



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CÓPULAS ELÍPTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

PRESENTA:

Enrique Gustavo Sanjuanero Sánchez

TUTOR

Mat. Armando Varela Álvarez

2016

Ciudad de México, CDMX





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Sanjuanero
Sánchez
Enrique Gustavo
55193682
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
097252265
2. Datos del tutor
Mat.
Varela
Álvarez
Armando
3. Datos del sinodal 1
Dr.
Mena
Chávez
Ramsés Humberto
4. Datos de sinodal 2
Dr.
Salazar
Flores
Yuri
5. Datos de sinodal 3
Mat.
Hoyos
Argüelles
Ricardo
6. Datos de sinodal 4
Act.
González
Bonilla
Trinidad
7. Datos del trabajo escrito
Cópulas Elípticas
69 p
2016

Índice general

1. Introducción	5
2. Fundamentos teóricos	7
2.1. Preliminares	7
2.2. Subcópula y cópula	10
2.3. Teorema de Sklar	13
2.4. Cópulas y variables aleatorias	23
2.5. Simetría e intercambiabilidad	25
2.6. Medidas de dependencia	27
2.6.1. Dependencia en colas	28
2.7. Cópulas multivariadas.	30
3. Familias de cópulas elípticas y su estimación	35
3.1. Distribuciones elípticas	35
3.2. Cópulas elípticas	37
3.3. Estimación	38
3.4. Algoritmo de estimación para cópulas gaussianas y t de student	42
4. Ejemplo	45
4.1. Análisis previo de la información	45
4.2. Estimación del parámetro de correlación	50
4.2.1. Resultados cópula gaussiana	50
4.2.2. Resultados cópula t de student	53
4.2.3. Análisis de la calidad del ajuste	57
5. Conclusiones	59
A. Programas de estimación para la correlación	61

Capítulo 1

Introducción

Una de las principales funciones de un modelo estadístico recae en modelar el comportamiento de ciertos fenómenos mediante variables aleatorias. De esta forma resulta importante contar con métodos que repliquen las relaciones de dependencia existentes entre dichas variables.

En el presente trabajo buscamos primordialmente analizar la relación que pueda existir en el comportamiento de los precios de tres activos financieros que cotizan en NASDAQ . Se busca un método que nos ayude a describir de forma eficiente la posible relación entre el comportamiento de dichos activos. Las cópulas se presentan como una opción destacable debido a que mediante ellas podemos construir la estructura de dependencia que existe entre un conjunto de variables aleatorias, partiendo del conocimiento que podamos tener del comportamiento aislado de cada una de las variables.

Las cópulas se han convertido en una herramienta estadística robusta cuyo uso se ha incrementado en años recientes, especialmente en el campo de las matemáticas financieras. Una de las ventajas que las cópulas tienen sobre las distribuciones multivariadas recae en su flexibilidad, considerando que pueden determinar la relación de dependencia existente entre cualesquiera funciones de distribución univariadas, mientras que dada una función de distribución multivariada las funciones de distribución marginales están completamente determinadas, limitando así las relaciones de dependencia que estas últimas pueden modelar.

El concepto de cópula fue introducido por Abe Sklar en 1959 mediante el teorema que lleva su nombre. Sin embargo, la investigación y aplicación de dicho teorema en la estadística y probabilidad se ha manifestado en mayor escala en estudios sobre funciones de distribución y modelación de riesgos en las últimas dos décadas. De forma resumida, dicho teorema expresa la relación existente entre dos funciones de distribución marginales F y G , en una función de distribución conjunta bivariada H , esto será descrito con mayor detalle en el capítulo dos.

En principio se dará una breve descripción de la teoría que fundamenta el concepto

de cópula y posteriormente mostraremos una aplicación de dicho concepto, realizando un estudio de la dependencia entre precios de activos financieros.

En el capítulo dos describiremos en las primeras secciones los elementos y propiedades que necesitaremos para definir el concepto de cópula y enunciar el Teorema de Sklar, la base bibliográfica que se empleará para este capítulo será “*An Introduction to Copulas*” de Roger B. Nelsen [Nel06]. Dichos fundamentos serán expresados primero en términos de dos variables, y posteriormente se citarán los casos con n variables.

Adicional a la teoría de cópulas, en este capítulo se definirá el concepto de concordancia entre variables aleatorias. Esto nos permitirá emplear distintas medidas de dependencia como la Tau de Kendall. Específicamente para este trabajo, el uso de dicha medida presenta una ventaja con respecto a otras, debido a que no depende de las distribuciones marginales y puede ser expresada a través de una cópula.

La aplicación del concepto de cópula se realizará empleando dos casos particulares de cópulas que se encuentran dentro de la familia de las cópulas elípticas, la gaussiana y la t de student. La definición y propiedades de estos casos serán descritos en el capítulo tres.

En este capítulo también presentaremos un método de estimación del parámetro de correlación asociado a este tipo de cópulas. Dicho método es alternativo al método de máxima verosimilitud empleado comúnmente y se basa en el artículo “*Maximum likelihood estimation of the correlation parameters for elliptical copulas*” de Lorenzo Hernández, Jorge Tejero y Jaime Vinuesa [MLE14]. Dicho método tiene como objetivo la obtención de la matriz de correlación a partir de optimizar una función de log-verosimilitud modificada. Esta función se obtiene al proyectar el espacio de matrices simétricas y definidas positivas en el espacio de matrices de correlación y luego aplicar la función de máxima verosimilitud usual. El algoritmo correspondiente a este proceso se implementará en el software MATLAB.

Por último, aplicaremos los conceptos de cópulas descritos y el método de estimación del parámetro de correlación presentado para analizar la estructura de dependencia que pueda existir entre los valores de activos de tres empresas que cotizan en el mercado NASDAQ: Apple, Microsoft y ATML. Con el fin de validar los resultados a partir del método de estimación del parámetro de correlación propuesto, se realizará una prueba de bondad de ajuste tipo Kolmogorov Smirnov con la cual realizaremos una comparación de los resultados que se obtendrían con la estimación precargada en MATLAB.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

El objetivo de este capítulo es presentar los elementos necesarios con los cuales podremos definir los conceptos de subcópula y posteriormente cópula. Estos conceptos y propiedades serán la base teórica de este trabajo y están basados en [Nel06]. Su aplicación será desarrollada más adelante.

2.1. Preliminares

Empezaremos definiendo los elementos básicos que necesitamos para definir una cópula.

Definición 2.1 (*H*-volumen.). Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$ y H una función tal que $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ t.q. $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$, es decir, B es un rectángulo con vértices (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) y (x_2, y_2) en el dominio de H . Definimos el H -volumen de B como:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \quad (2.1)$$

A partir de las siguientes diferencias:

$$\Delta_{x_1}^{x_2} = H(x_2, y) - H(x_1, y)$$

$$\Delta_{y_1}^{y_2} = H(x, y_2) - H(x, y_1)$$

$$V_H(B) = \Delta_{x_1}^{x_2}(\Delta_{y_1}^{y_2}H(x, y))$$

$$\begin{aligned} V_H(B) &= \Delta_{x_1}^{x_2}(H(x, y_2) - H(x, y_1)) \\ &= (H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)) - (H(x_2, y_1) - H(x_1, y_1)) \\ &= H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1) \end{aligned}$$

A partir de la definición del volumen de una función, introducimos la propiedad 2 – creciente, misma que como podremos observar es similar a una de las propiedades que comúnmente se emplean para definir una función de distribución.

Definición 2.2 (2-creciente). Sea H una función $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $S_1, S_2 \subset \bar{\mathbb{R}}$ no vacíos. Se dice que H es 2 – creciente si para todo $x_1, x_2 \in S_1$ y para todo $y_1, y_2 \in S_2$, tal que $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$ se cumple que $V_H(B) \geq 0$.

Ejemplo 2.1. A continuación se presenta un ejemplo de función 2 – creciente, este se toma de [Nel06] y se desarrolla de la siguiente forma:

$$H(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$$

Sea $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$ y $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\ &= (2x_2 - 1)(2y_2 - 1) - (2x_2 - 1)(2y_1 - 1) - (2x_1 - 1)(2y_2 - 1) \\ &\quad + (2x_1 - 1)(2y_1 - 1) \\ &= 2x_2 2y_2 - 2x_2 2y_1 - 2x_1 2y_2 + 2x_1 2y_1 \\ &= (2x_2 - 2x_1)(2y_2 - 2y_1) \\ &= 4(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Dado que $x_2 \geq x_1$ y $y_2 \geq y_1$ entonces

$$4(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0,$$

Por lo tanto H es 2 – creciente.

Observación 2.1. El hecho de que una función sea 2 – creciente no implica necesariamente que sea no decreciente en cada coordenada.

Ejemplo 2.2. Un ejemplo de la observación 2.1 se presenta si consideramos la función $H(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$, la cual comprobamos previamente es 2 – creciente. Sin embargo no cumple ser no decreciente en cada coordenada, ya que si $y \in (0, 1/2)$ y $x_1, x_2 \in S_1$ tal que $x_1 \leq x_2$, se tiene que $H(x_1, y) = (2x_1 - 1)(2y - 1)$ y $H(x_2, y) = (2x_2 - 1)(2y - 1)$, entonces:

$$\begin{aligned} (2x_1 - 1)(2y - 1) &\geq (2x_2 - 1)(2y - 1) \\ &= H(x_1, y) \geq H(x_2, y) \end{aligned}$$

Por lo tanto H es decreciente en S_1 cuando $y \in (0, 1/2)$. Esto es analogo para H en el caso donde $x \in (0, 1/2)$ y $y_1, y_2 \in S_2$ donde $y_1 \leq y_2$

Partiendo de las definiciones anteriores llegamos a los lemas con los cuales definiremos cuando una función está fija, así como el concepto de continuidad que emplearemos para la definición de subcópulas y posteriormente cópulas.

Lema 2.1. Sea $S_1, S_2 \subset \bar{\mathbb{R}}$ no vacíos, y H una función 2-creciente. Si $x_1, x_2 \in S_1$ y $y_1, y_2 \in S_2$, tal que $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$, entonces:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow H(t, y_2) - H(t, y_1) \quad \text{es creciente en } S_1 \\ s &\rightarrow H(x_2, t) - H(x_1, t) \quad \text{es creciente en } S_2 \end{aligned}$$

Demostración. Sea $t_1, t_2 \in S_1$ tal que $t_1 < t_2$, entonces:

$$\begin{aligned} h(t_2) - h(t_1) &= (H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1)) - (H(t_1, y_2) - H(t_1, y_1)) \\ &= H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1) - H(t_1, y_2) + H(t_1, y_1) \\ &= V_H([t_1, t_2] \times [y_1, y_2]) \geq 0 \end{aligned}$$

En donde, la tercera igualdad se debe a la definición 2.1 y la última desigualdad se basa en la definición 2.2.

Por lo tanto h es creciente. La prueba para $s \rightarrow H(x_2, t) - H(x_1, t)$, es análoga. \square

Una primer aplicación del lema 2.1 será para definir la propiedad *fija*.

Definición 2.3 (fija). Sea $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$, suponemos que a_1 y a_2 son los elementos ínfimos de S_1 y S_2 respectivamente, es decir,

$$\begin{aligned} a_1 &= \inf\{x \mid x \in S_1\} \\ a_2 &= \inf\{y \mid y \in S_2\} \end{aligned}$$

Decimos que H está fija si $H(a_1, y) = 0 = H(x, a_2)$ para toda $x \in S_1$ y $y \in S_2$

Lema 2.2. Sea $S_1, S_2 \subset \bar{\mathbb{R}}$ no vacíos, y $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función 2-creciente y fija, entonces H es creciente en cada coordenada.

Demostración. Consideremos $a_2 = \inf\{y \mid y \in S_2\}$, con $y_1, y_2 \in S_2$ tal que $y_1 \leq y_2$. Por el lema 2.1 sabemos que $h(t) = H(t, y_2) - H(t, y_1)$ es creciente. Si tomamos $y_1 = a_2$ entonces $h(t) = H(t, y_2) - 0 = H(t, y_2)$, por lo tanto es creciente en S_1 . Para S_2 , tomando $x_1 = a_1$ la prueba es análoga. \square

Definición 2.4. Supongamos que $S_1, S_2 \subset \bar{\mathbb{R}}$. Sea b_1 y b_2 elementos supremos en S_1 y S_2 respectivamente, es decir

$$\begin{aligned} b_1 &= \sup\{x \mid x \in S_1\} \\ b_2 &= \sup\{y \mid y \in S_2\}. \end{aligned}$$

Decimos que $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene marginales $F(x)$ y $G(y)$, es decir, $F : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $G : S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ denotamos

$$\begin{aligned} F(x) &= H(x, b_2) \\ G(y) &= H(b_1, y) \end{aligned}$$

Empleando los lemas 2.1 y 2.2 podemos establecer la relación entre la función H y sus marginales, esto se integra en el siguiente lema.

Lema 2.3. Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$, y $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$, una función fija y 2-creciente con marginales F y G . Si $x_1, x_2 \in S_1$ y $y_1, y_2 \in S_2$, con $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$, entonces:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|$$

Demostración. Tomamos la primera parte de la desigualdad:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| = |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|$$

Empleando la desigualdad del triángulo, tenemos:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|$$

A partir de esta expresión, si $x_1 \leq x_2$ y dado que H es fija y es 2-creciente, empleando los Lemas 2.1 y 2.2 sabemos que es creciente en cada coordenada, por lo que:

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq H(x_2, b_2) - H(x_1, b_2) \leq F(x_2) - F(x_1)$$

Análogo para el caso $x_2 \leq x_1$

$$0 \leq H(x_1, y_2) - H(x_2, y_2) \leq H(x_1, b_2) - H(x_2, b_2) \leq F(x_1) - F(x_2)$$

Por lo tanto:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |F(x_2) - F(x_1)|$$

Si seguimos el mismo razonamiento para los casos y_1, y_2 , donde $y_1 \leq y_2$ y $y_2 \leq y_1$ tenemos que

$$|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |G(y_2) - G(y_1)|$$

Por lo tanto:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|$$

□

2.2. Subcópula y cópula

Para esta sección, abordaremos en principio una clase mas general de funciones, mediante las que posteriormente podamos definir el concepto de cópula.

Definición 2.5 (2-subcópula). Una subcópula bidimensional ó 2-subcópula es una función $C' : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes propiedades:

$$i) S_1 \times S_2 \subset I^2 = [0, 1] \times [0, 1], \quad y \quad \{0, 1\} \subset S_1 \cap S_2$$

ii) C' es fija y 2-creciente

$$iii) \text{ Para toda } u \in S_1, \quad C'(u, 1) = u \\ \text{ Para toda } v \in S_2, \quad C'(1, v) = v$$

Observación 2.2. Para todo $(u, v) \in S_1 \times S_2$, $0 \leq C'(u, v) \leq 1$.

Demostración. Dado que C' es *fija* y *2-creciente* sabemos por el Lema 2.2 que C' es creciente en cada coordenada, con lo cual asumimos que si $v \leq 1$ y $u \geq 0$ entonces

$$C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u \leq 1$$

y

$$0 = C'(0, v) \leq C'(u, v).$$

□

Definición 2.6 (2-cópula). Sea C una subcópula bidimensional, decimos que C es cópula si $S_1 = S_2 = I = [0, 1]$.

Esta definición es equivalente a que la función C cumpla con las siguientes propiedades:

i) Para toda $u, v \in I$

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \quad (2.2)$$

y

$$C(u, 1) = u \quad y \quad C(1, v) = v \quad (2.3)$$

ii) C es *2-creciente*, es decir $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$

$$V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (2.4)$$

Teorema 2.1. Sea C' una subcópula, para todo $(u, v) \in \text{Dom}C'$ se tiene que:

$$\text{máx}\{u + v - 1, 0\} \leq C'(u, v) \leq \text{mín}\{u, v\} \quad (2.5)$$

Demostración. Si C' es subcópula sabemos que cumple con las propiedades de estar *fija* y ser *2-creciente*, por lo que empleando el Lema 2.2, C' es creciente en cada coordenada, entonces $C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u$ y $C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$, por lo tanto

$$C'(u, v) \leq \text{mín}\{u, v\}$$

Ahora, para probar $C'(u, v) \geq \text{máx}\{u + v - 1, 0\}$, como C' es *2-creciente*, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq V_C([u, 1] \times [1, v]) \\ &= C'(1, 1) - C'(u, 1) - C'(1, v) + C'(u, v) \\ &= 1 - u - v + C'(u, v) \end{aligned}$$

Despejando $C'(u, v)$, obtenemos que

$$C'(u, v) \geq u + v - 1$$

y utilizando que $0 \leq C'(u, v) \leq 1$, entonces

$$C'(u, v) \geq \text{máx}\{u + v - 1, 0\}.$$

□

Los extremos en la desigualdad del teorema 1.1 son conocidos como cotas de Fréchet-Hoeffding. En el caso de $\min\{u, v\}$ ó cota superior, es denotada usualmente como $M(u, v)$ y en el caso de $\max\{u + v - 1, 0\}$ ó cota inferior, se denota como $W(u, v)$ [Nel06].

Es importante mencionar que el teorema 1.1 hace referencia a subcópulas, sin embargo, tomando en cuenta que las cópulas son una clase particular de las subcópulas podemos expresar la desigualdad anterior como:

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \quad (2.6)$$

donde $W(u, v)$ y $M(u, v)$ son cópulas.

Ejemplo 2.3. Sea $W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$, entonces $W(u, v)$ es cópula.

Demostración. i) Probemos que $W(u, 0) = 0 = W(0, v)$

$$\begin{aligned} W(u, 0) &= \max\{u + 0 - 1, 0\} = \max\{u - 1, 0\} = 0 \\ W(0, v) &= \max\{0 + v - 1, 0\} = \max\{v - 1, 0\} = 0 \end{aligned}$$

ii) Probemos que $W(u, 1) = u$ y $W(1, v) = v$

$$\begin{aligned} W(u, 1) &= \max\{u + 1 - 1, 0\} = \max\{u, 0\} = u \\ W(1, v) &= \max\{1 + v - 1, 0\} = \max\{v, 0\} = v \end{aligned}$$

iii) Probemos que $W(u, v)$ es 2-creciente.

Sea $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$, $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, y $B = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$, tal que:

$$V_W(B) = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] = W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1)$$

Probando por casos, de acuerdo a las regiones:

Caso 1) $u_2 + v_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} V_W(B) &= \max\{u_2 + v_2 - 1, 0\} - \max\{u_2 + v_1 - 1, 0\} - \max\{u_1 + v_2 - 1, 0\} \\ &\quad + \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} \\ V_W(B) &= 0 \end{aligned}$$

Caso 2) $u_2 + v_2 > 1$, $u_1 + v_2 \leq 1$ y $u_2 + v_1 \leq 1$

$$\begin{aligned} V_W(B) &= \max\{u_2 + v_2 - 1, 0\} - \max\{u_2 + v_1 - 1, 0\} - \max\{u_1 + v_2 - 1, 0\} \\ &\quad + \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} \\ &= u_2 + v_2 - 1 - 0 - 0 + 0 \\ &= u_2 + v_2 - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Caso 3) $u_2 + v_2 > 1$, $u_1 + v_1 > 1$ y $u_1 + v_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} V_W(B) &= \max\{u_2 + v_2 - 1, 0\} - \max\{u_2 + v_1 - 1, 0\} - \max\{u_1 + v_2 - 1, 0\} \\ &\quad + \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} \\ &= (u_2 + v_2 - 1) - (u_2 + v_1 - 1) - 0 + 0 \\ &= v_2 - v_1 > 0 \end{aligned}$$

Caso 4) $u_2 + v_2 > 1$, $u_1 + v_2 > 1$ y $u_2 + v_1 \leq 1$

$$\begin{aligned} V_W(B) &= \max\{u_2 + v_2 - 1, 0\} - \max\{u_2 + v_1 - 1, 0\} - \max\{u_1 + v_2 - 1, 0\} \\ &\quad + \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} \\ &= (u_2 + v_2 - 1) - 0 - (u_1 + v_2 - 1) + 0 \\ &= u_2 - u_1 > 0 \end{aligned}$$

Caso 5) $u_1 + v_2 > 1$, $u_2 + v_1 > 1$ y $u_1 + v_1 \leq 1$

$$\begin{aligned} V_W(B) &= \max\{u_2 + v_2 - 1, 0\} - \max\{u_2 + v_1 - 1, 0\} - \max\{u_1 + v_2 - 1, 0\} \\ &\quad + \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} \\ &= (u_2 + v_2 - 1) - (u_2 + v_1 - 1) - (u_1 + v_2 - 1) + 0 \\ &= 1 - u_1 - v_1 \\ &= 1 - (u_1 + v_1) > 0 \end{aligned}$$

Caso 6) $u_1 + v_1 > 1$

$$\begin{aligned} V_W(B) &= \max\{u_2 + v_2 - 1, 0\} - \max\{u_2 + v_1 - 1, 0\} - \max\{u_1 + v_2 - 1, 0\} \\ &\quad + \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} \\ &= (u_2 + v_2 - 1) - (u_2 + v_1 - 1) - (u_1 + v_2 - 1) + (u_1 + v_1 - 1) \\ &= u_2 + v_2 - 1 - u_2 - v_1 + 1 - u_1 - v_2 + 1 + u_1 + v_1 - 1 = 0 \\ V_W(B) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $W(u, v)$ es 2-creciente y por lo tanto $W(u, v)$ es cópula. \square

Teorema 2.2. Sea C' una subcópula, para todo $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \text{Dom}C'$ tenemos:

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$$

Por lo tanto C' es uniformemente continua sobre su dominio.

Demostración. Considerando que C' es fija y 2-creciente entonces sus marginales están dadas por $F(u) = C'(u, 1) = u$ y $G(v) = C'(1, v) = v$.

Empleando el lema 1.3, tenemos

$$\begin{aligned} |C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| &\leq |F(u_2) - F(u_1)| + |G(v_2) - G(v_1)| \\ &= |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \end{aligned}$$

\square

2.3. Teorema de Sklar

En la sección anterior se definió el concepto de cópula y sus propiedades. En esta sección el objetivo es determinar una función de distribución conjunta multivariada a partir de sus distribuciones marginales. Se presenta el Teorema de Sklar el cual nos

ayudará a entender la relación que existe entre funciones de distribución conjunta multivariada y sus marginales, y a partir de esto poder describir su aplicación en la construcción de cópulas.

En principio, haremos un breve repaso de las definiciones de función de distribución que emplearemos para presentar el Teorema de Sklar.

Definición 2.7 (Función de Distribución). Sea $F : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que F es función de distribución si:

- i) F es no decreciente, y
- ii) $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.

Definición 2.8 (Función de Distribución Conjunta). Sea $F : \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que H es función de distribución conjunta si:

- i) F es 2-creciente, y
- ii) $H(x, -\infty) = 0 = H(-\infty, y)$ y $H(\infty, \infty) = 1$.

Las definiciones 1.7 y 1.8 presentan condiciones más débiles que su versión probabilística, considerando que para la definición 1.7 se adiciona la condición de ser continua por la derecha con límite por la izquierda y en el caso de la definición 1.8 también se debe cumplir continuidad por la derecha y límite por la izquierda en cada coordenada.

Observación 2.3. Si H es función de distribución conjunta, entonces tiene marginales $F(x) = H(x, \infty)$ y $G(y) = H(\infty, y)$.

Observación 2.4. Las marginales F, G de una función de distribución conjunta H son funciones de distribución.

Teorema 2.3 (Sklar). Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Entonces, existe una cópula C tal que:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (2.7)$$

Si F y G son continuas entonces C es única. En caso contrario, C esta determinada de manera única en $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$.

De manera inversa, si C es cópula y F y G son funciones de distribución, entonces H definida como en 2.7 es función de distribución conjunta.

La demostración de este teorema requiere de los lemas que se exponen a continuación.

Lema 2.4. Sea H función de distribución conjunta con marginales F y G entonces existe una única subcópula C' tal que:

$$i) \text{ Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G, y$$

$$ii) H(x, y) = C'(F(x), G(y)) \quad \text{para todo } (x, y) \in \bar{\mathbb{R}}^2$$

Demostración. Si H es función de distribución conjunta entonces sabemos que es 2 – creciente y fija, a partir de estas propiedades empleamos el Lema 2.3, por lo que si (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) \in \bar{\mathbb{R}}^2$, entonces:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Si $F(x_1) = F(x_2)$ y $G(y_1) = G(y_2)$, entonces $H(x_2, y_2) = H(x_1, y_1)$, de esta forma el conjunto $\{(F(x_1), G(y_1)), H(x, y)\}$ define una función que llamaremos C' , que cumple $C'(F(x), G(y)) = H(x, y)$, es decir, $\text{Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$.

Lo siguiente será demostrar que C' es subcópula, por lo que debemos demostrar que:

$$i) S_1, S_2 \subset I, \text{ entonces } \{0, 1\} \subset S_1 \times S_2.$$

Como $\text{Ran}F \subset I$ y $\text{Ran}G \subset I$

$$F(-\infty) = 0 = G(-\infty), \text{ entonces } 0 \in \text{Ran}F \cap \text{Ran}G$$

$$F(\infty) = 1 = G(\infty), \text{ entonces } 1 \in \text{Ran}F \cap \text{Ran}G$$

$$ii) C' \text{ es fija.}$$

Si $v \in \text{Ran}G$, entonces existe $y \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $G(y) = v$

$$\begin{aligned} C'(0, v) &= C'(F(-\infty), G(y)) \\ &= H(-\infty, y) = 0 \end{aligned}$$

El procedimiento anterior es análogo para $C'(u, 0) = 0$.

$$iii) C' \text{ es 2 – creciente.}$$

Si $u_1, u_2 \in \text{Ran}F$ y $v_1, v_2 \in \text{Ran}G$, donde $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$, entonces

$$V_c([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0.$$

Si $u_1, u_2 \in \text{Ran}F$ entonces $\exists x_1, x_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $F(x_1) = u_1$ y $F(x_2) = u_2$, donde $F(x_1) \leq F(x_2)$ y para $v_1, v_2 \in \text{Ran}G$ entonces $\exists y_1, y_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $G(y_1) = v_1$ y $G(y_2) = v_2$, donde $G(y_1) \leq G(y_2)$, entonces:

$$\begin{aligned} V_{C'}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= C'(u_2, v_2) - C'(u_2, v_1) - C'(u_1, v_2) + C'(u_1, v_1) \\ &= C'(F(x_2), G(y_2)) - C'(F(x_2), G(y_1)) - C'(F(x_1), G(y_2)) + C'(F(x_1), G(y_1)) \\ &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\ &= V_H([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) \geq 0 \end{aligned}$$

$$iv) C' \text{ cumple con } C'(u, 1) = u \text{ y } C'(1, v) = v.$$

Sea $u \in \text{Ran}F$ entonces $\exists x \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = u$ y como $G(\infty) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
C'(u, 1) &= C'(F(x), G(\infty)) \\
&= H(x, \infty) \\
&= F(x) = u
\end{aligned}$$

□

Toda subcópula C' puede extenderse a una cópula C . Sin embargo es importante aclarar que esta extensión no es necesariamente única. Esto se denotará con el siguiente lema.

Lema 2.5. *Sea C' una subcópula, entonces existe una cópula C tal que $C(u, v) = C'(u, v) \quad \forall (u, v) \in \text{Dom}C'$.*

Demostración. Sea C' una subcópula con $\text{Dom}C' = S_1 \times S_2$. Si C' es subcópula sabemos que es 2-creciente y fija. Adicionalmente, por el Lema 1.2 sabemos que C' es creciente en cada coordenada, y por el Teorema 1.2 que es uniformemente continua sobre su dominio, por lo que C' puede extenderse de manera única a $\bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ donde denotamos a \bar{S} como la cerradura de S .

Recordemos que la cerradura de un conjunto \bar{S} contiene a todos sus puntos de acumulación. Recordemos que x_0 es punto de acumulación si $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in S$ y $x \neq x_0$ tal que $x \in V_\varepsilon(x_0)$, donde $V_\varepsilon(x_0)$ es la vecindad de radio ε con centro en x_0 . De esta manera para todo punto de acumulación x_0 podemos construir una sucesión creciente $\{x_n\}_{n \geq 1}$ tal que $n \rightarrow \infty x_n = x_0$. Por lo tanto la extensión de subcópula a cópula se plantea mediante el límite de los puntos de acumulación, y lo expresamos de la siguiente forma:

Sea $(x, y) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$, tal que $x \in \bar{S}_1/S_1$ y $y \in \bar{S}_2/S_2$, definimos C'' como la extensión de C' en $\bar{S}_1 \times \bar{S}_2$. Entonces,

$C''(x, y) = \lim_{x_n \rightarrow x} \lim_{y_n \rightarrow y} C'(x_n, y_n)$ donde $\{x_n\} \subset S_1$ y $\{y_n\} \subset S_2$, en donde x_n y y_n convergen de forma creciente a x y y , respectivamente.

Ahora, dado que buscamos extender C'' a I^2 , sea $(a, b) \in I^2$, definimos:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \max\{c \in \bar{S}_1 : c \leq a\}, \quad a_2 = \min\{d \in \bar{S}_1 : a \leq d\}, \\
a_1 &\leq a \leq a_2 \quad \text{y} \quad \text{si} \quad a \in \bar{S}_1 \Rightarrow a_1 = a = a_2.
\end{aligned}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned}
b_1 &= \max\{c \in \bar{S}_2 : c \leq b\}, \quad b_2 = \min\{d \in \bar{S}_2 : b \leq d\}, \\
b_1 &\leq b \leq b_2 \quad \text{y} \quad \text{si} \quad b \in \bar{S}_2 \Rightarrow b_1 = b = b_2.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si } a_1 < a_2 \\ 1 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\mu_1 = \begin{cases} \frac{b-b_1}{b_2-b_1} & \text{si } b_1 < b_2 \\ 1 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (2.9)$$

Con los elementos anteriores definimos a C como una interpolación bilineal de la siguiente forma, para todo $(a, b) \in I^2$

$$C(a, b) = (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C''(a_1, b_2) + \lambda_1(1 - \mu_1)C''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C''(a_2, b_2). \quad (2.10)$$

Mediante esta expresión, nos queda demostrar que C es cópula y extensión de C'' a I^2 :

Empezaremos probando que C es una extensión de la subcópula C'' :

Si $(a, b) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ entonces $C(a, b) = C''(a, b)$ ya que $a_1 = a_2$ y implica $\lambda_1 = 1$ y $\mu_1 = 1$. Sustituyendo en C

$$\begin{aligned} C(a, b) &= (1 - 1)(1 - 1)C''(a_1, b_1) + (1 - 1)C''(a_1, b_2) + (1 - 1)C''(a_2, b_1) \\ &\quad + C''(a_2, b_2) \\ &= C''(a_2, b_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto $C(a, b) = C''(a_2, b_2) = C''(a, b)$.

Probar que es cópula

i) Probar que es C esta fija.

Si $a \in I$ y $b = 0 \in \bar{S}_1$ entonces $b_1 = 0 = b_2$ y $\mu_1 = 1$.

Tomando en cuenta que C'' es subcópula

Si $a \in \bar{S}_1$ entonces $C(a, 0) = C''(a, 0) = 0$.

Si $a \notin \bar{S}_1$ entonces $a_1 < a < a_2$ y $C(a, 0) = (1 - \lambda_1)C''(a_1, 0) + C''(a_2, 0) = 0$.

Análogamente

Si $b \in I$ y $a = 0 \in \bar{S}_2$, entonces $C(0, b) = 0$

Por lo tanto C esta fija.

ii) Por demostrar que cumple $C(a, 1) = a$ y $C(1, b) = b$.

Si $a \in I$ y $b = 1 \in \bar{S}_1$, entonces $b_1 = 1 = b_2$ y $\mu_1 = 1$. Tomando en cuenta que C'' es cópula,

si $a \in \bar{S}_1$ entonces $C(a, 1) = C''(a, 1) = a$,

si $a \notin \bar{S}_1$, entonces

$$\begin{aligned}
C(a, 1) &= (1 - \lambda_1)C''(a_1, 1) + \lambda_1C''(a_2, 1) \\
&= (1 - \lambda_1)a_1 + \lambda_1a_2 \\
&= a_1 - \lambda_1a_1 + \lambda_1a_2 \\
&= a_1 - \lambda_1(a_2 - a_1), \quad \text{sustituyendo } \lambda_1 \\
&= a_1 + \left(\frac{a - a_1}{a_2 - a_1}\right)(a_2 - a_1) \\
&= a
\end{aligned}$$

Análogamente, si $b \in I$ y $a = 1 \in \bar{S}_2$, entonces $C(1, b) = b$ y por lo tanto $C(a, 1) = a$ y $C(1, b) = b$.

iii) Ahora probaremos que C es 2-creciente.

Sean $(a, b), (c, d) \in I^2$, tal que $a \leq c$ y $b \leq d$, definimos:

$a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \mu_1$ correspondientes a (a, b) y $c_1, c_2, d_1, d_2, \lambda_2, \mu_2$ correspondientes a (c, d) . Queremos demostrar que $V_C(B) \geq 0$, donde $B = [a, c] \times [b, d]$. Si tomamos el caso donde ningún valor de los vértices del rectángulo B pertenece a $\bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ y todos los valores son distintos, tenemos que:

$$\begin{aligned}
V_C([a, c] \times [b, d]) &= C(c, d) - C(c, b) - C(a, d) + C(a, b) \\
&= [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)C''(c_1, d_1) + (1 - \lambda_2)\mu_2C''(c_1, d_2) + \lambda_2(1 - \mu_2)C''(c_2, d_1) \\
&\quad + \lambda_2\mu_2C''(c_2, d_2)] - [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)C''(a_1, d_1) + (1 - \lambda_1)\mu_2C''(a_1, d_2) \\
&\quad + \lambda_1(1 - \mu_2)C''(a_2, d_1) + \lambda_1\mu_2C''(a_2, d_2)] - [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_1)C''(c_1, b_1) \\
&\quad + (1 - \lambda_2)\mu_1C''(c_1, b_2) + \lambda_2(1 - \mu_1)C''(c_2, b_1) + \lambda_2\mu_1C''(c_2, b_2)] \\
&\quad + [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C''(a_1, b_2) + \lambda_1(1 - \mu_1)C''(a_2, b_1) \\
&\quad + \lambda_1\mu_1C''(a_2, b_2)],
\end{aligned}$$

desarrollando cada término

$$\begin{aligned}
V_C([a, c] \times [b, d]) &= \lambda_2\mu_2C''(c_2, d_2) + C''(c_1, d_2)(\mu_2 - \lambda_2\mu_2) + (\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \mu_2)C''(a_2, d_2) \\
&\quad + C''(a_1, d_2)(\lambda_1\mu_2 - \mu_2) + C''(c_2, d_1)(\lambda_2 - \lambda_2\mu_2) \\
&\quad + C''(c_1, d_1)(-\mu_2 + \lambda_2\mu_2 + 1 - \lambda_2) + C''(a_2, d_1)(-\mu_2 - \lambda_1\mu_2 + \mu_2 + 1 - \lambda_1 - 1) \\
&\quad + C''(a_1, d_1)(-\mu_2 + \lambda_1\mu_2 - 1 + \lambda_1) + C''(c_2, b_2)(-\lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_2\mu_1) \\
&\quad + C''(c_1, b_2)(-1 + \lambda_2 + 1 - \mu_1 - \lambda_2 + \lambda_2\mu_1) \\
&\quad + C''(a_2, b_2)(-1 + \lambda_1 + 1 - \lambda_1\mu_1 + \lambda_1\mu_1 - 1 + \mu_1) + C''(a_1, b_2)(\mu_1 - \lambda_1\mu_1) \\
&\quad + C''(c_2, b_1)(-\lambda_2 + \lambda_2\mu_1) + C''(c_1, b_1)(-1 + \mu_1 + \lambda_2 - \lambda_2\mu_1) \\
&\quad + C''(a_2, b_1)(-1 + \lambda_1 + \mu_1 - \lambda_1\mu_1 + 1 - \mu_1) + C''(a_1, b_1)(1 - \lambda_1 - \mu_1 + \lambda_1\mu_1)
\end{aligned}$$

agrupando

$$\begin{aligned}
V_c([a, c] \times [b, d]) &= [\mu_2 - \lambda_1 \mu_2][C''(a_2, d_2) - C''(a_2, d_1) - C''(a_1, d_2) + C''(a_1, d_1)] \\
&+ \mu_2[C''(c_1, d_2) - C''(c_1, d_1) - C''(a_2, d_2) + C''(a_2, d_1)] \\
&+ \lambda_2 \mu_2[C''(c_2, d_2) - C''(c_2, d_1) - C''(c_1, d_2) + C''(c_1, d_1)] \\
&[1 - \lambda_1][C''(a_2, d_1) - C''(a_2, b_2) - C''(a_1, d_1) + C''(a_1, b_2)] \\
&+ [C''(c_1, d_1) - C''(c_1, b_2) - C''(a_2, d_1) + C''(a_2, b_2)] \\
&+ \lambda_2[C''(c_2, d_1) - C''(c_2, b_2) - C''(c_1, d_1) + C''(c_1, b_2)] \\
&+ [1 - \lambda_1 - \mu_1 + \lambda_1 \mu_1][C''(a_2, b_2) - C''(a_2, b_1) - C''(a_1, b_2) + C''(a_1, b_1)] \\
&+ [1 - \mu_1][C''(c_1, b_2) - C''(c_1, b_1) - C''(a_2, b_2) + C''(a_2, b_1)] \\
&[\lambda_2 - \lambda_2 \mu_1][C''(c_2, b_2) - C''(c_2, b_1) - C''(c_1, b_2) + C''(c_1, b_1)] \\
&= (1 - \lambda_1) \mu_2 V_{C''}([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) + \mu_2 V_{C''}([a_2, c_1] \times [d_1, d_2]) + \lambda_2 \mu_2 V_{C''}([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) \\
&+ (1 - \lambda_1) V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_2, d_1]) + V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_2, d_1]) + \lambda_2 V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) \\
&+ (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1) V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) + (1 - \mu_1) V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_1, b_2]) \\
&+ \lambda_2(1 - \mu_1) V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]) \geq 0
\end{aligned}$$

□

La extensión de una subcópula C' no necesariamente es única como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Sea $C' : \{0, 1\}^2 \rightarrow [0, 1]$, definida por $C'(0, 0) = C'(0, 1) = C'(1, 0) = 0$ y $C'(1, 1) = 1$.

Sabemos que C' es subcópula dado que

i) $Dom C' \subset I \rightarrow 0, 1 \subset S_1 \cap S_2$,

ii) Es 2-creciente y fija, y

iii) $C'(u, 1) = u$ y $C'(1, v) = v$.

Ya que sabemos que C' es subcópula, notemos que las cópulas W y M son extensiones de C' y son distintas entre sí.

Por otro lado, la cópula que se obtiene del lema 2.5 es la cópula Π . Sea $a, b \in I$, si $S_1 = \{0, 1\} = S_2$, $S_1 = \bar{S}_1$ y $S_2 = \bar{S}_2$, entonces $\bar{S}_1 = \{0, 1\} = \bar{S}_2$. Si $0 < a$ y $b < 1$, tenemos que:

$$a_1 = 0, b_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = a,$$

$$a_2 = 0, b_2 = 0 \Rightarrow \mu_1 = b.$$

Si sustituimos en la ecuación 1.9 del Lema 2.5, tenemos

$$\begin{aligned}
C(a, b) &= (1 - a)(1 - b)C''(0, 0) + (1 - a)bC''(0, 1) + a(1 - b)C''(1, 0) \\
&+ abC''(1, 1) = ab \\
&= \Pi(a, b).
\end{aligned}$$

Considerando que ya contamos con los elementos necesarios para demostrar el teorema de Sklar procedemos con la prueba del mismo.

Demostración. (Teorema de Sklar) Sea H una función de distribución con marginales F y G , sabemos por el Lema 2.4 que existe una única subcópula C' tal que:

$$i) \text{ Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$$

$$ii) H(x, y) = C'(F(x), G(y)) \quad \forall (x, y) \in \bar{\mathbb{R}}^2$$

Ahora, por el Lema 2.5 podemos extender C' a una subcópula C tal que $H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad \forall (x, y) \in \text{Dom}C$. Si F y G son continuas entonces $\text{Ran}F = \text{Ran}G = I$. Empleando nuevamente el Lema 2.4 la subcópula C' se define como una cópula y esta sería única.

Para demostrar el recíproco, sea C cópula y F y G funciones de distribución. Definimos $H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad \forall x, y \in \bar{\mathbb{R}}$, queremos demostrar que H es función de distribución conjunta con marginales F y G , por ende debería cumplir con:

$$i) H(\infty, \infty) = 1, \quad H(-\infty, y) = 0, \quad H(x, -\infty) = 0$$

$$ii) H \text{ es } 2\text{-creciente.}$$

Para el punto i) tenemos:

$$H(-\infty, y) = C(F(-\infty), G(y)) = C(0, y) = 0,$$

$$H(x, -\infty) = C(F(x), G(-\infty)) = C(x, 0) = 0,$$

$$H(\infty, \infty) = C(F(\infty), G(\infty)) = C(1, 1) = 1.$$

Para demostrar que H es 2-creciente , sean $-\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq \infty$ y $-\infty \leq y_1 \leq y_2 \leq \infty$. Considerando que F y G son no decrecientes, entonces $0 \leq F(x_1) \leq F(x_2) \leq 1$ y $0 \leq G(y_1) \leq G(y_2) \leq 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} V_H([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\ &= C(F(x_2), G(y_2)) - C(F(x_2), G(y_1)) - C(F(x_1), G(y_2)) + C(F(x_1), G(y_1)) \\ &= V_C([F(x_1), F(x_2)] \times [G(y_1), G(y_2)]). \end{aligned}$$

Sabemos que C es 2-creciente , por lo que

$$V_C([F(x_1), F(x_2)] \times [G(y_1), G(y_2)]) \geq 0$$

Entonces H es 2-creciente

Por lo tanto H es función de distribución conjunta

Ahora, por probar que F y G son marginales de H :

$$H(x, \infty) = C(F(x), G(\infty)) = C(F(x), 1) = F(x),$$

$$H(\infty, y) = C(F(\infty), G(y)) = C(1, G(y)) = G(y),$$

Por lo tanto H tiene marginales F y G .

□

El teorema de Sklar nos permite relacionar en la expresión (2.7), las funciones de distribución conjuntas con sus funciones de distribución marginales a través de cópulas. Sin embargo es posible invertir la expresión (2.7) de manera que podamos definir cópulas en términos de una función de distribución conjunta y las inversas de sus funciones de distribución marginales. En los casos donde las funciones de distribución marginales no son estrictamente crecientes es necesario definir las funciones cuasi-inversas.

Definición 2.9 (Cuasi-inversa de una función). *Sea F una función de distribución, decimos que $F^{(-1)}$ es una cuasi-inversa de F si su dominio es $I = [0, 1]$ y cumple lo siguiente:*

- i) *Si $t \in \text{Ran}F$, entonces $F^{(-1)}(t)$ es cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = t$, es decir $\forall t \in \text{Ran}F F(F^{(-1)}(t)) = t$.*
- ii) *Si $t \notin \text{Ran}F$, entonces $F^{(-1)}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq t\}$.*

Observación 2.5. *Si F es estrictamente creciente entonces existe una única cuasi-inversa $F^{(-1)}$ y coincide con la función inversa usual $F^{(-1)} = F^{-1}$.*

Ejemplo 2.5. *Sea $F(x)$ la función de salto unitario en $a \in \mathbb{R}$, donde:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Entonces $\text{Ran}F = \{0, 1\}$, una posible función cuasi-inversa, sería:

$$F^{(-1)}(t) = \begin{cases} a - 1 & \text{si } t = 0 \\ a & \text{si } 0 < t < 1 \\ a + 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.6. *Sea $\Phi(x)$ función de distribución de una variable aleatoria $N(0, 1)$,*

$$F(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Al buscar su función cuasi-inversa sabemos que $\Phi(x)$ es estrictamente creciente en \mathbb{R} . Además, $\Phi(-\infty) = 0$ y $\Phi(\infty) = 1$. Entonces la cuasi-inversa es única y coincide con la inversa usual, es decir $F^{(-1)} = \Phi^{-1}$.

Corolario 2.1. *Sea H función de distribución conjunta con marginales F y G , y C' la única subcópula tal que $\text{Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$ y*

$$H(x, y) = C'(F(x), G(y))$$

Sean $F^{(-1)}$ y $G^{(-1)}$ funciones cuasi-inversas de F y G , respectivamente, entonces $\forall (u, v) \in \text{Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$,

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (2.11)$$

Demostración. Sean $(u, v) \in \text{Ran}F \times \text{Ran}G$, entonces existen x, y tal que $F(x) = u$ y $G(y) = v$, si $F^{(-1)}$ y $G^{(-1)}$ funciones cuasi-inversas entonces $F^{(-1)}(u) = x$ y $G^{(-1)}(v) = y$. Tenemos que:

$$C'(u, v) = C'(F(x), G(y)) = H(x, y) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)).$$

Si F y G son continuas, entonces $\text{Ran}F = \text{Ran}G = I$, por lo que $\text{Dom}C' = I^2$. Por lo tanto

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \quad \text{define una cópula.}$$

□

Si F y G son continuas entonces C' es cópula y con esta expresión podemos obtener un método para construir cópulas a partir de funciones de distribución conjuntas. A continuación se presenta un ejemplo de como obtener una cópula a partir de la expresión (2.11).

Ejemplo 2.7. Sea:

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1} & (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \infty] \\ 1 - e^y & (x, y) \in [1, \infty] \times [0, \infty] \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

En principio calculamos sus marginales:

Cuando $x \in [-1, 1]$ y $y \in [0, \infty]$

Usando L'Hopital tenemos

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1} = (x+1) \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2e^y} = \frac{(x+1)}{2}.$$

Cuando $x \in [1, \infty]$ y $y \in [0, \infty]$

$$G(y) = 1 - e^y.$$

Entonces las marginales son:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{Si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{Si } y < 0 \\ 1 - e^y & \text{Si } y \geq 0 \end{cases}$$

Ahora se calculan las cuasi-inversas de F y G . Como F y G son estrictamente crecientes, entonces $F^{(-1)} = F^{-1}$ y $G^{(-1)} = G^{-1}$.

Para $F^{(-1)}$

$$\text{si } u \in [0, 1] \quad u = \frac{(x+1)}{2} \quad \Rightarrow x = 2u - 1 = F^{-1}(u).$$

Para $G^{(-1)}$

$$\text{si } v \in [0, 1] \quad v = 1 - e^y \quad \Rightarrow y = -\ln(1 - v) = G^{-1}(v).$$

Empleando el corolario, la cópula de H quedaría definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C(u, v) &= H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \\ &= \frac{(F^{(-1)}(u) + 1)(e^{G^{(-1)}(v)} - 1)}{F^{(-1)}(u) + 2e^{G^{(-1)}(v)} - 1} \\ &= \frac{(2u - 1 + 1)(e^{-\ln(1-v)} - 1)}{2u - 1 + 2e^{-\ln(1-v)} - 1} \\ &= \frac{u(1-v)^{-1}}{u - 1 + (1-v)^{-1}} \\ &= \frac{uv}{u + v - uv} \end{aligned}$$

Por lo tanto $C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}$ es cópula.

2.4. Cópulas y variables aleatorias

Definición 2.10. Si X es variable aleatoria ($X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$) definimos la función de distribución de X como $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si X, Y son variables aleatorias definimos la función de distribución conjunta

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

Ya definidos los elementos necesarios en relación a variables aleatorias y funciones de distribución, procedemos a enunciar el Teorema de Sklar en términos de funciones de distribución de variables aleatorias.

Teorema 2.4 (Teorema de Sklar para variables aleatorias). Sea X, Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H y marginales F y G entonces existe una cópula C_{XY} tal que:

$$H(x, y) = C_{XY}(F(x), G(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

Con base en las definiciones obtenidas, es importante mencionar que si F y G son funciones continuas entonces C_{XY} es única.

Observación 2.6 (Independencia). Sea X, Y variables aleatorias continuas entonces X y Y son independientes si y sólo si la subcópula C_{XY} es la cópula Π .

Demostración. Sea X y Y variables aleatorias independientes entonces $H(x, y) = F(x)G(y)$, dado que son continuas, empleando el teorema de Sklar sabemos que existe una única cópula tal que $H(x, y) = C(F(x), G(y)) = F(x)G(y)$, entonces $C_{XY}(u, v) = uv = \Pi(u, v)$. Para el regreso, si $C_{XY}(u, v) = uv$ para todo $u, v \in I$, y $u = F(x)$ y $v = G(y)$, entonces $C_{XY}(F(x), G(y)) = F(x)G(y)$. Por el Teorema de Sklar $H(x, y) = C_{XY}(F(x), G(y)) = F(x)G(y)$, por lo tanto X y Y son independientes. \square

Teorema 2.5. Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} . Sea α y β transformaciones estrictamente monotonas sobre $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$, respectivamente, entonces:

1. Si α y β son estrictamente crecientes, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = C_{XY}(u, v),$$

es decir, la cópula C_{XY} es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes.

2. Si α es estrictamente creciente y β es estrictamente decreciente, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

3. Si α es estrictamente decreciente y β es estrictamente creciente, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

4. Si α y β son estrictamente decrecientes, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

Demostración. Se demostrará únicamente el numeral 2.

Sea $F_{\alpha(X)}(x) = P[\alpha(X) \leq x]$ y $G_{\beta(Y)}(y) = P[\beta(Y) \leq y]$

Si α es estrictamente creciente

$$F_{\alpha(X)}(x) = P[\alpha(X) \leq x] = P[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_X(\alpha^{-1}(x)).$$

Si β es estrictamente decreciente

$$G_{\beta(Y)}(y) = P[\beta(Y) \leq y] = P[Y \geq \beta^{-1}(y)] = 1 - P[Y \leq \beta^{-1}(y)] = 1 - G(\beta^{-1}(y)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_{\alpha(X)}(x), G_{\beta(Y)}(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\ &= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)] \\ &= P[X \leq \alpha^{-1}(x)] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= F_X(\alpha^{-1}(x)) - C_{XY}(F_X(\alpha^{-1}(x)), G_Y(\beta^{-1}(y))) \\ &= F_{\alpha(X)}(x) - C_{XY}(F_{\alpha(X)}(x), 1 - G_{\beta(Y)}(y)) \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto } C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{X,Y}(u, 1 - v)$$

\square

Observación 2.7. Si C es cópula entonces se puede escribir como

$$C(u, v) = A_C(u, v) + S_C(u, v)$$

donde $A_C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s, t) dt ds$, esta representa la parte absolutamente continua de la expresión y $S_C(u, v) = C(u, v) - A_C(u, v)$, representa la parte singular.

A partir de esta expresión podemos identificar si C es absolutamente continua o singular de acuerdo a los siguientes casos:

- i) En el caso donde $C(u, v) = A_C(u, v)$ decimos que C es absolutamente continua.
- ii) Si $A_C(u, v) = 0, \forall (u, v) \in I^2$ entonces $C(u, v) = S_C(u, v)$ y decimos que C es singular.
- iii) En el caso donde C tiene parte absolutamente continua y singular entonces ni A_C ni S_C son cópula.

Ejemplo 2.8. Sea $\Pi(u, v) = uv$, calcular A_C y S_C

Por un lado, la densidad de la cópula esta dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} uv \\ &= \frac{\partial}{\partial u} u = 1 \end{aligned}$$

Así, podemos calcular A_C como

$$\begin{aligned} A_C &= \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Pi(s, t) dt ds \\ &= \int_0^u \int_0^v 1 dt ds = uv \\ &= \Pi(u, v) \end{aligned}$$

Por lo tanto $A_C(u, v) = \Pi(u, v)$

Finalmente, S_C está determinada por

$$\begin{aligned} S_C(u, v) &= C(u, v) - A_C(u, v) \\ &= uv - \Pi(u, v) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $S_C(u, v) = 0$.

Entonces la cópula Π es absolutamente continua.

2.5. Simetría e intercambiabilidad

Definición 2.11 (Simetría). Si X una variable aleatoria y $b \in \mathbb{R}$. Decimos que X es simétrica respecto a b si la función de distribución de la variable aleatoria $X - b$ es

igual a la función de distribución de la variable aleatoria $b - X$, lo cual denotaremos $X - b \stackrel{d}{=} b - X$, es decir, $\forall x \in \mathbb{R} \quad P[X - b \leq x] = P[b - X \leq x]$. Si X es continua con función de distribución F , podemos expresar la presente definición de la siguiente forma:

$$F(a+x) = \bar{F}(a-x)$$

Un ejemplo simple de esta definición lo tenemos si consideramos una función de distribución Normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, donde de la forma gráfica es fácil probar que $X \sim N(0, 1)$ y $-X \sim N(0, 1)$, por lo que podemos decir que X es simétrica respecto a 0.

Definición 2.12 (Intercambiabilidad). Sea X y Y variables aleatorias, decimos que X y Y son intercambiables si y solo si $(X, Y) \stackrel{d}{=} (Y, X)$, es decir $H(x, y) = H(y, x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde H es la función de distribución conjunta de (X, Y) .

Ejemplo 2.9. Sean 2 variables aleatorias exponenciales independientes con parámetro $\lambda > 0$, $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})$ y $G_Y(y) = (1 - e^{-\lambda y})$. Por independencia

$$\begin{aligned} H(x, y) &= F_X(x)G_Y(y) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda y}) \\ &= (1 - e^{-\lambda y})(1 - e^{-\lambda x}) = G_Y(y)F_X(x) \\ &= H(y, x). \end{aligned}$$

Por lo tanto X y Y son intercambiables.

Observación 2.8. Si X y Y son variables aleatorias intercambiables, entonces son idénticamente distribuidas:

$$F(x) = H(x, \infty) = H(\infty, x) = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

A partir de esta observación llegamos al siguiente teorema mediante el cual probaremos que si tenemos variables aleatorias idénticamente distribuidas, entonces son intercambiables si y sólo si su cópula es *simétrica*, es decir, si para todo $u, v \in I$ se cumple $C(u, v) = C(v, u)$.

Teorema 2.6. Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G respectivamente, y cópula C . Entonces X y Y son intercambiables si y sólo si $F = G$ y $C(u, v) = C(v, u)$, $\forall (u, v) \in I^2$, dada esta expresión decimos que C es simétrica.

Demostración. X y Y son intercambiables si y solo si:

$$H(x, y) = H(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$C(F(x), G(y)) = C(F(y), G(x)) \quad \text{empleando el teorema de Sklar.}$$

Consideramos que son idénticamente distribuidas, $F(x) = G(x)$, si y solo si:

$$C(F(x), F(y)) = C(F(y), F(x))$$

$$C(u, v) = C(v, u) \quad \text{con } u = F(x) \text{ y } v = G(y).$$

□

Ejemplo 2.10. Si X y Y son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas entonces son intercambiables.

Si F es la función de distribución de X y Y , y dado que son independientes, entonces

$$\begin{aligned} H(x,y) &= F(x)F(y) \\ &= F(y)F(x) \\ &= H(y,x), \quad \text{para toda } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto X y Y son intercambiables y

$$\begin{aligned} H(x,y) &= F(x)G(y) \\ &= C(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

es decir, $C(u,v) = \Pi(u,v) = uv$ es la cópula independencia.

Para el caso en el que X y Y son intercambiables pero no necesariamente independientes, usamos el siguiente ejemplo:

$$C(u,v) = \frac{uv}{u+v-uv}, \quad (x,y) \in I^2$$

entonces, $C(u,v) = C(v,u)$, por lo tanto X y Y son intercambiables pero no necesariamente independientes.

2.6. Medidas de dependencia

La estructura de dependencia entre variables aleatorias puede ser descrita ampliamente mediante su función de distribución conjunta. Existen indicadores que miden la dependencia entre variables, como la correlación lineal, sin embargo esta presenta inconvenientes ya que no es invariante bajo transformaciones monótonas no lineales. Las cópulas al ser invariantes bajo transformaciones monótonas nos hace contemplar otros tipos indicadores de dependencia, como la Tau de Kendall, la cual presenta una expresión definida en términos de cópulas, esto nos ayuda a obtener un análisis de dependencia mejor enfocado para este trabajo.

En esta sección nos enfocaremos en describir el concepto de concordancia en primer instancia, y posteriormente los métodos que emplearemos para analizar la relación entre las variables que emplearemos posteriormente: la Tau de Kendall y la dependencia en colas.

Definición 2.13 (Concordancia). Sea (x_i, y_i) y (x_j, y_j) observaciones aleatorias del vector (X, Y) , decimos que el par de observaciones (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes entre sí, si $x_i < x_j$ y $y_i < y_j$ o si $x_i > x_j$ y $y_i > y_j$. De forma análoga los pares serán discordantes cuando $x_i < x_j$ y $y_i > y_j$ o si $x_i > x_j$ y $y_i < y_j$. De igual forma podemos expresar la concordancia entre las observaciones de la siguiente forma:

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0 \quad (2.13)$$

Por el contrario, serán discordantes cuando:

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0 \quad (2.14)$$

Definición 2.14 (Tau de Kendall (muestral)). Esta medida puede ser entendida como la diferencia entre la probabilidad de que los datos observados estén en el mismo orden contra la probabilidad de que los datos observados no se encuentren en el mismo orden. Dicho lo anterior la Tau de Kendall muestral se define como la probabilidad de la diferencia de los pares concordantes (C) y los pares discordantes (D), $\tau = \mathbb{P}(\text{pares concordantes}) - \mathbb{P}(\text{pares discordantes})$, esto lo podemos expresar de la siguiente forma:

$$\tau = \frac{C - D}{C + D} = \frac{C - D}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{C - D}{\binom{n}{2}} \quad (2.15)$$

Donde $-1 \leq \tau \leq 1$

Definición 2.15 (Tau de Kendall (poblacional)). Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos con función de distribución conjunta H , definimos la Tau de Kendall poblacional como:

$$\tau_{(X,Y)} = \mathbb{P}((X_1, X_2)(Y_1, Y_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1, X_2)(Y_1, Y_2) < 0) \quad (2.16)$$

Partiendo de las definiciones anteriores, en el teorema que se enuncia a continuación obtendremos una expresión de medida de concordancia en términos de cópulas.

Teorema 2.7. Sea (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) dos vectores aleatorios independientes con distribución H_1 y H_2 , respectivamente, con marginales comunes F y G . Sean las cópulas C_1 y C_2 , definimos Q como la diferencia entre las probabilidades de concordancia y discordancia de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , lo cual expresamos como:

$$Q = \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0)$$

Entonces

$$Q = Q(C_1, C_2) = \iint_{\mathcal{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

$$\text{donde } dC_1 = \frac{\partial^2 C_1(u, v)}{\partial u \partial v}$$

Teorema 2.8. Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , definimos la Tau de Kendall poblacional en términos de cópulas como:

$$\tau_{XY} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \iint_{\mathcal{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (2.17)$$

El resultado anterior manifiesta la conveniencia de utilizar la τ de Kendall como medida de dependencia en este trabajo, ya que puede ser calculada utilizando únicamente la cópula sin necesidad de utilizar la distribución conjunta o las distribuciones marginales.

2.6.1. Dependencia en colas

La dependencia en colas se emplea como una medida de dependencia entre los valores extremos de dos variables aleatorias.

En esta sección presentaremos dos expresiones para definir la dependencia en colas, una es la comunmente encontrada en la literatura y la otra es una expresión alterna, será esta última la que emplearemos en este trabajo.

Definición 2.16. *Sean las variables aleatorias continuas X y Y cuyas funciones de distribución son F y G , respectivamente, definimos la dependencia en colas de acuerdo a lo siguiente.*

Dependencia Superior en colas entre dos valores extremos:

$$\lambda_U = \lim_{q \rightarrow 1^-} = \mathbb{P}[Y > G^{-1}(q) | X > F^{-1}(q)] \quad (2.18)$$

Dependencia Inferior en colas entre dos valores extremos:

$$\lambda_L = \lim_{q \rightarrow 1^-} = \mathbb{P}[Y < G^{-1}(1-q) | X < F^{-1}(1-q)] \quad (2.19)$$

A continuación describiremos un enfoque alterno al generalmente empleado para modelar dependencia total en colas, propuesto por Ming-Heng Zhang [Zha08]. La propuesta considera un enfoque basado en la práctica, donde es común encontrar que la dependencia en colas de eventos asociados a un vector aleatorio $(X, Y)^\top$ no se presenta únicamente dentro de las regiones $[x, +\infty) \times [y, +\infty)$ (UU), y $(-\infty, x] \times (-\infty, y)$ (LL). También es posible encontrar eventos en las regiones $[x, +\infty) \times (-\infty, y]$ (UL), y $(-\infty, x] \times (y, +\infty)$ (LU).

Definición 2.17. *Sea el vector aleatorio $(X, Y)^\top$, cuyas variables aleatorias X y Y son continuas con función de distribución F y G , respectivamente, y cópula asociada $C(u, v)$, definimos la dependencia en las colas sobre sus diagonales como:*

$$\Lambda(q) = \begin{pmatrix} \lambda_{LU}(q) & \lambda_{UU}(q) \\ \lambda_{LL}(q) & \lambda_{UL}(q) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Donde

$$\begin{cases} \lambda_{UU}(q) = \mathbb{P}[V > q | U > q] \\ \lambda_{UL}(q) = \mathbb{P}[V < (1-q) | U > q] \\ \lambda_{LL}(q) = \mathbb{P}[V < (1-q) | U < (1-q)] \\ \lambda_{LU}(q) = \mathbb{P}[V > q | U < (1-q)] \end{cases} \quad (2.21)$$

Es posible denotar la expresión anterior de forma asintótica como:

$$\Lambda = \lim_{q \rightarrow 1^-} \Lambda(q) = \begin{pmatrix} \lim_{q \rightarrow 1^-} \lambda_{LU}(q) & \lim_{q \rightarrow 1^-} \lambda_{UU}(q) \\ \lim_{q \rightarrow 1^-} \lambda_{LL}(q) & \lim_{q \rightarrow 1^-} \lambda_{UL}(q) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

La estimación empírica sobre las entradas de Λ tomando como base el conjunto de observaciones $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ se define a continuación.

Definición 2.18. *Sea el vector aleatorio $(X, Y)^\top$, con observaciones $\{(x_i, y_i)^\top\}_{i=1}^n$. Definimos la dependencia muestral en colas sobre las diagonales como:*

$$\hat{\Lambda}(q, n) = \begin{pmatrix} \lambda_{LU}(q, n) & \lambda_{UU}(q, n) \\ \lambda_{LL}(q, n) & \lambda_{UL}(q, n) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Donde

$$\begin{cases} \lambda_{UU}(q, n) = \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i \leq n} \mathbb{I}_{(x_i > x_{[nq]:n}, y_i > y_{[nq]:n})} \\ \lambda_{UL}(q, n) = \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i \leq n} \mathbb{I}_{(x_i > x_{[nq]:n}, y_i < y_{[n(1-q)]:n})} \\ \lambda_{LL}(q, n) = \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i \leq n} \mathbb{I}_{(x_i < x_{[n(1-q)]:n}, y_i < y_{[n(1-q)]:n})} \\ \lambda_{LU}(q, n) = \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i \leq n} \mathbb{I}_{(x_i < x_{[n(1-q)]:n}, y_i > y_{[nq]:n})} \end{cases} \quad (2.24)$$

Donde el cuantil $q \in (0, 5, 1)$, \mathbb{I} corresponde a la función indicadora, y $x_{i:n}$ y $y_{j:n}$ refieren a los estadísticos de orden de la muestra $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$.

2.7. Cópulas multivariadas.

En esta sección presentaremos la generalización de los conceptos y resultados sobre cópulas antes vistos a un espacio n – *dimensional*. Se omitirán las demostraciones dado que las ideas empleadas para desarrollar las mismas son muy similares a las desarrolladas en el caso bivariado y la complejidad adicional en la notación queda fuera de los alcances de este trabajo.

Notación. Comenzamos presentando la notación que se utilizará:

- $\bar{\mathbb{R}}^m = \bar{\mathbb{R}} \times \cdots \times \bar{\mathbb{R}}$ es el producto cruz de $\bar{\mathbb{R}}$ m veces.
- $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \bar{\mathbb{R}}^m$.
- Si $\underline{a}, \underline{b} \in \bar{\mathbb{R}}^m$ diremos que $\underline{a} \leq \underline{b}$ si y sólo si $a_i \leq b_i$ para toda $i = 1, \dots, m$.
- Si $\underline{a} \leq \underline{b}$ definimos $[\underline{a}, \underline{b}] := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ como el rectángulo o caja m – *dimensional*.
- Los vértices de $[\underline{a}, \underline{b}]$ son puntos de la forma $\underline{c} = (c_1, \dots, c_m)$, donde $c_i = a_i$ ó $c_i = b_i$ para todo $i = 1, \dots, m$. Observamos que existen 2^m vértices.
- Denotamos el cubo unitario m – *dimensional* como $I^m = I \times \cdots \times I$.
- Una función m – *dimensional* real valuada será $H : \bar{\mathbb{R}}^m \rightarrow \mathbb{R}$ con $DomH \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ y $RanH \subset \mathbb{R}$.

A continuación generalizamos la definición del volumen de una función.

Definición 2.19 (H-volumen n -dimensional). Sean $S_1, \dots, S_n \subset \bar{\mathbb{R}}$ no vacíos y $H : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $B = [\underline{a}, \underline{b}]$ tal que sus vértices están en $S_1 \times \cdots \times S_n$. Se define el H – volumen de B como

$$V_H(B) = \Delta_{\underline{a}}^{\underline{b}} H(\underline{t}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \Delta_{a_1}^{b_1} H(\underline{t}),$$

donde las n primeras diferencias de orden son

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\underline{t}) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

La definición anterior la podemos ejemplificar a continuación:

Ejemplo 2.11. Sea $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$, el H – volumen de B es

$$\begin{aligned} V_H(B) &= \Delta_{z_1}^{z_2} \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2} H(t_1, t_2, t_3) = \Delta_{z_1}^{z_2} \Delta_{y_1}^{y_2} (H(x_2, t_2, t_3) - H(x_1, t_2, t_3)) \\ &= \Delta_{z_1}^{z_2} (H(x_2, y_2, t_3) - H(x_1, y_2, t_3) - H(x_2, y_1, t_3) + H(x_1, y_1, t_3)) \\ &= H(x_2, y_2, z_2) - H(x_1, y_2, z_2) - H(x_2, y_1, z_2) + H(x_1, y_1, z_2) \\ &\quad - H(x_2, y_2, z_1) + H(x_1, y_2, z_1) + H(x_2, y_1, z_1) - H(x_1, y_1, z_1). \end{aligned}$$

Definición 2.20. Sea S_1, \dots, S_n no vacíos y H una función tal que $H : \text{Dom}H \rightarrow \text{Ran}H$ donde $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_n \subset \mathbb{R}^n$ y $\text{Ran}H \subset \mathbb{R}$. Definimos los siguientes conceptos:

1. **(n-creciente).** Decimos que H es n – creciente si y sólo si para todo $B = [a, b]$ con vértices en $\text{Dom}H$, se tiene que $V_H(B) \geq 0$.
2. **(Fija)** Si a_k es el elemento ínfimo de S_k , es decir $a_k = \inf\{x | x \in S_k\} \in S_k$ para todo $k = 1, \dots, n$, decimos que H está fija si $H(\underline{t}) = 0$ para todo $\underline{t} \in \text{Dom}H$ tal que $t_k = a_k$ para algún $k \in \{1, \dots, n\}$.
3. **(Marginales)** Si b_k es el elemento supremo de S_k , es decir, $b_k = \sup\{x | x \in S_k\} \in S_k$ para todo $k = 1, \dots, n$, H tiene marginales unidimensionales dadas por

$$H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) \quad \text{para } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Completando el punto 3 de la definición anterior, H también tiene marginales de dimensión r con $r \in \{2, \dots, n-1\}$. Por ejemplo, una de las marginales de dimensión 2 es

$$H_{1,2}(x, y) = H(x, y, b_3, \dots, b_n).$$

Ejemplo 2.12. Sea H una función con $\text{Dom}H = [-1, 1] \times [0, \infty] \times [0, \pi/2]$ dada por

$$H(x, y, z) = \frac{(x+1)(e^y - 1) \text{sen}(z)}{x + 2e^y - 1}.$$

Primero veamos que H está fija.

$$H(-1, y, z) = \frac{(-1+1)(e^y - 1) \text{sen}(z)}{-1 + 2e^y - 1} = 0,$$

$$H(x, 0, z) = \frac{(x+1)(e^0 - 1) \text{sen}(z)}{x + 2e^0 - 1} = 0, \text{ y}$$

$$H(x, y, 0) = \frac{(x+1)(e^y - 1) \text{sen}(0)}{x + 2e^y - 1} = 0.$$

Las marginales de H son:

$$\begin{aligned} H_1(x) = H(x, \infty, \pi/2) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(e^y - 1) \operatorname{sen}(\pi/2)}{x + 2e^y - 1} \text{ utilizando L'Hôpital} \\ &= (x+1) \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2e^y} = \frac{x+1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(y) = H(1, y, \pi/2) &= \frac{(1+1)(e^y - 1) \operatorname{sen}(\pi/2)}{1 + 2e^y - 1} \\ &= \frac{2(e^y - 1)}{2e^y} = (1 - e^{-y}), y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3(z) = H(1, \infty, z) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(1+1)(e^y - 1) \operatorname{sen}(z)}{1 + 2e^y - 1} \text{ utilizando L'Hôpital} \\ &= \operatorname{sen}(z) \lim_{y \rightarrow \infty} (1 - e^{-y}) = \operatorname{sen}(z). \end{aligned}$$

Las marginales de dimensión 2 de H son:

$$\begin{aligned} H_{1,2}(x, y) = H(x, y, \pi/2) &= \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}, \\ H_{1,3}(x, z) = H(x, \infty, z) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(e^y - 1) \operatorname{sen}(z)}{x + 2e^y - 1} \text{ utilizando L'Hôpital} \\ &= \frac{(x+1) \operatorname{sen}(z)}{\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2e^y}} = \frac{(x+1) \operatorname{sen}(z)}{2}, y \\ H_{2,3}(y, z) = H(1, y, z) &= \frac{(1+1)(e^y - 1) \operatorname{sen}(z)}{1 + 2e^y - 1} = (1 - e^{-y}) \operatorname{sen}(z). \end{aligned}$$

Análogo al caso de dimensión 2 enunciaremos la definición de subcópula de dimensión n .

Definición 2.21 (subcópula n -dimensional). Sea C' una función con $\operatorname{Dom} C' = S_1 \times \cdots \times S_n$, decimos que C' es una subcópula n -dimensional o una n -subcópula si

i) $S_i \subset I$ y $\{0, 1\} \subset \bigcap_{k=1}^n S_k$.

ii) C' es n -creciente y fija.

iii) C' tiene marginales

$$C'_k(u) = C'(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u, \text{ para toda } k = 1, \dots, n \text{ y para toda } u \in S_k.$$

Observación 2.9. Para toda $\underline{u} \in \operatorname{Dom} C'$ se tiene que $0 \leq C'(\underline{u}) \leq 1$ y $C'(\underline{u}) = V_{C'}([0, u_1] \times \cdots \times [0, u_n]) \geq 0$.

Definición 2.22 (n -cópula). Sea C una subcópula n -dimensional, decimos que C es cópula si $\operatorname{Dom} C = I^n$. Equivalentemente, C es cópula si y sólo si $C: I^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

i) Para toda $\underline{u} \in I^n$ $C(\underline{u}) = 0$ si al menos una $u_i = 0$, y $C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$ para toda $k = 1, \dots, n$ y para toda $u_k \in I$.

ii) C' es n -creciente, es decir para toda $\underline{a}, \underline{b} \in I^n$ tal que $\underline{a} \leq \underline{b}$, entonces $V_C([\underline{a}, \underline{b}]) \geq 0$.

A continuación presentamos un ejemplo de una n -cópula.

Ejemplo 2.13. Sea $\Pi^n(\underline{u}) = u_1 \cdots u_n$ una extensión del caso Π bivariado. Demostremos que Π^n es cópula. Sea $u_i = 0$ para al menos un $i = 1, \dots, n$, entonces $\Pi^n(\underline{u}) = u_1 \cdots u_{i-1} 0 u_{i+1} \cdots u_n = 0$ y $\Pi^n(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = 1, \dots, 1 u 1 \dots 1 = u$. Sea $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\underline{a} \leq \underline{b}$, y el rectángulo $B = [\underline{a}, \underline{b}]$, entonces

$$\begin{aligned} V_{\Pi^n}(B) &= \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \Delta_{a_1}^{b_1} \Pi^n(u_1, \dots, u_n) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \Delta_{a_1}^{b_1} (u_1 \cdots u_n) \\ &= \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \Delta_{a_2}^{b_2} (u_2 \cdots u_n) (b_1 - a_1) \\ &= \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \Delta_{a_3}^{b_3} (u_3 \cdots u_n) (b_1 - a_1) (b_2 - a_2) \\ &= \cdots \\ &= \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \geq 0 \text{ ya que } a_i \leq b_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto Π^n es n -cópula.

Observación 2.10. Si C es n -cópula y $1 \leq k_1 < \dots < k_j \leq n$, entonces

$$C_{k_1, \dots, k_j}(u_{k_1} \dots u_{k_j}) := C(1, \dots, 1, u_{k_1}, 1, \dots, u_{k_j}, 1, \dots, 1)$$

es j -cópula.

Teorema 2.9 (Continuidad uniforme). Sea C' una subcópula, entonces para toda $u, v \in \text{Dom} C'$ se tiene que

$$|C'(v) - C'(u)| \leq \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|.$$

Por lo tanto C' es uniformemente continua en su dominio.

Definición 2.23 (Función de distribución n -dimensional). Sea $H: \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que H es función de distribución n -dimensional si y sólo si

- i) H es n -creciente.
- ii) $H(\underline{t}) = 0 \forall \underline{t} \in \bar{\mathbb{R}}^n$ tal que $t_k = -\infty$ para al menos un $k \geq 1$ y $H(\infty, \dots, \infty) = 1$, es decir, H está fija. Además, las marginales son

$$F_k(x) = H(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty).$$

Finalmente enunciamos la generalización del Teorema de Sklar.

Teorema 2.10 (Sklar). Sea H una función de distribución n -dimensional con marginales F_1, \dots, F_n , entonces existe una n -cópula C tal que $\forall x \in \bar{\mathbb{R}}^n$

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (2.25)$$

Si F_1, \dots, F_n son continuas, entonces C es única, en otro caso está determinada de manera única en $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$.

De manera inversa, si C es una cópula y F_1, \dots, F_n son funciones de distribución univariadas, entonces H definida como en 2.25 es función de distribución n – dimensional.

Corolario 2.2. Sea H función de distribución n – dimensional con marginales F_1, \dots, F_n , y sea C una n – cópula. Sean $F_1^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ cuasi-inversas de F_1, \dots, F_n respectivamente, entonces $\forall u \in I^n$

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)).$$

Teorema 2.11. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias con función de distribución F_1, \dots, F_n respectivamente y función de distribución conjunta H . Entonces, existe una n – cópula tal que

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad \forall \underline{x} \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Si F_1, \dots, F_n son continuas, entonces C es única, en otro caso C está determinada de manera única en $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$.

Capítulo 3

Familias de cópulas elípticas y su estimación

Dentro de este capítulo definiremos de forma resumida los conceptos relacionados a las distribuciones elípticas en principio, posteriormente nos enfocaremos en la descripción de dos tipos de cópulas que provienen de esta familia, la gaussiana y la t de student y finalmente describiremos un método de estimación para la matriz de correlación que emplearemos para este tipo de cópulas.

3.1. Distribuciones elípticas

La clase de distribuciones elípticas puede ser considerada como una extensión de la distribución normal. Esto a raíz del interés en la generalización del modelo de población normal a una clase más amplia de distribuciones que mantenga las principales propiedades de la misma.

Una de las principales características de dichas distribuciones es que presentan una forma simétrica, además de que sus coeficientes de dependencia en colas, superiores e inferiores, son iguales.

Existen diversas formas de definir una distribución elíptica, nosotros nos enfocaremos en una definición estándar con base en la referencia [AF90]. En este trabajo haremos una breve definición de estas distribuciones, para mayor detalle se pueden consultar las referencias.

Empezaremos por recordar que un vector aleatorio X tiene distribución $N(\mu, \Sigma)$, si y sólo si $X \stackrel{d}{=} \mu + AY$ donde $AA^T = \Sigma$ y Y se distribuye $N(\mathbf{0}, Id)$.

Procedemos a definir una distribución esférica.

Definición 3.1 (Distribución esférica). *Decimos que un vector aleatorio X tiene una*

distribución esférica si para cada $Q \in O(n)$

$$QX \stackrel{d}{=} X, \quad (3.1)$$

donde $O(n)$ denota el conjunto de matrices ortogonales $n \times n$

A continuación denotaremos algunas de las propiedades más representativas de las distribuciones esféricas

Teorema 3.1. *Sea X un vector aleatorio. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $QX \stackrel{d}{=} X$ para toda $Q \in O(n)$.
2. La función característica de X es una función que depende de $\|t\|^2$, $t \in \mathbb{R}^n$, es decir

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}\{e^{it^\top X}\} = \phi(t^\top t) = \phi(\|t\|^2),$$

donde ϕ es una función escalar.

3. La densidad de X puede expresarse como $g_X(X) = f(X^\top X)$, donde $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

Al definir la distribución esférica y sus propiedades contamos con los elementos necesarios para definir la distribución elíptica.

Definición 3.2 (Distribución elíptica). *Sea X un vector aleatorio. Decimos que X tiene distribución elíptica con parámetros μ y Σ si*

$$X \stackrel{d}{=} \mu + AY, \quad (3.2)$$

donde Y tiene distribución esférica, A es una matriz de $n \times k$ tal que $AA^\top = \Sigma$ con $\text{rank}(\Sigma) = k$.

Mediante el teorema a continuación enunciaremos algunas de las principales propiedades que tienen las distribuciones elípticas.

Teorema 3.2. *Sea X un vector aleatorio con distribución elíptica de parámetros μ y Σ , entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. Una transformación lineal de X también tiene distribución elíptica. En particular, todas las distribuciones marginales de X son distribuciones elípticas.
2. Todas las distribuciones condicionales de X son distribuciones elípticas.
3. La función característica de X es de la siguiente forma

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}\{e^{it^\top X}\} = e^{it^\top \mu} \phi(t^\top \Sigma t).$$

4. Si Y se distribuye esférica con función de densidad g , entonces $X = \mu + AY$ tiene densidad

$$f(x) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} g[(x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu)], \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

donde $\Sigma = AA^\top$.

Comunmente a la matriz Σ , que cumple ser simétrica y definida positiva, se le identifica como un parámetro de dispersión y a μ como un parámetro de localización.

Considerando funciones g particulares podemos obtener distribuciones que serán parte de la familia de las distribuciones elípticas, por ejemplo si $g(x) = \frac{1}{2\pi} \exp -\frac{x}{2}$ obtendremos la distribución gaussiana y en caso de que $g(x) = (1 + \frac{x^2}{v})^{-\frac{2+v}{2}}$ tendremos la distribución t de student, donde v serán los grados de libertad, (véase [GVB93]). Estas distribuciones serán las que emplearemos más adelante en nuestro ejercicio de estimación de parámetros.

3.2. Cópulas elípticas

En esta sección enunciaremos en principio las características de las cópulas elípticas, posteriormente nos enfocaremos en describir un algoritmo con el cual se busca optimizar el proceso para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de correlación de cópulas elípticas. Esta sección se basa en el artículo [MLE14].

Existen diversas familias de cópulas paramétricas mediante las cuales es posible representar diferentes estructuras de dependencia. Con base en lo descrito en el capítulo anterior, si tenemos un vector aleatorio X de dimensión d con función de distribución multivariada $F_X(x)$ continua, por el teorema de Sklar sabemos que existe una única cópula C con la siguiente propiedad:

$$C(\mathbf{u}) = F_X(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_d}^{-1}(u_d)) \quad (3.4)$$

donde $F_{X_i}^{-1}$ es la función inversa de la i -ésima marginal y $u_1, \dots, u_d \in I$

La cópula $C(u)$ recopila la estructura de dependencia del vector aleatorio X , además tiene marginales uniformes que no dependen de la forma particular de las distribuciones marginales de X . Cuando esta exista, la densidad de la cópula esta definida por

$$c(u) = \frac{\partial}{\partial u_1 \partial u_2, \dots, \partial u_d} C(u). \quad (3.5)$$

Las cópulas elípticas son aquellas que en la ecuación (3.4) F_X es una función de distribución elíptica multivariada. En particular las cópulas gaussianas y t de student corresponden a la distribución normal multivariada y t de student, respectivamente.

En el caso de las funciones de densidad de cópulas elípticas estas no dependen de los parámetros de localización, ya que estarán sujetas a los parámetros de dispersión sólo a través de la matriz de correlación, ρ , determinada de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}} \quad (3.6)$$

La densidad de la cópula gaussiana se expresa de la siguiente forma:

$$c_{Gaus}(\mathbf{u}; \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\rho}|}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{g}}}{\prod_{i=1}^d e^{-\frac{1}{2} s_i^2}} \quad (3.7)$$

donde $\mathbf{g} = g_i = \Phi^{-1}(u_i)_{i=1}^d$, y Φ corresponde a la función de distribución normal univariada. Por otra parte, la densidad para una cópula t de student se puede expresar de la siguiente forma:

$$c_t(\mathbf{u}; \boldsymbol{\rho}, \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2}) \Gamma(\frac{\nu}{2})^{d-1}}{\sqrt{|\boldsymbol{\rho}|} \Gamma(\frac{\nu+1}{2})^d} \frac{(1 + \frac{\mathbf{s}^\top \boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{s}}{\nu})^{\frac{\nu+d}{2}}}{\prod_{i=1}^d (1 + \frac{s_i^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}} \quad (3.8)$$

donde ν corresponde al parametro de grados de libertad, $\mathbf{s} = \{s_i = t_\nu^{-1}(u_i)\}_{i=1}^d$ y t_ν es la función de distribución t de student univariada. Es importante observar que en el caso de evaluar la cópula t de student tomando $\nu \rightarrow \infty$ el resultado será la expresión de la cópula gaussiana descrito en la fórmula 2.5.

De las ecuaciones (3.7) y (3.8) se puede observar que las densidades correspondientes a la cópula gaussiana y la cópula t de student no dependen de los parámetros de localización ni de dispersión que describen a las marginales.

3.3. Estimación

Existen dos enfoques generalmente utilizados en los métodos para estimar los parámetros de correlación en cópulas elípticas: el método de momentos y el método de máxima verosimilitud. El método de momentos se basa en igualar rangos de medidas de correlación empíricos y teóricos. El método de máxima verosimilitud, como su nombre lo indica, se basa en la maximización de la función de verosimilitud. Será este último el que emplearemos para estimar los parámetros de correlación.

En este capítulo se desarrollará un proceso de optimización para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de correlación $\boldsymbol{\rho}$ de cópulas elípticas basados en el artículo [MLE14].

Teniendo en cuenta que no siempre existen expresiones cerradas para las estimaciones, el método de máxima verosimilitud generalmente emplea técnicas de optimización numérica. Estas situaciones pueden representar una complejidad considerable en los casos donde la dimensión de la cópula elíptica es grande, debido a que el número de parámetros en la matriz de correlación incrementará como el cuadrado de la dimensión de la cópula, por lo que los métodos de optimización estándar presentan deficiencias de practicidad.

Considerando cópulas elípticas con densidad, dada una muestra de la forma $U = \{\mathbf{u}_t\}_{t=1}^n$ donde $\mathbf{u}_t = \{u_{t,i} \in [0, 1]\}_{i=1}^d$, el método de máxima verosimilitud se concentra

en resolver el siguiente problema de maximización con restricciones:

$$\hat{\rho} = \underset{\rho}{\text{máx}} \{L(\rho) | \rho \in \mathcal{P}\} \quad (3.9)$$

donde $L(\rho)$ es la log-verosimilitud definida como:

$$L(\rho) = \sum_{t=1}^n \log c(\mathbf{u}_t; \rho) \quad (3.10)$$

y \mathcal{P} es el espacio de matrices de correlación, es decir, es el espacio de todas las matrices simétricas, definidas positivas y cuyos elementos en su diagonal son iguales a uno.

De acuerdo a [MLE14] no existen métodos eficientes para obtener estimadores por máxima verosimilitud exactos del parámetro de correlación de cópulas elípticas. Sin embargo, hay métodos de aproximación ampliamente utilizados tanto para la cópula gaussiana como para la cópula t de student. En esencia, estos métodos se basan en la búsqueda de una solución al problema, $\hat{\Sigma}$, en un espacio menos restringido, \mathcal{C} , el espacio de las matrices simétricas y definidas positivas, para posteriormente proyectar esta solución a \mathcal{P} usando el proyector:

$$\begin{aligned} \Pi: \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{P} \\ \Pi(\hat{\Sigma}) &\rightarrow A\hat{\Sigma}A, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $A_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}}}$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker. En particular para la cópula gaussiana el problema de maximización en \mathcal{C} tiene una solución exacta dada por

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t g_t^\top, \quad g_{t,i} = \phi^{-1}(u_{t,i}). \quad (3.12)$$

Para la cópula t de student, de la condición de punto crítico, $\frac{\partial L}{\partial \rho^{-1}} = 0$, se propone la siguiente iteración de punto fijo

$$\hat{\Sigma}_{[m+1]} = \left(1 + \frac{d}{\nu}\right) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{s_t s_t^\top}{1 + \frac{1}{\nu} s_t^\top \hat{\rho}_{[m]}^{-1} s_t}, \quad s_{t,i} = t_\nu^{-1}(u_{t,i}), \quad (3.13)$$

donde en cada iteración se realiza la proyección

$$\hat{\rho}_{[m+1]} = \Pi(\hat{\Sigma}_{[m+1]}). \quad (3.14)$$

Observamos que el método para la cópula gaussiana (ecuación 3.12) es un caso particular cuando $\nu \rightarrow \infty$.

Aunque estos métodos son computacionalmente eficientes, las soluciones obtenidas no son realmente máximos de la función de verosimilitud, ya que en general la

aplicación del proyector Π no asigna un máximo en \mathcal{C} a un máximo en \mathcal{P} . De hecho, el error en la función de verosimilitud y en los parámetros puede ser significativo.

Con la finalidad de abordar la maximización restringida, la idea básica del algoritmo presentado en [MLE14] se basa en definir una versión proyectada de la función de log-verosimilitud

$$L^* = L \circ \Pi, \quad (3.15)$$

y resolver el problema de maximización

$$\hat{\Sigma} = \operatorname{argmax}_{\Sigma} \{L^*(\Sigma) \mid \Sigma \in \mathcal{C}\}, \quad (3.16)$$

tal que la función de verosimilitud es evaluada en una matriz válida (parámetro de correlación). El parámetro de correlación de la cópula estimado se obtiene por la proyección

$$\hat{\rho} = \Pi(\hat{\Sigma}). \quad (3.17)$$

Entonces, la condición de punto crítico necesaria para la log-verosimilitud proyectada, que tiene que ser satisfecha por la solución del problema de maximización, es

$$\frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{\partial L(\Pi(\Sigma))}{\partial \Sigma^{-1}} = 0. \quad (3.18)$$

Usando la regla de la cadena y definiendo

$$\mathcal{D}_{ij}(\rho) = \frac{\partial L(\rho)}{\partial \rho_{ij}^{-1}}, \quad (3.19)$$

la condición puede ser escrita como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma_{ij}^{-1}} = \sum_{kl} \frac{\partial \rho_{kl}^{-1}}{\partial \Sigma_{ij}^{-1}} \mathcal{D}_{kl}(\rho) \\ &= \sum_{kl} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} \sqrt{\Sigma_{kk} \Sigma_{ll}} - \Sigma_{ij}^{-1} \Sigma_{ki} \Sigma_{kj} \sqrt{\frac{\Sigma_{ll}}{\Sigma_{kk}}} \right) \mathcal{D}_{kl}(\rho), \end{aligned} \quad (3.20)$$

o en notación matricial

$$0 = \frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} = A^{-1} (\mathcal{D}(\rho) - \rho \operatorname{diag}(\mathcal{D}(\rho)) \rho^{-1}) A^{-1} \quad (3.21)$$

donde $\operatorname{diag}(X)_{ij} = X_{ij} \delta_{ij}$. Con el fin de resolver esta ecuación, utilizamos el hecho de que el punto crítico también satisface

$$\Sigma = \Sigma - \lambda \frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}}, \quad (3.22)$$

lo cual sugiere el siguiente esquema de iteración de punto fijo

$$\Sigma_{[m+1]} = \Sigma_{[m]} - \lambda \left. \frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} \right|_{\Sigma = \Sigma_{[m]}} \quad (3.23)$$

donde λ es un parámetro de medida de paso lo suficientemente pequeño para asegurar que $\Sigma_{[m+1]}$ sea definida positiva después de la iteración.

El algoritmo es implementado mediante la derivada, $\mathcal{D}(\rho)$, correspondiente a la log verosimilitud de la cópula a estimar. En este trabajo solo se considerarán la cópula gaussiana y t, sin embargo, el algoritmo puede aplicarse a cualquier cópula elíptica para la cual $\mathcal{D}(\rho)$ puede ser calculada de forma cerrada.

El esquema iterativo de la ecuación 3.23 se asemeja a un método de gradiente ascendente, pero en lugar de moverse a lo largo de la dirección del gradiente (que en principio parecería lo óptimo), se mueve a través de la dirección $V = -\frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}}$. Por esta razón, a partir de este punto lo denotaremos algoritmo de *gradiente inverso*. De hecho la derivada direccional de L^* en la dirección V es positiva. Para verificar lo anterior, se puede observar que dado que

$$\frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} = -\Sigma \frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma} \Sigma, \quad (3.24)$$

la derivada direccional de L^* a lo largo de esta dirección puede ser expresada como

$$\begin{aligned} \Delta_V L^* &= \sum_{ij} \frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma_{ij}} \frac{V_{ij}}{\|V\|} \\ &= \frac{1}{\|V\|} \text{tr} \left(\frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma} \Sigma \frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma} \Sigma \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde tr es el operador traza y $\|V\|$ es la norma de V . Ya que Σ es una matriz real, simétrica y definida positiva, esta admite la descomposición $\Sigma = OQO^\top$, donde O es una matriz ortogonal y Q es una matriz diagonal con entradas positivas en la diagonal, $Q_{ii} > 0$. Por lo tanto, definiendo $M = O^\top \frac{\partial L^*(\Sigma)}{\partial \Sigma} O$, utilizandola propiedad cíclica de la traza y el hecho de que M es simétrica, se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_V L^* &= \frac{1}{\|V\|} \text{tr} (MQMQ) \\ &= \frac{1}{\|V\|} \sum_{ij} Q_{ii} Q_{jj} (M_{ij})^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

En particular, esto garantiza que en cada iteración de la ecuación (3.23), L^* incrementa para un valor de $\lambda > 0$ suficientemente pequeño. Para muestras de datos particulares, la elección $\lambda = \frac{2}{T}$ puede generar matrices que no son definidas positivas, en estos casos sera necesario ajustar a un λ más pequeño.

3.4. Algoritmo de estimación para cópulas gaussianas y t de student

En esta sección describiremos a detalle el algoritmo de estimación de la correlación para cópulas gaussianas y t de student. Partimos de un conjunto de n observaciones en el cubo unitario d -dimensional, $\{\mathbf{u}_t = (u_{t,1}, \dots, u_{t,d})\}_{t=1}^n$, $u_{t,i} \in (0, 1)$. En el caso de la cópula t de student ν será el parámetro correspondiente a los grados de libertad, cuyo valor suponemos conocido. A continuación describiremos el algoritmo de estimación.

- **Paso 0.** Transformamos las observaciones usando la inversa de la función de distribución univariada acorde al tipo de cópula de la siguiente forma.

Para la cópula t de student:

$$g_{t,i} = t_{\nu}^{-1}(u_{t,i}).$$

Para la cópula gaussiana:

$$s_{t,i} = \Phi^{-1}(u_{t,i}).$$

Posteriormente calculamos un estimador inicial para la matriz de covarianzas Σ . En ambos casos, esta estimación inicial estará basada en la aproximación para la cópula gaussiana de la siguiente forma

$$\Sigma_{[0]} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t g_t^{\top}.$$

- **Paso 1.** Dado el actual estimador de la matriz de covarianzas, $\Sigma_{[m]}$, calculamos la proyección al espacio de las matrices de correlación y encontramos la dirección de la gradiente inversa

$$\begin{aligned} \rho_{[m]} &= A_{[m]} \Sigma_{[m]} A_{[m]}, \\ \Delta_{[m]} &= - \frac{\partial L^*(\Sigma_{[m]})}{\partial \Sigma_{[m]}^{-1}} \\ &= - A_{[m]}^{-1} \left(\mathcal{D}(\rho_{[m]}) - \rho_{[m]} \text{diag} \left(\mathcal{D}(\rho_{[m]}) \rho_{[m]}^{-1} \right) \rho_{[m]} \right) A_{[m]}^{-1}, \end{aligned}$$

donde se define la entrada ij de la matriz $A_{[m]}$ como

$$(A_{[m]})_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(\Sigma_{[m]})_{ij}}}.$$

A continuación tenemos las expresiones de la matriz derivada de la log-verosimilitud, $\mathcal{D}(\rho) = \frac{\partial L(\rho)}{\partial \rho^{-1}}$, para las cópulas consideradas.

- Copula gaussiana:

$$\mathcal{D}(\rho) = \frac{n}{2} \rho - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n g_t g_t^{\top}.$$

3.4. ALGORITMO DE ESTIMACIÓN PARA CÓPULAS GAUSSIANAS Y T DE STUDENT 43

- Cópula t de student:

$$\mathcal{D}(\rho) = \frac{n}{2}\rho - \frac{v+d}{2v} \sum_{t=1}^n \frac{s_t s_t^\top}{1 + \frac{1}{v} s_t^\top \rho^{-1} s_t}.$$

- **Paso 2.** El siguiente estimador, $\Sigma_{[m+1]}$, es obtenido moviendo la dirección de la gradiente inversa

$$\Sigma_{[m+1]} = \Sigma_{[m]} + \lambda_{[m+1]} \Delta_{[m]},$$

donde $\lambda_{[m]}$ es una medida de paso adaptada. Elegimos una medida inicial $\lambda_{[0]}$ y, en cada iteración se evalúan tres prospectos de medida

$$\lambda_{[m+1]} \in \{k_1 \lambda_{[m]}, \lambda_{[m]}, k_2 \lambda_{[m]}\},$$

donde $0 < k_1 < 1 < k_2$ y elegimos aquella con la mayor log-verosimilitud que cumpla con las siguientes condiciones:

- $\Sigma_{[m+1]}$ es definida positiva.
- La log-verosimilitud incrementa, es decir, $L^*(\Sigma_{[m+1]}) > L^*(\Sigma_{[m]})$.

En caso de que no se cumpla ninguna de estas condiciones, la medida $\lambda_{[m]}$ se reduce, $\lambda_{[m]} \rightarrow k_1 \lambda_{[m]}$, y tres nuevas alternativas son evaluadas.

- **Paso 3.** Si la convergencia en $\Sigma_{[m]}$ ha sido alcanzada en el paso $m = M$, la proyección al espacio de matrices de correlación resulta en lo siguiente

$$\hat{\rho} = \Pi(\Sigma_{[m]}) = A_{[m]} \Sigma_{[m]} A_{[m]}$$

y el algoritmo finaliza. De otra forma, se repite a partir del paso 1.

Posterior a realizar pruebas sobre el algoritmo empleando diferentes tipos de tamaño de los pasos, k_1, k_2 , se encontró que la modificación de valores en los mismos implica variaciones solo en el tiempo de ejecución del algoritmo, por esta razón se confirmaron como mejores opciones las sugeridas por el artículo [MLE14], las cuales se emplearán en el ejemplo a continuación,

$$\lambda_{[0]} = \frac{1}{T}, \quad k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{4}{3}.$$

Capítulo 4

Ejemplo

En este capítulo mostraremos un ejemplo de la implementación del método de estimación del parámetro de correlación descrito en el capítulo anterior para la distribución t de student y gaussiana. Dicho algoritmo fue programado en MATLAB, el código del mismo se presenta en el apéndice del presente trabajo. Posterior a la obtención del parámetro de correlación, y mediante el uso de las funciones de cópulas precargadas en MATLAB (`copularnd`), se procederá a realizar las simulaciones de la información. Con dicha información se medirá la dependencia que existe entre cada variable y posteriormente se efectuará un análisis de la calidad del ajuste mediante una prueba de bondad de ajuste.

4.1. Análisis previo de la información

Utilizaremos como observaciones los precios de acciones cotizadas en el mercado de valores NASDAQ: Apple Inc. (AAPL), Microsoft Corporation (MSFT) y Atmel Corporation (ATML). El periodo de observación considerado es del 4 de enero del 2010 al 24 de noviembre del 2015, sólo se consideran días hábiles.

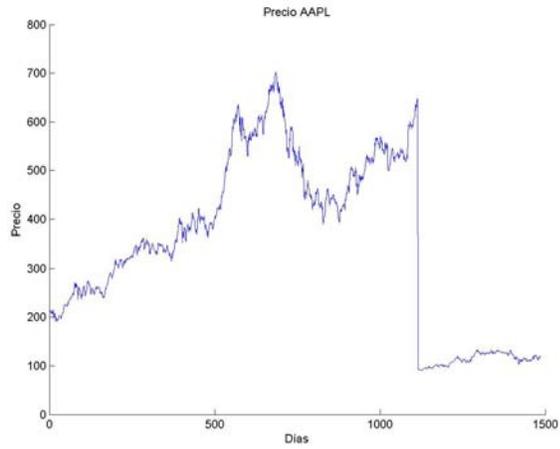
En la figura (4.1) se presentan las gráficas de los precios al cierre del día de AAPL, MSFT y ATML respectivamente.

Calculamos los log-rendimientos, r_t , de cada una de las acciones (variables), de acuerdo a la siguiente expresión

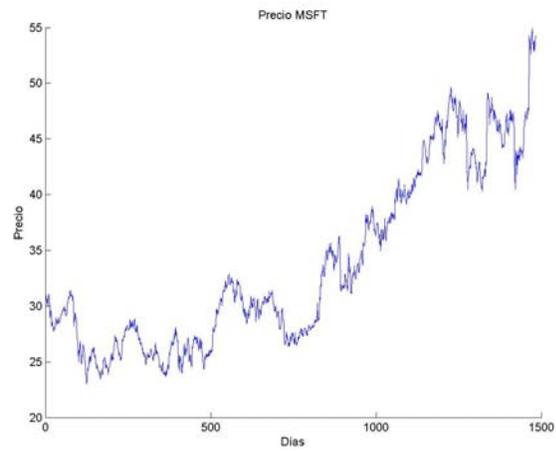
$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

donde P_t es el precio de la acción en la fecha t .

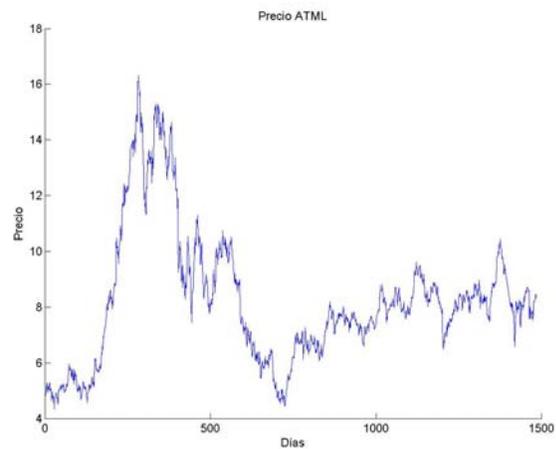
En la figura (4.2) se muestran las gráficas con los comportamientos de dichos log-rendimientos.



(a) Precio AAPL

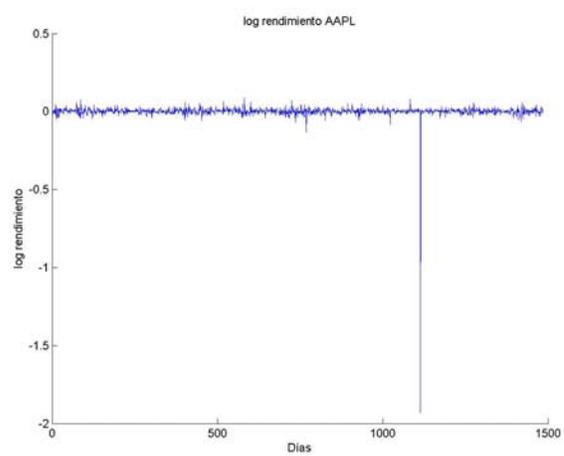


(b) Precio MSFT

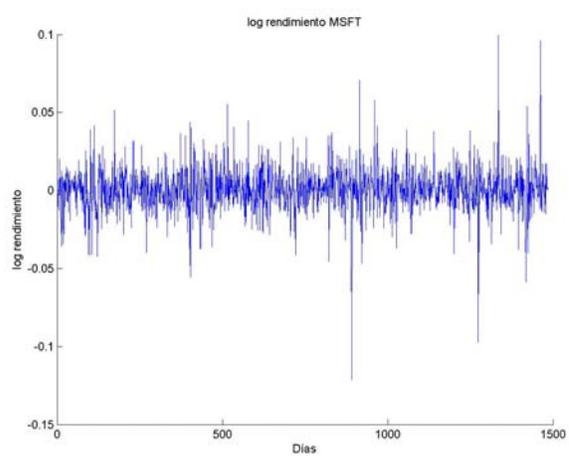


(c) Precio ATML

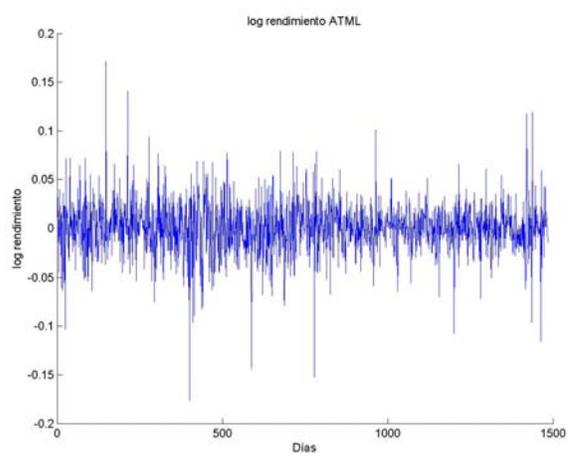
Figura 4.1: Precios de las acciones



(a) Precio AAPL



(b) Precio MSFT



(c) Precio ATML

Figura 4.2: Log-rendimientos de las acciones

En primera instancia se realizó una transformación de los datos, para ello calculamos la distribución empírica de cada variable de la siguiente forma

$$\hat{F}(r_i) = \frac{1}{n+1} \sum_{x \in M} \mathbb{I}_{\{x \leq r_i\}} = \frac{R_{r_i}}{n+1},$$

donde M es el conjunto de observaciones, n es el número total de las mismas y $\sum_{x \in M} \mathbb{I}_{\{x \leq r_i\}}$ es el número de observaciones en la muestra menores o iguales que r_i , representada también como R_{r_i} . Mediante esta transformación logramos obtener observaciones uniformemente distribuidas en el intervalo $[0,1]$. A partir de este momento nos referiremos a los datos resultantes de esta transformación como *observaciones*.

Como un primer análisis de la posible dependencia entre cada par de variables, en la figura (4.3) se presentan las gráficas de dispersión de las funciones de distribución empíricas.

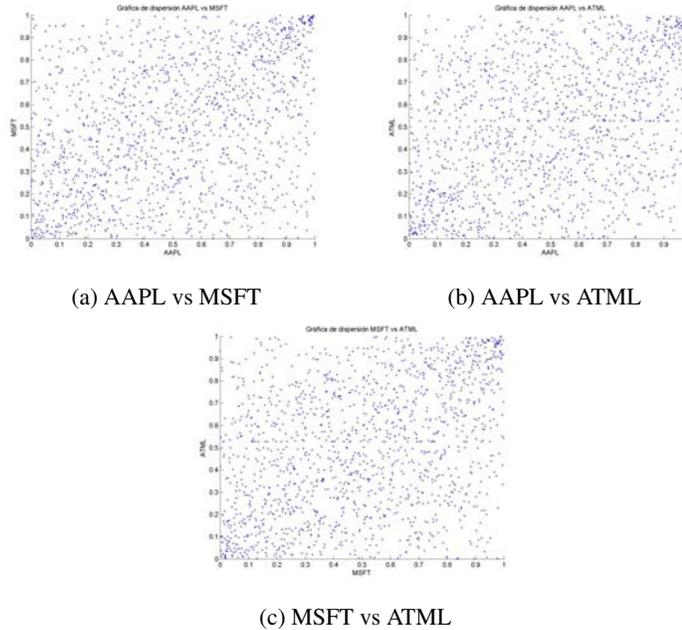


Figura 4.3: Gráficas de dispersión por pares

Posterior al análisis gráfico de las observaciones, calculamos la concordancia entre cada par de variables mediante la τ de Kendall utilizando la función *corr* implementada en MATLAB. En el cuadro (4.1) se muestra la τ obtenida por pares, la entrada ij es la τ entre las variable i, j .

Para medir la dependencia en colas, para cada par de variables se calcularon los estimadores λ_{LL} , λ_{UU} , λ_{UL} y λ_{LU} definidos en la sección 2.6.1 considerando el cuantil $q = 0,95$. En los cuadros (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) se presentan los resultados obtenidos.

Cuadro 4.1: τ de Kendall

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL	1	0.268458	0.250606
MSFT	0.268458	1	0.269130
ATML	0.250606	0.269130	1

Cuadro 4.2: λ_{LL}

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.390836	0.309973
MSFT	0.390836		0.296496
ATML	0.309973	0.296496	

Cuadro 4.3: λ_{UU}

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.229111	0.215633
MSFT	0.229111		0.242588
ATML	0.215633	0.242588	

Cuadro 4.4: λ_{UL}

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.026954	0
MSFT	0.026954		0.013477
ATML	0	0.013477	

Cuadro 4.5: λ_{LU}

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.013477	0
MSFT	0.013477		0.013477
ATML	0	0.013477	

4.2. Estimación del parámetro de correlación

Utilizando el algoritmo descrito en la sección (3.4), estimamos la matriz de correlaciones para la cópula gaussiana y la cópula t de student, en este último caso consideramos que el parámetro de grados de libertad es $\nu = 5$.

Es importante mencionar que en el algoritmo de estimación, para considerar que el estimador de la correlación ha alcanzado la convergencia, fue necesario definir una variable de tolerancia bajo la cual se considera que la diferencia entre dos cantidades es no significativa, es decir, detuvimos el algoritmo cuando la diferencia entre la log-verosimilitud de un paso en comparación con la del paso anterior era menor o igual a la tolerancia preestablecida.

4.2.1. Resultados cópula gaussiana

La estimación del parámetro de correlación en el caso de la cópula gaussiana genera los siguientes resultados:

Cuadro 4.6: Estimador correlación. Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL	1	0.401795	0.389626
MSFT	0.401795	1	0.403144
ATML	0.389626	0.403144	1

Para determinar la calidad de la estimación, simulamos m observaciones de una cópula gaussiana con la matriz de correlación del cuadro (4.6), donde $m = 10,000$. A partir de la muestra simulada obtenemos la τ de Kendall presentada en el cuadro (4.7).

Cuadro 4.7: τ simulación. Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL	1	0.263719	0.266224
MSFT	0.263719	1	0.272110
ATML	0.266224	0.272110	1

La variación de la τ obtenida de la muestra simulada con respecto a la τ obtenida de las observaciones originales se presenta en el cuadro (4.8).

Cuadro 4.8: Variación τ . Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL	0	-0.57 %	0.08 %
MSFT	-0.57 %	0	2.35 %
ATML	0.08 %	2.35 %	0

En los cuadros (4.9),(4.10), (4.11), (4.12)se presentan los coeficientes de dependencia en colas.

Cuadro 4.9: λ_{LL} simulada. Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.186000	0.196000
ASFT	0.186000		0.192000
ATML	0.196000	0.192000	

Cuadro 4.10: λ_{UU} simulada. Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.186000	0.192000
ASFT	0.186000		0.210000
ATML	0.192000	0.210000	

Cuadro 4.11: λ_{UL} simulada. Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.002000	0.006000
ASFT	0.002000		0.008000
ATML	0.006000	0.008000	

Cuadro 4.12: λ_{LU} simulada. Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.002000	0.006000
ASFT	0.002000		0.002000
ATML	0.006000	0.002000	

En los cuadros (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) se presenta la variación de los coeficientes de dependencia en colas de la muestra simulada respecto a los obtenidos de la muestra original.

Cuadro 4.13: Variación λ_{LL} simulada. Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		-52.41 %	-36.77 %
ASFT	-52.41 %		-35.24 %
ATML	-36.77 %	-35.24 %	

Cuadro 4.14: Variación λ_{UU} simulada. Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		-18.82 %	-10.96 %
ASFT	-18.82 %		-13.43 %
ATML	-10.96 %	-13.43 %	

Cuadro 4.15: Variación λ_{UL} simulada. Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		-92.58 %	
ASFT	-92.58 %		-40.64 %
ATML		-40.64 %	

Cuadro 4.16: Variación λ_{LU} simulada. Cópula gaussiana

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		-85.16 %	
ASFT	-85.16 %		-85.16 %
ATML		-85.16 %	

Las gráficas de dispersión correspondientes a los datos simulados se encuentran en la figura (4.4)

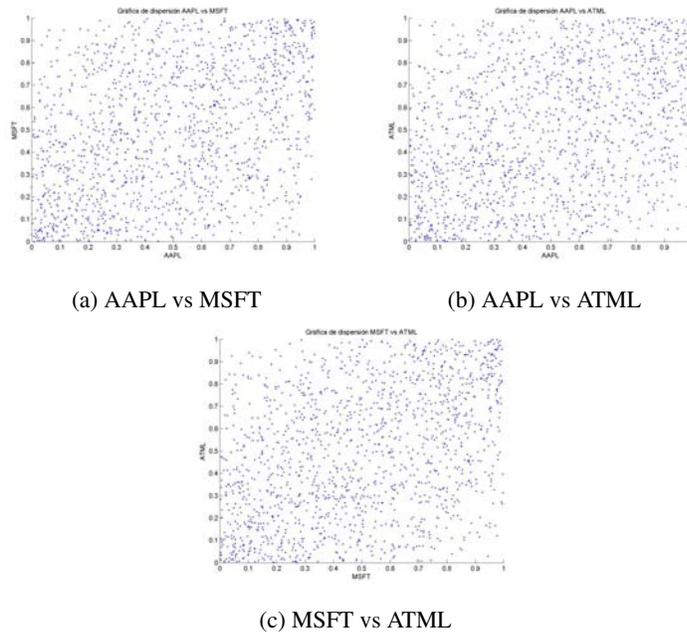


Figura 4.4: Gráficas de dispersión por pares

4.2.2. Resultados cópula t de student

La estimación del parámetro de correlación en el caso de la cópula t de student se realizó con parámetro de grados de libertad $\nu = 5$. El estimador de la correlación resultante es:

Cuadro 4.17: Estimador correlación. Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL	1	0.403015	0.374001
MSFT	0.403015	1	0.408572
ATML	0.374001	0.408572	1

Para determinar la calidad de la estimación, simulamos m observaciones de una cópula t de student con la matriz de correlación del cuadro (4.17), donde $m = 1,484$, es el tamaño de la muestra original. A partir de la muestra simulada obtenemos la τ de Kendall presentada en el cuadro (4.18).

Cuadro 4.18: τ simulación. Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL	1	0.266276	0.241921
ASFT	0.266276	1	0.268070
ATML	0.241921	0.268070	1

La variación de la τ obtenida de la muestra simulada con respecto a la τ obtenida de las observaciones originales se presenta en el cuadro (4.19).

Cuadro 4.19: Variación τ . Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL	0.00 %	-0.81 %	-3.47 %
ASFT	-0.81 %	0.00 %	-0.39 %
ATML	-3.47 %	-0.39 %	0.00 %

En los cuadros (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) se presentan los coeficientes de dependencia en colas.

Cuadro 4.20: λ_{LL} simulada. Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.248000	0.218000
ASFT	0.248000		0.258000
ATML	0.218000	0.258000	

Cuadro 4.21: λ_{UU} simulada. Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.240000	0.206000
ASFT	0.240000		0.290000
ATML	0.206000	0.290000	

Cuadro 4.22: λ_{UL} simulada. Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.030000	0.038000
ASFT	0.030000		0.020000
ATML	0.038000	0.020000	

Cuadro 4.23: λ_{LU} simulada. Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.024000	0.024000
ASFT	0.024000		0.026000
ATML	0.024000	0.026000	

En los cuadros (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) se presenta la variación de los coeficientes de dependencia en colas de la muestra simulada respecto a los obtenidos de la muestra original.

Cuadro 4.24: Variación λ_{LL} simulada. Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		8.24 %	1.10 %
ASFT	8.24 %		12.61 %
ATML	1.10 %	12.61 %	

Cuadro 4.25: Variación λ_{UU} simulada. Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		-38.59 %	-33.54 %
ASFT	-38.59 %		-2.19 %
ATML	-33.54 %	-2.19 %	

Cuadro 4.26: Variación λ_{UL} simulada. Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		122.60 %	
ASFT	122.60 %		48.40 %
ATML		48.40 %	

Cuadro 4.27: Variación λ_{LU} simulada. Cópula t de student

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		-10.96 %	
ASFT	-10.96 %		92.92 %
ATML		92.92 %	

Las gráficas de dispersión correspondientes a los datos simulados se encuentran en la figura (4.5)

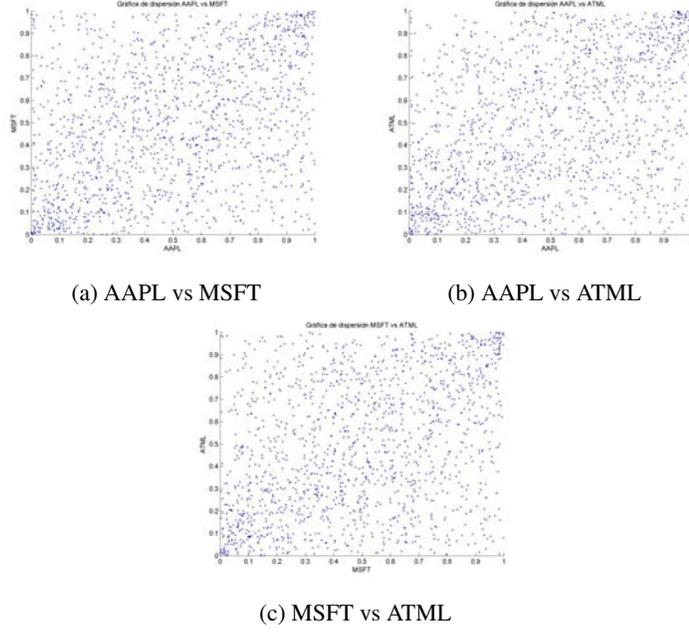


Figura 4.5: Gráficas de dispersión por pares

Con la finalidad de complementar los resultados obtenidos, se presentan coeficientes de dependencia en colas, que a diferencia de los se han utilizado a largo del trabajo, no dependen de un cuantil q y cuya definición es un expresión límite. Para el caso de la cópula t de student existe una expresión en términos de los parámetros ρ y ν , estos coeficientes, a los que denotaremos λ^* , tienen su referencia en [JK11]. Dicha expresión es la siguiente:

$$\lambda_{LL}^* = \lambda_{UU}^* = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - C(u, 1-u)}{u} = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$$

$$\lambda_{LU}^* = \lambda_{UL}^* = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - C(1-u, u)}{u} = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1-\rho}} \right).$$

Para el parámetro $\nu = 5$ y la matriz de correlación estimada con el método propuesto en el capítulo 3, los coeficientes de dependencia en colas se presentan en los cuadros 4.28 y 4.29

Cuadro 4.28: λ_{UU}^* (λ_{LL}^*) teórica. Cópula t de student.

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.161199	0.149342
ASFT	0.161199		0.163560
ATML	0.149342	0.163560	

Cuadro 4.29: λ_{LU}^* (λ_{UL}^*) teórica. Cópula t de student.

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.009453	0.010979
ASFT	0.009453		0.009178
ATML	0.010979	0.009178	

Dado que los coeficientes λ^* son calculados mediante un límite, estos no pueden ser comparados con las versiones empíricas presentadas en los cuadros (4.9-4.12), por esta razón es necesario obtener un estimador apropiado. De acuerdo al artículo [?], el cual propone un estimador para el coeficiente de dependencia en la cola derecha, calculamos λ_{UU}^* el cual se presenta en el cuadro 4.30

Cuadro 4.30: λ_{UU}^* no finita. Cópula t de student.

	AAPL	MSFT	ATML
AAPL		0.137290	0.083475
ASFT	0.137290		0.191030
ATML	0.083475	0.191030	

4.2.3. Análisis de la calidad del ajuste

En esta sección introduciremos el estadístico de Kolmogorov-Smirnov el cual nos ayudará a evaluar la calidad del ajuste propuesto comparado contra la estimación disponible en MATLAB, a través de la función *copulafit*. Este contraste se realizará tanto para la cópula gaussiana como para la cópula t de student.

Estadístico de Kolmogorov-Smirnov

Comenzamos definiendo los elementos necesarios para determinar el estimador de Kolmogorov-Smirnov.

Definición 4.1 (Cópula empírica). Sean $U = \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$ donde $\mathbf{u}_i = \{u_{i,j} \in [0, 1]\}_{j=1}^d$, una muestra de tamaño n , definimos la cópula empírica valuada en $\mathbf{v}_k = (v_1, \dots, v_d)$

$$C_n(v_1, \dots, v_d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{u_{i,1} \leq v_1, \dots, u_{i,d} \leq v_d\}}. \quad (4.1)$$

Denotaremos C_{θ_n} a la cópula paramétrica obtenida mediante algún método estimación de parámetros, donde θ_n es el estimador obtenido. La idea es determinar la distancia entre la cópula empírica y la cópula paramétrica.

Definición 4.2 (Estimador de Kolmogorov-Smirnov). *Se define el estimador de Kolmogorov-Smirnov como*

$$T_n = \sup_{u \in I^d} |\sqrt{n}(C_n(u) - C_{\theta_n}(u))|. \quad (4.2)$$

Resultados

Calculamos los estadísticos correspondientes a la cópula paramétrica obtenida mediante el algoritmo descrito en la sección 2.4 y la cópula paramétrica obtenida del la función *copulafit* disponible en MATLAB, los resultados generados son los siguientes:

Cuadro 4.31: Comparativo ajuste K-S. Cópula gaussiana

Cópula gaussiana	
Ajuste	Estimador Kolmogorov-Smirnov
Propuesto	0.026745
MATLAB	0.027455

Es importante mencionar que en el caso de la estimación generada por MATLAB para la cópula t de student, el parámetro de grados de libertad obtenido es de 7.374094. En contraste, el número de grados de libertad considerado en el ajuste propuesto es de 5.

Cuadro 4.32: Comparativo ajuste K-S. Cópula t de student

Cópula t de student	
Ajuste	Estimador Kolmogorov-Smirnov
Propuesto	0.017256
MATLAB	0.017956

De lo anterior podemos observar que el método propuesto en ambos casos genera un mejor ajuste, ya que el estadístico de Kolmogorov-Smirnov es menor. Esto implica que la diferencia entre la cópula empírica y la la cópula ajustada mediante el algoritmo de la sección (2.4) es menor en relación con la distancia generada con la cópula ajustada mediante la función *copulafit* de MATLAB.

Capítulo 5

Conclusiones

El empleo de cópulas en el presente trabajo por sí mismo representa una herramienta eficaz al replicar la estructura de dependencia de los datos trabajados. Esto se puede corroborar al comparar los resultados generados con la medida de concordancia tau de Kendall ya que al comparar la matriz generada a partir de las observaciones contra la simulación de datos obtenida, en el caso de la cópula gaussiana las variaciones son muy pequeñas, la mayor variación se presenta en el par MSFT-ATML con un valor del 2.57%.

Además, es importante considerar que en el análisis de dependencia en colas realizado se confirma el hecho conocido sobre la nula dependencia en colas que presenta la cópula gaussiana, este comportamiento es correctamente replicado en la simulación generada. Sin embargo, es interesante observar que en el caso de la simulación la variación porcentual al comparar datos originales contra datos simulados es significativa, ya que la simulación generada a partir de la cópula gaussiana presenta una dependencia en colas aún menor que la observada en los datos originales.

Para el caso de la cópula t de student, de igual forma que en el la cópula gaussiana, la diferencia de resultados entre la tau de Kendall observada en comparación con la simulada indica una estructura de concordancia muy similar. Sin embargo, es importante observar que la variación porcentual entre los valores originales y los simulados es mayor en la cópula t de student a los observados con la cópula gaussiana. En lo que respecta a la dependencia en colas se observan variaciones significativas entre los resultados obtenidos con la información original y los datos simulados, principalmente en λ_{LU} y λ_{UL} .

Por otro lado en el desarrollo del presente trabajo se generó una estimación del parámetro de correlación alterna a la estimación por máxima verosimilitud. De este ejercicio se obtienen los siguientes resultados favorables:

- 1) Tanto para la cópula gaussiana como para la t de student el ajuste observado mediante el estimador de Kolgomorov-Smirnov presenta un menor valor respecto a

la estimación que genera MATLAB mediante su función `copulafit`.

- II) En el caso de la cópula t de student la estimación del parámetro de correlación con el método propuesto fue realizado con ($\nu = 5$) considerando que a partir de este valor la bondad de ajuste es menor respecto a la obtenida por MATLAB con ($\nu = 7,3$). Además de que los resultados con grados de libertad mayores a 5 con el método propuesto no difieren significativamente.

Apéndice A

Programas de estimación para la correlación

A continuación se presenta el código empleado en el algoritmo de estimación por máxima verosimilitud del parámetro de correlación para las cópulas elípticas, específicamente para los casos de distribuciones gaussiana y t de student.

Empezamos por la estimación mediante la t-student.

```
1 % Rho_est_t=estimacion.sigma.t.estudent
2 cd ('C:\Users\Enrique\Documents\Seminaro de Titulacion\Scripts.tesis.prog')
3 load('observaciones');
4 u=observaciones;
5 n=size(u,1); % tamaño de observaciones
6 d=size(u,2); % número de variables
7 nu=5; %Grados de libertad
8 s=tinv(u,nu); % Transformación de los log-rendimientos que están en el cuadro unitario mediante una t-student
9 g=norminv(u,0,1); % Transformación de los log-rendimientos que están en el cuadro unitario mediante una normal
10 Sigma_0=zeros(d,d); %Se define la dimensión de la matriz de covarianza
11 k_1=1/2;
12 k_2=4/3;
13 lambda_m=1/n;
14 incremento=10; %Incremento entre los mejores estimadores encontrados entre m y m+1
15 positivadefinida=0; %Indicador que emplearemos para definir si la matriz de covarianza con la mejor verosimilitud es
16 mejora=0; % Indicador con el que se define si la verosimilitud de la matriz de covarianza m+1 es mayor que la de m
17 tolerancia=.001; %Indicador del incremento mínimo a considerar entre la verosimilitud de m+1 y m, de lo contrario se
18 cont=0;
19
20 %Paso 0. Se definen las transformaciones en los datos a emplear, en el caso
21 %de la estimación gaussiana, se emplea la
22 %distribución univariada normal inversa.
23
24 %Se inicializa la matriz de covarianza a proyectar
25 %empleando las transformaciones.
26 for t=1:n
27 Sigma_0=Sigma_0+g(t,:)'*g(t,:);
28 end
```

62 APÉNDICE A. PROGRAMAS DE ESTIMACIÓN PARA LA CORRELACIÓN

```

29 Sigma_0=(Sigma_0)/n;
30 Sigma_m=Sigma_0;
31 %PASO 1. A partir de la sigma inicial calculamos la proyección
32 %del espacio de matrices de correlación.
33
34 %Se define A_m como delta.ij*/ sqrt(Sigma.ii) (*delta de Kronecker), considerando que
35 %es equivalente 1 cuando i=j y 0 cuando i<>j, se considera solo el caso cuando i=j,
36 %ya que en los demas casos el resultado sería 0.
37
38 %Definidos los elementos a emplear, empieza el proceso de optimización de
39 %las mejores verosimilitudes de la matriz de covarianza valuadas.
40 %Este proceso concluye cuando la tolerancia definida sea mayor que la diferencia entre
41 %la verosimilitud entre el paso m y m+1
42 while incremento>tolerancia
43 %Se ingresa el siguiente indicador de los pasos (mejores estimadores de verosimilitud)
44 %generados antes de encontrar una mínima diferencia definida entre los mismos.
45     cont=cont+1;
46     disp(['Paso ' num2str(cont)])
47 %Se define la dimensión de la matriz A_m, con esta matriz se realizará la
48 %proyección de la matriz de covarianza (Sigma) a una matriz de correlaciones (Rho).
49     A_m=zeros(d,d);
50 %En el siguiente paso se define el cálculo de la A_m, se reitera la
51 %delta de Kronecker se considera solo en las entradas correspondientes
52 %a la diagonal y por ende su valor es igual a 1.
53     for i=1:d
54         A_m(i,i)=1/sqrt(Sigma_m(i,i));
55     end
56 %Definimos la primer logverosimilitud, tomando en cuenta la Sigma_m
57 %inicial y a partir de la misma la primer proyección de Rho
58     if cont==1
59         Logverosim_m=logverosimilitud(u,A_m*Sigma_m*A_m);
60     end
61 %El siguiente proceso corresponde a la proyección de la matriz de
62 %covarianza al espacio de matrices de correlación.
63 %Iniciamos definiendo una rho inicial
64 Rho=A_m*Sigma_m*A_m;
65 %Inicializa la matriz de observaciones transformadas por la t de student
66 Sum_s=zeros(d,d);
67 %Se define la delta inicial a emplear a partir de la distribución t
68 %Los elementos a continuación corresponden a la suma contenida en el
69 %en el valor de la D(Rho) inicial se presenta una suma de las
70 %observaciones transformadas mediante la distribución t de student
71 for t=1:n
72     Sum_s=Sum_s+((s(t,:)'*s(t,:))/(1+(1/nu)*s(t,:)*inv(Rho)*s(t,:)));
73 end
74
75 D_rho=(n/2)*Rho-((nu+d)/(2*nu))*Sum_s;
76
77 %Para el cálculo de la Delta el algoritmo incluye la expresión
78 %de diag(Rho), el cual genera una matriz donde cuya diagonal corresponde a
79 %la diagonal del producto de D(Rho) y la inversa de (Rho) el resto de las
80 %entradas equivaldran a 0
81     auxDiag=diag(D_rho*inv(Rho));
82     auxD=diag(auxDiag);
83
84 %Se define una primer Delta
85     Delta_m=-(inv(A_m))*(D_rho-Rho*auxD*Rho)*inv(A_m);

```

```

86
87 %Considerando los valores obtenidos comienza el proceso de depuración se
88 %entre el mejor estimador considerando 3 "pasos de aproximación" definidos
89 %como lambda, estos pasos cambian su tamaño de acuerdo a dos constantes k_1
90 %y k_2.
91 %Con cada Lambda_m se calcula la log verosimilitud de Sigma, el valor con
92 %mayor verosimilitud es escogido y posteriormente se verifica que esta
93 %matriz sea positiva definida y que el valor de verosimilitud en m sea mayor
94 %que el paso anterior m-1.
95     while (positivadefinida == 0) | (mejora==0)
96         lambda_vector=[k_1*lambda_m, lambda_m, k_2*lambda_m];
97     %     Rho_aux=cell(1,length(lambda_vector))
98     for l=1:length(lambda_vector)
99         Sigma=Sigma_m+lambda_vector(l)*Delta_m;
100 % Se calcular una matriz A para la proyección considerando el valor de la lambda
101 %en turno, solo sirve en el proceso de depuración para la mejor lambda.
102         A_aux=zeros(d,d);
103         for i=1:d
104             A_aux(i,i)=1/sqrt(Sigma(i,i));
105         end
106 %A su vez tambien se define un valor provisional de Rho, en base a la
107 %matriz A generado en el paso anterior.
108         Rho_aux{l}=A_aux*Sigma*A_aux;
109 %Con la matriz de correlaciones proyectada (Rho), se calcula la log
110 %verosimilitud. (El detalle de esta función se encuentra posteriormente)
111         Lasterisco(l)=logverosimilitudt(u,Rho_aux{l},nu);
112     end
113 %A partir de las log verosimilitudes empleando cada lambda, se toma aquella
114 %con el mayor valor.
115     indice_lambda= find(Lasterisco==max(Lasterisco));
116     indice_lambda=indice_lambda(1);
117     Sigma=Sigma_m+lambda_vector(indice_lambda)*Delta_m;
118 %Validamos que la Sigma seleccionada es positiva definida partiendo del
119 %criterio en el cual sus eigen valores son mayores que cero.
120     positivadefinida = all(eig(Sigma) > 0);
121 %Se calcula el incremento entre la log-verosimilitud del estimador
122 %seleccionado entre m y m-1. Si el valor en m es mayor que m-1, el
123 %indicador m sera igual a 1.
124     incremento=(Lasterisco(indice_lambda)-logverosimilitudt(u,A_m*Sigma_m*A_m,nu));
125     mejora=(Lasterisco(indice_lambda)>Logverosim_m);
126     if (positivadefinida == 1) & (mejora==1)
127         Sigma_m=Sigma;
128         lambda_m=lambda_vector(indice_lambda);
129         Logverosim_m=Lasterisco(indice_lambda);
130         Rho_est_t=Rho_aux{indice_lambda};
131     else
132         lambda_m=k_1*lambda_m;
133     end
134     disp(Logverosim_m)
135     disp(Rho_est_t)
136     disp(lambda_m)
137     disp(positivadefinida)
138     disp(mejora)
139 end
140 positivadefinida=0;
141 mejora=0;
142 end

```

64 APÉNDICE A. PROGRAMAS DE ESTIMACIÓN PARA LA CORRELACIÓN

```

143 %Con el fin de asegurar que en la Rho resultante el valor de la diagonal
144 %sea 1, sin decimales, realizo el siguiente proceso:
145 for i=1:d
146     Rho_est_t(i,i)=1;
147 end
148 for j=1:d
149     for i=1:d
150         Rho_est_t(i,j)=(floor(Rho_est_t(i,j)*10e+12))/10e+12;
151     end
152 end
153 disp(Logverosim_m);
154 save('Rho_est_t','Rho_est_t','nu')

```

La función de verosimilitud empleada y la cópula de la t-student se definen a continuación

```

1 %Mediante esta función se calcula la log verosimilitud de la estimación
2 %gaussiana, empleando los parametros u, observaciones en el cuadro unitario
3 %[0,1], la matriz de correlaciones (Rho) y los grados de
4 %libertad (nu)
5 function log_verosim_t=logverosimilitud_t(u,Rho,nu)
6 % u matrix nxd
7 % rho matriz de correlaciones (dxd)
8 n=size(u,1);
9 log_verosim_t=0;
10 %En el cálculo a continuación se presenta la cópula Gaussiana esta función
11 %se define posteriormente
12 for t=1:n
13     log_verosim_t=log_verosim_t+log(copula_t(u(t,:),Rho,nu));
14 end

```

```

1 %Mediante esta función se calcula el valor de la cópula t-Student, emplea
2 %los parametros u, correspondiente a las observaciones que se encuentran en
3 %el cuadro unitario [0,1], la matriz de correlaciones (Rho) y los grados de
4 %libertad (nu)
5 function c=copula_t(u,Rho,nu)
6 s=tcdf(u,nu); % observaciones a las cuales se aplica la distribución t-student
7 d=size(u,2); % número de variables
8 c=gamma((nu+d)/2)*(gamma(nu/2))^(d-1)/(sqrt(det(Rho))*...
9     (gamma((nu+1)/2))^d*(1+(s'*inv(Rho)*s)/nu)^(-(nu+d)/2))/...
10     prod((1+(s.^2/nu)).^(-(nu+1)/2));

```

A continuación se presenta el código correspondiente a la estimación gaussiana. El proceso es muy similar a la t-student, se modifica la transformación de observaciones, mediante una normal inversa y se incorpora el parámetro de grados de libertad ν

```

1 function Rho_est_gaus=estimacion_sigma_normal
2 cd('C:\Users\Enrique\Documents\Seminaro de Titulacion\Scripts_tesina_prog')
3 load('observaciones');
4 u=observaciones;
5 n=size(u,1); % tamaño de observaciones
6 d=size(u,2); % número de variables
7 g=norminv(u,0,1); % Transformación de los log-rendimientos que están en el cuadro unitario me
8 Sigma_0=zeros(d,d);

```

```

9 k_1=1/2;
10 k_2=4/3;
11 lambda_m=1/n;
12 incremento=10; %Incremento entre los mejores estimadores encontrados entre m y m+1
13 positivadefinida=0; %Indicador que emplearemos para definir si la matriz de covarianza con la mejor veros
14 mejora=0;
15 tolerancia=.00000000001;
16 cont=0;
17 %Paso 0. Se definen las transformaciones en los datos a emplear, en el caso
18 %de la gaussiana, se emplea la distribución univariada normal inversa.
19 %Adicionalmente se inicializa la matriz de covarianza a proyectar
20 %empleando las transformaciones.
21
22 %Se inicializa Sigma (matriz de covarianza)
23 for t=1:n
24     Sigma_0=Sigma_0+g(t,:)'*g(t,:);
25 end
26 Sigma_0=(Sigma_0)/n;
27 Sigma_m=Sigma_0;
28 %PASO 1. A partir de la sigma inicial calculamos la proyección
29 %del espacio de matrices de correlación.
30
31 %Se define A_m como delta_ij*/ sqrt(Sigma_ii) (*delta de Kronecker), considerando que
32 %vale 1 cuando i=j y 0 cuando i<>j, se considera solo el caso cuando i=j,
33 %en los demas casos el resultado seria 0.
34
35 while incremento>tolerancia
36     cont=cont+1;
37     disp(['Paso ' num2str(cont)])
38     A_m=zeros(d,d);
39     for i=1:d
40         A_m(i,i)=1/sqrt(Sigma_m(i,i));
41     end
42     if cont==1
43         Logverosim_m=logverosimilitud(u,A_m*Sigma_m*A_m);
44     end
45     %El siguiente proceso corresponde a la proyección de la matriz de
46     %covarianza al espacio de matrices de correlación.
47     Rho=A_m*Sigma_m*A_m;
48     Sum_g=zeros(d,d); %Inicializa la matriz de observaciones transformadas normal-inversa
49     for t=1:n
50         Sum_g=Sum_g+g(t,:)'*g(t,:);
51     end
52
53     D_rho=(n/2)*Rho-(1/2)*Sum_g;
54
55     auxDiag=diag(D_rho*inv(Rho));
56     auxD=diag(auxDiag);
57
58     Delta_m=-(inv(A_m))*(D_rho-Rho*auxD*Rho)*inv(A_m);
59
60     while (positivadefinida == 0) | (mejora==0)
61         lambda_vector=[k_1*lambda_m, lambda_m, k_2*lambda_m];
62         Rho_aux=cell(1,length(lambda_vector));
63         for l=1:length(lambda_vector)
64             Sigma=Sigma_m+lambda_vector(l)*Delta_m;
65             % Calcular A para la proyección

```

```

66         A_aux=zeros(d,d);
67         for i=1:d
68             A_aux(i,i)=1/sqrt(Sigma(i,i));
69         end
70         Rho_aux{1}=A_aux*Sigma*A_aux;
71         Lasterisco(1)=logverosimilitud(u,Rho_aux{1});
72     end
73     indice_lambda= find(Lasterisco==max(Lasterisco));
74     indice_lambda=indice_lambda(1);
75     Sigma=Sigma_m+lambda_vector(indice_lambda)*Delta_m;
76 % Comprobar que Sigma es positiva definida
77     positivadefinida = all(eig(Sigma) > 0);
78     incremento=(Lasterisco(indice_lambda)-logverosimilitud(u,A_m*Sigma_m*A_m));
79     mejora=(Lasterisco(indice_lambda)>Logverosim_m);
80     if (positivadefinida == 1) & (mejora==1)
81         Sigma_m=Sigma;
82         lambda_m=lambda_vector(indice_lambda);
83         Logverosim_m=Lasterisco(indice_lambda);
84         Rho_est_gaus=Rho_aux{indice_lambda};
85     else
86         lambda_m=k_1*lambda_m;
87     end
88     disp(Logverosim_m)
89     disp(Rho_est_gaus)
90     disp(lambda_m)
91     disp(positivadefinida)
92     disp(mejora)
93     end
94     positivadefinida=0;
95     mejora=0;
96 end
97 %Con el fin de asegurar que en la Rho resultante el valor de la diagonal
98 %sea 1, sin decimales, realizo el siguiente proceso:
99 for i=1:d
100     Rho_est_gaus(i,i)=1;
101 end
102 disp(Logverosim_m);
103 save('Rho_est_gaus','Rho_est_gaus')

```

En el caso del cálculo de la log verosimilitud, la modificación se realiza en la definición de la cópula.

```

1 %Mediante esta función se calcula la log verosimilitud de la estimación
2 %gaussiana, empleando los parametros u, observaciones del cuadro unitario
3 %[0,1] y la matriz de correlaciones (Rho)
4 function log_verosim=logverosimilitud(u,Rho)
5 % u matrix nxd
6 % rho matriz de correlaciones (dxd)
7 n=size(u,1);
8 log_verosim=0;
9 %En el cálculo a continuación se presenta la cópula Gaussiana esta función
10 %se define posteriormente
11 for t=1:n
12     log_verosim=log_verosim+log(copula_gaus(u(t,:),Rho));
13 end

```

```
1 %Mediante esta función se calcula el valor de la cópula gaussiana, emplea
2 %los parametros u, correspondiente a las observaciones que se encuentran en
3 %el cuadro unitario [0,1] y la matriz de correlaciones (Rho)
4 function c=copula-gaus(u,Rho)
5 % u es un vector columna
6 g=norminv(u,0,1);
7 c=1/sqrt(det(Rho))*(exp((-1/2)*g'*inv(Rho)*g))/prod(exp((-1/2)*g.*g));
```


Bibliografía

- [AF90] T. W. Anderson and Kai-Tai Fang. Theory and applications of elliptically contoured and related distributions. *Stanford University*, 1990.
- [GVB93] A. K. Gupta, T. Varga, and T. Bodnar. *Elliptically contoured models in statistics*. Springer-Verlag New York, Inc., 1993.
- [JK11] H. Joe and D. Kurowicka. *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook*. World Scientific Pub., 2011.
- [MLE14] Maximum likelihood estimation of the correlation parameters for elliptical copulas. *Quantitative Risk Research S.L.*, 2014.
- [Nel06] Roger B. Nelsen. *An Introduction to Copulas (Springer Series in Statistics)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2006.
- [Zha08] Ming-Heng Zhang. Modelling total tail dependence along diagonals. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(1):73 – 80, 2008.