



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**LA REGLA DE YOUNG**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICA**

**P R E S E N T A:**

**XIMENA ESTRADA ZAVALA**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. DIANA AVELLA ALAMINOS  
2016**

Ciudad Universitaria, CDMX



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Estrada  
Zavaleta  
Ximena  
55 23 39 02 23  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
308305346

2. Datos del tutor

Dra.  
Diana  
Avella  
Alaminos

3. Datos del sinodal 1

Dr  
José  
Ríos  
Montes

4. Datos del sinodal 2

Dra.  
María del Carmen Heréndira  
Gómez  
Laveaga

5. Datos del sinodal 3

M en C  
Enresto  
Mayorga  
Saucedo

6. Datos del sinodal 4

Dra.  
Edith Corina  
Sáez Valadez

7. Datos del trabajo escrito

La regla de Young  
97 p.  
2016

# Índice General

<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Grupo simétrico . . . . .	4
1.1.1 El número de $k$ – <i>ciclos</i> en $S_n$ . . . . .	9
1.2 Representaciones de Grupos . . . . .	11
1.2.1 CG-módulos y el álgebra de grupo . . . . .	12
1.2.2 Reducibilidad . . . . .	15
1.2.3 Teorema de Maschke . . . . .	17
1.2.4 CG-Homomorfismos y Lema de Schur . . . . .	21
1.3 Caracteres de Grupos . . . . .	23
1.3.1 Producto Interno de caracteres . . . . .	25
1.4 Descomposición del Álgebra de Grupo . . . . .	30
1.4.1 Representaciones Restringidas e Inducidas . . . . .	31
<b>2 Primeros Auxilios</b>	<b>35</b>
2.1 Tablas de Young . . . . .	35
2.2 Orden en las particiones . . . . .	41
<b>3 La Regla de Young</b>	<b>44</b>
3.1 Subgrupos de Young y Tabloides . . . . .	44
3.2 Una base para $S^\lambda$ . . . . .	55
3.3 La Representación Natural de Young . . . . .	65
3.4 La Regla de la Bifurcación . . . . .	70
3.5 Descomponiendo a $M^\mu$ . . . . .	73
3.6 Una base semi estándar para $Hom(S^\lambda, M^\mu)$ . . . . .	79
3.7 Coeficientes de Kostka y la Regla de Young . . . . .	83
<b>4 La correspondencia RSK</b>	<b>86</b>
4.1 Salto de Renglón . . . . .	86
4.2 Teorema de Simetría . . . . .	88
<b>5 Bibliografía</b>	<b>92</b>

# Introducción

El material que se presenta a continuación se encuentra inmerso en la Teoría de representaciones de grupos del Álgebra. Una representación por matrices de un grupo  $G$  es un homomorfismo de grupos tal que:

$$X : G \rightarrow GL_n.$$

donde  $GL_n$  es el grupo general lineal de grado  $n$ , el cual está conformado por todas las matrices  $X = (x_{i,j})_{n \times n}$  que son invertibles con respecto a la multiplicación de matrices. A lo largo de este trabajo manejaremos las entradas de las matrices en los complejos.

Es decir, a cada  $g \in G$  le es asignada una matriz  $X(g)$  y por ser un homomorfismo de grupos se cumple que:

1.  $X(\varepsilon) = Id_n$  y
2.  $X(gh) = X(g)X(h)$

donde  $\varepsilon$  es el elemento neutro del grupo  $G$  e  $Id_n$  es la matriz identidad de tamaño  $n$ .

Esta definición será relacionada con el grupo simétrico de  $n$  elementos con el objetivo de conocer todas las representaciones irreducibles de  $S_n$ .

El primer capítulo de este trabajo está dividido en dos partes, en la primera se presentan las nociones básicas del grupo simétrico, el objetivo de esta primera parte es demostrar que la cantidad de particiones de un entero  $n \in \mathbb{Z}$  es igual a la cantidad de clases de conjugación del grupo simétrico  $S_n$ . En la segunda parte de este capítulo se presentan los resultados que serán usados a lo largo del trabajo de representaciones de grupos y nos enfocaremos en algunos ejemplos de cómo vamos a relacionar las representaciones de grupos con el grupo simétrico, para este capítulo fueron usados principalmente [Av] y [Sa], también se pueden encontrar los resultados en [Ja].

El segundo capítulo retoma la definición de partición de un entero y se presentan la definición de diagrama y tabla de Young, así como las primeras propiedades y resultados. Al final del capítulo también será presentado el orden que le daremos a las tablas, el cual usaremos a lo largo de todo el trabajo. En general los resultados que se presentan en este capítulo serán usados constantemente en las demostraciones del siguiente capítulo facilitando la mayoría de las demostraciones.

El tercer capítulo se encuentra dividido en siete secciones, en éste nos enfocaremos en realizar la construcción que nos llevará al resultado central de este trabajo. En las primeras dos secciones se presentan los subgrupos de Young, el módulo de permutación, el módulo Specht y los elementos Garnir, a través de éstos últimos será posible presentar una base para el módulo Specht, en esta sección es posible encontrar diversos ejemplos que van mostrando

como es toda la construcción. En la tercera sección se define la representación natural de Young, se trabajará con el grupo simétrico de cuatro elementos para ejemplificar esta sección. El resto del capítulo está dedicado a dar de modo detallado una base para el espacio  $Hom(S^\lambda, M^\mu)$ , a pesar de que la idea para encontrar una base para dicho espacio es análoga, se presentan nuevas dificultades, por lo cual será necesario introducir el concepto de tablas generalizadas estándar y también mostraremos cómo serán obtenidas, gran parte de los enunciados de este capítulo se pueden encontrar en [Sa], cabe mencionar que en la tesis se encontrarán tanto las pruebas detalladas así como ejemplos para esclarecer los resultados. También fueron usadas las notas [Le] y [Pa].

Finalmente el cuarto capítulo está dedicado a mostrar uno de varios resultados que usa el lenguaje a base de tablas utilizado a lo largo de toda la tesis, donde es posible obtener de modo combinatorio uno de los resultados presentados en el tercer capítulo, para ello será usado el algoritmo de incursión, éste se puede encontrar en [Ma] y además se mostrará detalladamente que se puede dar un procedimiento inverso a dicho algoritmo, de este modo es posible completar la prueba y así presentar la correspondencia RSK.

# Lista de Símbolos

Símbolo	Significado	Pág.
$\chi \uparrow_H^G$	Carácter asociado a la representación inducida de $H$ a $G$	31
$\chi \downarrow_H^G$	Carácter asociado a la restricción de $G$ a $H$	31
$\chi$	Carácter de Grupo	23
$f^\lambda$	Cantidad de tablas estándar de tipo $\lambda$	64
$T_\lambda$	Conjunto de tablas de tipo $\lambda$	36
$K_{\lambda\mu}$	Coefficientes de Kostka	83
$[T]_\lambda$	Conjunto de tabloides equivalentes por columna asociados a $T$	76
$\{T\}_\lambda$	Conjunto de tabloides equivalentes por renglón asociados a $T$	76
$\mathcal{T}_{\lambda\mu}$	Conjunto de tablas generalizadas de tipo $\lambda$ y contenido $\mu$	73
$\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$	Conjunto de tablas generalizadas estándar de tipo $\lambda$ y contenido $\mu$	79
$G_{A,B}$	Elemento Garnir asociado a los conjuntos $A$ y $B$	58
$C_t$	Grupo de Young estabilizador de columna para una tabla $t$	44
$R_t$	Grupo de Young estabilizador de renglón para una tabla $t$	44
$M^\lambda$	Módulo de permutación asociado a $\lambda$	38
$S^\lambda$	Módulo Specht	50
$\lambda$	Partición	35
$e_t$	Politabloide asociado a la tabla $t$	45
$C_t^-$	Suma signada de permutaciones en las columnas de $t$	45
$\{t^i\}$	Tabloide formado por los elementos menores o iguales a $i$	63
$T_{\{s\}}(t)$	Tabla generalizada	74
$[t]$	Tabloide por columna	40
$\{t\}$	Tabloide por renglón	37
$\theta_{T_{\{s\}}(t)}$	Homomorfismo correspondiente a $T_{\{s\}}(t)$	76

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Grupo simétrico

Antes de comenzar introduciremos algunos conceptos básicos que serán usados a lo largo de todo este trabajo, es por eso que es conveniente acordar la notación que manejaremos para evitar confusiones.

Sea  $\pi \in S_n$ , es posible describir a  $\pi$  haciendo uso de un arreglo de  $2 \times n$ , de modo que en el primer renglón colocamos a los elementos de su dominio y en el renglón inferior su imagen bajo la permutación que apliquemos del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Definimos el **grupo simétrico** para  $n$  elementos como el conjunto de todas las biyecciones  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  con la operación composición y será denotado por  $S_n$ , sus elementos serán llamados permutaciones y la cardinalidad estará dada por  $|S_n| = n!$ .

**Ejemplo 1.1** En el caso de  $S_4$  podemos considerar  $\pi, \sigma \in S_4$ , donde  $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 4, \pi(4) = 1$  y  $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 4$  y con la notación que usaremos se escriben como

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora hablemos sobre la composición de permutaciones, dadas  $\pi, \sigma \in S_n$  definimos la composición como

$$\pi \circ \sigma := \pi(\sigma(i)) \text{ con } i \in \{1, \dots, n\}$$

la cual será denotada simplemente como  $\pi\sigma$ .

**Ejemplo 1.2** Retomando el ejemplo 1.1 tendríamos que  $\pi \circ \sigma$  resulta

$$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definición 1.3** Sea  $\pi \in S_n$ , diremos que  $\pi$  es un **ciclo** de longitud  $k$  si existen  $i_1, \dots, i_k$  elementos distintos de  $\{1, \dots, n\}$  tales que  $\pi(i_1) = i_2, \pi(i_2) = i_3, \dots, \pi(i_{k-1}) = i_k$  y  $\pi(i_k) = i_1$ .

**Notación 1.4** Una manera útil para denotar un ciclo de longitud  $k$  a la cual recurriremos constantemente como en la definición 1.3 será:

$$(i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k) = (i_2 i_3 \dots i_k i_1) = \dots = (i_k i_1 \dots i_{l-2} i_{k-1}).$$

**Definición 1.5** Una **transposición** es un ciclo de longitud dos. La longitud de un ciclo  $\alpha$  se denotará como  $l(\alpha)$ .

**Definición 1.6** Dada  $\pi \in S_n$ , decimos que  $\pi$  fija a  $i$  si  $\pi(i) = i$  y diremos que  $\pi$  mueve a  $i$  si  $\pi(i) \neq i$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definición 1.7** Definimos el soporte de  $\pi$  como  $sop(\pi) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \pi(i) \neq i\}$ .

**Ejemplo 1.8** En el ejemplo 1.1 tendríamos que  $\pi = (1\ 2\ 3\ 4)$ ,  $\sigma = (2\ 3)$  y el  $sop(\pi) = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $sop(\sigma) = \{2, 3\}$ .

**Definición 1.9** Dadas dos permutaciones  $\pi$  y  $\sigma$  diremos que son disjuntas si sus soportes son disjuntos, es decir,  $sop(\pi) \cap sop(\sigma) = \emptyset$ .

**Proposición 1.10** Sean  $\sigma, \pi \in S_n$  dos permutaciones disjuntas, entonces  $\sigma\pi = \pi\sigma$ .

**Demostración.** Sean  $\sigma, \pi \in S_n$  permutaciones disjuntas y consideremos  $j \in \{1, \dots, n\}$ , se presentan tres casos, si  $\sigma(j) \neq j$  y  $\pi(j) = j$  ó  $\sigma(j) = j$  y  $\pi(j) \neq j$  ó  $\sigma(j) = \pi(j) = j$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\sigma(j) \neq j$  y  $\pi(j) = j$ , entonces  $\sigma\pi(j) = \sigma(j)$ , como  $\sigma$  es inyectiva y  $\sigma$  mueve a  $j$  entonces  $\sigma\sigma(j) \neq \sigma(j)$ , i.e.  $\sigma(j)$  es un elemento que no queda fijo al aplicar  $\sigma$ . Como  $\sigma$  y  $\pi$  son ajenas esto implica que  $\sigma(j)$  debe quedar fijo bajo  $\pi$ , i.e.  $\pi\sigma(j) = \sigma(j)$ , por lo tanto  $\sigma\pi(j) = \pi\sigma(j)$ . En caso de que las dos permutaciones fijen al elemento  $j$ , se tiene que  $\sigma\pi(j) = \sigma(j) = j$  y  $\pi\sigma(j) = \pi(j) = j$ , por lo tanto  $\pi\sigma(j) = \sigma\pi(j)$ .

■

Los ciclos son permutaciones fáciles de manipular y su importancia radica en que toda permutación puede ser descrita en términos de éstas, como veremos a continuación.

**Teorema 1.11** Toda elemento de  $S_n$  es un ciclo ó un producto de ciclos disjuntos.

**Demostración.** Haremos esta prueba por inducción sobre  $k = |sop(\pi)|$ .

El paso base de inducción es tener  $k = 0$  y si éste es el caso entonces:

$$\pi = id = (1)(2) \dots (n).$$

Sea  $k > 0$  y supongamos como hipótesis de inducción que toda permutación que mueve menos de  $k$  elementos se puede escribir como un producto de ciclos disjuntos. Ahora consideramos  $\pi \in S_n$  con  $|sop(\pi)| = k > 0$  y sea  $i \in sop(\pi)$ . Sea  $Y = \{\pi^m(i) \mid m \in \mathbb{Z}\}$ . Observemos que  $j \in Y$  si y sólo si  $\pi(j) \in Y$ , ya que por una parte si  $j \in Y$  entonces  $j = \pi^m(i)$  con  $m \in \mathbb{Z}$  entonces  $\pi(j) = \pi(\pi^m(i)) = \pi^{m+1}(i) \in Y$  y por otra parte si  $\pi(j) \in Y$  entonces  $\pi(j) = \pi^m(i)$  lo que significa que  $j = \pi^{m-1}(i) \in Y$ .

Continuando con la demostración, consideramos  $i, \pi(i), \dots, \pi^l(i), \dots, \pi^r(i)$  con  $r$  el primer entero positivo para el cual el elemento se repite el cual existe pues  $Y$  es finito. Supongamos

que  $\pi^l(i) = \pi^r(i)$  con  $0 \leq l < r$  así  $i = \pi^{r-l}(i)$  entonces  $r - l = r$  por lo que  $l = 0$  y así  $\pi^r(i) = i$ , esto significa que  $Y = \{i, \pi(i), \dots, \pi^{r-1}(i)\}$  tiene  $r$  elementos. Consideramos el  $r$ -ciclo  $\sigma = (i \ \pi(i) \ \dots \ \pi^{r-1}(i))$ , si  $\pi = \sigma$  entonces ya terminamos, si no, entonces definimos  $\pi' = \sigma^{-1}\pi \in S_n$  y tomamos  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Si  $j \in Y$  entonces  $\pi'(j) = \sigma^{-1}\pi(j) = \pi^{-1}\pi(j) = j$  y si  $j \notin Y$  entonces  $\pi'(j) = \sigma^{-1}\pi(j) = \pi(j)$  por lo tanto  $\text{sop}(\pi') = \text{sop}(\pi) \setminus Y$  y así tenemos que  $\pi'$  mueve menos de  $k$  elementos y es disjunta con  $\sigma$ , por hipótesis de inducción  $\pi' = \beta_1 \dots \beta_t$  con  $\beta_i$  ciclos disjuntos y así  $\pi = \sigma\pi' = \sigma\beta_1 \dots \beta_t$  es una descomposición en ciclos disjuntos. ■

**Teorema 1.12** *Toda permutación  $\sigma \in S_n$  es producto de transposiciones.*

**Demostración.** Sea  $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{k-1} \ i_k)$  un ciclo no trivial de  $S_n$ , éste se puede escribir como

$$(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{k-1} \ i_k) = (i_1 \ i_k)(i_1 \ i_{k-1}) \cdots (i_1 \ i_3)(i_1 \ i_2),$$

y por el teorema 1.11 podemos concluir el resultado. ■

**Definición 1.13** *Diremos que una permutación  $\sigma$  de  $S_n$  es par si en cualquier factorización como producto de transposiciones, el número de éstas es par. En caso contrario se dirá que  $\sigma$  es impar.*

**Teorema 1.14** *La permutación identidad sólo se puede escribir como un producto de una cantidad par de transposiciones.*

Hay diferentes formas de probar este teorema, una de ellas se puede encontrar en [Con].

**Definición 1.15** *Se define el signo de  $\sigma$  como*

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es impar} \end{cases}$$

*Veamos con ayuda del siguiente teorema que las definiciones anteriores tienen sentido.*

**Teorema 1.16** *Sea  $\sigma \in S_n$  con  $\sigma \neq \varepsilon$ , el número de transposiciones que aparecen en cualquier factorización del teorema 1.12, siempre es par ó siempre es impar.*

**Demostración.** Sea  $\sigma \in S_n$  y supongamos que es par e impar, entonces existen transposiciones  $s_i$  y  $t_j$  tales que

$$\sigma = t_1 \cdots t_k = s_1 \cdots s_m$$

con  $k$  par y  $m$  impar, por definición de transposición se concluye que  $\sigma^{-1} = s_m \cdots s_1$  esto significa que  $\varepsilon = \sigma\sigma^{-1}$  por tanto

$$\varepsilon = t_1 \cdots t_k s_m \cdots s_1$$

lo que es una contradicción pues la identidad es par. ■

**Definición 1.17** *Sea  $\pi \in S_n$ . Una factorización completa de  $\pi$  en  $S_n$  es una descomposición en producto de ciclos disjuntos, incluyendo a todos los 1-ciclos correspondientes a cada elemento fijado por  $\pi$ .*

Lo siguiente es probar que salvo por el orden de los ciclos, existe una única factorización completa.

**Lema 1.18** 1. Sean  $\pi \in S_n$  y  $\pi = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_t$  una factorización en permutaciones ajenas. Si  $\sigma_1(i) \neq i$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces  $\pi^k(i) = \sigma_1^k(i)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

2. Sean  $\sigma$  y  $\gamma \in S_n$  ciclos. Si existe  $i \in \text{Sop}(\sigma)$  tal que  $\sigma^k(i) = \gamma^k(i)$  para toda  $k \in \mathbb{Z}^+$ , entonces  $\sigma = \gamma$ .

**Demostración.**

1. Sean  $\pi \in S_n$  y  $\pi = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_t$  una factorización en permutaciones ajenas, sea  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $\sigma_1(i) \neq i$  y  $k \in \mathbb{N}$ , como los factores son ajenos por la proposición 1.10 se tiene que

$$\pi^k(i) = \sigma_1^k(\sigma_2 \dots \sigma_t)^k(i) = \sigma_1^k(i).$$

por lo que al aplicar la permutación al elemento  $i$  se obtiene que

2. Ahora sean  $\sigma$  y  $\gamma \in S_n$  ciclos y consideremos  $i \in \text{Sop}(\sigma)$  tal que  $\sigma^k(i) = \gamma^k(i)$  para toda  $k \in \mathbb{Z}^+$ . En particular se tiene que  $\gamma(i) = \sigma(i) \neq i$  y entonces  $i \in \text{Sop}(\gamma)$ , por que lo que  $\sigma = (i \ i_1 \ \dots \ i_r)$  y  $\gamma = (i \ j_1 \ \dots \ j_s)$ , de donde  $\sigma^k(i) = i_k$  para  $k \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\sigma^{r+1}(i) = i$ ,  $\gamma^k(i) = i_k$  para  $k \in \{1, \dots, s\}$  y  $\gamma^{s+1}(i) = i$ . Si  $r \neq s$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $r < s$ , y entonces  $\sigma^{r+1}(i) = i \neq j_{r+1} = \gamma^{r+1}(i)$  lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto se debe tener que  $r = s$ , de hecho se cumple que  $i_k = \sigma^k(i) = \gamma^k(i) = j_k$ , por lo cual concluimos que  $\sigma = \gamma$ .

■

**Teorema 1.19** La factorización completa de una permutación en  $S_n$  es única salvo por el orden de los factores.

**Demostración.** Sea  $\pi \in S_n$ . Procederemos por inducción sobre el número  $k$  de elementos que son movidos por  $\pi$ .

Si  $k = 0$  se tiene que  $\pi = Id_{S_n}$  y de este modo toda factorización completa consiste de 1–ciclo por cada elemento en  $\{1, 2, \dots, n\}$  por tanto se cumple el resultado.

Notemos que cualquier factorización completa de  $\pi$  tiene un 1–ciclo por cada elemento fijado en ella, de modo que verificaremos que los ciclos de longitud mayor que uno aparecen en una factorización completa de  $\pi$  son siempre los mismos, con esto en mente, supongamos ahora que  $k > 0$ , y que toda permutación que mueva menos de  $k$  elementos, satisface que los ciclos de longitud mayor que uno, que aparecen en una factorización completa de ella, son siempre los mismos salvo por el orden en que aparecen.

Sean  $\pi = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_t = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s$  dos factorizaciones de  $\pi$  en ciclos ajenos de longitud mayor que uno. Veamos que los factores coinciden, salvo por el orden en que aparecen. Como  $k > 0$ , tomemos  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  un elemento movido por  $\pi$ . Sabemos que debe existir algún factor que mueva a  $i$  en cada una de las dos descomposiciones anteriores, sin pérdida de generalidad digamos que  $\beta_1(i) \neq i \neq \gamma_1(i)$ , por el primer inciso del lema 1.18 obtenemos que

$\beta_1^k(i) = \pi^k(i) = \gamma_1^k(i)$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto  $\beta_1^k(i) = \gamma_1^k(i)$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$  y usando el segundo inciso del lema 1.18 se concluye que  $\beta_1 = \gamma_1$ , por lo tanto  $\beta_2 \dots \beta_t = \gamma_2 \dots \gamma_s$  son dos factorizaciones en ciclos ajenos de longitud mayor que dos, de una permutación que mueve menos de  $k$  elementos, por hipótesis de inducción, tienen los mismos factores salvo por el orden en que aparecen, por lo que los factores de las dos descomposiciones de  $\pi$  también son los mismos salvo por su orden. ■

**Definición 1.20** Sean  $\pi, \sigma \in S_n$ , diremos que  $\pi$  y  $\sigma$  tienen la misma estructura cíclica en  $S_n$ , si su factorización completa tiene el mismo número de  $k$  – ciclos para toda  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

**Definición 1.21** Sean  $G$  un grupo y  $g, h \in G$ , diremos que  $g$  y  $h$  son conjugados si  $g = khk^{-1}$  para algún  $k \in G$ . Al conjunto de todos los elementos conjugados a  $g$  le llamaremos la **clase de conjugación** de  $g$  y será denotada como  $K_g$ .

**Proposición 1.22** La relación dada en la definición 1.21 es una relación de equivalencia en el grupo  $G$ .

**Demostración.**

1. Es reflexiva pues  $g = \varepsilon g \varepsilon^{-1}$  por lo que  $g$  es conjugado de  $g$ .
2. Es simétrica; si  $g = khk^{-1}$  entonces  $k^{-1}gk = h$  con  $k^{-1} \in G$ .
3. Es transitiva; Si  $h_1 = k_1 h_2 k_1^{-1}$  y  $h_2 = k_2 h_3 k_2^{-1}$  entonces  $h_1 = k_1 (k_2 h_3 k_2^{-1}) k_1^{-1} = k' h_3 k'^{-1}$  con  $k' = k_1 k_2 \in G$ .

■

Veamos ahora que los elementos conjugados tienen la misma estructura cíclica.

**Teorema 1.23** Dado  $(i_1 i_2 \dots i_r) \in S_n$  un  $r$  – ciclo y  $\pi \in S_n$  entonces  $\pi(i_1 i_2 \dots i_r)\pi^{-1}$  también es un  $r$  – ciclo y

$$\pi(i_1 i_2 \dots i_r)\pi^{-1} = (\pi(i_1) \pi(i_2) \dots \pi(i_r)).$$

**Demostración.** Evaluemos la permutación  $\pi(i_1 i_2 \dots i_r)\pi^{-1}$  en cada elemento de

$$\{1, 2, \dots, n\} = \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\}.$$

Caso 1. Sea  $j = \pi(i_t)$  con  $t = 1, \dots, r - 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \pi(i_1 i_2 \dots i_r)\pi^{-1}(j) &= \pi(i_1 i_2 \dots i_r)\pi^{-1}(\pi(i_t)) \\ &= \pi(i_1 i_2 \dots i_r)(i_t) = \pi(i_{t+1}). \end{aligned}$$

Caso 2. Sea  $j = \pi(i_r)$ , entonces

$$\pi(i_1 i_2 \dots i_r)\pi^{-1}(j) = \pi(i_1 i_2 \dots i_r)(i_r) = \pi(i_1).$$

Caso 3. Sea  $j = \pi(k)$ , con  $k \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ , entonces

$$\pi(i_1 i_2 \dots i_r)\pi^{-1}(j) = \pi(i_1 i_2 \dots i_r)(k) = \pi(k) = j$$

así concluimos que

$$\pi(i_1 i_2 \dots i_r)\pi^{-1} = (\pi(i_1) \dots \pi(i_r)).$$

■

**Proposición 1.24** *Dadas dos permutaciones  $\pi, \sigma \in S_n$  y supongamos que  $\sigma$  tiene una descomposición en ciclos disjuntos  $\sigma = (x_1 \dots x_k)(y_1 \dots y_l) \dots (z_1 \dots z_m)$ . Entonces  $\pi\sigma\pi^{-1}$  tiene la misma estructura cíclica que  $\sigma$  y se obtiene aplicando  $\pi$  a los símbolos en cada ciclo de  $\sigma$ , es decir,*

$$\pi\sigma\pi^{-1} = (\pi(x_1) \dots \pi(x_k))(\pi(y_1) \dots \pi(y_l)) \dots (\pi(z_1) \dots \pi(z_m)).$$

**Demostración.** Denotaremos a los ciclos de  $\sigma$  como  $c_j = (x_1 \dots x_k)$  de modo que  $\sigma = c_1 c_2 \dots c_t$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \pi\sigma\pi^{-1} &= \pi(c_1 c_2 \dots c_t)\pi^{-1} \\ &= (\pi c_1 \pi^{-1}) \dots (\pi c_t \pi^{-1}) \end{aligned}$$

por el teorema 1.23 cada factor  $(\pi c_j \pi^{-1})$  es un ciclo que se obtiene de aplicar  $\pi$  a los elementos del ciclo  $c_j$ . ■

**Teorema 1.25** *Dos permutaciones  $\pi, \sigma \in S_n$  tienen la misma estructura cíclica si y sólo si son conjugadas.*

**Demostración.** Sólo hace falta probar que si  $\pi$  y  $\sigma$  tienen la misma estructura cíclica, entonces son conjugadas. Para esto, supongamos que

$$\begin{aligned} \pi &= (x_1 \dots x_k)(y_1 \dots y_l) \dots (z_1 \dots z_m), \\ \sigma &= (x'_1 \dots x'_k)(y'_1 \dots y'_l) \dots (z'_1 \dots z'_m). \end{aligned}$$

Necesitamos encontrar un elemento  $\gamma \in S_n$  tal que  $\gamma\pi\gamma^{-1} = \sigma$ , pero por el lema anterior tenemos que

$$\gamma\pi\gamma^{-1} = (\gamma(x_1) \dots \gamma(x_k))(\gamma(y_1) \dots \gamma(y_l)) \dots (\gamma(z_1) \dots \gamma(z_m))$$

es decir queremos  $\gamma$  tal que

$$(\gamma(x_1) \dots \gamma(x_k))(\gamma(y_1) \dots \gamma(y_l)) \dots (\gamma(z_1) \dots \gamma(z_m)) = (x'_1 \dots x'_k)(y'_1 \dots y'_l) \dots (z'_1 \dots z'_m)$$

por lo que sólo debemos probar que existe  $\gamma \in S_n$  tal que

$$\gamma(x_i) = x'_i; \quad \gamma(y_i) = y'_i; \quad \gamma(z_i) = z'_i$$

la cual existe pues los ciclos de  $\pi$  y de  $\sigma$  son disjuntos, por lo que el número de elementos que  $\pi$  deja fijos es igual al número de elementos que  $\sigma$  deja fijos, entonces podemos definir  $\gamma(x) = x'$  si  $x'$  no aparece en  $\alpha$  y donde  $x'$  es cualquier elemento que no aparece en  $\sigma$ . ■

### 1.1.1 El número de $k$ – ciclos en $S_n$

Retomemos el concepto de ciclo. Por cómo se define  $k$ –ciclo se tiene que resulta ser una ordenación sin repetición de elementos del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  de números naturales y de

éstos hay  $\frac{n!}{(n-k)!}$  de estas ordenaciones, sin embargo, cada  $k - ciclo$  se puede escribir de  $k$  maneras distintas, de modo que la totalidad de  $k - ciclos$  de  $S_n$  es

$$\frac{1}{k} \left( \frac{n!}{(n-k)!} \right).$$

La siguiente definición será usada para hablar de la cantidad de estructuras cíclicas en  $S_n$  y será retomada más adelante.

**Definición 1.26** Sea  $n \in \mathbb{N}^+$ . Diremos que  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$  es una **partición** de  $n$  si se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $\lambda_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,
2.  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$  i.e. forman una sucesión de enteros no negativos no creciente y
3.  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$ .

**Definición 1.27** Dada una permutación  $\sigma$  en  $S_n$ , diremos que es del tipo  $(c_1, \dots, c_k)$  si la factorización de  $\sigma$  en ciclos disjuntos de  $S_n$  se tienen  $c_i$  ciclos disjuntos de longitud  $i$ , i.e.

$$\sigma = \overbrace{(\bullet) \dots (\bullet)}^{c_1} \overbrace{(\bullet\bullet) \dots (\bullet\bullet)}^{c_2} \dots \overbrace{(\bullet\bullet\bullet) \dots (\bullet\bullet\bullet)}^{c_k}$$

donde  $(\bullet\bullet\bullet)$  denota un  $k - ciclo$ .

Como por cada elemento de  $\{1, 2, \dots, n\}$  que está fijo bajo  $\sigma$  se cuenta el  $1 - ciclo$  correspondiente entonces se tiene que

$$1c_1 + 2c_2 + \dots + kc_k = n \tag{1.1}$$

y si escribimos los ciclos de  $\sigma$  de menor a mayor longitud y hacemos  $c_j = 0$  siempre que no haya  $j - ciclos$  en  $\sigma$  entonces la igualdad anterior se escribe como

$$1c_1 + 2c_2 + \dots + nc_n = n.$$

Ahora consideremos

$$\mu_i := c_i + c_{i+1} + \dots + c_n$$

entonces se tiene que  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$  y además por (1.1) tenemos que

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = n,$$

es decir que los enteros  $\mu_i > 0$  forman una partición del entero  $n$ .

Por otro lado, dada una partición  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  de  $n$  podemos considerar  $c_i := \mu_i - \mu_{i+1}$  de modo que los  $c_i \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^k ic_i = n$ .

De este modo podemos concluir el siguiente teorema:

**Teorema 1.28** El número de tipos distintos de permutaciones en  $S_n$  es igual al número de particiones del entero  $n$ .

**Observación 1.29** Por el teorema 1.25 este número es igual al número de clases de conjugación.

## 1.2 Representaciones de Grupos

**Definición 1.30** Una representación por matrices de un grupo  $G$  es un homomorfismo de grupos tal que:

$$X : G \rightarrow GL_n.$$

donde  $GL_n$  es el grupo general lineal de grado  $n$ , el cual está conformado por todas las matrices  $X = (x_{i,j})_{n \times n}$  que son invertibles con respecto a la multiplicación de matrices.

Es decir, a cada  $g \in G$  le es asignada una matriz  $X(g)$  y por ser un homomorfismo de grupos se cumple que

1.  $X(\varepsilon) = Id_n$  y
2.  $X(gh) = X(g)X(h)$

donde  $\varepsilon$  es el elemento neutro del grupo  $G$  e  $Id_n$  es la matriz identidad de tamaño  $n$ .

El número  $n$  que denota el tamaño de las matrices será llamado el grado ó dimensión de la representación.

**Ejemplo 1.31** Todos los grupos tienen la representación trivial, ésta consiste en mandar a todos los elementos de  $G$  a la matriz  $(1)$ .

**Ejemplo 1.32** Una representación de grado uno no trivial de  $S_n$  es la representación signo, está dada por el homomorfismo

$$X(\pi) = (\text{sgn}(\pi)).$$

**Ejemplo 1.33** Dada  $\pi \in S_n$  podemos definir  $X(\pi) = (a_{i,j})_{n \times n}$  donde

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } \pi(j) = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

esta representación es conocida como la representación que define a  $S_n$  y su grado es  $n$ .

La matriz  $X(\pi)$  es conocida como la matriz de permutación asociada a  $\pi$ , está conformada por ceros y contiene un único uno en cada renglón y en cada columna.

Observemos el caso particular de  $S_3$ , por cómo se define, las matrices de permutación resultan ser

$$\begin{aligned} X(\varepsilon) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & X((1\ 2)) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ X((1\ 3)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & X((2\ 3)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ X((1\ 2\ 3)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & X((1\ 3\ 2)) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 1.2.1 $\mathbb{C}G$ -módulos y el álgebra de grupo

En esta sección definiremos lo que es un álgebra de grupo, un  $\mathbb{C}G$ -módulo y observaremos cómo se relacionan con las representaciones del grupo, para ello empezaremos recordando la definición de  $\mathbb{C}G$ -módulo y daremos una equivalencia en términos de homomorfismo de grupos, es importante hacer notar la equivalencia pues nos permitirá trabajar con mayor facilidad. Primero definiremos lo que es una acción de un grupo  $G$  en un conjunto  $A$ , más adelante la usaremos sobre un espacio vectorial.

**Definición 1.34** Sean  $G$  un grupo y  $A$  un conjunto, decimos que  $G$  actúa en  $A$  ó que es  $A$  es un  $G$  conjunto si existe una función

$$\begin{aligned}\alpha : G \times A &\rightarrow A \\ \alpha(g, a) &\rightarrow g \bullet a\end{aligned}$$

tal que

1.  $\alpha(\varepsilon, a) = a$  y
2.  $\forall g, h \in G \alpha(h, \alpha(g, a)) = \alpha(hg, a)$ .

Recordemos que las matrices corresponden a transformaciones lineales, por tanto podemos pensar a las representaciones en estos términos y usar las herramientas del álgebra lineal para estudiarlas, de aquí surge la idea de  $\mathbb{C}G$ -módulo donde  $F$  es el campo sobre el que estamos trabajando, concepto que presentamos a continuación mostrando su conexión con las representaciones de  $G$ .

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$ . Sea  $GL(V)$  el conjunto de transformaciones lineales invertibles de  $V$  en sí mismo, si la dimensión de  $V$  es  $n$ , entonces  $GL(V)$  y  $GL_n(\mathbb{C})$  son  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales, en particular, son grupos abelianos isomorfos, donde  $GL_n(\mathbb{C})$  es el grupo lineal general complejo.

**Definición 1.35** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $F$  y  $G$  un grupo, diremos que  $V$  es un  $\mathbb{C}G$ -módulo si existe un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow GL(V).$$

De modo equivalente, diremos que  $V$  es un  $\mathbb{C}G$ -módulo si para todo  $v \in V$ ,  $g \in G$  hay una acción de  $G$  en  $V$  tal que se cumplan las siguientes propiedades:

1.  $gv \in V$
2.  $g(\lambda_1 v + \lambda_2 w) = \lambda_1(gv) + \lambda_2(gw)$
3.  $(gh)v = g(hv)$  y
4.  $\varepsilon v = v$ .

La equivalencia anterior se debe a lo siguiente, observemos de dado  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  un homomorfismo de grupos, para todo  $v, u \in V$ ,  $\lambda \in F$  y  $g, h \in G$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \rho(g)v &\in F^n \\ (\rho(gh))v &= (\rho(g))(\rho(h))v \\ \rho(\varepsilon)v &= v \\ (\lambda\rho(g))v &= \lambda(\rho(g)v) \\ \rho(g)(u + v) &= \rho(g)u + \rho(g)v \end{aligned}$$

Si definimos  $gv = \rho(g)v$  para todo  $v \in F^n$  y  $g \in G$  entonces tenemos que  $V$  es un  $\mathbb{C}G$  – *módulo*.

A la inversa, si tenemos un producto  $gv$  definido con las condiciones anteriores, definimos  $\rho(g) : V \rightarrow V$  como  $\rho(g)(v) = gv$ . El inciso uno nos dice que la transformación lleva a  $V$  en sí mismo, es decir, que es cerrada bajo la operación, el segundo inciso nos dice que el mapeo es lineal, la propiedad tres nos dice que la segunda condición de la definición 1.30 de representaciones de grupos se cumple y la cuarta condición combinada con la tercera condición nos dice que  $g$  y  $g^{-1}$  deben ser mapeos inversos, por lo tanto todas las transformaciones son invertibles.

Observemos que dada una matriz de representación  $X$  de grado  $n$ , podemos considerar el espacio vectorial  $V = \mathbb{C}^n$  de todos los vectores por columna con  $n$  entradas. Así para todo  $v \in V$ , podemos definir dado  $g \in G$

$$gv := X(g)v$$

donde la operación del lado derecho es la multiplicación de matrices.

Ahora si  $V$  es un  $\mathbb{C}G$  – *módulo* escogemos una base  $\beta$  de  $V$ , entonces  $X(g)$  será la matriz de la transformación lineal de  $g \in G$  en la base  $\beta$ .

Hablemos ahora de acciones de grupos.

Retomando los axiomas de  $\mathbb{C}G$  – *módulo*, tenemos que si un conjunto  $A$  cumple las propiedades 1, 3 y 4 de la definición 1.35 entonces podemos decir que  $G$  actúa en  $A$ . Con esta idea en mente veamos que siempre es posible considerar un conjunto  $A$  sobre el que esté actuando un grupo  $G$  y obtener un  $\mathbb{C}G$  – *módulo*.

Sean  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  y el espacio vectorial  $\mathbb{C}A = \mathbb{C}\{a_1, \dots, a_n\}$  que consiste en las combinaciones de la forma

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

con  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  y  $a_i \in A$  para toda  $i$ , con las siguientes operaciones.

La suma y producto por escalar están definidas como sigue:

$$(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) + (\beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n) = (\lambda_1 + \beta_1) a_1 + \dots + (\lambda_n + \beta_n) a_n$$

y

$$\lambda(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = (\lambda\lambda_1) a_1 + \dots + (\lambda\lambda_n) a_n.$$

Ahora, la acción de  $G$  sobre  $A$  puede ser extendida linealmente a  $\mathbb{C}A$ , es decir, definimos

$$g(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 (ga_1) + \dots + \lambda_n (ga_n)$$

para toda  $g \in G$ . Mediante este proceso tenemos que  $\mathbb{C}A$  es un  $\mathbb{C}G$  – *módulo* de dimensión igual a la cardinalidad del conjunto  $A$ .

**Definición 1.36** *Sea un grupo  $G$  actuando sobre un conjunto  $A$  finito, entonces el  $\mathbb{C}G$  – módulo asociado  $\mathbb{C}A$  será llamado la representación permutación asociada a  $A$ . Además los elementos de  $A$  forman una base para  $\mathbb{C}A$  a la cual llamaremos la base estándar.*

**Ejemplo 1.37** *Para ejemplificar la definición anterior consideremos el grupo simétrico  $S_n$  con la acción usual en  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ , en este caso*

$$\mathbb{C}A = \{\lambda_1 1 + \lambda_2 2 + \dots + \lambda_n n \mid \lambda_i \in \mathbb{C} \forall i\}$$

entonces extendiendo la acción a  $\mathbb{C}A$  tendríamos

$$\pi(\lambda_1 1 + \lambda_2 2 + \dots + \lambda_n n) = \lambda_1 \pi(1) + \lambda_2 \pi(2) + \dots + \lambda_n \pi(n)$$

para toda  $\pi \in S_n$ .

**Ejemplo 1.38** *Un caso particular del ejemplo anterior sería trabajar con  $G = S_3$ , el cual está actuando en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , en particular para la permutación  $\pi = (2\ 3)$  para obtener la matriz  $X(\pi)$  debemos realizar el siguiente cálculo*

$$(2\ 3)1 = 1, \quad (2\ 3)2 = 3, \quad (2\ 3)3 = 2$$

realizando el mismo procedimiento para el resto de las permutaciones se obtienen todas las matrices, las cuales resultan:

$$X(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X((1\ 2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X((1\ 3)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X((2\ 3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X((1\ 2\ 3)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X((1\ 3\ 2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

coinciden con las matrices obtenidas en el ejemplo 1.33.

**Ejemplo 1.39** *Otra representación importante es la representación regular. Sea  $G$  un grupo, entonces  $G$  actúa en sí mismo con la operación definida en  $G$  y las propiedades 1, 3 y 4 de la definición 1.35 se siguen de los axiomas de cerradura, asociatividad y la existencia del neutro en el grupo  $G$ . Entonces si  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  el  $\mathbb{C}G$  – módulo correspondiente sería*

$$\mathbb{C}[G] = \{\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \mid \lambda_i \in \mathbb{C} \forall i\}$$

este  $\mathbb{C}G$  – módulo recibe el nombre del álgebra de grupo de  $G$ . El producto en  $\mathbb{C}[G]$  estará dado a partir del producto en  $G$ , es decir  $g_i g_j = g_k$  en  $\mathbb{C}[G]$  si  $g_i g_j = g_k$  en  $G$ . La acción de  $G$  en el álgebra de grupo está dada como

$$g(\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n) = \lambda_1 (g g_1) + \dots + \lambda_n (g g_n)$$

para todo  $g \in G$ .

**Definición 1.40** Sean  $G$  un grupo y  $H \leq G$ , diremos que el conjunto  $\{g_1, \dots, g_k\}$  es una transversal para  $H$  si tenemos que

$$\mathcal{H} = \{g_1H, \dots, g_nH\}$$

es un conjunto completo de clases laterales de  $H$  en  $G$ .

**Definición 1.41** Definimos la acción de  $G$  en  $\mathcal{H}$  por  $g(g_iH) = (gg_i)H$  para todo  $g \in G$ . El correspondiente módulo será

$$\mathbb{C}\mathcal{H} = \{\lambda_1g_1H + \dots + \lambda_n g_nH \mid \lambda_i \in \mathbb{C}\}$$

y la acción se extiende linealmente, de modo que

$$g(\lambda_1g_1H + \dots + \lambda_n g_nH) = \lambda_1(gg_1H) + \dots + \lambda_n(gg_nH).$$

A esta representación se le conoce como representación clase lateral de  $G$  con respecto a  $H$  y resulta una generalización de la representación regular. Cabe mencionar que si  $H = G$  entonces se obtiene la representación trivial y en el extremo opuesto, si  $H = \{\varepsilon\}$  entonces  $\mathcal{H} = G$  y en este caso se obtiene la representación regular.

**Ejemplo 1.42** Podemos pensar en un caso particular, sea  $G = S_3$  y  $H = \{\varepsilon, (2\ 3)\}$ , y consideraremos  $\mathcal{H} = \{H, (1\ 2)H, (1\ 3)H\}$  y  $\mathbb{C}\mathcal{H} = \{\lambda_1H + \lambda_2(1\ 2)H + \lambda_3(1\ 3)H \mid \lambda_i \in \mathbb{C}\}$ . Para formar la matriz asociada a  $(1\ 2)$  respecto a la base estándar obtenemos

$$(1\ 2)H = (1\ 2)H, (1\ 2)(1\ 2)H = H, (1\ 2)(1\ 3)H = (1\ 3\ 2)H = (1\ 3)H$$

por tanto

$$X((1\ 2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que coincide con la matriz obtenida en el ejemplo 1.38, esto será explicado más adelante cuando trabajemos con isomorfismos de módulos.

## 1.2.2 Reducibilidad

**Definición 1.43** Sea  $V$  un  $\mathbb{C}G$  – módulo. Un submódulo de  $V$  es un subespacio  $W$  de  $V$  que es cerrado bajo la acción de  $G$ , es decir si  $w \in W$  entonces para todo  $g \in G$  se tiene que  $gw \in W$ .

**Ejemplo 1.44** Si  $V$  es un  $\mathbb{C}G$  – módulo, entonces  $W = V$  ó  $W = \{0\}$  son submódulos de  $V$ .

**Ejemplo 1.45** Consideremos  $G = S_n$  con  $2 \leq n$  y  $V = \mathbb{C}\{1, 2, \dots, n\}$ . Ahora tomamos  $W = \mathbb{C}\{1 + 2 + \dots + n\} = \{\lambda(1 + 2 + \dots + n) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ , entonces  $W$  es un espacio generado por el vector  $1 + 2 + \dots + n$ , por lo tanto tiene dimensión uno. Para probar que  $W$  es cerrado

bajo la acción de  $S_n$ , es suficiente probar que  $\pi(1 + 2 + \dots + n) \in W$  para toda  $\pi \in S_n$ , sin embargo esto sucede pues

$$\pi(1 + 2 + \dots + n) = \pi(1) + \pi(2) + \dots + \pi(n) = 1 + 2 + \dots + n \in W.$$

dado que  $\pi$  es una biyección. De este modo tenemos un submódulo de  $V$  no cero de dimensión uno.

**Ejemplo 1.46** Ahora veamos qué sucede con la representación regular. Supongamos que  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  y consideremos el álgebra de grupo  $V = \mathbb{C}[G]$ , usando la idea del ejemplo anterior, sea  $W = \mathbb{C}[g_1 + g_2 + \dots + g_n]$  el espacio de dimensión uno generado por el vector  $g_1 + g_2 + \dots + g_n$ . Para verificar que  $W$  es submódulo, tomemos  $g \in G$  y notemos que

$$g(g_1 + g_2 + \dots + g_n) = gg_1 + gg_2 + \dots + gg_n = g_1 + g_2 + \dots + g_n \in W$$

pues multiplicar por  $g$  sólo permuta los elementos, por tanto  $G$  actúa trivialmente en  $W$ . Observemos que si  $G = S_n$  y  $W = \mathbb{C} \left[ \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \pi \right]$  entonces recuperamos la representación signo.

**Definición 1.47** Dado  $V$  un  $\mathbb{C}G$  – módulo, diremos que  $V$  es irreducible si no contiene algún submódulo que no sea el trivial ó el total. En cualquier otro caso diremos que  $V$  es reducible. De modo equivalente diremos que  $V$  es reducible si tiene una base  $\beta$  tal que si  $X$  es la acción de  $G$  en  $V$ , a todo  $g \in G$  le pueda ser asignada una matriz de la forma

$$X(g) = \begin{bmatrix} W(g) & Y(g) \\ 0 & Z(g) \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

donde  $W(g)$  son matrices cuadradas del mismo tamaño.

Veamos la equivalencia entre las dos definiciones. Supongamos que  $V$  es un  $\mathbb{C}G$  – módulo de dimensión  $n$  reducible, entonces existe  $W$  un  $\mathbb{C}G$  – submódulo tal que  $0 < \dim W < \dim V$  con  $\dim W = m$ . Ahora sea  $\beta = \{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  donde los primeros  $m$  vectores corresponden una base de  $W$ . Podemos calcular la matriz para cualquier  $g \in G$  con respecto a la base  $\beta$ , como  $W$  es un submódulo entonces  $gw_i \in W$  para todo  $1 \leq i \leq m$ , de modo que los últimos  $n - m$  escalares en su vector de coordenadas serán cero, además  $W(g)$  con  $g \in G$  serán las matrices que corresponden a la restricción de la acción de  $G$  a  $W$ , por tanto son matrices cuadradas y del mismo tamaño.

Para ver lo que resta de la equivalencia, supongamos que  $X(g)$  tiene la forma de (1.2) con  $W(g)$  de tamaño  $m \times m$ . Sea  $V = \mathbb{C}^n$  y consideremos  $W = \mathbb{C}\{e_1, \dots, e_m\}$  donde  $e_i$  es el vector columna tal que en la  $i$  – ésima columna tiene un 1 y el resto son ceros, por como acomodamos los ceros en  $X(g)$  aseguramos que  $X(g)e_i \in W$  para  $0 \leq i \leq m$  y para todo  $g \in G$ . Por tanto  $W$  es un  $\mathbb{C}G$  – módulo y es no trivial pues la matriz de ceros es de al menos  $1 \times 1$ .

**Ejemplo 1.48** Sea  $G = S_3$  y  $V = \mathbb{C}\{1, 2, 3\}$  y  $W$  el submódulo con base  $\beta = \{1 + 2 + 3\}$ , busquemos extender ésta a una base de  $V$ . Escogemos  $\beta = \{1 + 2 + 3, 2, 3\}$ . En este caso

$$X(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

para obtener  $X((12))$ , debemos averiguar cómo actúa  $(1\ 2)$  en la base  $\beta$ , por tanto realizamos los siguientes cálculos  $(1\ 2)(1 + 2 + 3) = 1 + 2 + 3$ ,  $(1\ 2)2 = 1 = (1 + 2 + 3) - 2 - 3$ ,  $(1\ 2)3 = 3$ . Entonces

$$X((1\ 2)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Análogamente podemos calcular el resto de las matrices y obtener

$$\begin{aligned} X((1\ 3)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, & X((2\ 3)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ X((1\ 2\ 3)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, & X((1\ 3\ 2)) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es importante observar que todas las matrices tienen la forma

$$X(g) = \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right].$$

debido a que la base se obtuvo de extender la base de  $W$ , submódulo en el que la acción es la trivial.

### 1.2.3 Teorema de Maschke

Al final de la sección pasada empezamos con el uso de matrices y vimos cómo se relacionan con los módulos irreducibles, así que si pudiéramos obtener siempre matrices con bloques en la diagonal correspondientes a ciertos submódulos obtendríamos información acerca de dichos submódulos y por lo tanto podríamos obtener una descomposición en submódulos irreducibles del módulo original. Buscamos entonces que las matrices tengan la forma  $X(g) = \begin{bmatrix} Y(g) & 0 \\ 0 & Z(g) \end{bmatrix}$  para toda  $g \in G$ , ésta es la noción que da pie a la definición de suma directa de matrices.

**Definición 1.49** Sea  $V$  un espacio vectorial con subespacios  $U$  y  $W$ . Entonces  $V$  es la suma directa interna de  $U$  y  $W$ , la cual se escribe como  $V = U \oplus W$ , si para todo  $v \in V$ , éste se puede escribir de modo único como  $v = u + w$  con  $u \in U$  y  $w \in W$ . Si  $V$  es un  $\mathbb{C}G$ -módulo y  $U, W$  son  $\mathbb{C}G$ -submódulos diremos que  $U$  y  $W$  son complementos uno del otro.

**Definición 1.50** Si  $X$  es una matriz entonces diremos que  $X$  es suma directa de matrices  $A$  y  $B$ , escrito como  $X = A \oplus B$  si  $X$  es una matriz de la forma  $X = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ .

Para ver la relación entre un  $\mathbb{C}G$ -módulo y la última definición de suma directa de matrices, tomemos  $V$  un  $\mathbb{C}G$ -módulo tal que  $V = U \oplus W$  con  $U$  y  $W$  dos  $\mathbb{C}G$ -submódulos de  $V$ . Como es una suma directa de espacios vectoriales, podemos escoger una base de  $V$ , digamos

$$\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_k\}$$

tal que  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  sea base de  $U$  y  $\{u_{m+1}, \dots, u_k\}$  sea base de  $W$ . Como  $U$  y  $W$  son  $\mathbb{C}G$ -submódulos, tenemos  $gu_i \in U$  y  $gw_j \in W$  para toda  $g \in G$ ,  $u_i \in U$  y  $w_j \in W$ . De este modo, para toda  $g \in G$  se tiene que

$$X(g) = \begin{bmatrix} Y(g) & 0 \\ 0 & Z(g) \end{bmatrix}$$

donde  $Y(g)$  y  $Z(g)$  son las matrices que resultan de aplicar la acción de  $G$  restringida a  $W$  y a  $U$  respectivamente.

Retomando la representación que define a  $S_3$ , habíamos visto que  $V = \mathbb{C}\{1, 2, 3\} = \mathbb{C}\{1+2+3\} \oplus \mathbb{C}\{2, 3\}$  como espacios vectoriales. Sin embargo,  $\mathbb{C}\{1+2+3\}$  es un  $S_3$  submódulo mientras que  $\mathbb{C}\{2, 3\}$  no lo es, esto debido a que  $(1\ 2)2 = 1 \notin \mathbb{C}\{2, 3\}$ , de modo que buscamos encontrar un complemento  $U$  para  $\mathbb{C}\{1+2+3\}$  tal que  $\mathbb{C}\{1, 2, 3\} = \mathbb{C}\{1+2+3\} \oplus U$ , de modo que  $U$  sea un  $\mathbb{C}S_3$ -submódulo.

Para resolver el problema de encontrar un complemento, introducimos un producto interno en  $\mathbb{C}\{1, 2, 3\}$ . Dados dos vectores, digamos  $i, j$  en la base  $\{1, 2, 3\}$ , denotamos el producto interno de  $i, j$  por  $\langle i, j \rangle = \delta_{i,j}$  donde  $\delta_{i,j}$  es la delta de Kronecker<sup>1</sup>. A continuación, extendemos linealmente en la primera variable y vía la conjugación en la segunda entrada para obtener un producto interno en todo el espacio vectorial.

De modo equivalente pudimos haber comenzado por definir el producto en cualesquiera dos vectores, digamos  $v = a1 + b2 + c3$  y  $w = x1 + y2 + z3$  como sigue:

$$\langle v, w \rangle = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z}$$

donde la barra superior denota conjugación compleja. Es posible comprobar que esta definición cumple los axiomas de producto interno. Además, se cumple la propiedad de ser invariante bajo la acción de  $G$ , es decir,  $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$  para todo  $g \in G$  y  $v, w \in V$ . Para comprobar la invariancia, es suficiente comprobarlo en los elementos de la base. Por tanto, sea  $\pi \in S_n$ , entonces como  $\pi$  es una biyección  $\pi(i) = \pi(j)$  si y sólo si  $i = j$  por lo cual

$$\langle \pi i, \pi j \rangle = \delta_{\pi(i), \pi(j)} = \delta_{i,j} = \langle i, j \rangle.$$

Ahora ya definido el producto interno en  $V$ , dado un subespacio  $W$  podemos definir el complemento ortogonal

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}.$$

---

<sup>1</sup>Leopold Kronecker. (1823-1891) Se doctoró en la Universidad de Berlín, tuvo como tutor a Gustav Dirichlet y trabajó con Karl Weierstrass.

Sabemos que  $V = W \oplus W^\perp$  como espacios vectoriales, sin embargo, si tenemos un  $\mathbb{C}G$  – módulo invariante es posible decir más, lo cual se resume en la siguiente proposición.

**Proposición 1.51** *Sea  $V$  un  $\mathbb{C}G$  – módulo con un producto interno que es invariante bajo la acción de  $G$ . Si  $W$  es un  $\mathbb{C}G$  – submódulo entonces  $W^\perp$  también es un  $\mathbb{C}G$  – submódulo.*

**Demostración.** Debemos mostrar que para todos los elementos  $g \in G$  y  $u \in W^\perp$  se tiene que  $gu \in W^\perp$ . Sea  $w \in W$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle gu, w \rangle &= \langle g^{-1}gu, g^{-1}w \rangle \\ &= \langle u, g^{-1}w \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto significa que  $W^\perp$  es cerrado bajo la acción de  $G$ . ■

Retomando el ejemplo que hemos estado manejando, tenemos que ver quién es  $\mathbb{C}\{1+2+3\}^\perp$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\{1+2+3\}^\perp &= \{v = a1 + b2 + c3 \mid \langle v, 1+2+3 \rangle = 0\} \\ &= \{v = a1 + b2 + c3 \mid a + b + c = 0\} \end{aligned}$$

Para formar las matrices de la suma directa debemos escoger una base para  $\mathbb{C}\{1+2+3\}$  y otra para  $\mathbb{C}\{1+2+3\}^\perp$ . Elegimos  $\{1+2+3\}$  como base de  $\mathbb{C}\{1+2+3\}$  y  $\{2b-1a, 3c-1a\}$  para  $\mathbb{C}\{1+2+3\}^\perp$ . Por tanto la base resulta ser  $\beta = \{1a+2b+3c, 2b-1c, 3c-1a\}$  y las matrices que se obtienen son

$$\begin{aligned} X(\varepsilon) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X((1\ 2)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X((1\ 3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ X((2\ 3)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X((1\ 2\ 3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X((1\ 3\ 2)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Todas éstas son matrices de la forma buscada, es decir:

$$X(g) = \left[ \begin{array}{c|cc} Y(g) & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & Z(g) & \end{array} \right]$$

donde la representación dada por las matrices  $Y(g)$  es irreducible y más adelante veremos que la representación dada por las matrices  $Z(g)$  también es irreducible, por tanto lo que hemos logrado es descomponer la representación que define a  $S_3$  en representaciones irreducibles. Esto da pie al siguiente teorema en el cual formalizaremos esta idea para cualquier grupo finito.

**Teorema 1.52** (*Maschke<sup>2</sup>*) *Sea  $G$  un grupo finito y  $V$  un  $\mathbb{C}G$  – módulo no trivial. Entonces*

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \dots \oplus W^{(n)}$$

donde cada  $W^{(i)}$  es un  $\mathbb{C}G$  – módulo irreducible.

<sup>2</sup>Heinrich Maschke (1853-1908) Nació en Breslou, Alemania. Se debe a él la prueba del teorema de Maschke.

**Demostración.** Realizaremos esta prueba por inducción sobre la dimensión de  $V$ . Sea  $k = \dim V$ , si  $k = 1$ , entonces  $V$  es irreducible, basta tomar  $V = W^{(1)}$ . Ahora supongamos que  $k > 1$  y que el resultado vale para módulos de dimensión menor que  $k$ , si  $V$  es irreducible entonces terminamos, si no, entonces existe un submódulo no trivial, digamos  $W$ , lo que haremos será construir un submódulo que sea complemento para  $W$  así como lo hicimos en el ejemplo.

Sea  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  una base para  $V$  y consideremos el producto interno que satisface que  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$  para los elementos de la base. Este producto en principio podría no ser  $\mathbb{C}G$ -invariante, pero podemos escoger uno que sí lo sea. Para cualesquiera  $v, w \in V$  sea

$$\langle v, w \rangle' = \sum_{g \in G} \langle gv, gw \rangle,$$

éste cumple con las condiciones de ser producto interno. Para probar que es  $\mathbb{C}G$ -invariante, debemos probar que  $\langle hv, hw \rangle' = \langle v, w \rangle'$  para todo  $h \in G$  y para todos  $v, w \in V$ . Y esto se cumple, pues:

$$\begin{aligned} \langle hv, hw \rangle' &= \sum_{g \in G} \langle ghv, ghw \rangle \\ &= \sum_{f \in G} \langle fv, fw \rangle \\ &= \langle v, w \rangle'. \end{aligned}$$

Por tanto, sea  $W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle' = 0\}$ , por la proposición anterior se tiene que  $W^\perp$  es un  $\mathbb{C}G$ -submódulo de  $V$  y además  $V = W \oplus W^\perp$ . Ahora podemos aplicar la hipótesis de inducción a estos dos submódulos pues son de menor dimensión que  $V$  de modo que podemos descomponerlos y por tanto obtenemos la descomposición deseada. ■

Como corolario podemos escribir el teorema de Maschke en términos de matrices.

**Corolario 1.53** *Sea  $G$  un grupo finito y sea  $X$  una representación por matrices de  $G$  de dimensión  $n > 0$ . Entonces existe una matriz fija  $T$  invertible tal que para todo  $g \in G$  se tiene que*

$$TX(g)T^{-1} = \begin{bmatrix} X^{(1)}(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{(2)}(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X^{(k)}(g) \end{bmatrix}$$

donde cada  $X^{(i)}(g)$  es una matriz asociada a una representación irreducible de  $G$ .

**Demostración.** Sea  $V = \mathbb{C}^n$  con la acción  $gv = X(g)v$  para toda  $g \in G$  y  $v \in V$ . Por el teorema de Maschke tenemos  $V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \dots \oplus W^{(k)}$  donde cada  $W^{(i)}$  es un  $\mathbb{C}G$ -módulo irreducible de dimensión  $n_i$ . Tomamos  $\beta$  una base de  $V$  tal que los primeros  $n_1$  vectores formen una base para  $W^{(1)}$ , los siguientes  $n_2$  vectores formen una base para  $W^{(2)}$  y así sucesivamente. Sea  $T$  la matriz que transforma la base estándar de  $\mathbb{C}^n$  en  $\beta$ , entonces se obtiene el resultado pues la conjugación por  $T$  nos permite expresar a la transformación asociada a  $X(g)$  en la base  $\beta$ . ■

**Definición 1.54** Diremos que una representación es completamente reducible si puede ser escrita como suma directa de irreducibles.

De este modo tenemos que el teorema de Maschke se puede escribir como: Toda representación de un grupo finito con dimensión positiva es completamente reducible.

### 1.2.4 $\mathbb{C}G$ -Homomorfismos y Lema de Schur

**Definición 1.55** Sean  $V$  y  $W$   $\mathbb{C}G$  – módulos. Entonces un  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo es una transformación lineal  $\theta : V \rightarrow W$  tal que

$$\theta(gv) = g\theta(v)$$

para todo  $g \in G$  y  $v \in V$ . Diremos en este caso que  $\theta$  preserva la acción de  $G$ .

Nuevamente podemos traducir esto a un lenguaje de matrices, sean  $\beta_1$  y  $\beta_2$  bases de  $V$  y  $W$  respectivamente. Sean  $X(g)$  y  $Y(g)$  matrices de representación correspondientes y  $T$  la matriz de  $\theta$  en las bases  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Entonces la condición para tener un  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo se traduce como  $TX(g)v = Y(g)Tv$  para todo vector columna  $v$  y todo  $g \in G$ , por lo tanto obtendríamos  $TX(g) = Y(g)T$  para todo  $g \in G$ , entonces se cumple que la existencia de un  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo es equivalente a la existencia de la matriz  $T$  tal que

$$TX(g) = Y(g)T. \tag{1.3}$$

En resumen, el tener un  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo es equivalente a la existencia de la matriz  $T$  tal que la igualdad (1.3) se cumple.

**Ejemplo 1.56** Sean  $G = S_n$ ,  $V = \mathbb{C}\{v\}$ , donde  $v = 1 + 2 + \dots + n$  con la acción trivial de  $S_n$  y sea  $W = \mathbb{C}\{1, 2, \dots, n\}$  con la acción que define a  $S_n$ . Consideremos  $\theta : V \rightarrow W$  dada por  $\theta(v) = 1 + 2 + \dots + n$  y extendiendo linealmente  $\theta(\lambda v) = \lambda(1 + 2 + \dots + n)$  para toda  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Para probar que  $\theta$  es un  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo es suficiente probar que se preserva la acción en la base de  $V$ . Sin embargo, para toda  $\pi \in S_n$  se cumple que

$$\theta(\pi v) = \theta(v) = \sum_{i=1}^n i = \pi \sum_{i=1}^n i = \pi\theta(v).$$

Es posible generalizar esto; sea  $G$  un grupo finito actuando trivialmente en  $V = \mathbb{C}\{v\}$  y sea  $W = \mathbb{C}[G]$  el álgebra de grupo. Ahora definimos  $\theta : V \rightarrow W$  un  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo dado por  $\theta(v) = \sum_{g \in G} g$ , análogamente se prueba que  $\theta$  es un  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo.

Sea  $G = S_n$  y consideremos  $G$  actuando en  $V = \mathbb{C}\{v\}$  por medio de la representación signo la cual está dada por  $\pi u = \text{sgn}(\pi)u$  para toda  $\pi \in S_n$  y  $u \in V$  (ver ejemplo 1.32).

En general es importante saber cuándo dos representaciones de un grupo son diferentes, por ejemplo, dos representaciones por matrices que sólo difieran por un cambio de base son en realidad la misma, esto da pie al concepto de  $\mathbb{C}G$  – equivalente que presentamos a continuación.

**Definición 1.57** Sean  $V$  y  $W$  dos módulos para  $G$ . Diremos que  $\theta : V \rightarrow W$  es un  $\mathbb{C}G$  – isomorfismo si es un  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo que cumple con ser biyectivo. En este caso diremos que  $V$  y  $W$  son  $\mathbb{C}G$  – isomorfos lo que será denotado como  $V \cong W$ ; en términos de sus representaciones por matrices  $X$  y  $Y$ , respectivamente, diremos en este caso que son  $\mathbb{C}G$  – equivalentes y lo que denotaremos como  $X \cong Y$ .

**Definición 1.58** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales y  $\theta : V \rightarrow W$  una transformación lineal, definimos el kernel como  $\ker \theta = \{v \in V \mid \theta(v) = 0\}$  y la imagen como  $\text{Im } \theta = \{w \in W \mid w = \theta(v) \text{ p.a. } v \in V\}$ .

En caso de que  $\theta$  sea  $\mathbb{C}G$ –homomorfismo entonces el  $\ker \theta$  y la  $\text{Im } \theta$  tienen una estructura conveniente.

**Proposición 1.59** Sea  $\theta : V \rightarrow W$  un  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo. Entonces se cumple

1.  $\ker \theta$  es un  $\mathbb{C}G$  – submódulo de  $V$  y
2.  $\text{Im } \theta$  es un  $\mathbb{C}G$  – submódulo de  $W$ .

**Demostración.** Sabemos que el  $\ker \theta$  es un subespacio de  $V$  pues  $\theta$  es una transformación lineal, de modo que sólo falta probar que es cerrado bajo la acción de  $G$ . Sea  $v \in \ker \theta$ , entonces para todo  $g \in G$  se tiene que

$$\begin{aligned}\theta(gv) &= g\theta(v) \\ &= g0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Probemos la segunda parte de la proposición, nuevamente sabemos que  $\text{Im } \theta$  es subespacio de  $W$  pues  $\theta$  es una transformación lineal, dado  $w \in \text{Im } \theta$  entonces  $\theta(v) = w$  para algún  $v \in V$ , de modo que para todo  $g \in G$  se tiene que  $gw = g\theta(v) = \theta(gv) \in \text{Im } \theta$ . ■

**Teorema 1.60 (Lema de Schur<sup>3</sup>)** Sean  $V$  y  $W$  dos  $\mathbb{C}G$  – módulos irreducibles. Si  $\theta : V \rightarrow W$  es un  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo entonces

1.  $\theta$  es un  $\mathbb{C}G$  – isomorfismo ó
2.  $\theta$  es el  $\mathbb{C}G$  – homomorfismo nulo.

**Demostración.** Como  $V$  es irreducible y  $\ker \theta$  es un  $\mathbb{C}G$ –submódulo, se debe tener que  $\ker \theta = \{0\}$  ó  $\ker \theta = V$ . De modo similar, por ser  $W$  irreducible se tiene que  $\text{Im } \theta = \{0\}$  ó  $\text{Im } \theta = W$ . Si  $\ker \theta = V$  ó  $\text{Im } \theta = \{0\}$  entonces  $\theta$  es el mapeo nulo, por otra parte si  $\ker \theta = \{0\}$  ó  $\text{Im } \theta = W$ . ■

La versión matricial del lema de Schur queda enunciada de la siguiente manera.

---

<sup>3</sup>Issai Schur (1875-1941). Nació en Mogilev, entonces Rusia. Fue estudiante de Frobenius en Berlín. Trabajó en Representaciones de Grupos, Teoría de los Números, Combinatoria y Física Teórica.

**Corolario 1.61** Sean  $X$  y  $Y$  dos representaciones irreducibles asociadas de  $G$ . Si  $T$  es una matriz tal que  $TX(g) = Y(g)T$  para toda  $g \in G$ , entonces

1.  $T$  es invertible ó
2.  $T$  es la matriz cero.

La demostración de la siguiente proposición puede encontrarse en [Sa].

**Proposición 1.62** Sean  $V$  y  $W$  dos  $\mathbb{C}G$  – módulos con  $V$  un  $\mathbb{C}G$  – módulo irreducible. Entonces  $\dim \text{Hom}(V, W)$  es la multiplicidad de  $V$  en  $W$ .

**Corolario 1.63** Sean  $V$  y  $W$  dos  $\mathbb{C}G$  – módulos tales que  $V$  es irreducible. Entonces

$$\dim \text{Hom}(V, W) = 0$$

si y sólo si  $W$  no contiene algún módulo isomorfo a  $V$ .

**Corolario 1.64** Sea  $X$  una representación por matrices de  $G$  sobre  $\mathbb{C}$ . Las únicas matrices  $T$  que conmutan con  $X(g)$  para todo  $g \in G$  son aquellas de la forma  $T = \lambda Id$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Demostración.** Sea  $T$  una matriz tal que  $TX(g) = X(g)T$  para toda  $g \in G$ , entonces  $(T - \lambda Id)X(g) = X(g)(T - \lambda Id)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Debido a que  $\mathbb{C}$  es algebraicamente cerrado podemos tomar  $\lambda$  un eigenvalor de  $T$ , por lo que  $T - \lambda Id$  cumple las hipótesis del corolario 1.61 considerando  $X = Y$  y es no invertible por la elección de  $\lambda$ , por tanto debe ocurrir que  $T - \lambda Id = 0$ . ■

## 1.3 Caracteres de Grupos

**Definición 1.65** Sea  $g \in G$  y  $X(g)$  una matriz de representación. Entonces el carácter de  $X(g)$  será

$$\chi(g) := \text{tr}(X(g)).$$

Si  $V$  es un  $\mathbb{C}G$  – módulo entonces su carácter es el carácter de la representación por matrices  $X$  correspondiente a  $V$ .

Observemos que si  $X$  y  $Y$  son representaciones por matrices de  $V$  un  $\mathbb{C}G$  – módulo entonces  $Y = TXT^{-1}$  para alguna matriz fija  $T$ , entonces para toda  $g \in G$  se cumple que

$$\text{tr}(Y(g)) = \text{tr}(TX(g)T^{-1}) = \text{tr}(X(g))$$

de modo que  $X$  y  $Y$  tienen el mismo carácter.

**Ejemplo 1.66** Consideremos la representación que define a  $S_n$  y denotemos a su carácter como  $\chi^{def}$ . Trabajemos el caso para  $n = 3$ , entonces podemos obtener caracteres para las matrices obtenidas en el ejemplo 1.33:

$$\begin{aligned} \chi^{def}((1)(2)(3)) &= 3, \chi^{def}((12)(3)) = 1, \\ \chi^{def}((13)(2)) &= 1, \chi^{def}((1)(23)) = 1, \\ \chi^{def}((123)) &= 0, \chi^{def}((132)) = 0 \end{aligned}$$

Este ejemplo se puede generalizar, sea  $\pi \in S_n$ , entonces  $\chi^{def}(\pi)$  es la cantidad de unos que hay en la diagonal de  $X(\pi)$  o de modo equivalente el número de puntos fijos de  $\pi$ .

**Ejemplo 1.67** Sea  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  y consideremos la representación regular, a su carácter lo denotaremos por  $\chi^{reg}$ , de modo que como  $X(\varepsilon) = Id$ , por lo tanto  $\chi^{reg}(\varepsilon) = |G|$ . Para obtener los valores de los caracteres asociados a  $g \neq \varepsilon$ , usaremos las matrices asociadas a la base estándar, es decir,  $\beta = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Ahora,  $X(g)$  es la matriz de permutación para la acción de  $g$  en  $\beta$ , entonces  $\chi^{reg}(g)$  debe ser la cantidad de puntos que quedan fijos bajo la acción. Sin embargo, si  $gg_i = g_i$  para toda  $i$  entonces  $g = \varepsilon$ , que no es el caso, por lo tanto, no hay puntos fijos si  $g \neq \varepsilon$ . En resumen,

$$\chi^{reg}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = \varepsilon \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

**Proposición 1.68** Sea  $X(g)$  la representación por matrices de un grupo  $G$  de grado  $n$  con carácter  $\chi$ .

1.  $\chi(\varepsilon) = n$
2. Si  $K$  es una clase de conjugación de  $G$ , entonces para todos  $g, h \in K$  entonces  $\chi(g) = \chi(h)$ .
3. Sea  $X'$  una representación por matrices de  $G$  con carácter  $\chi'$ . Si  $X \cong X'$  entonces  $\chi(g) = \chi'(g)$  para toda  $g \in G$ .

**Demostración.**

1. Como  $X(\varepsilon) = Id$  entonces  $\chi(\varepsilon) = tr(Id) = n$ .
2. Por hipótesis  $g = khk^{-1}$  entonces

$$\chi(g) = tr(X(g)) = tr(X(k)X(h)X(k^{-1})) = tr(X(h)) = \chi(h).$$

3. Si  $X \cong X'$  entonces existe una matriz  $T$  fija invertible tal que  $X(g) = TX'(g)T^{-1}$ , esto significa que  $tr(X(g)) = tr(TX'(g)T^{-1}) = tr(X'(g))$  por lo tanto  $\chi(g) = \chi'(g)$  para toda  $g \in G$ .

■

Más adelante probaremos que el regreso del inciso tres de la proposición anterior también es verdadero.

**Definición 1.69** Una función de clase en un grupo  $G$  es una función  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(g) = f(h)$  siempre que  $g$  y  $h$  estén en la misma clase de conjugación. El conjunto de todas las funciones de clase de  $G$  será denotado por  $R(G)$ .

**Observación 1.70**  $R(G)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ , pues la suma y el producto por escalar de funciones de clase es nuevamente una función de clase. Además  $R(G)$  tiene una base natural que consiste en todas aquellas funciones tal que su valor es 1 cuando son evaluadas en una clase de conjugación y 0 en cualquier otro caso, entonces

$$\dim R(G) = \text{número de clases de conjugación de } G.$$

Si  $K$  es una clase de conjugación y  $\chi$  es un carácter, podemos definir  $\chi_K$  como el valor de  $\chi$  en  $K$ , es decir, como  $\chi_K = \chi(g)$  para todo  $g \in K$ . Esto motiva la definición de tabla de caracteres de un grupo que presentamos a continuación.

**Definición 1.71** *Sea  $G$  un grupo. La tabla de caracteres de  $G$  es un arreglo tal que los renglones corresponden a los caracteres distintos irreducibles de  $G$  y las columnas a las clases de conjugación. La entrada en la tabla cuyo renglón es  $\chi$  y cuya columna es  $K$  es  $\chi_K$ :*

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \cdots & K & \cdots \\
 \hline
 \vdots & & \vdots & \\
 \chi & \cdots & \chi_K & \\
 \vdots & & & 
 \end{array}$$

**Ejemplo 1.72** *En el caso de  $S_3$  tenemos tres clases de conjugación:*

$$K_1 = \{\varepsilon\} \quad K_2 = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\} \quad K_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \quad ,$$

*y se puede probar que hay tres representaciones irreducibles de  $S_3$ , de las cuales hasta el momento conocemos la representación trivial y la representación signo, por tanto podemos concluir que la tabla por el momento se ve como:*

$$\begin{array}{c|ccc}
 & K_1 & K_2 & K_3 \\
 \hline
 \chi^{(1)} & 1 & 1 & 1 \\
 \chi^{(2)} & 1 & -1 & 1 \\
 \chi^{(3)} & ? & ? & ?
 \end{array}$$

*Para encontrar el último renglón es necesario introducir el producto interno de caracteres.*

### 1.3.1 Producto Interno de caracteres

El propósito de esta sección es estudiar el producto interno de caracteres, de este modo podremos determinar cuándo una representación es irreducible.

**Definición 1.73** *Sean  $\chi_1$  y  $\chi_2$  dos funciones de un grupo  $G$  a los complejos. El producto interno de  $\chi_1$  y  $\chi_2$  se define como*

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)}.$$

**Proposición 1.74** *Sean  $\chi_1$  y  $\chi_2$  caracteres, entonces*

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \chi_2(g^{-1}).$$

**Teorema 1.75** *Sean  $\chi_1$  y  $\chi_2$  dos caracteres irreducibles de un grupo  $G$ . Entonces*

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \delta_{\chi_1, \chi_2}.$$

**Demostración.** Supongamos que  $\chi_1$  y  $\chi_2$  son los caracteres de dos representaciones por matrices  $A$  y  $B$  de grados  $m$  y  $n$  respectivamente. Sean  $X = (x_{i,j})$  una matriz de tamaño  $m \times n$  y

$$Y = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g)XB(g^{-1}). \quad (1.4)$$

Primero observemos que se cumple que  $A(h)Y = YB(h)$  para toda  $h \in G$ .

$$\begin{aligned} A(h)YB(h^{-1}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(h)A(g)XB(g^{-1})B(h^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(hg)XB(g^{-1}h^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{\tilde{g} \in G \\ \tilde{g}=hg}} A(\tilde{g})XB(\tilde{g}^{-1}) \\ &= Y, \end{aligned}$$

por tanto por los corolarios 1.61 y el corolario 1.64 se tiene que

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } A \not\cong B \\ cId_n & \text{si } A \cong B \end{cases}. \quad (1.5)$$

Así se presentan dos casos, si  $\chi \neq \psi$ , entonces  $A$  y  $B$  no deben ser equivalentes y eso implica que  $y_{i,j} = 0$  para todo elemento de  $Y$ , de modo que podemos tomar la entrada  $(i, j)$  de la ecuación 1.4 para obtener

$$\frac{1}{|G|} \sum_{k,l} \sum_{g \in G} a_{i,k}(g)x_{k,l}b_{l,j}(g^{-1}) = 0$$

para todo  $i, j$ . Si este polinomio es cero entonces cada coeficiente de los  $x_{k,l}$  es siempre cero, así

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_{i,k}(g)b_{l,j}(g^{-1}) = 0$$

para todo  $i, j, k, l$ . Ahora notemos que esta última ecuación puede verse de un modo simplificado como

$$\langle a_{i,k}, b_{l,j} \rangle' = 0 \quad \forall i, j, k, l,$$

pues la definición de producto interno aplica a todas las funciones de  $G$  a  $\mathbb{C}$ .

Ahora

$$\chi = trA = a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{d,d}$$

y

$$\psi = trB = b_{1,1} + b_{1,2} + \cdots + b_{d,d}$$

entonces

$$\langle \chi, \psi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle' = \sum_{i,j} \langle a_{i,j}, b_{j,j} \rangle' = 0$$

como se quería.

Ahora veamos que ocurre si  $\chi = \psi$ , podemos tomar  $A = B$  pues sólo estamos interesados en el valor de los caracteres. Por la ecuación 1.5 existe un  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $y_{i,j} = \lambda \delta_{i,j}$ . entonces, como se obtuvo antes tenemos que  $\langle a_{i,j}, a_{l,j} \rangle' = 0$  siempre que  $i \neq j$ . Ahora veamos si  $i = j$ , consideremos

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g) X A(g^{-1}) = \lambda Id_d$$

esto significa que

$$\begin{aligned} \lambda m &= tr(\lambda Id_m) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} tr(A(g) X A(g^{-1})) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} tr(X) \\ &= tr(X). \end{aligned}$$

Entonces  $y_{i,i} = \lambda = \frac{1}{m} tr(X)$ , lo que puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{k,l} \sum_{g \in G} a_{i,k}(g) x_{k,l} a_{l,i}(g^{-1}) \\ = \frac{1}{m} (x_{1,1} + x_{2,2} + \dots + x_{d,d}). \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de cada  $x_{k,l}$  esto significa que

$$\langle a_{i,j}, a_{l,i} \rangle' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_{i,k}(g) a_{l,i}(g^{-1}) = \frac{1}{d} \delta_{k,l},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi \rangle &= \sum_{i,j=1}^m \langle a_{i,i}, a_{j,j} \rangle' \\ &= \sum_{i=1}^m \langle a_{i,i}, a_{i,i} \rangle' \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

**Corolario 1.76** *Sea  $X$  una matriz de representación de  $G$  con carácter  $\chi$ . Supongamos que*

$$X \cong m_1 X^{(1)} \oplus m_2 X^{(2)} \oplus \dots \oplus m_k X^{(k)}$$

*donde cada  $X^{(i)}$  es una matriz de representación irreducible y no son equivalentes entre sí.*

1.  $\chi = m_1\chi^{(1)} + m_2\chi^{(2)} + \dots + m_k\chi^{(k)}$ .
2.  $\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = m_j$  para toda  $j$ ,
3.  $\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2$ ,
4.  $X$  es irreducible si y sólo si  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ ,
5. sea  $X'$  otra matriz de representación de  $G$  con carácter  $\chi'$ . Entonces

$$X \cong X' \text{ si y sólo si } \chi(g) = \chi'(g) \text{ para toda } g \in G.$$

**Demostración.**

1. Usando el hecho de que la traza de una suma directa es la suma de las trazas se tiene que

$$\begin{aligned} \chi &= \text{tr} X = \text{tr} \bigoplus_{i=1}^k m_i X^{(i)} = \sum_{i=1}^k m_i \chi^{(i)} \\ &= m_1\chi^{(1)} + m_2\chi^{(2)} + \dots + m_k\chi^{(k)} \end{aligned}$$

2. Por el teorema 1.75 tenemos las siguientes igualdades

$$\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k m_i \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \right\rangle = \sum_{i=1}^k m_i \langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle = m_j$$

3. Nuevamente por el teorema 1.75 tenemos que

$$\langle \chi, \chi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k m_i \chi^{(i)}, \sum_{j=1}^k m_j \chi^{(j)} \right\rangle = \sum_{i,j} m_i m_j \langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle = \sum_{i=1}^k m_i^2$$

4. Como  $X$  es irreducible entonces  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ . Por otra parte, tenemos que si  $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_i m_i^2 = 1$ , entonces debe haber exactamente un índice  $j$  tal que  $m_j = 1$  y  $m_i = 0$  para todo  $i \neq j$  y esto significa que  $X^j = X$  la cual ya era irreducible.
5. Ya se ha probado una parte en la proposición 1.68 inciso 3. Para el regreso consideremos  $X' \cong \bigoplus_{i=1}^k n_i X^{(i)}$ , como  $\chi = \chi'$  entonces  $\langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = \langle \chi', \chi^{(i)} \rangle$ , para toda  $i$ , por la parte dos de este corolario  $m_i = n_i$  para toda  $i$ , por lo tanto las dos sumas directas son equivalentes, i.e.  $X \cong X'$ .

■

Veamos un ejemplo de cómo estos resultados se aplican en la práctica, consideremos la representación que define a  $S_n$ . Primero observemos que dadas  $\pi$  y  $\pi^{-1} \in S_n$  éstas se encuentran en la misma clase de conjugación, entonces si  $\chi$  es un carácter de  $S_n$  entonces

$\chi(\pi) = \chi(\pi^{-1})$ , de modo que la fórmula de producto interno para  $S_n$  puede ser reescrita como

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \chi(\pi)\psi(\pi). \quad (1.6)$$

**Ejemplo 1.77** Sea  $G = S_3$  y consideremos el carácter  $\chi = \chi^{def}$ . Sean  $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}$  los tres caracteres irreducibles de  $S_3$ , donde los primeros dos son el carácter asociado a la representación trivial y a la representación signo respectivamente, por el teorema de Maschke, sabemos que

$$\chi = m_1\chi^{(1)} + m_2\chi^{(2)} + m_3\chi^{(3)}.$$

Podemos usar la ecuación 1.6 y por el segundo inciso del corolario 1.76 para obtener los valores de  $m_1$  y  $m_2$ :

$$\begin{aligned} m_1 &= \langle \chi, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi)\chi^{(1)}(\pi) \\ &= \frac{1}{2}((3)(1) + (1)(1) + (1)(1) + (1)(1) + (0)(1) + (0)(1)) = 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m_2 &= \langle \chi, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi)\chi^{(2)}(\pi) \\ &= \frac{1}{6}((3)(1) - (1)(1) - (1)(1) - (1)(1) + (0)(1) + (0)(1)) = 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$\chi = \chi^{(1)} + m_3\chi^{(3)}.$$

Recordemos que ya sabíamos que el carácter de la representación de define a  $S_3$  contiene una copia del carácter trivial, esto pudo ser notado cuando descompusimos las matrices de representación como  $X = A \oplus B$ , donde  $A$  era la matriz de la representación trivial.

$$\begin{aligned} B(\epsilon) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & B((1\ 2)) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B((1\ 3)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & B((2\ 3)) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B((1\ 2\ 3)) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & B((1\ 3\ 2)) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Consideremos  $\psi$  el carácter correspondiente, de ese modo tendríamos que

$$\begin{aligned} \psi(\epsilon) &= 2 \\ \psi((1\ 2)) &= \psi((1\ 3)) = \psi((2\ 3)) = 0 \\ \psi((1\ 2\ 3)) &= \psi((1\ 3\ 2)) = -1. \end{aligned}$$

Si  $\psi$  es irreducible, entonces  $m_3 = 1$  y hemos encontrado  $\chi^{(3)}$ . Observemos que si  $\psi$  no fuese irreducible entonces sería de grado dos y debería contener dos copias de  $\chi^{(3)}$ , sin embargo por el inciso 4 del corolario 1.76 podemos realizar el siguiente cálculo:

$$\langle \psi, \psi \rangle = \frac{1}{6}(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2) = 1.$$

Por tanto hemos encontrado la representación irreducible que nos faltaba y ahora podemos completar la tabla

	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	2	0	-1

## 1.4 Descomposición del Álgebra de Grupo

Sea  $G$  un grupo,  $\mathbb{C}[G]$  el álgebra de grupo y consideremos el carácter regular  $\chi^{reg}$ . Por el teorema de Maschke podemos escribir

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i m_i V^{(i)}.$$

Estamos en condiciones de saber más respecto a las multiplicidades de la descomposición, si  $V^{(i)}$  tiene un carácter  $\chi^{(i)}$  entonces por la parte dos del corolario 1.76 tenemos que

$$m_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi^{(i)}(g^{-1}).$$

Sin embargo, sabemos cómo se comporta el carácter regular, de modo que por la proposición 1.68 inciso 1 se tiene que la igualdad anterior se ve como

$$m_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(\varepsilon) \chi^{(i)}(\varepsilon) = \dim V^{(i)}$$

pues todo  $\mathbb{C}G$  – módulo irreducible aparece en  $\mathbb{C}[G]$  con multiplicidad igual a su dimensión, en particular aparece al menos una vez.

**Proposición 1.78** *Sea  $G$  un grupo finito y supongamos que  $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i m_i V^{(i)}$  donde cada  $V^{(i)}$  forma una lista completa de  $\mathbb{C}G$  – módulos no equivalentes irreducibles, entonces*

1.  $m_i = \dim V^{(i)}$ ,
2.  $\sum_i (\dim V^{(i)})^2 = |G|$ .

**Demostración.**

1.  $m_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(\varepsilon) \chi^{(i)}(g) = \dim V^{(i)}$ .
2. Como  $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i m_i V^{(i)}$ , sacando la dimensión a cada lado de la igualdad se obtiene el resultado

■

### 1.4.1 Representaciones Restringidas e Inducidas

**Definición 1.79** Sea  $H \leq G$  y sea  $X$  una representación de  $G$ . La restricción de  $X$  a  $H$ , denotada por  $X \downarrow_H^G$ , está dada por

$$X \downarrow_H^G (h) = X(h)$$

para toda  $h \in H$ . Si  $X$  tiene un carácter  $\chi$  entonces denotaremos al carácter de  $X \downarrow_H^G$  por  $\chi \downarrow_H^G$ .

**Definición 1.80** Consideremos  $H \leq G$  y  $\{t_1, \dots, t_l\}$  un conjunto completo de representantes con respecto a  $H$ . Si  $Y$  es la representación de  $H$ , entonces la correspondiente representación inducida  $Y \uparrow_H^G$  asigna a cada  $g \in G$  la matriz

$$Y \uparrow_H^G (g) = (Y(t_i^{-1}gt_j)) = \begin{bmatrix} Y(t_1^{-1}gt_1) & Y(t_1^{-1}gt_2) & \cdots & Y(t_1^{-1}gt_l) \\ Y(t_2^{-1}gt_1) & Y(t_2^{-1}gt_2) & \cdots & Y(t_2^{-1}gt_l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(t_l^{-1}gt_1) & Y(t_l^{-1}gt_2) & \cdots & Y(t_l^{-1}gt_l) \end{bmatrix}$$

donde  $Y(g)$  será la matriz cero si  $g \notin H$ . Al carácter asociado a la representación inducida  $Y \uparrow_H^G$  se le denota por  $\chi \uparrow_H^G$ .

Veamos cómo aplica este nuevo concepto en el grupo simétrico, para ello retomemos a  $S_3$ .

**Ejemplo 1.81** Si  $G = S_3$  y  $H = \{\varepsilon, (2\ 3)\}$ , entonces  $G = H \uplus (1\ 2)H \uplus (1\ 3)H$ . Ahora consideremos  $Y$  la representación trivial de  $H$  y  $X = Y \uparrow_H^G$ . Acorde a la definición los cálculos que debemos hacer son

$$\begin{aligned} Y(\varepsilon^{-1}(1\ 2)\varepsilon) &= Y((1\ 2)) = 0 \\ Y(\varepsilon^{-1}(1\ 2)(1\ 2)) &= Y(\varepsilon) = 1 \\ Y(\varepsilon^{-1}(1\ 2)(1\ 3)) &= Y(1\ 3\ 2) = 0 \end{aligned}$$

Continuando con el proceso se obtiene

$$\begin{aligned} Y((1\ 2)(1\ 2)\varepsilon) &= Y(\varepsilon) = 1 \\ Y((1\ 2)(1\ 2)(1\ 2)) &= Y((1\ 2)) = 0 \\ Y((1\ 2)(1\ 2)(1\ 3)) &= Y((1\ 3)) = 0 \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} Y((1\ 3)(1\ 2)\varepsilon) &= Y((1\ 2\ 3)) = 0 \\ Y((1\ 3)(1\ 2)(1\ 2)) &= Y((1\ 3)) = 0 \\ Y((1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)) &= Y((2\ 3)) = 1 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$X((1\ 2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Proposición 1.82** Sea  $H \leq G$  tal que  $G = t_1H \uplus \dots \uplus t_lH$  y  $\mathcal{H} = \{t_1H, \dots, t_lH\}$ . Entonces las matrices de  $1 \uparrow_H^G$  son iguales a aquellas resultantes de hacer actuar a  $G$  en la base  $\mathcal{H}$  para el módulo clase lateral  $\mathbb{C}\mathcal{H}$ .

**Demostración.** Sea  $X = (a_{i,j})$  la matriz asociada a  $1 \uparrow_H^G$  y  $Z = (b_{i,j})$  la matriz asociada para  $\mathbb{C}\mathcal{H}$ , La primera observación que hay que hacer es que ambas matrices contienen sólo ceros y unos, además si  $g \in G$  entonces

$$\begin{aligned} a_{i,j}(g) = 1 &\Leftrightarrow t_i^{-1}gt_j \in H \\ &\Leftrightarrow gt_jH = t_iH \\ &\Leftrightarrow b_{i,j}(g) = 1 \end{aligned}$$

Entonces  $\mathbb{C}\mathcal{H}$  es un módulo para  $1 \uparrow_H^G$ . ■

**Teorema 1.83** Sea  $H \leq G$  tal que  $G = t_1H \uplus \dots \uplus t_lH$  y sea  $Y$  una representación de  $H$ , entonces  $X = Y \uparrow_H^G$  es una representación de  $G$ .

**Demostración.** Lo primero que debemos probar es que  $X(\varepsilon)$  es la matriz identidad, sin embargo esto se cumple gracias a la definición.

Ahora debemos probar que  $X(g)$  es siempre un bloque de la matriz de representación, es decir, para todo renglón y columna, éstos contienen exactamente un bloque  $Y(t_i^{-1}gt_j)$  distinto de cero, para ello consideramos la primera columna, es suficiente probar que en el conjunto de elementos  $\{t_1^{-1}gt_1, t_2^{-1}gt_1, \dots, t_l^{-1}gt_1\}$  hay un único elemento de  $H$ , sin embargo esto sucede pues  $gt_1 \in t_iH$  para exactamente un  $t_i$  por lo tanto el elemento que buscamos es justamente  $t_i^{-1}gt_1 \in H$  y esto sucederá en el resto de las columnas.

Finalmente hay que verificar que la igualdad  $X(gh) = X(g)X(h)$  para todos  $g, h \in G$ . Es suficiente probar la igualdad

$$\sum_k Y(t_i^{-1}gt_k)Y(t_k^{-1}ht_j) = Y(t_i^{-1}ght_j).$$

Tenemos dos posibles casos, si  $Y(t_i^{-1}ght_j) = 0$  esto significa que  $t_i^{-1}ght_j \notin H$  por lo tanto  $t_i^{-1}gt_k \notin H$  ó  $t_k^{-1}ht_j \notin H$  para toda  $k$ , de modo que  $Y(t_i^{-1}gt_k) = 0$  ó  $Y(t_k^{-1}ht_j) = 0$  para toda  $k$  y de este modo toda la suma anterior es cero. Si  $Y(t_i^{-1}ght_j) \neq 0$  entonces  $t_i^{-1}ght_j \in H$ .

Sea  $m$  el único índice para el cual  $t_i^{-1}gt_m \in H$  entonces  $t_i^{-1}ht_m = (t_i^{-1}gt_m)^{-1}(t_i^{-1}ght_j) \in H$ , por lo tanto

$$\sum_k Y(t_i^{-1}gt_k)Y(t_k^{-1}ht_j) = Y(t_i^{-1}gt_m)Y(t_m^{-1}ht_j) = Y(t_i^{-1}gt_mt_m^{-1}ht_j) = Y(t_i^{-1}ght_j).$$

■

**Proposición 1.84** Sean  $H \leq G$  y  $Y$  una representación por matriz de  $H$ . Consideremos dos conjuntos completos de representantes  $\{t_1, \dots, t_l\}$  y  $\{s_1, \dots, s_l\}$  para  $H$ , de las cuales consideremos a  $X$  y  $Z$  dos representaciones por matriz  $Y$ , entonces  $X$  y  $Z$  son equivalentes.

**Demostración.** Sean  $\chi, \psi, \phi$  los caracteres asociados a  $X, Y$  y  $Z$  respectivamente. Por el quinto inciso del corolario 1.76 es suficiente probar que  $\chi = \phi$ . Observemos que

$$\chi(g) = \sum_i \text{tr}(Y(t_i^{-1}gt_i)) = \sum_i \psi(t_i^{-1}gt_i), \quad (1.7)$$

donde  $Y(g) = 0$  si  $g \notin H$ . De modo similar,

$$\phi(g) = \sum_i \psi(s_i^{-1}gs_i).$$

Podemos renombrar a los elementos  $t_1, \dots, t_l$  y  $s_1, \dots, s_l$  de modo que  $t_iH = s_iH$  para toda  $i$ , de este modo  $t_i = s_ih_i$  con  $h_i \in H$  y entonces tendríamos que

$$t_i^{-1}gt_i = h_i^{-1}s_i^{-1}gs_ih_i$$

por lo tanto  $t_i^{-1}gt_i \in H$  si y sólo si  $s_i^{-1}gs_i \in H$  y si ambos caen en  $H$  esto significa que están en la misma clase de conjugación, por lo tanto  $\psi(t_i^{-1}gt_i) = \psi(s_i^{-1}gs_i)$  pues  $\psi$  es constante en las clases de conjugación de  $H$  y se anula fuera, de este modo las sumas para  $\chi$  y  $\phi$  son las mismas. ■

Nos preguntamos ahora si existe alguna relación entre las representaciones inducidas y restringidas, la respuesta está en el teorema que presentaremos más adelante, antes deduzcamos algunas fórmulas.

Nuevamente sean  $H \leq G$ ,  $t_1, \dots, t_l$  elementos tales que  $G = t_1H \uplus \dots \uplus t_lH$  y  $\psi$  el carácter asociado a  $Y$  con  $Y$  una representación por matriz de  $H$ . Entonces para toda  $h \in H$  tendríamos que  $\psi(t_i^{-1}gt_i) = \psi(h^{-1}t_i^{-1}gt_ih)$ , por lo tanto la ecuación 1.7 puede ser escrita como

$$\psi \uparrow_H^G (g) = \frac{1}{|H|} \sum_i \sum_{h \in H} \psi(h^{-1}t_i^{-1}gt_ih).$$

Sin embargo como  $h \in H$  entonces el producto  $t_ih$  corre sobre todos los elementos de  $G$  exactamente una vez, por lo tanto se concluye la identidad

$$\psi \uparrow_H^G (g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \psi(x^{-1}gx). \quad (1.8)$$

Esta última identidad nos permite demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 1.85** (*Reciprocidad de Frobenius*)<sup>4</sup> Sea  $H \leq G$  y supongamos que  $\psi$  y  $\chi$  son caracteres de  $H$  y  $G$  respectivamente. Entonces

$$\langle \psi \uparrow_H^G, \chi \rangle = \langle \psi, \chi \downarrow_H^G \rangle$$

donde el producto interno del lado izquierdo está calculado en  $G$  y el del lado derecho en  $H$ .

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \langle \psi \uparrow_H^G, \chi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi \uparrow_H^G(g) \chi(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{g \in G} \psi(x^{-1}gx) \chi(g^{-1}) && \text{usando la ecuación 1.8} \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(xy^{-1}x^{-1}) && \text{haciendo } y = x^{-1}gx \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(y^{-1}) && \text{pues } \chi \text{ es constante} \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(y^{-1}) && \text{pues } x \text{ es constante en la suma} \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \psi(y) \chi(y^{-1}) && \text{pues } \psi \text{ es cero fuera de } H \\ &= \langle \psi, \chi \downarrow_H^G \rangle. \end{aligned}$$

■

---

<sup>4</sup>Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) Matemático alemán, estudió en la Universidad de Göttingen. Hizo contribuciones en el área de Teoría de Grupos, Teoría de Números y Ecuaciones Diferenciales.

# Capítulo 2

## Primeros Auxilios

### 2.1 Tablas de Young

**Definición 2.1** Sea  $n \in \mathbb{N}^+$ . Diremos que  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$  con  $k \in \mathbb{N}^+$  es una **partición** de  $n$  si se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $\lambda_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,
2.  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$  i.e. forman una sucesión de enteros no negativos no creciente y
3.  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$ .

Al hecho de ser partición lo denotaremos como  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k) \vdash n$ . A los  $\lambda_i$ 's se les llamará las partes de  $\lambda$ .

**Definición 2.2** Dadas  $\lambda$  y  $\mu$  particiones de  $n$ , diremos que son iguales si  $\lambda_i = \mu_i$  para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Observación 2.3** Con el fin de abreviar notación, si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_k)$  con  $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+i}$  p.a.  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  escribiremos  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_j^{i+1}, \dots, \lambda_k)$ .

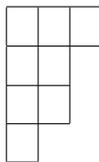
**Ejemplo 2.4** Si  $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ , escribiremos  $\lambda = (3, 2^2, 1)$ .

**Definición 2.5** Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$ . Definimos el **diagrama de Young**<sup>1</sup> asociado a  $\lambda$  como el arreglo de celdas justificadas a la izquierda y acomodadas por renglón de modo que el  $i$ -ésimo renglón tiene  $\lambda_i$  celdas.

**Ejemplo 2.6** Usando la partición del ejemplo 2.4 se tendría que el diagrama de Young asociado a  $\lambda$  es:

---

<sup>1</sup> Alfred Young (1873-1940) nació en Widnes, Inglaterra. Estudió matemáticas en Cambridge, es reconocido por su estudio en la teoría de grupos e introdujo en 1900 el concepto de diagrama y tabla los cuales, en su honor, llevan su nombre.



Luego de estas dos definiciones podemos definir **la tabla de Young**. Dada  $\lambda \vdash n$ , una tabla de Young asociada a  $\lambda$  es una asignación biyectiva entre  $\{1, 2, \dots, n\}$  y las distintas celdas del diagrama de Young. Este tipo de tablas será una de las principales herramientas a lo largo de este trabajo y nos servirá para visualizar la mayoría de los resultados que aquí se presenten.

**Ejemplo 2.7** *Algunas tablas de Young asociadas a la partición del ejemplo 2.4 son:*

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline 1 & 2 & 3 \\
 \hline 4 & 5 & \\
 \hline 6 & 7 & \\
 \hline 8 & & \\
 \hline
 \end{array}
 &
 t_2 = \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline 1 & 2 & 4 \\
 \hline 3 & 6 & \\
 \hline 5 & 8 & \\
 \hline 7 & & \\
 \hline
 \end{array}
 &
 t_3 = \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline 8 & 2 & 3 \\
 \hline 5 & 6 & \\
 \hline 7 & 1 & \\
 \hline 4 & & \\
 \hline
 \end{array}
 &
 t_4 = \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline 3 & 7 & 6 \\
 \hline 2 & 4 & \\
 \hline 5 & 8 & \\
 \hline 1 & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{2.1}$$

Observemos que  $t_1$  y  $t_2$  a diferencia de las otras dos tablas, cumplen que tanto sus renglones como sus columnas están acomodados de modo creciente, a este tipo de tablas se les llama tablas de Young estándar y aunque por el momento vamos a empezar trabajando sin hacer distinción respecto del orden de los renglones y las columnas, más adelante se revelará que este tipo de tablas son de suma importancia. Por razones de comodidad llamaremos a las tablas de Young simplemente tablas y de modo similar a los diagramas de Young. Además observemos que una tabla  $t$  se puede ver como el conjunto de entradas de la forma  $t_{i,j}$  donde  $i$  indica la entrada en el  $i$  –ésimo renglón y  $j$  la entrada en la  $j$  –ésima columna, de aquí que a una tabla  $t$  la denotemos como  $t = (t_{i,j})$ . Esta notación nos ayudará a definir la tabla transpuesta.

**Notación 2.8** *Con el fin de hacer lo más amena posible la notación, al conjunto de tablas asociadas a una partición  $\lambda \vdash n$  lo denotaremos como  $T_\lambda$ .*

**Definición 2.9** *Sea  $t \in T_\lambda$ , si  $t' = (t_{i,j})$  definimos la tabla transpuesta como la tabla cuyas entradas se ven como  $t' = (t_{j,i})$ .*

**Ejemplo 2.10** *Retomando la primer tabla del ejemplo 2.7 tendríamos que su tabla transpuesta es*

$$t'_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline 1 & 4 & 6 & 8 \\
 \hline 2 & 5 & 7 & \\
 \hline 3 & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

**Definición 2.11** *Dadas dos tablas  $t_1$  y  $t_2$ , diremos que son del mismo tipo si están asociadas a una misma partición  $\lambda$ .*

**Observación 2.12** *En las tablas de (2.1), las tablas  $t_1, t_2, t_3$  y  $t_4$  son todas del mismo tipo.*

En la introducción se dijo, que uno de los objetivos de usar tablas es construir todas las representaciones irreducibles de  $S_n$ , así que el lector con justa razón podría estarse preguntando cómo relacionamos las tablas y  $S_n$  y la respuesta se encuentra en la acción que definiremos a continuación la cual surge de un modo muy natural.

**Afirmación 2.13** *Consideremos  $\theta : S_n \times T_\lambda \rightarrow T_\lambda$  dada por  $\theta(\pi, t) = (\pi(t_{i,j}))$ , entonces  $\theta$  es una acción.*

**Demostración.** Sean  $\varepsilon, \sigma, \pi \in S_n$  y  $t \in T_\lambda$

1.  $\theta(\varepsilon, t) = (\varepsilon(t_{i,j})) = (t_{i,j}) = t$
2.  $\theta(\sigma, \theta(\pi, t)) = \theta(\sigma, \pi(t_{i,j})) = (\sigma\pi(t_{i,j})) = \theta(\sigma\pi, t_{i,j})$

■

**Ejemplo 2.14** Sean  $\lambda = (3, 1) \vdash 4$ ,  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$  y  $\pi = (3\ 1\ 2) \in S_4$ , entonces

$$(3\ 1\ 2) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}.$$

La siguiente definición sirve para establecer tablas equivalentes, de modo que podamos trabajar con un representante y no con todas las tablas.

**Definición 2.15** *Dadas dos tablas  $t_1$  y  $t_2 \in T_\lambda$  diremos que son equivalentes por renglón si los renglones de dichas tablas contienen los mismos elementos, esto lo denotaremos por  $t_1 \sim_r t_2$ . Entonces un tabloide por renglón de tipo  $\lambda$  asociado a  $t$  es  $\{t\} = \{t_i \mid t_i \sim_r t\}$ . Al conjunto de tabloides por renglón tipo  $\lambda$  se le denotará por  $\{T\}_\lambda$ .*

**Notación 2.16** *Para denotar a un tabloide  $\{t\}$  usaremos la tabla  $t$  pero eliminaremos las líneas verticales para indicar que estamos usando el tabloide por renglón asociado a esa tabla.*

**Observación 2.17** *Es importante observar que estamos considerando el conjunto de todas las tablas de tipo  $\lambda$  cuando tomamos un tabloide de tipo  $\lambda$ , de modo que dos tablas distintas pueden tener el mismo tabloide asociado.*

**Ejemplo 2.18** Sean  $t_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$  y  $t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 2 \\ \hline \end{array}$ , es posible ver que como tablas son distintas sin embargo por tener los mismos elementos en los mismos renglones los tabloides asociados son iguales, usando la notación definida para tabloide, el tabloide asociado a las tablas  $t_1$  y  $t_2$  sería

$$\overline{\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{array}}.$$

**Lema 2.19** *Sea  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$ , entonces la cantidad de tabloides por renglón que hay es  $\frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_k!}$ .*

**Demostración.** Como estamos trabajando con un llenado de tablas sin repetición hay  $n!$  formas de asignar biyectivamente  $\{1, 2, \dots, n\}$  en el diagrama y hay  $\lambda_1!$  permutaciones que preservan el primer renglón, si consideramos esto en cada uno de los renglones, hay  $\lambda_i!$  permutaciones que preservan el  $i$  –ésimo renglón, por lo tanto dividiendo los casos posibles entre los casos favorables, es decir, los que preservan el renglón se obtiene el resultado. ■

**Ejemplo 2.20** *A continuación examinaremos todos los tabloides por renglón tipo  $\lambda = (3, 1)$  :*

$$\begin{aligned} \{t_1\} &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{\overline{1 \ 2 \ 3}}{4} \\ \{t_2\} &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{\overline{2 \ 3 \ 4}}{1} \\ \{t_3\} &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{\overline{2 \ 3 \ 4}}{1} \\ \{t_4\} &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{\overline{1 \ 3 \ 4}}{2} \\ \{t_5\} &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{\overline{1 \ 3 \ 4}}{2} \\ \{t_6\} &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{\overline{1 \ 3 \ 4}}{2} \\ \{t_7\} &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{\overline{1 \ 2 \ 4}}{3} \\ \{t_8\} &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{\overline{1 \ 2 \ 4}}{3} \end{aligned}$$

**Observación 2.21** *Es importante recordar que bien podríamos tomar cualquier otra tabla de la clase como representante para describir al tabloide asociado.*

Así que podemos olvidarnos de trabajar con todas las tablas y podemos identificarlas con un representante. Diremos que  $\{t_1\}, \dots, \{t_k\}$  es una lista completa de  $\lambda$ –tabloides por renglón irreducible si son tabloides diferentes y toda tabla de forma  $\lambda$  pertenece a algún tabloide de esta lista de la partición.

**Definición 2.22** *Supongamos que  $\lambda \vdash n$ . Sea  $\{t_1\}, \dots, \{t_k\}$  una lista completa de  $\lambda$ –tabloides por renglón irreducible entonces  $M^\lambda = \mathbb{C}\{\{t_1\}, \dots, \{t_k\}\}$  es el **módulo de permutación correspondiente** a  $\lambda$ .*

**Ejemplo 2.23** Usando el ejemplo anterior tendríamos que

$$\begin{aligned} M^{(3,1)} &= \mathbb{C} \{ \{t_1\}, \{t_2\}, \{t_3\}, \{t_4\} \} \\ &= \mathbb{C} \left\{ \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \end{array}}, \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & \end{array}}, \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \end{array}}, \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array}} \right\} \end{aligned}$$

y sus elementos son de la forma

$$\lambda_1 \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \end{array}} + \lambda_2 \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & \end{array}} + \lambda_3 \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \end{array}} + \lambda_4 \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array}}$$

con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ .

**Definición 2.24** Diremos que  $M$  es un módulo cíclico si existe un elemento  $x \in M$  tal que  $\langle x \rangle = M$ , es decir, si existe un elemento tal que genera a  $M$ .

**Proposición 2.25** Sea  $\lambda \vdash n$ , con  $n \in \mathbb{N}^+$ . El módulo de permutación  $M^\lambda$  es cíclico como  $\mathbb{C}[S_n]$  módulo y está generado por cualquier  $\lambda$ -tabloide.

**Demostración.** Acorde a la definición de ser módulo cíclico, consideremos  $\{t\} \in \{T\}_\lambda$ . Dado  $\{s\} \in \{T\}_\lambda$ , sea  $\pi \in S_n$  tal que  $\pi(t_{i,j}) = s_{i,j}$  para toda  $i, j$  entonces  $\pi t = s$  y así  $\pi\{t\} = \{s\}$  de modo que si aplicamos todas las permutaciones de  $S_n$  a  $\{t\}$ , los tabloides resultantes son la lista completa de  $\lambda$ -tabloides por renglón irreducible. ■

**Ejemplo 2.26** Sea  $\lambda = (2, 1) \vdash 3$ , entonces todas las posibles tablas que podemos formar son

$$\begin{aligned} t_1 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}, \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}, \quad t_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}, \\ t_4 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}, \quad t_5 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}, \quad t_6 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} \end{aligned}$$

y por tanto la lista completa de tabloides asociados es:

$$\{t_1\} = \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}}, \quad \{t_2\} = \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}}, \quad \{t_3\} = \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}}$$

de este modo se tiene que

$$M^{(2,1)} = \mathbb{C} \left\{ \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}}, \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}}, \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}} \right\}.$$

Sabemos que

$$S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\},$$

tomemos  $\{t_2\} = \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}}$ , aplicando la acción de  $S_3$  en  $\{t_2\}$  se obtienen los siguientes tabloides:

$$(1)\{t_2\} = (1) \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}} = \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
 (1\ 2)\{t_2\} &= (1\ 2)\frac{\overline{2\ 3}}{\overline{1}} = \frac{\overline{1\ 3}}{\overline{2}} \\
 (1\ 3)\{t_2\} &= (1\ 3)\frac{\overline{2\ 3}}{\overline{1}} = \frac{\overline{2\ 1}}{\overline{3}} \\
 (2\ 3)\{t_2\} &= (2\ 3)\frac{\overline{2\ 3}}{\overline{1}} = \frac{\overline{3\ 2}}{\overline{1}} \\
 (1\ 2\ 3)\{t_2\} &= (1\ 2\ 3)\frac{\overline{2\ 3}}{\overline{1}} = \frac{\overline{3\ 1}}{\overline{2}} \\
 (1\ 3\ 2)\{t_2\} &= (1\ 3\ 2)\frac{\overline{2\ 3}}{\overline{1}} = \frac{\overline{1\ 2}}{\overline{3}}
 \end{aligned}$$

Aunque obtenemos tabloides repetidos, lo que importa es que obtenemos a todos de nuevo. Podemos hacer este proceso con  $\{t_1\}$  y  $\{t_3\}$  y obtendremos de nuevo todos los tabloides cuando apliquemos la acción.

Ahora bien, así como es posible definir una relación de equivalencia sobre los renglones, es posible definir una relación de equivalencia sobre las columnas, la definición es análoga y los resultados que más adelante se presentan para renglones son igualmente válidos para columnas.

**Definición 2.27** Dadas dos tablas  $t_1$  y  $t_2 \in T_\lambda$  diremos que son equivalentes por columna si las columnas de dichas tablas contienen los mismos elementos, esto lo denotaremos por  $t_1 \sim_c t_2$ . Entonces un tabloide por columna de tipo  $\lambda$  asociado a la tabla  $t$  es  $[t] = \{t_i \mid t_i \sim_c t\}$ . Al conjunto de tabloides por columna tipo  $\lambda$  se le denotará por  $[T]_\lambda$ .

**Notación 2.28** Para denotar a un tabloide  $[t]$  usaremos la tabla  $t$  pero eliminando las líneas horizontales para no confundir con los tabloides por renglón de la definición 2.15.

A continuación todos los tabloides por columna de  $\lambda = (3, 1)$  :

$$\begin{aligned}
 [t_1] &= \left\{ \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \end{array} \right], \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \end{array} \right] \right\} = \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right| \\
 [t_2] &= \left\{ \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 4 & & \end{array} \right], \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 1 & & \end{array} \right] \right\} = \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right| \\
 [t_3] &= \left\{ \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array} \right], \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 4 \\ \hline 1 & & \end{array} \right] \right\} = \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \right| \\
 [t_4] &= \left\{ \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 \\ \hline 3 & & \end{array} \right], \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & & \end{array} \right] \right\} = \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right| \\
 [t_5] &= \left\{ \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 1 & & \end{array} \right], \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & & \end{array} \right] \right\} = \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [t_6] &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| 3 \mid 4 \mid \\
 [t_7] &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right| 1 \mid 4 \mid \\
 [t_8] &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right| 4 \mid 1 \mid \\
 [t_9] &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right| 1 \mid 3 \mid \\
 [t_{10}] &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right| 3 \mid 1 \mid \\
 [t_{11}] &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right| 1 \mid 2 \mid \\
 [t_{12}] &= \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right| 2 \mid 1 \mid
 \end{aligned}$$

Ahora definiremos órdenes en las particiones, usaremos dos, uno de ellos es un orden parcial sobre las particiones y el otro es el orden lexicográfico, si bien cuando empecemos a desarrollar el tema no lo usaremos fuertemente, en algún punto el orden parcial nos ayudará a concluir de modo elegante y con mayor facilidad la mayoría de las pruebas. Más adelante definiremos un nuevo tipo de tablas en las que, a pesar de no ser muy distintas, podremos definir un orden que resulta una generalización de lo que a continuación veremos, por tanto nos detendremos para entender bien lo siguiente.

## 2.2 Orden en las particiones

**Definición 2.29** Sea  $A$  un conjunto, un orden parcial en  $A$  es una relación en el conjunto  $\leq$  tal que para cualesquiera  $a, b \in A$  se cumple:

1.  $a \leq a$ ,
2. Si  $a \leq b$  y  $b \leq a$  entonces  $a = b$  y
3. Si  $a \leq b$  y  $b \leq c$  entonces  $a \leq c$ .

**Definición 2.30** Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que  $b$  es elemento máximo de  $A$  si  $b \geq c$  para todo  $c \in A$ . Diremos que  $b$  es un elemento maximal si no existe  $c \in A$  tal que  $c > b$ . Se define de modo análogo ser elemento mínimo y minimal.

**Definición 2.31** Sea  $n \in \mathbb{N}^+$  y sean  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  y  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  particiones de  $n$ . Diremos que  $\lambda$  domina a  $\mu$  ( $\lambda \succeq \mu$ ) si para toda  $j \geq 1$  se tiene que  $\sum_{j=1}^i \lambda_j \geq \sum_{j=1}^i \mu_j$ .

**Ejemplo 2.32** Sean  $\lambda = (4, 1)$  y  $\mu = (3, 1, 1)$  particiones de 5, entonces  $\lambda \supseteq \mu$  pues  $4 \geq 3$ ,  $4 + 1 \geq 3 + 1$  y  $4 + 1 \geq 3 + 1 + 1$ .

Sin embargo este orden no es total, consideremos  $\lambda = (4, 3)$  y  $\mu = (5, 1, 1)$  aunque  $5 \geq 4$ , no sucede que  $5 + 1 \geq 4 + 3$  y tampoco es posible comprarlas al revés pues  $4 < 5$ , por tanto estos elementos son incomparables.

**Proposición 2.33** El conjunto  $T_\lambda$  bajo la relación  $\supseteq$  es un conjunto parcialmente ordenado.

**Demostración.**

1. Reflexividad; queremos demostrar que  $\lambda \supseteq \lambda$  y esto sucede pues  $\sum_{j=1}^i \lambda_j = \sum_{j=1}^i \lambda_j$  y por

$$\text{lo tanto } \sum_{j=1}^i \lambda_j \geq \sum_{j=1}^i \lambda_j.$$

2. Antisimetría; supongamos que  $\lambda \supseteq \mu$  y  $\mu \supseteq \lambda$ , por una parte esto significa que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$  para toda  $i$ , por tanto  $\lambda_1 \geq \mu_1$  y  $\mu_1 \geq \lambda_1$ , además  $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$  y  $\mu_1 + \mu_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2$ , como  $\lambda_1 = \mu_1$  cancelando se obtiene que  $\lambda_2 \geq \mu_2$  y  $\mu_2 \geq \lambda_2$  de donde  $\mu_2 = \lambda_2$ , siguiendo con este procedimiento se tiene que  $\lambda_i = \mu_i$  para toda  $i$ , entonces  $\lambda = \mu$ .

3. Transitividad; Supongamos que  $\lambda \supseteq \mu$  y  $\mu \supseteq \tau$ , esto quiere decir que para toda  $i$  se cumple que  $\sum_{j=1}^i \lambda_j \geq \sum_{j=1}^i \mu_j$  y  $\sum_{j=1}^i \mu_j \geq \sum_{j=1}^i \tau_j$ , por lo tanto  $\sum_{j=1}^i \lambda_j \geq \sum_{j=1}^i \tau_j$  para toda  $i$ .

■

**Lema 2.34 (Dominancia para particiones)** Sean  $t \in T_\lambda$  y  $s \in T_\mu$ . Si para cada índice  $i$  los elementos del  $i$ -ésimo renglón de  $s$  están todos en diferentes columnas de  $t$ , entonces  $\lambda \supseteq \mu$ .

**Demostración.** Sean  $t \in T_\lambda$ ,  $s \in T_\mu$ . Por hipótesis los elementos del primer renglón de  $s$  se encuentran todos en diferentes columnas de  $t$  entonces existe  $\pi_1 \in C_t$  tal que todos los elementos del primer renglón de  $s$  aparezcan en el primer renglón de  $\pi_1 t$  y de este modo tendríamos que  $\lambda_1 \geq \mu_1$

Si  $\lambda_1 = \mu_1$  entonces todos los elementos del segundo renglón de  $s$  están en diferentes columnas de  $\pi_1 t$  y se encuentran en algún renglón inferior al primero, así que consideramos  $\pi_2 \in C_t$  tal que todos los elementos correspondientes al segundo renglón de  $s$  se pueden acomodar en el segundo renglón, de este modo obtendríamos que  $\lambda_2 \geq \mu_2$ .

Si  $\lambda_1 > \mu_1$ , nuevamente nos fijamos en el segundo renglón, los elementos del segundo renglón de  $s$  están todos en diferentes columnas de  $\pi_1 t$ , podría suceder que al menos un elemento se encuentre en el primer renglón de  $\pi_1 t$  pues  $\lambda_1 > \mu_1$ , de cualquier modo tomamos  $\pi_2 \in C_t$  tal que todos los elementos del segundo renglón de  $s$  se encuentren en algún renglón inferior al primero en  $\pi_2 \pi_1 t$ , de este modo los elementos quedarían acomodados

en los primeros dos renglones de  $\pi_2\pi_1t$  por lo tanto  $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$ , siguiendo con este procedimiento tendríamos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \dots + \lambda_i &= \text{número de elementos en los primeros } i \text{ renglones de } t \\ &\geq \text{número de elementos de } s \text{ en los primeros } i \text{ renglones de } t \\ &= \mu_1 + \dots + \mu_i \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lambda \supseteq \mu$ . ■

**Ejemplo 2.35** Sean  $s \in T_\mu$  y  $t \in T_\lambda$  dadas por

$$s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 3 & 4 \\ \hline 6 & 1 & \\ \hline 2 & 7 & \\ \hline \end{array} \quad y \quad t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 7 & 9 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 4 & \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline \end{array}$$

siguiendo los pasos de la demostración primero podemos considerar las permutaciones  $\pi_1 = (4 \ 9)$  y  $\pi_2 = (7 \ 5 \ 1)$  actuando en  $t$ , así obtenemos

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 5 & 4 & 3 \\ \hline 6 & 7 & 9 & \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

de esta manera ya hemos acomodado los elementos del primer renglón de  $s$  en el primer renglón de  $t$  y hacemos lo correspondiente en el segundo renglón.

Consideremos  $\pi_3 = (1 \ 7)$  y aplicamos la acción en la tabla resultante

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 5 & 4 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 9 & \\ \hline 2 & 7 & & \\ \hline \end{array}$$

de modo que es posible ver que si  $\lambda$  es la partición asociada a  $t$  y  $\mu$  es la partición asociada a  $s$  entonces  $\lambda \geq \mu$ .

**Definición 2.36** Sean  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  y  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ , particiones de  $n$ . Diremos que  $\lambda < \mu$  con el orden lexicográfico si p.a.  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  se cumple que  $\lambda_j = \mu_j$  para  $j < i$  y  $\lambda_i < \mu_i$ .

**Proposición 2.37** Sean  $\lambda, \mu \vdash n$  con  $\lambda \supseteq \mu$  entonces  $\lambda \geq \mu$ .

**Demostración.** Supongamos que  $\lambda \neq \mu$  entonces existe  $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  el primer índice tal que  $\lambda$  y  $\mu$  difieren en esa entrada, analizando lo que pasa con la suma de los  $\lambda'_j$ s y los  $\mu'_j$ s, hasta  $j - 1$  se tiene  $\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{j-1} \mu_i$  y por hipótesis  $\lambda \supset \mu$  entonces  $\sum_{i=1}^j \lambda_i > \sum_{i=1}^j \mu_i$  y por lo tanto  $\lambda_j > \mu_j$  y así  $\lambda > \mu$ . ■

# Capítulo 3

## La Regla de Young

### 3.1 Subgrupos de Young y Tabloides

**Definición 3.1** Sea  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$ . El subgrupo de Young correspondiente es  $S_\lambda = S_{\{1, \dots, \lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1, \lambda_1+2, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{k-1}+1, \dots, \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_k\}}$ .

Acorde a la definición 3.1, si  $\lambda = (4, 3^2, 1)$  entonces  $S_\lambda = S_{\{1,2,3,4\}} \times S_{\{5,6,7\}} \times S_{\{8,9,10\}} \times S_{\{11\}} \cong S_4 \times S_3 \times S_3 \times S_1$  visto como producto directo interno de  $S_{11}$ .

Dichos subgrupos nos ayudarán a manejar las tablas a través de sus renglones y sus columnas, por simple comodidad usaremos columnas para la mayoría de resultados, esto no debería causar conflicto pues los renglones de una tabla coinciden con las columnas de la tabla transpuesta y por tanto no perdemos información.

**Definición 3.2** Sean  $\lambda \vdash n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $t \in T_\lambda$ , denotaremos como  $R_t$  al subgrupo de Young de  $S_n$  tal que estabiliza los renglones de  $t$ , esto es, si  $t$  tiene renglones cuyas entradas están dadas por los conjuntos  $r_1, \dots, r_k$ , entonces  $R_t = S_{r_1} \times \dots \times S_{r_k}$  y  $C_t$  será el estabilizador de columnas de  $t$ , dadas  $c_1, \dots, c_m$  los conjuntos formados por las entradas de las distintas columnas de  $t$  se tiene que  $C_t = S_{c_1} \times \dots \times S_{c_m}$ .

**Ejemplo 3.3** Sea

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 6 & 7 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}$$

entonces  $R_t = S_{\{1,2,4,5\}} \times S_{\{3,6,7\}} \times S_{\{8\}}$  y  $C_t = S_{\{3,4,8\}} \times S_{\{2,6\}} \times S_{\{1,7\}} \times S_{\{5\}}$ .

**Proposición 3.4** Sean  $t \in T_\lambda$  y  $\pi \in S_n$  entonces:

1.  $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$
2.  $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$

**Demostración.**

1.  $\sigma \in R_{\pi t} \Leftrightarrow \sigma\{\pi t\} = \{\pi t\} \Leftrightarrow \sigma\pi\{t\} = \pi\{t\} \Leftrightarrow \pi^{-1}\sigma\pi\{t\} = \{t\} \Leftrightarrow \pi^{-1}\sigma\pi \in R_t \Leftrightarrow \sigma \in \pi R_t \pi^{-1}$ .
2. Análoga a la anterior;  $\sigma \in C_{\pi t} \Leftrightarrow \sigma[\pi t] = [\pi t] \Leftrightarrow \sigma\pi[t] = \pi[t] \Leftrightarrow \pi^{-1}\sigma\pi[t] = [t] \Leftrightarrow \pi^{-1}\sigma\pi \in C_t \Leftrightarrow \sigma \in \pi C_t \pi^{-1}$ .

■

Podemos pensar que la acción de  $S_n$  en  $T_\lambda$  es una forma de visualizar la acción regular izquierda de  $S_n$  en sí mismo, de este mismo modo la acción de  $S_n$  en  $\{T\}_\lambda$  es una forma de visualizar la acción izquierda de  $S_n$  en  $\frac{S_n}{R_t}$  para toda  $t \in T_\lambda$ , esto se resume en la siguiente proposición.

**Proposición 3.5** *Consideremos la biyección  $f_t : S_n \rightarrow T_\lambda$  dada por  $f_t(\pi) = \pi t$ , entonces los elementos del subgrupo de Young  $\frac{S_n}{R_t}$  se corresponden bajo  $f_t$  con las clases de equivalencia por renglones de  $T_\lambda$  coinciden.*

**Demostración.** Queremos demostrar que si  $\pi', \pi \in S_n$  son tales que  $\pi' = \pi\sigma$  con  $\sigma \in R_t$  entonces  $\pi't$  es equivalente por renglones a  $\pi t$  y esto sucede pues  $\pi't = (\pi\sigma)t = \pi\sigma\pi^{-1}(\pi t)$  y por la proposición 3.4 inciso 1, sabemos que  $\pi\sigma\pi^{-1} \in R_{\pi t}$ . Por otra parte si  $\pi't$  y  $\pi t$  son equivalentes por renglones existe  $\rho \in R_{\pi t}$  tal que  $\pi't = \rho(\pi t)$  para alguna  $\sigma \in R_t$ , de donde,  $\pi't = \pi\sigma\pi^{-1}(\pi t) = \pi\sigma t$  por lo cual  $\pi' = \pi\sigma$  con  $\sigma \in R_t$  y así  $\pi'$  y  $\pi$  pertenecen a la misma clase lateral de  $S_n$  con respecto a  $R_t$ , que es lo que se quería demostrar. ■

Recordemos ahora la estructura de álgebra de grupo que mencionamos en la sección 1.2.1, estudiamos la forma de algunos de sus elementos, en particular cuando los elementos provienen de  $S_n$ , a continuación revelaremos la importancia de ellos. Sea  $H \leq S_n$ , definimos ahora  $H^+ = \sum_{\pi \in H} \pi$  y la suma signada como  $H^- = \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi)$ , este último elemento lo usaremos en la siguiente definición, también es importante observar que los elementos del álgebra de grupo no juegan el papel principal sino que los haremos actuar sobre elementos de  $M^\lambda$  (ver corolario 2.22).

**Definición 3.6** *Dada  $t \in T_\lambda$ , se define la suma signada por columnas como el elemento del álgebra de grupo  $\mathbb{C}[S_n]$  obtenido mediante la suma de los elementos del estabilizador de columnas  $C_t$  multiplicados por el signo correspondiente de cada permutación, es decir*

$$C_t^- = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi)\pi. \tag{3.1}$$

**Definición 3.7** *Si  $t \in T_\lambda$ , entonces el politabloide asociado es el elemento en  $M^\lambda$  dado por  $e_t = C_t^- \{t\}$ .*

**Ejemplo 3.8** *Sea  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline \end{array}$ , entonces*

$$C_t^- = (1) - (3\ 4) - (1\ 2) + (3\ 4)(1\ 2) \text{ y } \{t\} = \frac{\overline{4\ 2\ 5}}{\overline{3\ 1}}$$

por lo que el politabloide asociado viene a ser

$$\begin{aligned}
 C_t^- \{t\} &= ((1) - (3\ 4) - (1\ 2) + (3\ 4)(1\ 2)) \frac{\overline{4\ 2\ 5}}{\overline{3\ 1}} \\
 &= (1) \frac{\overline{4\ 2\ 5}}{\overline{3\ 1}} - (3\ 4) \frac{\overline{4\ 2\ 5}}{\overline{3\ 1}} - (1\ 2) \frac{\overline{4\ 2\ 5}}{\overline{3\ 1}} + (1\ 2)(3\ 4) \frac{\overline{4\ 2\ 5}}{\overline{3\ 1}} \\
 &= \frac{\overline{4\ 2\ 5}}{\overline{3\ 1}} - \frac{\overline{3\ 2\ 5}}{\overline{4\ 1}} - \frac{\overline{4\ 1\ 5}}{\overline{3\ 2}} + \frac{\overline{3\ 1\ 5}}{\overline{4\ 2}}
 \end{aligned}$$

Esta última definición juega un papel de suma importancia pues con este elemento logramos conectar a una tabla cualquiera con un elemento del módulo de permutación  $M^\lambda$ , veamos algunos resultados antes de dar un ejemplo explícito mostrando el papel que tendrán los politabloides.

**Proposición 3.9** Sean  $t \in T_\lambda$  y  $\pi \in S_n$  entonces:

1.  $C_{\pi t}^- = \pi C_t^- \pi^{-1}$ .
2.  $\pi e_t = e_{\pi t}$ .

**Demostración.**

1. La parte derecha de la igualdad se escribe como

$$\pi C_t^- \pi^{-1} = \pi \left( \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma) \sigma \right) \pi^{-1} = \left( \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma) \pi \sigma \right) \pi^{-1}$$

como  $\sigma \in C_t$  y  $C_t = \pi^{-1} C_{\pi t} \pi$  se tiene que  $\pi \sigma \in C_{\pi t}$ , entonces la última expresión se escribe como

$$= \left( \sum_{\pi \sigma \in C_{\pi t}} \text{sgn}(\sigma) \pi \sigma \right) \pi^{-1} = \sum_{\pi \sigma \pi^{-1} \in C_{\pi t}} \text{sgn}(\pi \sigma \pi^{-1}) \pi \sigma \pi^{-1}$$

sea  $\mu = \pi \sigma \pi^{-1}$ , entonces

$$\pi C_t^- \pi^{-1} = \sum_{\mu \in C_{\pi t}} \text{sgn}(\mu) \mu = C_{\pi t}^-$$

2.  $e_{\pi t} = C_{\pi t}^- \{\pi t\} = \pi C_t^- \pi^{-1} \{\pi t\} = \pi C_t^- \{t\} = \pi e_t$ .

■

**Observación 3.10** Dada  $t \in T_\lambda$  tal que tiene columnas dadas por las tablas  $c_1, \dots, c_k$  es posible factorizar a  $C_t^- = C_{c_1}^- \dots C_{c_k}^-$ .

**Ejemplo 3.11** Sea  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 1 \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline \end{array}$ , entonces haciendo el cálculo directo

$$C_t^- = (1) - (3\ 4) - (5\ 2) + (3\ 4)(5\ 2)$$

y por otro lado pensando sólo en sus columnas

$$c_1 = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \Rightarrow C_{c_1}^- = (1) - (3\ 4)$$

$$c_2 = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow C_{c_2}^- = (1) - (5\ 2)$$

por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} C_{t_1}^- C_{t_2}^- &= ((1) - (3\ 4))((1) - (5\ 2)) \\ &= (1) - (3\ 4) - (5\ 2) + (3\ 4)(5\ 2) \end{aligned}$$

**Observación 3.12** Dada  $t \in T_\lambda$  con  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , la estructura de los subgrupos  $R_t$  y  $C_t$  dependen sólo de  $\lambda$  pues  $R_t \cong S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$  y  $C_t = R_{t'}$ .

**Teorema 3.13** Sea  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  y  $M^\lambda$  el módulo permutación asociado entonces se satisfacen:

1.  $M^\lambda$  es isomorfo a la representación inducida a  $S_n$  por la representación trivial del subgrupo  $S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ .
2.  $\dim M^\lambda = [S_n : S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}] = \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_k!}$ .

**Demostración.**

1. Se sigue del hecho de que  $R_t\{t\} \cong S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ , por la proposición 3.5, por la observación anterior y por lo visto en la sección 1.4.1 sobre representaciones inducidas.
2. Es inmediato de la demostración anterior y de la proposición 3.5

■

Vamos a estrenar nuestras definiciones y proposiciones con un ejemplo explícito en el cual además obtendremos todos los tabloides de  $M^\lambda$  y mostremos la función que cumplen los politabloides.

**Ejemplo 3.14** Consideremos  $\lambda = (3, 1)$  entonces tenemos en total 24 tablas, las cuales ya hemos calculado, (ver ejemplo 2.1), así podemos obtener todos los tabloides por renglón asociados, los cuales son:

$$\{t_1\} = \frac{\overline{1\ 2\ 3}}{4}, \quad \{t_2\} = \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{1}, \quad \{t_3\} = \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{2}, \quad \{t_4\} = \frac{\overline{1\ 2\ 4}}{3}$$

es una lista completa de  $\lambda$  – tabloides irreducibles por el inciso 2. del teorema 3.13 Ahora podemos obtener algunos politabloides y obtener su expresión en términos de la lista completa de  $\lambda$  – tabloides irreducible.

$$\begin{aligned} C_{t_1}^- &= (1) - (1\ 4) \text{ y } \{t_1\} = \frac{\overline{1\ 2\ 3}}{4} \\ \Rightarrow C_{t_1}^- \{t_1\} &= (1) \frac{\overline{1\ 2\ 3}}{4} - (1\ 4) \frac{\overline{1\ 2\ 3}}{4} \\ \Rightarrow e_{t_1} &= \frac{\overline{1\ 2\ 3}}{4} - \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{1} = \{t_1\} - \{t_2\} \end{aligned}$$

de ese modo es posible deducir los otros politabloides,

$$\begin{aligned} C_{t_2}^- &= (1) - (2\ 1) \Rightarrow e_{t_2} = \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{1} - \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{2} = \{t_2\} - \{t_3\} \\ C_{t_3}^- &= (1) - (1\ 2) \Rightarrow e_{t_3} = \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{2} - \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{1} = \{t_3\} - \{t_2\} \\ C_{t_4}^- &= (1) - (1\ 3) \Rightarrow e_{t_4} = \frac{\overline{1\ 2\ 4}}{3} - \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{1} = \{t_4\} - \{t_2\} \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.15** Examinemos ahora  $\lambda = (2, 2)$ , una base para  $M^\lambda$  es

$$\left\{ \begin{array}{l} \{t_1\} = \frac{\overline{1\ 2}}{3\ 4}, \{t_2\} = \frac{\overline{2\ 3}}{1\ 4}, \{t_3\} = \frac{\overline{3\ 4}}{1\ 2}, \\ \{t_4\} = \frac{\overline{1\ 4}}{2\ 3}, \{t_5\} = \frac{\overline{1\ 3}}{2\ 4}, \{t_6\} = \frac{\overline{2\ 4}}{1\ 3} \end{array} \right\}$$

realizando algunas cuentas tenemos que los politabloides asociados son:

$$\begin{aligned} e_{t_1} &= \frac{\overline{1\ 2}}{3\ 4} - \frac{\overline{2\ 3}}{1\ 4} - \frac{\overline{1\ 4}}{2\ 3} + \frac{\overline{3\ 4}}{1\ 2} = \{t_1\} - \{t_2\} - \{t_4\} + \{t_3\} \\ e_{t_2} &= \frac{\overline{2\ 3}}{1\ 4} - \frac{\overline{1\ 3}}{2\ 4} - \frac{\overline{2\ 4}}{1\ 3} + \frac{\overline{1\ 2}}{3\ 4} = \{t_2\} - \{t_5\} - \{t_6\} + \{t_4\} \\ e_{t_3} &= \frac{\overline{3\ 4}}{1\ 2} - \frac{\overline{1\ 4}}{2\ 3} - \frac{\overline{2\ 3}}{1\ 4} + \frac{\overline{1\ 2}}{3\ 4} = \{t_3\} - \{t_4\} - \{t_2\} + \{t_1\} \\ e_{t_4} &= \frac{\overline{1\ 4}}{2\ 3} - \frac{\overline{2\ 4}}{1\ 3} - \frac{\overline{1\ 3}}{2\ 4} + \frac{\overline{2\ 3}}{1\ 4} = \{t_4\} - \{t_6\} - \{t_5\} + \{t_2\} \\ e_{t_5} &= \frac{\overline{1\ 3}}{2\ 4} - \frac{\overline{2\ 3}}{1\ 4} - \frac{\overline{1\ 4}}{2\ 3} + \frac{\overline{2\ 4}}{1\ 3} = \{t_5\} - \{t_2\} - \{t_4\} + \{t_6\} \\ e_{t_6} &= \frac{\overline{2\ 4}}{1\ 3} - \frac{\overline{1\ 4}}{2\ 3} - \frac{\overline{2\ 3}}{1\ 4} + \frac{\overline{1\ 3}}{2\ 4} = \{t_6\} - \{t_4\} - \{t_2\} + \{t_5\} \end{aligned}$$

Al final de este capítulo se dará una descomposición de  $M^\lambda$ , el cual al ser un  $S_n$ -módulo contiene muchos subespacios, en particular nos es de gran interés estudiar aquél que está generado por los politabloides, este módulo será conocido como módulo Specht  $S^\lambda$ , en el camino que vamos a construir iremos viendo la importancia de este módulo.

Es posible observar en el ejemplo que los politabloides asociados a tablas que son equivalentes por columna son iguales salvo por el signo, esto no es una casualidad del ejemplo y lo demostraremos más adelante, sin embargo, si uno de nuestros objetivos es dar una base para  $S^\lambda$  el hecho de que tablas equivalentes por columna nos den politabloides que difieren sólo en el signo nos ayuda a empezar a construir un conjunto que sea base pues para empezar deberíamos considerar un representante por tabla tal que retiremos todas las que tienen columnas equivalentes.

**Proposición 3.16** *Sea  $(a b)$  una transposición de  $C_t$ , entonces  $(1 - (a b))$  es factor en  $\mathbb{C}[S_n]$  de  $C_t^-$ .*

**Demostración.** Sean  $C_t \leq S_n$  y  $H = \{\varepsilon, (a b)\} \leq C_t$  de modo que podemos encontrar la clase lateral tal que  $C_t = \bigsqcup_i k_i H$ , de modo que la suma signada se puede reescribir como

$$\begin{aligned} C_t^- &= \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi)\pi = \sum_i (\text{sgn}(k_i)k_i + \text{sgn}(k_i(a b))(k_i(a b))) \\ &= \sum_i (\text{sgn}(k_i)k_i - \text{sgn}(k_i)(k_i(a b))) \\ &= \sum_i (\text{sgn}(k_i)k_i)(1 - (a b)) \\ &= \left( \sum_i \text{sgn}(k_i)k_i \right) (1 - (a b)). \end{aligned}$$

■

**Lema 3.17 (El Lema del Signo)** *Sean  $t_1$  y  $t_2 \in T_\lambda$  tales que  $t_1 = \pi t_2$  p.a.  $\pi \in C_{t_2}$ , entonces  $e_{t_1} = \pm e_{t_2}$ .*

**Demostración.**

$$e_{t_1} = \sum_{\sigma \in C_{t_1}} \text{sgn}(\sigma)\sigma\{t_1\} = \sum_{\sigma \in C_{\pi t_2}} \text{sgn}(\sigma)\sigma\{\pi t_2\}$$

por la proposición 3.4 inciso 2 tenemos que  $\pi C_{t_2} \pi^{-1} = C_{\pi t_2}$ ,

$$= \sum_{\pi^{-1}\sigma\pi \in C_{t_2}} \text{sgn}(\sigma)\sigma\{\pi t_2\}$$

haciendo  $\tau = \pi^{-1}\sigma\pi$ , tenemos  $\pi\tau\pi^{-1} = \sigma$ , de modo que la igualdad anterior se escribe como

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau \in C_{t_2}} \text{sgn}(\pi\tau\pi^{-1})\pi\tau\pi^{-1}\{\pi t_2\} \\ &= \text{sgn}(\pi^{-1}) \sum_{\tau \in C_{t_2}} \text{sgn}(\pi\tau)\pi\tau\{t_2\} \end{aligned}$$

dado que  $\pi \in C_{t_2}$  y  $\tau \in C_{t_2}$  si y sólo si  $\pi\tau \in C_{t_2}$ , por lo que tenemos la siguiente igualdad

$$= \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{\pi\tau \in C_{t_2}} \operatorname{sgn}(\pi\tau)\pi\tau\{t_2\} = \pm e_{t_2}$$

■

Ahora ya hemos desarrollado la herramienta suficiente para empezar a estudiar a  $S^\lambda$  a fondo, queremos concluir que este módulo es irreducible y es un conjunto completo de representaciones de  $S_n$ .

**Definición 3.18** Sea  $n \in \mathbb{N}^+$  y consideremos  $\lambda \vdash n$ , entonces  $S^\lambda$  es el submódulo de  $M^\lambda$  generado por los politabloides  $e_t$  con  $t \in T_\lambda$ , es decir,

$$S^\lambda = \{c_1 e_{t_1} + \dots + c_n e_{t_n} \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}, t_1, \dots, t_n \in T_\lambda\}$$

**Proposición 3.19** El módulo  $S^\lambda$  es un  $\mathbb{C}[S_n]$  submódulo de  $M^\lambda$ .

**Demostración.** Para ver que es submódulo es necesario ver que es invariante bajo la acción de  $S_n$ , por lo tanto, sean  $\lambda \vdash n$ ,  $t \in T_\lambda$  y  $e_t$  un politabloide, observemos qué sucede al aplicar la acción de  $S_n$ .

$$\pi e_t = \pi \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t\} = \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\pi\sigma\{t\}$$

recordemos que  $\pi^{-1}C_{\pi t}\pi = C_t$ , de modo que si  $\sigma \in C_t = \pi^{-1}C_{\pi t}\pi$ , entonces  $\pi\sigma \in C_{\pi t}$

$$= \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) \sum_{\pi\sigma \in C_{\pi t}} \operatorname{sgn}(\pi\sigma)\pi\sigma\{t\}$$

consideramos  $\mu = \pi\sigma$ , de modo que

$$= \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) \sum_{\mu \in C_{\pi t}} \operatorname{sgn}(\mu)\mu\{t\} = \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) \sum_{\mu \in C_{\pi t}} \operatorname{sgn}(\mu)\mu\pi^{-1}\{\pi t\}$$

ahora consideremos el cambio  $\gamma = \mu\pi^{-1}$

$$= \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) \sum_{\gamma \in C_{\pi t}} \operatorname{sgn}(\gamma\pi)\gamma\pi\pi^{-1}\{\pi t\} = \operatorname{sgn}(\pi^{-1}\pi) \sum_{\gamma \in C_{\pi t}} \operatorname{sgn}(\gamma)\gamma\{\pi t\} = e_{\pi t} \in S_n$$

Por lo tanto  $S^\lambda$  es cerrado bajo la acción de  $S_n$ . ■

**Observación 3.20** Como parte de la demostración anterior se observa que  $\pi e_t = e_{\pi t}$ , esta igualdad será usada en varias ocasiones a lo largo del capítulo.

**Ejemplo 3.21** Sea  $\lambda = (2, 1) \vdash 3$ , para obtener todos los politabloides asociados a  $\lambda$  tenemos que empezar por considerar las tablas:

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad t_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$$

donde los tabloides asociados a cada tabla son

$$\{t_1\} = \left\{ \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}}, \frac{\overline{2 \ 1}}{\underline{3}} \right\}, \quad \{t_2\} = \left\{ \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}}, \frac{\overline{3 \ 1}}{\underline{2}} \right\}, \quad \{t_3\} = \left\{ \frac{\overline{2 \ 1}}{\underline{3}}, \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}} \right\}$$

y así

$$M^\lambda = \mathbb{C} \left\{ \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}}, \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}}, \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}} \right\}$$

Ahora para calcular los politabloides necesitamos la suma signada por columna

$$C_{t_1}^- = (1) - (1 \ 3), \quad C_{t_2}^- = (1) - (1 \ 2) \quad \text{y} \quad C_{t_3}^- = (1) - (2 \ 1)$$

y por lo tanto los politabloides asociados son

$$e_{t_1} = \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}} - \frac{\overline{3 \ 2}}{\underline{1}}$$

$$e_{t_2} = \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}} - \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}}$$

$$e_{t_3} = \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}} - \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}}$$

de aquí es posible obtener una base para  $S^\lambda$ , para empezar debemos retirar a  $e_{t_3}$  pues la tabla asociada es una permutación de la tabla  $t_2$  de modo que por el lema del signo los politabloides resultan múltiplos el uno del otro, por otra parte  $e_{t_1}$  no es múltiplo de  $e_{t_2}$  y estos politabloides fueron obtenidos de elementos en una base de  $M^\lambda$ , por tanto se tiene que:

$$S^{(2,1)} = \mathbb{C} \left\{ \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}} - \frac{\overline{3 \ 2}}{\underline{1}}, \frac{\overline{2 \ 1}}{\underline{3}} - \frac{\overline{3 \ 1}}{\underline{2}} \right\}$$

es una base para  $S^{(2,1)}$ , pues ya tenemos un conjunto que genera y los dos tabloides que quedan son linealmente independientes.

**Ejemplo 3.22** En el ejemplo 3.15 se obtuvo una base para  $M^{(2,2)}$  la cual estaba dada por el conjunto

$$\left\{ \begin{array}{l} \{t_1\} = \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3 \ 4}}, \{t_2\} = \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1 \ 4}}, \{t_3\} = \frac{\overline{3 \ 4}}{\underline{1 \ 2}}, \\ \{t_4\} = \frac{\overline{1 \ 4}}{\underline{2 \ 3}}, \{t_5\} = \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2 \ 4}}, \{t_6\} = \frac{\overline{2 \ 4}}{\underline{1 \ 3}} \end{array} \right\}, \quad (3.2)$$

para obtener una base para  $S^{(2,2)}$ , como el conjunto 3.2 ya es una base para  $M^{(2,2)}$  basta con retirar las tablas equivalentes por columna para asegurar que los elementos que quedan son linealmente independientes y de ese modo tendremos que una base son los politabloides  $e_{t_1}$  y  $e_{t_5}$ . Así:

$$S^{(2,2)} = \mathbb{C} \{e_{t_1}, e_{t_5}\}.$$

**Ejemplo 3.23** *Vamos a obtener una base de  $S^{(3,1)}$ , en el ejemplo 3.14 obtuvimos todos los politabloides, sólo queda ver cuáles debemos retirar para quedarnos con un conjunto linealmente independiente, usando los mismos argumentos que en los ejemplos anteriores se tiene que una base de  $S^{(3,1)}$  es:*

$$\left\{ \{t_1\} = \frac{\overline{1 \ 2 \ 3}}{4}, \{t_3\} = \frac{\overline{1 \ 3 \ 4}}{2}, \{t_4\} = \frac{\overline{1 \ 2 \ 4}}{3} \right\} \quad (3.3)$$

**Ejemplo 3.24** *Sea  $\lambda = (1^n)$  y*

$$t = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$$

entonces

$$C_t^- = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi)\pi = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi)\pi$$

por lo que  $e_t$  es la suma signada de las  $n!$  permutaciones.

Además por el Lema del Signo tenemos que  $e_{\pi t} = \text{sgn}(\pi)e_t$ , por lo tanto  $S^{(1^n)} = \mathbb{C}\{e_t\}$ , ésta es la representación signo de la que se habló en el ejemplo 1.32!

Nos llevará un tiempo y nueva herramienta poder probar que el conjunto de politabloides asociados a una tabla estándar y que no son equivalentes por columnas es base de  $\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ , lo que sí podemos probar ya es que  $S^\lambda$  es un conjunto completo de  $S_n - \text{módulos}$  irreducibles, gran parte de la demostración se la debemos al Teorema del submódulo de James. A partir de ahora todos los resultados serán trabajando en un campo de característica cero.

**Lema 3.25** *Sean  $t_1 \in T_\lambda$  y  $t_2 \in T_\mu$  con  $\lambda, \mu \vdash n$  entonces:*

1. Si  $C_{t_1}^- \{t_2\} \neq 0$  entonces  $\lambda \supseteq \mu$ .
2. Si además  $t_1$  y  $t_2$  son del mismo tipo entonces  $C_{t_1}^- \{t_2\} = \pm C_{t_1}^- \{t_1\} = \pm e_{t_1}$ .

**Demostración.** La primera parte del lema la resolveremos por contradicción, supongamos que  $\lambda \not\supseteq \mu$ , recordando el lema 2.34, esto quiere decir que existen un par de elementos  $a, b$  que están en el mismo renglón de  $t_2$  y en la misma columna de  $t_1$ , considerando la transposición tenemos que  $(a \ b) \in R_{t_2} \cap C_{t_1}$ .

Como  $(a \ b) \in R_{t_2}$  entonces  $(a \ b)\{t_2\} = \{t_2\}$  por lo tanto  $((a \ b) - 1)\{t_2\} = 0$ , por otra parte  $(a \ b) \in C_{t_1}$  por la proposición 3.16  $((a \ b) - 1)$  es factor de  $C_{t_1}^-$ , sin embargo  $((a \ b) - 1)\{t_2\} = 0$  y al ser  $\{t_2\} \neq 0$  se tendría que  $((a \ b) - 1) = 0$  por lo tanto  $C_{t_1}^- \{t_2\} = 0$  lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto  $\lambda \supseteq \mu$ .

Para la segunda parte usaremos el mismo argumento con el cual se demostró el lema de dominancia, como por hipótesis  $C_{t_1}^- \{t_2\} \neq 0$  entonces  $\lambda \supseteq \mu$ , entonces existe  $\pi \in C_{t_1}$  tal que  $\{t_2\} = \pi\{t_1\}$ , de otro modo existirían dos elementos en la misma columna de  $t_1$  que bajo

alguna entonces los elementos del primer renglón de  $t_2$  están todos en diferentes columnas de  $t_1$ , por ser del mismo tipo existe  $\pi \in C_{t_1}$  tal que  $\{t_2\} = \pi\{t_1\}$ , con el mismo argumento hacemos lo mismo con el segundo renglón, existe  $\pi_2 \in C_{t_1}$  tal que el segundo renglón de  $\{\pi_2\pi_1 t_1\}$  es igual al segundo renglón de  $\{t_2\}$  sin alterar el primer renglón, podemos hacer esto con todos los renglones de  $t_1$ , al final tendremos que  $\{\pi_k \dots \pi_1 t_1\} = \{t_2\}$ , entonces  $C_{t_1}^- \{t_2\} = C_{t_1}^- \{\pi_k \dots \pi_1 t_1\} = C_{t_1}^- \pi_k \dots \pi_1 \{t_1\}$  por el lema 3.17 se tiene que es igual a  $\pm C_{t_1}^- \{t_1\}$ . ■

**Corolario 3.26** Si  $\lambda \vdash n$  y  $M^\lambda$ , entonces dado  $v \in M^\lambda$  se tiene que para toda  $t \in T_\lambda$ ,  $C_t^- v$  es múltiplo de  $e_t$ .

**Demostración.** Sea  $k$  la dimensión de  $M^\lambda$  y consideremos  $v \in M^\lambda$ , entonces  $v = \sum_{i=1}^k c_i \{t_i\}$  con  $\{t_i\} \in \{T\}_\lambda$  y  $c_i \in \mathbb{C}$  para toda  $i$ , por el lema anterior se tiene que

$$C_t^- v = C_t^- \sum_{i=1}^k c_i \{t_i\} = \sum_{i=1}^k c_i C_t^- \{t_i\} = \sum_{i=1}^k \pm c_i e_t$$

■  
Para continuar debemos utilizar ahora el producto interno, si consideramos el módulo  $M^\lambda$  con  $\{T\}_\lambda$  una base y consideramos a  $C_t^-$  como un operador, entonces por cómo está definido  $C_t^-$  podemos llevar a cabo la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} \langle C_t^- u, v \rangle &= \left\langle \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \pi u, v \right\rangle = \sum_{\pi \in C_t} \langle (\text{sgn}(\pi)) \pi u, v \rangle \\ &= \sum_{\pi \in C_t} \langle u, (\text{sgn}(\pi)) \pi^{-1} v \rangle = \left\langle u, \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \pi v \right\rangle \\ &= \langle u, C_t^- v \rangle \end{aligned}$$

para cualesquier  $u, v \in M^\lambda$ , i.e. podemos ver a  $C_t^-$  como un operador simétrico.

**Teorema 3.27 (Teorema del Submódulo de James)** Sean  $\lambda \vdash n$  y  $V \in \text{Sub}(M^\lambda)$  invariante, entonces  $S^\lambda \subseteq V$  ó  $V \subseteq (S^\lambda)^\perp$ .

**Demostración.** Si existe  $v \in V$  no nulo tal que  $C_t^- v \neq 0$ , entonces por el corolario anterior  $C_t^- v = k e_t$ , por lo tanto como  $v \in V$ ,  $V \in \text{Sub}(M^\lambda)$  invariante y  $k \neq 0$  se tiene que  $e_t \in V$ . Dado que  $S^\lambda$  está generado por los politabloides se tiene que  $S^\lambda \subseteq V$ .

Por otra parte si para toda  $t \in T_\lambda$  y para todo  $v \in V$  tenemos que  $C_t^- v = 0$ , por ser  $C_t^-$  un operador simétrico tenemos

$$\langle v, e_t \rangle = \langle v, C_t^- \{t\} \rangle = \langle C_t^- v, \{t\} \rangle = \langle 0, \{t\} \rangle$$

de este modo se obtiene que  $v \in (S^\lambda)^\perp$ . ■

**Corolario 3.28**  $S^\lambda$  es irreducible.

**Demostración.** Supongamos que existe  $W \in \text{Sub}(S^\lambda)$ , entonces  $W$  es invariante bajo la acción de  $S_n$ , de modo que por el teorema 3.27 se tiene que  $S^\lambda \subseteq W$  ó  $W \subseteq (S^\lambda)^\perp$ . Ahora recordemos que en característica cero  $\langle u, u \rangle = 0$  implica  $u = 0$ , así en el primer caso tendríamos  $W = S^\lambda$  y en el segundo caso  $W = \{0\}$ . ■

Con estos resultados finalmente es posible probar que  $\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$  es un conjunto completo de representaciones de  $S_n$ , de hecho ya sabemos que, si no hay repeticiones, tenemos el número correcto de representaciones pues la cantidad de particiones de  $n$  es igual a la cantidad de la clases de conjugación de  $S_n$  (ver teorema 1.28) y además sabemos que todos los  $S^\lambda$  son irreducibles de modo que sólo falta probar que si  $S^\lambda \cong S^\mu$  entonces  $\lambda = \mu$ .

**Lema 3.29** *Si existe  $\rho \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  no nulo entonces  $\lambda \supseteq \mu$  y si  $\lambda = \mu$  entonces  $\rho$  coincide con la multiplicación por escalar.*

**Demostración.** Como  $\rho \neq 0$  entonces existe  $e_t \in S^\lambda$  tal que  $\rho(e_t) \neq 0$ , como  $M^\lambda = S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$ , pues estamos en característica cero, definiendo  $\rho((S^\lambda)^\perp) = 0$  tenemos que  $\rho$  se extiende a  $(S^\lambda)^\perp$  por lo tanto  $\rho \in \text{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$ , por como lo hemos definido en  $(S^\lambda)^\perp$  a este elemento lo podemos pensar en  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  y además

$$\begin{aligned} 0 \neq \rho(e_t) &= \rho(C_t^- \{t\}) = C_t^- \rho(\{t\}) = C_t^- \left( \sum_{i=1}^k c_i \{t_i\} \right) \\ &= c_1 C_t^- \{t_1\} + \dots + c_n C_t^- \{t_n\} \end{aligned}$$

por lo tanto, existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $c_i C_t^- \{t_i\} \neq 0$  con  $\{t_i\} \in \{T\}_\mu$  por el lema 3.25 inciso 1,  $\lambda \supseteq \mu$ .

Si  $\lambda = \mu$  entonces por el lema 3.25 inciso 2, tenemos que  $\rho(e_t) = k e_t$  para alguna  $k \in \mathbb{C}$ , por lo tanto

$$\rho(e_{\pi t}) = \rho(\pi e_t) = \pi \rho(e_t) = \pi k e_t = k \pi e_t = k e_{\pi t} \quad \forall \pi \in S_n.$$

Así  $\rho(v) = k v \quad \forall v \in M^\lambda$ . ■

**Teorema 3.30** *Sea  $\lambda \vdash n$ , si  $S^\lambda \cong S^\mu$  entonces  $\lambda = \mu$ .*

**Demostración.** Si  $S^\lambda \cong S^\mu$  entonces existe  $\rho \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  no nulo, pues  $S^\mu \subseteq M^\mu$ , por la proposición anterior  $\lambda \supseteq \mu$ . Análogamente, si  $S^\mu \cong S^\lambda$  existe  $\rho' \in \text{Hom}(S^\mu, M^\lambda)$  y por la proposición anterior  $\mu \supseteq \lambda$ , así finalmente por la proposición 2.33 obtenemos  $\lambda = \mu$ . ■

**Corolario 3.31** *El módulo permutación se descompone como  $M^\mu = \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$  donde  $m_{\mu\mu} = 1$ .*

**Demostración.** Si  $S^\lambda$  aparece en  $M^\lambda$  con algún coeficiente distinto de cero entonces  $\lambda \supseteq \mu$ . Si  $\lambda = \mu$  entonces aplicando la proposición 1.62 obtenemos lo siguiente

$$m_{\mu\mu} = \dim \text{Hom}(S^\mu, M^\mu) = 1.$$

■

### 3.2 Una base para $S^\lambda$

Con el ejemplo 3.23 pudimos observar que es necesario eliminar cierto tipo de tablas para obtener una base, de hecho si uno observa con detenimiento los ejemplos puede notar que los conjuntos están formados por lo que llamamos tabla estándar, los cuales definiremos a continuación, esto no es una coincidencia, una base para  $S^\lambda$  está dada por el conjunto de politablas asociadas a una tabla estándar. Probaremos este teorema por partes, primero definiremos un orden para los tabloides con miras a probar que dicho conjunto es linealmente independiente y para ver que genera necesitaremos ver que todo politabloide se puede expresar en términos de politabloides estándar y para ello usaremos los llamados elementos de Garnir de los cuales nos preocuparemos en su momento.

**Definición 3.32** Diremos que  $t \in T_\lambda$  es una tabla estándar si los elementos que forman los renglones y las columnas están ordenados de modo creciente. Los tabloides y politabloides que surgan de  $t$  serán llamados tabloide y politabloide asociado a la tabla estándar  $t$ .

**Ejemplo 3.33** De acuerdo con esta definición se tiene que  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array}$  no es estándar, mientras que  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}$  sí lo es.

Ahora generalizaremos el concepto de partición y su orden para dar un orden en los tabloides.

**Definición 3.34** Una composición de  $n$  es una sucesión ordenada de enteros no negativos  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  tal que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$ . A los  $\lambda_i$ 's se les llamará las partes de la composición.

**Definición 3.35** Dadas  $\lambda$  y  $\mu$  composiciones de  $n$ , diremos que  $\lambda \succeq \mu$  si  $\sum \lambda_i \geq \sum \mu_i$  para toda  $i$ .

**Definición 3.36** Sean  $t \in T_\lambda$  y  $\{t\}$  un tabloide asociado, para cada  $i$  con  $1 \leq i \leq n$ , definimos  $\{t^i\}$  igual al tabloide formado con los elementos menores o iguales a  $i$  en  $\{t\}$ . En el caso en que  $\{t^i\}$  sea tal que no exista un elemento menor o igual a  $i$  en algún renglón se asignará un cero para indicarlo.

**Ejemplo 3.37** Consideremos  $\{t\} = \overline{\overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}}}$ , entonces todos los tabloides que se forman son

$$\begin{aligned} \{t^1\} &= \overline{\overline{\overline{0}}} & \{t^2\} &= \overline{\overline{2}} \\ \{t^3\} &= \overline{\overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}}} & \{t^4\} &= \overline{\overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}}} \\ \{t^5\} &= \overline{\overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}}} & \{t^6\} &= \overline{\overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}}} \end{aligned}$$

Antes dada una partición obteníamos una tabla asociada y por ende el tabloide asociado, para definir el orden en los tabloides utilizaremos el proceso inverso, es decir, a partir del tabloide rescataremos la composición.

**Definición 3.38** Sea  $t \in T_\lambda$  y  $\{t\}$  un tabloide, al conjunto de composiciones que se pueden formar para  $\{t\}$  le llamaremos la lista de composiciones y a esta sucesión la denotaremos por  $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k)$  donde cada  $\lambda^i$  corresponde a la composición que describe la forma del tabloide  $\{t\}$ .

**Ejemplo 3.39** Retomando el ejemplo 3.37 tendríamos que las composiciones resultan

$$\lambda^1 = (0, 1), \quad \lambda^2 = (1, 1)$$

$$\lambda^3 = (1, 2), \quad \lambda^4 = (2, 2)$$

$$\lambda^5 = (2, 3), \quad \lambda^6 = (3, 3)$$

y por tanto la lista de composiciones sería  $\Lambda = ((0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3))$ .

**Definición 3.40** Sean  $\{t_1\}$  y  $\{t_2\}$  tabloides con listas de composiciones  $\Lambda$  y  $M$  respectivamente. Diremos que  $\Lambda$  domina a  $M$  ( $\Lambda \blacktriangleright M$ ) si  $\lambda^i \supseteq \mu^i$  para toda  $i$ .

**Ejemplo 3.41** Sean  $\{t_1\}$  y  $\{t_2\}$  con composiciones  $\Lambda$  y  $M$  respectivamente, entonces

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda^1 = (1) \quad \mu^1 = (1)$$

$$\lambda^2 = (1, 1) \quad \mu^2 = (1, 1)$$

$$\lambda^3 = (1, 2) \quad \mu^3 = (1, 2)$$

$$\lambda^4 = (2, 2) \quad \mu^4 = (1, 2, 1)$$

$$\lambda^5 = (3, 2) \quad \mu^5 = (2, 2, 1)$$

entonces  $\lambda^i = \mu^i$  para  $1 \leq i \leq 3$  y es posible observar que  $\lambda^4 \geq \mu^4$  y  $\lambda^5 \geq \mu^5$ , por lo tanto  $\Lambda \supseteq M$ .

**Lema 3.42 (De dominancia para Tabloides por renglón)** Si  $k < l$  y  $k$  aparece en algún renglón inferior al renglón en el que aparece  $l$  en el tabloide  $\{t\}$ , entonces

$$\{t\} \trianglelefteq (k \ l)\{t\}.$$

**Demostración.** Supongamos que  $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^s)$  y  $M = (\mu^1, \dots, \mu^m)$  son las listas de composiciones de  $\{t\}$  y  $(k \ l)\{t\}$  respectivamente, con  $k$  en el renglón  $r$  y  $l$  en el renglón  $q$ . Para  $i < k$  y para  $l \leq i$  se tiene que las composiciones son iguales pues ningún elemento ha sido permutado por tanto  $\lambda^i$  es igual a  $\mu^i$ .

Ahora si  $k \leq i < l$  tenemos que en  $\lambda^i$  la entrada  $k$  está en  $r$  mientras que en  $\mu^i$  se encuentra en  $q$ , de modo que  $\mu^i$  es igual a  $\lambda^i$  con la parte de  $q$  aumentada en 1 y la parte  $r$  disminuida en 1, como  $k$  se encuentra en algún renglón inferior al de  $l$  en  $\{t\}$ , esto significa que  $r < q$  de modo que  $\lambda^i \trianglelefteq \mu^i$  por lo tanto  $\{t\} \trianglelefteq (k \ l)\{t\}$ . ■

**Corolario 3.43** Sean  $t \in T_\lambda$  – estándar y  $\{t_i\}$  es sumando de  $e_t$  entonces

$$\{t\} \supseteq \{t_i\}.$$

**Demostración.** Sea  $\pi \in C_t$  tal que  $t_i = \pi t$ , aplicamos inducción sobre el número de inversiones, de  $t_i$  es decir, la cantidad de pares tales que  $k < l$  están en la misma columna de  $t_i$  con  $k$  en algún renglón inferior al de  $l$ . Por el lema 3.42 se tiene que

$$\{t_i\} \preceq (k\ l)\{t_i\},$$

sin embargo notemos que  $(k\ l)t_i$  tiene menor cantidad de inversiones que  $t_i$ , como  $k$  y  $l$  se encuentran en la misma columna podemos aplicar la hipótesis de inducción, pues  $(k\ l)\{t_i\}$  también es sumando de  $e_t$  y de este modo obtenemos  $(k\ l)\{t_i\} \preceq \{t\}$  y por lo tanto  $\{t_i\} \preceq \{t\}$ . ■

**Proposición 3.44** Dado el conjunto  $\{T\}_\lambda$  siempre podemos encontrar un  $\{t\}$  tal que sea máximo.

**Demostración.** Sea  $\{t_i\} \in \{T\}_\lambda$ , para empezar podemos acomodar los renglones de modo creciente. Ahora vamos a acomodar las columnas usando el lema 3.42, si en alguna columna hay elementos tales que  $k < l$  y  $k$  se encuentra en algún renglón inferior al renglón donde se encuentra  $l$ , por el lema 3.42 tenemos que  $\{t_i\} \preceq (k\ l)\{t_i\}$ , repitiendo este proceso podemos llegar a un tabloide estándar  $\{t\}$  y como  $t_i = \pi t$  para alguna  $\pi \in C_t$ ,  $\{t_i\}$  es sumando de  $e_t$ , por el corolario 3.43 tenemos que  $\{t\} \supseteq \{t_i\}$ . ■

**Proposición 3.45** Sean  $v_1, v_2, \dots, v_m \in M^\lambda$ . Supongamos que para cada  $i$  existe un  $\{t_i\}$  – tabloide por renglón en la descomposición de  $v_i$  como suma de tabloides por renglón tal que

1.  $\{t_i\}$  es máximo en  $v_i$ ,
2. Todos los  $\{t_i\}$ 's son distintos.

Entonces  $v_1, v_2, \dots, v_m$  es una lista linealmente independiente.

**Demostración.** Tenemos  $\{t_1\}, \dots, \{t_m\}$  tabloides por renglón que cumplen las hipótesis, cada uno asociado al respectivo  $v_i$ . Sin pérdida de generalidad podemos reetiquetar y suponer que  $\{t_1\}$  es el máximo de todos, entonces podemos asegurar que  $\{t_1\}$  aparece sólo en los sumandos de  $v_1$ , pues de no ser así existiría un índice  $i > 1$  tal que  $\{t_1\}$  es sumando de  $v_i$ , pero esto implicaría que  $\{t_i\} \supseteq \{t_1\}$  lo que contradice nuestra elección de  $\{t_1\}$ .

Ahora consideremos

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0 \text{ con } c_i \in \mathbb{C} \ \forall i$$

como  $\{t_1\}$  sólo aparece en  $v_1$  el único modo de anularlo es haciendo  $c_1 = 0$ , el siguiente paso es retirar a  $v_1$  del conjunto y ahora consideramos

$$c_2 v_2 + \dots + c_m v_m = 0$$

y escogemos a  $\{t_2\}$  como el elemento máximo y repitiendo el proceso es posible concluir que  $c_i = 0$  para toda  $i$ . ■

Con esto ya podemos probar la primera parte del teorema principal de esta sección, es decir que el conjunto  $\{e_t \mid t \in T_\lambda - \text{estándar}\}$  es linealmente independiente sin mucho trabajo por hacer pues en realidad resulta un corolario después de la proposición 3.45 y del Lema de dominancia para tabloides (ver lema 3.42).

**Proposición 3.46** *El conjunto  $\{e_t \mid t \in T_\lambda - \text{estándar}\}$  es linealmente independiente.*

**Demostración.** Consideremos conjunto de  $\{e_t \mid t \in T_\lambda - \text{estándar}\}$ , por el corolario 3.43  $\{t\}$  es máximo de todos los tabloides que aparecen en la descomposición de  $e_t$  como suma de tabloides y todos estos tabloides estándar son distintos pues surgen de distintas tablas estándar, por la proposición 3.45 tenemos que el conjunto  $\{e_t \mid t \in T_\lambda - \text{estándar}\}$  es linealmente independiente. ■

**Definición 3.47** *Diremos que  $a < b$  es un descenso en una tabla  $t$  si  $a, b$  están en el mismo renglón y  $b$  aparece antes que  $a$ . Diremos que  $c < d$  es un ascenso de una tabla  $t$  si están en la misma columna y  $d$  aparece antes que  $c$ .*

El objetivo de esta sección es probar que el conjunto  $\{e_t \mid t \in T_\lambda - \text{estándar}\}$  genera a  $S^\lambda$  y es linealmente independiente, de lo cual ya se ha probado la independiencia lineal. Ahora necesitamos politabloides asociados a tablas estándar, sin embargo, aunque dada una tabla podemos acomodar sus columnas de modo creciente sin afectar salvo por signo al politabloide, no podemos hacer algo similar respecto a los renglones; el algoritmo que a continuación se presenta soluciona ese problema, pues nos permite asociar a una tabla arbitraria un politabloide estándar.

Los elementos de Garnir se definen a partir de un proceso llamado **algoritmo de enderezamiento**, la idea del funcionamiento es sencilla: tomamos  $t \in T_\lambda$  arbitraria, podemos acomodar sus columnas de modo creciente pues el politabloide asociado sólo difiere por signo, si haciendo esto los renglones ya quedan ordenados de modo creciente entonces ya tenemos una tabla estándar y hemos terminado, en este caso no usamos el algoritmo pues ya logramos nuestro objetivo.

Si no, entonces hay un renglón que tiene un descenso (en caso de que haya más de uno consideraremos el que se encuentre más arriba). Digamos que dicho descenso se encuentra en el renglón  $j$  –ésimo, vamos a considerar los elementos involucrados en el descenso, sean  $a, b$  estos elementos con  $b < a$ , si nos fijamos en ese renglón  $a$  aparece primero, entonces vamos a considerar  $A = \{a, a_1, \dots, a_m\}$  y  $B = \{b_0, b_1, \dots, b_k, b\}$  con  $a_1, \dots, a_m$  los elementos que aparecen abajo de  $a$  y en la misma columna y con  $b_0, b_1, \dots, b_k$  los elementos que aparecen en la misma columna que  $b$  y encima de  $b$ .

**Definición 3.48** *El elemento Garnir asociado al par  $a, b$  se define como la suma de las permutaciones de  $A \cup B$  tales que dejan a la tabla sin ascensos en  $A \cup B$ . Esto lo formalizamos como*

$$G_{A,B} = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi)\pi.$$

**Observación 3.49** Aunque los elementos de Garnir que se usarán se construyen a partir de un descenso  $a < b$ , las permutaciones utilizadas para construirlo son las que dejan a la tabla sin ascensos.

Veamos algunos ejemplos de cómo funciona el algoritmo de enderezamiento.

**Ejemplo 3.50** Sea  $\lambda = (2, 1)$ ,

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow e_t = \frac{\overline{2 \ 1}}{\underline{3}} - \frac{\overline{3 \ 1}}{\underline{2}}$$

entonces  $A = \{2, 3\}$  y  $B = \{1\}$ , pues tenemos que  $(1)$ ,  $(2 \ 1)$  y  $(2 \ 3 \ 1)$  dejan a la tabla sin ascensos ya que

$$t_2 = (2 \ 1) \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad t_3 = (3 \ 2 \ 1) \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

y los politablos asociados son:

$$\begin{aligned} e_{t_2} &= e_{(1 \ 2)t} = (1 \ 2)e_t \\ &= \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}} + \frac{\overline{3 \ 2}}{\underline{1}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e_{t_3} &= e_{(3 \ 2 \ 1)t} = (3 \ 2 \ 1)e_t \\ &= \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}} - \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}} \end{aligned}$$

por tanto  $G_{A,B} = (1) - (2 \ 1) + (3 \ 2 \ 1)$ , notemos que

$$(G_{A,B})(e_t) = (1)e_t - (2 \ 1)e_t + (3 \ 2 \ 1)e_t = 0$$

$$G_{A,B}e_t = \frac{\overline{2 \ 1}}{\underline{3}} - \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}} - \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}} + \frac{\overline{3 \ 2}}{\underline{1}} + \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}} - \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}} = 0$$

por lo tanto  $e_t = -e_{t_2} + e_{t_3}$  i.e. logramos expresar a  $e_t$  como combinación lineal de politablos estándar.

**Ejemplo 3.51** Sea

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow e_t = \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{4 \ 3}} - \frac{\overline{4 \ 2}}{\underline{1 \ 3}} - \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{4 \ 2}} + \frac{\overline{4 \ 3}}{\underline{1 \ 2}}$$

el descenso se encuentra en el segundo renglón, por tanto  $A = \{4\}$  y  $B = \{2, 3\}$ , observamos

$$t_2 = (3 \ 4)t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad t_3 = (2 \ 3 \ 4)t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

cuyos politabloides asociados son

$$e_{t_2} = \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}} + \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}}$$

$$e_{t_3} = \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}} + \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}}$$

entonces las permutaciones involucradas en los elementos de Garnir son  $(1)$ ,  $(3\ 4)$ ,  $(2\ 3\ 4)$ , por tanto

$$G_{A,B} = (1) - (3\ 4) + (2\ 3\ 4)$$

además por ser una cantidad pequeña de permutaciones involucradas es posible visualizar que  $G_{A,B}e_t = 0$ , este hecho se demostrará más adelante, mientras tanto verifiquémoslo en nuestro ejemplo.

$$G_{A,B}e_t = \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array}} + \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}}$$

$$- \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}} + \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} + \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}}$$

$$+ \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}} + \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}}$$

$$= e_t - e_{t_2} + e_{t_3} = 0$$

Observemos que la última expresión nos dice que  $e_t = e_{t_2} - e_{t_3}$ .

Pensemos todo el proceso en términos de las tablas que representan, es decir en lugar de trabajar con los politabloides pensemos en la tabla a la cual están asociados, aunque ya hemos realizado las cuentas pensemos por un momento que no, partimos entonces de la tabla

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array}$$

al considerar las permutaciones que dejan a la tabla sin ascensos se tendría que

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Con este proceso podemos observar que bastan los politabloides asociados a tablas estándar, además en el ejemplo es posible ver que el proceso se complica si  $n$  crece y es posible que las tablas obtenidas aun tengan algún descenso, usaremos el abuso de notación del ejemplo anterior de considerar la tabla asociada en lugar de colocar todos los politabloides para presentar un ejemplo con  $n$  más grande, en el cual el proceso sea más largo a fin de esclarecer cómo proceder a quitar los descensos que surgan y poder visualizar el politabloide expresado en términos de politabloides asociados a tablas estándar.

**Ejemplo 3.52** Sea

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

el descenso está en el segundo renglón por tanto consideramos  $A = \{5, 6\}$  y  $B = \{2, 4\}$ , las permutaciones que mantienen a la tabla sin ascensos son

$$(1), (4\ 5), (2\ 4\ 5), (4\ 6\ 5), (2\ 4\ 6\ 5), (2\ 5)(4\ 6),$$

entonces

$$G_{A,B} = (1) - (4\ 5) + (2\ 4\ 5) + (4\ 6\ 5) - (2\ 4\ 6\ 5) + (2\ 5)(4\ 6)$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad (3.4)$$

Entonces eliminamos el descenso en el segundo renglón, pero la expresión queda en tablas que no son aún todas estándar, por tanto repetimos el proceso ahora en la segunda, cuarta y quinta tabla.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

Sustituyendo por la tabla correspondiente en la expresión 3.4 toda la información se tendría que  $t$  sí queda expresada en términos de tablas estándar y por lo tanto los politabloides provienen de tablas estándar.

Probemos ahora el resultado observado en los ejemplos.

**Proposición 3.53** Sean  $t \in T_\lambda$ ,  $\lambda \vdash n$  y  $G_{A,B}$  un elemento Garnir asociado, entonces

$$G_{A,B}e_t = 0.$$

**Demostración.** Consideremos  $\sum_{\sigma \in S_{A \cup B}} \text{sgn}(\sigma)\sigma\{t\}$ , donde  $S_{A \cup B}$  denota las permutaciones de los elementos en  $A$  y  $B$  que dejan a la tabla sin ascensos en  $A \cup B$ . Para toda  $\sigma \in S_n$ , los elementos involucrados en el descenso, digamos  $a, b$ , se tiene que  $(a\ b)$  es una transposición tal que  $\sigma\{t\} = (a\ b)\sigma\{t\}$ .

Por un lado se tiene que

$$\text{sgn}((a\ b)\sigma)(a\ b)\sigma\{t\} = -\text{sgn}(\sigma)(a\ b)\sigma\{t\}$$

y por otro lado se tiene que

$$\text{sgn}(\sigma)\sigma\{t\} = \text{sgn}(\sigma)(a\ b)\sigma\{t\},$$

al ser ambos sumandos de  $G_{A,B}$  éstos se anulan.

Ahora consideremos la igualdad

$$\sum_{\sigma \in S_{A \cup B}} \text{sgn}(\sigma)\sigma\{t\} = \sum_{\pi} \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\pi\sigma)\pi\sigma\{t\},$$

tomando  $\pi$  tal que las columnas quedan ordenadas de modo descendente obtenemos nuevamente a  $(G_{A,B})e_t$ , por tanto

$$\sum_{\pi} \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\pi\sigma)\pi\sigma\{t\} = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi)\pi \left( \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma)\sigma\{t\} \right) = (G_{A,B})e_t = 0.$$

**Corolario 3.54** *Dada  $t \in T_\lambda$ , para todo elemento de Garnir asociado a un descenso siempre se obtiene la expresión*

$$e_t = - \sum_{\pi \neq \varepsilon} \text{sgn}(\pi)e_{\pi t}.$$

donde la suma anterior se realiza considerando todas las  $\pi$  tales que dejan a la tabla sin ascensos.

■

**Demostración.** Este resultado se da por la proposición 3.53, pues basta recordar que en la expresión

$$\left( \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi)\pi \right) e_t = 0$$

las permutaciones que estamos considerando en la suma son aquellas que dejan a la tabla sin ascensos y una de ellas es la identidad, entonces

$$\left( \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi)\pi \right) e_t = \left( (1) + \sum_{\pi \neq \varepsilon} \text{sgn}(\pi)\pi \right) e_t = 0$$

por lo tanto

$$e_t = - \sum_{\pi \neq \varepsilon} \text{sgn}(\pi)e_{\pi t}.$$

■

Hasta este momento hemos usado la relación de equivalencia por renglones casi todo el tiempo y dejamos de lado la equivalencia por columnas, para probar que el conjunto de politabloides asociados a una tabla estándar genera es necesario darle orden a los tabloides por columna, que será análogo al usado en tabloides por renglón y el Lema de Dominancia seguirá siendo válido con sus respectivos cambios, veamos cuáles son esos cambios.

**Definición 3.55** Sean  $t \in T_\lambda$  y  $[t]$  un tabloide asociado, definimos  $[t^i]$  como el tabloide formado por los elementos menores ó iguales a  $i$  en  $[t]$ . En caso de que en  $[t^i]$  sea tal que no exista un elemento menor en alguna columna se asignará un cero para indicarlo.

**Ejemplo 3.56** Sea  $s = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$  entonces  $[s] = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right|$  entonces los tabloides que podemos formar son:

$$s^1 = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \quad s^2 = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right|$$

$$s^3 = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right| \quad s^4 = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right|$$

**Definición 3.57** Sea  $t \in T_\lambda$  y  $[t]$  un tabloide asociado, al conjunto de composiciones que se pueden formar para  $[t]$  lo llamaremos la lista de composiciones y a cada sucesión la denotaremos por  $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k)$  donde cada  $\lambda^i$  corresponde a la composición que describe la forma del tabloide  $[t^i]$ .

**Ejemplo 3.58** Retomando el ejemplo 3.56

$$\mu^1 = (1, 0) \quad \mu^2 = (1, 1)$$

$$\mu^3 = (2, 1) \quad \mu^4 = (2, 2)$$

**Definición 3.59** Sean  $[t_1]$  y  $[t_2]$  tabloides con composiciones  $\Lambda$  y  $M$  respectivamente, diremos que  $\Lambda$  domina a  $M$  ( $\Lambda \blacktriangleright M$ ) si  $\lambda^i \geq \mu^i$  para toda  $i$ .

**Lema 3.60 (De dominancia para columnas)** Si  $k < l$  y  $k$  aparece en alguna columna a la derecha de la columna donde aparece  $l$ , entonces

$$[t] \trianglelefteq (k \ l)[t].$$

**Demostración.** Esta prueba es análoga a la realizada para el lema de dominancia por renglones. Sean  $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^s)$  y  $M = (\mu^1, \dots, \mu^n)$  composiciones asociadas a  $[t]$  y a  $(k \ l)[t]$ , con  $k$  en la columna  $r$  y  $l$  en la columna  $q$ . Para  $i < k$  y para  $l \leq i$  se tiene que las composiciones son iguales pues ningún elemento ha sido permutado por tanto  $\lambda^i$  es igual a  $\mu^i$ . Ahora si  $k \leq i < l$  tenemos que en  $\lambda^i$  la entrada  $k$  está en  $r$  mientras que en  $\mu^i$  se encuentra en  $q$ , de modo que  $\mu^i$  es igual a  $\lambda^i$  con la parte de  $q$  aumentada en 1 y la parte de  $r$  disminuida en 1, como  $k$  se encuentra en alguna columna a la derecha de la columna en donde se encuentra  $l$  en  $[t]$ , esto significa que  $r < q$ , de modo que  $\lambda^i \trianglelefteq \mu^i$  por lo tanto  $[t] \trianglelefteq (k \ l)[t]$  ■

**Teorema 3.61** El conjunto

$$\{e_t \mid t \in T_\lambda - \text{estándar}\} \tag{3.5}$$

genera a  $S^\lambda$ .

**Demostración.** Realizaremos esta prueba por inducción sobre las clases de equivalencia. Primero recordemos que por el Lema del Signo (ver 3.17) podemos tomar una tabla con columnas crecientes, pues cualesquiera dos politabloides que provienen de tabloides en la misma clase de equivalencia por columnas son múltiplos escalares uno del otro, de modo en lugar de trabajar con todo el conjunto de politabloides, vamos a trabajar con un conjunto que contiene a un representante de cada clase de equivalencia por columna.

El paso base consiste en considerar una tabla  $t_0$ , que será obtenida de llenar la primera columna de arriba hacia abajo con los valores de 1 hasta  $n$ , luego tomaremos la segunda columna y llenaremos comenzando con  $n + 1$ , de este modo obtenemos una tabla estándar y es el elemento máximo con el orden de dominancia.

Nuestra hipótesis de inducción será suponer que dada cualquier otra tabla  $t_1$  tal que  $[t_1] \succeq [t]$  está en el generado, demostremos que  $[t]$  también estará en el generado. Si  $t$  es estándar no hay algo por hacer, pues  $t$  ya está en el generado. Si no, entonces hay un descenso. Digamos sin pérdida de generalidad que las columnas  $j$  y la  $j + 1 - \text{ésima}$  columna son las involucradas en el descenso de modo que en al menos un lugar de la tabla se presenta la siguiente situación

	$b_1$
	$\vdots$
$a_p$	$b_p$
$\vdots$	
$a_r$	

con  $b_p < a_p$ .

Ahora consideramos los conjuntos  $A = \{a_p, \dots, a_r\}$  y  $B = \{b_1, \dots, b_p\}$ , el elemento de Garnir asociado resulta  $G_{A,B} = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi)\pi$ , de modo que por el corolario 3.54 tenemos la expresión

$$e_t = - \sum_{\pi \neq \varepsilon} \text{sgn}(\pi)e_{\pi t} \tag{3.6}$$

Sin embargo como  $b_1 < \dots < b_p < a_p < \dots < a_r$ , pues estamos considerando tablas con columnas ordenadas de modo decreciente, esto implica, por el Lema de Dominancia por Columnas (ver lema 3.60) que para toda  $\pi \neq \varepsilon$  se tiene  $[\pi t] \succeq [t]$  por lo tanto los tanto los términos de la derecha en la igualdad 3.6 están en el generado y por lo tanto  $e_t$  está en el generado. ■

En resumen, lo que hemos logrado hasta este punto es, si denotamos por  $f^\lambda$  a la cantidad de  $\lambda$  tablas estándar, obtenemos el siguiente resultado

**Teorema 3.62** *Sea  $\lambda$  una partición, entonces:*

1.  $\{e_t \mid t \in T_\lambda - \text{estándar}\}$  es una base para  $S^\lambda$ ,
2.  $\dim(S^\lambda) = f^\lambda$  y,
3.  $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$ .

**Demostración.**

1. Este resultado se obtiene por el teorema 3.61 y la proposición 3.46.
2. Si  $f^\lambda$  es la cantidad de  $\lambda$  tablas estándar, entonces por la parte uno de este teorema  $\dim(S^\lambda) = f^\lambda$ .
3. Aplicando la proposición 1.78 de la sección 1.4 a nuestra situación tenemos que cada representación irreducible de  $S_n$  aparece en  $\mathbb{C}[S_n]$  con multiplicidad igual a su dimensión, de este modo se tiene que  $\mathbb{C}[S_n] = \bigoplus_{\lambda \vdash n} f^\lambda S^\lambda$  y tomando dimensión de ambos lados obtenemos

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \dim(S^\lambda) = |S_n| = n!$$

■

### 3.3 La Representación Natural de Young

Las matrices para el módulo  $S^\lambda$  en la base estándar forman lo que se conoce como Representación Natural de Young. En esta sección el objetivo es mostrar cómo se obtienen estos arreglos. Para lograr esto notemos que basta con obtener las matrices de representación asociadas a las transposiciones de la forma  $(k \ k + 1)$  para  $k = 1, \dots, n - 1$  ya que éstas generan al grupo simétrico, por tanto queremos obtener la expresión de  $e_t$  al aplicarle la transposición  $(k \ k + 1)$ , esto da pie a tres casos:

1. Si  $k$  y  $k + 1$  están en la misma columna, entonces  $(k \ k + 1) \in C_t$  entonces

$$(k \ k + 1)e_t = -e_t$$

2. Si  $k$  y  $k + 1$  están en el mismo renglón deben encontrarse uno junto al otro entonces la tabla  $(k \ k + 1)t$  tiene un descenso en el renglón en el que se encuentren  $k$  y  $k + 1$ , por tanto debemos usar los elementos Garnir para escribir al politabloide asociado en términos de politabloides estándar, de ese modo si hay  $m$  tablas estándar  $t_1, \dots, t_m$  obtendremos

$$(k \ k + 1)e_t = e_{t_i} \pm e_{t_1} \pm \dots \pm e_{t_{i-1}} \pm e_{t_{i+1}} \pm e_{t_m}.$$

3. Si  $k$  y  $k + 1$  están en una columna y en un renglón distinto, entonces la tabla  $t' = (k \ k + 1)t$  es estándar y así

$$e_{t'} = e_{(k \ k + 1)t} = (k \ k + 1)e_t.$$

Esto sucede ya que permutar estos dos elementos en la tabla no produce ascensos ni descensos, las entradas que se encuentran a la izquierda y encima de  $k + 1$  son menores que  $k + 1$  y ninguna de ellas es  $k$  por lo tanto son menos que  $k$ , de modo similar, todas las entradas que se encuentran a la derecha y por debajo de  $k$  son mayores que  $k$  y  $k + 1$  no se encuentra entre ellos, por lo tanto son mayores que  $k + 1$  de modo que la tabla  $t'$  es estándar.

Por comodidad y para evitar confusiones consideraremos la base del módulo Specht ordenada, es decir  $\{e_{t_1}, \dots, e_{t_k}\}$  donde  $[t_i] \supseteq [t_j]$  si  $i < j$ , de modo que la primera columna será aquella asociada a  $(k \ k + 1)e_{t_1}$  y así sucesivamente.

**Ejemplo 3.63** *Trabajemos con  $S_3$ , tenemos las particiones  $\lambda = (1^3)$ ,  $\lambda = (2, 1)$  y  $\lambda = (3)$ . Las transposiciones que debemos considerar son  $(1 \ 2)$  y  $(2 \ 3)$ . Empecemos con la partición  $\lambda = (1^3)$ , en este caso el módulo specht  $S^{(1^3)}$  tiene dimensión uno pues la única tabla estándar que se obtiene es*

$$t_1 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}.$$

*Por tanto surgen tres matrices, como el módulo Specht asociado tiene dimensión uno entonces las matrices son de  $1 \times 1$  por tanto obtenemos*

$$X(\varepsilon) = [1].$$

*Evaluando en la permutación  $(1 \ 2)$  tenemos que*

$$X((1 \ 2)) = [-1]$$

*dado que  $(1 \ 2)e_{t_1} = -e_{t_1}$  y resulta igual la evaluación en la permutación  $(2 \ 3)$  ya que  $(2 \ 3)e_{t_1} = -e_{t_1}$  de modo que*

$$X((2 \ 3)) = [-1].$$

*Continuemos con la partición  $\lambda = (2, 1)$ , en este caso tenemos los llenados*

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

*de modo que la dimensión del módulo Specht asociado es dos, por lo que las tres matrices asociadas son de dimensión  $2 \times 2$ , por el hecho de ser representación se tiene que  $X(\varepsilon) = I_2$ . Calculemos ahora la matriz que se obtiene para la permutación  $(1 \ 2)$  :*

$$(1 \ 2)t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow (1 \ 2)e_{t_1} = -e_{t_1}$$

*esto nos proporciona la primer columna de la matriz de representación, así*

$$X((1 \ 2)) = \begin{bmatrix} -1 & ? \\ 0 & ? \end{bmatrix}.$$

*Por otra parte para  $t_2$  tenemos que se obtiene la tabla  $(1 \ 2)t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ , la cual tiene un descenso en el primer renglón, lo que nos lleva al segundo caso, por tanto debemos usar los elementos Garnir, consideremos  $A = \{2, 3\}$  y  $B = \{1\}$ , las permutaciones que actúan sobre  $(1 \ 2)t_2$  dejando las columnas crecientes son  $(2 \ 1)$  y  $(3 \ 2 \ 1)$  por lo tanto el elemento Garnir es  $G_{A,B} = (1) - (2 \ 1) + (3 \ 2 \ 1)$ , por la proposición 3.53 se tiene que*

$$(G_{A,B})(e_{(1 \ 2)t_2}) = (1)e_{(1 \ 2)t_2} - (2 \ 1)e_{(1 \ 2)t_2} + (3 \ 2 \ 1)e_{(1 \ 2)t_2} = 0$$

de modo que

$$(1\ 2)e_{t_2} = e_{t_2} - (3\ 2\ 1)e_{(1\ 2)t_2},$$

además observemos que

$$(321)e_{t_2} = (321) \left[ \frac{2\ 1}{3} - \frac{3\ 1}{2} \right] = \frac{1\ 3}{2} - \frac{2\ 3}{1}$$

y

$$e_{t_1} = \frac{1\ 3}{2} - \frac{2\ 3}{1},$$

entonces se obtiene la expresión

$$(1\ 2)e_{t_2} = e_{t_2} - (3\ 2\ 1)e_{(1\ 2)t_2} = e_{t_2} - e_{t_1}$$

como habíamos comentado anteriormente, por lo que podemos completar la matriz de representación

$$X((1\ 2)) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtener la matriz asociada a  $(2\ 3)$  es más sencillo ya que 2 y 3 no están en el mismo renglón ni en la misma columna, basta observar que  $(2\ 3)t_1 = t_2$  y  $(2\ 3)t_2 = t_1$  por tanto

$$X((2\ 3)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por último debemos considerar la partición  $\lambda = (3)$ , al igual que en el primer caso sólo tenemos una tabla estándar dada por  $t_1 = \boxed{1\ 2\ 3}$  y

$$X((1\ 2)) = X((2\ 3)) = X(\varepsilon) = [1]$$

ya que  $(2\ 3)e_{t_1} = e_{t_1}$  y  $(1\ 2)e_{t_1} = e_{t_1}$ .

**Ejemplo 3.64** Construyamos algunas matrices de representación para  $S_5$ , para esto debemos considerar  $\lambda = (1^5)$ ,  $\lambda = (3, 2)$ ,  $\lambda = (3, 1, 1)$ ,  $\lambda = (2, 1^3)$ ,  $\lambda = (4, 1)$ ,  $\lambda = (2^2, 1)$  y las transposiciones  $(1\ 2)$ ,  $(2\ 3)$ ,  $(3\ 4)$  y  $(4\ 5)$ . Realizaremos sólo algunos casos.

Para  $\lambda = (1^5)$  existe sólo una tabla estándar, por lo tanto

$$X(\varepsilon) = [1]$$

y como todas las elementos están en una misma columna se tiene que

$$X((1\ 2)) = X((2\ 3)) = X((3\ 4)) = X((4\ 5)) = [-1].$$

Para  $\lambda = (3, 2)$  hay cinco tablas estándar

$$t_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{bmatrix}, t_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & \end{bmatrix}, t_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & \end{bmatrix}, t_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{bmatrix}, t_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{bmatrix}$$

por lo que la matriz de representación asociada a  $X((1\ 2))$  tendrá tamaño  $5 \times 5$ , debemos hacer cálculos para saber la asignación en cada una de las columnas.

Para obtener la primera y segunda columna debemos obtener  $(1\ 2)e_{t_1}$  y  $(1\ 2)e_{t_2}$ , en ambos casos resulta ser negativo pues  $(1\ 2) \in C_{t_1}$  y  $(1\ 2) \in C_{t_2}$ , por lo tanto hasta el momento sabemos que la matriz de representación se ve como:

$$X((1\ 2)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & -1 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Para obtener la tercer columna debemos usar los elementos de Garnir pues

$$(12)t_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}.$$

Los conjuntos que debemos considerar son  $A = \{2, 3\}$  y  $B = \{1\}$ , así

$$G_{A,B} = (1) - (12) + (213),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} (1)e_{(1\ 2)t_3} - (1\ 2)e_{(1\ 2)t_3} + (2\ 1\ 3)e_{(1\ 2)t_3} &= 0 \\ e_{t_3} - (2\ 1\ 3)e_{(1\ 2)t_3} &= (1\ 2)e_{t_3} \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} (2\ 1\ 3)e_{(1\ 2)t_3} &= (2\ 1\ 3) \left[ \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}} \right] \\ &= \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}} = e_{t_1} \end{aligned}$$

Por lo que

$$(1\ 2)e_{t_3} = e_{t_3} - e_{t_1}$$

de modo que obtenemos la asignación para la tercera columna

$$X((1\ 2)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & ? & ? \\ 0 & -1 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Usando el mismo método obtenemos la cuarta y la quinta columna, llegamos a las expresiones  $(1\ 2)e_{t_4} = e_{t_4} - e_{t_2}$  y  $(1\ 2)e_{t_5} = e_{t_5} - e_{t_2}$  por lo tanto podemos concluir que la matriz de representación es:

$$X((1\ 2)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para la partición  $\lambda = (3, 1^2)$  se obtienen seis tablas estándar

$$\begin{aligned}
 t_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, & t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, & t_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}, \\
 t_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, & t_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}, & t_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

y consideremos construir la matriz de permutación para  $(3\ 4)$ , observando dónde se encuentran estos elementos en las tablas resulta que sólo desconocemos la tercera columna pues habrá un descenso al aplicar la permutación a  $t_3$ , notemos que para ese caso  $G_{A,B} = (1) - (3\ 4)$ , por lo tanto  $(34)e_{t_3} = e_{t_3}$  de modo que la matriz de representación resulta

$$X((3\ 4)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consideremos la partición  $\lambda = (4, 1)$ , hay cuatro tablas estándar

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}, \quad t_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}, \quad t_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

La representación asociada a la permutación  $(2\ 3)$  es

$$X((2\ 3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente construyamos la representación para la partición  $\lambda = (2, 1, 1, 1)$  evaluada en la permutación  $(4\ 5)$ , nuevamente debemos considerar cuatro tablas estándar

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \quad t_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \quad t_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}$$

por lo que

$$X((4\ 5)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

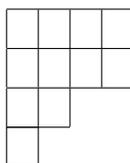
### 3.4 La Regla de la Bifurcación

Una ganancia de trabajar con tablas de Young es que será más sencillo y claro visualizar lo que sucede tanto con las representaciones inducidas como con las restringidas, el resultado que exhibimos a continuación, además de sorprender por la conexión entre tablas, muestra la facilidad con la que podemos trabajar. Olvidémonos por un momento del llenado de la tabla y trabajemos sólo con el diagrama.

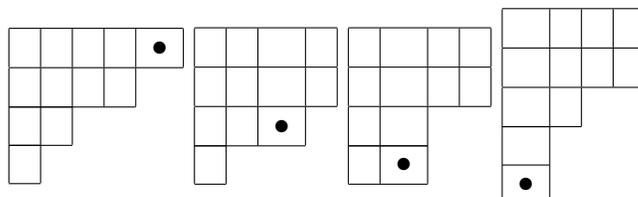
**Definición 3.65** Sea  $\lambda \vdash n$ , consideremos el diagrama asociado  $\lambda$ , una esquina interior es una entrada  $(i, j)$  en el diagrama tal que al retirarla queda un diagrama válido. De modo análogo definimos una esquina exterior como una entrada  $(i, j)$  tal que al añadirla se forma un diagrama válido.

**Definición 3.66** Denotaremos por  $\lambda^+$  al conjunto de los diagramas que sean obtenidos de agregar una celda al diagrama asociado a  $\lambda$  y por  $\lambda^-$  al conjunto de los diagramas obtenidos de eliminar una celda al diagrama asociado a  $\lambda$ .

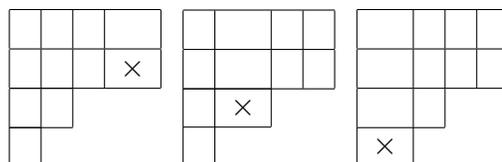
**Ejemplo 3.67** Sea  $\lambda = (4^2, 2, 1)$  el diagrama asociado es



los diagramas que se pueden obtener añadiendo una celda son:



y colocando un tache a la celda que se elimina tendríamos que los diagramas que se obtienen de eliminar una celda son:



**Observación 3.68**  $\dim(S^\lambda) = \sum_{\lambda^-} \dim(S^{\lambda^-})$ , esto sucede pues una base para  $S^\lambda$  está dada por  $\{e_t \mid t \in T_\lambda - \text{estándar}\}$  y por ser estándar  $n$  está al final de algún renglón, de modo que si lo quitamos obtenemos una tabla estándar tipo  $\lambda^-$ .

**Notación 3.69** Sean  $r_1 < r_2 < \dots < r_k$  los renglones que tienen una esquina interior, denotemos por  $\lambda^i$  al diagrama obtenido de remover la esquina interior del renglón  $r_i$ , asimismo si  $t \in T_\lambda$  con  $n$  en la esquina de algún  $r_i$  entonces  $t^i$  será la tabla obtenida de remover a  $n$ , de igual forma,  $\{t^i\}$  será el tabloide asociado a la tabla que surja de remover a  $n$  del renglón  $i$ -ésimo.

**Teorema 3.70** *Sea  $\lambda \vdash n$ , entonces*

$$1. \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} S^\lambda \cong \bigoplus_{\lambda' \in \lambda^-} S^{\lambda'},$$

$$2. \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} S^\lambda \cong \bigoplus_{\lambda' \in \lambda^+} S^{\lambda'}.$$

**Demostración.** Comencemos la prueba tomando una partición  $\lambda$  con esquinas interiores en los renglones  $r_1, \dots, r_k$  y usemos la notación mencionada. Lo que haremos para demostrar el primer inciso del teorema es buscar una cadena de subespacios tales que

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_k = S^\lambda$$

y tales que para toda  $i \in \{0, \dots, k\}$  cumplan que  $\frac{V_i}{V_{i-1}} \cong S^{\lambda^i}$  como  $S_{n-1}$  – *módulos*, de este modo veremos que

$$\downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} S^\lambda = V_k \cong V_{k-1} \oplus \left( \frac{V_k}{V_{k-1}} \right) \cong V_{k-1} \oplus S^{\lambda^k}$$

y de igual forma

$$V_{k-1} \cong V_{k-2} \oplus S^{\lambda^{k-1}}$$

y así sucesivamente.

Comencemos tomando  $V_i$  como el subespacio vectorial de  $S^\lambda$  generado por los politabloides estándar  $e_t$  tal que  $n$  aparece al final de alguno de los primeros  $i$  renglones.

Sea  $\{t\} \in \{T^\lambda\}$ , definimos  $\theta_i \in \text{Hom}(M^\lambda, M^{\lambda^i})$  como:

$$\theta_i(\{t\}) = \begin{cases} \{t^i\} & \text{si } n \text{ está en } r_i \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

entonces  $\theta_i$  es un  $S_{n-1}$  – *homomorfismo* pues  $n$  queda fijo bajo la acción de  $S_{n-1}$ .

Sea  $t \in T_\lambda$  – *estándar*, supongamos que  $n$  está en el renglón  $r_i$ , sabemos que por ser  $t$  estándar  $n$  se encuentra en una esquina inferior, de modo que cualquier permutación por columna dejará a  $n$  en el renglón  $r_i$  si y sólo si la permutación fija a  $n$  y estas permutaciones son precisamente las que aparecen en  $C_{i,i}^-$ . Para las permutaciones que muevan a  $n$  se tiene que el sumando de  $e_t$  correspondiente es enviado a cero bajo  $\theta_i$  por lo cual

$$\begin{aligned} \theta_i(e_t) &= \theta_i(C_{i,i}^- \{t\}) = \theta_i \left( \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \pi \{t\} \right) \\ &= \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \theta_i(\pi \{t\}) \\ &= \sum_{\pi \in C_{i,i}^-} \text{sgn}(\pi) \{t^i\} = e_{t^i}. \end{aligned}$$

Ahora cada politabloide estándar  $e_{t^i}$  en  $S^{\lambda^i}$  proviene de algún  $e_t \in M^\lambda$  siendo entonces de la forma  $e_{t^i}$  para alguna  $t \in T_\lambda$  – *estándar* por lo que todos los politabloides estándar

están en la imagen de  $\theta_i$ , además todos estos politabloides tienen a  $n$  en el  $i$ -ésimo renglón por lo tanto todos están en su respectivo  $V_i$ , esto nos permite concluir que  $\theta_i(V_i) = S^{\lambda^i}$ . Finalmente debemos observar que si  $t$  tiene a  $n$  en algún renglón superior de  $r_i$  se tiene que  $\theta_i(e_t) = 0$ , esto significa que  $V_{i-1} \subseteq \ker(\theta_i)$ , así tiene sentido considerar la cadena:

$$\{0\} \subseteq V_1 \cap \ker(\theta_1) \subseteq V_1 \subseteq V_2 \cap \ker(\theta_2) \subseteq \dots \subseteq S^\lambda \tag{3.7}$$

como  $\ker(\theta_i|_{V_i}) = V_i \cap \ker(\theta_i)$  entonces usando el primer teorema de Isomorfismo se tiene

$$\frac{V_i}{(V_i \cap \ker(\theta_i))} \cong \theta_i(V_i) = S^{\lambda^i},$$

esto en términos de dimensiones nos dice que

$$\dim \left( \frac{V_i}{V_i \cap \ker(\theta_i)} \right) = \dim(\theta_i(V_i)) = \dim(S^{\lambda^i}),$$

sin embargo por la igualdad presentada en 3.68 tenemos que las dimensiones de los cocientes suman la dimensión de  $S^\lambda$ , entonces en la cadena 3.7 no hay lugar para insertar más módulos extra, de modo que la contención  $V_i \cap \ker(\theta_i) \subseteq V_{i-1}$  debe ser una igualdad, por lo tanto

$$\frac{V_i}{V_{i-1}} = \frac{V_i}{V_i \cap \ker(\theta_i)} \cong S^{\lambda^i}$$

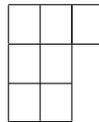
y así probamos la primera parte del teorema.

Para la segunda parte usaremos el conocido resultado de representaciones de grupos llamado reciprocidad de Frobenius (ver 1.85). Denotemos por  $\chi^\lambda$  el carácter de  $S^\lambda$ , entonces  $\uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} S^\lambda = \bigoplus_{\lambda'} c'_\lambda S^{\lambda'}$  con  $\lambda'$  corriendo en todas las particiones de  $n+1$ . Analicemos el producto interno con  $S^\mu$ ,

$$\begin{aligned} c_\mu &= \left\langle \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} \chi^\lambda, \chi^\mu \right\rangle = \left\langle \chi^\lambda, \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} \chi^\mu \right\rangle \\ &= \left\langle \chi^\lambda, \sum_{\mu' \in \mu^-} \chi^{\mu'} \right\rangle \quad (\text{usando el primer inciso del teorema}) \end{aligned}$$

entonces  $c_\mu = 1$  si y sólo si  $\lambda = \mu'$  para alguna  $\mu'$  correspondiente a un diagrama en el conjunto  $\mu^-$  y de modo equivalente, si  $\lambda = \lambda'$  se tiene que  $c_\mu = 1$  y 0 en cualquier otro caso, de aquí se concluye que hay exactamente una copia de cada  $S^{\lambda'}$  con  $\lambda' \in \lambda^+$  en la representación inducida. ■

**Ejemplo 3.71** Trabajemos con  $\lambda = (3, 2^2) \vdash 7$  cuyo diagrama de Young asociado es



entonces los diagramas que pueden ser obtenidos de agregar una celda son:

$$\lambda^+ = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \end{array} \right\}$$

$$(4, 2^2), \quad (3^2, 2), \quad (3, 2^2, 1)$$

así  $\uparrow_{S_7}^{S_8} S^{(3,2^2)} = S^{(4,2^2)} \oplus S^{(3^2,2)} \oplus S^{(3,2^2,1)}$  y

$$\lambda^- = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \end{array} \right\}$$

$$(2^3), \quad (3, 2, 1)$$

por lo tanto  $\downarrow_{S_6}^{S_7} S^{(3,2^2)} = S^{(2^3)} \oplus S^{(3,2,1)}$ .

### 3.5 Descomponiendo a $M^\mu$

Aún quedan algunas preguntas por contestar respecto al espacio en el que hemos estado trabajando, una de ellas es la descomposición de  $M^\mu$ , ahora nos centraremos en conocer la multiplicidad de  $S^\lambda$  en  $M^\mu$ , para ello definiremos un nuevo tipo de tablas, con las cuales trabajaremos en esta sección.

**Definición 3.72** Una tabla de Young generalizada tipo  $\lambda$ , es un diagrama de Young tal que permite entradas repetidas.

Por el momento y con el fin de explorar este tipo de tablas bajo ciertas condiciones, no nos interesa el orden de las entradas de los renglones y columnas, sin embargo como tal vez se sospeche, más adelante las tablas que nos podrían ser de utilidad serán aquellas cuyos renglones y columnas sean no decrecientes, esta sospecha resulta bastante acertada, sin embargo habrá que tomar en cuenta algunas condiciones, pues en este caso estamos manejando tablas con entradas repetidas, así pues, habrá que pedir algunas condiciones nuevas.

**Ejemplo 3.73**  $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline \end{array}$ , es una tabla generalizada de tipo  $\lambda = (3, 2)$ .

**Definición 3.74** Dada  $T$  una tabla de Young generalizada, el contenido de  $T$  es una composición  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  donde cada  $\mu_i$  denotará la cantidad de elementos  $i$  que aparecen en  $T$ .

Usando el ejemplo 3.73 tenemos que  $T$  es de tipo  $\lambda = (3, 2)$  y contenido  $\mu = (2, 1, 2)$ , la primera observación que debemos hacer es notar el hecho de que ambas resultan composiciones de  $n$ , de aquí que podamos considerar con mayor naturalidad el conjunto:

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \{T \mid T \text{ es de tipo } \lambda \text{ y contenido } \mu\}.$$

El espacio que vamos a considerar en primer lugar es  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ , lo valioso de este espacio es el hecho de obtener una construcción con la cual es posible ver que dicho espacio resulta isomorfo a  $M^\mu$ , sin embargo, antes de comenzar dicha construcción haremos un ejemplo donde mostremos el modo en que manejaremos a los elementos de  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$ , para ello es necesario definir la forma en que obtendremos las tablas generalizadas, a partir de una función, que nos servirá para mostrar que es posible obtener siempre una tabla de tipo  $\lambda$  cuyo contenido sea  $\mu$ .

**Definición 3.75** Sean  $\lambda \vdash n$ ,  $t \in T_\lambda$  y  $\{s\}$  un tabloide asociado a una partición  $\mu$ , tal que  $\mu$  es partición de  $n$  no necesariamente distinta a  $\lambda$ . La función evaluación  $T_{\{s\}}(t) : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  se defina como

$$T_{\{s\}}(t)(i) = k \text{ si } i \text{ se encuentra en el renglón } k \text{ del tabloide } \{s\} \tag{3.8}$$

y  $T_{\{s\}}(t)$  será la tabla generalizada que se obtiene de  $t$  sustituyendo cada entrada  $i$  de  $t$  por  $T_{\{s\}}(t)(i)$ . De modo que  $T_{\{s\}}(t)$  será una tabla del mismo tipo que  $t$ . A esta tabla  $t$  se le llamará **tabla de referencia**.

**Ejemplo 3.76** Sean  $\lambda = (2, 2, 2)$  una partición fija,  $t =$

1	2
3	4
5	6

una tabla de referencia y

$\{s\} \in M^\mu$  con  $\mu = (3, 3)$ ,

$$\{s\} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 6 \\ \hline 4 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \text{ y } T_{\{s\}}(t) = \begin{array}{|c|c|} \hline T_{\{s\}}(1) & T_{\{s\}}(2) \\ \hline T_{\{s\}}(3) & T_{\{s\}}(4) \\ \hline T_{\{s\}}(5) & T_{\{s\}}(6) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

y el contenido de  $T_{\{s\}}(t)$  es  $\mu = (3, 3)$ .

Sean  $\lambda \vdash n$ ,  $t \in T_\lambda$  y  $\{s\}$  un tabloide asociado a una partición  $\mu$  la correspondencia presentada en 3.8 es biyectiva, por una parte es suprayectiva pues dada una tabla generalizada de tipo  $\lambda$  y de contenido  $\mu$ , basta definir  $\{s\}$  de modo que tenga la cantidad correcta de elementos en cada renglón y esto se puede hacer pues tanto  $\lambda$  como  $\mu$  son particiones de  $n$  y además es inyectiva pues dadas dos tablas generalizadas que sean iguales y creadas a partir de una tabla  $t$  fija, entonces los valores de la tabla generalizada nos dicen que provienen de tabloides que se encuentran en la misma clase de equivalencia por renglones.

Ahora bien, es posible crear espacios vectoriales a partir de  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$ , dado este conjunto obtenemos  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ . Anteriormente dijimos que nuestro propósito sería dar un isomorfismo entre  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  y  $M^\mu$ , pues bien, empezaremos por darle una estructura de  $S_n$ -módulo a  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  de modo que podamos conectarla con la acción de  $M^\mu$ . Aunque la idea es relativamente sencilla, es complicado visualizar que la acción resulta bastante natural si consideramos formalizar este punto antes de verlo en algún ejemplo, por esa razón daremos un ejemplo en el cual sea posible ilustrar el modo en que funcionará y después formalizaremos el resultado.

**Ejemplo 3.77** Sean  $\lambda = (3, 2, 1)$ ,  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$  la tabla de referencia y  $\{s\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 6 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}}$ , con  $\{s\} \in M^{(3,3)}$ . Ahora podemos obtener a  $T_{\{s\}}(t)$

$$\{s\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 5 \\ \hline 1 & 6 & 3 \\ \hline \end{array}} \Rightarrow T_{\{s\}}(t) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline T(1) & T(2) & T(3) \\ \hline T(4) & T(5) & \\ \hline T(6) & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array},$$

Tenemos una partición suficientemente grande para que nos permita jugar un poco más con las condiciones que hemos de imponer a  $t$  y a  $\{s\}$ , por ejemplo, sea  $\pi = (1\ 4\ 6)$  consideremos

como tabla de referencia a  $\pi t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 3 \\ \hline 6 & 5 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$ , esta tabla no resulta estándar, construyamos

$T_{\{s\}}(\pi t)$  con el mismo tabloide que anteriormente usamos, así tendríamos

$$\{s\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 5 \\ \hline 1 & 6 & 3 \\ \hline \end{array}} \Rightarrow T_{\{s\}}(\pi t) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline T(4) & T(2) & T(3) \\ \hline T(6) & T(5) & \\ \hline T(1) & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array},$$

lo que obtuvimos no es más que una permutación de las entradas de la tabla generalizada previa y tiene sentido pues lo que hicimos fue evaluar a  $T_{\{s\}}(\pi t)$  en valores permutados de  $t$ .

Ahora vamos a considerar una permutación actuando en  $\{s\}$ , por ejemplo tomemos  $\pi^{-1} =$

$(1\ 6\ 4) \in S_6$ , sea  $\{\pi^{-1}s\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 6 & 4 & 3 \\ \hline \end{array}}$  el tabloide que usaremos y  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$ , de este

modo obtenemos

$$\{\pi^{-1}s\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 6 & 4 & 3 \\ \hline \end{array}} \Rightarrow T_{\{\pi^{-1}s\}}(t) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline T(1) & T(2) & T(3) \\ \hline T(4) & T(5) & \\ \hline T(6) & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}.$$

De modo que  $T_{\{\pi^{-1}s\}}(t) = T_{\{s\}}(\pi t)$ .

Ahora ya podemos formalizar lo que vimos, partimos buscando el modo de definir una acción sobre las tablas generalizadas, es decir el conjunto  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$ , el ejemplo sugiere que además es posible definirla en términos de la tabla de referencia o del tabloide que estemos usando, con esta idea en mente definamos la acción que hemos estado buscando.

**Definición 3.78** Sean  $\lambda, \mu \vdash n$  no necesariamente iguales,  $t$  una tabla de referencia y  $\{s\}$  un tabloide de tipo  $\mu$ . Definimos la acción de  $\pi$  en  $T_{\{s\}}(t)$  como

$$\begin{aligned} S_n \times \mathcal{T}_{\lambda\mu} &\longrightarrow \mathcal{T}_{\lambda\mu} \\ \pi T_{\{s\}}(t) &\longrightarrow T_{\{\pi s\}}(t) \end{aligned}$$

Entonces dada  $\pi \in S_n$ , lo que está haciendo nuestra acción en  $\{s\}$  es permutar la entrada  $i$  por la entrada  $\pi i$  y la acción en  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$  se ve reflejada como mover a  $T_{\{s\}}(i)$  a la posición de  $\pi T_{\{s\}}(i)$ .

Ahora procedamos a probar que  $T_{\{\pi s\}}(t) = T_{\{s\}}(\pi^{-1}t)$ , esto lo realizamos como sigue:

*$T_{\{\pi s\}}(i)$  es el número de renglón en el que  $i$  se encuentra en  $\pi\{s\}$   
que es el número de renglón en el que se encuentra  $\pi^{-1}(i)$  en  $\{s\}$   
es decir  $T_{\{s\}}(\pi^{-1}i)$ .*

Como esto sucede siempre, no importa cual sea nuestra tabla de referencia. Bajo esta acción en  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$  se obtiene que  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}] \simeq M^\mu$  como  $S_n$  –módulos, por lo tanto hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 3.79** *Sea  $\lambda \vdash n$  fija, entonces  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}] \cong M^\mu$  como  $S_n$ –módulos.*

Antes de continuar definamos lo que serán las clases de equivalencias por renglones y por columnas en las tablas de Young generalizadas.

**Definición 3.80** *Sea  $T$  una tabla generalizada, definimos la clase de equivalencia por renglones de  $T$  como todos los tabloides cuyos renglones tengan los mismos elementos que  $T$  y ésta será denotada por  $\{T\}$ . Análogamente definimos la clase de equivalencia por columnas de  $T$  como todos los tabloides cuyas columnas tengan los mismos elementos que  $T$  y será denotada por  $[T]$ .*

El siguiente paso es construir un homomorfismo  $\theta_{T_{\{s\}}(t)} : M^\lambda \longrightarrow \mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ , sin embargo usando lo que probamos en el teorema 3.79, este homomorfismo de hecho lo podemos ver como  $\theta_{T_{\{s\}}(t)} : M^\lambda \longrightarrow M^\mu$ , lo primero que haremos será definirlo para el tabloide asociado a la tabla de referencia como sigue.

**Notación 3.81** *Sean  $\lambda$  y  $\mu \vdash n$  no necesariamente iguales,  $t \in T_\lambda$ ,  $\{s\} \in \{T^\mu\}$ , a la imagen de  $\theta_{T_{\{s\}}(t)}$  aplicada a  $\{t\}$  la denotaremos como*

$$\theta_{T_{\{s\}}(t)}(\{t\}) := \sum_{S \in \{T_{\{s\}}(t)\}} S.$$

Hagamos un ejemplo con lo que tenemos hasta este punto.

**Ejemplo 3.82** *Retomando el ejemplo 3.77, tenemos  $\lambda = (3, 2, 1)$ ,  $t =$*

1	2	3
4	5	
6		

*nuestra*

*tabla de referencia y  $\{s\} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 6 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ , con  $\{s\} \in M^{(3,3)}$ . De modo que*

$$T_{\{s\}}(t) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline T(1) & T(2) & T(3) \\ \hline T(4) & T(5) & \\ \hline T(6) & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}.$$

Ahora debemos obtener

$$\{T_{\{s\}}(t)\} = \left\{ \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 2 & & \end{array}}, \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 2 & & \end{array}}, \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 2 & & \end{array}} \right\},$$

de modo que

$$\theta_{T_{\{s\}}(t)}(\{t\}) = \theta_{T_{\{s\}}(t)} \left( \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \\ 6 & & \end{array}} \right) = \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 2 & & \end{array}} + \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 2 & & \end{array}} + \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 2 & & \end{array}}$$

Ahora extendemos el homomorfismo a todo  $M^\lambda$ , como es un módulo cíclico es generado por cualquier tabloide, en particular es generado por  $\{t\}$  y la acción de  $\mathbb{C}[S_n]$  de modo que cualquier otro elemento de  $M^\lambda$  es de la forma  $\pi\{t\}$  para algún  $\pi \in S_n$ , en base a esto surge la siguiente definición.

A partir de ahora siempre que usemos la notación  $T_{\{s\}}(t)$  daremos por hecho que nos estamos refiriendo a la tabla generalizada asociada a  $\{s\}$  y a una tabla de referencia  $t$ , cuyas particiones son  $\mu$  y  $\lambda$  respectivamente donde estas particiones de  $n$  no son necesariamente iguales.

**Definición 3.83** Sea  $\pi \in S_n$  entonces definimos

$$\theta_{T_{\{s\}}(t)}(\pi\{t\}) := \pi\theta_{T_{\{s\}}(t)}(\{t\}) = \sum_{S \in \{T_{\{s\}}(\pi t)\}} \pi S.$$

**Ejemplo 3.84** Continuando con el ejemplo 3.82 se tiene que si consideramos  $\pi = (1\ 4\ 6)$  y evaluamos en  $\pi\{t\}$  entonces

$$\begin{aligned} \theta_{T_{\{s\}}(t)}(\pi\{t\}) &= \theta_{T_{\{s\}}(t)} \left( \overline{\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & \\ 1 & & \end{array}} \right) \\ &= (1\ 4\ 6) \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 2 & & \end{array}} + (1\ 4\ 6) \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 2 & & \end{array}} + (1\ 4\ 6) \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \\ 1 & & \end{array}} \\ &= \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \\ 1 & & \end{array}} + \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 1 & & \end{array}} + \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & \\ 1 & & \end{array}} \end{aligned}$$

Para retomar nuestro camino debemos recordar que a nosotros nos interesa saber cómo es  $M^\mu$  en términos de los submódulos irreducibles  $S^\lambda$ , por lo que necesitamos entender qué pasa con  $S^\lambda$  en  $M^\mu$ , así pues, dado que el mapeo anterior es un isomorfismo, el modo más natural de obtener los elementos es considerando la restricción a  $S^\lambda$ , es decir, dada  $t$  una tabla de referencia y  $\{s\}$  un tabloide asociados a  $\lambda, \mu$  respectivamente, vamos a considerar

$$\bar{\theta}_{T_{\{s\}}(t)}(\{t\}) := \theta_{T_{\{s\}}(t) \upharpoonright S^\lambda}(\{t\}). \tag{3.9}$$

**Observación 3.85** Sea  $t$  la tabla de referencia, si  $T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  entonces si buscamos un mapeo que cumpla 3.9  $\bar{\theta}_{T_{\{s\}}}(t) \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ , tendríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{T_{\{s\}}}(t)(e_t) &= \bar{\theta}_{T_{\{s\}}}(t)(C_t^- \{t\}) = \bar{\theta}_{T_{\{s\}}}(t) \left( \sum_{\pi \in c_t} \text{sgn}(\pi) \pi \{t\} \right) \\ &= \left( \sum_{\pi \in c_t} \text{sgn}(\pi) \pi \right) \bar{\theta}_{T_{\{s\}}}(t)(\{t\}) = C_t^- \left( \sum_{T_i \in \{T_{\{s\}}(t)\}} T_i \right) \\ &= \sum_{T_i \in \{T_{\{s\}}(t)\}} C_t^- T_i \end{aligned}$$

Esto motiva que surga una pregunta bastante útil para nuestros propósitos ¿cuándo sucede que  $C_t^- S_{\{s\}}(t) = 0$ ? La cual se responde con la siguiente proposición.

**Proposición 3.86** Sean  $T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  entonces  $C_t^- T_{\{s\}}(t) = 0$  si y sólo si  $T_{\{s\}}(t)$  tiene dos elementos iguales en alguna columna.

**Demostración.**  $\Rightarrow$  Si  $C_t^- T_{\{s\}}(t) = 0$  entonces

$$T_{\{s\}}(t) + \sum_{\substack{\pi \in c_t \\ \pi \neq \varepsilon}} \text{sgn}(\pi) \pi(T_{\{s\}}(t)) = 0$$

de modo que  $T_{\{s\}}(t) = \pi T_{\{s\}}(t)$  p.a.  $\pi \in C_t$  con  $\text{sgn}(\pi) = -1$ , entonces  $T_{\{s\}}(t) = \pi T_{\{s\}}(t)$ , esto significa que cualesquiera dos elementos  $a$  y  $b$  que corresponden a un ciclo no trivial de  $\pi$  cumplen que  $T_{\{s\}}(t)(a) = T_{\{s\}}(t)(b)$  y por tanto están en la misma columna.

$\Leftarrow$  Si  $T_{\{s\}}(t)(a) = T_{\{s\}}(t)(b)$  se encuentran en la misma columna en  $T_{\{s\}}(t)$  entonces  $(1 - (a b))$  es factor de  $C_t^-$  por la proposición 3.16, entonces si  $(1 - (a b))T_{\{s\}}(t) = 0$  entonces  $C_t^- = 0$  por lo tanto  $C_t^- T_{\{s\}}(t) = 0$ . ■

**Ejemplo 3.87** Sean  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$  y  $\{s\} = \frac{1 \ 2 \ 5}{3 \ 4}$  entonces  $T_{\{s\}}(t) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array}$ ,

$$\begin{aligned} C_t^- T_{\{s\}}(t) &= ((1) - (14) - (25) + (14)(25)) \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array} = 0 \end{aligned}$$

Esto significa que podemos eliminar ciertos elementos  $\bar{\theta}_{T_{\{s\}}}(t)$  y sólo trabajar con lo que vendría a ser el equivalente a las tablas estándar, esto da pie a nuestra siguiente sección donde se presentan las tablas que nos ayudarán a demostrar lo que queremos.

### 3.6 Una base semi estándar para $Hom(S^\lambda, M^\mu)$

En esta sección esta dedicada a exhibir al conjunto que servirá como base para  $Hom(S^\lambda, M^\mu)$ , antes necesitamos definir cierto tipo de tablas que resultan un caso particular de las tablas generalizadas.

**Definición 3.88** Decimos que  $T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  es una tabla de Young generalizada semi estándar si sus renglones son no decrecientes y sus columnas son estrictamente crecientes, denotaremos por  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$  a el conjunto de tablas semi estándar tipo  $\lambda$  y contenido  $\mu$ .

Esta sección está dedicada a probar que el conjunto  $\{\bar{\theta}_{T_{\{s\}}(t)} \mid T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$  es una base para  $Hom(S^\lambda, M^\mu)$ , la prueba en general tiene cierta semejanza al modo en que se prueba que  $\{e_t \mid t \in T_\lambda\text{-estándar}\}$  es base para  $S^\lambda$ , sin embargo no es del todo análogo, como iremos viendo habrá que justificar algunos detalles. Al igual que antes necesitaremos definir cierto orden para probar la independendencia lineal y los elementos Garnir serán usados nuevamente para probar que el conjunto genera.

**Ejemplo 3.89** Sean  $\lambda = (3, 2)$ ,  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$  y  $\{s\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 5 & 2 & \\ \hline \end{array}}$  entonces

$$T_{\{s\}}(t) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

no es una tabla generalizada semi estándar, sin embargo si tomamos  $\{s_1\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 5 & 3 & \\ \hline \end{array}}$  en-

tonces  $T_{\{s_1\}}(t) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array}$  sí es una tabla generalizada semi estándar pues sus renglones son no decrecientes y sus columnas son estrictamente crecientes.

**Teorema 3.90** El conjunto  $\{\bar{\theta}_{T_{\{s\}}(t)} \mid T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$  es una base para  $Hom(S^\lambda, M^\mu)$ .

Empecemos probando que el conjunto  $\{\bar{\theta}_{T_{\{s\}}(t)} \mid T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$  es linealmente independiente, para ello necesitamos primero definir un orden en los tabloides por columna de las tablas generalizadas.

**Definición 3.91** Sean  $\lambda, \mu \vdash n$  no necesariamente iguales,  $[T_{\{s_1\}}(t)]$  y  $[T_{\{s_2\}}(t)]$  dos tabloides por columna con  $\{s_1\}$  y  $\{s_2\} \in M^\mu$  cuyas composiciones son  $\rho^i$  y  $\sigma^i$  respectivamente. Diremos que  $[T_{\{s_1\}}(t)]$  domina a  $[T_{\{s_2\}}(t)]$ , lo cual será denotando por  $([T_{\{s_1\}}(t)] \geq [T_{\{s_2\}}(t)])$ , si para toda  $i$  se tiene que  $\rho^i \geq \sigma^i$ .

**Ejemplo 3.92** Sean  $\lambda = (3, 2)$ ,  $\{s_1\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}}$  y  $\{s_2\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline \end{array}}$ , entonces

$$T_{\{s_1\}}(t) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad S_{\{s_2\}}(t) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

entonces

$$[T_{\{s_1\}}(t)] = \left| \begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right| 1 \quad y \quad [S_{\{s_2\}}(t)] = \left| \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \right| 1$$

las composiciones para  $[S_{\{s_2\}}(t)]$  son  $\rho^1 = (2, 0, 1)$  y  $\rho^2 = (2, 2, 1)$  y para  $[T_{\{s_1\}}(t)]$  serían  $\sigma^1 = (0, 2, 1)$  y  $\sigma^2 = (2, 2, 1)$  por tanto  $[T_{\{s_1\}}(t)] \leq [S_{\{s_2\}}(t)]$ .

**Lema 3.93 (De Dominancia para Tablas Generalizadas)** Sean  $k, l$  entradas de  $T_{\{s\}}(t)$  que cumplen  $k < l$  y además  $k$  aparece en alguna columna a la izquierda de la columna en la cual se encuentra  $l$  entonces

$$[T_{\{s\}}(t)] \supseteq (k \ l)[T_{\{s\}}(t)].$$

**Demostración.** Sean  $\lambda^i$  y  $\mu^i$  las composiciones de  $[T_{\{s\}}(t)]$  y  $(k \ l)[T_{\{s\}}(t)]$  respectivamente, digamos que  $k$  se encuentra en la columna  $r$  y  $l$  en la columna  $q$ . Para  $i < k$  y  $l \leq i$  se tiene que  $\lambda^i = \mu^i$  ya que no hemos permutado algún elemento. Si  $k \leq i < l$  se tiene que en  $\lambda^i$  la entrada  $k$  está en  $q$  mientras que en  $\mu^i$  la entrada se encuentra en  $r$ , esto significa que  $\lambda^i$  es  $\mu^i$  más la parte de  $q$  aumentada en uno, entonces  $\mu^i \leq \lambda^i$  de modo que podemos concluir lo que se pedía. ■

**Corolario 3.94** Si  $T_{\{s\}}(t)$  es una tabla generalizada semi estándar y  $T_{i\{s\}}(t) \in \{T_{\{s\}}(t)\}$ , entonces  $[T_{\{s\}}(t)] \supseteq [T_{i\{s\}}(t)]$ .

**Proposición 3.95** El conjunto  $\{\bar{\theta}_{T_{\{s\}}(t)} \mid T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$  es independiente.

**Demostración.** Dada  $T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$  podemos construir el operador  $\bar{\theta}_{T_{\{s\}}(t)} \in Hom(S^\lambda, M^\mu)$ , queremos que dada la colección de tablas distintas en  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$   $T_{\{s_1\}}(t), \dots, T_{\{s_m\}}(t)$  entonces los operadores  $\bar{\theta}_{T_{\{s_1\}}(t)}, \dots, \bar{\theta}_{T_{\{s_m\}}(t)} \in Hom(S^\lambda, M^\mu)$  son linealmente independientes con  $\lambda, \mu \vdash n$  y  $t$  la tabla de referencia tipo  $\lambda$ .

Lo primero que probaremos es que los elementos  $\bar{\theta}_{T_{\{s_1\}}(t)}(e_t), \dots, \bar{\theta}_{T_{\{s_m\}}(t)}(e_t) \in M^\mu$  son linealmente independientes y esto mostrará que la lista  $\bar{\theta}_{T_{\{s_i\}}(t)}$  con  $i \in \{1, \dots, m\}$  es linealmente independiente pues de haber dependencia lineal entre estos operadores inmediatamente obtendríamos elementos linealmente dependientes, i.e  $\{\bar{\theta}_{T_{\{s_i\}}(t)}(v) \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$  sería independiente para todo  $v \in S^\lambda$ .

Por el corolario 3.94 tenemos que  $[T_{\{s_i\}}(t)] \supseteq [S]$  para todo  $S$  en los sumandos de  $\theta_{T_{\{s_i\}}(t)}(\{t\})$  pues estamos suponiendo que  $T_{\{s_i\}}(t)$  son semi estándar para toda  $i$ , ahora las permutaciones de  $C_t^-$  no alteran las clases de equivalencia por columna, de modo que también se cumple que  $[T_{\{s_i\}}(t)] \supseteq [S]$  para todos los sumandos  $S \in C_t^- \theta_{T_{\{s_i\}}(t)}(\{t\})$ , además notemos que todos los  $[T_{\{s_i\}}(t)]$  son distintos pues las clases de equivalencia por columna no pueden contener más de una tabla estándar de modo que podemos aplicar la proposición 3.45 (usada en la prueba sobre la independencia lineal del conjunto  $\{e_t \mid t \in T_\lambda - \text{estándar}\}$ ), así tenemos que  $C_t^- \theta_{T_{\{s_i\}}(t)}(\{t\}) = \bar{\theta}(e_t)$  ya que son una colección de vectores en  $M^\mu$  y para cada uno de ellos podemos escoger un  $[T_{\{s_i\}}(t)]$  es máximo y todos estos elementos son distintos, de modo que el conjunto de  $\bar{\theta}_{T_{\{s_i\}}(t)}(e_t)$  es linealmente independiente. ■

**Lema 3.96** Sea  $\theta \in Hom(S^\lambda, M^\mu)$ . Notemos que

$$\theta(e_t) = \sum_{T_i \in \{T_i\}} C_t^- \{T_i\}$$

con  $t$  una tabla fija de tipo  $\lambda$  donde  $T = T_{\{s\}}(t)$  e igualmente denotemos por  $T_1 = T_{\{s_1\}}(t)$  y  $T_2 = T_{\{s_2\}}(t)$ .

1. Si  $\pi \in C_t$  y  $T_1 = \pi T_2$  entonces  $C_t^- T_1 = (sgn(\pi)) C_t^- T_2$ .
2. Si  $T_1$  es una tabla tal que tiene elementos repetidos en alguna columna cumple que  $C_t^- T_1 = 0$ .
3. Si  $\theta \neq 0$  entonces existe una tabla semi estándar  $T_2$  tal que  $C_t T_2 \neq 0$ .

**Demostración.**

1. Como  $\pi \in C_t$  entonces en general podemos decir que

$$\pi(\theta(e_t)) = \theta(\pi C_t^- \{t\}) = \theta(sgn(\pi) C_t^- \{t\}) = sgn(\pi) \theta(e_t)$$

sustituyendo  $\theta(e_t) = \sum_{T_i \in \{T_i\}} C_t^- \{T_i\}$  se tiene que

$$\pi \sum_{T_i \in \{T_i\}} C_t^- \{T_i\} = (\theta(e_t)) = sgn(\pi) (\theta(e_t)) = sgn(\pi) \sum_{T_i \in \{T_i\}} C_t^- \{T_i\}$$

por hipótesis tenemos que  $T_1 = \pi T_2$  de modo que sustituyendo se tiene

$$\sum C_t^- T_1 = \sum C_t^- \pi T_2 = sgn(\pi) \sum C_t^- T_2$$

comparando los coeficientes del lado izquierdo y del lado derecho se tiene que  $C_t^- T_1 = sgn(\pi) C_t^- T_2$ .

2. Como hay elementos repetidos en alguna columna, existe  $(a b) \in C_t$  tal que  $(a b) T_1 = T_1$ , por el inciso 1 tenemos que  $C_t^- T_1 = -C_t^- T_1$  por lo tanto  $C_t^- T_1 = 0$
3. Si  $\theta(e_t) = 0$  entonces  $\theta(e_{\pi t}) = 0$  por lo tanto  $\theta \equiv 0$ , de modo que debe existir al menos un coeficiente de  $C_t^- T$ , de modo que hay una tabla  $T$  tal que  $[T]$  es maximal dentro del orden de dominancia por columnas, veamos que además podemos encontrar una que sea semi estándar, por la parte dos de este teorema sabemos que todas las entradas por columna son distintas, además podemos acomodarlas de modo creciente de modo que faltaría verificar que podemos obtener una que además tenga los renglones crecientes para ello recurriremos a los elementos Garnir. Sea  $T$  una tabla maximal con las columnas acomodadas de modo creciente y supongamos que tiene al menos un descenso en algún renglón. Sean  $a_i, b_i \in R_T$  los elementos involucrados en el descenso, es decir, tal que  $a_i > b_i$  y  $a_i$  aparece antes que  $b_i$ , consideremos  $A = \{a_i, \dots, a_p\}$  y

$B = \{b_1, \dots, b_i\}$  entonces  $G_{A,B} = \sum_{\pi} sgn(\pi)\pi$  es el elemento de Garnir asociado y se cumple que

$$G_{A,B} \left( \sum_{T_i \in \{T_i\}} C_t^- \{T_i\} \right) = G_{A,B}(\theta(e_t)) = \theta(G_{A,B}(e_t)) = \theta(0) = 0$$

Como  $T$  aparece en  $G_{A,B}T$  con coeficiente igual a uno se tiene que para cancelarla debe existir una tabla  $T' \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  tal que  $T' \neq T$  y  $\pi T = T'$  para alguna  $\pi$  en los elementos que conforman al elemento de Garnir, pero  $\pi$  intercambia a los elementos  $a$  y  $b$  por tanto  $[T'] \supseteq [T]$  lo que es una contradicción a que  $[T]$  es máximo, por lo tanto no hay descensos en  $T$  y de este modo cumple lo que se pedía.

■

Veamos un ejemplo para exhibir cómo funciona el lema anterior para eliminar las tablas que nos sirven como base del espacio  $\{\bar{\theta}_T \mid T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$ .

**Ejemplo 3.97** Para ejemplificar el inciso uno consideremos  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$ ,  $\{s_1\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline \end{array}}$  y  $\{s_2\} = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array}}$ , usando esto tenemos que  $T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array}$  y  $T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array}$ , observemos que  $\pi = (1\ 4) \in C_t$  cumple las hipótesis requeridas en el segundo inciso, finalmente hagamos el cálculo,

$$\begin{aligned} C_t^- T_1 &= (1) - (14) - (32) + (14)(32) \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} C_t^- T_2 &= (1) - (14) - (32) + (14)(32) \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array}. \end{aligned}$$

Para el inciso dos podemos usar el ejemplo 3.87.

**Teorema 3.98** El conjunto  $\{\bar{\theta}_{T_{\{s\}}(t)} \mid T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$  genera a  $Hom(S^\lambda, M^\mu)$ .

**Demostración.** Tomemos  $\theta \in Hom(S^\lambda, M^\mu)$  y de nuevo escribamos

$$\theta(e_t) = \sum_{T_i \in \{T_i\}} C_t^- \{T_i\} \tag{3.10}$$

y  $T = T_{\{s\}}(t)$

## Capítulo 3. La Regla de Young

Vamos a empecemos por definir  $L_\theta$  como el conjunto de aquellas tablas semi estándar generalizadas  $S$  tales que  $[S] \leq [T]$  para alguna  $T$  que aparezca en la suma  $\theta(e_t) = \sum_{T_i \in \{T_i\}} C_t^- \{T_i\}$  con coeficiente distinto de cero, a este orden se le llama el menor orden ideal generado por  $T$  en la suma. Probaremos el enunciado por inducción sobre el orden de este ideal.

Si  $|L_\theta| = 0$  entonces  $\theta$  debe ser el mapeo nulo, esto sucede pues el lema 3 muestra que si  $\theta$  no es el mapeo nulo entonces al menos existe una tabla semi estándar  $T$  que aparece en la suma y tal que  $T \in L_\theta$  y el mapeo nulo está contenido en cualquier generado.

Si  $|L_\theta| \neq 0$  entonces en la igualdad 3.10 podemos encontrar una tabla semi estándar  $T$  tal que  $C_t^- T \neq 0$ . Nuevamente el lema 3 muestra que podemos tomar una tabla  $T$  tal que  $[T]$  sea maximal a lo largo de todos los sumandos en la suma. Ahora consideramos

$$\theta' = \theta - C_T^- \bar{\theta}_T$$

Probaremos que  $L_\theta \setminus T = L_{\theta'}$ , notemos que para toda  $S$  tal que aparece en los sumandos de  $\bar{\theta}_T(e_t)$  se cumple que  $[S] \leq [T]$ , como  $T$  es semi estándar entonces  $[T]$  es la mayor clase de equivalencia en  $\theta_T(\{t\})$ , de modo que  $L_{\theta'}$  debe estar contenido en  $L_\theta$  pues no podemos introducir nuevos coeficientes distintos de cero.

El lema 3 también muestra que si  $[S] = [T]$  entonces  $C_t^- S$  debe aparecer con el mismo coeficiente en  $\theta(e_t)$  y  $C_t^- T \theta_T(e_t)$ , lo que significa que puede ser cancelado, como  $T$  es maximal no hay nadie por arriba que pudiese estar contenido en el ideal por lo tanto  $T \notin L_\theta$ , por inducción podemos concluir que  $\theta'$  esta contenido en el generado de  $\bar{\theta}_T$  el cual está generado por una tabla semi estándar por lo tanto  $\theta$  también debe estar generado por una tabla semi estándar. ■

### 3.7 Coeficientes de Kostka y la Regla de Young

Ya hemos concluido la prueba respecto a que el conjunto  $\{\bar{\theta}_{T_{\{s\}}(t)} \mid T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$  es base para  $Hom(S^\lambda, M^\mu)$ , como el módulo Specht es irreducible sabemos que la dimensión de este espacio es igual a la multiplicidad de  $S^\lambda$  en  $M^\mu$  y por otra parte sabemos que la dimensión es la cantidad de elementos en la base, es decir, la cantidad de tablas semi estándar generalizadas de tipo  $\lambda$  y contenido  $\mu$ , a este número lo nombraremos como coeficientes de Kostka.

**Definición 3.99** *Los coeficientes de Kostka se definen como  $K_{\lambda\mu} = |\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0|$*

Hemos visto en el corolario 3.31 que hay una descomposición de  $M^\mu$  dada por  $M^\mu = \bigoplus_{\lambda \geq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$ , sabemos que  $\{\bar{\theta}_{T_{\{s\}}(t)} \mid T_{\{s\}}(t) \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$  es base para  $Hom(S^\lambda, M^\mu)$  así que los coeficientes de Kostka son estas multiplicidades, esto significa que la descomposición de  $M^\mu$  puede reescribirse como  $M^\mu = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda\mu} S^\lambda$ . De hecho, podemos ver que algunos coeficientes son cero y obtener una fórmula más específica. Observemos que si  $\lambda = \mu$  la multiplicidad es uno, ya que el único modo de llenar  $\mu_i$  entradas con el valor  $i$  en una tabla semi estándar de tipo  $\mu$  es poner las  $i$  entradas en el  $i$ -ésimo renglón.

Otra observación que debemos hacer es que si  $\lambda \triangleleft \mu$  entonces  $K_{\lambda\mu} = 0$ , esto sucede pues se tiene que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \dots + \mu_i$  para alguna  $i$  y por lo tanto podemos llenar todas las

entradas con valor uno en los primeros  $i$  renglones de  $\lambda$  de modo que debemos tener al menos una entrada repetida en alguna columna por tanto no hay tablas semi estándar generalizadas de tipo  $\lambda$  y contenido  $\mu$  en este caso, por lo tanto podemos concluir como corolario de todo lo realizado la llamada Regla de Young.

**Teorema 3.100 (La Regla de Young)** *La multiplicidad de  $S^\lambda$  en  $M^\mu$  es igual a la cardinalidad de  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$*

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu} K_{\lambda\mu} S^\lambda$$

Veamos algunos casos en donde ejemplifiquemos las observaciones que realizamos.

**Ejemplo 3.101** *Supongamos que  $\lambda = (n)$ , para toda  $\mu$  tendríamos que  $\lambda \supseteq \mu$  y en este caso veremos que  $K_{\lambda\mu} = 1$ , el tipo de tabla es un renglón con  $n$  entradas y el contenido  $\mu$  nos da una lista de números con posibles repeticiones, hay una sola manera de ordenar estos valores en una lista con orden no decreciente en un solo renglón por lo tanto  $K_{(n)\mu} = 1$ .*

**Ejemplo 3.102** *Supongamos que  $\mu = (1^n)$  y  $\lambda \supseteq (1^n)$ , en este caso tenemos que el tipo de tabla está dada por  $\lambda$  y el contenido es  $(1^n)$  nos da una entrada por cada valor de  $1, \dots, n$ , dentro de esta lista no hay repeticiones y por lo tanto cualquier tabla semi estándar generalizada con contenido  $(1^n)$  es estándar por lo tanto  $K_{\lambda(1^n)} = f^\lambda$ , que habíamos definido como la cantidad de tablas estándar de tipo  $\lambda$ , por lo tanto se puede concluir que*

$$M^{(1^n)} = \bigoplus_{\lambda} f^\lambda S^\lambda,$$

*pero también sabíamos que  $f^\lambda = \dim(S^\lambda)$  por lo tanto cada módulo irreducible de  $S_n$  aparece tantas veces como su dimensión, esto significa que  $M^{(1^n)}$  es la representación regular.*

**Ejemplo 3.103** *Finalmente un ejemplo menos específico, consideremos  $\mu = (3, 2, 1) \vdash 6$ , es decir debemos buscar todas las particiones  $\lambda$  tales que tengan tres valores uno, dos valores dos y un valor tres y la otra condición que debemos pedir es que  $\lambda \supseteq \mu$ , las cuales son:*

$$\lambda = (3, 2, 1) \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda = (3, 3) \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda = (4, 1, 1) \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda = (4, 2) \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda = (5, 1) \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda = (6) \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Para esto debemos eliminar la partición  $\lambda = (2, 2, 2)$  pues no domina a  $\mu$  y en el caso  $\lambda = (4, 1, 1)$  en principio podríamos considerar el llenado  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}$ , sin embargo esta tabla no corresponde a una tabla semi estándar. Por lo tanto concluimos que

$$M^{(3,2,1)} = S^{(3,2,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus S^{(4,1,1)} \oplus 2S^{(4,2)} \oplus 2S^{(5,1)} \oplus S^{(6)}.$$

# Capítulo 4

## La correspondencia RSK

Ya hemos dado un conjunto que sirve de base para  $S^\lambda$  en la sección anterior, sin embargo a lo largo de la historia se han exhibido diferentes modos de llegar al resultado sin salirnos de nuestro lenguaje a base de tablas, en este capítulo exhibiremos una nueva forma de llegar al resultado usando las tablas estándar y el algoritmo de inserción o salto de renglón. El objetivo es mostrar una biyección entre las permutaciones y los pares  $(s, t)$  donde  $s$  y  $t$  son tablas estándar del mismo tipo.

### 4.1 Salto de Renglón

Antes de exhibir la correspondencia necesitamos una nueva herramienta, hay que definir dos operaciones, la primera de ellas es el salto de renglón también conocido como algoritmo de inserción o algoritmo de RSK y como podremos apreciar en el ejemplo que daremos es posible observar que el algoritmo es más fácil de realizar que de presentar en general, la segunda operación es el procedimiento inverso, comencemos con el salto de renglón, este proceso será mostrado para tablas semi estándar, sin embargo más adelante veremos que sólo nos interesa aplicarlo a tablas estándar. El proceso es como sigue:

Consideremos  $m \in \mathbb{Z}^+$  y  $t \in T_\lambda$ ,  $\lambda \vdash n$  una tabla semi estándar, denotemos por  $R_1, R_2, \dots, R_k$  los renglones de la tabla y por  $r_{i,j}$  a la entrada del renglón  $i$  y entrada  $j$ . Antes que nada nos fijamos en las entradas del primer renglón, si  $r_{1,j} \leq m$  para todo  $j \in \mathbb{N}^+$  entonces procedemos a añadir una celda al final del primer renglón con el valor de  $m$  y ahí terminaría el algoritmo. De no ser así, entonces  $m < r_{1,j}$  p.a.  $j \in \mathbb{N}^+$ , como podría haber repetición de los  $r'_{1,j}$ s lo que haremos será tomar el primer valor donde la desigualdad se de (leyendo la tabla de izquierda a derecha), de este modo tendremos  $r_{1,j-1} \leq m$  y  $m < r_{1,j}$  por tanto vamos a colocar a  $m$  en el lugar de  $r_{1,j}$ , de este modo si el primer renglón se ve como:

$$r_1 = \boxed{r_{1,1} \quad \dots \quad r_{1,j-1} \quad r_{1,j} \quad r_{1,j+1} \quad \dots}$$

al insertar el valor  $m$  se verá así:

$$r'_1 = \boxed{r_{1,1} \quad \dots \quad r_{1,j-1} \quad m \quad r_{1,j+1} \quad \dots}$$

¡Entonces ya colocamos a  $m$ ! Ahora debemos colocar a  $r_{1,j}$ , para ello repetiremos el procesor anterior, nos fijamos en el segundo renglón y de nuevo se nos presentan dos casos, si

$r_{2,i} \leq r_{1,j}$  para toda  $i$ , entonces añadimos una celda al final del segundo renglón con el valor de  $r_{1,j}$  y ahí termina el proceso, si no, entonces buscamos la primera entrada tal que  $r_{2,i} > r_{1,j}$  y colocamos ahí el valor de  $r_{1,j}$ . El proceso puede concluir de dos modos, o bien añadimos una celda al final del renglón o bien vamos saltado de renglón en renglón insertando el valor donde sea necesario y que al final queden  $k + 1$  renglones, donde el último renglón consiste de una sola celda con el elemento que se quitó del renglón anterior en el último paso.

**Notación 4.1** Dada una tabla  $t$ , la tabla obtenida de insertar el valor  $m$  a  $t$  la denotaremos por  $(m \rightarrow t)$ .

**Ejemplo 4.2** Sea  $t =$

1	2	2	5
3	3	6	
4	7	7	

y vamos a insertar el valor 4, empezamos comparado

a 4 con los elementos del primer renglón, de modo que debemos colocar al 4 en el lugar del 5 y así obtenemos la tabla

1	2	2	4
3	3	6	
4	7	7	

ahora colocamos el valor 5 en el segundo renglón

1	2	2	4
3	3	5	
4	7	7	

continuando con el proceso se obtiene

1	2	2	4
3	3	5	
4	6	7	

y por último tenemos

$$(4 \rightarrow t) =$$

1	2	2	4
3	3	5	
4	6	7	
7			

Es importante notar que este procedimiento tiene un proceso inverso si conocemos el último valor agregado, es decir, dada una tabla podemos volver en nuestros pasos para recuperar la tabla original.

Sea  $p \in \mathbb{N}^+$ , el último valor agregado, entonces  $p$  se encuentra en el renglón  $k - \text{ésimo}$  ó en el  $(k + 1) - \text{ésimo}$ , como no afecta al algoritmo, digamos que tiene  $k$  renglones, de modo que  $p$  se encuentra en alguna esquina inferior, queremos colocar a  $p$  en el lugar que le corresponde en el renglón  $(k - 1) - \text{ésimo}$ .

Tomamos el mayor  $j \in \mathbb{N}^+$  tal que  $p > r_{k-1,j}$ , es decir leyendo la tabla de izquierda a derecha colocamos a  $p$  en el último lugar donde se de la desigualdad  $p > r_{k-1,j}$  entonces  $p$  ocupa el lugar de  $r_{k-1,j}$ .

Ahora hay que colocar a  $r_{k-1,j}$  en el  $(k - 2) - \text{ésimo}$  renglón de  $t$  y hacemos el mismo procedimiento, de este modo cuando lleguemos al renglón  $r_2$ , el valor que de ahí obtenemos lo ubicamos en la celda de  $r_1$  y el valor que saquemos de  $r_1$  es con el que se inició y así recuperamos la tabla original. Veamos un ejemplo para dejar claro cómo funciona.

**Ejemplo 4.3** Usando el ejemplo anterior tenemos que la tabla final es

$$t' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 5 & \\ \hline 4 & 6 & 7 & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

primero necesitamos acomodar a el 7 en el tercer renglón, el último lugar donde sucede la desigualdad estricta es en el segundo lugar por lo tanto 7 ocupará el lugar de 6, entonces la nueva tabla que queda es:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 5 & \\ \hline 4 & 7 & 7 & \\ \hline \end{array}$$

repetiendo el procedimiento las siguientes tablas son:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 6 & \\ \hline 4 & 7 & 7 & \\ \hline \end{array} \implies \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 3 & 6 & \\ \hline 4 & 7 & 7 & \\ \hline \end{array}$$

y entonces el valor agregado que se agregó a la tabla original es 4.

## 4.2 Teorema de Simetría

En esta sección mostraremos la correspondencia buscada, la cual es llamada correspondencia RSK ó teorema de simetría, éste nos da una prueba biyectiva de la identidad

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!.$$

Observemos que esta identidad puede interpretarse de modo puramente combinatorio, dice que el número elementos en  $S_n$  es igual al número de pares de tablas estándar de tipo  $\lambda$ , donde  $\lambda \vdash n$ . Usaremos los dos algoritmos que fueron presentados anteriormente, antes de enunciar el teorema hace falta ver un par de obsevaciones.

**Observación 4.4** Sea  $t \in T_\lambda - \text{estándar}$  (semiestándar), si  $m$  no es alguna entrada de  $t$ , entonces  $(t \leftarrow m)$  es estándar (semiestándar).

**Definición 4.5** Diremos que una matriz con entradas  $(2 \times n)$  posee el orden lexicográfico si al comparar dos entradas consecutivas  $\binom{i}{j}$  e  $\binom{i'}{j'}$  con  $\binom{i}{j}$  apareciendo primero en el arreglo se tiene que ó bien  $i < i'$  ó  $i = i'$  y  $j \leq j'$ .

Ahora vamos a considerar arreglos de  $(2 \times n)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  con el orden lexicográfico, este tipo de arreglos por inocentes que se puedan pensar son los que pondremos en correspondencia con pares de tablas estándar  $(s, t)$  y ésta es la correspondencia que buscamos.

**Observación 4.6** *Considerando la notación de permutación dada por un arreglo de  $(2 \times n)$ , éste conserva el orden lexicográfico.*

¡Ahora ya podemos exhibir la correspondencia RSK!

**Teorema 4.7** *(Teorema de Simetría) Existe una biyección, llamada la correspondencia RSK, entre las permutaciones y tablas  $(s, t)$  estándar del mismo tipo, dicha biyección será denotada por*

$$\pi \xleftrightarrow{RSK} (s, t).$$

**Demostración.** Consideremos una permutación, *i.e.*  $\begin{pmatrix} 1, & \dots, & k \\ \pi(1), & \dots, & \pi(k) \end{pmatrix}$ , además tomemos dos tablas  $s_0$  y  $t_0$  tal que  $s_0$  contiene una celda con el valor de  $j_0$  y  $t_0$  una celda con el valor de  $i_0$ , entonces  $(s_0, t_0) = (\boxed{\pi(1)}, \boxed{1})$ , ahora vamos a aplicar a  $S_0$  el salto de renglón en cada entrada insertando a  $\pi(2)$ , de modo que tengamos una tabla  $s_1$  formada por dos celdas, una con  $\pi(1)$  y otra con  $\pi(2)$ , como estamos aplicando el salto de renglón la tabla que se forma es estándar, una vez que tengamos a  $s_1$  crearemos a  $t_1$  simplemente añadiendo una celda, en este caso con el valor 2 de modo que las tablas sean del mismo tipo, continuando de este modo el resultado en el  $k - \text{ésimo}$  paso serán dos tablas estándar  $(s_k, t_k) = (s, t)$  del mismo tipo. De este modo hemos asignado a la pareja  $\pi \rightarrow (s, t)$ . Ahora vamos a mostrar cómo llegar a un arreglo de tipo  $(2 \times k)$  a partir de dos tablas estándar del mismo tipo, para esto usaremos el procedimiento inverso al salto de renglón, además para facilitar la visualización del resultado denotaremos por  $h_{i,j}$  y  $l_{i,j}$  la entrada ubicada en la columna  $i$  renglón  $j$  de  $s$  y  $t$  respectivamente.

Sea  $(s, t) = (s_k, t_k)$  un par formado por dos tablas estándar, queremos obtener el par  $(s_{k-1}, t_{k-1})$  y relacionarlo con el arreglo de tipo  $(2 \times k)$ , para ello vamos a considerar el valor más grande en la tabla  $t_k$ , digamos que dicho valor se encuentra es la entrada  $l_{i,j}$ , el cual, debido a que estamos usando tablas estándar, es  $k$ , pero que por el momento tomaremos como  $l_{i,j}$ , para empezar construiremos el arreglo de  $(2 \times k)$  tal que en el primer renglón el valor que coloquemos sea  $l_{i,j}$ , ahora observemos que en la tabla  $s_k$  existe la entrada  $h_{i,j}$ , lo que haremos será aplicar el procedimiento inverso al salto de renglón a la entrada  $h_{i,j}$ , así por una parte obtendremos la tabla  $s_{k-1}$  y además el valor obtenido de aplicar el procedimiento inverso será el valor asociado a  $l_{i,j}$  en el arreglo de  $(2 \times k)$ , es decir, supongamos que el valor que se obtuvo de aplicar el procedimiento inverso es  $z_k$  entonces para el primer paso tendríamos que el arreglo de tipo  $(2 \times k)$  en el primer paso se verá como:

$$\begin{pmatrix} l_{i,j} \\ z_k \end{pmatrix}$$

Además la tabla  $t_{k-1}$  será la obtenida simplemente de remover la entrada  $l_{i,j}$ , continuando con este proceso podemos obtener el arreglo de tipo  $(2 \times k)$  deseado. ■

Veamos un ejemplo para ver el funcionamiento de los algoritmos y apreciar mejor cómo esta dada la biyección.

**Ejemplo 4.8** Sea  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 2 & 5 & 1 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ , entonces

$$(s_0, t_0) = \left( \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right)$$

, ahora debemos insertar el valor 9 en  $s_0$  y a continuación agregar el valor 2 en  $t_0$  de modo que sea del mismo tipo, por lo tanto se obtiene  $(s_1, t_1) = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 9 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right)$ , siguiendo con el proceso se obtienen

$$(s_2, t_2) = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 9 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right)$$

$$(s_3, t_3) = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 6 & 9 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right)$$

$$(s_4, t_4) = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 9 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \right)$$

$$(s_5, t_5) = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 9 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \right)$$

$$(s_6, t_6) = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & 9 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline \end{array} \right)$$

$$(s_7, t_7) = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 7 \\ \hline 6 & 9 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 8 \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline \end{array} \right)$$

$$(s_8, t_8) = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 7 & \\ \hline 6 & 9 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 & 9 \\ \hline 3 & 4 & 8 & \\ \hline 5 & 7 & & \\ \hline \end{array} \right)$$

Ahora vamos a partir como si sólo conociéramos el par de tablas estándar

$$(s, t) = (s_8, t_8) = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 7 & \\ \hline 6 & 9 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 & 9 \\ \hline 3 & 4 & 8 & \\ \hline 5 & 7 & & \\ \hline \end{array} \right)$$

*Volviendo sobre nuestros pasos se obtienen las tablas y los arreglos*

$$\begin{aligned}
 (s_7, t_7) &= \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 7 \\ \hline 6 & 9 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 8 \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 (s_6, t_6) &= \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & 9 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 (s_5, t_5) &= \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 9 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 (s_4, t_4) &= \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 9 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 (s_3, t_3) &= \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 6 & 9 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 (s_2, t_2) &= \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 9 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 (s_1, t_1) &= \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 9 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 (s_0, t_0) &= \left( \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 5 & 1 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 (s, t) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 2 & 5 & 1 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [Av] Avella *et ál.*, Grupos I, Instituto de Matemáticas de la UNAM, Primera Edición, 2014.
- [Fu] Fulton William, *Young Tableaux*, Cambridge University Press, London Mathematic Society Students Text No. 35 (1997).
- [Ja] James Gordon, Liebeck Martin, Representations and Characters of Groups, Segunda edición, Cambridge University Press, 2001.
- [Con] Keith Conrad, *The Sign of a Permutation*,  
[www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/sign.pdf](http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/sign.pdf).
- [Le] Cagliero Leandro, *Representaciones del Grupo Simétrico*, Universidad Nacional de Córdoba.  
[www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie\\_b/BMat49-1.pfd](http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BMat49-1.pfd).
- [Ma] Wildon Mark, *A Combinatorial Introduction to the Representation Theory of  $S_n$* , 2001.  
[www.ma.rhul.ac.uk/~uvah099/Maths/SymComb.pdf](http://www.ma.rhul.ac.uk/~uvah099/Maths/SymComb.pdf).
- [Pa] Padilla G. *Teoría de Representaciones de Grupos*, 2009.  
<https://gabrielpadrillaleon.files.wordpress.com/2012/07/teorepgrupos.pdf>.
- [Sa] Sagan E. Bruce, *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*, Segunda edición. Belmont, California: Board, 1991.
- [Za] Felipe Zaldivar, *Introducción a la teoría de Grupos*, Primera edición, Universidad Autónoma Metropolitana, 2006.