UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONJUNTOS DE CANTOR CON DIMENSIÓN ARBITRARIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

JORGE MORENO MONTES

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS
2016

Ciudad Universitaria, CDMX

1. Datos del Alumno
    Moreno
    Montes
    Jorge
    5547917510
    Universidad Nacional Autónoma de México
    Facultad de Ciencias
    Matemáticas
    410003660

2. Datos del Tutor
    Dra.
    Martínez Adame
    Isais
    Carmen

3. Datos del Sinodal 1
    Dra.
    Sandoval
    Romero
    María de los Ángeles

4. Datos del Sinodal 2
    Dr.
    Sienra
    Loera
    Guillermo Javier Francisco

5. Datos del Sinodal 3
    Dr.
    Gómez
    Aiza
    Ricardo

6. Datos del Sinodal 4
    Dr.
    Martínez
    Montejano
    Jorge Marcos

7. Datos del trabajo escrito
    Conjuntos de Cantor con dimensión arbitraria
    78 pp.

Prólogo

Los fractales surgen en diversas áreas de las matemáticas y pueden ser definidos como objetos altamente irregulares. Muchas veces como ejemplos patológicos que generan contraejemplos, como es el caso de la curva de Koch que cual es continua pero es no diferenciable en cada punto de su dominio; y a veces de forma natural, como en el caso de los atractores de ciertos sistemas dinámicos.

A pesar de que la palabra "fractal" fue acuñada por Benoit Mandelbrot en los ochentas, los ejemplos de conjuntos que podrían ser considerados como fractales empezaron a surgir en los trabajos de matemáticos desde Weierstrass y Cantor; y la definición formal es aún un tema de controversia. Sin embargo, uno de los aspectos que parece que ayudará a caracterizar a estos objetos es su raro comportamiento bajo ciertas definiciones de dimensión; pues a pesar de que el concepto más usual de dimensión, trabajado en álgebra lineal y topología, sólo permite valores naturales o infinito, otras definiciones relacionadas con la forma de medir un conjunto permiten que la dimensión de ciertos conjuntos sea cualquier número no negativo. Estas definiciones coinciden con la definición clásica en los espacios euclidianos o en las variedades diferenciables y son comunmente llamados dimensiones fractales. Las diferentes definiciones de fractal apuntan a que este concepto debe de ser relacionado con los objetos con dimensiones fractales estrictamente mayores a su dimensión topológica.

Las dimensiones fractales son usualmente difíciles de calcular, pues dependen de las propiedades métricas de conjuntos que son difíciles de visualizar o expresar algebraicamente; pero existen múltiples ejemplos de fractales cuya dimensión de Hausdorff ha sido calculada, y usualmente es un número irracional. Modificar estas dimensiones mediante funciones continuas puede ser bastante complicado, pues la estructura métrica puede no variar, en cuyo caso la dimensión no cambia; o la estructura métrica puede cambiar tanto que dificulta el cálculo de dimensiones.

El objetivo de la investigación que llevó a la escritura de esta tesis fue encontrar algunos métodos de construcción de conjuntos cuyas dimensiones fractales sean arbitrarias; pero conservando algún patrón topológico, pues si para obtener un fractal para cada número real no negativo se quisiera buscar una estructura topológica diferente, la tarea sería claramente imposible. Esto llevó a una primera solución, simple pero con implicaciones relevantes: dado cualquier número real no negativo, es posible contruir un subconjunto de un espacio euclidiano que tenga ese número como dimensión de Hausdorff y sea homeomorfo al conjunto de Cantor. Este primer resultado se logra con los conjuntos invariantes de sistemas de funciones iteradas e implica inmediatamente que la dimensión de Hausdorff no es una propiedad topológica, como sugiere su naturaleza métrica. En el quinto capítulo, esta tesis presenta un resultado mucho más fuerte, encontrado en [8].

Se ha intentado que este texto sea autocontenido, de forma que un estudiante de matemáticas con conocimientos básicos de topología sea capaz de entenderlo. En el primer capítulo se presentan algunos conceptos y resultados de teoría de la medida, los cuales son necesarios para trabajar las medidas de Hausdorff y empaque, que a se vez se usarán para definir las respectivas dimensiones. El segundo capítulo está dividido en seis secciones que presentan algunas de las definiciones de dimensión, así como sus propiedades y la forma en que estas definiciones se relacionan. El tercer capítulo presenta al conjunto de Cantor, cuya caracterización permite responder a las preguntas centrales de esta tesis. En el cuarto capítulo se presentan herramientas para el cálculo de dimensión de Hausdorff del conjunto invariante de un sistema de funciones iteradas junto con una primera construcción de conjuntos homeomorfos con dimensiones diferentes.

Finalmente, el quinto capítulo representa la parte central de esta tesis, pues se estudia el teorema presentado por Nilsson y Wingren en [8], el cual construye conjuntos homeomorfos al conjunto de Cantor ternario, pero con dimensiones de Hausdorff y conteo de cajas arbitrarias; y cuyos subconjuntos abiertos cumplen con las mismas propiedades de dimensión. Se agrega una ligera modificación a la construcción que facilita demostrar que los conjuntos resultantes son homeomorfos al conjunto de Cantor y se agrega esta demostración, inexistente en el artículo original. Cabe mencionar que la última sección de este capítulo está dedicada a presentar brevemente algunos resultados relacionados con el teorema de Nilsson-Wingren que aportan respuestas parciales a las preguntas de esta tesis.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la teoría de la medida

La teoría de la medida permite establecer diferentes formas de medir un conjunto, permitiendo su aplicación en diferentes ramas matemáticas. Esto implica establecer definiciones que, en los casos de interés de este texto, coincidan con los conceptos ya conocidos de longitud en $\mathbb{R}$, de área en $\mathbb{R}^2$ y volumen en $\mathbb{R}^3$ para todos los conjuntos que surgen en la geometría clásica; además de que extiendan estos conceptos a más conjuntos (deseablemente, todos los subconjuntos abiertos y cerrados en $\mathbb{R}^n$, así como sus uniones e intersecciones numerables). Como se menciona en la introducción de este texto, algunas definiciones de dimensión fractal surgen al tratar de elegir una medida adecuada para un conjunto, por lo que en este capítulo se busca presentar las definiciones y teoremas básicos de la teoría de la medida. También será presentado un ejemplo clásico de medida en los espacios euclidianos: la medida de Lebesgue, la cual usa y extiende la forma usual de medir conjuntos en un espacio euclidiano (particularmente, la forma de medir una n-celda o n-rectángulo) y eventualmente pondrá en evidencia cuál es la variación que las medidas de Hausdorff y las medidas de empaque representan. Cabe mencionar que este texto se limitará al estudio de los conceptos de medida en espacios euclidianos. Se omitirán algunas demostraciones que se pueden encontrar en [1] y [11].

Las definiciones formales en este capítulo comenzarán con la definición de medida exterior, la cual surge de la idea de aproximarse a la medida de un conjunto acotándola "por afuera", encerrando al conjunto usando conjuntos que lo contengan y cuyas medidas ya han sido definidas. Aunque la definición parece bastante abstracta para una idea tan intuitiva, uno de los teoremas posteriores pondrá esto en evidencia.

Definición 1.1. *Una función* $\overline{\mu} : P(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ *es una* medida exterior *en* $\mathbb{R}^n$ *si:*

1. $\overline{\mu}(\varnothing) = 0$,

2. *Si* $A \subset B$, *entonces* $\overline{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(B)$,

3. *Para toda* $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *familia numerable de subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *se cumple que* $\overline{\mu}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{\mu}(A_i)$.

A partir de esta definición, se puede observar la importancia que estas condiciones tienen para que una medida exterior coincida con la intuición de aproximarse "por afuera.ª un conjunto. La primera condición es necesaria dado que el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto, por lo que debería medir menos que todo conjunto (y se considera que la medida de cualquier conjunto debe ser un número no negativo); la segunda condición (llamada monotonía) tiene sentido debido a que la medida de cualquier conjunto que contenga al que se quiere medir, acote superiormente la medida del mismo. Por último, la tercera condición (llamada σ-subaditividad o subaditividad numerable) establece que al cubrir un conjunto con otros (una cantidad numerable), la suma de las medidas de los conjuntos que lo cubren no será menor que la del conjunto cubierto.

La siguiente propiedad que se desea que se satisfaga es que si un conjunto se separa en dos partes ajenas, la suma de las medidas de las partes sea igual a la medida del conjunto original, y es esta condición donde las medidas exteriores pueden fallar. A pesar de que la medida exterior está definida para todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$, algunos no cumplen con esta propiedad (como se mostrará en este capítulo).

A continuación se presentan la definición de conjunto medible (que es un conjunto que sí cumple con esta condición), y una equivalencia que es útil para demostrar con mayor facilidad algunos teoremas.

Definición 1.2. *Sea $\overline{\mu}$ una medida exterior en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es* medible *bajo $\overline{\mu}$ (o $\overline{\mu}$-medible) si para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ se cumple que:*

$$\overline{\mu}\,(A \cap E) + \overline{\mu}\,(E \setminus A) = \overline{\mu}\,(E)\,.$$

Proposición 1.3. *Sea $\overline{\mu}$ una medida exterior en $\mathbb{R}^n$. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es $\overline{\mu}$-medible si y sólo si para toda pareja de conjuntos U, $V \subset \mathbb{R}^n$ tales que $U \subset A$ y $V \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, se cumple que:*

$$\overline{\mu}\,(U \cup V) = \overline{\mu}\,(U) + \overline{\mu}\,(V)\,.$$

Demostración. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto $\overline{\mu}$-medible, U, $V \subset \mathbb{R}^n$ tales que $U \subset A$ y $V \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Por la definición de conjunto medible, se cumple que

$$\overline{\mu}(U \cup V) = \overline{\mu}\big((U \cup V) \cap A\big) + \overline{\mu}\big((U \cup V) \setminus A\big).$$

Además, como $U \subset A$ y $V \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, se cumple que $(U \cup V) \cap A = U$ y $(U \cup V) \setminus A = V$. Por tanto,

$$\overline{\mu}(U \cup V) = \overline{\mu}(U) + \overline{\mu}(V).$$

Por otro lado, si $A \subset \mathbb{R}^n$ cumple la segunda condición y $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces $E \cap A \subset A$ y $E \setminus A \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, por lo que

$$\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}\big((E \cap A) \cup (E \setminus A)\big) = \overline{\mu}(E \cap A) + \overline{\mu}(E \setminus A).$$

Como E fue tomado de forma arbitraria, esto implica que A es $\overline{\mu}$-medible.

$\square$

Al saber que la definición de medida exterior no implica una propiedad deseable para que el concepto funcione como es deseado, la solución que presenta esta teoría es restringir la función a los conjuntos medibles. Se comienza dándole una estructura algebraica a la familia de conjuntos medibles bajo una medida exterior: la estructura de σ-álgebra.

A continuación se presentarán la definiciones de σ-álgebra y medida en una σ-álgebra, así como algunas propiedades importantes de estos dos conceptos. La razón es que al comprobar que la familia de conjuntos medibles bajo una medida exterior tiene la estructura mencionada, bastará restringir una medida exterior (en $\mathbb{R}^n$) a su familia de conjuntos medibles para obtener una medida en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.4. *Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X es una* σ-álgebra *en X si:*

i) $\varnothing \in \mathcal{S}$.

ii) La familia $\mathcal{S}$ es cerrada bajo complementos, es decir, que si $A \in \mathcal{S}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{S}$.

iii) La familia $\mathcal{S}$ es cerrada bajo uniones numerables, es decir, que si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{S}$, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$.

La siguiente proposición establece que las condiciones que se usan para definir una σ-álgebra implican que estas familias son también cerradas bajo intersecciones numerables.

Proposición 1.5. *Sea $\mathcal{S}$ una σ-álgebra en X. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{S}$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{S}$. Ya que toda σ-álgebra es cerrada bajo complementos y uniones numerables, se cumple que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i) \in \mathcal{S}$. Al usar una vez más la propiedad de cerradura de $\mathcal{S}$ bajo complementos y las Leyes de De Morgan, se obtiene que $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$. □

Debe de notarse que la familia de todos los subconjuntos de X es una σ-álgebra en X, por lo que para cualquier familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, existe al menos una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{T}$. Considerando esto, sería natural preguntar si existe una mínima σ-álgebra que contenga a la familia $\mathcal{T}$. La respuesta a esta pregunta es afirmativa y surge al observar que la intersección arbitraria de σ-álgebras es también una σ-álgebra.

Proposición 1.6. *Sea X un conjunto. Si $\{\mathcal{S}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una colección de σ-álgebras en X, entonces $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{S}_\alpha$ es una σ-álgebra en X.*

Demostración. Primero debe comprobarse que $\varnothing \in \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{S}_\alpha$, para lo cual se observa que $\varnothing \in \mathcal{S}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

La cerradura bajo complementos en $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{S}_\alpha$ se debe a que si $A \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{S}_\alpha$ entonces $A \in \mathcal{S}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. La familia $\mathcal{S}_\alpha$ es cerrada bajo complementos, por lo que $X \setminus A \in \mathcal{S}_\alpha$ y $X \ \setminus A \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{S}_\alpha$.

Por último, si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{S}_\alpha$, entonces es una sucesión en $\mathcal{S}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Como cada $\mathcal{S}_\alpha$ es cerrada bajo uniones numerables, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}_\alpha$. Esto implica que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ está en la intersección, con lo que se concluye que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{S}_\alpha$ es una σ-álgebra. $\square$

Teniendo presente el resultado anterior, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 1.7. *Sean S un conjunto y $\mathcal{T}$ una familia de subconjuntos de S. La σ-*álgebra generada por *$\mathcal{T}$ es la familia de subconjuntos de S obtenida al intersectar todas las σ-álgebras $\mathcal{S}'$ tales que $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}'$. La σ-álgebra generada por la topología de un espacio topológico es llamada σ-álgebra de Borel.*

Definición 1.8. *Sea $\mathcal{S}$ una σ-álgebra en $\mathbb{R}^n$. Una* medida *en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{S})$ es una función $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ tal que:*

i) $\mu(\varnothing) = 0$.

ii) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos ajenos entre sí, entonces

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Esta propiedad es llamada σ-aditividad.

Si $\mathcal{S}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, la medida μ es una medida de Borel.

Proposición 1.9. *Toda medida μ en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{S})$ es:*

a) Aditiva: Si $A, B \in \mathcal{S}$ y $A \cap B = \varnothing$, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

b) Monótona: Si $A, B \in \mathcal{S}$ y $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

c) Sustractiva: Si $A, B \in \mathcal{S}$, $A \subset B$ y $\mu(A) < \infty$ entonces:

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Demostración. Sea μ en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{S})$ una medida. Su aditividad no requiere demostración al ser consecuencia inmediata de su σ-aditividad.

Si $A, B \in \mathcal{S}$ y $A \subset B$, entonces $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ y $B \setminus A \in \mathcal{S}$, así que al aplicar la propiedad de aditivad se obtiene que

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B),$$

lo cual prueba que μ es monótona. Además, al resolver la ecuación para $\mu(B \setminus A)$ se prueba que μ es sustractiva. $\square$

Ahora que el lector está familiarizado con estas definiciones, es posible presentar el teorema que conecta a todos estos elementos: el Teorema de Carathéodory.

Teorema 1.10 (Carathéodory)**.** *Si $\overline{\mu}$ es una medida exterior en $\mathbb{R}^n$, entonces la familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son $\overline{\mu}$-medibles es una σ-álgebra, y la función $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ dada por*

$$\mu(A) = \overline{\mu}(A)$$

es una medida en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{S})$.

Demostración. Es claro que $\varnothing$ es $\overline{\mu}$-medible. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es $\overline{\mu}$-medible, entonces para toda pareja de conjuntos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tales que $U \subset A$ y $V \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, se cumple que

$$\overline{\mu}(U \cup V) = \overline{\mu}(U) + \overline{\mu}(V)$$

lo cual es equivalente a decir que $\mathbb{R}^n \setminus A$ es $\overline{\mu}$-medible (por tanto, la familia de conjuntos $\overline{\mu}$-medibles es cerrada bajo complementos).

Para probar que la familia $\mathcal{S}$ es cerrada bajo uniones numerables, primero se probará que si $A, B \in \mathcal{S}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{S}$. Sean $A, B \in \mathcal{S}$ y $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tales que $U \subset A \cup B$ y $V \subset \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$. Dado que A es $\overline{\mu}$-medible, se cumple que

$$\overline{\mu}(U \cup V) = \overline{\mu}([(U \cup V) \cap A] \cup [(U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)])$$

$$= \overline{\mu}([U \cap A] \cup [(U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)]) = \overline{\mu}(U \cap A) + \overline{\mu}((U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A))$$

$$= \overline{\mu}(U \cap A) + \overline{\mu}([(U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B] \cup [(U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)]).$$

Dado que B es $\overline{\mu}$-medible, esta expresión es igual a

$$= \overline{\mu}(U \cap A) + \overline{\mu}((U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B) + \overline{\mu}((U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B))$$

$$= \overline{\mu}\,(U \cap A) + \overline{\mu}\,((U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B) + \overline{\mu}\,(V)$$

$$= \overline{\mu}\,(U \cap A) + \overline{\mu}\,(U \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B) + \overline{\mu}\,(V)\,.$$

Por último, dado que A es $\overline{\mu}$-medible, $U \cap A \subset A$ y $(U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, se sigue que:

$$= \overline{\mu}\,([U \cap A] \cup [U \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B]) + \overline{\mu}\,(V) = \overline{\mu}\,(U) + \overline{\mu}\,(V)\,.$$

Con lo que se concluye que $\mathcal{S}$ es cerrada bajo uniones finitas. Para probar que $\mathcal{S}$ es cerrada bajo uniones numerables, se consideran $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ $\overline{\mu}$-medibles; y $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tales que $U \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $V \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Se considera la familia de conjuntos definidos recursivamente de la siguiente manera:

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \cup B_1$$

$$B_n = A_n \cup B_{n-1} \quad \text{si } n > 1$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Se observa que $B_i \in \mathcal{S}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, pues $\mathcal{S}$ es cerrada bajo uniones finitas.

Dado que B_i es $\overline{\mu}$-medible para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\mu}\,(U \cup V) = \overline{\mu}\,([(U \cup V) \cap B_i] \cup [(U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_i)])$$

$$= \overline{\mu}\,([(U \cup V) \cap B_i]) + \overline{\mu}\,((U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_i))$$

$$\geq \overline{\mu}\,([(U \cup V) \cap B_i]) + \overline{\mu}\,((U \cup V) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)) = \overline{\mu}\,([(U \cup V) \cap B_i]) + \overline{\mu}\,(V)\,.$$

Por tanto,

$$\overline{\mu}\,(U \cup V) \geq \overline{\mu}\,([(U \cup V) \cap B]) + \overline{\mu}\,(V) = \overline{\mu}\,(U) + \overline{\mu}\,(V)\,.$$

Por otro lado, debido a que $\overline{\mu}$ es una medida exterior, se cumple que

$$\overline{\mu}\,(U \cup V) \leq \overline{\mu}\,(U) + \overline{\mu}\,(V)\,.$$

Por tanto, A es $\overline{\mu}$-medible, con lo que se conluye la demostración de que $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra.

El siguiente paso es demostrar que μ es una medida en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{S})$. Dado que μ es σ-subaditiva por ser restricción de $\overline{\mu}$, y $\mu(\varnothing) = \overline{\mu}(\varnothing) = 0$, basta demostrar que si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de elementos ajenos de $\mathcal{S}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Esto se cumple ya que si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de elementos ajenos de $\mathcal{S}$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \geq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big).$$

Dado que A_1 es $\overline{\mu}$-medible y $\bigcup_{i=2}^{k} A_i \subset \mathbb{R}^n \setminus A_1$:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) = \mu(A_1) + \mu\Big(\bigcup_{i=2}^{k} A_i\Big).$$

Repitiendo este procedimiento k veces se obtiene que:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

Como esto se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$, se concluye que:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

con lo que finaliza la demostración. □

El teorema de Carathéodory es un importante paso para definir una función de medida "decente.en un espacio euclidiano, pero aún falta algo: una forma de construir medidas exteriores de las cuales partir. Al introducir el concepto de medida exterior, se habló de aproximar la medida de un conjunto acotándola superiormente con conjuntos que lo contengan y cuya medida esté ya definida, lo cual lleva inevitablemente a tomar una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que sirva para aproximarse exteriormente a cualquier conjunto y definir una función que les asigne un número (el cual será su medida). Para hacer esto, es necesario cuidar que la medida asignada inicialmente a estos conjuntos se mantenga al inducir una medida exterior. Para esto, se comenzará con una definición de álgebra de Boole y de pre-medida en un álgebra de Boole.

Definición 1.11. *Un* álgebra de Boole *en un conjunto X es una 6-ada ordenada $(\mathcal{B}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$, donde $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de X; $\wedge$, $\vee$ son operaciones binarias en $\mathcal{B}$; $\neg$ es una función de $\mathcal{B}$ en sí mismo; 0 y 1 son elementos especiales (llamados ínfimo y supremo, respectivamente) que cumplen, para todos $A, B, C \in \mathcal{B}$, los siguientes axiomas:*

1. *$\mathcal{B}$ es cerrado bajo $\wedge, \vee, \neg$.*

2. *$A \wedge B = B \wedge A$ y $A \vee B = B \vee A$.*

3. *$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ y $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$.*

4. *$A \vee (A \wedge B) = A$ y $A \wedge (A \vee B) = A$.*

5. *$A \vee 0 = A$ y $A \wedge 1 = A$*

6. *$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ y $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.*

7. *$A \vee \neg A = 1$ y $A \wedge \neg A = 0$.*

Para los intereses de este texto, $0 = \varnothing$, $1 = X$, $\vee = \cup$, $\wedge = \cap$ y $\neg A$ será el complemento de A, los cuales cumplen con todos los axiomas enunciados.

Definición 1.12. *El álgebra de Boole X* generada *por la familia $\mathcal{F}$ es la intersección de todas las álgebras de Boole $(\mathcal{B}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ en X tales que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$.*

Definición 1.13. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Boole. Una función $\tau : \mathcal{B} \subset P(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ es una* pre-medida *en $\mathcal{B}$ si para toda familia numerable $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de conjuntos en $\mathcal{B}$ ajenos dos a dos tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$, se cumple que*

$$\tau\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i).$$

Proposición 1.14. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Boole. Si $\tau : \mathcal{B} \subset P(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ es una pre-medida en $\mathcal{B}$ y $\tau(A) < \infty$ para algún $A \in \mathcal{B}$, entonces $\tau(\varnothing) = 0$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}$ tal que $\tau(A) < \infty$. Es claro que

$$\tau(A) = \tau(A \cup \varnothing) = \tau(A) + \tau(\varnothing).$$

Por tanto, $\tau(\varnothing) = 0$. □

El siguiente teorema permite extender una pre-medida, definida en una clase conveniente de subconjuntos del espacio en el que se trabaja, a una medida exterior definida en todo el conjunto potencia del espacio.

Teorema 1.15. *Sea τ una pre-medida en $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$. Si $\tau(\varnothing) = 0$, entonces la función $\overline{\mu} : P(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ dada por:*

$$\overline{\mu}(E) = \text{ínf}\,\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(F_i) \ \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,\ F_i \in \mathcal{F} \Big\}$$

es una medida exterior en $\mathbb{R}^n$.

Este método para construcción para medidas exteriores es llamado "método I".

Demostración. Primero se observa que $\overline{\mu}(\varnothing) = 0$, puesto que

$$\overline{\mu}(\varnothing) = \text{ínf}\,\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(F_i) \ \mid \varnothing \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,\ F_i \in \mathcal{F} \Big\} \le \sum_{i=1}^{\infty} \tau(\varnothing) = 0,$$

con lo que se prueba la primera condición necesaria para que $\overline{\mu}$ sea una medida exterior.

Para probar la segunda condición, se consideran $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. Por definición, toda cubierta de B formada por elementos de $\mathcal{F}$ es una cubierta de A, lo cual implica que

$$\overline{\mu}(A) = \text{ínf}\,\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(F_i) \,|A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \Big\} \le \text{ínf}\,\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(F_i) \,|B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \Big\} = \overline{\mu}(B),$$

con lo que se demuestra la segunda condición.

Para probar la tercera condición, se considera una familia numerable $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y se observa que el resultado es trivial si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_i) = \infty$. Si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_i) < \infty$, entonces $\overline{\mu}(A_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$; lo cual implica que para todo $\epsilon > 0$ existe una familia de conjuntos $\{F_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{j=1}^{(i)}$ y $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \tau\left(F_j^{(i)}\right) \le \overline{\mu}(A_i) + 2^{-i}\epsilon$.

Se puede obtener una cubierta de $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ al reordenar las familias $\{F_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$ en una sola familia numerable de conjuntos $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$, con la cual se obtiene que

$$\overline{\mu}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tau(D_i) \le \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_i),$$

y como esto sucede para todo $\epsilon > 0$, se concluye que

$$\overline{\mu}\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}\,(A_i)\,.$$

Por tanto, $\overline{\mu}$ es una medida exterior en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Concluida esta demostración, es posible hablar de la medida de Lebesgue. Como ya se mencionó, se comenzará definiendo una pre-medida que use la manera usual de medir una n-celda: la medida de una 1-celda (intervalo) en $\mathbb{R}$ (longitud) es la distancia entre sus extremos; la medida de una 2-celda (rectángulo) en $\mathbb{R}^2$ es el producto de las longitudes de sus dos lados, etcétera. Una vez definida una pre-medida de esta manera, los teoremas estudiados previamente permiten construir una medida exterior usando el método I, y una medida usando el Teorema de Carathéodory.

Definición 1.16. *Sea $\mathcal{F}$ el álgebra de Boole generada por la familia $\{A \subset \mathbb{R}^n : A = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)\,;\ a_i \leq b_i\}$. Se define $\lambda_n^* : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ de la siguiente forma:*

$$\lambda_n^*\big(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)\big) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)\,.$$

$$\lambda_n^*\big(\mathbb{R}^n \setminus \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)\big) = \infty.$$

Dado que $\varnothing \in \mathcal{F}$ y $\lambda_n^*(\varnothing) = 0$, λ_n^* es una pre-medida en $\mathbb{R}^n$, por lo que induce una medida exterior al usar el método I, la cual será llamada $\overline{\lambda}_n$.

Definición 1.17. *Los conjuntos $\overline{\lambda}_n$-medibles son llamados* conjuntos Lebesgue-medibles *en $\mathbb{R}^n$.*

Definición 1.18. *La σ-álgebra generada por la topología de $\mathbb{R}^n$ es llamada* σ-álgebra de Borel *en $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 1.19. *La σ-álgebra de los conjuntos $\overline{\lambda_n}$-medibles es la σ-álgebra generada por la topología de $\mathbb{R}^n$.*

Definición 1.20. *La restricción de $\overline{\lambda}_n$ a la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ es llamada medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y se denotará λ_n (y $\lambda_1 = \lambda$).*

Debe notarse que todo conjunto cerrado pertenece a esta σ-álgebra por la propiedad de cerradura bajo complementos.

Ejemplo 1.21. *La pregunta de si todos los conjuntos son Lebesgue-medibles parece natural. A continuación se presenta la construcción de los conjuntos de Vitali, que son subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son Lebesgue-medibles. Se comienza definiendo una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:*

$$a \sim b \text{ si } a - b \in \mathbb{Q}$$

Un conjunto de Vitali es un subconjunto de $\mathbb{R}$ compuesto por uno y sólo un representante de cada clase de equivalencia de $\sim$.

Proposición 1.22. *Todo intervalo cerrado no degenerado en $\mathbb{R}$ contiene un conjunto de Vitali.*

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado. Basta probar que la clase de equivalencia de x con la relación $\sim$ tiene un representante en $[a, b]$; para lo cual observamos que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x + q = y \in [a, b]$; lo cual implica que $y \sim x$, así que y es el representante buscado. $\square$

A partir de ahora, se denotará como $\mathcal{V}$ a un conjunto de Vitali contenido en $[0, 1]$. A continuación, se demostrarán varias propiedades que tendrán como consecuencia que $\mathcal{V}$ no es Lebesgue-medible. Se comienza definiendo el conjunto

$$\mathcal{V}_q = \{x \in [0, 1] : \; x = v + q \, (\text{mod } 1) \; \text{ para algún } v \in \mathcal{V}\}$$

para cada $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, donde $x = v + q \, (\text{mod } 1)$ si $x - (v + q) \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.23. *Sean $p, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$. Si $p \neq q$ entonces $\mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q = \varnothing$.*

Demostración. Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ diferentes. Si se supone que $x \in \mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q$, entonces $x = v_1 + p(\text{mod } 1) = v_2 + q(\text{mod } 1)$ para algunos $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$. Se observa que $v_1 - v_2 = q - p \in \mathbb{Q}$, lo cual implica que $v_1 = v_2$, pues $\mathcal{V}$ tiene un solo representante de cada clase de equivalencia de $\sim$. Se concluye que $p = q$, lo cual es una contradicción, originada al suponer que $\mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q \neq \varnothing$. Esto termina la demostración. $\square$

Proposición 1.24. $[0, 1] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mathcal{V}_q$.

Demostración. Sea $x \in [0, 1]$. Existe $v \in \mathcal{V}$ tal que $v + q(\text{mod } 1) = x$ para algún $q \in [0, 1)$, por lo que $x \in \mathcal{V}_q$. $\square$

Proposición 1.25. *$\mathcal{V}$ no es medible.*

Demostración. Si se supone que $\mathcal{V}$ es medible, entonces $\mathcal{V}_q$ es medible para todo $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, lo cual genera dos posibilidades:

1. Si $\lambda(\mathcal{V}) = a > 0$, entonces $\lambda(\mathcal{V}_q) = a$ para todo $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$. Por tanto:

$$3 = \lambda((-1,2)) \geq \lambda([0,1]) = \lambda\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \mathcal{V}_q\Big) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(\mathcal{V}_q) = \sum_{i=1}^{\infty} a = \infty$$

   lo cual es una contradicción.

2. Si $\lambda(\mathcal{V}) = 0$, entonces $\lambda(\mathcal{V}_q) = 0$ para todo $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$; por tanto:

$$1 = \lambda((0,1)) \leq \lambda([0,1]) = \lambda\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \mathcal{V}_q\Big) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(\mathcal{V}_q) = 0$$

   lo cual es una contradicción.

Se concluye que $\mathcal{V}$ no es medible. $\square$

Capítulo 2

Introducción a la teoría de dimensión

La primera definición de dimensión que se presenta a un matemático (y probablemente la más intuitiva) es la de dimensión de un espacio vectorial. Es decir, el máximo número de direcciones linealmente independientes que tiene un espacio vectorial. Sin embargo, hay muchas otras definiciones de dimensión que se traducen en propiedades topológicas o métricas, pero se busca que coincidan con la definición vectorial al aplicarlas en $\mathbb{R}^n$. En este capítulo se presentan varias definiciones de dimensión, sus propiedades y la forma en que se relacionan (pues aunque las definiciones son muy diferentes conceptualmente, están relacionadas por algunas desigualdades). En este capítulo, todo espacio será métrico y separable, y es importante decir que de no cumplirse estas condiciones, algunos de estos resultados no necesariamente serán verdaderos.

2.1. Dimensión topológica

Dados A un subconjunto cerrado de un espacio métrico X y $p \in X/A$, siempre es posible encontrar otro subconjunto cerrado B de X tal que al quitarlo separe al espacio en dos subconjuntos abiertos, cuyas cerraduras no se intersectan, y tales que p pertenece a uno de ellos, el otro contiene a A (en este caso, se dice que B separa a A de p); pero la naturaleza de los conjuntos que separan varía respecto al espacio en el que se trabaja. Por ejemplo, en un espacio de dos puntos, el conjunto vacío separará a los dos puntos; en $\mathbb{R}$, quitar dos puntos (uno de cada lado de p) bastará para separar a un subconjunto cerrado A de un punto p que no pertenece a A. En $\mathbb{R}^2$, puede usarse una curva cerrada simple para separar a una bola cerrada y un punto p fuera de ella, y no basta una cantidad numerable de puntos. Esto ejemplifica la manera más natural de separar un punto y un cerrado en un espacio: tomar la frontera de una vecindad abierta de p tal que su cerradura no intersecte al conjunto cerrado A, ya que esta separará a A y a p. La frontera de un conjunto A será denotada $Fr\,(A)$. Debe observarse que al tomar una base local de X en p, la vecindad abierta buscada existirá entre los elementos de la base local.

La dimensión topológica puntual, denotada $\dim_p(X)$, es un concepto que dice cómo deben ser los conjuntos que en un espacio separan a los subconjuntos cerrados y a un punto específico. La dimensión topológica de un espacio, denotada $\dim(X)$, es el supremo de las dimensiones topológicas puntuales en el espacio. Por conveniencia, se dice que la dimensión topológica de un espacio es -1 si y sólo si es el conjunto vacío. Si basta retirar el vacío para separar a un punto $p \in X$ de cualquier subconjunto cerrado al cual p no pertenece, entonces se dice que $\dim_p(X) = 0$; y si esto se cumple para todos los puntos de X, se dice que $\dim(X) = 0$. Si basta retirar un subconjunto cerrado de dimensión 0 para separar un punto $p \in X$ de cualquier cerrado al cual no pertenezca (como en $\mathbb{R}$), se dice que $\dim_p(X) \leq 1$, y si existe un cerrado en X tal que ningún cerrado de dimensión -1 lo separa de p, se dice que $\dim_p(X) = 1$. Si existe un punto $p \in X$ tal que $\dim_p(X) = 1$ y $\dim_q(X) \leq 1$ para todo $q \in X$, se dice que $\dim(X) = 1$. Siguiendo este razonamiento de forma recursiva, se obtiene la siguiente definición:

Definición 2.1. *La* dimensión topológica *se define de la siguiente manera:*

i) Se dice que X tiene dimensión topológica igual a -1 $(\dim(X) \leq -1)$ *si y sólo si $X = \varnothing$.*

ii) Si se ha definido ya lo que significa que un espacio tenga dimensión topológica menor o igual a $n-1$ para algún $n \geq 0$, se dice que X tiene dimensión topológica menor o igual a n en un punto $x \in X$ si para to-

da vecindad abierta U de x, existe una vecindad abierta V de x tal que $V \subset U$, y $\dim(\mathrm{Fr}(V)) \leq n-1$ *. La notación usada será* $\dim_x(X) \leq n-1$.

iii) Se dice que X tiene dimensión topológica n en $x \in X$ si $\dim_x(X) \leq n$ *y* $\dim_x(X) \nleq n-1$. *La notación usada será* $\dim_x(X) = n$.

iv) Se dice que X tiene dimensión topológica menor o igual a n si $\dim_x(X) \leq$ *n para todo $x \in X$. La notación usada será* $\dim(X) \leq n$.

v) Se dice que X tiene dimensión topológica igual a n si $\dim(X) \leq n$ *y* $\dim(X) \nleq n-1$. *La notación usada será* $\dim(X) = n$.

vi) Se dice que X tiene dimensión infinita si $\dim(X) \nleq n$ *para todo $n \geq -1$. La notación usada será* $\dim(X) = \infty$.

El siguiente teorema establece que la definición de dimensión no varía entre dos objetos que son iguales desde el punto de vista de la topología (que son homeomorfos); lo cual es necesario para que sea una herramienta útil en esta área de las matemáticas.

Teorema 2.2. *La dimensión topológica es invariante bajo homeomorfismos.*

Demostración. El teorema será probado por inducción matemática para el caso finito, y el caso en el que $\dim(X) = \infty$ será una consecuencia inmediata.

Si $\dim(X) \leq -1$ y X es homeomorfo a Y, entonces $X = \varnothing = Y$, lo cual implica que $\dim(Y) \leq -1$.

Como hipótesis de inducción, se supone que para algún $n \geq 0$ ya se ha mostrado que si $\dim(X) \leq n-1$ y X es homeomorfo a Y, entonces $\dim(Y) \leq n-1$.

Si $\dim(X) \leq n$ y $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces para todo $y \in Y$ y toda vecindad abierta W de y, $f^{-1}(W)$ es una vecindad abierta de $f^{-1}(y)$, por lo que existe $V \subset f^{-1}(W)$ vecindad abierta de $f^{-1}(y)$ tal que $\dim(Fr(V)) \leq n-1$; la cual nos da la vecindad abierta necesaria de y en Y, pues $f(V)$ es abierto en Y, $y \in f(V) \subset f\left(f^{-1}(W)\right) = W$, y $\dim(\mathrm{Fr}(f(V))) \leq n-1$ dado que $\mathrm{Fr}(V)$ y $\mathrm{Fr}(f(V))$ son homeomorfos; y esto implica que $\dim(Y) \leq n$.

Por último, si X y Y son homeomorfos y $\dim(X) \nleq n$ para todo $n \geq -1$, entonces $\dim(X) \nleq n$ para todo $n \geq -1$; por lo que $\dim(X) = \infty = \dim(Y)$. $\square$

Se sabe que un subespacio de un espacio vectorial debe tener dimensión (vectorial) menor o igual a la del total. La siguiente proposición establece que la dimensión topológica cumple una propiedad análoga. La demostración se encuentra en [7].

Proposición 2.3. *La dimensión topológica es monótona bajo la relación de contención entre conjuntos, es decir, que si* $A \subset B$*, entonces* $\dim(A) \leq \dim(B)$.

Para probar algunos resultados sobre los espacios que se trabajarán en el capítulo 3, se usarán los siguientes teoremas sobre conjuntos de dimensión 0 y 1.

Definición 2.4. *Sea* X *un espacio no vacío. Para cada* $x \in X$ *se define el conjunto* Q_x *como:*

$$Q_x := \bigcap\{A \subset X \mid x \in A,\ A \text{ es cerrado y abierto en } X\}.$$

Lema 2.5. *Si* X *es un espacio no vacío y compacto, entonces el conjunto* Q_x *es no vacío, conexo y compacto para todo* $x \in X$.

Demostración. Sea $x \in X$. Dado que X es un conjunto abierto y cerrado, $Q_x \neq \varnothing$.

Dado que X es compacto y $Q_x \subset X$ es cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados, Q_x es compacto.

Si Q_x no fuera conexo, existirían E y F subconjuntos no vacíos y cerrados de Q_x tales que $E \cup F = Q_x$, $E \cap F = \varnothing$. Sin pérdida de generalidad se supondrá que $x \in E$. Dado que E y F son subconjuntos cerrados de Q_x (el cual es cerrado en X) E y F son cerrados en X. Por tanto existe un conjunto $U \subset X$ abierto tal que $E \subset U$ y $\overline{U} \cap F = \varnothing$ dado que X es un espacio normal por ser métrico.

Dado que $\mathrm{Fr}(U) = \overline{U} \setminus U$, y $Q_x = E \cup F$, se observa que $Fr(U) \cap Q_x = \varnothing$. Existen dos casos:

1. Si $\mathrm{Fr}(U) = \varnothing$, entonces U es subconjunto abierto y cerrado de X tal que $x \in U$, pero Q_x no está contenido en U (pues $F \cap U = \varnothing$), lo cual contradice la definición de U.

2. Si $\mathrm{Fr}(U) \neq \varnothing$, entonces $\mathrm{Fr}(U)$ es un subconjunto compacto y no vacío de X (pues es cerrado dentro de un compacto). Para todo $y \in \mathrm{Fr}(U)$, existe

A_y abierto y cerrado tal que $x \notin A_y$ y $y \in A_y$ (si se supone que esto no es cierto, todo subconjunto abierto y cerrado de X que tiene a x tendría a y, lo cual diría que $y \in Q \cap \mathrm{Fr}(U) = \varnothing$). Claramente $\{A_y | y \in \mathrm{Fr}(U)\}$ es una cubierta abierta (y cerrada) de $\mathrm{Fr}(U)$ y, como $\mathrm{Fr}(U)$ es compacto, existen $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{Fr}(U)$ tales que $\{A_{y_1}, \ldots, A_{y_n}\}$ cubre a $\mathrm{Fr}(U)$; y se observa que su unión es abierta y cerrada (por lo que su complemento también lo es) y $x \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_{y_i}) = B$. Debe notarse también que $B \cap U = B \setminus (X \setminus U) = B/(X \setminus \overline{U}) = B \cap \overline{U}$, pues $\mathrm{Fr}(U) \cap B = \varnothing$; además de que $B \cap U$ es abierto por ser intersección de dos conjuntos abiertos y es cerrado por ser intersección de dos conjuntos cerrados. Como $x \in B \cap U \subset U$, entonces $Q_x \subset B \cap U \subset U$, lo cual implica que $F = \varnothing$. Como se había supuesto que $E \neq \varnothing \neq F$, esto es una contradicción.

Se concluye que Q_x es conexo. $\square$

El siguiente teorema permitirá relacionar una caracterización clásica de los conjuntos de Cantor con una que utiliza su dimensión topológica. Tanto las caracterizaciones como su relación serán introducidas en el siguiente capítulo.

Teorema 2.6. *Todo espacio no vacío y compacto es totalmente disconexo si y sólo si tiene dimensión topológica* 0.

Demostración. Sean X un espacio compacto no vacío y $x \in X$. Si X es totalmente disconexo, $Q_x = \{x\}$ (pues es conexo y los únicos subconjuntos conexos de un espacio totalmente disconexo son los conjuntos singulares). Esto implica que para todo $y \in X$ tal que $y \neq x$ existe $A_y \subset X$ abierto y cerrado tal que $x \in A_y$ y $y \notin A_y$ puesto que de lo contrario, y pertenecería a todo subconjunto abierto y cerrado de X al cual x pertenece, lo cual implicaría que $y \in Q_x$.

Sea $U \subset X$ tal que $x \in U$. Se observa que $\mathrm{Fr}(U)$ es un conjunto compacto por ser un subconjunto cerrado de $\overline{U}$ el cual es compacto a su vez por ser subconjunto cerrado de un espacio compacto. Existe $B \subset X$ abierto y cerrado tal que $x \in B$ y $B \subset U$, ya que para todo $y \in \mathrm{Fr}(U)$ existe $A_y \subset X$ abierto y cerrado tal que $x \notin A_y$ y $y \in A_y$, los cuales forman una cubierta abierta (y cerrada) de $\mathrm{Fr}(U)$ y, por compacidad, existe una subcubierta finita de $\mathrm{Fr}(U)$ de abiertos y cerrados, los cuales pueden ser unidos para encontrar un conjunto C (el cual es abierto y cerrado por ser unión finita de cerrados y abiertos) tal que

$x \notin C$ y $\mathrm{Fr}(V) \subset C$. Sea ahora $B = X \setminus (C \cup (X \setminus U)) = X \setminus (C \cup (X \setminus \overline{U}))$, el cual es abierto y cerrado, está contenido en U y $x \in U$. Con esto se concluye que $\dim_x(X) \leq 0$ para todo $x \in X$, por lo que $\dim(X) \leq 0$ y, como $X \neq \varnothing$, $\dim(X) = 0$.

La otra implicación del teorema se sigue de que si $\dim(X) = 0$, entonces para toda pareja de puntos $x, y \in X$ existe $U \subset X$ abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$ (pues X es espacio métrico, por lo que es espacio de Hausdorff); y usando la dimensión topológica de X se sabe que existe $V \subset U$ abierto y cerrado tal que $x \in V$; lo cual implica que x y y están en diferentes componentes conexas, por lo que X es totalmente disconexo. $\square$

Corolario 2.7. *Todo conjunto de puntos aislados tiene dimensión topológica* 0.

Teorema 2.8. *Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tiene dimensión topológica 1 si y sólo si contiene algún intervalo abierto.*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}$ tal que $\dim(X) = 1$. Para mostrar que existe un intervalo abierto contenido en X, se observa que existe $x \in X$ tal que $\dim_x(X) \leq 1$ y $\dim_x(X) \nleq 0$, lo cual implica que no es un punto aislado de X. Si se supone que X no contiene intervalos abiertos, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $s_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x\right) \cap (\mathbb{R} \setminus X)$ y $r_n \in \left(x, x + \frac{1}{n}\right) \cap (\mathbb{R} \setminus X)$, por lo que la familia $\{(s_n, r_n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es una base local de X en x y la frontera en X de cada (s_n, r_n) es vacía, lo cual contradice la hipótesis pues implicaría que la dimensión topológica de X en x sería menor o igual a 0.

Para la otra implicación, basta ver que si $(a, b) \subset X \subset \mathbb{R}$, entonces $\dim(X) = 1$ por monotonía de la dimensión topológica bajo la relación de contención de conjuntos. $\square$

Este teorema tendrá como consecuencia que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ con interior vacío, tiene dimensión topológica 0.

2.2. Medidas y dimensión de Hausdorff

A pesar de que la forma canónica de medir un subconjunto de un espacio euclidiano es usando la medida de Lebesgue, existen otras maneras que son convenientes desde ciertos enfoques. Cuando se trabaja con conjuntos no vacíos y acotados, es deseable tener una forma de medirlos tal que el número asignado no sea 0 (pues hay algo dentro del conjunto) y no sea infinito (pues está acotado). Usualmente, las medidas de Lebesgue no tienen esta propiedad cuando se trabaja con conjuntos altamente irregulares. Las medidas de Hausdorff y de empaque son posibles soluciones a este problema. Una forma de medir un conjunto altamente irregular es medir de forma usual, ignorando irregularidades pequeñas (de tamaño menor a $\delta > 0$) y buscar el límite cuando δ disminuye. La primera manera de tratar de medir un conjunto de esta forma es cubriéndolo con conjuntos de diámetro menor a δ y sumar los diámetros de los elementos de la cubierta elevados a alguna potencia $s > 0$; observando que para alguna s obtendremos un límite que no sea 0 o ∞. Esta s será la dimensión de Hausdorff del conjunto.

Definición 2.9. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se define el* diámetro *de A como el supremo del conjunto $\{\|a - b\| : a, b \in A\}$.*

Definición 2.10. *Sea $\delta > 0$. Una* δ-cubierta *de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es una cubierta formada por conjuntos, no necesariamente abiertos, de diámetro menor o igual a δ.*

Definición 2.11. *Sean $s \geq 0$, $F \subset \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$. Se define*

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \text{ínf } \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \text{diám}\,(U_i)^s : \{U_i\}_{i=1}^n \textit{ es una } \delta - \textit{cubierta de } F \Big\}.$$

Esta es una forma de medir un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ ignorando irregularidades pequeñas (de diámetro menor a δ). Una observación relevante es que esta cantidad depende fuertemente de la s seleccionada. Es sencillo observar que se puede obtener una medida exterior al tomar el límite de $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ cuando $\delta \to 0$, y esta consideraría todas las irregularidades del conjunto.

Definición 2.12. *Sean $s \geq 0$ y $F \subset \mathbb{R}^n$. Se define la* medida exterior s-dimensional de Hausdorff *como*

$$\mathcal{H}^s(F) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Al restringir $\mathcal{H}^s$ a la σ-álgebra de los conjuntos medibles se obtiene una medida, llamada medida s-dimensional de Hausdorff. Debe notarse que si A es un conjunto finito, entonces $\mathcal{H}^0(A)$ es la cardinalidad de A.

Definición 2.13. *Sean* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $C, \alpha > 0$. *Una función* $f : A \to \mathbb{R}^l$ *es una* función de Hölder *con factor* C *y exponente* α *si para toda pareja de puntos* $p, q \in \mathbb{R}^n$

$$d\left(f\left(p\right),\ f\left(q\right)\right) \leq Cd\left(p,q\right)^{\alpha}.$$

Proposición 2.14. *Sean* $A \subset \mathbb{R}^n$, *y* $f : A \to \mathbb{R}^l$ *una función. Si* f *es una función de Hölder con factor* C *y exponente* α, *entonces para todo* $s \leq 0$, $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}\left(f\left(A\right)\right) \leq C^{\frac{s}{\alpha}}\mathcal{H}^s\left(A\right)$.

Demostración. Sean $f : A \to \mathbb{R}^l$ una función de Hölder con factor $C > 0$ y exponente $\alpha > 0$, y $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una δ-cubierta de A. Entonces:

$$\text{diám}(f(A \cap U_i)) \leq C\text{diám}(A \cap U_i)^{\alpha} \leq C\text{diám}(U_i)^{\alpha} \leq C\delta^{\alpha} \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\{f(A \cap U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una $C\delta^{\alpha}$-cubierta de $f(A)$; lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(f(A \cap U_i))^{\frac{s}{\alpha}} \leq C^{\frac{s}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s$$

y por tanto,

$$\mathcal{H}^s_{C\delta^{\alpha}}(f(A)) \leq \mathcal{H}^s_{\delta}(A).$$

Por último, se observa que si $\delta \to 0$, entonces $C\delta^{\alpha} \to 0$, por lo que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq C^{\frac{s}{\alpha}}\mathcal{H}^s(A),$$

que es lo que se quería demostrar. □

Corolario 2.15. *Si* $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ *es una función de Lipschitz con factor* $C > 0$, *entonces para todo* $s \leq 0$,

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq C\mathcal{H}^s(A).$$

Corolario 2.16. *Las medidas de Hausdorff son invariantes bajo isometrías.*

Proposición 2.17. *Si* $0 < \delta < 1$, *entonces* $\mathcal{H}^s_{\delta}$ *es no creciente respecto a* s.

Demostración. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$, $\delta \in (0,1)$. Si $s \leq t$, entonces $a^s \geq a^t$ para todo $a \in (0,\delta]$, lo cual implica que

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} \text{diám}(U)^s \geq \sum_{U \in \mathcal{U}} \text{diám}(U)^t$$

para toda $\mathcal{U}$ δ-cubierta de E. Se concluye que $\mathcal{H}^s(E) \geq \mathcal{H}^t(E)$. □

Proposición 2.18. *Si $A \subset \mathbb{R}^m$, $s < t$ y $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una δ-cubierta de A, entonces*

$$\sum_{i=1}^n \text{diám}(U_i)^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^n \text{diám}(U_i)^s.$$

Demostración.

$$\sum_{i=1}^n \text{diám}\,(U_i)^t = \sum_{i=1}^n \text{diám}\,(U_i)^{t-s}\,\text{diám}\,(U_i)^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^n \text{diám}\,(U_i)^s\,.$$

□

Corolario 2.19. *Si $A \subset \mathbb{R}^m$ y $s < t$, entonces para todo $\delta \geq 0$,*

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Corolario 2.20. *Si $A \subset \mathbb{R}^m$, $s < t$ y $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^t(A) = 0$.*

Demostración. Sean $A \subset \mathbb{R}^m$ y $s < t$. Si $\mathcal{H}^s\,(A) < \infty$, entonces

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

por el corolario anterior. Tomando límites cuando $\delta \to 0$,

$$\mathcal{H}^t = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \lim_{\delta \to 0} \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(A) = 0.$$

□

Este último corolario implica que existe un único valor crítico s donde $\mathcal{H}^s$ "salta" de ∞ a 0.

Definición 2.21. *La* dimensión de Hausdorff *de $A \subset \mathbb{R}^m$ es el número real no negativo s tal que $s = \inf\{t \geq 0 | \mathcal{H}^t(A) = 0\} = \sup\{t \geq 0 | \mathcal{H}^t(A) = \infty\}$. Se denota* $\dim_H(A) = s$.

La demostración de la siguiente proposición puede encontrarse en el segundo capítulo de [5].

Proposición 2.22. *La dimensión de Hausdorff cumple con las siguientes propiedades:*

1. *Monotonía: Si* $A \subset B$*, entonces* $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$.

2. *Estabilidad numerable: Si* $\{A_i\}_i$ *es una familia numerable de conjuntos, entonces* $\dim_H\left(\bigcup_i A_i\right) = \sup\{\dim_H(A_i)\}$.

3. *Propiedad para conjuntos numerables: Si* A *es un conjunto numerable, entonces* $\dim_H(A) = 0$.

4. *Propiedad para abiertos de* $\mathbb{R}^n$*: Si* $U \subset \mathbb{R}^n$*, entonces* $\dim_H(U) = n$.

5. *Propiedad para variedades diferenciales: Si* M *es una* m*-variedad diferencial, entonces* $\dim_H(M) = m$.

Una vez definida la dimensión de Hausdorff definida, el siguiente paso es compararla con la dimensión topológica. Los siguientes enunciados cumplen con esta función, concluyendo que la dimensión topológica de un espacio es menor o igual a su dimensión de Hausdorff. El siguiente lema hace uso de la integral de Lebesgue, tema que no está incluido en esta tesis pero puede revisarse en [4] junto con la demostración de una forma más general del lema.

Lema 2.23. *Sean* $s \geq 1$, $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $x \in A$*. Si* $\mathcal{H}^s(A) = 0$*, entonces existe* $B \subset (0, \infty)$ *tal que* $\lambda_1(B) = 0$ *y*

$$\mathcal{H}^{s-1}\left(\mathrm{Fr}\left(B_r(x)\right) \cap A\right) = 0$$

para todo $r \in (0, \infty) \setminus B$.

Demostración. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{H}^s(A) = 0$ y $x \in A$. Para cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se definen

$$r_1 = \text{ínf}\{\|x - y\| : y \in E\}, \quad r_2 = \sup\{\|x - y\| : y \in E\}$$

que son las distancias mínima y máxima de x a los puntos de E. Es claro que $r_2 - r_1 \geq \text{diám}(E)$, por lo que usando la integral superior de Lebesgue

$$\overline{\int}_{(0,\infty)} \text{diám}\left(\mathrm{Fr}\left(B_r(x)\right) \cap E\right)^{s-1} = \overline{\int}_{(r_1,r_2)} \text{diám}\left(\mathrm{Fr}\left(B_r(x)\right) \cap E\right)^{s-1}$$

$$\leq \text{diám}\left(E\right)^{s-1} \overline{\int}_{(r_1,r_2)} 1 \leq \text{diám}(E)^s.$$

Como $\mathcal{H}^s(A) = 0$, para cada m entero positivo existe una cubierta $\mathcal{U}_m$ de A tal que

$$\sum_{U \in \mathcal{U}_m} \text{diám}(U)^s \leq 2^{-m}$$

por lo que aplicando la desigualdad ya demostrada se obtiene que

$$\overline{\int}_{(0,\infty)} \sum_{U \in \mathcal{U}_m} \text{diám}\left(\text{Fr}\left(B_r\left(x\right)\right) \cap U\right)^{s-1}$$

$$\leq \sum_{U \in \mathcal{U}_m} \overline{\int}_{(0,\infty)} \text{diám}\left(\text{Fr}\left(B_r\left(x\right)\right) \cap U\right)^{s-1} \leq 2^{-m}.$$

Si se define $D_m = \left\{ r \in (0,\infty) \mid \sum\limits_{U \in \mathcal{U}_m} \text{diám}\left(\text{Fr}\left(B_r\left(x\right)\right) \cap U\right)^{s-1} > \frac{1}{m} \right\}$, entonces la medida exterior de Lebesgue de D_m es menor o igual a 2^{-m}. Al considerar $F_N = \bigcup\limits_{m=N}^{\infty} D_m$, se observa que la medida exterior de Lebesgue de F_N es menor o igual a $\sum\limits_{m=N}^{\infty} m2^{-m}$ que es convergente para todo N, por lo que

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{m=N}^{\infty} m2^{-m} = 0,$$

pero

$$\left\{ r \in (0,\infty) \mid \sum_{U \in \mathcal{U}_m} \text{diám}\left(\text{Fr}\left(B_r\left(x\right)\right) \cap U\right)^{s-1} \nrightarrow 0 \right\} \subset F_N$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, lo cual implica que

$$\left\{ r \in (0,\infty) \mid \sum_{U \in \mathcal{U}_m} \text{diám}\left(\text{Fr}\left(B_r\left(x\right)\right) \cap U\right)^{s-1} \nrightarrow 0 \right\}$$

es un subconjunto de $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N$. Como la medida exterior de Lebesgue de $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N$ es 0, $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N$ es Lebesgue-medible. Además, para todo $r \in (0,\infty) \setminus \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N$, la suma $\sum\limits_{U \in \mathcal{U}_m} \text{diám}\left(\text{Fr}\left(B_r\left(x\right)\right) \cap U\right)^{s-1}$ converge a 0 cuando $m \to \infty$, por lo que $\mathcal{H}^{s-1}\left(\text{Fr}\left(B_r\left(x\right)\right) \cap A\right) = 0$.

$\square$

Corolario 2.24. *Sean $m \geq 0$ un número entero y $A \subset \mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{H}^m(A) = 0$, entonces* $\dim(A) \leq m - 1$.

Demostración. La demostración se realizará por inducción sobre m. Si $\mathcal{H}^0(A) = 0$, entonces $A = \varnothing$, por lo que $\dim(A) = -1$ y se satisface la desigualdad. Si el enunciado se cumple para $m \geq 1$, se consideran $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in A$. Si $\mathcal{H}^m(A) = 0$, entonces por el lema anterior existe $B \subset (0, \infty)$ tal que $\lambda_1(B) = 0$ y

$$\mathcal{H}^m\left(\mathrm{Fr}\left(B_r\left(x\right)\right) \cap A\right) = 0$$

para todo $r \in (0, \infty) \setminus B$. Usando la hipótesis de inducción se observa que $\dim\left(\mathrm{Fr}\left(B_r\left(x\right)\right) \cap A\right) \leq m-1$, por lo que existe una sucesión $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergente a 0 tal que $\{B_{r_i}(x) \cap A\}_{i=1}^{\infty}$ es una base local de A en x tal que sus fronteras tienen dimensión menor o igual a $m-1$. Por tanto, $\dim(A)_x \leq m$ y al haber escogido $x \in A$ arbitrario, se concluye que $\dim(A) \leq m$. □

Corolario 2.25. *La dimensión topológica de todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es menor o igual a su dimensión de Hausdorff.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si $\dim_H(A) = n$, el enunciado se cumple ya que $\dim(A) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$. Si $\dim_H(A) = s < n$, se considera el número entero m tal que $m - 1 \leq s < m$. Como $m > \dim_H(A)$, entonces $\mathcal{H}^m(A) = 0$ y por el corolario anterior $\dim(A) \leq m - 1 \leq s = \dim_H(A)$.

□

Una pregunta relevante para el estudio de un espacio desde la perspectiva de la dimensión de Hausdorff, es qué tipo de funciones conservan la dimensión de Hausdorff. El teorema al cual está dedicado el capítulo 5 mostrará que la continuidad no basta para conservar la dimensión de Hausdorff, y dada la naturaleza métrica de la definición, resultará evidente que las isometrías deben conservarla. Sin embargo, es posible pedir menos que conservar distancias para que una función conserve la dimensión de Hausdorff: basta que la función sea biyectiva y que tanto la función como su inversa cumplan con la condición de Lipschitz.

Proposición 2.26. *Sea $A \subset \mathbb{R}^m$. Si $f : A \to \mathbb{R}^l$ es una función de Hölder con factor C y exponente $\alpha > 0$ entonces,* $\dim_H(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha}\dim_H(A)$.

Demostración. Sean $A \subset \mathbb{R}^m$ y $f : A \to \mathbb{R}^l$ una función de Hölder con factor C y exponente $\alpha > 0$. Si $\dim_H(A) < s$, entonces:

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}\left(f\left(A\right)\right) \leq C^{\frac{s}{\alpha}}\mathcal{H}^s\left(A\right) = 0.$$

Por tanto, $\dim_H(f(A)) \leq \frac{s}{\alpha}$ para todo $s > \dim_H(A)$; por lo que se concluye que $\dim_H(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha}\dim_H(A)$. $\square$

Corolario 2.27. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ es una función de Lipschitz, entonces*

$$\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A).$$

Corolario 2.28. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^m \to B \subset \mathbb{R}^l$ es un homeomorfismo tal que f y f^{-1} son Lipschitz, entonces $\dim_H(A) = \dim_H(B)$. Este tipo de homeomorfismos son llamados bi-Lipschitz.*

Por último se agrega un corolario que ayudará a diferenciar espacios desde este enfoque.

Corolario 2.29. *Si $\dim_H(X) \neq \dim_H(Y)$, entonces ninguna función $f : X \to Y$ es una transformación bi-Lipschitz.*

La siguiente proposición es un ejemplo de la información topológica que la dimensión de Hausdorff puede proveer.

Proposición 2.30. *Todo conjunto con dimensión de Hausdorff menor a 1 es totalmente disconexo.*

Demostración. Sean $A \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\dim_H(A) < 1$ y $x, y \in A$ puntos diferentes.

Se define $f : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ dada por $z \mapsto \|z - x\|$. Usando la desigualdad del triángulo se obtiene que para toda pareja de puntos $z, w \in A$:

$$\left|f(z) - f(w)\right| = \left|\|z - x\| - \|w - x\|\right| \leq \|z - w\|.$$

Lo cual implica que f es una función de Lipschitz con constante 1. Por tanto, $\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A) < 1$; lo cual implica que $\lambda_1(A) = \mathcal{H}^1(f(A)) = 0$, por lo que $f(A)$ no puede contener intervalos abiertos; con lo que se concluye que ningún abierto con más de un punto en $f(A)$ es conexo.

Dado que $\|x - y\| > 0$, x y y están en componentes conexas diferentes de $f(A)$, lo que implica que están en componentes conexas diferentes de A (pues f es continua, y la continuidad preserva la conexidad). Se concluye que A es totalmente disconexo. $\square$

2.3. Medidas de red y productos cartesianos

En esta sección se introduce el concepto de medida de red, usado por primera vez por Besicovitch en 1952, , [2], en su demostración de que los conjuntos cerrados con medida de Hausdorff s-dimensional infinita pueden contener conjuntos de medida de Hausdorff s-dimensional finita y positiva, y después por Marstrand , [9], en su trabajo sobre medida de Hausdorff de productos cartesianos de conjuntos . Se mostrará que las medidas de red son comparables con las de Hausdorff, lo cual les dará gran utilidad para estudiar la dimensión de Hausdorff.

La construcción de las medidas de red es parecida a la de las medidas de Hausdroff, pero sólo se usarán cubiertas cuyos elementos estén en la familia $\mathcal{N}$ de todos los cubos en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$\big[2^{-k}m_1, 2^{-k}(m_1+1)\big) \times \big[2^{-k}m_2, 2^{-k}(m_2+1)\big) \times \ \dots \ \times \big[2^{-k}m_n, 2^{-k}(m_n+1)\big)$$

con $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.31. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Se define*

$$\mathcal{M}^s_\delta(E) = \inf\left\{\sum_{U\in\mathcal{U}} \operatorname{diám}(U)^s : \mathcal{U} \subset \mathcal{N} \textit{ es una } \delta - \textit{cubierta de } E\right\}$$

La medida de red s-dimensional *de E se define como la restricción a conjuntos medibles del límite de $\mathcal{M}^s_\delta(E)$ cuando $\delta \to 0$, es decir,*

$$\mathcal{M}^s(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{M}^s_\delta(E).$$

Debe notarse que la familia $\mathcal{N}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y que cada uno de sus elementos está contenido en una cantidad finita de otros elementos de $\mathcal{N}$. Debido a esto, para el cálculo de $\mathcal{M}^s_\delta$ basta considerar cubiertas cuyos elementos son ajenos dos a dos, y se obtiene una medida exterior en $\mathbb{R}^n$ que es finita en subconjuntos acotados.

Proposición 2.32. *$\mathcal{M}^s$ es una medida exterior en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Primero, se observa que $\mathcal{M}^s(\varnothing) = 0$, dado que $\mathcal{M}^s_\delta(\varnothing) = 0$ para todo $\delta > 0$.

Sean $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$. Dado que $\mathcal{M}^s_\delta(E) \leq \mathcal{M}^s_\delta(F)$ para todo $\delta > 0$, entonces $\mathcal{M}^s(E) \leq \mathcal{M}^s(F)$.

Si $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{M}^s\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \leq \mathcal{M}^s_\delta\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^s_\delta(E_i)$$

para todo $\delta > 0$, lo cual implica que $\mathcal{M}^s\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^s(E_i)$, pues $\mathcal{M}^s_\delta$ no crece cuando δ decrece. $\square$

La restricción de $\mathcal{M}^s$ a su familia de conjuntos medibles da origen a una medida en $\mathbb{R}^n$. El siguiente teorema establece la posibilidad de comparar $\mathcal{M}^s$ con $\mathcal{H}^s$ en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.33. *Sea $b_n = 3^n 2^{n^2}$. Si $0 < \delta < 1$, entonces*

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E) \leq b_n \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

para todo $E \subset \mathbb{R}^n$, y si E es $\mathcal{M}^s$-medible y $\mathcal{H}^s$-medible, entonces

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{M}^s(E) \leq b_n \mathcal{H}^s(E).$$

Demostración. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ y $s, \delta > 0$. Dado que la familia de δ-cubiertas utilizada para el cálculo de $\mathcal{M}^s_\delta$ está contenida en la familia usada para calcular $\mathcal{H}^s_\delta$, se sigue que $\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{M}^s_\delta$.

Por otro lado, si $\text{diám}(U) \leq \delta$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-k-1} < \text{diám}(U) \leq 2^{-k}$. Si se toma un cubo Q en $\mathcal{N}$ de lado 2^{-k} que intersecta a U, entonces U está contenido en la unión de Q con los $3^n - 1$ cubos de lado 2^{-k} en $\mathcal{N}$ que son adyacentes a Q, donde $\mathcal{N}$ es la familia usada para el cálculo de $\mathcal{M}^s_\delta$. Cada uno de estos 3^n cubos (Q y sus adyacentes) puede ser dividido en 2^n subcubos n veces, para obtener 2^{n^2} cubos de lado 2^{-k-n} en $\mathcal{N}$, y U está contenido en la unión de los $b_n = 3^n 2^{n^2}$ cubos generados en este proceso. El diámetro de estos b_n cubos es $2^{-k-n} n^{1/2} \leq 2^{1-n} n^{1/2} \text{diám}(U) \leq \text{diám}(U) \leq \delta$.

Sean $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una δ-cubierta de E; y $\mathcal{Q}_i = \{Q_{i,j} : 1 \leq j \leq b_n\}$ la familia de b_n cubos que cubre a U_i. Es claro que $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{Q}_i$ es una δ-cubierta de E, y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{b_n} \text{diám}(Q_{i,j})^s \leq b_n \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s,$$

lo cual implica que $\mathcal{M}^s_\delta(E) \leq \mathcal{H}^s_\delta$, lo cual concluye la demostración de la primera desigualdad. Si E es medible bajo $\mathcal{M}^s$ y $\mathcal{H}^s$, se obtiene la segunda desigualdad al tomar límites cuando $\delta \to 0$. $\square$

La intención de los siguientes teoremas es determinar cómo se comporta la dimensión de Hausdorff bajo productos cartesianos, para lo cual es necesario usar un lema. Su demostración será omitida y puede encontrarse en [6].

Lema 2.34. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos, y $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una δ-cubierta de A formada por intervalos de la forma $[2^{-k}m, 2^{-k}(m+1))$, para algunas $m, k \in \mathbb{N}$ (m y k pueden variar entre los elementos de la cubierta). Si $c > 0$ cumple que*

$$\sum_{\{i\in\mathbb{N}: x\in I_i\}} a_i > c$$

para todo $x \in A$, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{diám}(I_i)^s \geq c\mathcal{M}_\delta^s(A).$$

Para los siguientes teoremas, dados $E \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}$, se usará la notación $E_x = \{(x_1, ..., x_n) \in E : x_1 = x\}$.

Teorema 2.35. *Sean $E \subset \mathbb{R}^2$, A un subconjunto del eje X, y $s, t \in [0, \infty)$. Si existe $c > 0$ tal que $\mathcal{H}^t(E_x) > c$ para todo $x \in A$, entonces existe $b > 0$, que depende sólo de s y t, tal que*

$$\mathcal{H}^{s+t}(E) \geq bc\mathcal{H}^s(A).$$

Demostración. Dado $\delta > 0$, sea $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una $2^{1/2}\delta$-cubierta de E formada por elementos de la familia $\mathcal{N}$ de cubos binarios de $\mathbb{R}^2$. Para cada $x \in A$, $\{(Q_i)_x\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una δ-cubierta de E_x; por lo que

$$\mathcal{M}_\delta^t(E_x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}((Q_i)_x)^t.$$

Sean $A_\delta = \{x \in A : \mathcal{M}_\delta^t(E_x) > c\}$, y $\text{Proy}(Q_i)$ la proyección de Q_i sobre el eje X. Debe observarse que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\text{Proy}(Q_i)$ es un intervalo de la forma $[2^{-k}m, 2^{-k}(m+1))$ de longitud menor o igual a δ. Para cada $x \in A_\delta$, se cumple que si 2^{-k_i} es la longitud de cada lado de Q_i, entonces

$$c < \mathcal{M}_\delta^t(E_x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}((Q_i)_x)^t = \sum_{\{i\in\mathbb{N}: x\in\text{Proy}(Q_i)\}} (2^{-k_i})^t$$

$$= 2^{-t/2} \sum_{\{i\in\mathbb{N}: x\in\text{Proy}(Q_i)\}} (2^{1/2}2^{-k_i})^t = 2^{-t/2}.$$

Por tanto,

$$2^{t/2}c < \sum_{\{i\in\mathbb{N}: x\in \mathrm{Proy}(Q_i)\}} \mathrm{diám}(Q_i)^t,$$

y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diám}(Q_i)^{s+t} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diám}(Q_i)^s \mathrm{diám}(Q_i)^t$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diám}(Q_i)^t (2^{1/2}2^{-k_i})^s = 2^{s/2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diám}(Q_i)^t \mathrm{diám}(\mathrm{Proy}(Q_i))^s.$$

Tomando $I_i = \mathrm{Proy}(Q_i)$ y $a_i = \mathrm{diám}(Q_i)^t$ como en el lema 2.30, se obtiene que

$$2^{s/2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diám}(Q_i)^t \mathrm{diám}(\mathrm{Proy}(Q_i))^s \geq c2^{\frac{s+t}{2}} \mathcal{M}^s_\delta(A).$$

Como esta desigualdad es independiente de la cubierta $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ escogida, se cumple que $\mathcal{M}^{s+t}_\delta(E) \geq c2^{\frac{s+t}{2}} \mathcal{M}^s(A)$ para todo $\delta > 0$, es decir que

$$\mathcal{M}^{s+t}(E) \geq c2^{\frac{s+t}{2}} \mathcal{M}^s(A).$$

Haciendo uso del teorema 2.29, se obtiene que

$$b_2 \mathcal{H}^{s+t}(E) \geq \mathcal{M}^{s+t}(E) \geq c2^{\frac{s+t}{2}} \mathcal{M}^s(A) \geq c2^{\frac{s+t}{2}} \mathcal{H}^s(A),$$

por lo que, si $b = b_2^{-1} 2^{\frac{s+t}{2}}$, entonces,

$$\mathcal{H}^{s+t}(E) \geq cb\mathcal{H}^s(A).$$

□

Gracias al teorema que se acaba de demostrar, se obtiene el siguiente corolario sobre la medida de Hausdorff de productos cartesianos.

Corolario 2.36. *Si $A, B \subset \mathbb{R}$, y $s, t \in [0, \infty)$, entonces*

$$\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) \geq b\mathcal{H}^s(A)\mathcal{H}^t(B).$$

Demostración. Tomando $E = A \times B$, $E_x = x \times B$ para todo $x \in A$, lo cual implica que $\mathcal{H}^t(B) = \mathcal{H}^t(E_x)$ para todo $x \in A$, y si $c \geq \mathcal{H}^t(B)$, entonces

$$\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) \geq bc\mathcal{H}^s(A) > b\mathcal{H}^s(A)\mathcal{H}^t(B).$$

□

El enunciado anterior puede interpretarse en términos de dimensión de Hausdorff para obtener el siguiente corolario.

Corolario 2.37. *Si* $A, B \subset \mathbb{R}$, *entonces* $\dim_H(A \times B) \geq \dim_H(A) + \dim_H(B)$.

Demostración. Sean $r = \dim_H(A \times B)$, $s = \dim_H(A)$ y $t = \dim_H(B)$. Si $r < s + t$, entonces para todo $\alpha \in (r, s+t)$, se cumple que

$$0 = \mathcal{H}^r(A \times B) \geq b\mathcal{H}^{s-\frac{s+t-\alpha}{2}}(A)\mathcal{H}^{t-\frac{s+t-\alpha}{2}}(B).$$

pero, dado que $\dim_H(A) > s - \frac{s+t-\alpha}{2}$ y $\dim_H(B) > t - \frac{s+t-\alpha}{2}$, se cumple que $\mathcal{H}^{s-\frac{s+t-\alpha}{2}} = \infty$ y $\mathcal{H}^{t-\frac{s+t-\alpha}{2}}(B) = \infty$, lo cual es una contradicción. $\square$

Estos resultados pueden generalizarse y demostrarse de forma parecida tomando $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$, ver [6].

2.4. Medidas y dimensión de empaque

La dimensión de empaque se define de una forma parecida a la dimensión de Hausdorff, pues ambas dependen de una familia de funciones de medida asociadas a números reales. La diferencia es que para la dimensión de Hausdorff, se definió una familia de medidas a partir de cubiertas y para la dimensión de empaque se define a partir de empaques.

Los empaques tienen varias diferencias fundamentales con las cubiertas, pues para que una familia de subconjuntos *empaque* a algún otro conjunto, no es necesario que lo cubra, sino que se toman familias de bolas cerradas y ajenas centradas en puntos del conjunto las cuales estarán cerca de cubrir el conjunto (si se toman suficientes) y evitarán los puntos fuera del conjunto (si se toman suficientemente pequeñas). Esto proporciona la misma idea de aproximarse a un conjunto ignorando las irregularidades de diámetro menor a alguna $\delta > 0$, y buscar el límite cuando $\delta \to 0$.

Se ha propuesto que los conjuntos que deben ser llamados fractales son aquellos tales que sus dimensiones de empaque y conteo de cajas coinciden, con el inconveniente de que esta coincidencia no es una propiedad topológica, como se muestra en este texto.

Definición 2.38. *Un* δ-empaque *de* $A \subset X$ *es una familia numerable* $\mathcal{B} = \{B_i\}_i$ *donde para toda* i*,* B_i *es una bola cerrada centrada en algún punto de* A*, con radio menor o igual a* δ *y si* $i \neq j$*, entonces* $B_i \cap B_j = \varnothing$*.*

Definición 2.39. *Sean* $A \subset X$*,* $s \geq 0$*,* $\delta > 0$*.*

$$\mathcal{P}_\delta^s(A) := \sup\{\sum_{B \in \mathcal{B}} \text{diám}(B)^s | \mathcal{B} \textit{ es un } \delta\textit{-empaque de } A\}.$$

$\mathcal{P}_\delta^s$ es la aproximación que se buscaba ya que es mayor que $\sum_{B \in \mathcal{B}} \text{diám}(B)^s$ para cualquier empaque cuyos elementos tengan diámetros suficientemente grandes como para evitar las irregularidades pequeñas, y que tenga suficientes elementos como para poder decir que casi cubre a A.

Una observación importante es que si $\delta_1 < \delta_2$, entonces todo δ_1-empaque de A es un δ_2-empaque de A; por lo que cuando δ decrece, $\mathcal{P}_\delta^s(A)$ no aumenta. Esto implica que existe el límite

$$\mathcal{P}_0^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{P}_\delta^s(A).$$

$\mathcal{P}_0^s$ es llamada la *s-pre-medida* en X, y es monónota y finitamente subaditiva, pero no es una medida debido a que no es numerablemente subaditiva, como se observa en el siguiente ejemplo:

Proposición 2.40. *Sea* $X = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$*.*

$$\sum_{x \in X} \mathcal{P}_0^{1/2}(\{x\}) = 0 < \mathcal{P}_0^{1/2}(X).$$

Demostración. Es claro que $\sum_{x \in X} \mathcal{P}_0^{1/2}(\{x\}) = 0$, puesto que para todo $\delta > 0$ los únicos δ-empaques de $\{x\}$ son conjuntos con una única bola centrada en x de radio menor o igual a δ, de lo cual se sigue que:

$$\mathcal{P}_0^{1/2}(\{x\}) \leq \mathcal{P}_\delta^{1/2}(\{x\}) = \sqrt{2\delta}$$

para todo $\delta > 0$, por lo que $\mathcal{P}_0^{1/2}(\{x\}) = 0$. Por otro lado, si n es un número natural mayor a 1, para todo $\epsilon \in (0, 2^{-(n+1)})$ existe un 2^{-n}-empaque de X formado por bolas de radio $(2^{-n} - \epsilon)$ centradas en los puntos $\{m2^{-n+1}) : m \in \{1, ..., 2^{n-1} - 1\}\}$, por lo cual:

$$\mathcal{P}_{2^{-n}}^{1/2}(X) \geq (2^{n-1} - 1)(2^{-n+1} - 2\epsilon)^{1/2}$$

para todo $\epsilon \in (0, 2^{-(n+1)})$, lo cual implica que:

$$\mathcal{P}^{1/2}_{2^{-n}}(X) \geq (2^{n-1} - 1)(2^{-n+1})^{1/2} \geq 2^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{-n+1}{2}} = 1.$$

Como esta cota no depende de la elección de n, $\mathcal{P}^{1/2}_0(X) \geq 1$. $\square$

Proposición 2.41. *Si $s \geq 0$ y $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\mathcal{P}^s_0(E) = \mathcal{P}^s_0(\overline{E})$.*

Demostración. Sea $s \geq 0$. Es claro que si $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\mathcal{P}^s_\delta(A) \leq \mathcal{P}^s_\delta(B)$, dado que todo δ-empaque de A es un δ-empaque de B. Por tanto, $\mathcal{P}^s_0(A) \leq \mathcal{P}^s_0(B)$, es decir, que $\mathcal{P}^s_0$ es monótona bajo contención. Una consecuencia inmediata de esta propiedad es que si $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\mathcal{P}^s_0(E) \leq \mathcal{P}^s_0(\overline{E})$. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ y $\epsilon \in (0,1)$. Si $\mathcal{B} = \{B_{r_i}(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un δ-empaque de $\overline{E}$ entonces existe una familia $\{x'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de puntos en E tal que $d(x_i, x'_i) < \epsilon r_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, por lo que $B_{r_i(1-\epsilon)}(x'_i) \subset B_{r_i}(x_i)$. Debe observarse que $\mathcal{B}' = \{B_{r_i(1-\epsilon)}(x'_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un δ-empaque de E, por lo que:

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} (1-\epsilon)^s \text{diám}(B)^s = \sum_{B'\in\mathcal{B}'} \text{diám}(B')^s$$

$$\leq \sup\{\sum_{B'\in\mathcal{B}'} \text{diám}(B)^s | \mathcal{B}' \text{ es un } (1-\epsilon)\delta\text{-empaque de } E\} = \mathcal{P}^s_{(1-\epsilon)\delta}(E).$$

Tomando el supremo sobre los δ-empaques de $\overline{E}$, se obtiene que:

$$(1-\epsilon)^s \mathcal{P}^s_\delta(\overline{E}) \leq \mathcal{P}^s_{(1-\epsilon)\delta}(E) \leq \mathcal{P}^s_{(1-\epsilon)\delta}(\overline{E}).$$

Como esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, entonces $\mathcal{P}^s_\delta(E) = \mathcal{P}^s_\delta(\overline{E})$ para todo $\delta > 0$. Tomando el límite cuando $\delta \to 0$, se obtiene la igualdad buscada. $\square$

Debido a que $\mathcal{P}_0$ no es una medida, falta un paso más para definir la familia de funciones de medida necesarias para la dimensión de empaque.

Definición 2.42. *Se define la medida s-dimensional de empaque de la siguiente manera:*

$$\mathcal{P}^s(A) = \text{ínf}\{\sum_i \mathcal{P}^s_0(A_i) | \{A_i\}_i \text{ es cubierta de } A\}.$$

Definición 2.43. *La dimensión de empaque de $A \subset X$, $\dim_P(A)$, es el número real no negativo tal que*

$$\dim_P(A) = \text{ínf}\{t \geq 0 | \mathcal{P}^t(A) = 0\} = \sup\{t \geq 0 | \mathcal{P}^t(A) = \infty\}.$$

Proposición 2.44. *La dimensión de empaque cumple las siguientes propiedades:*

1. *Monotonía: Si $A \subset B$, entonces $\dim_P(A) \leq \dim_P(B)$.*

2. *Estabilidad numerable: Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos, entonces*

$$\dim_P\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sup\{\dim_P(A_i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Sean $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. Para todo $s > 0$, $\mathcal{P}^s(A) \leq \mathcal{P}^s(B)$, por lo que si $\mathcal{P}^s(B) = 0$, entonces $\mathcal{P}^s(B) = 0$. Por tanto,

$$\dim_P(A) = \text{ínf}\{t \geq 0 | \mathcal{P}^t(A) = 0\} \leq \text{ínf}\{t \geq 0 | \mathcal{P}^t(B) = 0\} = \dim_P(B).$$

Además, si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos, entonces

$$\dim_P\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \geq \sup\{\dim_P(A_i) \mid i \in \mathbb{N}\},$$

pues $A_r \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ para todo r. Por otro lado, si $s > \dim_P(A_r)$ para todo r, entonces

$$\mathcal{P}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}^s(A_i) = 0,$$

lo cual implica que $s > \dim_P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$. □

2.5. Dimensiones de conteo de cajas

En esta sección se presenta el concepto de dimensión de conteo de cajas, el cual existe cuando las dimensiones de conteo de cajas superior e inferior coinciden. La dimensión de conteo de cajas es una de las más usadas en aplicaciones de la geometría fractal a otras áreas pues es, en general, más fácil de aproximar que las dimensiones de Hausdorff y empaque; al contar con cuántas cajas regulares de diámetro δ puede cubrirse un conjunto y calcular la velocidad logarítmica con la que crece este número cuando $\delta \to 0$; y aunque debe de notarse que este número no siempre existe, puede acotarse entre las dimensiones de conteo de cajas superior e inferior.

Definición 2.45. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se define $N_\delta(A)$ como el mínimo de las cardinalidades de las δ-cubiertas de A, es decir, el mínimo número de conjuntos de diámetro menor a δ necesarios para cubrir a A.*

Definición 2.46. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se define la* dimensión inferior de conteo de caja *de A de la siguiente forma:*

$$\underline{\dim}_B(A) = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{-\log(\delta)}.$$

Análogamente, se define la dimensión superior de conteo de caja *de A de la siguiente forma:*

$$\overline{\dim}_B(A) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{-\log(\delta)}.$$

Una de las consecuencias del teorema al que está dedicado el capítulo 5 es la existencia de conjuntos para los cuales las dimensiones inferior y superior de conteo de cajas son diferentes.

Definición 2.47. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{-\log(\delta)}$$

existe, definimos la dimensión de conteo de cajas de A, $\dim_B(A)$, como este límite.

Teorema 2.48. *Se obtienen definiciones equivalentes a $\underline{\dim}_B(A)$, $\overline{\dim}_B(A)$ y $\dim_B(A)$ al definir $N_\delta(A)$ como:*

1. *El mínimo de las cardinalidades de las δ-cubiertas de A.*

2. *El mínimo de las cardinalidades de las cubiertas de A formadas por bolas cerradas de radio δ.*

3. *El máximo de las cardinalidades de los δ-empaques de A.*

4. *El mínimo de las cardinalidades de las cubiertas de A formadas por cubos de lado δ.*

5. *El número de cubos de la forma*

$$[\delta m_1, \delta(m_1+1)] \times [\delta m_2, \delta(m_2+1)] \times ... \times [\delta m_n, \delta(m_n+1)]$$

con $m_1, m_2, ..., m_n \in \mathbb{Z}$; los cuales serán llamados cubos coordenados de lado δ.

2.6. Desigualdades entre dimensiones

Teorema 2.49. *Todo* $A \subset \mathbb{R}^n$ *cumple que* $\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_B(A) \leq \overline{\dim}_B(A)$.

Demostración. Sea $0 < \delta < 1$. Como A puede ser cubierto por $N_\delta(A)$ conjuntos de diámetro menor o igual a δ, entonces $\mathcal{H}^r_\delta \leq N_\delta(A)\delta^r$ para todo $r \geq 0$.

Si $1 < \mathcal{H}^r(A) = \text{lím}_{\delta\to 0}\mathcal{H}^r_\delta(A)$, entonces, existe $0 < \delta_0 < 1$ tal que si $0 < \epsilon < \delta_0$, al tomar logaritmos se obtiene la siguiente desigualdad:

$$0 < \log(\mathcal{H}^r_\epsilon(A)) \leq \log(N_\epsilon(A)) + r\log(\epsilon)$$

$$0 < \frac{\log(\mathcal{H}^r_\epsilon(A))}{-\log(\epsilon)} \leq \frac{\log(N_\epsilon(A)) + r\log(\epsilon)}{-\log(\epsilon)}.$$

Por tanto, tomando los límites cuando $\epsilon \to 0$,

$$0 \leq \lim_{\epsilon\to 0} \frac{log(\mathcal{H}^r_\epsilon(A))}{-log(\epsilon)} \leq \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{log(N_\epsilon(A))}{-log(\epsilon)} - r \leq \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{log(N_\epsilon(A))}{-log(\epsilon)} - r.$$

Por tanto,

$$r \leq \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{log(N_\epsilon(A))}{-log(\epsilon)} = \underline{\dim}_B(A) \leq \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{log(N_\epsilon(A))}{-log(\epsilon)} = \overline{\dim}_B(A).$$

Como esto sucede para todo $r \geq 0$ tal que $1 < \mathcal{H}^r(A)$,

$$\dim_H(A) = \sup\{r \geq 0 : 0 < \mathcal{H}^r(A)\} = \sup\{r \geq 0 : 1 < \mathcal{H}^r(A)\} \leq \underline{\dim}_B(A),$$

con lo que se concluye la demostración. □

Para la demostración de la desigualdad que vincula la dimensión de Hausdorff con la dimensión de empaque debe usarse el siguiente teorema:

Teorema 2.50 (Teorema de Vitali)**.** *Sea* X *un espacio métrico y* $A \subset X$. *Si* $\mathcal{U}$ *es una cubierta de* A *formada por bolas cerradas con centros en* A *tal que para todo* $x \in A$ *y* $r > 0$ *existe* $\epsilon \in (0, r)$ *tal que* $\overline{B_\epsilon(x)} \in \mathcal{U}$, *entonces se cumple alguna de las dos siguientes propiedades:*

a) Existe una sucesión de bolas ajenas $\overline{B_{r_i}(x_i)}$ *en* $\mathcal{U}$ *tal que* $\inf r_i > 0$.

b) Existe una famlia numerable de bolas ajenas $\overline{B_{r_i}(x_i)}$ *en* $\mathcal{U}$ *tal que para todo* $j \in \mathbb{N}$*:*

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} \overline{B_{r_i}(x_i)} \subset \bigcup_{i=j+1}^{\infty} \overline{B_{3r_i}(x_i)}.$$

La demostración de este teorema (que es posible encontrar en [4]) se omite, pues es larga y no es relevante para el propósito de este texto.

Teorema 2.51. *Todo subconjunto acotado A de $\mathbb{R}^n$ cumple que* $\dim_H(A) \leq \dim_P(A)$.

Demostración. Basta probar que $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{P}^s(A)$ para todo $s > 0$, y debe notarse que si $\mathcal{P}^s = \infty$, el encunciado es verdadero.

Si $\mathcal{P}^s(A) < \infty$, se probará primero que $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{P}_0^s(A)$. Una vez más, si $\mathcal{P}_0^s(A) = \infty$, el enunciado es verdadero; y si $\mathcal{P}_0^s(A) < \infty$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{P}_\epsilon^s(A) < \infty$.

Sea $\mathcal{U} = \{\overline{B_r(x)} : x \in A \text{ y } 0 < r < \epsilon\}$. Claramente, $\mathcal{U}$ cumple la hipótesis del teorema de Vitali, por lo que debe cumplirse alguna de las dos propiedades establecidas en el teorema. Si existiera una sucesión de bolas ajenas $\overline{B_{r_i}(x_i)}$ en $\mathcal{U}$ tal que $\inf r_i > 0$, entonces $\infty = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(2r_i)^s \leq \mathcal{P}_\epsilon^s(A)$, lo cual es una contradicción; por lo que existe una famlia numerable $\mathcal{V}$ de bolas ajenas $\overline{B_{r_i}(x_i)}$ en $\mathcal{U}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$:

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} \overline{B_{r_i}(x_i)} \subset \bigcup_{i=j+1}^{\infty} \overline{B_{3r_i}(x_i)}.$$

Por definición, $\mathcal{V}$ es un ϵ-empaque de A, por lo que $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(2r_i)^s \leq \mathcal{P}_\epsilon^s(A)$ (lo cual implica que la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(2r_i)^s$ es convergente).

Por otro lado, $\left\{\overline{B_{r_i}(x_i)}\right\}_{i=1}^{j} \cup \left\{\overline{B_{3r_i}(x_i)}\right\}_{i=j+1}^{\infty}$ es una 6ϵ-cubierta de A para todo $j \in \mathbb{N}$; por lo que

$$\mathcal{H}_{6\epsilon}^s(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(2r_i)^s \leq \mathcal{P}_\epsilon^s(A).$$

Tomando límites cuando $\epsilon \to 0$, se obtiene que $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{P}_0^s(A)$. Por último, si se toma una cubierta $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de A, por subaditividad numerable de $\mathcal{H}^s$ se observa que:

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_0^s(A_i),$$

lo cual implica que $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{P}^s(A)$. □

Teorema 2.52. *Todo subconjunto acotado A de $\mathbb{R}^n$ cumple que* $\dim_P(A) \leq \overline{\dim}_B(A)$.

Demostración. Si $\dim_P(A) = 0$, la desigualdad es clara. Si $\dim_P(A) > 0$, y se toman $0 < t < s < \dim_P(A)$, se observa que $\mathcal{P}(A) = \infty$, por lo que $P_0^s(A) = \infty$.

Como $\mathcal{P}_0^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{P}_\delta^s(A)$, entonces para todo $\delta \in (0,1]$ existe $\mathcal{B}$ un δ-empaque de A tal que

$$1 < \sum_{B\in\mathcal{B}} \text{diám}(B)^s.$$

Debido a que A es acotado y las bolas en $\mathcal{B}$ son ajenas, para cada $k \in \mathbb{N}$, hay un número finito n_k de bolas cerradas en $\mathcal{B}$ tales que

$$2^{-k-1} < \text{diám}(B) \leq 2^{-k}.$$

Por tanto,

$$1 < \sum_{B\in\mathcal{B}} \text{diám}(B)^s \leq \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-ks}.$$

Se observa que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > 2^{k_0 t}(1 - 2^{t-s})$, pues de no existir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-ks} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kt-ks}(1-2^{t-s}) = (1-2^{t-s}) \sum_{k=0}^{\infty} (2^{t-s})^k < \infty$$

lo cual es una contradicción. Cada una de estas n_{k_0} bolas contiene una bola cerrada de radio 2^{-k_0-2} centrada en algún punto de A, por lo que si se escoge $N_\delta(A)$ como el máximo número de bolas cerradas y ajenas de radio a lo más δ con centros en A, entonces:

$$N_{2^{-k_0-2}}(A)(2^{-k_0-2})^t \geq n_{k_0}(2^{-k_0-2})^t$$
$$> 2^{k_0 t}(1-2^{t-s})(2^{-k_0-2})^t = 2^{-2t}(1-2^{t-s}).$$

Por tanto,

$$\limsup_{\delta\to 0} N_\delta(A)\delta^t \geq 2^{-2t}(1-2^{t-s}) > 0.$$

Por tanto, $\overline{\dim}_B(A) \geq t$ para toda $t < \dim_P(A)$. Se concluye que

$$\overline{\dim}_B(A) \geq \overline{\dim}_B(A).$$

□

Teorema 2.53. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Si para todo $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $A \cap U \neq \varnothing$, $\overline{\dim}_B(A \cap U) = \overline{\dim}_B(A)$, entonces $\dim_P(A) = \overline{\dim}_B(A)$.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una cubierta cerrada y numerable de A. Como A es un conjunto localmente compacto (por ser compacto) y Hausdorff (por ser métrico), es un espacio de Baire; por lo que podemos asugurar que existen $k \in \mathbb{N}$ y $V \subset X$ abierto tales que $A \cap V \subset A_k$ (pues A no puede ser unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío); lo cual implica que $\overline{\dim}_B(A) = \overline{\dim}_B(A_k)$. Usando esto puede asegurarse que:

$$\text{ínf}\left\{ \sup\{\overline{\dim}_B(F_i) : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \text{ y } F_i \text{ es cerrado } \right\} \geq \overline{\dim}_B(A).$$

Por otro lado, como $\{\overline{A}\}$ es una cubierta cerrada de A,

$$\text{ínf}\left\{ \sup\{\overline{\dim}_B(F_i) : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \text{ y } F_i \text{ es cerrado } \}\right\} \leq \overline{\dim}_B(\overline{A}) = \overline{\dim}_B(A).$$

Por tanto, ambas expresiones son iguales. Finalmente, basta mostrar que $\dim_P(A) \geq \overline{\dim}_B(A)$, pues $\dim_P(A) \leq \overline{\dim}_B(A)$ por el teorema anterior.

Si $s > \dim_P(A)$, entonces $\mathcal{P}^s(A) = 0$; por lo que existe una cubierta numerable $\{A_i\}_i$ de A tales que $\mathcal{P}_0^s(A_i) < \infty$ para todo i; por lo que existe $\epsilon > 0$ tal que si $0 < \delta < \epsilon$, entonces $\mathcal{P}_\delta^s(A_i) < \infty$ para todo i; lo cual implica que $N_\delta(A_i)\delta^s$, está acotado cuando $\delta \to 0$. Por tanto, $\overline{\dim}_B(A_i) \leq s$ y

$$\overline{\dim}_B(\overline{A}) \leq \text{ínf}\left\{ \sup\{\overline{\dim}_B(F_i) : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \textit{ y } F_i \textit{ es cerrado}\}\right\} \leq s.$$

Como esto sucede para todo $s > \dim_P(A)$, entonces $\overline{\dim}_B(\overline{A}) \leq \dim_P(A)$.

□

El teorema anterior nos lleva a las preguntas principales de este texto: ¿Es posible encontrar un conjunto tal que sus dimensiones de Hausdorff, de caja y de empaque sean iguales? ¿Es posible encontrar un conjunto en el que sean diferentes? Las respuestas a ambas preguntas se encontrarán en conjuntos con construcciones diferentes pero con una estructura topológica común: todos son homeomorfos al conjunto ternario de Cantor.

Capítulo 3

Conjuntos de Cantor

Esta sección está dedicada a la construcción clásica del conjunto de Cantor así como a la exposición de algunas de sus propiedades.

El conjunto ternario de Cantor, el cual será denotado por $\mathcal{C}$, es un ejemplo de gran importancia en la topología y el análisis, pues es uno de los primeros ejemplos de conjunto fractal y sorprende por la riqueza de propiedades que tiene. Se comienza la construcción con el conjunto $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, el cual se divide en tres subintervalos de la misma longitud, y al eliminar el central se obtiene $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Suponiendo que $\mathcal{C}_n$ es la unión ajena de 2^n intervalos cerrados de longitud 3^{-n}, se construye $\mathcal{C}_{n+1}$ como el conjunto compacto obtenido al unir los 2^{n+1} intervalos cerrados obtenidos cuando se divide cada componente conexa de $\mathcal{C}_n$ en tres intervalos cerrados de longitud $3^{-(n+1)}$ (que sólo se intersectan en sus fronteras) y se seleccionan sólo los que tienen algún punto frontera de $\mathcal{C}_n$. Este conjunto es cerrado por ser unión finita de intervalos cerrados; y es compacto por ser cerrado y acotado. De esta forma se construye una familia numerable de conjuntos compactos y anidados; los cuales al ser intersectados forman $\mathcal{C}$.

A continuación, se prueban algunas propiedades de $\mathcal{C}$. Debe notarse que para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el diámetro de cada componente de $\mathcal{C}_n$ es menor a ϵ.

Proposición 3.1. *$\mathcal{C}$ es compacto.*

Demostración. $\mathcal{C}$ es cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados, y es compacto por ser un subconjunto cerrado de $[0,1]$. $\square$

Proposición 3.2. *$\mathcal{C}$ no tiene puntos aislados.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{C}$ y sea $\{X_i\}_i$ la sucesión de subconjuntos de $[0,1]$ tales que para todo $i \in \mathbb{N}$, $x \in X_i$ y X_i es una componente conexa de $\mathcal{C}_i$. El diámetro de X_i es 3^{-i} para todo $i \in \mathbb{N}$, por lo que existe $x_i \in \mathrm{Fr}(X_i) \setminus \{x\} \subset \mathcal{C} \setminus \{x\}$; lo cual genera una sucesión en $\mathcal{C}$ convergente a x tal que $x \neq x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por tanto, x es punto de acumulación de $\mathcal{C}$. Se concluye que todos los puntos de $\mathcal{C}$ son puntos de acumulación, es decir, que ninguno es aislado. $\square$

Proposición 3.3. *La medida de Lebesgue de $\mathcal{C}$ es 0.*

Demostración. El conjunto ternario de Cantor es cerrado, lo cual lo hace Lebesgue medible. Para calcular la medida de Lebesgue de $\mathcal{C}$, se observa que para todo número natural n,

$$\lambda(\mathcal{C}) \leq \lambda(\mathcal{C}_n)$$

debido a la monotonía de la medida de Lebesgue. Por tanto:

$$\lambda(\mathcal{C}) \leq 2^n 3^{-n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

lo cual implica que $\lambda(\mathcal{C}) = 0$. $\square$

Ahora se presentará un subconjunto de $\mathbb{R}$ que es construido de forma muy parecida a la del conjunto ternario de Cantor, pero tiene medida de Lebesgue mayor a 0. El primer paso es el intervalo $[0,1]$ el cual será dividido en tres partes: $[0, \frac{3}{8}]$, $[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$ y $[\frac{5}{8}, 1]$. Se considera $\mathcal{D}_1 = [0, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1]$. En el n-ésimo paso de la construcción, cada una de las 2^{n-1} componentes conexas de $\mathcal{D}_{n-1}$ y se dividen en tres intervalos cerrados que sólo se intersectan en sus fronteras, de los cuales la parte de enmedio mide 2^{-2n}, y se remueve su interior de $\mathcal{D}_{n-1}$ para formar $\mathcal{D}_n$, el cual es la unión de 2^n intervalos cerrados ajenos dos a dos, cada uno con longitud $2^{-n}\big(1 - \sum\limits_{i=2}^{n} 2^{-i}\big)$. A pesar de que el origen de este número no parece claro, es simplemente la longitud del intervalo inicial, menos la suma de las longitudes de los intervalos eliminados hasta el n-ésimo paso, dividido entre las 2^n componentes de $\mathcal{D}_n$. El conjunto buscado es $\mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i$, el cual es cerrado por ser la intersección de subconjuntos cerrados y, por lo tanto, es Lebesgue-medible.

Proposición 3.4. *La medida de Lebesgue de $\mathcal{D}$ es mayor a* 0.

Demostración. Para calcular de medida de Lebesgue de $\mathcal{D}$, se le restará a la medida del intervalo $[0,1]$ la medida de $[0,1]\setminus\mathcal{D}$, el cual es la unión de los intervalos abiertos retirados durante la construcción, es decir, $[0,1]\setminus\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{\infty}([0,1]\setminus\mathcal{D}_i)$. Dado que en el n-ésimo paso se remueven 2^{n-1} intervalos abiertos de medida 2^{-2n},

$$\lambda([0,1]\setminus\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{n-1}2^{-2n} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\lambda(\mathcal{D}) = 1 - \lambda([0,1]\setminus\mathcal{D}) = \frac{1}{2}.$$

□

Corolario 3.5. *La dimensión de Hausdorff de $\mathcal{D}$ es* 1.

Demostración. Si la dimensión de Hausdorff de $\mathcal{D}$ fuera diferente de uno, entonces $\lambda(\mathcal{D}) = \mathcal{H}^1(\mathcal{D})$ debería ser 0 o ∞. □

A continuación, se demuestra que la dimensión topológica del conjunto ternario de Cantor es 0; y se deducen varias consecuencias importantes de este hecho, como la caracterización de todos los conjuntos homeomorfos a $\mathcal{C}$; entre los cuales se encuentra el conjunto $\mathcal{D}$. Al observar que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son homeomorfos, esto muestra que la medida de Lebesgue no es una propiedad topológica (cabe mencionar que esto puede mostrarse con ejemplos muchos más simples, como dos intervalos compactos, pero el interés de este texto se centra en los conjuntos de Cantor).

Proposición 3.6. *La dimensión topológica de $\mathcal{C}$ es 0.*

Demostración. Por la monotonía de la dimensión topológica, se cumple que $\dim(\mathcal{C}) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$. Además, $\mathcal{C} \neq \varnothing$, por lo que basta mostrar que $\dim(\mathcal{C}) \neq 1$. Esto se cumple dado que $\mathcal{C}$ no puede contener algún intervalo abierto, pues toda componente conexa de $\mathcal{C}$ debe estar contenida en una componente conexa de cada $\mathcal{C}_n$ en la construcción; y los diámetros de estas componentes convergen a 0 cuando $n \to \infty$. □

Corolario 3.7. *$\mathcal{C}$ es totalmente disconexo.*

Demostración. $\mathcal{C}$ es compacto y de dimensión topológica 0, por lo que es totalmente disconexo. $\square$

Debe observarse que, de manera análoga, puede demostrarse que $\mathcal{D}$ es compacto, que su dimensión topológica es 0 y que no tiene puntos aislados; por lo que el siguiente teorema muestra que es de hecho homeomorfo a $\mathcal{C}$.

Teorema 3.8. *Todo conjunto compacto con dimensión topológica* 0*, y sin puntos aislados es homeomorfo a* $\mathcal{C}$*.*

Demostración. Sean X y Y son dos espacios compactos con dimensión topológica 0, y sin puntos aislados. Sin pérdida de generalidad se supondrá que $\text{diám}(X) = \text{diám}(Y) = \frac{1}{2}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se construyen $(U)_n = \{U_{n,i}\}_{i=1}^{m(n)}$ y $\mathcal{V}_n = \{V_{n,i}\}_{i=1}^{m(n)}$ cubiertas finitas formadas por conjuntos abiertos y cerrados de X y Y tales que:

i) $\sup\{\text{diám}(U_{n,i}) \mid i \in \{1, 2, ..., m(n)\} < \frac{1}{n}$,

   $\sup\{\text{diám}(V_{n,i}) \mid i \in \{1, 2, ..., m(n)\} < \frac{1}{n}$

ii) $\mathcal{U}_n$ refina a $\mathcal{U}_{n-1}$ y $\mathcal{V}_n$ refina a $\mathcal{V}_{n-1}$.

iii) Si $i \in \{1, 2, ..., m(n-1)\}$ y $j \in \{1, 2, ..., , m(n)\}$, entonces $U_j \subset U_i$ si y sólo si $V_j \subset V_i$.

Se empieza la construcción considerando $\mathcal{U}_1 = \{X\}$ y $\mathcal{V}_1 = \{Y\}$, las cuales claramente cumplen con la condición i). Si se supone que ya se han construido $\mathcal{U}_p$ y $\mathcal{V}_p$ para todo $p \in \{1, 2, ..., n\}$ con las condiciones deseadas, se consideran cubiertas abiertas $\mathcal{E}_i$ y $\mathcal{F}_i$ de $U_{n,i}$ y $V_{n,i}$ respectivamente tales que:

a) $\mathcal{E}_i$ refina a $\{B_{\frac{1}{2(n+1)}}(x) \mid x \in U_{n,i}\}$ y $\mathcal{F}_i$ refina a $\{B_{\frac{1}{2(n+1)}}(y) \mid y \in V_{n,i}\}$ (lo cual implica que los diámetros de cada elemento de $\mathcal{E}_i$ y $\mathcal{F}_i$ son menores a $\frac{1}{n+1}$).

b) Los elementos de $\mathcal{E}_i$ y $\mathcal{F}_i$ son ajenos 2 a 2.

c) $\varnothing \notin \mathcal{E}_i$ y $\varnothing \notin \mathcal{F}_i$.

Por compacidad de $U_{n,i}$ y $V_{n,i}$, $\mathcal{E}_i$ y $\mathcal{F}_i$ son finitas. Si $\#\mathcal{E}_i < \#\mathcal{F}_i$ se selecciona $E_q \in \mathcal{E}_i$, se consideran $x, z \in E_q$ diferentes (los cuales existen, pues E_q es abierto no vacío y ningún punto es aislado en X); y como X es un espacio de dimensión topológica 0, es posible separar E_q en dos subconjuntos ajenos, abiertos y cerrados E_{q_1}, E_{q_2} tales que $x \in E_{q_1}$ y $z \in E_{q_2}$ y $\text{diám}(E_{q_1}), \text{diám}(E_{q_2}) < \text{diám}(E_q) < \frac{1}{n}$, lo que muestra que existe una cubierta $\mathcal{E}_i' = (\mathcal{E}_i/\{E_q\}) \cup \{E_{q_1}, E_{q_2}\}$ que cumple las condiciones deseadas y $\#\mathcal{E}_i' = \#\mathcal{E}_i + 1$. Puede repetirse el mismo procedimiento tantas veces como sea necesario, por lo que puede suponerse que $\#\mathcal{E}_i = \#\mathcal{F}_i$ sin pérdida de generalidad. Se definen:

$$\mathcal{U}_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{m(n)} \mathcal{E}_i \ , \qquad \mathcal{V}_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{m(n)} \mathcal{F}_i.$$

Por último, para que las cubiertas $\mathcal{U}_{n+1}$ y $\mathcal{V}_{n+1}$ cumplan la condición iii), basta numerar los conjuntos abiertos de cada cubierta de forma adecuada. Debe observarse que para toda pareja de puntos $x \in X$ y $y \in Y$, y para toda pareja de abiertos $A \subset X$ y $B \subset Y$ tales que $x \in A$ y $y \in B$, existen $U \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n$ y $V \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ tales que $x \in U \subset A$ y $y \in B$.

Para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $i(n,x) \in \{1, 2, ..., m(n)\}$ tal que $x \in U_{n,i(n,x)}$. Se debe observar que la familia $\{V_{n,i(n,x)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es anidada de forma decreciente y, dado que Y es compacto y $V_{n,i(n,x)}$ es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_{n,i(n,x)} \neq \varnothing$ y tiene un solo elemento (pues $\text{lím}_{n\to\infty} \text{diám}(V_{n,i(n,x)}) = 0$). Usando el mismo procedimiento partiendo del espacio Y, construimos la biyección entre X y Y:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\ (x \in U_{n,i(n,x)} \Leftrightarrow y \in V_{n,i(n,x)}),$$

Se concluye que $f^{-1}(V_{n,i}) = U_{n,i}$ y $f(U_{n,i}) = V_{n,i}$, es decir que f manda una base topológica de X en una base topológica de Y; y la imagen inversa de cada elemento de una base topológica de Y es elemento de una base topológica de X, lo cual implica que f es continua y abierta. Como f es continua, abierta y biyectiva, es un homeomorfismo. □

Proposición 3.9. $\dim_H(\mathcal{C}) = \dim_P(\mathcal{C}) = \dim_B(\mathcal{C}) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$.

Demostración. Basta probar las siguientes dos afirmaciones:

i) $\frac{\log(2)}{\log(3)} \leq \dim_H(\mathcal{C})$

ii) $\overline{\dim}_B \leq \frac{\log(2)}{\log(3)}$

Para probar i), sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una cubierta de $\mathcal{C}$. Sin pérdida de generalidad, puede considerarse que cada U_i es abierto y cerrado en $\mathcal{C}$ y es de la forma $[a_i, b_i] \cap \mathcal{C}$; por lo que $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita $\{U_1, ..., U_m\}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$3^{-k_i+-1} \leq \text{diám}(U_i) < 3^{-k_i}.$$

Por tanto, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, U_i intersecta sólo uno de los intervalos cerrados de $\mathcal{C}_{k_i}$, lo cual implica que para todo $j > k_i$, U_i intersecta a lo más a $2^{j-k_i} = 2^j 2^{-k_i} = 2^j 3^{-sk_i} = 2^j 3^s 3^{s(-k-1)} \leq 2^j 3^s \text{diám}(U_i)^s$ intervalos cerrados de $\mathcal{C}_j$ (si $s = \frac{log(2)}{log(3)}$). Si $k > \text{máx}\{k_1, ..., k_m\}$, la suma de los números de intervalos cerrados de $\mathcal{C}_j$ que intersecta cada elemento de $\{U_i\}_{i=1}^m$ debe ser mayor o igual a 2^j, pues es una cubierta de $\mathcal{C}$, así que debe intersectar a todos los intervalos de cada paso de la construcción, es decir,

$$2^j \leq \sum_{i=1}^{m} 2^{j-k_i} \leq \sum_{i=1}^{m} 2^j 3^s \text{diám}(U_i)^s \leq \sum_{U\in\mathcal{U}} 2^j 3^s \text{diám}(U)^s.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2} = 3^{-s} \leq \sum_{U\in\mathcal{U}} \text{diám}(U)^s.$$

Por tanto, $\sum_{U\in\mathcal{U}} \text{diám}(U)^s \geq \frac{1}{2}$ para toda cubierta $\mathcal{U}$ de $\mathcal{C}$. Se concluye que $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) > 0$, lo cual implica que $\dim_H(\mathcal{C}) \geq s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$.

Para probar ii), debe notarse que para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia de 2^n intervalos cerrados y ajenos de longitud 3^{-n} de $\mathcal{C}_n$ cubre a $\mathcal{C}$; por lo que se obtiene la siguiente desigualdad:

$$N_{3^{-n}}(\mathcal{C}) \leq 2^n.$$

Por tanto,

$$\overline{\dim}_B(\mathcal{C}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{log(N_{3^{-n}}(\mathcal{C}))}{-log(3^{-n})} \leq \limsup_{\delta\to 0} \frac{log(2^n)}{-log(3^{-n})} = \frac{log(2)}{log(3)}$$

Con esto se concluye la demostración. $\square$

Capítulo 4

Conjuntos autosimilares

Muchos de los ejemplos famosos de conjuntos fractales son autosimilares, es decir, están formados por piezas geométricamente similares al conjunto total a escalas más pequeñas. Para identificar esto, se buscan funciones que manden el fractal en una copia más pequeña contenida en el mismo objeto. Estas funciones son llamadas similaridades. En este capítulo se presentará la definición de conjunto autosimilar, y se demostrarán algunos teoremas permiten el cálculo de la dimensión de Hausdorff de conjuntos fractales autosimilares. Debe mencionarse que la autosimilaridad no es una condición necesaria para que un objeto se considere fractal, debido a que excluiría múltiples ejemplos de conjuntos con dimensiones fractales no enteras.

Definición 4.1. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$. $f : A \to B$ es una* contracción *si existe $c < 1$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$ para toda pareja $x, y \in A$. El ínfimo de los valores c que cumplen esta propiedad es llamado radio de la contracción.*

Definición 4.2. *$f : A \to B$ es una* similaridad *si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|f(x) - f(y)\| = c\|x - y\|$ para toda pareja $x, y \in A$. Debe notarse que si $c < 1$, entonces f una contracción de radio c.*

Debe de observarse que las contracciones son funciones continuas, y las similaridades son homeomorfismos, pues son composiciones de isometrías y homotecias. Con el concepto de similaridad definido, es posible formalizar la definición de conjunto autosimilar.

Definición 4.3. *Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es* invariante *bajo una familia de contracciones $f_1, ...f_m : E \to E$ si $E = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(E)$. Si cada una de estas contracciones es una similaridad y existe $s > 0$ tal que $\mathcal{H}^s(E) > 0$ y $\mathcal{H}^s(f_i(E) \cap f_j(E) = 0$ para $i \neq j$, se dice que E es autosimilar.*

El conjunto ternario de Cantor $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ es un ejemplo de conjunto autosimilar, dado que es invariante bajo las similaridades $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ y $f_2(x) = \frac{1}{3}(x+2)$, y cumple que si $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$, entonces $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) > 0$ y

$$\mathcal{H}^s\left(f_1(\mathcal{C}) \cap f_2(\mathcal{C})\right) = \mathcal{H}^s\left((\mathcal{C} \cap [0, \frac{1}{3}]) \cap (\mathcal{C} \cap [\frac{2}{3}, 1])\right) = \mathcal{H}^s(\varnothing) = 0.$$

Además, $\mathcal{C}$ es el único subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ que es invariante bajo f_1 y f_2, debido a un teorema que establece que dada una familia de contracciones, existe un único conjunto compacto invariante bajo esta familia. Para demostrar este teorema, será necesario tener algunas definiciones de la teoría de hiperespacios.

En teoría de hiperespacios se dota de estructura métrica a familias de subconjuntos de un espacio métrico, midiendo la distancia entre dos conjuntos con la distancia de Hausdorff, que consiste en encontrar el ínfimo de los ϵ mayores a cero tales que al "ϵ-agrandar.ª cualquiera de los dos conjuntos, contiene al otro.

Definición 4.4. *Sea X un espacio métrico. Dado $A \subset X$, se define la* nube de radio ϵ alrededor de A, *denotada $\mathcal{N}(A, \epsilon)$, como la unión de todas las bolas abiertas de radio ϵ centradas en puntos de A.*

Definición 4.5. *Sea X un espacio métrico. La* distancia de Haussdorff H *entre dos conjuntos $A, B \subset X$ se define de la siguiente manera:*

$$H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset \mathcal{N}(B, \epsilon) \ y \ B \subset \mathcal{N}(A, \epsilon)\}.$$

Definición 4.6. *Sea X un espacio métrico. El hiperespacio de subconjuntos compactos de X se define como la pareja ordenada $(C(X), H)$ donde $C(X)$ es la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X, y H es la métrica de Hausdorff en X.*

El Teorema 2.5.2 de [3] establece que $(C(X), H)$ es un espacio métrico, como sugiere su definición. Los siguientes dos teoremas servirán para probar la existencia de un conjunto compacto invariante bajo una familia de contracciones, y corresponden a los teoremas 2.2.21 y 2.5.3 de [3], donde pueden encontrarse sus demostraciones.

Teorema 4.7 (Teorema del punto fijo de Banach). *Sea X un espacio métrico completo. Si $f : X \to X$ es una contracción, entonces existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Teorema 4.8. *Si X es un espacio métrico completo, entonces el hiperespacio $(C(X), H)$ es un espacio métrico completo.*

Teorema 4.9. *Dada una familia de contracciones $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ en $\mathbb{R}^n$ con radios de contracción $r_1, \ldots, r_m$, existe un único conjunto compacto $E \subset \mathbb{R}^n$ invariante bajo $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $(C(\mathbb{R}^n), H)$ el hiperespacio de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Se define la función $F : C(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(A),$$

la cual está bien definida, pues la imagen continua de un conjunto compacto es un conjunto compacto, y la unión finita de conjuntos compactos es también un conjunto compacto.

Sea $r = \max\{r_1, \ldots, r_m\}$. Se probará que F es una contracción de radio r en $\mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$. Sean $A, B \in C(\mathbb{R}^n)$. Si $B \subset \mathcal{N}(A, \epsilon)$, entonces $f_i(B) \subset f_i(\mathcal{N}(A, \epsilon)) \subset \mathcal{N}(f_i(A), r_i\epsilon)$ y $f_i(A) \subset f_i(\mathcal{N}(B, \epsilon)) \subset \mathcal{N}(f_i(B), r_i\epsilon)$. Por tanto,

$$F(A) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{N}(f_i(B), r_i\epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{N}(f_i(B), r\epsilon),$$

$$F(B) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{N}(f_i(A), r_i\epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{N}(f_i(A), r\epsilon)$$

lo cual implica que

$$H(F(A), F(B)) \leq rH(A, B).$$

Dado que F es una contracción, por el teorema del punto fijo de Banach, tiene un único punto fijo, el cual es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, es decir que existe $E \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que $E = \bigcup\limits_{i=1}^{m} f_i(E)$. □

De este teorema se obtiene el siguiente corolario que establece que al tomar un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{R}^n$ y una familia de contracciones, su conjunto compacto invariante es el atractor del sistema de funciones iteradas dado por las contracciones.

Corolario 4.10. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto invariante bajo una familia de contracciones $\{f_1, \ldots, f_m\}$. Si $F : C(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ es la función dada por*

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(A),$$

entonces $F^k(A)$ converge a E bajo la métrica de Hausdorff cuando $k \to \infty$, para todo $A \in C(\mathbb{R}^n)$.

Debe observarse que el conjunto invariante E puede escribirse también de la siguiente forma: para cada $k \in \mathbb{N}$ pueden considerarse todas las sucesiones finitas de k contracciones, etiquetadas por $(j_1, j_2, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, m\}^k$; para definir $f_{j_1 \ldots j_k} = f_{j_k} \circ \ldots \circ f_{j_1}$, y así escribir $E = \bigcup\{f_{j_1 \ldots j_k}(E) : (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, m\}^k$.

Para continuar el estudio de los conjuntos autosimilares, se usará el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [6].

Lema 4.11. *Sea $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ una familia de contracciones en $\mathbb{R}^n$. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto compacto invariante bajo $\mathcal{F}$, entonces existe una una medida de Borel μ en $\mathbb{R}^n$ tal que:*

1. *El conjunto* $\mathrm{sop}(\mu) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \mu(B_\epsilon(x)) > 0 \text{ para todo } \epsilon > 0\}}$*, llamado soporte de μ, está contenido en E.*

2. $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$

3. $\mu(F) = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i^s \mu(f_i^{-1}(F))$ *para todo F μ-medible, donde s está definida por la ecuación $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$.*

Definición 4.12. *Una familia de contracciones en $\mathbb{R}^n$ cumple la* condición de conjuntos abiertos *si existe un $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado tal que*

1. $F(U) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} f_i(U) \subset U$*, donde esta unión es ajena.*

2. *Si $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, m\}$, entonces*

$$\bigcup_{i=1}^{m} f_{j_1 j_2 \ldots j_k i}(U) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i\left(f_{j_k} \circ \ldots \circ f_{j_1}(U)\right) \subset U,$$

   donde esta unión es ajena.

Proposición 4.13. *Sean $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ una familia de contracciones en $\mathbb{R}^n$ y $E \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto compacto invariante bajo $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ cumple la condición de conjuntos abiertos para el conjunto U, entonces $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F^i(\overline{U})$.*

Demostración. Para demostrar esta proposición basta notar que $\overline{U}$ es compacto, por lo cual $\{F^k(U)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a E. □

Lema 4.14. *Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que son ajenos dos a dos. Si cada $U \in \mathcal{U}$ contiene una bola de radio $c_1\rho$, y está contenida en alguna bola de radio $c_2\rho$, entonces toda bola de radio ρ intersecta a lo más a $(1+2c_2)^n c_1^{-n}$ elementos de la familia $\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Si existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{U} \cap B_\rho(x) \neq \varnothing$, entonces $\overline{U} \subset B_{1+2c_2}(x)$. Dado que la medida de cada elemento de $\mathcal{U}$ es mayor a la de una bola de radio $c_1\rho$, $B_{1+2c_2}(x)$ puede contener sólo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$, por lo que $B_\rho(x)$ puede intersectar sólo a una cantidad finita de estos abiertos. Aún más, si a elementos de $\mathcal{U}$ instersectan a $B_\rho(x)$, se obtienen las desigualdades:

$$a\mathcal{L}^n(B_{c_1\rho}(\overline{0})) \leq \mathcal{L}^n(B_{1+2c_2}(\overline{0})).$$

Por tanto,

$$a(c_1\rho)^n \leq (1+2c_2)^n$$

de lo cual se obtiene la cota buscada. □

Teorema 4.15. *Sean $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ una familia de similaridades en $\mathbb{R}^n$ con radios $r_1, \ldots, r_m$; y $E \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto compacto invariante bajo $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ cumple la condición de conjuntos abiertos, entonces $\dim_H(E) = s$ donde s está determinado por la ecuación $\sum\limits_{i=1}^{m} r_i^s = 1$.*

Demostración. Se sabe que $\mathcal{U}_k = \{f_{j_1 \ldots j_k}(E) : (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, m\}^k\}$ es una cubierta de E, y que $\text{lím}_{k\to\infty} \text{máx}\{\text{diám}(U) : U \in \mathcal{U}_k\} = 0$; por lo que estas cubiertas servirán para calcular la dimensión de Hausdorff de E.

Dado que cada f_i es una similaridad, se cumple que:

$$\sum_{j_1 ldots j_k} \text{diám}(f_{j_1 \ldots j_k}(E))^s = \sum_{j_1 \ldots j_k} (r_{j_1} r_{j_2} \ldots r_{j_k})^s \text{diám}(E)^s$$

Si $\sum\limits_{i=1}^{m} r_i^s = 1$, al elevar esta expresión a la potencia k se obtiene que

$$\sum_{j_1 \dots j_k} (r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_k})^s = 1.$$

Por tanto,

$$\sum_{j_1 \cdots j_k} \text{diám}(f_{j_1 \dots j_k}(E))^s = \text{diám}(E)^s.$$

Usando este hecho, se toman $\delta > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U}_k$ es una δ-cubierta de E. Para calcular la s-medida de Hausdorff de E debe observarse que

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \sum_{j_1 \dots j_k} \text{diám}(f_{j_1 \dots j_k}(E))^s = \text{diám}(E)^s < \infty.$$

Por tanto, $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Para demostrar que $\dim_H(E) = s$ basta mostrar que $\mathcal{H}^s(E) > 0$. Sean $\rho > 0$ y V un conjunto abierto acotado para el cual $\mathcal{F}$ cumple la condición de conjuntos abiertos. Existen c_1, c_2 tal que V contiene una bola abierta de radio c_1 y está contenido en una bola de radio c_2. Dada cualquier sucesión $\{j_1, j_2, \dots\} \in \{1, \dots, m\}^\infty\}$, existe $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que

$$\rho \min\{r_i\}_{i=1}^m \leq r_{j_1} \dots r_{j_k} \leq \rho,$$

por lo que se puede considerar la sucesión finita que termina en este k-ésimo término. Sea $\mathcal{L}$ la familia de sucesiones finitas obtenidas de esta manera. Dado que las similaridades son funciones abiertas y V es un conjunto abierto para el cual $\mathcal{F}$ cumple la condición de conjuntos abiertos, los conjuntos de la familia $\mathcal{V} = \{f_{j_1} \circ \dots \circ f_{j_k}(V) : \{j_1, \dots, j_k\} \in \mathcal{L}\}$ son abiertos ajenos dos a dos; y cada uno contiene una bola de radio $c_1 r_{j_1} \dots r_{j_k}$ y, por tanto, contiene una bola de radio $\rho \min\{r_i\}_{i=1}^m$. A su vez, están contenidos en una bola de radio $c_2 r_{j_1} \dots r_{j_k}$, por lo que están contenidos en alguna bola de radio $c_2\rho$. Por el Lema 4.14, cualquier B de radio ρ intersecta a lo más $(1+2c_2)^n c_1^{-n} (\min\{r_i\}_{i=1}^m)^{-n}$ elementos de la familia $\mathcal{V}$.

Sea μ la medida descrita por el lema 4.11. La función

$$\mu_{j_1 \dots j_k} = \mu((f_{j_k}^{-1} \circ \dots \circ f_{j_1}^{-1}))$$

es una medida con soporte contenido en $f_{j_1} \circ \dots \circ f_{j_k}(E) \subset \overline{f_{j_1} \circ \dots \circ f_{j_k}(V)}$ y cumple que $\mu_{j_1 \dots j_k}(\mathbb{R}^n) = 1$, pues las similaridades son suprayectivas. Haciendo uso de la tercera propiedad del mismo lema, se obtiene que para todo F μ-medible,

$$\mu(F) = \sum_{\{j_1,\dots,j_k\}\in\mathcal{L}} \mu(f_{j_1}^{-1}\circ\ldots\circ f_{j_k}^{-1}(F)) = \sum_{\{j_1,\dots,j_k\}\in\mathcal{L}} (r_{j_1}r_{j_2}\ldots r_{j_k})^s \mu_{j_1\ldots j_k}(F)$$
$$\leq \sum_{\{j_1,\dots,j_k\}\in\mathcal{L}} (r_{j_1}r_{j_2}\ldots r_{j_k})^s \mu_{j_1\ldots j_k}(\mathbb{R}^n) = \sum_{\{j_1,\dots,j_k\}\in\mathcal{L}} (r_{j_1}r_{j_2}\ldots r_{j_k})^s.$$

En particular, para calcular $\mu(B)$ sólo se consideran los sumandos asociados a las sucesiones en $\mathcal{L}$, que serán llamadas $\mathcal{L}^*$ tales que $f_{j_1}\circ\ldots\circ f_{j_k}(V)\cap B\neq\varnothing$, con lo que se obtiene que si $q=(1+2c_2)^n c_1^{-n}(\text{mín}\{r_i\}_{i=1}^m)^{-n}$, entonces

$$\mu(B) \leq \sum_{\{j_1,\dots,j_k\}\in\mathcal{L}^*} (r_{j_1}r_{j_2}\ldots r_{j_k})^s \leq q\rho^s = q\text{diám}(B)^s.$$

Para terminar la demostración, se toman $\delta>0$ y $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ una cubierta de E donde cada U_i está acotado. Dado que todo U_i está contenida en una bola que tiene el mismo diámatero que U_i, se obtiene que

$$\mu(U_i) \leq \mu(B_{\frac{\text{diám}(U_i)}{2}}) \leq q(\text{mín}\{r_i\}_{i=1}^m)^{-n}\text{diám}(U_i)^s.$$

Por tanto,

$$0<\mu(E)\leq\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty U_i\right)\leq\sum_{i=1}^\infty \mu(U_i)$$
$$\leq\sum_{i=1}^\infty q\text{diám}(U_i)^s,$$

lo cual implica que $0<\sum_i \text{diám}(U_i)^s$. Como se tomó una cubierta arbitraria de conjuntos acotados, $0<\mathcal{H}^s(E)$. Se concluye que $\dim_H(E)=s$. □

Con este teorema, puede obtenerse el siguiente corolario que establece, en particular, que si una familia de similaridades cumple la condición de conjuntos abiertos, entonces su conjunto compacto invariante es autosimilar.

Corolario 4.16. *Si la condición de conjuntos abiertos se cumple para la familia de similaridades $\mathcal{F}=\{f_1,\dots,f_m\}$, entonces su conjunto compacto invariante E cumple que $\mathcal{H}^s(f_i(E)\cap f_j(E))=0$ si $i\neq j$.*

Demostración. Si r_i es el radio de la similaridad f_i, y s está deteminado por la ecuación $\sum_{i=1}^m r_i^s=1$, entonces

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(f_i(E)) = \sum_{i=1}^m r_i^s\mathcal{H}^s(E)=\mathcal{H}^s(E).$$

Por el teorema anterior, la dimensión de Hausdorff de E es s, lo cual implica que $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$; y dado que $E = \bigcup_{i=1}^m f_i(E)$, la ecuación pasada implica que el conjunto compacto invariante E de la familia $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ cumple que $\mathcal{H}^s(f_i(E) \cap f_j(E)) = 0$ si $i \neq j$. $\square$

En el capítulo anterior se han calculado las dimensiones fractales del conjunto de Cantor ternario, pero surge la siguiente pregunta: ¿Es posible construir un conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor cuyas dimensiones sean diferentes? La respuesta es afirmativa, y existen muchos ejemplos de construcciones que permiten hacerlo. A continuación se presentará un primer ejemplo de solución a esta pregunta, que consiste en la construcción de un conjunto de Cantor con dimensión de Hausdorff arbitraria. Cabe mencionar que dada esta construcción, se puede demostrar que la dimensión de conteo de cajas de estos conjuntos es igual a su dimensión de Hausdorff.

Teorema 4.17. *Dado $0 < s < n$, existe $\mathcal{C}_s \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo al conjunto de Cantor ternario tal que $\dim_H(\mathcal{C}_s) = s$.*

Demostración. Sean $s \in (0, n)$ y $r = 2^{-\frac{n}{s}}$. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, se definen $\{v_1, \ldots, v_n\} = \big\{ \sum_{i \in A} e_i : A \subset \{1, \ldots, n\}\big\}$. Se definen las funciones $f_1, \ldots, f_{2^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$f_i(x) = rx + (1 - r)v_i.$$

Debe de notarse que cada f_i es una similaridad y una contracción de radio r. Dado que el radio de cada similaridad es r, $\sum_{i=1}^{2^n} r_i^s = 2^n r^s = 1$, por lo que el conjunto compacto invariante $\mathcal{C}_s$ de la familia de similaridades $\{f_1, \ldots, f_{2^n}\}$ tiene dimensión de Hausdorff s. También se observa que $\mathcal{C}_s \subset [0, 1]^n$. Para mostrar que $\mathcal{C}_s$ es homeomorfo al conjunto de Cantor ternario, debe mostrarse que es perfecto y que su dimensión topológica es 0.

Para mostrar que $\mathcal{C}_s$ es perfecto, se toman un punto $x \in \mathcal{C}_s$ y $\epsilon > 0$. Se considera $k \in \mathbb{N}$ tal que $r^k\sqrt{n} < \epsilon/2$. Dado que $\text{diám}(\mathcal{C}_s) \leq \sqrt{n}$, y cada f_i es una contracción de radio r, se observa que si $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, 2^n\}^k$, entonces

$$\text{diám}\left(\left(f_{i_k} \circ \ldots \circ f_{i_1}\right)(\mathcal{C}_s)\right) \leq r^k\sqrt{n}.$$

Dado que

$$\mathcal{C}_s = \bigcup \{\left(f_{i_k} \circ \ldots \circ f_{i_1}\right)(\mathcal{C}_s) : (i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, 2^n\}^k\},$$

existe $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, 2^n\}^k\}$ tal que $x \in (f_{i_k} \circ \ldots \circ f_{i_1})(\mathcal{C}_s)$, por lo que

$$(f_{i_k} \circ \ldots \circ f_{i_1})(\mathcal{C}_s) \subset B_\epsilon(x).$$

Debe observarse que $\mathcal{C}_s$ tiene más de un punto, pues $(0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1) \in \mathcal{C}_s$. Dado que cada f_i es inyectiva, la composición de ellas también lo es, por lo que existe $y \in \mathcal{C}_s$ tal que $(f_{i_k} \circ \ldots \circ f_{i_1})(y) \in \mathcal{C}_f \cap B_\epsilon(x) \setminus x$.

Para mostrar que la dimensión topológica de $\mathcal{C}_s$ es 0, se observa que si $i \neq j$, entonces $f_i(\mathcal{C}_s) \cap f_j(\mathcal{C}_s) = \varnothing$, pues:

1. $\text{diám}(f_i(\mathcal{C}_s)) \leq r$ y $\text{diám}(f_j(\mathcal{C}_s)) \leq r$.

2. $\|v_i - v_j\| \geq 1$.

3. $v_i \in f_i(\mathcal{C}_s)$ y $v_j \in f_j(\mathcal{C}_s)$.

Dado que $f_i(\mathcal{C}_s)$ es cerrado en $\mathcal{C}_s$ para todo i, el conjunto $\mathcal{C}_s$ es unión finita de subconjuntos cerrados ajenos dos a dos, de diámetro menor o igual a r. Esto a su vez implica que $f_i(\mathcal{C}_s)$ es abierto para todo i. Repitiendo este procedimiento, aplicando composiciones de k funciones se observa que $\mathcal{C}_s$ puede verse como unión de subconjuntos cerrados y abiertos de diámetro menor o igual a r^k, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Se concluye que $\mathcal{C}_s$ tiene una base de subconjuntos abiertos y cerrados, lo cual implica que tiene dimensión topológica 0. $\square$

Capítulo 5

Teorema de Nilsson-Wingren

En el capítulo 3 se mostró que existen dos conjuntos homeomorfos con dimensiones de Hausdorff diferentes. En este capítulo se muestra que este resultado puede extenderse, al ver que existen conjuntos homeomorfos al conjunto de Cantor con dimensión de Hausdorff igual a cualquier número no negativo, y aún más: asegura la existencia de conjuntos de Cantor con dimensiones de Hausdorff, caja inferior y caja superior arbitrarias, salvo por las restricciones en la sección 2.6.

Teorema 5.1. *Dados $r, s, t \in (0, n]$, $r < s < t$ existe un conjunto de Cantor $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo U abierto en K,*

$$\dim_H(U) = r,\ \underline{\dim}_B(U) = s,\ y\ \overline{\dim}_B(U) = t.$$

La demostración del teorema se compone de 4 partes:

1. Construcción de sucesiones con propiedades específicas para facilitar los cálculos de dimensión.

2. Construcción de conjuntos compactos por medio de las sucesiones ya definidas. Al intersectar estos conjuntos compactos, obtendremos el conjunto fractal deseado.

3. Demostración de propiedades de dimensión del conjunto construido.

4. Demostración de las propiedades topológicas del conjunto construido, las

cuales garantizarán la existencia de un homeomorfismo con el conjunto ternario de Cantor.

5.1. Sucesiones

Se comienza la construcción definiendo algunas sucesiones y mostrando propiedades que, a pesar de que su finalidad no es evidente, son la clave para la construcción del conjunto y la demostración de sus propiedades de dimensión. Para esto, se escogen $r \leq s \leq t$ que serán, respectivamente, la dimensión de Hausdorff, la dimensión de caja inferior y la dimensión de caja superior de K, y se escoge $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \leq n$, que será la dimensión vectorial del espacio euclidiano en el que se podrá construir el conjunto de Cantor K.

Sea $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Se define una sucesión $\{a_i\}$ de forma recursiva, y la sucesión $\{\overline{a}_i\}$ de sus promedios de la siguiente manera:

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ nH\big(s - \frac{1}{i-1}\sum_{j=1}^{i-1} a_j\big) & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

$$\overline{a_i} = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} a_j.$$

Debe de observarse que los únicos dos posibles valores para los términos de la sucesión $\{a_i\}$ serán 0 y n, y el valor seleccionado para cada $i \in \mathbb{N}$ dependerá de si el promedio de los términos anteriores es mayor o menor a s, pues si $i > 1$, entonces

$$a_i = nH\big(s - \frac{1}{i-1}\sum_{j=1}^{i-1} a_j\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } \big(s - \frac{1}{i-1}\sum_{j=1}^{i-1} a_j\big) < 0 \\ n & \text{si } \big(s - \frac{1}{i-1}\sum_{j=1}^{i-1} a_j\big) \geq 0 \end{cases}.$$

La siguiente proposición afirma que la sucesión $\{\overline{a}_i\}$ es convergente a s.

Proposición 5.2. *Para todo* $i \in \mathbb{N}$, $|s - \overline{a}_i| \leq \frac{n}{i}$.

Demostración. Claramente el enunciado es válido para $i = 1$, pues

$$|s - \overline{a}_1| = |s - 0| = s \leq n.$$

Se supondrá ahora que $|s - \overline{a}_k| \leq \frac{n}{k}$ para alguna $k \in \mathbb{N}$.

Para $i = k + 1$ hay 2 casos posibles: $s - \overline{a}_k < 0$ ó $s - \overline{a}_k \geq 0$. Si $s - \overline{a}_k < 0$, entonces $a_{k+1} = 0 < s$. Por tanto,

$$-\frac{n}{k} \leq s - \overline{a}_k < 0,$$

lo cual implica que

$$-n \leq ks - \sum_{j=1}^{k} a_j < 0,$$

y así

$$-n + \sum_{j=1}^{k} a_j \leq ks < \sum_{j=1}^{k} a_j.$$

Por tanto, se obtiene la desigualdad

$$-n + \sum_{j=1}^{k+1} a_j \leq (k+1)s < \sum_{j=1}^{k} a_j + s$$

ya que $a_{k+1} = 0 < s$. Luego,

$$-\frac{n}{k+1} + \overline{a}_{k+1} \leq s < \frac{1}{k+1}(\sum_{j=1}^{k} a_j + s),$$

lo cual implica que

$$-\frac{n}{k+1} \leq s - \overline{a}_{k+1} < \frac{1}{k+1}(s - c_{k+1}) = \frac{s}{k+1} < \frac{n}{k+1}$$

por lo que se concluye que

$$|s - \overline{a}_{k+1}| \leq \frac{n}{k+1}.$$

La demostración del otro caso es análoga. □

El siguiente paso es definir un par de sucesiones $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_i\}$, junto con sus respectivas sucesiones de promedios:

$$\overline{\alpha}_i = \tfrac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \alpha_j \quad \text{y} \quad \overline{\beta}_i = \tfrac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \beta_j \ .$$

Todo término de las sucesiones $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_i\}$ será n o será 0, y se definirán de forma que las sucesiones de promedios oscilen entre r y t, provocando que su límite inferior sea r y su límite superior sea t. Para definir estas sucesiones, se usará el número $\epsilon = \frac{1}{2}\operatorname{mín}\{t-s, s-r\}$. También será necesaria una sucesión de números naturales creciente $\{\sigma_p\}$ tal que para todo número natural p:

1. $\sigma_p \geq \frac{np(p+1)}{\epsilon}$

2. $a_{\sigma_p+1} = n$.

Existen sucesiones con estas propiedades, ya que para todo $p \in \mathbb{N}$, existe un número natural tal que todo número natural mayor cumple la propiedad 1 (para el mismo valor p); y basta escoger el primero que cumple la propiedad 2, que existe dado que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} | a_{i+1} = n\}$ no está acotado.

Se selecionará el término σ_1 como el primer número natural que cumpla con las dos condiciones deseadas. Las sucesiones $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_i\}_i$ se construirán de forma recursiva por multipasos. El primer multipaso definirá desde el primer hasta el σ_1-ésimo término de cada sucesión; y el p-ésimo multipaso definirá desde el $(\sigma_{p-1}+1)$-ésimo y terminará en un número natural que será seleccionado como σ_p.

El primer multipaso de la construcción de $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_i\}_i$ consiste en escoger $\alpha_i = \beta_i = a_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, \sigma_1\}$.

Se debe notar que los términos de las sucesiones de promedios correspondientes a σ_1 cumplen con las siguientes dos propiedades:

a) $\overline{\alpha}_{\sigma_1} = \overline{\beta}_{\sigma_1} = \overline{a}_i$

b) $|s - \alpha_{\sigma_1}| \leq \frac{n}{\sigma_1}$ y $|s - \beta_{\sigma_1}| \leq \frac{n}{\sigma_1}$.

Luego, se supondrá que se ha seleccionado el término σ_p, que las sucesiones $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_i\}_i$ han sido construidas hasta el multipaso $p \geq 1$, y que los términos de las sucesiones de promedios correspondientes a σ_j cumplen con las propiedades a) y b) para todo $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Se construirán los términos en el $(p+1)$-ésimo multipaso.

i) $\alpha_i = n$ para todo $i \in \{\sigma_p + 1, \ldots, i_1\}$ donde i_1 es el primer número natural mayor a σ_p tal que $\overline{\alpha}_{i_1} \geq t - \frac{\epsilon}{p}$. Esto implica que la sucesión de promedios de la sucesión $\{\alpha_i\}_i$ crecerá en los primeros términos del multipaso, acercándose a t.

ii) $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{i_1+1, \ldots, i_2\}$ donde i_2 es el primer número natural mayor a i_1 tal que $\overline{\alpha}_{i_2} < r$. Esto implica que la sucesión de promedios decrecerá hasta ser menor que r.

iii) $\alpha_i = n$ para todo $i \in \{i_2+1, \ldots, i_3\}$ donde i_3 es el primer número natural mayor a i_2 tal que $\overline{\alpha}_{i_3} = \overline{a}_i$. Esto implica que la sucesión de promedios crecerá hasta ser cercana a s, dado que la sucesión $\{\overline{a}_i\}_i$ converge a s. Para justificar la existencia de i_3, se observa que la función $i \to i\overline{a}_i - i\overline{\alpha}_i$ asigna a cada natural un entero múltiplo de n, y debe ser 0 para algún $i > i_2$.

iv) $\beta_i = a_i$ para todo $i \in \{\sigma_p+1, \sigma_p+2, \ldots, i_3\}$. Esto implica que $\overline{\beta}_i = \overline{a}_i$ para todo $i \in \{\sigma_p+1, \sigma_p+2, \ldots, i_3\}$.

v) $\beta_i = n$ para todo $i \in \{i_3, \ldots, i_4\}$ donde i_4 es el primer número natural mayor a i_3 tal que $\overline{\beta}_i \geq t - \frac{\epsilon}{p}$.

vi) $\beta_i = 0$ para todo $i \in \{i_4, \ldots, i_5\}$ donde i_5 es el primer número natural mayor a i_4 tal que $\overline{\beta}_i < r$.

vii) $\beta_i = n$ para todo $i \in \{i_5, \ldots, i_6\}$ donde i_6 es el primer número natural mayor a i_5 tal que $\overline{\beta}_i = \overline{a}_i$.

viii) $\beta_i = a_i$ para todo $i \in \{i_6, \ldots, \sigma_{p+1}\}$ donde σ_{p+1} es el primer número natural mayor a i_6 tal que $\sigma_p \geq \frac{n(p+1)(p+2)}{\epsilon}$ y $a_{\sigma_{p+1}+1} = n$.

ix) $\alpha_i = a_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, i_3\}$. Esto implica que $\overline{\beta}_i = \overline{a}_i$ para todo $i \in \{i_3, 2, \ldots, \sigma_{p+1}\}$.

Por último, notamos que si $i \in \{i_6, \ldots, \sigma_{p+1}\}$, entonces $\overline{\alpha}_i = \overline{\beta}_i = \overline{\sigma}_i$. Por tanto, $|s - \alpha_{\sigma_1}| \leq \frac{n}{\sigma_1}$ y $|s - \beta_{\sigma_1}| \leq \frac{n}{\sigma_1}$, con lo cual concluye el $(p+1)$-ésimo multipaso. Esto define completamente las sucesiones $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_i\}_i$.

Proposición 5.3. *Para toda $p > 1$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $|s - \overline{\alpha}_i| \leq \frac{n}{i}$ *para todo* $i \in \{\sigma_{p-1}, i_3, i_3+1, \ldots, \sigma_p\}$.

2. $|s - \overline{\beta}_i| \leq \frac{n}{i}$ *para todo* $i \in \{\sigma_{p-1}, \sigma_{p-1}+1, \ldots, i_3, i_6, i_6+1, \ldots, \sigma_p\}$.

Demostración. Para demostrar la primera propiedad, basta observar que para todo $i \in \{\sigma_{p-1}, i_3, i_3+1, \ldots, \sigma_p\}$, $\overline{\alpha}_i = \overline{\sigma}_i$ y aplicar la proposición 2.1. Análogamente, para todo $i \in \{\sigma_{p-1}, \sigma_{p-1}+1, \ldots, i_3, i_6, i_6+1, \ldots, \sigma_p\}$, $\overline{\beta}_i = \overline{\sigma}_i$, lo cual demuestra la segunda propiedad. □

Lema 5.4. *Para todo $p > 1$ se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\text{máx}\{\overline{\alpha}_i | i \in \{\sigma_{p-1}, \ldots, \sigma_p\}\} = \overline{\alpha}_{i_1} \in [t - \frac{\epsilon}{p}, t - \frac{\epsilon}{p+1})$.

2. $\text{mín}\{\overline{\alpha}_i | i \in \{\sigma_{p-1}, \ldots, \sigma_p\}\} = \overline{\alpha}_{i_2} \in [r - \frac{n}{i_2}, r)$.

3. $\text{máx}\{\overline{\beta}_i | i \in \{\sigma_{p-1}, \ldots, \sigma_p\}\} = \overline{\beta}_{i_4} \in [t - \frac{\epsilon}{p}, t - \frac{\epsilon}{p+1})$.

4. $\text{mín}\{\overline{\beta}_i | i \in \{\sigma_{p-1}, \ldots, \sigma_p\}\} = \overline{\beta}_{i_5} \in [r - \frac{n}{i_5}, r)$.

Demostración. Primero se probarán las propiedades de la sucesión $\{\overline{\alpha}_i\}_i$.

Entre σ_{p-1} e i_1 la sucesión es creciente dado que $\overline{\alpha}_{\sigma_{p-1}}$ es estrictamente menor que n y para todo $i \in \{\sigma_{p-1}+1, \ldots, i_1\}$, $\alpha_i = n$. Esto implica que $\overline{\alpha}_{i_1} \geq \overline{\alpha}_i$ para todo $i \in \{\sigma_{p-1}+1, \ldots, i_1\}$.

Entre i_1+1 e i_2 la sucesión es decreciente, pues si $i \in \{i_1+1, \ldots, i_2\}$, entonces $\alpha_i = 0$. Esto implica que $\overline{\alpha}_{i_2} \leq \overline{\alpha}_i \leq \overline{\alpha}_{i_1}$ para todo $i \in \{\sigma_{p-1}+1, \ldots, i_2\}$.

Entre i_2+1 e i_3 la sucesión es creciente, dado que $\overline{\alpha}_{\sigma_{p-1}}$ es estrictamente menor que n y para todo $i \in \{i_2+1, \ldots, i_3\}$, $\alpha_i = n$. Esto implica que $\overline{\alpha}_{i_2} \leq \overline{\alpha}_i \leq \overline{\alpha}_{i_3} \leq s + \frac{\epsilon}{i_3}$ para todo $i \in \{i_2+1, \ldots, i_3\}$.

Por la proposición pasada, $\overline{\alpha}_i \leq s + \frac{\epsilon}{i}$ para todo $i \in \{i_3+1, \ldots, \sigma_p\}$.

Para probar que la sucesión de promedios alcanza en i_1 su máximo en el p-ésimo multipaso, basta observar que $s + \frac{n}{i} < t - \frac{\epsilon}{p} < \overline{\alpha}_{i_1}$ para todo $i \in \{i_3, i_3+1, \ldots, \sigma_p\}$. Esto se debe a que $\frac{n}{i} < \frac{\epsilon}{(p-1)p} < \frac{t-s}{2}$ dado que $i > \sigma_{p-1}$, y $\frac{\epsilon}{p} < \frac{t-s}{2}$; lo cual implica que $\frac{n}{i} + \frac{\epsilon}{p} < t - s$.

Por construcción, $t - \frac{\epsilon}{p} \leq \overline{\alpha}_{i_1}$. Por otro lado,

$$\overline{\alpha}_{i_1} = \overline{\alpha}_{i_1} - \overline{\alpha}_{i_1-1} + \overline{\alpha}_{i_1-1} = \frac{1}{i_1}\sum_{i=1}^{i_1} \alpha_i - \frac{1}{i_1} i_1 \overline{\alpha}_{i_1-1} + \overline{\alpha}_{i_1-1}$$

$$= \frac{1}{i_1}[\alpha_{i_1} + (i_1 - 1)\overline{\alpha}_{i_1-1} - i_1\overline{\alpha}_{i_1-1}] + \overline{\alpha}_{i_1-1} = \frac{1}{k}[\alpha_{i_1} - \overline{\alpha}_{i_1-1}] + \overline{\alpha}_{i_1-1}$$

$$< \frac{n}{i_1} + t - \frac{\epsilon}{p} < \frac{n}{\sigma_p} + t - \frac{\epsilon}{p} \leq \frac{\epsilon}{p(p+1)} + t - \frac{\epsilon}{p}$$

$$= t - \epsilon\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p(p+1)}\right] = t - \frac{\epsilon}{p+1}.$$

Por tanto, $\overline{\alpha}_{i_1} \in [t - \frac{\epsilon}{p}, t - \frac{\epsilon}{p+1})$.

Para probar que la sucesión de promedios alcanza en i_2 su mínimo en el p-ésimo multipaso, basta probar que $r < \overline{a}_i$ para todo $i \in \{\sigma_{p-1}, i_3+1, \ldots, \sigma_p\}$; dado que en estos casos $\overline{a}_i = \overline{\alpha}_i$, y $\overline{\alpha}_{i_2} \leq \overline{\alpha}_i$ para todo $i \in \{i_1+1, \ldots, i_3\}$. Esto se debe a que $\overline{a}_i \geq s - \frac{n}{i} > s - \frac{\epsilon}{p(p+1)} > s - \frac{s-r}{2} = \frac{s+r}{2} > r$.

Por construcción, $\overline{\alpha}_{i_2} < r$. Por otro lado,

$$r - \frac{n}{i_2} \leq \overline{\alpha}_{i_2-1} - \frac{n}{i_2} = \frac{1}{i_2-1}\sum_{i=1}^{i_2-1}\alpha_i - \frac{n}{i_2}$$

$$= \frac{1}{i_2-1}\sum_{i=1}^{i_2}\alpha_i - \frac{n}{i_2} < \frac{i_2}{i_2-1}\overline{\alpha}_{i_2} - \frac{n}{i_2-1}$$

$$= \overline{\alpha}_{i_2} + \frac{1}{i_2-1}\overline{\alpha}_{i_2} - \frac{n}{i_2-1} < \overline{\alpha}_{i_2}.$$

Por tanto, $\overline{\alpha}_{i_2} \in [r - \frac{n}{i_2}, r)$.

Con esto, se termina la demostración de las propiedades de la sucesión $\{\alpha_i\}_i$. La demostración de las propiedades de la suceción $\{\beta_i\}_i$ es análoga.

□

5.2. Construcción de K

El siguiente paso consiste en construir sucesiones de familias anidadas de cubos coordenados de lado δ en $\mathbb{R}^n$ (conjuntos de la forma $\prod_{i=1}^{n}[k_i, k_i+\delta] \subset \mathbb{R}^n$ con $k_i \in \mathbb{Z}$), las cuales darán lugar a un conjunto de Cantor al ser intersectadas. Cabe mencionar que esta parte de la construcción se ha modificado de como aparece en [8], eliminando la elección arbitraria de cubos en ciertos pasos para permitir la demostración de que K es homeomorfo al conjunto ternario de Cantor.

Se define

$$\mathcal{F}_i = \begin{cases} \{\Pi_{i=1}^n [q_i, q_i+1] \subset \mathbb{R}^n \ \mid q_i \in \mathbb{Z}\} & \text{si } i = 0 \\ \{\Pi_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n \ \mid 2^i a + 1 = 2^i b \in \mathbb{Z}\} & \text{si } i \geq 1 \end{cases}.$$

Es decir, $\mathcal{F}_0$ es el conjunto de todos los cubos n-dimensionales cerrados de lado 1 tales que sus vértices tienen coordenadas enteras; y si $i > 0$, entonces $\mathcal{F}_i$ es el conjunto de los cubos resultantes de dividir cada cubo en $\mathcal{F}_{i-1}$ en 2^n cubos de lado 2^{-i}. El diámetro de cada cubo en $\mathcal{F}_i$ es $2^{-i}\sqrt{n}$.

Se comienza tomando $\mathcal{A}_0 = \{\Pi_{i=1}^n [0,1]\}$, $\mathcal{B}_0 = \{[1,2] \times \Pi_{i=2}^n [0,1]\} \subset \mathcal{F}_0$; y $K_0 = [\cup \mathcal{A}_0] \bigcup [\cup \mathcal{B}_0] \subset \mathbb{R}^n$. Se construyen las sucesiones $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0}^\infty$, $\{\mathcal{B}_i\}_{i=0}^\infty$ y $\{K_i\}_{i=0}^\infty$ de forma recursiva usando los mismos multipasos que se usaron para la construcción de las sucesiones $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ y $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$.

Para comenzar la construcción en el primer multipaso, sea $0 < i < \sigma_1$. Si $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{F}_j$, $K_j = [\cup \mathcal{A}_j] \cup [\cup \mathcal{B}_j] \subset \mathbb{R}^n$ ya han sido construidos para todo $j \leq i$, y se cumple que si $j_1 > j_2$ entonces $K_{j_2} \subset K_{j_1}$; entonces se construyen $\mathcal{A}_{i+1}$, $\mathcal{B}_{i+1} \subset \mathcal{F}_{i+1}$ de la siguiente forma:

Cada cubo en $\mathcal{A}_i$ contiene exactamente 2^n subcubos en $\mathcal{F}_{i+1}$, y puede observarse que si $i > 1$, entonces uno de estos cubos está contenido en el interior de un cubo en $\mathcal{A}_{i-1} \cup \mathcal{B}_{i-1}$. Para cada $Q \in \mathcal{A}_i$ se escogerán $2^{\alpha_{i+1}}$ elementos de la familia $\mathcal{F}_{i+1}$ tales que sean subcubos de Q, los cuales formarán $\mathcal{A}_Q \subset \mathcal{F}_{i+1}$. Si $\alpha_{i+1} = n$ entonces existe una forma de escoger (se escogen todos los subcubos) pero si $i > 1$ y $\alpha_{i+1} = 0$, se está seleccionando sólo un subcubo de Q para A_Q, por lo que puede escogerse de 2^n formas diferentes, así que se seleccionará el que está contenido en el interior de un cubo de $\mathcal{A}_{i-1} \cup \mathcal{B}_{i-1}$. Este paso, aparentemente trivial, implica que se ha seleccionado un subcubo aislado del resto, lo cual ayudará a demostrar que el producto final tiene dimensión topológica 0. Se define $\mathcal{A}_{i+1} = \bigcup_{Q \in \mathcal{A}_i} \mathcal{A}_Q$. La cardinalidad de $\mathcal{A}_{i+1}$ es $2^{\alpha_{i+1}}$ veces la cardinalidad de $\mathcal{A}_i$.

Análogamente, para cada $Q \in \mathcal{B}_i$, sea $\mathcal{B}_Q \subset \mathcal{F}_{i+1}$ con cardinalidad $2^{\beta_{i+1}}$, tal que $\tilde{Q} \subset Q$ para todo $\tilde{Q} \in \mathcal{B}_Q$. Se define $\mathcal{B}_{i+1} = \bigcup_{Q \in \mathcal{B}_i} \mathcal{B}_Q$. La cardinalidad de $\mathcal{B}_{i+1}$ es $2^{\beta_{i+1}}$ veces la cardinalidad de $\mathcal{B}_i$.

Finalmente, $K_{i+1} = [\cup \mathcal{A}_{i+1}] \bigcup [\cup \mathcal{B}_{i+1}]$. $K_{i+1} \subset K_i$ por construcción. Este procedimiento define $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$ y K_i para todo $i \in \{0, 1, \ldots, \sigma_1\}$. Una observación relevante es que la cardinalidad de $\mathcal{A}_i$ es $2^{i\overline{\alpha}_i}$ y la cardinalidad de $\mathcal{B}_i$ es $2^{i\overline{\beta}_i}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, \sigma_1\}$.

Se supone que $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$ y K_i han sido definidos para todo $i \in \{1, 2, \ldots, \sigma_p\}$ y que $\#\mathcal{A}_{\sigma_q} = 2^{\sigma_q \overline{\alpha}_{\sigma_q}} = 2^{\sigma_q \overline{\beta}_{\sigma_q}} = \#\mathcal{B}_{\sigma_q}$ para todo $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Para definir las familias de cubos en el multipaso $p+1$, se considera que cada cubo en $\mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p}$ tiene 2^n subcubos en $\mathcal{F}_{\sigma_p+1}$, por lo que la mitad serán seleccionados para $\mathcal{A}_{\sigma_p+1}$, y la otra mitad para $\mathcal{B}_{\sigma_p+1}$. Se observa que la cardinalidad de $\mathcal{A}_{\sigma_p+1}$ será 2^{n-1} veces la cardinalidad de $\mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p}$. Análogamente,

$\#\mathcal{B}_{\sigma_p+1} = 2^{n-1}\#(\mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p})$.

Se concluye que $\#(\mathcal{A}_{\sigma_p+1}) = 2^{n-1}\#(\mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p}) = 2^{\alpha_{\sigma_p+1}-1}[2^{\sigma_p\overline{\alpha}_{\sigma_p}} + 2^{\sigma_p\overline{\beta}_{\sigma_p}}]$ $= 2^{\alpha_{\sigma_p+1}-1}2^{\sigma_p\overline{\alpha}_{\sigma_p}+1} = 2^{\alpha_{\sigma_p+1}}2^{\sigma_p\overline{\alpha}_{\sigma_p}} = 2^{(\sigma_p+1)\overline{\alpha}_{\sigma_p+1}} = 2^{(\sigma_p+1)\overline{\beta}_{\sigma_p+1}}$.

Análogamente, $\#(\mathcal{B}_{\sigma_p+1}) = 2^{(\sigma_p+1)\overline{\alpha}_{\sigma_p+1}} = 2^{(\sigma_p+1)\overline{\beta}_{\sigma_p+1}}$.

Para cada $i \in \{\sigma_p+2, \ldots, \sigma_{p+1}\}$ se supone que $\mathcal{A}_j$ y $\mathcal{B}_j$ han sido construidos para todo $j < i$ y que cumplen que $\#\mathcal{A}_j = 2^{j\overline{\alpha}_j}$ y $\#\mathcal{B}_j = 2^{j\overline{\beta}_j}$. Cada cubo en $\mathcal{A}_{i-1}$ tiene 2^n subcubos en $\mathcal{F}_i$. Para cada $Q \in \mathcal{A}_i$ se escogerán $2^{\alpha_{i+1}}$ elementos de la familia $\mathcal{F}_{i+1}$ tales que sean subcubos de Q, los cuales formarán $\mathcal{A}_Q \subset \mathcal{F}_{i+1}$. Si $\alpha_{i+1} = n$ entonces existe una forma de escoger (se escogen todos los subcubos) pero si $\alpha_{i+1} = 0$, se está seleccionando sólo un subcubo de Q para A_Q, por lo que puede escogerse de 2^n formas diferentes, así que se seleccionará el que está contenido en el interior de un cubo de $\mathcal{A}_{i-1} \cup \mathcal{B}_{i-1}$. Este paso, aparentemente trivial, implica que se ha seleccionado un subcubo aislado del resto, lo cual ayudará a demostrar que el producto final tiene dimensión topológica 0. Se define $\mathcal{A}_{i+1} = \bigcup_{Q\in\mathcal{A}_i} \mathcal{A}_Q$. La cardinalidad de $\mathcal{A}_{i+1}$ es $2^{\alpha_{i+1}}$ veces la cardinalidad de $\mathcal{A}_i$.

Análogamente, por cada cubo en $\mathcal{B}_{i-1}$ se seleccionarán 2^{β_i} para $\mathcal{B}_i$. Dada esta elección, se observa que $\#\mathcal{A}_i = 2^{i\overline{\alpha}_i}$ y $\#\mathcal{B}_i = 2^{i\overline{\beta}_i}$. Se define $K_i = \mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i$, con lo que se concluye la construcción de las familias de cubos en el multipaso $p+1$.

Se define $K = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$. La última parte de la demostración consiste en probar que $\dim_H(U) = r$, $\underline{\dim}_B(U) = s$ y $\overline{\dim}_B(U) = t$ para todo $U \subset K$ abierto.

5.3. Propiedades de dimensión de K

La siguiente parte de la demostración consiste en probar que $\dim_H(U) = r$, $\underline{\dim}_B(U) = s$, y $\overline{\dim}_B(U) = t$ para todo $U \subset K$ abierto.

5.3.1. Dimensión de conteo de cajas

Proposición 5.5. *$\underline{\dim}_B(K) = s$ y $\overline{\dim}_B(K) = t$.*

Demostración. Para el cálculo de dimensiones de conteo de caja se usará $N_\delta(K)$ como el número de cubos coordenados de lado δ que intersectan a K. $N_{2^{-i}}(K) =$

$\#\{Q \in \mathcal{F}_i | Q \cap K \neq \varnothing\} = \#(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i)$.

Sea $\gamma_i = \text{máx}\{\overline{\alpha_i}, \overline{\beta_i}\}$.

Por construcción, $2^{\gamma_i} \leq N_{2^{-i}}(K) \leq \; 2^{\gamma_i+1}$. Tomando logaritmos,

$$\text{máx}\{\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i\} \leq \frac{\log(N_{2^{-i}}(K))}{-\log(2^{-i})} \leq \frac{\log(2)}{-\log(2^{-i})} + \text{máx}\{\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i\}.$$

Pero $\text{máx}\{\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i | i \in \{\sigma_{p-1}, \ldots, \sigma_p\}\} \in [t - \frac{\epsilon}{p}, t - \frac{\epsilon}{p+1})$, y

$\text{mín}\{\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i | i \in \{\sigma_{p-1}, \ldots, \sigma_p\}\} \in [r - \frac{n}{i_5}, r)$.

Por tanto,

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{\log(N_{2^{-i}}(K))}{-\log(2^{-i})} = t$$

y

$$\liminf_{i\to\infty} \frac{\log(N_{2^{-i}}(K))}{-\log(2^{-i})} = s.$$

□

Proposición 5.6. *Sea $U \subset K$. Si U es abierto y no vacío, entonces $\underline{\dim}_B(U) = s$ y $\overline{\dim}_B(U) = t$.*

Demostración. Si $U = K$, entonces la afirmación es cierta por la proposición anterior. Si $U \neq K$, como U es un abierto y no vacío de K, existe un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $U = K \cap V$. Para algún $p \in \mathbb{N}$, existe $Q \in \mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p}$ tal que $Q \subset V$.

Sea $i > \sigma_p$. Es posible estimar inferiormente $N_{2^{-i}}(Q \cap K)$ usando los cubos en $\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i$ que son subcubos de Q.

Como cada cubo en $\mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p}$ contiene el mismo número de subcubos en $\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i$ y $\#\mathcal{A}_{\sigma_p} = \#\mathcal{B}_{\sigma_p}$,

$$N_{2^{-i}}(Q \cap K) \geq \frac{\#(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i)}{\#(\mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p})} = \frac{2^{i\overline{\alpha}_i} + 2^{i\overline{\beta}_i}}{2^{\sigma_p\overline{\alpha}_{\sigma_p}} + 2^{\sigma_p\overline{\beta}_{\sigma_p}}} \geq \frac{2^{i\overline{\gamma}_i}}{2^{\sigma_p\overline{\alpha}_{\sigma_p}} + 2^{\sigma_p\overline{\beta}_{\sigma_p}}}.$$

Tomando logaritmos,

$$\frac{log(N_{2^{-i}}(Q \cap K))}{-log(2^{-i})} \geq \frac{log(2^{i\overline{\gamma}_i}) - log(2^{\sigma_p\overline{\alpha}_{\sigma_p}} + 2^{\sigma_p\overline{\beta}_{\sigma_p}})}{-log(2^{-i})}.$$

Luego,

$$\frac{log(N_{2^{-i}}(Q \cap K))}{-log(2^{-i})} \geq \overline{\gamma}_i - \frac{log(2^{\sigma_p\overline{\alpha}_{\sigma_p}} + 2^{\sigma_p\overline{\beta}_{\sigma_p}})}{-log(2^{-i})}$$

para todo $i > \sigma_p$. Tomando límites cuando $p \to \infty$, se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{log(N_{2^{-i}}(Q \cap K))}{-log(2^{-i})} \geq \limsup_{i\to\infty} \overline{\gamma}_i = t,$$

y

$$\liminf_{i\to\infty} \frac{log(N_{2^{-i}}(Q \cap K))}{-log(2^{-i})} \geq \liminf_{i\to\infty} \overline{\gamma}_i = s.$$

Por tanto,

$$\overline{\dim}_B(Q \cap K) \geq t \quad \text{y} \quad \underline{\dim}_B(Q \cap K) \geq s.$$

Por monotonía de las dimensiones de caja,

$$t \leq \overline{\dim}_B(Q \cap K) \leq \overline{\dim}_B(U) \leq \overline{\dim}_B(K) = t$$

y

$$s \leq \underline{\dim}_B(Q \cap K) \leq \underline{\dim}_B(U) \leq \underline{\dim}_B(K) = s.$$

En conclusión, $\overline{\dim}_B(U) = t$ y $\underline{\dim}_B(U) = s$. □

5.3.2. Dimensión de Hausdorff

Proposición 5.7. $\dim_H(K) = r$.

Demostración. En esta prueba se determinará la dimensión de Hausdorff de K usando cubiertas finitas $\{Q_i\} \subset \cup_{i\in\mathbb{N}}[\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i]$. Primero se demostrará que $dim_H(K) \geq r$.

Sea $\mathcal{Q}_{(p,q)} = \{\{Q_i\}_i$ cubierta finita de $K \mid Q_i \in \mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j$ *para alguna* $\sigma_p \leq j < \sigma_q\}$ para cada $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $p < q$. Debe notarse que $\mathcal{Q}_{(p,q)}$ es siempre una familia finita de cubiertas finitas, por lo que existe una cubierta $\{Q_1, Q_2, ..., Q_l\} = \mathcal{U}_{(p,q)} \in \mathcal{Q}_{(p,q)}$ que minimiza la suma de Carathéodory respecto a r, $\sum_{i=1}^{l}(\text{diám}(Q_i))^r$. Sea $Q^* \in \mathcal{U}_{(p,q)}$ de diámetro máximo en la cubierta, el cual cumple que $Q^* \in \mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j$ para alguna $\sigma_p \leq j < \sigma_q$. Sin pérdida de generalidad $Q^* \in \mathcal{A}_j$.

La herramienta fundamental de esta parte de la demostración consiste en inducir una estructura de árbol a los cubos en $\bigcup_{i=j}^{\sigma_q}[\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i]$ que son subcubos de un cubo $Q \in \mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j$. Se considerará a los subcubos de Q en $\bigcup_{\mu=j}^{\sigma_q}[\mathcal{A}_\mu \cup \mathcal{B}_\mu]$ como vértices que son adyacentes si y sólo si uno es subcubo del otro y la longitud de los lados de uno es la mitad de la longitud de los del otro, es decir, que $J, I \in \bigcup_{\mu=j}^{\sigma_q} \mathcal{A}_\mu \cup \mathcal{B}_\mu$ son adyacentes si $J \subset I$; y si $I \in \mathcal{A}_\mu \cup \mathcal{B}_\mu$, entonces $J \in \mathcal{A}_{\mu+1} \cup \mathcal{B}_{\mu+1}$. Se define $\mathcal{T}(Q)$ como el árbol asociado a Q, y se observa que $\mathcal{T}(Q)$ tiene hojas en Q, la cual será llamada hoja inicial, y en los subcubos de Q que están en $\mathcal{A}_{\sigma_q} \cup \mathcal{B}_{\sigma_q}$, las cuales serán llamadas hojas finales.

Se define para cada cubo $Q \in \mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j$, la familia $\Theta(Q)$ como la familia de cubos en $\mathcal{U}_{(p,q)}$ tales que son subcubos de Q. Debe notarse que para cada $Q \in \mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j$, la familia $\Theta(Q)$ es una cubierta cerrada finita de $\big(\cup[\mathcal{A}_{\sigma_q} \cup \mathcal{B}_{\sigma_q}]\big) \cap Q$ (las hojas finales de $\mathcal{T}(Q)$, pues todo punto en este conjunto está en un cubo de $\mathcal{A}_{\sigma_q} \cup \mathcal{B}_{\sigma_q}$, debe ser subcubo $I \in \mathcal{U}_{(p,q)}$ que a su vez debe ser subcubo de un único cubo de $\mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j$ que debe ser Q, por lo que $I \in \Theta(Q)$). Esto implica también que $\Theta(Q)$ es una cubierta de $Q \cap K$.

Debe observarse que si las hojas iniciales de $\mathcal{T}(Q_1)$ y $\mathcal{T}(Q_2)$ se encuentran en $\mathcal{A}_j$, tienen el mismo número de subcubos en $\mathcal{A}_{j+1}$ y en $\mathcal{B}_{j+1}$, lo cual permite construir una biyección ϕ_1 entre ellos, de forma que a cada subcubo de Q_1 en $\mathcal{A}_{j+1}$ le corresponde un subcubo de Q_2 en $\mathcal{A}_{j+1}$, y a cada subcubo de Q_1 en $\mathcal{B}_{j+1}$, le corresponde un subcubo de Q_2 en $\mathcal{B}_{j+1}$. De la misma forma, se puede construir una biyección ϕ_2 entre los subcubos de Q_1 y Q_2 en $\mathcal{A}_{j+2} \cup \mathcal{B}_{j+2}$ tal que a cada subcubo de cada cubo $I \subset Q_1$ en $\mathcal{A}_{j+2}$ le corresponde un subcubo de Q_2 en $\mathcal{A}_{j+2}$ y si $I \subset J \in [\mathcal{A}_{j+1} \cup \mathcal{B}_{j+1}]$, entonces $\phi_2(I) \subset \phi_1(J) \in [\mathcal{A}_{j+1} \cup \mathcal{B}_{j+1}]$; y se cumple la condición análoga para subcubos de Q_1 en $\mathcal{B}_{j+2}$. Al repetir este procedimiento hasta σ_q, se obtiene un isomorfismo (en el sentido de teoría de gráficas) entre $\mathcal{T}(Q_1)$ y $\mathcal{T}(Q_2)$.

Haciendo uso del isomorfismo entre los árboles asociados a cada cubo, se mostrará que si $Q^*, Q^{**} \in \mathcal{A}_j$, entonces

$$\sum_{I_i \in \Theta(Q^{**})} \text{diám}(I_i)^r = \sum_{J_i \in \Theta(Q^*)} \text{diám}(J_i)^r.$$

Si se supone que este hecho es falso, entonces existirían $Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}_j$ tales que:

$$\sum_{I_i \in \Theta(Q_1)} (\text{diám}(I_i))^r < \sum_{J_i \in \Theta(Q_2)} \text{diám}(J_i)^r.$$

Sea $\phi : \mathcal{T}(Q_1) \to \mathcal{T}(Q_2)$ el isomorfismo ya descrito. Debe observarse que la familia $\Phi = \{\phi(I_i) : I_i \in \Theta(Q_1)\}$ es un subconjunto de los vértices de $\mathcal{T}(Q_2)$ que cumple:

1. $\sum\limits_{I_i \in \Theta(Q_1)} \text{diám}(I_i)^r = \sum\limits_{J_i \in \Phi} \text{diám}(J_i)^r < \sum\limits_{J_i \in \Theta(Q_2)} \text{diám}(J_i)^r$ debido a que la imagen bajo ϕ de cualquier cubo es otro cubo con el mismo diámetro.

2. Φ es una cubierta cerrada y finita de las hojas finales de $\mathcal{T}(Q_2)$, puesto que toda hoja final D de $\mathcal{T}(Q_2)$ cumple que $D = \phi(C)$ para algún C hoja final de $\mathcal{T}(Q_1)$, por lo que existe $I \in \Theta(Q_1)$ tal que $C \subset I$, por lo que $D \subset \phi(I) \in \Phi$.

3. $\mathcal{V} = [\mathcal{U}_{(p,q)} \setminus \Theta(Q_2)] \cup \Phi \in \mathcal{Q}_{(p,q)}$, es decir, que $\mathcal{V}$ es una cubierta de K formada por una cantidad finita de cubos en $\bigcup\limits_{\mu=\sigma_p}^{\sigma_q} [\mathcal{A}_\mu \cup \mathcal{B}_\mu]$.

Las observaciones pasadas implican que

$$\sum_{I_i \in \mathcal{U}_{(p,q)}} \text{diám}(I_i)^r = \sum_{I_i \in \mathcal{U}_{(p,q)} \setminus \Theta(Q_2)} \text{diám}(I_i)^r + \sum_{I_i \in \Theta(Q_2)} \text{diám}(I_i)^r$$

$$> \sum_{I_i \in \mathcal{U}_{(p,q)} \setminus \Theta(Q_2)} \text{diám}(I_i)^r + \sum_{I_i \in \Phi} \text{diám}(I_i)^r = \sum_{I_i \in \mathcal{V}} \text{diám}(I_i)^r.$$

Dado que $\mathcal{U}_{(p,q)}$ minimiza la suma de Carateheódory respecto a r, el resultado obtenido es una contradicción, por lo que se concluye que si $Q^*, Q^{**} \in \mathcal{A}_j$, entonces

$$\sum_{I_i \in \Theta(Q^{**})} \text{diám}(I_i)^r = \sum_{J_i \in \Theta(Q^*)} \text{diám}(J_i)^r.$$

Haciendo uso de este hecho,

$$\sum_{Q \in \mathcal{U}_{(p,q)}} \text{diám}(Q)^r \geq \sum_{Q \in \mathcal{A}_j} \sum_{Q_i \in \Theta(Q)} \text{diám}(Q_i)^r$$

$$= \sum_{Q \in \mathcal{A}_j} \text{diám}(Q^*)^r = 2^{j\overline{\alpha}_j}(2^{-j}\sqrt{n})^r = 2^{j\overline{\alpha}} 2^{-jr} n^{r/2} \geq 2^{j\overline{\alpha}} 2^{-jr}.$$

Pero sabemos que $\alpha_j \geq \ r - \frac{n}{j}$, por lo que se obtiene la desigualdad:

$$\sum_{Q \in \mathcal{U}_{(p,q)}} \text{diám}(Q)^r \geq 2^{j\overline{\alpha}} 2^{-jr} \geq 2^{j(r - \frac{n}{j})} 2^{-jr} = 2^{-n}.$$

Dado que $\mathcal{U}_{(p,q)}$ minimiza la suma de Carathéodory en $\mathcal{Q}_{(p,q)}$, esta cota es válida para todas las cubiertas en $\mathcal{Q}_{(p,q)}$ y, dado que esta cota no depende de la elección de p y q, al hacer que $q \to \infty$ y luego $p \to \infty$, se concluye que $\mathcal{H}^r(K) \geq 2^{-n}$. Se concluye que $\dim_H \geq r$. Si $Q^* \in \mathcal{B}_j$, el argumento es análogo.

Para probar que $\dim_H \leq r$, se considera una cubierta $\mathcal{U}$ una cubierta de K tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}_{i_2} \cup \mathcal{B}_{i_5}$ con i_2, i_5 como en el multipaso $p+1$ para alguna $p \in \mathbb{N}$. Debe observarse que $\#\mathcal{A}_{i_2} = 2^{i_2 \alpha_{i_2}} < 2^{ri_2}$ y $\#\mathcal{B}_{i_5} = 2^{i_5 \beta_{i_5}} < 2^{ri_5}$, por lo que se obtiene la desigualdad:

$$\sum_{Q \in \mathcal{U}} \text{diám}(Q)^r < 2^{ri_2}(\sqrt{n}2^{-i_2})^r + 2^{ri_5}(\sqrt{n}2^{-i_5})^r = 2n^{\frac{r}{2}}.$$

Observando que esta cota no depende de la elección de p, obtenemos que para toda $\delta > 0$, existe una δ-cubierta $\mathcal{U}$ de K tal que $\sum_{Q \in \Theta} \text{diám}(Q)^r < 2n^{\frac{r}{2}}$; por lo que $\mathcal{H}^r_\delta(K) < 2n^{\frac{r}{2}}$ y tomando el límite cuando $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^r(K) \leq 2n^{\frac{r}{2}}$. Se concluye que $\dim_H(K) \leq r$. □

Proposición 5.8. *Para todo $U \subset K$ abierto no vacío tal que $U \neq K$,*

$\dim_H(U) = r.$

Demostración. Como U es un abierto no vacío de K, existe un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $U = K \cap V$. Para algún $p \in \mathbb{N}$, existe $Q_1 \in \mathcal{A}_{m_p} \cup \mathcal{B}_{m_p}$ tal que $Q_1 \subset V$.

Todo cubo en $\mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p}$ tiene el mismo futuro, en el sentido de que contienen la misma cantidad de subcubos en las familias $\mathcal{F}_i$ siguientes.

Por tanto, $\dim_H(Q_1 \cap K) = \dim_H(Q_2 \cap K)$ para todo $Q_2 \in \mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p}$.

Esto implica que:

$$\dim_H(K) = \dim_H(\bigcup\{Q \cap K | Q \in \mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p}\})$$
$$\leq \text{máx}\{\dim_H(Q \cap K) | Q \in \mathcal{A}_{\sigma_p} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p}\} = \dim_H(Q_1 \cap K) \leq \dim_H(V \cap K)$$
$$\leq \dim_H(K).$$

Por tanto, $\dim_H(K) = \dim_H(V \cap K) = \dim_H(U) = r$.

□

5.4. Homeomorfismo entre K y el conjunto ternario de Cantor

Por último, se debe probar que el conjunto K es homeomorfo al conjunto de Cantor ternario, para lo cual basta probar que es compacto, de dimensión topológica 0 y sin puntos aislados.

Proposición 5.9. *K es compacto.*

Demostración. K que es intersección de conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$, por lo que es cerrado y acotado. $\square$

Proposición 5.10. *K es localmente compacto.*

Demostración. Sea $x \in K$ y $U \subset K$ un conjunto abierto tal que $x \in U$. El conjunto U es igual a la intersección de K con un conjunto V abierto en $\mathbb{R}^n$ y, por construcción, para alguna $j \in \mathbb{N}$ existe $Q \in \mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j$ tal que $x \in Q \subset V$. $Q \cap K$ es cerrado en K y Q es compacto, por lo que $Q \cap K$ es compacto y $x \in Q \cap K \subset V \cap K = U$. Se concluye que K es localmente compacto. $\square$

Proposición 5.11. *K es totalmente disconexo.*

Demostración. Sean $x, y \in K$. Sea p el mínimo natural tal que existe un n-cubo $Q \in \mathcal{A}_{\sigma_p+1} \cup \mathcal{B}_{\sigma_p+1}$ tal que $x \in Q$ y $y \notin Q$.

Sin pérdida de generalidad, $Q \in \mathcal{A}_{\sigma_p+1}$. Por construcción de la sucesión $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, existe $j \in \{\sigma_p + 1, \ldots, \sigma_{p+1}\}$ tal que $\alpha_j = \alpha_{j+1} = 0$. Sean $Q_1 \in \mathcal{A}_j$ y $Q_2 \in \mathcal{A}_{j+1}$ tales que $x \in Q_2 \subset Q_1 \subset Q$. Para demostrar que K es totalmente disconexo, basta mostrar que $Q_2 \cap K$ es abierto en K, pues esto implicaría que x está en una componente conexa de K diferente de y.

Sea $Q^* \in \mathcal{A}_{j-1}$ tal que $Q_1 \subset Q^*$. Por construcción, Q_2 está contenido en el interior de Q^*. Se observa que el conjunto

$$\mathcal{N}(Q_2, 2^{-(j+2)}) = \{z \in \mathbb{R}^n : d(z, Q_2) < 2^{-(j+2)}\}$$

es abierto en $\mathbb{R}^n$ y está contenido en el interior de Q^*; por lo que basta probar que $\mathcal{N}(Q_2, 2^{-(j+2)}) \cap K \subset Q_2 \cap K$ (pues es claro que $Q_2 \cap K \subset \mathcal{N}(Q_2, 2^{-(j+2)}) \cap K$).

Si $z \in \mathcal{N}(Q_2, 2^{-(j+2)}) \cap K$ entonces $z \in Q^* \cap K$, lo cual implica que z está en algún subcubo de Q^* en $\mathcal{A}_j$, pero en el j-ésimo paso de construcción se eligió sólo un subcubo de Q^* para $\mathcal{A}_j$, y fue Q_1, por lo que $z \in Q_1 \cap K$. Repitiendo este razonamiento, se obtiene que $z \in Q_2 \cap K$; lo cual implica que $\mathcal{N}(Q_2, 2^{-(j+2)}) \cap K = Q_2 \cap K$, concluyendo la demostración.

$\square$

Corolario 5.12. *K tiene dimensión topológica 0.*

Demostración. Dado que K es totalmente disconexo y compacto, su dimensión topológica es 0. $\square$

Proposición 5.13. *K no tiene puntos aislados.*

Demostración. Sean $x \in K$, y $\epsilon > 0$. Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que existe $Q \in \mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i$ tal que $x \in Q \subset B_\epsilon(x)$. Por construcción de K, existe $j > i$ tal que existen $Q_1, \ldots, Q_{2^n} \in \mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j$ subcubos diferentes de Q. Dado que $K \cap Q_l \neq \varnothing$ para toda l, se obtienen dos casos:

i) Si $x \notin Q_l$ para alguna l, entonces existe $y \in K \cap Q_l \subset B_\epsilon(x)$ tal que $y \neq x$, por lo que x no es un punto aislado de K.

ii) Si $x \in \bigcap_{l=1}^{2^n} Q_l$, entonces $x \in Fr(Q_1)$. Por contrucción, existe $k > i$ tal que $P_1, \ldots, P_{2^n} \in \mathcal{A}_k \cup \mathcal{B}_k$ subcubos diferentes de Q_1; y existe $l \in \{1, .., 2^n\}$ tal que $x \notin P_l$ (pues si x estuviera en P_l para todo l, x estaría en el interior de Q_1 y no en su frontera). Dado que $P_l \cap K \neq \varnothing$, existe $y \in P_l \cap K \subset B_\epsilon(x)$ tal que $x \neq y$. Se concluye que x no es punto aislado de K.

Por lo que se concluye que K no tiene puntos aislados.

$\square$

Corolario 5.14. *Dados $r, s, t \in (0, n]$, $r < s < t$ existe un conjunto de Cantor $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que para todo U abierto y no vacío en K,*

$$\dim_H(U) = r,\ \underline{\dim}_B(U) = s,\ y\ \overline{\dim}_B(U) = t.$$

Con esto, se concluye la demostración del teorema. Dado que los subconjuntos abiertos de K tienen las mismas dimensiones de Hausdorff y caja que K, se obtiene también como un corolario que es posible encontrar un conjunto de Cantor con dimensión de Hausdorff, dimensión inferior de conteo de cajas y dimensión de empaque arbitrarias, salvo por la desigualdad: $\dim_H \leq \underline{\dim}_B \leq \dim_P$.

Corolario 5.15. *Dados $r, s, t \in (0, n]$, $r < s < t$ existe un conjunto de Cantor $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\dim_H(K) = r,\ \underline{\dim}_B(K) = s,\ y\ \overline{\dim}_B(K) = \dim_P(K) = t.$$

A pesar de que este resultado es fuerte ya, no permite separar la dimensión superior de conteo de cajas de la dimensión de empaque.

5.5. Comentarios finales

En esta sección se mencionan un par resultados que otorgan otras respuestas parciales al problema de la construcción de conjuntos con dimensiones arbitrarias y son previos al teorema de Nilsson-Wingren. Debe notarse que los dos teoremas presentados en este capítulo no son casos particulares del teorema de Nilsson-Wingren, puesto que en general no establecen propiedades de dimensión de los subconjuntos abiertos del objeto construido, lo cual permite que la dimensión superior de conteo de cajas y la dimensión de empaque sean diferentes en la construcción dada por el teorema de Spear.

Ambas construcciones se centran en los conjuntos de Cantor, y las demostraciones son parecidas a la de Nilsson-Wingren, debido a que construyen sucesiones numéricas que permiten construir familias de compactos anidados que dan origen a los conjuntos buscados.

5.5.1. Construcción de Pesin-Weiss

En el artículo "On the Dimension of Deterministic and Random Cantor-like Sets, Symbolic Dynamics, and the Eckmann-Ruelle Conjecture", publicado por Pesin y Weiss , [10], se presenta la construcción geométrica de un conjunto de Cantor F tal que $\dim_H(F)$, $\underline{\dim}_B(F)$ y $\overline{\dim}_B(F)$ no son iguales, y son arbitrarias, salvo por una cota inferior para la dimensión de Hausdorff. La demostración de las propiedades de dimensión de los conjuntos generados por este método involucra el uso de herramientas de dinámica simbólica.

Teorema 5.16. *Dados $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \frac{1}{3}$, $\gamma \in \left(1, \frac{\log(\lambda_1)}{\log(\lambda_1)}\right)$, existe un conjunto de Cantor $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\dim_H(F) = \tfrac{\log(2)}{-\log(\lambda_1)},\ \underline{\dim}_B(F) = \gamma\tfrac{\log(2)}{\log(\lambda_1)},\ \overline{\dim}_B(F) = \tfrac{\log(2)}{-\log(\lambda_2)}.$$

5.5.2. Teorema de Spear

El teorema de Spear publicado en [12] es parecido al teorema de Nilsson-Wingren, con algunas ventajas y desventajas. El resultado de Spear sólo permite construir subconjuntos de $\mathbb{R}$, por lo que todas sus dimensiones están acotadas superiormente por 1, y no incluye propiedades de dimensión de los subconjuntos abiertos del conjunto de Cantor construido. Sin embargo, esto permite separar la dimensión superior de conteo de cajas de la dimensión de empaque, lo cual no es posible usando la construcción del capítulo pasado.

Teorema 5.17 (Spear). *Dados* $0 < s < u < v < 1$ *y* $s < t < v$*, existe un conjunto de Cantor* $Y \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$ *tal que:*

$$\dim_H(Y) = r,\ \dim_P(Y) = t,\ \underline{\dim}_B(Y) = u,\ y\ \overline{\dim}_B(Y) = v.$$

Bibliografía

[1] Bartle, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*, J. Wiley. New York, 1995.

[2] Besicovitch, A.S. *On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure*, Indagationes Mathematicae, 14, 339-44, 1952.

[3] Edgar, G. *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer Verlag, New York, 2008.

[4] Edgar, G. *Probability, Measure and Fractal Geometry*, Springer Verlag, New York, 1997.

[5] Falconer, K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester, 2003.

[6] Falconer, K. J. *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[7] Nadler, S. B. *Dimension theory: an introduction with exercises*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2002.

[8] Nilsson, A. and Wingren, P. *Homogeneity and non-coincidence of Hausdorff and box dimensions for subsets of* $\mathbb{R}^n$, Studia Math. 181, 285-296, 2007.

[9] Marstrand, J.M. *The dimension of Cartesian product sets*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 50, 198-202, 1954.

[10] Pesin, Y. and Weiss, H. *On the dimension of deterministic and random Cantor-like sets, symbolic dynamics, and the Eckmann–Ruelle conjecture*, Comm. Math. Phys. 182, 105–153, 1996.

[11] Rogers, C. A. *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[12] Spear, D. W. *Sets with different dimensions in [0, 1]*, Real Anal. Exchange 24, 373–389, 1998/1999.

[13] Van Mill, J. *Infinite dimensional topology : Prerequisites and introduction*, North Holand, Amsterdam, 1989.