresponde a la fecha de operación del instrumento $i + 1$.

Un caplet con fecha de operación t_i y fecha de liquidación $t_{i+\Delta}$ paga a su poseedor a la fecha de liquidación el siguiente flujo de efectivo:

$$N\tau(t_i, t_{i+\Delta}) (F(t_i, t_{i+\Delta}) - k)_+ \tag{3.1}$$

donde N es el valor nominal, τ es la fracción de tiempo que hay entre t_i y $t_{i+\Delta}$, F es la tasa forward del subyacente y k es la tasa strike.

Nota 15. Se entiendo por $(a)_+$ como el $\max(a, 0)$.

Por lo tanto, el precio de un cap al tiempo t con $t \leq T_\alpha$ esta dado por:

$$cap(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, t_i) N \tau(t_{i-1}, t_i) (F(t_{i-1}, t_i) - k)_+ \quad (3.2)$$

donde $D(t, t_i)$ es el factor de descuento que aplica entre t y t_i .

Un cap le da a su poseedor la protección ante futuras subidas en la tasa de interés, por ejemplo, una compañía tiene una deuda denominada en tasa LIBOR, esta compañía tiene que hacer pagos en $\{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ por un monto nocional de uno. Por otro lado, los economistas de esta compañía tienen la expectativa de que la tasa LIBOR se incrementará en un futuro, por ende buscan cubrir esta posición. Para esto pactan un cap con tasa strike k con fechas de liquidación iguales a las fechas de pago de la deuda, con esto su pasivo queda denominada en la siguiente tasa:

$$LIBOR - (LIBOR - k)_+ = \min(LIBOR, k)$$

Nota 16. Un cap puede ser analizado como un swap pagadero de tasa fija con la opcionalidad de ejercer el intercambio en los flujos.

de la misma manera que un cap, un floor esta definidos a través de floorlets concatenados.

Definición 21 (Floor). Un floorlet con fecha de operación t_i y fecha de liquidación $t_{i+\Delta}$ paga a su poseedor a la fecha de liquidación el siguiente flujo de efectivo:

$$N \tau(t_i, t_{i+\Delta}) (k - F(t_i, t_{i+\Delta}))_+ \quad (3.3)$$

Por lo tanto, el precio de un floor al tiempo t con $t \leq T_\alpha$ esta dado por:

$$floor(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, t_i) N \tau(t_{i-1}, t_i) (k - F(t_{i-1}, t_i))_+ \quad (3.4)$$

Un floor le da a su poseedor la protección ante futuras bajadas en la tasa de interés.

Nota 17. Un floor puede ser analizado como un swap pagadero de tasa variable con la opcionalidad de ejercer el intercambio de flujos.

Una relación importante es la paridad put-call, cuando el subyacente es una tasa de interés esta relación cambia de manera sustancial.

Definición 22 (Paridad Put-Call para derivados con subyacente una tasa de interés). Sea $cap(t)$ y $floor(t)$ el precio de estos instrumentos al tiempo t , entonces se cumple la siguiente relación:

$$cap(t) - floor(t) = \Pi_p(t) \quad (3.5)$$

donde $\Pi_p(t)$ es la prima de un swap pagadero de tasa fija con misma tasa strike, fecha de revisión y fecha de maduración que el cap y el floor.

Por lo tanto se dice que un cap o un floor están ATM (at the money) si:

$$k = R_{swap}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau(T_{i-1}, T_i)} \quad (3.6)$$

donde R_{swap} es la tasa par swap.

A continuación se muestra una tabla donde se observa cuando un cap o floor están ITM (in the money) u OTM (out the money).

Tipo de Derivado	ITM	OTM
Cap	$k < R_{swap}(t)$	$k > R_{swap}(t)$
Floor	$k > R_{swap}(t)$	$k < R_{swap}(t)$

Tabla 3.1: Opciones sobre tasas de interés dentro y fuera del dinero.

3.3. Modelo Black 76

En el año de 1973 los economistas Fisher Black y Myron Scholes en el trabajo *The pricing of options and corporate liabilities* desarrollaron una formula analítica para la valuación de opciones financieras, con este avance científico los traders tenían una herramienta confiable con la cual podían valorar estos instrumentos, los principales supuestos en este modelo es que la distribución del subyacente lleva una ley log-normal y que no existe oportunidades de arbitraje. Tres años después Fisher Black buscó desarrollar una mejora en el modelo antes mencionado, el principal ajuste que presenta el modelo *Black 76* esta en el término de tendencia y que la volatilidad depende del tiempo. Con estos cambios se desarrolló la valuación de opciones sobre bonos y tasas de interés (Caps, floors y swaption).

Este modelo es el más empleado en el mercado OTC para la valuación de opciones con subyacente tasa de interés. Cuando se desea valorar un cap se asume que la tasa forward de este instrumento se distribuye log-normal y si se desea valorar un swaption se asume que la tasa swap se distribuye de la misma manera. Sin embargo, diversos trabajos indican que si se valúan estos instrumentos bajo el modelo Black 76 estas tasas no se pueden distribuir simultáneamente log-normales, esta misma inconsistencia teórica se presenta en la distribución del precio de un bono el cual se distribuye log normal, lo que implicaría que la tasas swap se distribuye normal.

A pesar de estas incongruencias teóricas, la popularidad de este modelo en el mundo financiero no se ha visto limitada. Ya que los traders siguen utilizando el modelo de Black 76 para valorar opciones, sin embargo, dada su experiencia en el mercado de renta fija realizan ciertos ajustes al modelo, ya sea en la volatilidad implícita o directamente en la prima.

Proposición 4. Sea W_t , con $t \geq 0$, un \mathbb{Q} movimiento browniano, si la tasa forward F sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\partial F(t; T_1, T_2) = \sigma(t)F(t; T_1, T_2)\partial W_t^{\mathbb{Q}}$$

el precio de un caplet al tiempo T_0 con fecha de liquidación T_2 y tasa strike X esta dado por la siguiente ecuación

$$caplet[X, F, T_0, T_1, T_2] = \tau(T_1, T_2)P(T_0, T_2) \left(F(T_0; T_1, T_2) \exp\left(m - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \Phi(d_1) - X \Phi(d_2) \right) \quad (3.7)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(T_0; T_1, T_2)}{X}\right) + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt}{\sqrt{\int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt}$$

$$m = \frac{-1}{2} \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt$$

para simplificar la notación se toma $F(T_0; T_1, T_2) = F_2(T_1)$

Demostración. Se desea calcular el precio de un caplet que esta dado por

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(F_2(T_1) - X)_+]$$

aplicando el *Lema de itô* para la difusión de la tasa forward y la función $f(x) = \ln(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \partial f(F_2(T_1)) &= \frac{1}{F_2(T_1)} \left[\sigma_t F_2(T_1) \partial W_t^{\mathbb{Q}} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{F_2^2(T_1)} \partial F_2(T_1) \partial F_2(T_1) \right] \\ &= \sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial t \end{aligned}$$

$$\therefore \partial \ln(F_2(T_1)) = \sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial t$$

integrando de 0 a T se tiene que

$$\int_0^T \partial \ln(F_2(T_1)) = \int_0^T \left(\sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial t \right)$$

resulta

$$\ln\left(\frac{F_2(T)}{F_2(0)}\right) = \int_0^T \left(\sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial t \right)$$

por lo tanto

$$F_2(T) = F_2(0) \exp \left[\int_0^T \left(\sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial t \right) \right]$$

Se observa que el exponente de la expresión pasada tiene una distribución normal, lo que implica que la tasa forward se distribuye log-normal. Calculando la esperanza matemática y la varianza para saber los parámetros de esta distribución se tiene que:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \left(\sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial t \right) \right] = \int_0^T \frac{-1}{2} \sigma_t^2 \partial t$$

ya que la esperanza de una integral de $it\hat{\sigma}$ es cero.

Por otro lado, la varianza esta dado por:

$$Var^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \left(\sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial t \right) \right] = Var^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} \right]$$

Ya que la varianza de una constante es cero, ahora utilizando la definición de varianza se tiene que:

$$Var^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_0^T \sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} \right)^2 \right] - \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} \right] \right)^2$$

Por lo tanto, $Var^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_0^T \sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} \right)^2 \right]$. Ahora aplicando la isometría de $it\hat{\sigma}$ se tiene que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_0^T \sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} \right)^2 \right] = \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sigma_t^2 \partial t \right] = \int_0^T \sigma_t^2 \partial t$$

Definiendo $I(T) := \int_0^T \left(\sigma_t \partial W_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial t \right)$ se tiene que $I(T) \sim m + VN(0, 1)$; donde $m = \int_0^T \frac{-1}{2} \sigma_t^2 \partial t$ y $V^2 = \int_0^T \sigma_t^2 \partial t$.

Se tiene que $F_2(T) = F_2(0) \exp(I(T)) = F_2(0) \exp(m + VN(0, 1))$, ahora calculando el precio de la opción dada esta expresión

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(F_2(T_1) - X)_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(F_2(0) \exp(m + VN(0, 1)) - X)_+] = \int_{-\infty}^{\infty} (F_2(0) \exp(m + Vy) - X)_+ P_{N(0,1)}(y) dy$$

donde $P_{N(0,1)}(y)$ es la función de densidad de una distribución normal estándar.

se tiene que $F_2(0) \exp(m + Vy) - X > 0$ si y solo si

$$y > \frac{-\ln\left(\frac{F_2(0)}{X}\right) - m}{V} := \hat{y}$$

entonces

$$\int_{\hat{y}}^{\infty} (F_2(0) \exp(m + Vy) - X)_+ P_{N(0,1)}(y) dy = F_2(0) \exp(m - V^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{y}}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2} (y - V)^2\right) dy - X(1 - \Phi(\hat{y}))$$

realizando cambios de variable

$$F_2(0) \exp(m - V^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{y}-V}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2} (z)^2\right) dz - X(1 - \Phi(\hat{y})) = F_2(0) \exp(m - V^2) (1 - \Phi(\hat{y} - V)) - X(1 - \Phi(\hat{y}))$$

por lo tanto

$$F_2(0)\exp(m - V^2)\Phi(V - \hat{y}) - X\Phi(\hat{y})$$

finalmente

$$F_2(0)\exp(m - V^2)\Phi(d_1) - X\Phi(d_2) \quad (3.8)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(T_0; T_1, T_2)}{X}\right) + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt}{\sqrt{\int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt}$$

multiplicando por el factor de descuento a la expresión (3.8) se obtiene el precio de un caplet.

□

La deducción de la formula para valuar un floorlet es análoga.

Proposición 5. Sea W_t , con $t \geq 0$, un \mathbb{Q} movimiento browniano, si la tasa forward F sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\partial F(t; T_1, T_2) = \sigma(t)F(t; T_1, T_2)\partial W_t^{\mathbb{Q}}$$

el precio de un floorlet al tiempo T_0 con fecha de liquidación T_2 y tasa strike X esta dado por la siguiente ecuación

$$\text{floorlet}[X, F, T_0, T_1, T_2] = \tau(T_1, T_2)P(T_0, T_2) \left(X\Phi(-d_2) - F(T_0; T_1, T_2)\exp\left(m - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\Phi(-d_1) \right) \quad (3.9)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(T_0; T_1, T_2)}{X}\right) + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt}{\sqrt{\int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt}$$

$$m = \frac{-1}{2} \int_0^{T_1} \sigma_t^2 dt$$

A partir de (3.8) y (3.9) se tiene que:

Definición 23 (Formula para la valuación de un cap). Sea un cap con fecha de inicio del contrato en T_α y fecha de vencimiento T_β , tasa strike k y nocional N , el precio de un cap al tiempo t esta dado por la siguiente expresión:

$$cap(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, t_i) N \tau(t_{i-1}, t_i) (caplet[k, F, t, t_{i-1}, t_i]) \quad (3.10)$$

Definición 24 (Formula para la valuación de un floor). Sea un floor con fecha de inicio del contrato en T_α y fecha de vencimiento T_β , tasa strike k y nocional N , el precio de un floor al tiempo t esta dado por la siguiente expresión:

$$floor(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, t_i) N \tau(t_{i-1}, t_i) (floorlet[k, F, t, t_{i-1}, t_i]) \quad (3.11)$$

3.4. Aplicación de los modelos en la valuación de opciones.

En este trabajo se empleó el modelo Black 76 para la valuación de opciones sobre Cetes con vencimiento 28 días, se generó una calculadora en *Visual Basic for Application* para interpolar sobre la curva de Cetes, además, se crearon funciones para determinar la convención con la cual se iba a valorar el derivado (Act/360 o Act/365) y que la valuación sea sobre un día laboral² considerando fines de semana y vacaciones.

Dada la nula liquidez de las opciones sobre Cetes a cualquier vencimiento, se empleo volatilidad histórica³ la cual fue calculada a través de la desviación estándar de los rendimientos logarítmicos de la tasa Cete con vencimiento 28 días anualizada a través del factor $\sqrt{252}$.

En el capitulo dos se emplearon los modelos Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross para el ajuste de las curvas gubernamentales (Bonos M y Udibonos). Sin embargo, otra aplicación de estos modelos es la valuación de opciones sobre tasas de interés. Sin embargo, bajo estas dinámicas estocásticas la tasa forward no tiene una distribución log-normal. Dadas estas discrepancias en su dinámica estocástica se realizó un comparativo entre valorar opciones bajo diferentes modelos.

El enfoque que tuvo esta valuación bajo los modelos Vasicek y CIR es el calculo de las siguientes expresiones.

Si se desea valorar un caplet:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(r_t - k)_+] \quad (3.12)$$

donde r_t es la tasa corta bajo la dinámica del modelo estocástico a elegir (Vasicek o Cox-Ingersoll-Ross). Mientras que para un floorlet se desea calcular la siguiente expresión:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(k - r_t)_+] \quad (3.13)$$

Se valoraron opciones cap y opciones floor sobre el Cete con vencimiento 28 días, con los parámetros bajo la medida \mathbb{Q} mencionados en el capitulo dos, la valuación se realizó mediante simulación Montecarlo. Para calcular las expresiones (3.12) y (3.13) se empleó el siguiente algoritmo:

²Se empleó la metodología *Next*, la cual consiste en que si el día de revisión es un día no laboral la fecha a considerar es la inmediata superior.

³En mercados líquidos, la valuación de opciones se realiza a través de volatilidades implícitas. Las cuales pueden ser obtenidas a través de plataformas electrónicas como Bloomberg.

- i) Generar una posible trayectoria de la tasa corta ya sea bajo el modelo Vasicek o el modelo CIR.
- ii) Calcular el pay-off de la opción caplet o floorlet bajo la trayectoria simulada.
- iii) Repetir este proceso n veces.

Se generaron 1,000 simulaciones de las difusiones antes mencionadas, además de calcular el valor esperado del pay-off se necesita multiplicar por el factor de descuento, para esto, se descontó con la curva de descuento implícita en cada modelo.

Las opciones cap y floor fueron revisables cada 28 días (Para los modelos Black 76, Vasicek y CIR). La prima se presenta como proporción del monto nominal de la opción.

Tomando los parámetros del periodo de 8 marzo de 2013 a 9 de junio de 2015, los resultados fueron los siguientes:

Para el modelo Black 76 la volatilidad anualizada fue de 25% mientras que la tasa spot del Cete con vencimiento a 28 días fue de 3,03%. Esta tasa spot fue tomada como la tasa inicial (r_0) para los modelos Vasicek y CIR.

Número de revisiones	Black 76	Vasicek	CIR
2	0,0560 %	0,0464 %	0,0423 %
4	0,2399 %	0,2005 %	0,2020 %
6	0,5965 %	0,5083 %	0,4922 %
8	1,6721 %	0,9570 %	0,9732 %

Tabla 3.2: Prima como porcentaje del nominal de una opción cap ATM bajo Cetes 28 días.

Número de revisiones	Black 76	Vasicek	CIR
2	0,0115 %	0,0428 %	0,0284 %
4	0,0506 %	0,1785 %	0,1114 %
6	0,1198 %	0,4261 %	0,2498 %
8	0,1527 %	0,7679 %	0,4486 %

Tabla 3.3: Prima como porcentaje del nominal de una opción floor ATM bajo Cetes 28 días.

Para periodo de 6 junio de 2014 a 9 de junio de 2015, se presentó una volatilidad anualizada de 31,31%, los resultados fueron los siguientes:

Número de revisiones	Black 76	Vasicek	CIR
2	0,0581 %	0,0011 %	0,0014 %
4	0,2558 %	0,0041 %	0,0041 %
6	0,6404 %	0,0087 %	0,0096 %
8	1,7308 %	0,0151 %	0,0153 %

Tabla 3.4: Prima como porcentaje del nominal de una opción cap ATM bajo Cetes 28 días.

Número de revisiones	Black 76	Vasicek	CIR
2	0,0158 %	0,0304 %	0,0314 %
4	0,0686 %	0,1022 %	0,1055 %
6	0,1655 %	0,2117 %	0,2190 %
8	0,2259 %	0,3648 %	0,3744 %

Tabla 3.5: Prima como porcentaje del nominal de una opción floor ATM bajo Cetes 28 días.

3.5. Conclusión

Para los modelos implícitos en el primer periodo, se observó que la valuación de un Cap ATM es sumamente consistente bajo las tres dinámicas estocásticas. Sin embargo las discrepancias son proporcionales al número de periodos de revisión del cap. Por otro lado, tanto el modelo Vasicek y el modelo CIR arrojan primas inferiores comparado con el modelo Black 76. Este se debe principalmente que los modelos Vasicek y CIR son modelos con reversión a la media, esto implica que el subyacente tiene una cota superior dada por el parámetro θ en ambos modelos, mientras que para el modelo Black 76 la difusión no esta acotada.

Para la valuación del floor sobre Cetes a 28 días, las primas presentaron diferencias importantes entre los tres modelos. Entre los modelos Vasicek y CIR las diferencias pueden ser explicadas principalmente a que para el primer modelo la velocidad de convergencia a la media (k) y la media de largo plazo (θ) son menores a lo observado en el modelo CIR, pero superiores a la tasa strike en ambos modelos. Esto sugiere que el proceso bajo la dinámica del modelo Vasicek es más volátil ocasionando que más veces el pay-off sea no negativo. Además la forma funcional de la distribución del modelo CIR (Ji-cuadrada) le da mayor probabilidad a incrementos en la tasa corta sobre decrementos en esta tasa. El modelo más parecido a Black 76 en términos de prima a cobrar es el modelo Vasicek, sin embargo las discrepancias son de hasta 30 puntos base.

Para los modelos implícitos en el periodo 6 de junio de 2014 a 9 de junio de 2015 las discrepancias entre los modelos Vasicek y CIR son prácticamente nulas, tanto para la valuación de un cap y un floor. Sin embargo, comparado con el modelo Black 76 la prima de un cap bajo este modelo es superior en hasta 170 puntos base. Esto se debe a que los modelos Vasicek y CIR representan un único ciclo de política monetaria (tasa de referencia igual a 3%), por ende el factor de convergencia a la media es considerablemente mayor comparado con el otro periodo, obligando al proceso a converger más rapido a una media de largo plazo inferior a la tasa strike. Por esta misma razón la prima del floor es más alta para los modelos Vasicek y CIR.

Fundamentos de Probabilidad

En esta sección se presentan fundamentos teóricos de probabilidad, procesos estocásticos y calculo estocástico, debido al alcance de este trabajo solo se enuncian dichos resultados. Para más información se puede consultar [4], [15], [16]

A.1. Probabilidad

Definición 25 (Espacio de Probabilidad). Es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde Ω es un conjunto arbitrario, \mathcal{F} es una familia de subconjuntos de Ω que tiene la estructura de σ -algebra, i.e.

- i) $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- ii) Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
- iii) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

y una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ llamada medida de probabilidad y cumple

i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ii) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ son conjuntos disjuntos dos a dos i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, se tiene que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Definición 26 (Variable Aleatoria). Es una función X con dominio Ω y contradominio \mathbb{R} , i.e. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que cualquier \mathcal{B} boreliano en \mathbb{R} cumple $X^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{F}$.

Las variables aleatorias están caracterizadas por su función de distribución, este concepto se menciona a continuación.

Definición 27 (Función de Distribución de X). Es una función $F_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, definida como

$$F_X(b) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq b\}) = \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty, b]))$$

Definición 28 (Función de Densidad de X). Si existe una función $f_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$F_X(b) = \int_{-\infty}^b f_X(y) dy$$

entonces $f_X(\cdot)$ es la función de densidad de X .

Nota 18. Si $F_X(\cdot)$ es diferenciable entonces se cumple la siguiente relación

$$F'_x(x) = f_X(x)$$

Ejemplo Una variable aleatoria X tiene ley normal $N(\mu, \sigma^2)$ si

$$\mathbb{P}(X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Definición 29 (Esperanza). La esperanza de una variable aleatoria X se define como la integral de X con respecto a la medida \mathbb{P} *i.e.*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x d\mathbb{P}_X(x)$$

Existen diversos criterios de convergencia, en este texto se presentan los dos utilizados para desarrollar la teoría de modelos estocásticos de tasas de interés.

Teorema 4 (Ley de los Grandes Números). Sea X_1, X_2, \dots sucesión variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{c.s.} \mu$$

Teorema 5 (Teorema Central del Limite). Sea X_1, X_2, \dots sucesión variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $\forall n, \mathbb{E}[X_n] = \mu$ y $Var(X_n) = \sigma^2 < \infty$ entonces

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

A.2. Procesos Estocásticos.

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias indexadas por un conjunto T que puede ser números naturales o reales no negativos.

Definición 30 (Filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$). Una filtración sobre un espacio de probabilidad es una familia creciente de σ -*algebras*, tal que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+h} \subseteq \mathcal{F}$, con $h > 0$.

Nota 19. La filtración al tiempo \mathcal{F}_t intuitivamente modela la información o historia del proceso estocástico hasta el momento t .

Definición 31 (Proceso Medible). Se dice que el proceso estocásticos $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es \mathcal{F}_t -medible con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si para todo $t \geq 0$

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_t] = X_t$$

Definición 32 (Proceso Predecible). Se dice que el proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso predecible respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si para todo $t \geq 0$ la variable X_t es \mathcal{F}_{t-1} -medible

Definición 33 (Movimiento Browniano). Un \mathbb{P} -movimiento browniano es un proceso estocástico $\{W_t\}_{t \geq 0}$ que cumple las siguientes propiedades:

- i) $W_0 = 0$.
- ii) Tiene trayectorias continuas $t \rightarrow W_t(\omega)$.
- iii) $W_{s+t} - W_s \sim N(0, t)$ y es independiente de \mathcal{F}_s .

Nota 20. W_t es no diferenciable c.s.

Este proceso estocástico es piedra angular de la teoría financiera, sin embargo, el proceso por si solo no logra modelar de manera adecuada a los contingentes financieros, el siguiente proceso es una transformación del movimiento browniano y es utilizado para esta teoría.

Definición 34 (Movimiento Browniano Geométrico). Sea $\{S_t\}_{t \geq 0}$ proceso estocástico, es un movimiento browniano geométrico $S_t = \exp(\sigma W_t + \mu t)$ si cumple:

- i) W_t es un \mathbb{P} -movimiento browniano.
- ii) μ es el drift o tendencia del proceso.
- iii) σ la volatilidad del proceso.

La notación \mathbb{P} -movimiento browniano tomara más importancia en la siguiente sección, indica que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano bajo la medida \mathbb{P} .

Definición 35 (Martingala). Un proceso estocástico $\{M_t\}$ es una \mathbb{P} -martingala *sii*

- i) $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty \forall t$.
- ii) $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \forall s \leq t$.

Otro proceso estocástico con aplicaciones importantes el proceso poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$, el cual modela un evento que ocurre aleatoriamente en un intervalo de tiempo dado.

Definición 36 (Proceso Poisson). Un proceso \mathbb{P} -Poisson de parámetro $\lambda > 0$ es un proceso con trayectorias no decrecientes y que cumple:

- i) $N_0 = 0$
- ii) $N_{t+h} - N_t$ es independiente de \mathcal{F}_t , con $h \geq 0$.
- iii) $N_{t+h} - N_t \sim \text{Poisson}(\lambda h) \quad h > 0$.

Definición 37 (Proceso Poisson Compuesto). Sea $\{N_t\}_{t \geq 0}$ un proceso \mathbb{P} -poisson y sea Y_1, Y_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas además independientes del proceso, se define \mathbb{P} -poisson compuesto como:

$$X_t = \sum_{i=0}^{N_t} Y_i \quad \text{con } Y_0 = 0$$

A.3. Calculo Estocástico.

En el calculo newtoniano el resolver una ecuación diferencial ordinaria implica aproximar por medio de rectas una función o trayectoria, una generalización de este modelo es agregar un componente aleatorio, *i.e*

$$dX_t = f(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad (\text{A.1})$$

donde $f(X_t)dt$ es el componente de la ecuación diferencial ordinaria(determinista), dW_t es un incremento infinitesimal del movimiento browniano, este modelo es llamado *ecuación diferencial estocástica*, la cuestión importante es que el movimiento browniano es no derivable con probabilidad 1, para darle más sentido al concepto anterior, se define por medio de la representación en integrales.

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s \quad (\text{A.2})$$

El ultimo termino de la ultima ecuación no puede resolverse por medio de una integral de Riemann-Stieltjes, por la ausencia de derivabilidad del movimiento browniano, así que se desarrolla otro tipo de integral, Integral Estocástica de $It\hat{o}$, esto da como resultado

- i) $\mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma(X_s) dW_s \right] = 0$
- ii) $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \sigma(X_s) dW_s \right)^2 \right] = \int_0^t \mathbb{E}[\sigma(X_s)^2] ds$ — *Isometría de Itô*.

Teorema 6 (Formula de Itô). Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico que cumple $dX_t = f(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ y $\varphi(\cdot, x)$ una función suave entonces

$$d\varphi(t, X_t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dX_t dX_t \quad (\text{A.3})$$

donde $dt dt = 0$, $dt dW_t = 0$, $dW_t dW_t = dt$.

Para ejemplificar el uso de este teorema, se toma un proceso base para los modelos estocásticos de tasa de interés, proceso de *Ornstein-Uhlenbeck*.

Ejemplo Sea $dX_t = (b_t - a_t X_t)dt + \sigma_t dW_t$ (bajo cambios de variable es el modelo Vacisek), tomando $Y_t := \varphi(X_t) = X_t^2$, encontrar la ecuación diferencial de Y_t .

Sabemos que $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2X_t$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2$, sustituyendo en (6) se tiene

$$d\varphi(X_t) = 2X_t[(b_t - a_t X_t)dt + \sigma_t dW_t] + \frac{1}{2} * 2[(b_t - a_t X_t)dt + \sigma_t dW_t]^2$$

tomando $X_t = \sqrt{Y_t}$ resulta $dY_t = (\sigma_t^2 + 2b_t \sqrt{Y_t} - 2a_t Y_t)dt + 2\sigma_t \sqrt{Y_t} dW_t$, si $b_t = 0$ y bajo cambios de variable se tiene el modelo CIR

Al definir el proceso browniano y poisson, se utilizo la notación \mathbb{P} -browniano y \mathbb{P} -poisson, esto es por que una variable aleatoria depende de la medida sobre la cual este definida *i.e*. posiblemente una variable aleatoria tiene distinta distribución, media o varianza si el espacio de probabilidad esta sobre otra medida, por ejemplo \mathbb{Q} , en general en la teoría de ecuaciones diferenciales se debería notar la medida sobre la cual se esta trabajando

$$dX_t = f^{\mathbb{P}}(X_t)dt + \sigma^{\mathbb{P}}(X_t)dW_t^{\mathbb{P}} \quad (\text{A.4})$$

donde todos los elementos de (A.4) están sobre la medida \mathbb{P} .

Definición 38 (Medidas Equivalentes). Se dice que \mathbb{P} y \mathbb{Q} sobre el espacio (Ω, \mathcal{F}) son medida equivalentes si para todos $A \in \Omega$ se cumple $\mathbb{P}(A) > 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) > 0$

Existe un concepto de Teoría de la Medida que indica la *distorsión* que tiene una variable aleatoria cuando se pasa de una medida \mathbb{Q} a una medida \mathbb{P} .

Definición 39 (Derivada de Radon-Nikodym). Para medidas equivalentes \mathbb{P} y \mathbb{Q} se define la variable aleatoria $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ como

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \int_{\Omega} x d\mathbb{Q} = \int_{\Omega} x \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[X \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right]$$

donde X es una variable aleatoria.

En la teoría de finanzas matemáticas, el teorema que sigue es fundamental, sin embargo, dado el alcance de este trabajo se presenta una variante del teorema original.

Teorema 7 (Girsanov). Sea W_t un \mathbb{P} -movimiento browniano con \mathbb{Q} y \mathbb{P} medidas equivalentes entonces existe un proceso γ_t que es \mathcal{F} -predecible que cumple

$$\widehat{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$$

y \widehat{W}_t es un \mathbb{Q} -movimiento browniano y además se tiene al tiempo T que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right)$$

Esto indica en términos diferenciales que el drift es el único elemento que cambia cuando hay un cambio de medida.

Teorema 8 (Representación Martingala). Sea $\{M_t\}$ y $\{N_t\}$ procesos martingala con respecto a una medida \mathbb{P} tal que la volatilidad σ_t del proceso $\{M_t\}$ es distinta de cero, entonces existe un único proceso α_t \mathcal{F} -predecible tal que

$$\int_0^T \alpha_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$$

y cumple que

$$N_t = N_0 + \int_0^t \alpha_s dM_s$$

Teoría de Bonos

Definición 40 (Bono). Instrumento financiero el cual esta compuesto por cuatro componentes: Maduración, tasa de rendimiento, tasa cupón y Valor Nominal. Existen dos tipos de bonos principalmente: bono cupón cero (tasa cupón igual a cero) y bono con cupones (el cual otorga rendimientos a su poseedor de manera periódica). Los componente que caracterizan a un bono, se explican a continuación:

- i) Maduración: Fecha en la cual el bono vence.
- ii) Tasa de Rendimiento: Es la ganancia que recibe el poseedor del bono por mantener este instrumento hasta su vencimiento.
- iii) Valor Nominal: Es el valor que tiene el instrumento al se emitido.
- iv) Tasa cupón: Es el interés que paga el bono antes de su maduración.

La manera en la que se puede valor un bono es utilizando la teoría de valor presente, es decir, el precio de un bono será el valor presente de los flujos futuros que recibirá el poseedor de este instrumento. Sin embargo, en la teoría de bonos, existen dos tipos de precio: Precio Sucio y Precio Limpio.

Definición 41 (Precio Sucio). Es el valor presente de los flujos futuros que recibirá el poseedor de instrumento a la fecha de valuación

Definición 42 (Precio Limpio). Es el precio sucio menos los intereses devengados; por intereses devengados se entiende como la proporción del pago de cupón que ya recibió el poseedor del bono al momento de valuación

Sea un bono con maduración T_n , valor nominal N y $\{C_i\}_{i=1}^n$ cupones, por la teoría del valor presente del bono se tiene que:

$$P(t) = \sum_{i=1}^n C_i P(t, T_i) + P(t, T_n)N \quad (\text{B.1})$$

donde $P(t, T_i)$ es el valor presente en t de una unidad monetaria al tiempo T_i , asumiendo que se tiene un interés continuo $P(t, T_i) = e^{-R(t, T_i)\tau(t, T_i)}$ donde $R(t, T_i)$ es la tasa de rendimiento del bono.

Si $t \in (t_i, T_j]$ en la ecuación (B.1), es decir, se desea valor el bono entre fechas de pago de cupón. El precio sucio esta dado por la expresión pasada. Sin embargo, definiendo el interés devengado como:

$$AI(i, t) = C_i \frac{t - T_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} \quad (\text{B.2})$$

El precio limpio esta dado por:

$$P_{limpio}(t) = P(t) - AI(i, t)$$

Nota 21. En fecha de pago de cupón el precio limpio y el precio sucio son los mismo

El mercado ha desarrollado diversas herramientas matemáticas para poder cuantificar el riesgo que tiene un poseedor de un bono, entre las que destacan son: duración y convexidad.

Definición 43 (Duración). Es la medida de riesgo más famosa en le mercado de renta fija, sirve para medir la sensibilidad que tiene un bono ante movimientos en la curva de rendimiento Sea y la tasa de interés del bono con precio P , entonces por duración se entiende por

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{-D}{\Delta y}$$

donde ΔP es le cambio en el precio del bono por movimientos infinitesimales en la tasa y .

Δy es el cambio infinitesimal en la tasa de rendimiento.

D es la duración de bono.

Es decir, la duración mide el cambio porcentual en el precio del bono debido a movimientos paralelos en la curva de rendimiento.

$$\therefore D = \frac{-1}{P} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{B.3})$$

La duración también puede ser entendida como el plazo de un único flujo tal que equivalga a la serie de todos los flujos a recibir. Es decir, un bono cupón cero tiene por duración el plazo a maduración de instrumento.

Por otra parte, se tiene que se puede aproximar el precio de un bono dada la siguiente expresión:

$$\Delta P = -D * P * \Delta y$$

Definición 44 (Convexidad). Existen bonos que pueden tener variaciones similares en el precio debido a cambios marginales en la curva de rendimiento. Sin embargo, la convexidad busca medir la sensibilidad del precio del bono ante movimientos de segundo orden la curva . La convexidad esta dada por

$$C = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 y} \quad (\text{B.4})$$

Utilizando la aproximación de Taylor en el precio del bono, se tiene que el cambio en el precio esta dado por:

$$\Delta P = -D * P * \Delta y + \frac{1}{2} C (\Delta y)^2$$

Nota 22. La duración del bono juega el mismo papel que tiene la delta en las opciones y la convexidad es similar a la gamma.

Estimación por método histórico de los modelos estocásticos.

El método histórico busca estimar los parámetros a través de una serie de datos históricos, los parámetros representan la dinámica observada durante el periodo de análisis. Las principales desventajas de este método es el costo computacional que conlleva hacer la estimación. Por otro lado, los parámetros obtenidos dependerán del número de datos utilizados para la estimación así como el comportamiento estadístico de estos (media, mediana, curtosis y varianza). Mientras que la principal ventaja es que con esta estimación se pueden hacer diferentes análisis de riesgos y el ajuste es sobre un nodo de la curva. En este trabajo se utilizaron los nodos de la curva de Certificados de Tesorería (Cetes) con plazo 1,7,28,60,91,182,270 y 365 días. La cual es construida por el Proveedor Integral de Precios, donde el nodo a un días es la tasa correspondiente al fondeo gubernamental mientras que los demás nodos son calculados a través de operaciones realizadas en estos instrumentos.

Método Montecarlo.

El método Montecarlo es una técnica de análisis numérico que consiste en generar números aleatorios¹ y así resolver problemas estocásticos y deterministas de manera aproximada con apoyo al generador de números pseudoaleatorios de una computadora.

Fue en el año de 1947 que *John Von Neumann* formalizo el método, donde la principal herramienta es la *Ley de los Grandes Números* que consiste en aproximar la esperanza de una variable aleatoria por medio de la media muestral, es decir, para x_1, x_2, \dots, x_n una muestra aleatoria se tiene que $\mathbb{E}[X] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ en general

$$\mathbb{E}[g(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$$

la popularidad de este método consiste en la gran aproximación que da a las soluciones y este depende del tamaño de la muestra, a continuación se muestra la estimación del error para el método Montecarlo.

Sea $I = \mathbb{E}[g(X)]$ y x_1, x_2, \dots, x_n muestra aleatoria de la distribución $F_X(x)$ con primer y segundo momento finito, denotamos $\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$ y a σ como la desviación estándar de $g(x)$, ahora, por el *Teorema del Limite Central* se tiene que:

¹De ahí proviene su nombre, Casino Montecarlo, donde se juega la ruleta que es por excelencia el juego que genera números al azar.

$$Z_n := \frac{I - \hat{I}_n}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left|\frac{I - \hat{I}_n}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < c\right) = \mathbb{P}\left(|I - \hat{I}_n| < \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx \alpha \quad (\text{C.1})$$

tomando $\sigma \approx 1$ se tiene los siguientes resultados:

Tamaño de la Muestra	Error $ I - I_n $
1	1.96
100	0.196
10000	0.0196

Tabla C.1: Errores entre el valor estimado y el valor real en el método Montecarlo.

de (C.1) se concluye que $\mathbb{P}\left(\hat{I}_n - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} < I < \hat{I}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx \alpha$ i.e. con probabilidad α $I \in \left(\hat{I}_n - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{I}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Nota 23. Si se desea obtener un intervalo de longitud 10^{-2} con probabilidad de 0.95 entonces utilizando (C.1) se concluye que el tamaños de la muestra debe ser $n > (1,96\sigma)^2 10^4$.

La aplicación del método Montecarlo a las finanzas esta basado en resolver problemas que muchas veces no tiene solución analítica sencilla o simplemente no existe una solución analítica, como por ejemplo la valuación de opciones exóticas (bermuda, americana, etc), **en este trabajo se emplea para aproximar el valor esperado de la tasa corta en un horizonte temporal dado y con un número de trayectorias del proceso ya simuladas.**

Método histórico Vasicek.

Para la estimación de los parámetros del modelo Vasicek bajo este método se utilizaron nodos de la curva de Cetes, cabe destacar lo siguiente:

- i) Los nodos con plazo inferior a 91 días son estadísticamente significativos, i.e., solo estos nodos pueden ser ajustados bajo este modelo.
- ii) Se analizan dos periodos, el primer periodo comprende del 6 de junio de 2014 a 9 de julio de 2015, ya que para este periodo no hay cambios en la tasa de referencia, si se incluyeran periodos con cambios en la decisión de política monetaria de Banco de México se obtendrían parámetros que involucran saltos. Por otra parte, el periodo del 8 de marzo de 2013 a 9 de julio de 2015 incluye cambios en la tasa de referencia y se utilizó para poder contrarrestar los diferentes resultados.
- ii) Para toda las estimaciones se supone una convención de días de *Act/360*.

A continuación se presenta el resumen estadístico de estos periodos.

Plazo	Media	Mediana	Varianza	Curtosis
1	3,03	3,02	0,0278%	44,89
7	2,92	2,94	0,0771%	4,6216
28	2,90	2,91	0,0442%	6,56
60	2,96	2,95	0,0190%	32,65
91	2,98	2,95	0,0123%	50,95
180	3,08	3,04	0,0112%	74,76
270	3,15	3,12	0,0123%	75,39
360	3,26	3,19	0,0151%	51,54

Tabla C.2: Resumen estadístico de la curva de Cetes para el periodo del 6 de junio de 2014 a 9 de julio de 2015.

Plazo	Media	Mediana	Varianza	Curtosis
1	3,41	3,49	0,0182%	53,85
7	3,27	3,15	0,0884%	3,74
28	3,24	3,16	0,0417%	3,94
60	3,29	3,28	0,0154%	24,14
91	3,30	3,31	0,0084%	51,87
180	3,41	3,46	0,0072%	86,72
270	3,46	3,53	0,0084%	79,08
360	3,53	3,59	0,0105%	51,32

Tabla C.3: Resumen estadístico de la curva de Cetes para el periodo del 8 de marzo de 2013 a 9 de julio de 2015 .

Tomando la discretización de (2.26) por el el método de Euler, se tiene que:

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \Rightarrow r_{t+\Delta_t} - r_t = k(\theta - r_t)\Delta_t + \sigma\sqrt{\Delta_t}Z_t \iff \frac{r_{t+\Delta_t} - r_t}{\sqrt{\Delta_t}} = k\theta\sqrt{\Delta_t} - kr_t\sqrt{\Delta_t} + \sigma Z_t; \text{ con } Z_t \sim N(0, 1)$$

donde $\Delta_t = \frac{1}{250}$ y σ es la volatilidad del proceso de la tasas corta observada en el periodo de medición, tomando $y_t = \frac{r_{t+\Delta_t} - r_t}{\sqrt{\Delta_t}}$, $x_t^1 = \sqrt{\Delta_t}$, $x_t^2 = -r_t\sqrt{\Delta_t}$, $\beta_1 = k\theta$ y $\beta_2 = -k$. Se obtiene la siguiente regresión lineal múltiple que pasa por el origen:

$$y_t = \beta_1 x_t^1 + \beta_2 x_t^2$$

Por lo tanto, resolviendo la ecuación $\varepsilon_t = \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_{t+\Delta_t} - r_t}{\sqrt{\Delta_t}} - k\theta\sqrt{\Delta_t} + kr_t\sqrt{\Delta_t} \right)^2$ se estima el vector de parámetros $z = (k, \theta)$. Donde n es el número de datos que se utilizaron para ajustar el nodo k de la curva de Cetes.

Para los datos observados en 23 se obtuvieron los siguientes parámetros para los diferentes nodos:

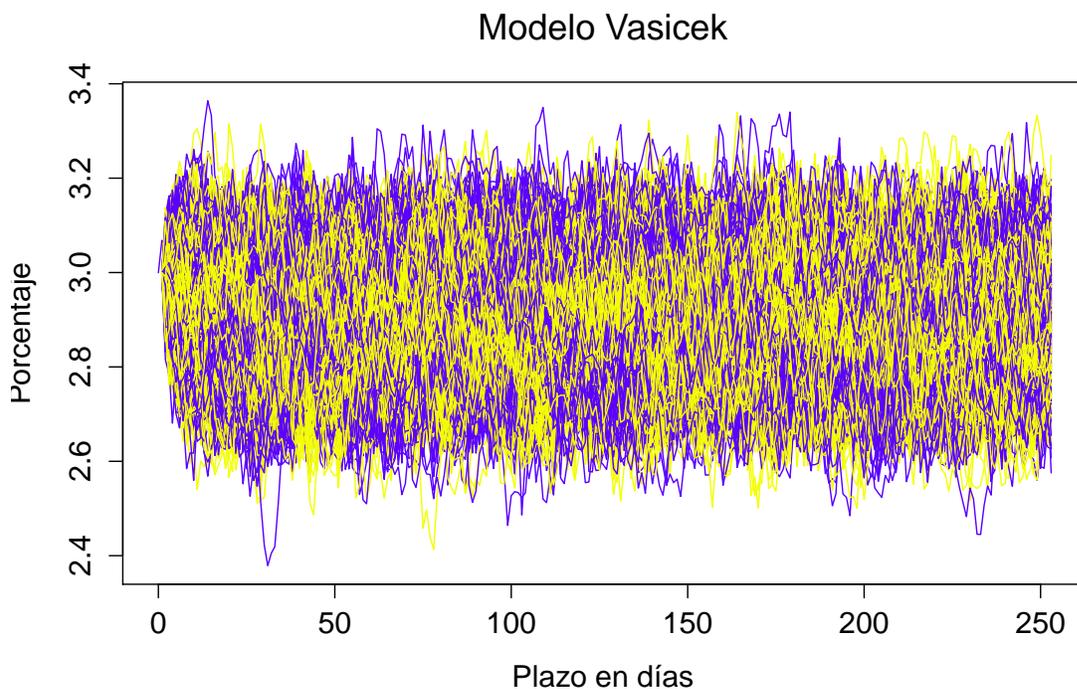
Nota 24. Donde β_1 y β_2 son los parámetros estimados en la regresión lineal. Con $\beta_1 = k\theta$ y $\beta_2 = -k$

Plazo	Significancia de β_1	Significancia de β_2	θ	k	σ
1	$2 * 10^{-6}$	$2 * 10^{-6}$	3,029 %	122,73	0,57 %
7	$1,78 * 10^{-9}$	$1,78 * 10^{-9}$	2,92 %	64,27	1,13 %
28	$1,17 * 10^{-5}$	$1,17 * 10^{-5}$	2,90 %	35,62	0,86 %
60	0,004	0,004	2,96 %	15,88	0,52 %
91	0,048	0,049	2,99 %	8,14	0,39 %
180	0,163	0,168	3,12 %	4,36	0,37 %
270	0,118	0,112	3,17 %	4,64	0,39 %
360	0,259	0,276	3,38 %	2,68	0,50 %

Tabla C.4: Estimación bajo el modelo Vasicek de la curva de Cetes para el periodo del 6 de junio de 2014 a 9 de julio de 2015.

Dado los datos anteriores, se observa que los nodos menores a 91 días resulta en parámetros significativos. Lo cual va en línea con que el proceso $\{r_t\}$ es una tasa corta y tal como mencionan *Brigo-Mercurio*, esta tasa puede ser aproximada por una tasa simple de corto plazo.

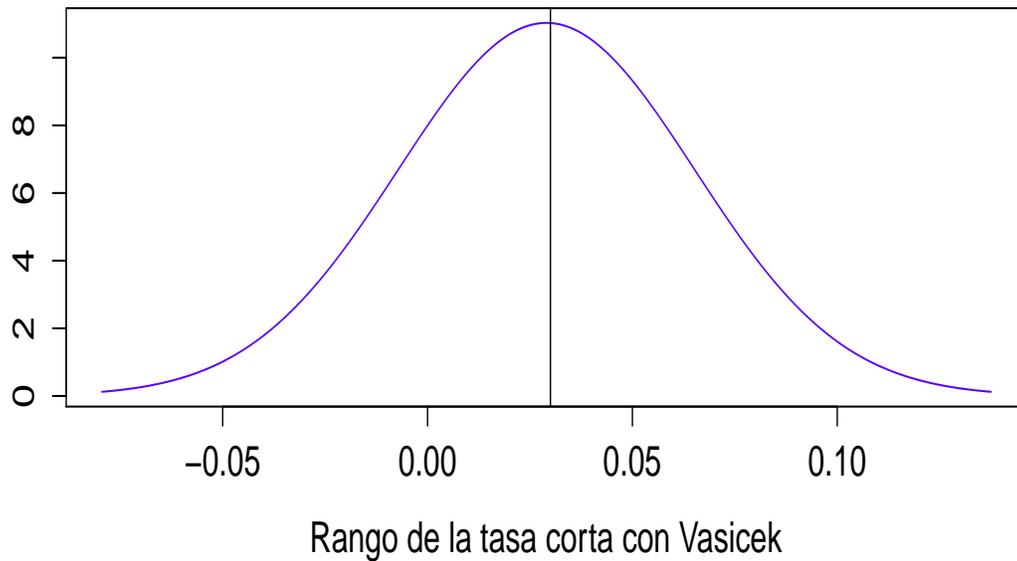
Para ilustrar de mejor manera el comportamiento del proceso estocástico, se muestran a continuación diversas gráficas del modelo Vasicek ajustado para el Cete con vencimiento en 28 días.



Gráfica C.1: Simulación del comportamiento del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo Vasicek con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente.

Con la generación de 1,000 trayectorias del proceso que ajusta el comportamiento del Cete con vencimiento 28 días, se tiene que por el Método Montecarlo la tasa corta esperada a un año es de 2.91 %.

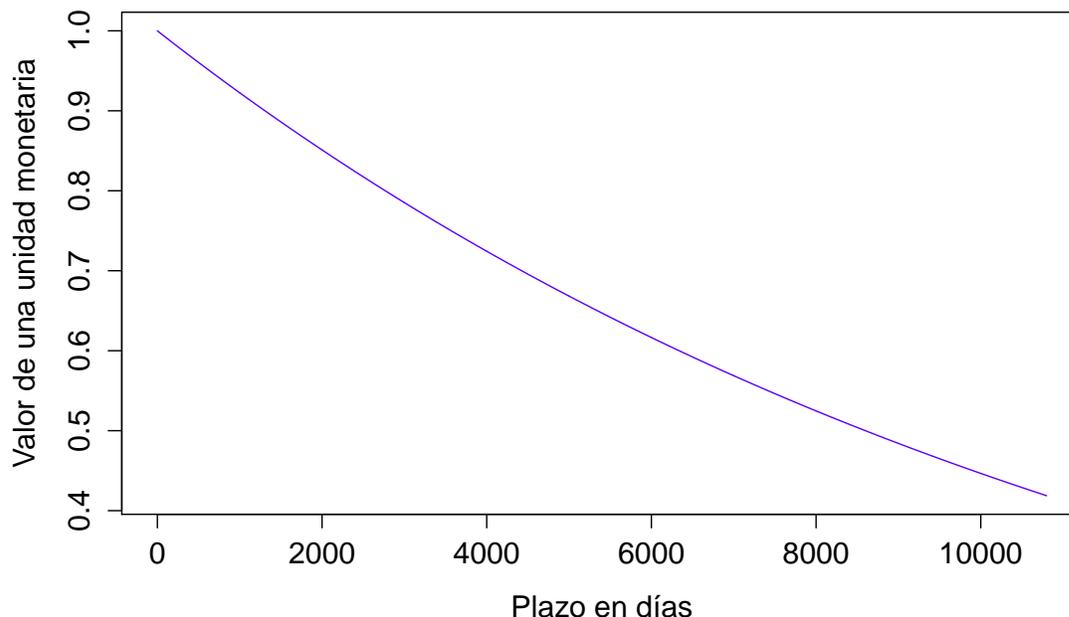
Distribucion de la tasa corta bajo el modelo Vasicek



Gráfica C.2: Distribución a un año para el periodo correspondiente del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo Vasicek con $r_0 = 3\%$. La línea negra vertical indica el valor inicial de la tasa corta (r_0).

Cabe destacar que las dos gráficas anteriores muestran la dinámica futura de la tasa del Cete con vencimiento a 28 días dado el comportamiento estadístico 23 observado, el cual no recupera expectativas de mercado. Es decir, si el mercado espera un movimiento a la alza o la baja por parte de Banco de México de la tasa de referencia este modelo no ajustara esas expectativas.

Curva de descuento bajo el Modelo Vasicek



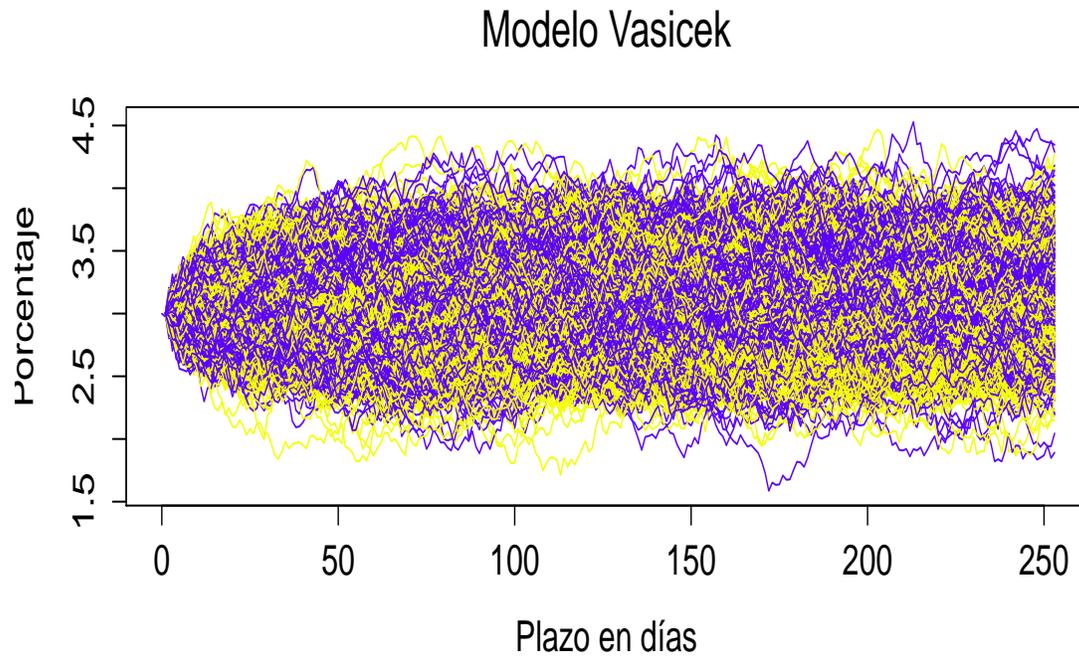
Gráfica C.3: Curva de descuento para el periodo correspondiente bajo el modelo Vasicek para el Cete con vencimiento en 28 días con $r_0 = 3\%$.

Para 23 se obtuvieron los siguientes parámetros:

Plazo	Significancia de β_1	Significancia de β_2	θ	k	σ
1	0,137	0,109	3,18 %	1,85	0,69 %
7	0,002	0,002	3,21 %	7,91	1,50 %
28	0,018	0,014	3,14 %	4,34	1,05 %
60	0,055	0,042	3,12 %	2,41	0,64 %
91	0,075	0,055	3,08 %	1,69	0,47 %
180	0,088	0,067	3,19 %	1,59	0,46 %
270	0,116	0,093	3,25 %	1,66	0,50 %
360	0,072	0,063	3,42 %	2,21	0,58 %

Tabla C.5: Estimación bajo el modelo Vasicek de la curva de Cetes para el periodo del 8 de marzo de 2013 a 9 de julio de 2015.

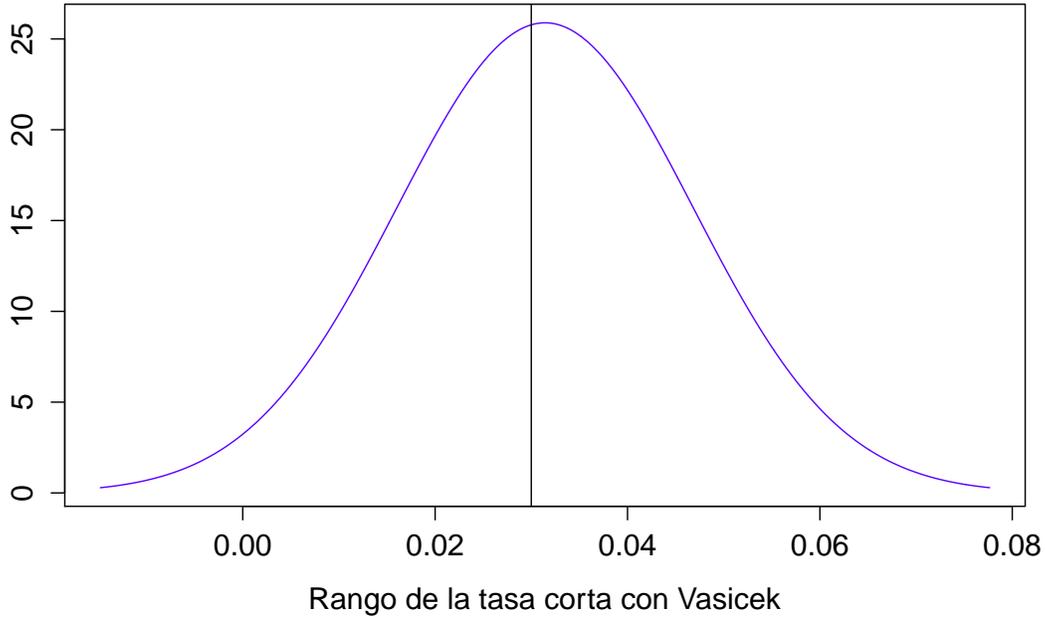
cabe destacar que el nodo que corresponde al fondeo gubernamental no se ajusta a la dinámica estocástica del modelo Vasicek. Así mismo, dado estos datos los únicos nodos que se pueden ajustar son los correspondientes a 7 y 28 días. El comportamiento del proceso $\{r_t\}$ bajo estos datos para el Cete con vencimiento 28 días se observa a continuación:



Gráfica C.4: Simulación del comportamiento del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo Vasicek con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente.

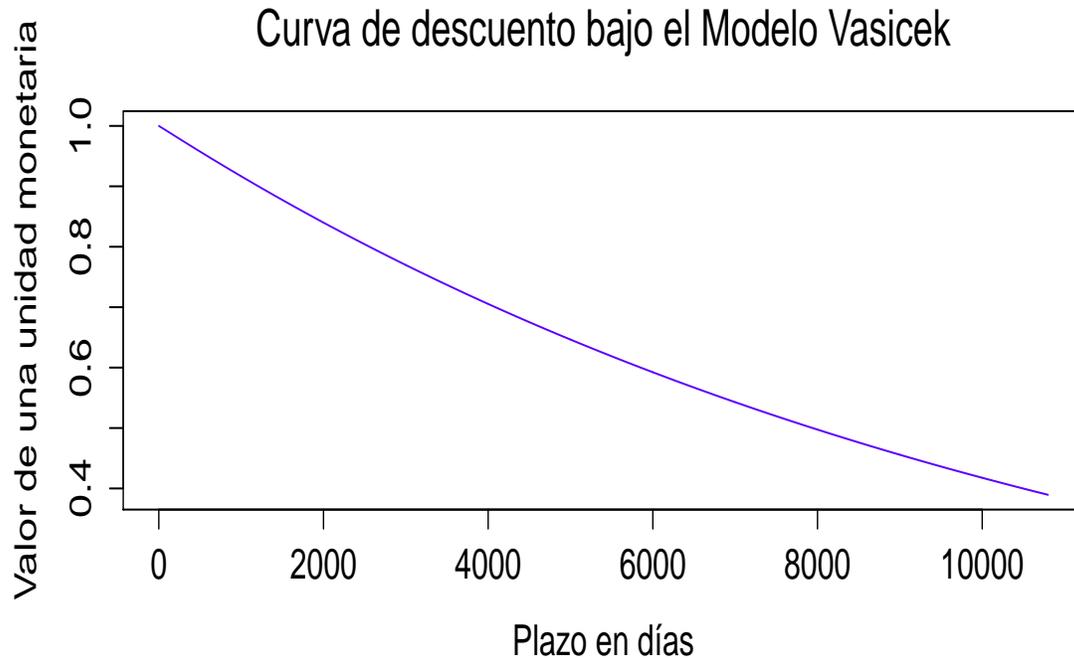
Generando 1,000 simulaciones del proceso estocástico correspondiente al modelo Vasicek ajustado al Cete con vencimiento 28 días, la tasas esperada en un año es de 3.14%.

Distribucion de la tasa corta bajo el modelo Vasicek



Gráfica C.5: Distribución a un año para el periodo correspondiente del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo Vasicek con $r_0 = 3\%$. La línea negra vertical indica el valor inicial de la tasa corta (r_0).

Se observa que la tasa esperada tomando este periodo es más grande a la que se observó en el periodo que solo corresponde a un solo ciclo de decisión de política monetaria por parte de Banxico. A demás se muestra que dado los datos, la probabilidad que la tasa cete de 28 días sea negativa es prácticamente cero



Gráfica C.6: Curva de descuento para el periodo correspondiente bajo el modelo Vasicek para el Cete con vencimiento en 28 días con $r_0 = 3\%$.

Con esto se puede concluir que el principal cambio al utilizar datos con diferentes tasas de referencia se ve reflejado en los parámetros k, θ . Donde el parámetro θ tiende a ser más grande para el periodo del 8 de marzo de 2013 a 9 de julio de 2015 ya que la media es 3,24% mientras que en el otro periodo la media es de 2,90%. Por el contrario, en el periodo del 8 de marzo de 2013 a 9 de julio de 2015 se observa un parámetro de velocidad de convergencia a la media de largo plazo (k) más chico lo cual muestra que bajo este periodo el proceso tiende a ser más volátil.

Método histórico CIR.

Método histórico.

Para el modelo Cox-Ingersoll-Ross se toman los mismo supuestos que en el modelo Vasicek. Para ser consistentes con el modelo Vasicek se utilizaron los mismos periodos, así se pudo hacer un comparativo entre los modelos

Tomando la discretización de (2.30) por el el método de Euler, se tiene que:

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \Rightarrow r_{t+\Delta_t} - r_t = k(\theta - r_t)\Delta_t + \sigma\sqrt{r_t}\sqrt{\Delta_t}Z_t \iff \frac{r_{t+\Delta_t} - r_t}{\sqrt{r_t}\sqrt{\Delta_t}} = \frac{k\theta\sqrt{\Delta_t}}{\sqrt{r_t}} - k\sqrt{r_t}\sqrt{\Delta_t} + \sigma Z_t$$

con $Z_t \sim N(0,1)$

donde $\Delta_t = \frac{1}{250}$ y σ es la volatilidad del proceso de las tasas corta observada en el periodo de medición bajo el modelo Cox-Ingersoll-Ross, tomando $y_t = \frac{r_{t+\Delta_t} - r_t}{\sqrt{\Delta_t}\sqrt{r_t}}$, $x_t^1 = \frac{\sqrt{\Delta_t}}{\sqrt{r_t}}$, $x_t^2 = -\sqrt{r_t}\sqrt{\Delta_t}$, $\beta_1 = k\theta$ y $\beta_2 = -k$. Se obtiene la siguiente regresión lineal múltiple que pasa por el origen:

$$y_t = \beta_1 x_t^1 + \beta_2 x_t^2$$

Por lo tanto, resolviendo la ecuación $\epsilon_t = \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_{t+\Delta_t} - r_t}{\sqrt{\Delta_t}\sqrt{r_t}} - \frac{k\theta\sqrt{\Delta_t}}{\sqrt{r_t}} + k\sqrt{r_t}\sqrt{\Delta_t} \right)^2$ se estima el vector de parámetros $z = (k, \theta)$. Donde n es el número de datos que se utilizaron para ajustar el nodo k de la curva de Cetes.

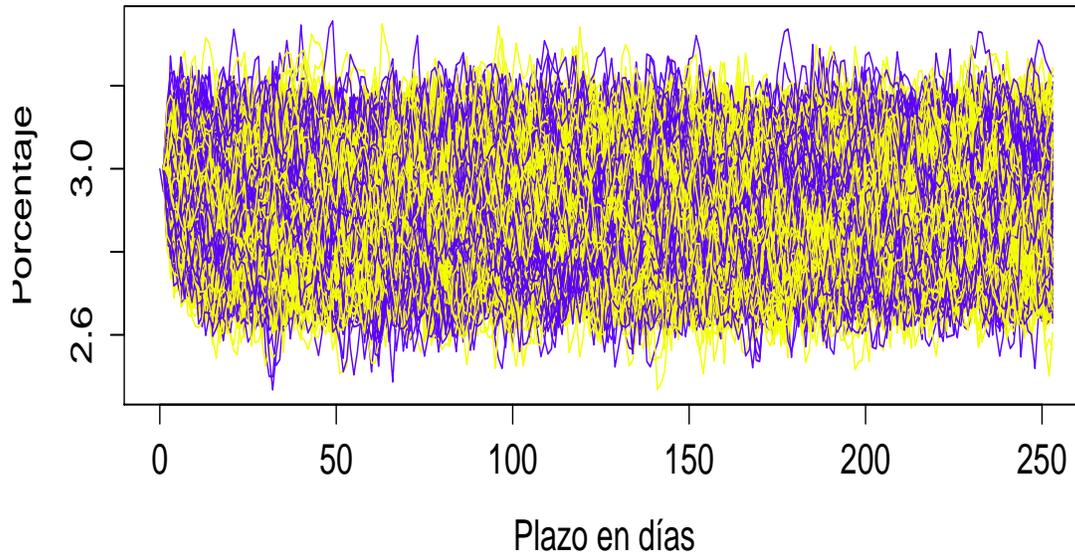
Para el periodo de 6 de junio de 2014 al 9 de julio de 2015 se obtuvieron estos parámetros:

Plazo	Significancia de β_1	Significancia de β_2	θ	k	σ
1	$2 * 10^{-16}$	$2 * 10^{-16}$	3,03 %	125,56	3,31 %
7	$7,8 * 10^{-10}$	$8,19 * 10^{-10}$	2,92 %	65,13	6,71 %
28	$7 * 10^{-6}$	$7,2 * 10^{-6}$	2,90 %	36,42	5,10 %
60	0,002	0,002	2,96 %	16,93	3,07 %
91	0,04	0,04	2,99 %	8,31	2,28 %
180	0,18	0,19	3,12 %	4,12	2,07 %
270	0,13	0,13	3,17 %	4,46	2,19 %
360	0,30	0,32	3,39 %	2,42	2,71 %

Tabla C.6: Estimación bajo el modelo Cox-Ingersoll-Ross de la curva de Cetes para el periodo del 6 de junio de 2014 a 9 de julio de 2015.

Los nodos menores a 91 días generan parámetros significativos bajo el modelo CIR. El Cete con vencimiento 28 días tiene el siguiente comportamiento bajo del modelo CIR:

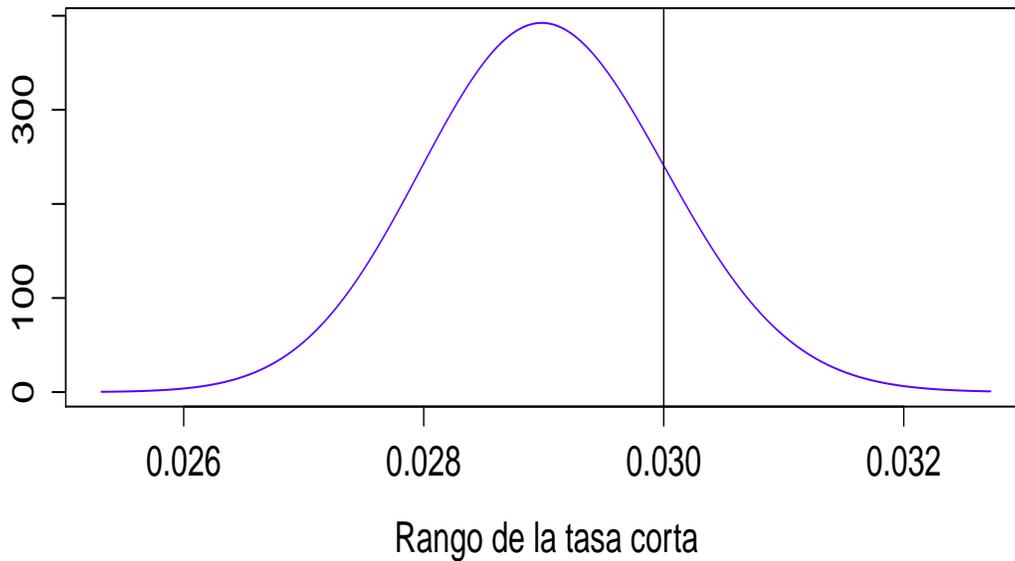
Modelo Cox–Ingersoll–Ross



Gráfica C.7: Simulación del comportamiento del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo CIR con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente.

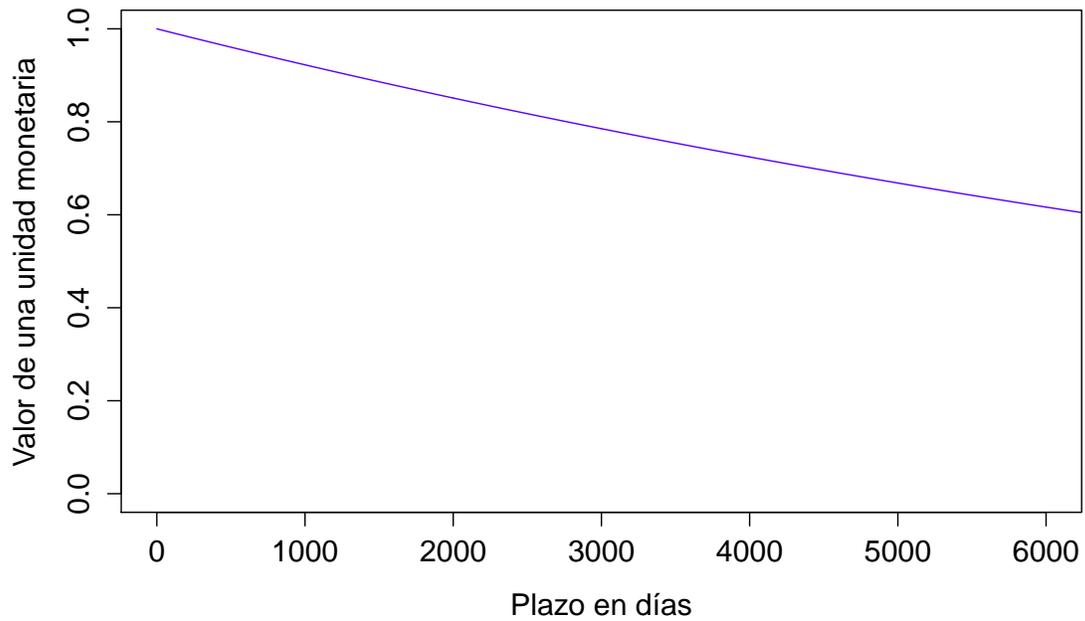
Generando 1,000 simulaciones del proceso estocástico correspondiente al modelo CIR para al Cete con vencimiento 28 días, la tasas esperada en un año es de 2.90%.

Distribución de la tasa corta bajo el modelo Cox–Ingersoll–Ross



Gráfica C.8: Distribución a un año para el periodo correspondiente del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo CIR con $r_0 = 3\%$. La línea negra vertical indica el valor inicial de la tasa corta (r_0).

La principal ventaja de utilizar la distribución del modelo CIR contra el modelo Vasicek, es que se puede observar la curtosis de los datos. Se muestra una mayor acumulación en la cola izquierda, lo que supone una mayor tendencia hacia tasas menores a 2.5% durante el periodo de observación.

Curva de descuento bajo el modelo Cox–Ingersoll–Ross

Gráfica C.9: Curva de descuento para el periodo correspondiente bajo el modelo CIR para el Cete con vencimiento en 28 días con $r_0 = 3\%$.

Se tiene que la curva de descuento bajo este modelo, no pudo ser ajustada de manera satisfactoria, ya que para plazos mayores a 6,000 días el factor de descuento es indefinido.

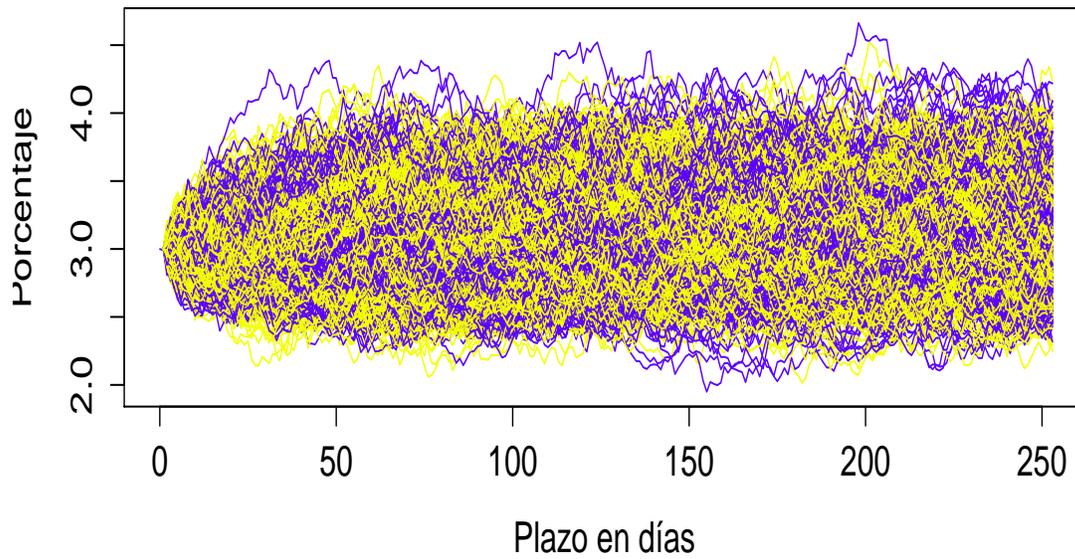
Para los datos observados en el periodo de 8 de marzo de 2013 al 9 de julio de 2015 se obtuvieron los siguientes parámetros para los diferentes nodos:

Plazo	Significancia de β_1	Significancia de β_2	θ	k	σ
1	0,0945	0,0779	3,21 %	2,11	3,80 %
7	0,001	0,0009	3,22 %	8,54	8,37 %
28	0,014	0,012	3,15 %	4,55	5,78 %
60	0,004	0,003	3,12 %	2,51	3,52 %
91	0,06	0,04	3,09 %	1,76	2,59 %
180	0,07	0,06	3,19 %	1,62	2,45 %
270	0,10	0,08	3,25 %	1,69	2,66 %
360	0,07	0,06	3,42 %	2,16	3,03 %

Tabla C.7: Estimación bajo el modelo Cox-Ingersoll-Ross de la curva de Cetes para el periodo del 6 de junio de 2014 a 9 de julio de 2015.

Se observa que para los nodos de 7,28 y 60 días los parámetros son significativos. Se tomó la tasa de Cete con vencimiento a 28 días para analizar el comportamiento del proceso estocástico. Para el periodo 23 el cual incluye cambios en la tasa de referencia, el comportamiento del proceso CIR ajustado a la tasa CETE con vencimiento 28 días se observa a continuación:

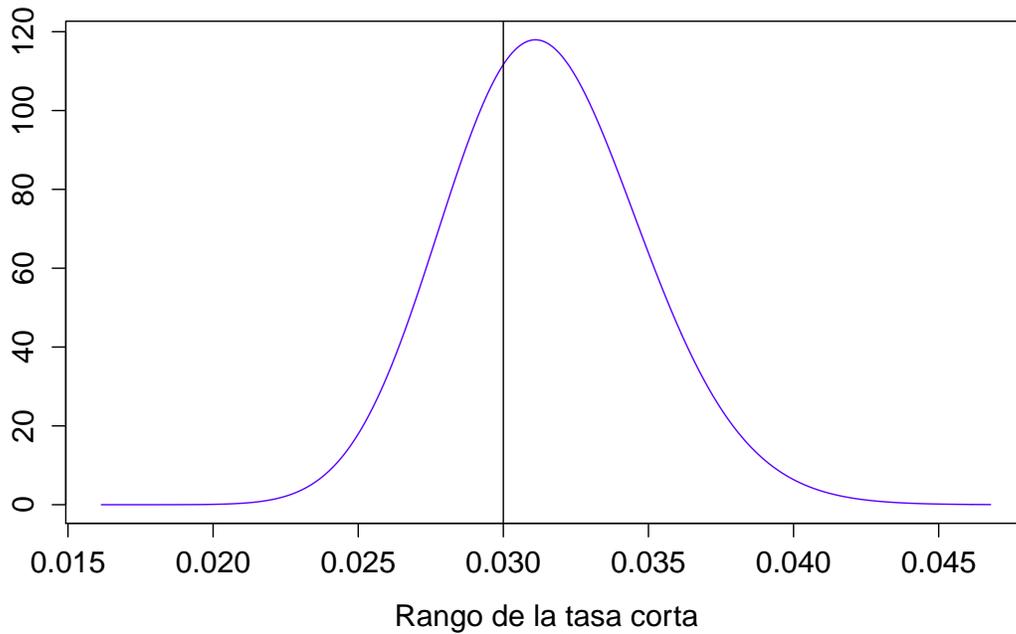
Modelo Cox–Ingersoll–Ross



Gráfica C.10: Simulación del comportamiento del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo CIR con $r_0 = 3\%$ para el periodo correspondiente.

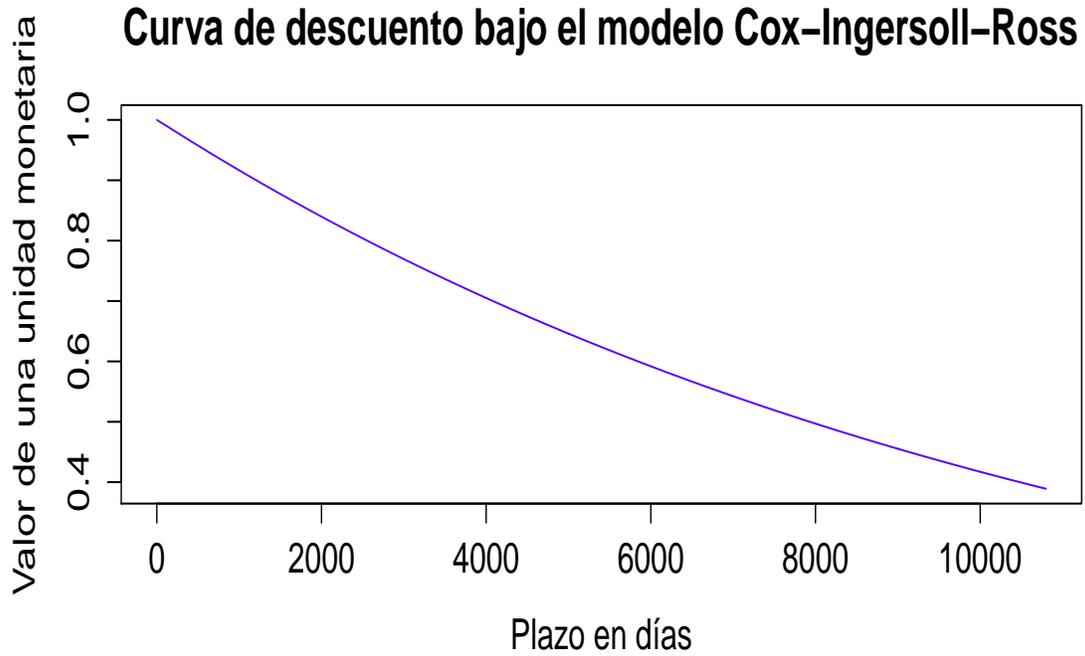
Generando 1,000 simulaciones del proceso estocástico correspondiente al modelo CIR para al Cete con vencimiento 28 días, la tasas esperada en un año es de 3.14%.

Distribución de la tasa corta bajo el modelo Cox–Ingersoll–Ross



Gráfica C.11: Distribución a un año para el periodo correspondiente del Cete con vencimiento en 28 días bajo el modelo CIR con $r_0 = 3\%$. La línea negra vertical indica el valor inicial de la tasa corta (r_0).

A diferencia de lo observado en la distribución pasada, la mayor curtosis se observa del lado derecho, es decir, hacia valores mayores que 3%, esto es dado debido a que los datos presentan un rango entre 3% y 4%.



Gráfica C.12: Curva de descuento para el periodo correspondiente bajo el modelo CIR para el Cete con vencimiento en 28 días con $r_0 = 3\%$.

Para este periodo se logró ajustar el comportamiento del factor de descuento para el modelo CIR, sin importar el plazo al que se desee analizar. Esta curva es de suma importancia para el análisis de medidas como tasa forward o tasa esperada, o para la valuación de instrumentos financieros.

Códigos

D.1. Códigos de teoría de bonos.

Los siguientes códigos fueron utilizados para la valuación de los bonos, así como el cálculo de la duración y la tasa de rendimiento a partir del precio de mercado. El lenguaje de programación es *Visual Basic for Application (VBA)*.

```
Public Function PrecioBonoLEPT(cupon As Double , Yield As Double , fechaval
    As Date , maduracion As Date) As Double
Dim NumCupones As Integer
Dim fechaMaduracion As Date
Dim aux As Double
Dim i As Integer
Dim t As Double
Dim N As Double

N = Application . WorksheetFunction . Weekday ( fechaval + 2)

Select Case (N)

    Case 1 Or 7
        fechaval = fechaval + 4
    Case Else
        fechaval = fechaval + 2
End Select

t = maduracion
i = 0
Do While (t > fechaval)
i = i + 1
t = t - 182
Loop
NumCupones = i
```

```

cupon = cupon * (182 / 360)
fechaMaduracion = maduracion

aux = 0
For i = 1 To NumCupones
aux = aux + cupon * (1 + Yield * d) ^ ((fechaMaduracion - fechaval) /
-182)
fechaMaduracion = fechaMaduracion - 182
Next i

PrecioBonoLEPT = aux + 100 * (1 + Yield * d) ^ ((maduracion - fechaval) /
-182)

End Function

```

```

Public Function DuracionBonoLEPT(cupon As Double, Yield As Double,
    fechaval As Date, maduracion As Date) As Double
Dim NumCupones As Integer
Dim fechaMaduracion As Date
Dim aux As Double
Dim i As Integer
Dim P As Integer
Dim j As Integer
Dim t As Double
Dim N As Double
Dim cupono As Double
Dim fechaval0 As Date

cupono = cupon
fechaval0 = fechaval

N = Application.WorksheetFunction.Weekday(fechaval + 2)

P = PrecioBonoLEPT(cupono, Yield, fechaval0, maduracion)

Select Case (N)
    Case 1 Or 7
        fechaval = fechaval + 4
    Case Else
        fechaval = fechaval + 2
End Select

t = maduracion
i = 0
Do While (t > fechaval)
i = i + 1

```

```

t = t - 182
Loop
NumCupones = i

cupon = cupon * (182 / 360)
fechaMaduracion = maduracion

aux = 0
For i = 1 To NumCupones
aux = aux + cupon * ((1 + Yield * d) ^ ((fechaMaduracion - fechaval) /
-182)) * (182 / 360) * ((fechaMaduracion - fechaval) / -182)
fechaMaduracion = fechaMaduracion - 182
Next i

DuracionBonoLEPT = (aux + 100 * ((1 + Yield * d) ^ (((maduracion -
fechaval) / -182))) * -
(182 / 360) * ((maduracion - fechaval) / -182)) * (-1 / P)

End Function

```

```

Public Function NRYieldLEPT(cupon As Double, Precio As Double, fechaval
As Date, maduracion As Date) As Double
Dim NumCupones As Integer
Dim fechaMaduracion As Date
Dim auxVP, auxdVP As Double
Dim i As Integer
Dim t As Double
Dim N As Double
Dim dVP, VP As Double
Dim Yield As Double
Dim A As Double

N = Application.WorksheetFunction.Weekday(fechaval + 2)

Select Case (N)

Case 1 Or 7
fechaval = fechaval + 4
Case Else
fechaval = fechaval + 2
End Select

t = maduracion
i = 0
Do While (t > fechaval)
i = i + 1

```

```

t = t - 182
Loop
NumCupones = i

cupon = cupon * (182 / 360)
fechaMaduracion = maduracion
Yield = 0.03
A = 182 / 360

While Abs(Precio - VP) > 0.0005
fechaMaduracion = maduracion

auxVP = 0
For i = 1 To NumCupones
auxVP = auxVP + cupon * (1 + Yield * A) ^ ((fechaMaduracion - fechaval) /
-182)
fechaMaduracion = fechaMaduracion - 182
Next i

VP = auxVP + 100 * (1 + Yield * A) ^ ((maduracion - fechaval) / -182)

auxdVP = 0
For i = 1 To NumCupones
auxdVP = auxdVP + i * ((1 + Yield * A) ^ (-1)) * A * cupon * ((1 + Yield
* A) ^ ((fechaMaduracion - fechaval) / -182))
fechaMaduracion = fechaMaduracion - 182
Next i

dVP = auxdVP + NumCupones * ((1 + Yield * A) ^ (-1)) * A * 100 * ((1 +
Yield * A) ^ ((maduracion - fechaval) / -182))

Yield = Yield - ((VP - Precio) / -dVP)

Wend

NRyieldLEPT = Yield

End Function

```

D.2. Códigos del Modelo Nelson-Siegel.

Se presentan los códigos utilizados para el ajuste de bonos del mercado mexicanos, estos códigos se presentan en el lenguaje *Visual Basic for Application (VBA)*.

```

Public Function PrecioTeorico(cupon As Double, fechaval As Date,
maduracion As Date, -

```

```

beta0 As Double , beta1 As Double , beta2 As Double , lambda As Double) As
  Double
Dim NumCupones As Integer
Dim fechaMaduracion As Date
Dim aux As Double
Dim i As Integer
Dim t As Double
Dim N As Double

Select Case (N = Application.WorksheetFunction.Weekday(fechaval))

  Case 1 Or 7
    fechaval = fechaval + 41
  Case Else
    fechaval = fechaval + 2
End Select

t = maduracion
i = 0
Do While (t > fechaval)
  i = i + 1
  t = t - 182
Loop
NumCupones = i

cupon = cupon * (182 / 360)
fechaMaduracion = maduracion

aux = 0
For i = 1 To NumCupones
  aux = aux + cupon * DF_NS(beta0 , beta1 , beta2 , lambda , fechaMaduracion -
    fechaval)
  fechaMaduracion = fechaMaduracion - 182
Next i

PrecioTeorico = aux + 100 * DF_NS(beta0 , beta1 , beta2 , lambda , maduracion
  - fechaval)
End Function

```

D.3. Códigos para los modelos Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross.

D.3.1. Método transversal

Funciones que calculan el precio del bono cupón cero y un bono con cupones bajo el modelo Vasicek

```

Public Function FactorB(theta As Double , sigma As Double , k As Double , t
  As Double) As Double

```

```
Dim f1 As Double

f1 = Exp(-k * (t / 360))
FactorB = (1 / k) * (1 - f1)

End Function
```

```
Public Function FactorA(theta As Double, sigma As Double, k As Double, t
    As Double) As Double

Dim f1 As Double
Dim f2 As Double
Dim f3 As Double
Dim b As Double

f1 = (sigma ^ 2) / (2 * (k ^ 2))
f2 = (sigma ^ 2) / (4 * k)
f3 = theta - f1
b = FactorB(theta, sigma, k, t)

FactorA = Exp(f3 * (b - (t / 360)) - f2 * (b ^ 2))

End Function
```

```
Public Function FactorDescuento(theta As Double, sigma As Double, k As
    Double, t As Double, r As Double) As Double

Dim A As Double
Dim b As Double

A = FactorA(theta, sigma, k, t)
b = FactorB(theta, sigma, k, t)

FactorDescuento = A * Exp(-b * r)

End Function
```

```
Public Function PrecioTeorico(cupon As Double, fechaval As Date,
    maduracion As Date, theta As Double, sigma As Double, k As Double, r
    As Double) As Double

Dim NumCupones As Integer
Dim fechaMaduracion As Date
Dim aux As Double
Dim i As Integer
Dim t As Double
Dim N As Double

N = Application.WorksheetFunction.Weekday(fechaval + 2)
```

```

Select Case (N)
    Case 1 Or 7
        fechaval = fechaval + 4
    Case Else
        fechaval = fechaval + 2
End Select

t = maduracion
i = 0
Do While (t > fechaval)
    i = i + 1
    t = t - 182
Loop
NumCupones = i

cupon = cupon * (182 / 360)
fechaMaduracion = maduracion

aux = 0
For i = 1 To NumCupones
    aux = aux + cupon * FactorDescuento(theta, sigma, k, fechaMaduracion -
        fechaval, r)
    fechaMaduracion = fechaMaduracion - 182
Next i

PrecioTeorico = aux + 100 * FactorDescuento(theta, sigma, k, maduracion -
    fechaval, r)
End Function

```

Funciones que calculan el precio de un bono cupón cero y el precio de un bono con cupones bajo el modelo Cox-Ingersoll-Ross.

```

Function DF_CIR(theta, sigma, k, t, r) As Double
Dim h As Double
Dim A As Double
Dim B As Double

h = Sqr((k ^ 2) + 2 * (sigma ^ 2))
t = t / 360

A = ((2 * h * Exp((k + h) * t * 0.5)) / _
    (2 * h + (k + h) * (Exp(t * h) - 1))) ^ (2 * k * theta / (sigma ^ 2)
    )

B = (2 * (Exp(t * h) - 1)) / _
    (2 * h + (k + h) * (Exp(t * h) - 1))

```

```
DF_CIR = A * Exp(-B * r)
End Function
```

```
Public Function PrecioTeorico(cupon As Double, fechaval As Date,
    maduracion As Date, theta As Double, sigma As Double, k As Double, r
    As Double) As Double
Dim NumCupones As Integer
Dim fechaMaduracion As Date
Dim aux As Double
Dim i As Integer
Dim t As Double
Dim N As Double

Select Case (N = Application.WorksheetFunction.Weekday(fechaval))

    Case 1 Or 7
        fechaval = fechaval + 4
    Case Else
        fechaval = fechaval + 2
End Select

t = maduracion
i = 0
Do While (t > fechaval)
i = i + 1
t = t - 182
Loop
NumCupones = i

cupon = cupon * (182 / 360)
fechaMaduracion = maduracion

aux = 0
For i = 1 To NumCupones
aux = aux + cupon * DF_CIR(theta, sigma, k, fechaMaduracion - fechaval, r
)
fechaMaduracion = fechaMaduracion - 182
Next i

PrecioTeorico = aux + 100 * DF_CIR(theta, sigma, k, maduracion - fechaval
, r)
End Function
```

D.3.2. Método Histórico

El siguiente código corresponde a la estimación de los modelos estocásticos bajo el método histórico, el lenguaje corresponde a *R studio*. El insumo es la matriz de tasas de Cetes (**CETES**) para el periodo de análisis

Donde **Tenor** corresponde al nodo que se esta estimando
Case corresponde a la convención de mercado que se este utilizando, 1 corresponde a Act/360 y 0 corresponde a Act/365.

El siguiente código corresponde al modelo Vasicek.

```
tasacontinua <-function ( dates , rate , case ) {
  if ( case ==1 ) {
    tenor <- dates / 360
    output <- -(1/tenor) * (log (1+( rate /100) * tenor ))
  } else {
    tenor <- dates / 365
    output <- -(1/tenor) * (log (1+( rate /100) * tenor ))
  }
  return ( output )
}

MatriztasacontCETES <-function ( case ) {
  c <- ncol ( CETES )
  r <- nrow ( CETES )
  Ma <- matrix ( 0 , r , c -1 )
  for ( i in 1:(c-1) ) {
    for ( j in 1:r ) {
      Ma [ j , i ] <- tasacontinua ( CETES [ j , 1 ] , CETES [ j , i +1 ] , case )
    }
  }
  return ( Ma )
}

volatilidadCETES <-function ( case ) {
  tasas <- MatriztasacontCETES ( case )
  c <- ncol ( tasas )
  vol <- matrix ( 0 , 8 , 1 )
  for ( j in 1:8 ) {
    rendimientos <- matrix ( 0 , c -2 , 1 )
    for ( i in 1:(c-2) ) {
      rendimientos [ i , ] <- log ( tasas [ j , i +2 ] / tasas [ j , i +1 ] )
    }
    vol [ j , ] <- sd ( rendimientos )
  }
  return ( vol )
}

RLvaVasicekCETES <-function ( tenor , case ) {
  #tenor corresponde al numero de renglon de la matriz de tasas
  tasas <- MatriztasacontCETES ( case )
  c <- ncol ( tasas )
```

```

vol<-volatilidadCETES ( case )
rates <-matrix (0 ,c -1,1)
output<-matrix (0 ,c -2,3)
Vol<-vol [ tenor ]
for (i in 1:(c-1)) { rates [ i ] <- tasas [ tenor , i +1 ] }
y<-matrix (0 ,c -2,1)
x1<-matrix (0 ,c -2,1)
x2<-matrix (0 ,c -2,1)
for (i in 1:(c-2)) { y [ i ] <- ( rates [ i +1 ] - rates [ i ] ) }
for (i in 1:(c-2)) { x1 [ i ] <- -( 1 / 252 ) }
for (i in 1:(c-2)) { x2 [ i ] <- -( - rates [ i ] * ( 1 / 252 ) ) }
output [ ,1 ] <- y
output [ ,2 ] <- x1
output [ ,3 ] <- x2
return ( output )
}

coefVasicekCETES <-function ( tenor , case ) {
  datos <-RLvaVasicekCETES ( tenor , case )
  P <-lm ( datos [ ,1 ] ~ ( datos [ ,2 ] + datos [ ,3 ] + 0 ) )
  betas <-coef ( P )
  parametros <-matrix ( 0 , 2 , 1 )
  parametros [ 1 , ] <- betas [ 2 ]
  parametros [ 2 , ] <- betas [ 1 ] / betas [ 2 ]
  return ( parametros )
}

summaryEstVasicekCETES <-function ( tenor , case ) {
  datos <-RLvaVasicekCETES ( tenor , case )
  P <-lm ( datos [ ,1 ] ~ datos [ ,2 ] + datos [ ,3 ] + 0 )
  resumen <-summary ( P )
#plot ( P )
  return ( resumen )
}

volVasicekCETES <-function ( tenor , case ) {
  par <-coefVasicekCETES ( tenor , case )
  kappa <-par [ 1 , ]
  theta <-par [ 2 , ]
  tasas <-MatriztasacontCETES ( case )
  c <-ncol ( tasas )
  vol <-matrix ( 0 , 1 , 1 )
  sumando <-matrix ( 0 , c - 2 , 1 )
  ac = 0
  for (i in 1:(c-2)) {
    sumando [ i , ] <- - ( ( ( tasas [ tenor , i + 2 ] - tasas [ tenor , i + 1 ] ) - ( kappa * theta
      * ( 1 / 252 ) ) + ( kappa * tasas [ tenor , i + 1 ] * ( 1 / 252 ) ) ) ^ 2 ) / ( ( c - 3 ) * ( 1 / 252 ) )
    ac = ac + sumando [ i , ]
  }
  vol <-ac
}

```

```

    return (sqrt (vol))
}

simulationVasicekCETES <-function (tenor , case , Nsimulaciones , plazo , r0){
  #plazo en años
  r0<-tasacontinua (CETES[ tenor , 1] , r0 , case )
  par<-coefVasicekCETES (tenor , case )
  kappa<-par [ 1 , ]
  theta<-par [ 2 , ]
  sigma<-volVasicekCETES (tenor , case )
  plazoDias<-trunc (plazo*252)
  r<-matrix (0 , Nsimulaciones , plazoDias+1)
  for (i in 1:Nsimulaciones) {r [ i , 1]<-r0}
  for (j in 1:Nsimulaciones) {
    for (i in 1:plazoDias) {
      r [ j , i+1]<-kappa*(theta-r [ j , i] )*(1/252)+sigma*sqrt (1/252) *(rnorm
        (1))+r [ j , i]
    }
  }
  tiempo<-c (0:plazoDias )
  tasa<-r [ 1 , ]
  max_y<-max (r*100)
  min_y<-min (r*100)
  plot (tiempo , tasa*100 , "1" , col="blue" , ylim=c (min_y , max_y) , main=expression
    ("Modelo Vasicek" ) , xlab=expression ("Plazo en días" ) , ylab=expression
    ("Porcentaje" ) )
  for (k in 1:(Nsimulaciones -1)) {
    x<-runif (1)
    if (x<0.5) {lines (r [ k+1 , ]*100 , col="yellow" )}
    else {lines (r [ k+1 , ]*100 , col="blue" )}
  }
  return (mean (r [ , plazoDias +1] )*100)
}

DistribucionVasicek <-function (tenor , plazo , case , r0){
  #plazo en días
  r0<-tasacontinua (CETES[ tenor , 1] , r0 , case )
  par<-coefVasicekCETES (tenor , case )
  kappa<-par [ 1 , ]
  theta<-par [ 2 , ]
  sigma<-volVasicekCETES (tenor , case )
  mu<-r0*exp (-kappa*(plazo/252))+theta*(1-exp (-kappa*(plazo/252)))
  var<-((sigma^2)/2*kappa)*(1-exp (-2*kappa*(plazo/252)))
  ds<-sqrt (var)
  t<-seq ((mu-3*ds) , (mu+3*ds) , 0.00001)
  plot (t , dnorm (t , mu , ds) , "1" , col="blue" , main="Distribucion de la tasa
    corta bajo el modelo Vasicek" , xlab="Rango de la tasa corta con
    Vasicek" , ylab="")
  abline (v=r0)
}

```

```

DFVasicek<-function( tenor , plazo , case , r0 ){
  #plazo en días
  r0<-tasacontinua (CETES[ tenor , 1] , r0 , case )
  if ( case ==1){DCF<-360} else {DCF<-365}
  par<-coefVasicekCETES ( tenor , case )
  kappa<-par [ 1 , ]
  theta<-par [ 2 , ]
  sigma<-volVasicekCETES ( tenor , case )
  B<-(1/kappa)*(1-exp(-kappa*plazo/DCF))
  A<-exp((theta-((sigma^2)/(2*(kappa^2))))*(B-(plazo/DCF))-((sigma^2)/(4*
    kappa))*B^2)
  DF<-A*exp(-B*r0)
  return (DF)
}

CurvaDFVasicek<-function( tenor , case , r0 ){
  DF<-matrix ( 0 , 1 , 10801 )
  r0<-tasacontinua (CETES[ tenor , 1] , r0 , case )
  if ( case ==1){DCF<-360} else {DCF<-365}
  par<-coefVasicekCETES ( tenor , case )
  kappa<-par [ 1 , ]
  theta<-par [ 2 , ]
  sigma<-volVasicekCETES ( tenor , case )
  for(i in 0:10800){
    B<-(1/kappa)*(1-exp(-kappa*i/DCF))
    A<-exp((theta-((sigma^2)/(2*(kappa^2))))*(B-(i/DCF))-((sigma^2)/(4*
      kappa))*B^2)
    DF[1 , i+1]<-A*exp(-B*r0)
  }
  plot (seq (0 , 10800 , 1) , DF , "l" , col="blue" , main=expression (" Curva de
    descuento bajo el Modelo Vasicek" ) , xlab=expression (" Plazo en días" ) ,
    ylab=expression (" Valor de una unidad monetaria" ))
}

```

El siguiente código corresponde al modelo Cox-Ingersoll-Ross.

```

RLvaCIRCETES<-function( tenor , case ){
  #tenor corresponde al numero de renglon de la matriz de tasas
  tasas<-MatriztasacontCETES ( case )
  c<-ncol ( tasas )
  vol<-volatilidadCETES ( case )
  rates<-matrix ( 0 , c-1 , 1 )
  output<-matrix ( 0 , c-2 , 3 )
  Vol<-vol [ tenor ]
  for(i in 1:(c-1)){ rates [ i ]<-tasas [ tenor , i+1 ]}
  y<-matrix ( 0 , c-2 , 1 )
  x1<-matrix ( 0 , c-2 , 1 )
  x2<-matrix ( 0 , c-2 , 1 )
  for(i in 1:(c-2)){ y [ i ]<-(rates [ i+1 ]-rates [ i ])/sqrt ( rates [ i ] )}
}

```

```

for(i in 1:(c-2)){x1[i]<-(1/252)/sqrt(rates[i])}
for(i in 1:(c-2)){x2[i]<-(-(1/252)*sqrt(rates[i]))}
output[,1]<-y
output[,2]<-x1
output[,3]<-x2
return(output)
}

coefCIRCETES<-function(tenor,case){
  datos<-RLvaCIRCETES(tenor,case)
  P<-lm(datos[,1]~(datos[,2]+datos[,3]+0))
  betas<-coef(P)
  parametros<-matrix(0,2,1)
  parametros[1,]<-betas[2]
  parametros[2,]<-betas[1]/betas[2]
  return(parametros)
}

summaryEstCIRCETES<-function(tenor,case){
  datos<-RLvaCIRCETES(tenor,case)
  P<-lm(datos[,1]~datos[,2]+datos[,3]+0)
  resumen<-summary(P)
  return(resumen)
}

volCIRCETES<-function(tenor,case){
  par<-coefCIRCETES(tenor,case)
  kappa<-par[1,]
  theta<-par[2,]
  tasas<-MatriztasacontCETES(case)
  c<-ncol(tasas)
  vol<-matrix(0,1,1)
  sumando<-matrix(0,c-2,1)
  ac=0
  for(i in 1:(c-2)){
    sumando[i,]<-((((tasas[tenor,i+2]-tasas[tenor,i+1])/sqrt(tasas[
      tenor,i+1]))-(kappa*theta*(1/252)/sqrt(tasas[tenor,i+1]))+(kappa
      *sqrt(tasas[tenor,i+1]*(1/252)))^2)/((c-3)*(1/252)))
    ac=ac+sumando[i,]
  }
  vol<-ac
  return(sqrt(vol))
}

simulationCIRCETES<-function(tenor,case,Nsimulaciones,plazo,r0){
  r0<-tasacontinua(CETES[tenor,1],r0,case)
  #plazo en años
  par<-coefCIRCETES(tenor,case)
  kappa<-par[1,]
  theta<-par[2,]

```

```

sigma<-volCIRCETES( tenor , case )
plazoDias<-trunc ( plazo*252)
r<-matrix(0 , Nsimulaciones , plazoDias+1)
for(i in 1:Nsimulaciones){r[i,1]<-r0}
for(j in 1:Nsimulaciones){
  for(i in 1:plazoDias){
    r[j , i+1]<-kappa*(theta-r[j , i])*(1/252)+sigma*sqrt(r[j , i])*sqrt
      (1/252)*(rnorm(1))+r[j , i]
  }
}
tiempo<-c(0:plazoDias)
tasa<-r[1 , ]
max_y<-max(r*100)
min_y<-min(r*100)
plot(tiempo , tasa*100 , "l" , col="blue" , ylim=c(min_y , max_y) , main="Modelo
  Cox-Ingersoll-Ross" , xlab=expression("Plazo en días") , ylab=
  expression("Porcentaje"))
for(k in 1:(Nsimulaciones-1)){
  x<-runif(1)
  if(x<0.5){lines(r[k+1 , ]*100 , col="yellow")}
  else{lines(r[k+1 , ]*100 , col="blue")}
}
return(mean(r[ , plazoDias+1])*100)
}

```

```

DistribucionCIR <-function( tenor , plazo , case , r0 , range ){
#plazo en días
r0<-r0/100
par<-coefCIRCETES( tenor , case )
kappa<-par[1 , ]
theta<-par[2 , ]
sigma<-volCIRCETES( tenor , case )
c<-((4*kappa)/(sigma^2)*(1-exp(-kappa*(plazo/252))))
u<-((4*kappa*theta)/(sigma^2))
lambda<-c*r0*exp(-kappa*(plazo/252))
mu<-r0*exp(-kappa*(plazo/252))+theta*(1-exp(-kappa*(plazo/252)))
var<-r0*((sigma^2)/kappa)*(exp(-kappa*(plazo/252))-exp(-2*kappa*(plazo
/252)))+(theta*(sigma^2)/2*kappa)*((1-exp(-kappa*(plazo/252)))^2)
ds<-sqrt(var)
t<-seq((mu-range*ds) , (mu+range*ds) , 0.00001)
plot(t , c*dchisq(c*t , u , lambda) , "l" , col="blue" , main=expression("
  Distribución de la tasa corta bajo el modelo Cox-Ingersoll-Ross") ,
  xlab="Rango de la tasa corta" , ylab="")
abline(v=r0)
}

```

```

DFCIR<-function( tenor , plazo , case , r0 ){
#plazo en días
r0<-tasaacontinua(CETES[ tenor , 1] , r0 , case )
if(case==1){DCF<-360}else{DCF<-365}
}

```

```

par<-coefCIRCETES (tenor , case )
kappa<-par [1 ,]
theta <-par [2 ,]
sigma<-volCIRCETES(tenor , case )
h<-sqrt (( kappa ^2 )+(2*( sigma ^2 )))
B<-2*(exp (( plazo /DCF)*h )-1)/(2*h+(kappa+h)*(exp (( plazo /DCF)*h )-1))
A<-((2*h*exp (( kappa+h)*( plazo /DCF)*0.5 ))/(2*h+(kappa+h)*(exp (( plazo /DCF)*h )-1)))^(2*kappa*theta /( sigma ^2 ))
DF<-A*exp(-B*r0)
return (DF)
}

CurvaDFCIR<-function (tenor , case , r0) {
DF<-matrix (0 ,1 ,10801)
r0<-tasacontinua (CETES[tenor ,1] , r0 , case )
if ( case ==1){DCF<-360}else {DCF<-365}
par<-coefCIRCETES (tenor , case )
kappa<-par [1 ,]
theta <-par [2 ,]
sigma<-volCIRCETES(tenor , case )
h<-sqrt (( kappa ^2 )+(2*( sigma ^2 )))

for(i in 0:10800){
B<-2*(exp (( i /DCF)*h )-1)/(2*h+(kappa+h)*(exp (( i /DCF)*h )-1))
A<-((2*h*exp (( kappa+h)*( i /DCF)*0.5 ))/(2*h+(kappa+h)*(exp (( i /DCF)*h )-1)))^(2*kappa*theta /( sigma ^2 ))
DF[1 , i+1]<-A*exp(-B*r0)
}
plot (seq(0 ,10800 ,1) ,DF,"l" , col="blue" , ylim = c(0 ,1) , xlim =c(0 ,6000) ,
main="Curva de descuento bajo el modelo Cox-Ingersoll-Ross" , xlab=
expression ("Plazo en días") , ylab="Valor de una unidad monetaria")
}

```


Bibliografía

- [1] BRIGO,DAMIANO Y FABIO MERCURIO, *Interest Rate Models-Theory and Practice with Smile,Inflation and Credit*, segunda edición, Springer, Italia, 2006.
- [2] BRIGO,DAMIANO, *A Crash Course in Probability and Stochastic Calculus*,Imperial Collage London.
- [3] CULBERTSON, JONH M.,*The Term Structure of Interest Rate*,Jstor,1957.
- [4] DEL CASTILLO,SPÍNDOLA JORGE HUMBERTO, *Notas del Curso: Valuación de Opciones*, 2006.
- [5] FILIPOVIĆ,DAMIR, *Term-Structure Models A Graduate Course*, primera edición,Springer, Vienna, 2009.
- [6] FISHER,IRVING,*Appreciation and Interest*, the American Economic Association, 1896.
- [7] GLASSERMAN,PAUL,*Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003.
- [8] HICKS,JONH RICHARD,*Value and Capital*,Oxford, 1946.
- [9] KELLISON,STEPHEN G.,*The Theory of Interest*,McGraw-Hill, 1991.
- [10] MEXDER, *Futuros de Swaps*, México, 2006.
- [11] BANCO DE MÉXICO,*Definiciones Básicas de Riesgos*, México.
- [12] NELSON, CHARLES R. Y ANDREW F. SIEGEL, *Parsimonius Modeling of Yield Curve*, Jstor, 1987.
- [13] RAMIREZ, SOLANO ERNESTO,*Moneda, Banca y Mercados Financieros.Instituciones e Instrumentos en Países en Desarrollo*,Pearson Education, México, 2001.
- [14] REBONATO,RICCARDO,*Interest-Rate Options Models*, Wiley Finance.
- [15] RINCÓN,LUIS,*Introducción a los Procesos Estocásticos*, Facultad de Ciencias.
- [16] RINCÓN,LUIS,*Curso Intermedio de Probabilidad*, Facultad de Ciencias.
- [17] SVENSSON,LARS E.O.,*Estimating Forward Interest Rate with the Extended Nelson & Siegel Method*,1994.
- [18] VASICEK,OLDRICH, *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*,Journal of Financial Economics, 1977.