



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ECUACIONES LOTKA-VOLTERRA-KOLMOGOROV
Y SISTEMAS DINÁMICOS

EXAMEN DE GRADO
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
GENARO DE LA VEGA RIVERA

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO SÁNCHEZ, IMATE-CU, UNAM.

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. LUIS OCTAVIO SILVA PEREYRA, IIMAS, UNAM.
DR. RICARDO STRAUZ SANTIAGO, IMATE-CU, UNAM.

MÉXICO, D. F. ABRIL DE 2016.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Resumen	III
I Sistemas May-Leonard (ML) y su generalización a cualquier número de especies	1
1. Análisis de los sistemas May-Leonard	3
1.1. Generalidades del sistema dinámico de May-Leonard	4
1.2. Constante de movimiento para el sistema May-Leonard en \mathbb{R}^3	6
1.3. Los sistemas de May-Leonard en \mathbb{R}^3 : El análisis exhaustivo de los casos	8
1.3.1. Análisis de los puntos críticos	8
2. Campos vectoriales con polígonos invariantes	13
2.1. Construcción de campos vectoriales polinomiales con polígonos convexos invariantes en \mathbb{R}^2	13
2.2. Campos de grado 2 con polígonos invariantes	17
2.2.1. Campos de grado 2 que preservan el triángulo	17
2.2.2. Campos de grado 2 que preservan polígonos de más de tres lados	19
3. El polígono de n lados encajado en \mathbb{R}^n	21
3.1. Ejemplos de polígonos inmersos en \mathbb{R}_+^n para $n = 3, 4$ y 5	21
3.2. Los vértices y sus ecuaciones	22
3.3. La configuración de los coeficientes y sus cámaras centrales	26
4. Campos vectoriales LVK en \mathbb{R}_+^n con polígono portador	29
4.1. Construcción para dimensiones 2 y 3	29
4.1.1. El segmento en \mathbb{R}^2	29
4.1.2. El triángulo en \mathbb{R}^3	31
4.2. El cuadrado en \mathbb{R}^4	33
4.2.1. Perturbación LVK del cuadrado para generar un centro	34
4.2.1.1. Constante de movimiento para el cuadrado con un centro	35
4.2.2. Perturbación LVK del cuadrado para generar un foco	36
4.3. El pentágono en \mathbb{R}^5	38
4.3.1. Perturbación LVK del pentágono para generar un centro	39
4.3.1.1. Constante de movimiento para el pentágono con un centro	40
4.3.2. Perturbación LVK del pentágono para generar un foco	41
4.4. Construcción del campo base en \mathbb{R}_+^n	43
5. Perturbaciones LV	45
5.1. Sistemas LV con n -ágono plano invariante en \mathbb{R}_+^n	45
5.2. Perturbación al sistema en \mathbb{R}^4 con campos LV	46
5.3. Centros generados dentro del simplejo portador	47
5.4. Perturbación a los sistemas en \mathbb{R}^5 y \mathbb{R}^6	49
5.5. Existencia de polígonos curvilíneos invariantes	50

II	Sistemas Lotka-Volterra de Competencia	53
6.	Clasificación de los sistemas LVC	55
6.1.	Clasificación de los sistemas LVC(3) según [13]	56
6.2.	Clases de equivalencia para los sistemas LVC en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	57
6.2.1.	Matriz de vértices para el caso bidimensional	57
6.2.2.	Matriz de vértices para el caso tridimensional	58
6.3.	Matrices de vértices para el caso LVC(4) y su clasificación	60
6.3.1.	Casos de la matriz de vértices para los sistemas LVC(4)	61
A.	Códigos para encontrar las matrices de vértices en los sistemas LVC(3) y LVC(4)	67
A.1.	Código para encontrar las matrices de vértices LVC(3)	67
A.2.	Código para encontrar las matrices de vértices LVC(4)	68
B.	Matrices de vértices para los sistemas competitivos de cuatro especies	71
	Bibliografía	81

Sistemas Lotka-Volterra-Kolmogorov y sistemas dinámicos

Tesis Doctoral

Resumen

Genaro de la Vega Rivera

Instituto de Matemáticas

Universidad Nacional Autónoma de México

El tema de investigación de esta tesis doctoral fue el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales tipo Lotka-Volterra-Kolmogorov que tienen variedades invariantes. Se estudiaron de dos tipos: variedades algebraicas (en particular cuádricas) o polígonos convexos portadores de la dinámica del sistema. Estos ejemplos pueden representar dinámicas interesantes de sistemas ecológicos de varias especies en competencia, además de su interés como sistemas dinámicos abstractos.

Se logró generalizar de forma abstracta la dinámica de poblaciones con presencia cíclica como la mostrada en 1975 por Robert M. May y Warren J. Leonard en su célebre artículo “*Nonlinear aspects of competition between three species*” [9], a cualquier número de especies de dos maneras distintas, una usando las ideas de M. Chaperon y S. López De Medrano y otra usando sistemas Lotka-Volterra.

Un resultado colateral del estudio de los polígonos es una versión explícita y simétrica de los coeficientes de las ecuaciones que la definen. Se obtuvo una configuración especial de n puntos en un espacio de $n - 3$ dimensiones cuya envolvente convexa contiene al origen. Esta envolvente resulta ser un politopo especial de dimensión $n - 3$ que parece ser interesante de estudiar.

Otro resultado importante consiste en que se da a conocer un criterio para reclasificar los 33 casos estudiados por M. L. Zeeman en [13] para sistemas dinámicos de Lotka-Volterra en competencia para 3 dimensiones en términos de un conjunto de invariantes asociados a cada una de las matrices que representan los 33 casos posibles.

Se desarrolló un programa para determinar los casos posibles para los sistemas Lotka-Volterra en competencia para 4 dimensiones y se concluyó que en términos de la matriz de vértices asociada al simplejo portador de la dinámica del sistema, hay 218 casos.

Introducción

En las siguientes líneas se esbozan las ideas principales utilizadas a lo largo de la tesis así como su estructura.

Empezaremos por describir la manera en que se generan campos Lotka-Volterra-Kolmogorov (LVK).

Los sistemas de ecuaciones diferenciales tipo LVK son de la forma:

$$\dot{x}_i = x_i F_i(x)$$

con F_i funciones suaves definidas en el primer ortante $\mathbb{R}_+^n = \{x | x_i \geq 0\}$.

Cuando estas funciones son polinomios de primer grado decimos que tenemos un sistema Lotka-Volterra (LV):

$$\dot{x}_i = x_i(b_i - \sum a_{ij}x_j)$$

Los sistemas LV se iniciaron para el caso $n = 2$ como modelos de interacción entre dos especies, los cuales fueron generalizados y estudiados ampliamente. En 1975 Robert May y Warren Leonard [9] construyeron un sistema Lotka-Volterra (LV) con tres especies, llamado sistema May-Leonard (ML), en donde hay un triángulo atractor y dentro de él, la dinámica va favoreciendo cíclicamente a cada una de las especies. La figura 1 muestra esta dinámica.

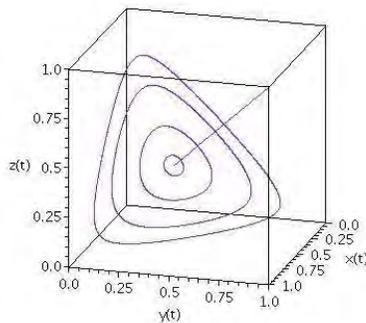


Figura 1. Sistema May-Leonard con triángulo atractor.

Así, en un momento, la primera de las especies tiene una población muy grande mientras que las otras dos están muy reducidas. Pero poco a poco la segunda de las especies empieza a crecer a costa de la primera y tercera hasta llegar a sobrepasarlas en población, hasta que en un momento posterior la segunda es dominante y las otras dos están muy reducidas. Toca el turno entonces a la

tercera de empezar a crecer hasta dominar a las otras dos y después se repite el proceso en forma cíclica.

Por un tiempo se pensó que los sistemas tipo LVK podrían tener dinámicas más sencillas que los sistemas dinámicos más generales. El trabajo realizado por Stephen Smale [12] en 1976, mostró que los sistemas LVK con $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \leq 0$ se pueden construir escogiendo adecuadamente las F_i de tal manera que el simplejo estándar, $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ sea un atractor global y sobre el cual la dinámica puede ser especificada. Mediante esta construcción, Smale mostró que los sistemas LVK pueden ser tan complicados como los sistemas generales, pues cualquier sistema o familia de sistemas puede ser la parte atractiva de un sistema LVK de una dimensión más grande.

Morris W. Hirsh [7] presentó una serie de trabajos entre 1982 y 2008 en donde consideró los sistemas que llamó “totalmente competitivos” (LVK-C), demostrando que presentan un conjunto invariante atractor homeomorfo a Δ_n . Este conjunto ha sido denominado el “simplejo portador”, nombre que hace alusión a la capacidad de carga del modelo logístico en una dimensión.

En 1991 Mary Lou Zeeman [13], demostró que para los sistemas LVC(3) (de 3 especies) existen 33 casos módulo simetrías del triángulo, que describen las distintas dinámicas de los sistemas LVC de competencia. En la tesis, se muestran las vecindades de cada caso y se pudo construir la gráfica de los casos posibles.

E. C. Zeeman y M.L. Zeeman en [4], mostraron que las aristas del simplejo portador determinan la dinámica de un sistema n -dimensional, usando esas ideas y las de [13] se encontró una extensión de la clasificación a los sistemas LVC en 4 dimensiones.

En 2008 Marc Chaperón y Santiago López de Medrano [3] desarrollaron ejemplos de sistemas dinámicos con variedades *ángulo momento* invariantes y normalmente hiperbólicas. Estas variedades están estrechamente relacionadas con politopos simples, lo cual sugiere la posibilidad de construir sistemas dinámicos con los propios politopos como objetos invariantes robustos. En esta tesis abordamos el problema de extender el sistema de May-Leonard a cualquier número de especies buscando sistemas LVK y LV que tengan polígonos invariantes.

Esta tesis se compone de dos partes, la parte I trata sobre el análisis riguroso de los sistemas May-Leonard (ML) y su generalización a cualquier número de especies.

En el capítulo 1 haremos un estudio detallado y riguroso del sistema clásico de May-Leonard [9].

La generalización del sistema ML se hará en varios pasos:

En el capítulo 2 construiremos sistemas en \mathbb{R}^2 que dejan invariante un polígono convexo dado de n lados. La frontera del polígono puede ser simplemente invariante al igual que otras curvas de nivel de una función, o puede ser atractor de todos los puntos en el interior del polígono con la excepción de un punto fijo repulsor.

En el capítulo 3 daremos una forma de encajar linealmente ese polígono dentro del primer ortante de \mathbb{R}^n de manera que cada uno de sus lados quede dentro de uno de los hiperplanos coordenados $\{x_i = 0\}$. El polígono quedará contenido dentro del simplejo estándar de \mathbb{R}^n . En particular, daremos una manera de presentar el polígono de una manera canónica que consiste en encajar el polígono regular isométricamente y daremos de manera explícita los coeficientes de las ecuaciones que lo definen.

En el capítulo 4 apoyándonos en la teoría descrita en [3] se construye un campo X (un campo LV que denominamos *campo base*) en \mathbb{R}^n , cuya particularidad es que tiene al polígono como conjunto atractor robusto y que adicionalmente se anula en el hiperplano que contiene al polígono encajado

en \mathbb{R}_+^n . Al tener esta dinámica tan degenerada en el polígono, es posible en principio, encontrar todo tipo de dinámicas dentro de sus pequeñas deformaciones.

En la sección 4.2.1 construiremos un arquetipo de sistema Lotka-Volterra-Kolmogorov (LVK) en \mathbb{R}^n de tal manera que el polígono sea un atractor y restringido al polígono mismo sea alguno de los campos construidos en el capítulo 2 y lo perturbaremos mediante un campo LVK generando centros y focos repulsivos además de dejar invariante el subespacio afín que contiene al polígono, la desventaja es que el grado del sistema aumenta a n y a $2n$ para centros y focos respectivamente.

En la sección 5.2 construiremos una perturbación al campo base X para generar centros y focos, usando campos LV, la ventaja es que el grado del sistema es constante, pero para generar dinámicas interesantes con perturbaciones LV, no es posible dejar invariante al polígono, sin embargo encontramos que para valores pequeños de la perturbación, el polígono recto se deforma en un polígono curvilíneo invariante que generaliza a los sistemas ML.

En la parte II estudiamos los campos Lotka-Volterra en Competencia (LVC) para 3 y 4 especies.

En el capítulo 6 describimos la forma de clasificar los campos LVC desarrollada en [13] y en la sección 6.2 se da una reclasificación de los campos LV de competencia para 3 especies

En la sección 6.3 se extendió la clasificación de los sistemas a 4 dimensiones estudiando los vértices del simplejo Δ_4 , este estudio nos llevó a encontrar que existen 218 casos posibles.

Parte I

Sistemas May-Leonard (ML) y su generalización a cualquier número de especies

Capítulo 1

Análisis de los sistemas May-Leonard

La intención de este capítulo, consiste en mostrar el tipo de dinámica presente en los sistemas May-Leonard, así como precisar y demostrar por qué solamente suceden ese tipo de dinámicas.

Los sistemas May-Leonard, son un caso particular de un sistema Lotka-Volterra de competencia, a continuación enunciaremos algunas definiciones y resultados conocidos en la literatura que ayudarán en las demostraciones que queremos hacer.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales tipo Lotka-Volterra-Kolmogorov (LVK) son sistemas de la forma:

$$\dot{x}_i = x_i F_i(x)$$

con F_i funciones suaves definidas en el primer ortante $\mathbb{R}_+^n = \{x | x_i \geq 0\}$.

Cuando las funciones F_i son polinomios de primer grado, decimos que tenemos un sistema Lotka-Volterra (LV). En este trabajo nos interesan los sistemas LV que además son de “competencia” (LVC), para esto se debe de cumplir que que:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \leq 0 \quad \text{para } i \neq j. \quad (1.1)$$

Los sistemas de competencia hacen referencia a la “competencia” entre especies biológicas, a x_i se le interpreta como el tamaño de la población de la i -ésima especie y $F_i(x)$ es su tasa de crecimiento per capita.

Cuando se habla que las especies están en “competencia”, se refiere a que el incremento de una especie, no se ve favorecido por el incremento per capita de las otras especies.

Por un tiempo se pensó, que los sistemas tipo LVK podrían tener dinámicas más sencillas que los sistemas dinámicos más generales. El trabajo realizado por Stephen Smale [12] en 1976, mostró que los sistemas LVK en competencia, se pueden construir escogiendo adecuadamente las F_i de tal manera que el simplejo estándar,

$$\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

sea un atractor global y sobre el cual, la dinámica pueda ser especificada.

Mediante esta construcción, Smale mostró que los sistemas LVK pueden ser tan complicados como los sistemas generales, pues cualquier sistema o familia de sistemas puede ser la parte atractiva de un sistema LVK de una dimensión más grande.

Morris W. Hirsh presentó una serie de trabajos entre 1982 y 2008 (en particular, para nuestros propósitos nos sirvieron los artículos [6, 7]), en donde consideró los sistemas que llamó “totalmente competitivos” (LVK-C), demostrando que presentan un conjunto único, compacto, invariante, atractor y homeomorfo a Δ_n mediante la proyección radial, donde se realiza toda la dinámica importante.

Este conjunto ha sido denominado el “simplejo portador”, nombre que hace alusión a la capacidad de carga del modelo logístico en una dimensión y lo denotaremos por Σ .

A continuación mencionaremos qué es un sistema May-Leonard y demostraremos el tipo de dinámicas que se pueden presentar.

1.1. Generalidades del sistema dinámico de May-Leonard

May y Leonard en [9] propusieron la siguiente familia biparamétrica de ecuaciones diferenciales tipo Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x - \alpha y - \beta z) \\ \dot{y} &= y(1 - \beta x - y - \alpha z) \\ \dot{z} &= z(1 - \alpha x - \beta y - z) \end{aligned} \tag{1.2}$$

con α y β positivos y donde x, y y z representan a la población de tres especies biológicas distintas.

Lo más interesante consistió en que se puede interpretar como sistema dinámico de 3 especies en competencia, la dinámica se realiza dentro de Σ y en algunos casos la dinámica va favoreciendo cíclicamente a cada una de las especies permitiendo su coexistencia, como se muestra en la figura 1.1.

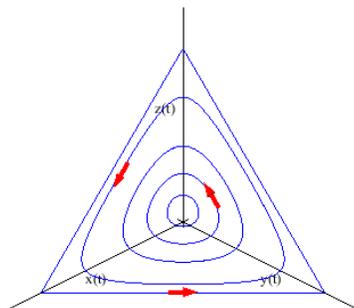


Figura 1.1. Sistema May-Leonard

Así, en un momento, la primera de las especies tiene una población muy grande, mientras que las otras dos están muy reducidas. Pero poco a poco la segunda de las especies empieza a crecer a

costa de la primera y la tercera hasta llegar a sobrepasarlas en población, hasta que en un momento posterior la segunda es dominante y las otras dos están muy reducidas. Toca el turno entonces a la tercera de empezar a crecer hasta dominar a las otras dos y después se repite el proceso en forma cíclica.

De acuerdo con el teorema de Hirsch [6], para el sistema May-Leonard, Σ es homeomorfo al simplejo estándar dado por:

$$\Delta_3 = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}.$$

Para los fines de esta tesis, hablar de Σ o hablar de Δ_3 será lo mismo, ya que no estudiaremos a Σ en sí, más bien su dinámica.

Queremos hacer notar que si nos restringimos al octante positivo, Δ_3 es un triángulo equilátero. Esto nos servirá para simplificar la explicación de algunas ideas.

Los sistemas May-Leonard son campos vectoriales, que tienen las siguientes propiedades importantes, independientemente de los valores que tomen α y β .

- i) El origen es un repulsor.
- ii) Hay 3 puntos de equilibrio, cada uno sobre un eje coordenado, a los que llamaremos “vértices”.
- iii) Existe una curva heteroclínica que pertenece a la frontera de Σ y está sobre cada plano coordenado; esta curva une a cada par de vértices contenidos en dicho plano. A esa curva la identificamos como la deformación curvilínea de la arista del simplejo estándar. Cuando mencionemos “arista” nos estaremos refiriendo a esa curva o a la arista del simplejo.
- iv) Hay un punto fijo dado por:

$$P = \left(\frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \right)$$

Se dice que un sistema es circulante (ver [8]) si cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema, se puede obtener de la primera ecuación, permutando de forma cíclica todas sus variables.

Como los sistemas May-Leonard son circulantes, la dinámica presente en un eje coordenado será la misma que en los otros. La dinámica en el plano $z = 0$ se repetirá en los otros planos coordenados. Por esa razón, sin pérdida de generalidad describiremos la dinámica solamente en el eje x , en el plano $z = 0$ y en el punto P .

Dependiendo de los valores de α y β los sistemas May-Leonard tienen otros 3 puntos de equilibrio, uno de ellos está en el plano $z = 0$ (los otros están en los otros planos coordenados). Ese punto está sobre una arista de Σ y al punto lo denotaremos como Q .

En cualquier sistema circulante (como se puede ver en [8]), siempre va a existir un único punto crítico P en el interior del octante positivo \mathbb{R}^n .

Por la linealidad del sistema y por el teorema de Hirsch [6], estos son todos los puntos críticos del sistema y todos ellos pertenecen a Σ .

Para analizar los sistemas May-Leonard, se encontró que la dinámica depende del signo de la diferencia $\alpha + \beta - 2$ e involucra a la función:

$$H = \frac{xyz}{(x + y + z)^3}. \tag{1.3}$$

En la siguiente sección demostraremos lo anterior, exhibiendo todos los casos posibles, su relación con la ecuación 1.3 y con $\alpha + \beta - 2$.

1.2. Constante de movimiento para el sistema May-Leonard en \mathbb{R}^3

Teorema 1.1 (Propiedades generales y casos posibles para el sistema May Leonard). *Resumimos las principales propiedades y las variantes dinámicas que se pueden presentar en el sistema May-Leonard, considerando la función 1.3.*

El sistema de May Leonard tiene un simplejo Σ invariante y portador de toda la dinámica (es decir, atrae a todas las órbitas contenidas en el interior del ortante). Σ contiene al punto de equilibrio interior P , a los puntos de equilibrio sobre los ejes (que son sus vértices) y a los posibles puntos críticos Q sobre sus aristas.

A) *Si $\alpha + \beta = 2$, Σ es el simplejo estándar y tiene a H como integral primera. Salvo si $\alpha = \beta = 1$ (caso degenerado)¹, sobre el simplejo unitario P es un centro cuyas trayectorias cerradas son las curvas de nivel de H y llenan el espacio entre P y el borde del simplejo. Las demás trayectorias tienden asintóticamente a éstas, girando sobre las superficies de nivel de H .*

Si $\alpha + \beta \neq 2$ el campo no deja invariante al simplejo estándar y H no es la integral primera y entonces se presentan los siguientes casos:

B) *Si $\alpha + \beta < 2$, P es un atractor y H es creciente a lo largo de las trayectorias. Sobre el simplejo portador P es un foco, mientras que los vértices son:*

B1) *Repulsores si α, β son ambos menores que 1.*

B2) *Puntos silla si α o β son mayores que 1. En este caso, cuando $t \rightarrow -\infty$ las trayectorias tienden asintóticamente en espiral a la frontera del simplejo.*

C) *Si $\alpha + \beta > 2$, P es un punto silla y H es decreciente a lo largo de las trayectorias. Sobre el simplejo portador, P es un foco repulsor, mientras que los vértices son:*

C1) *Atractores si α y β son ambos mayores que 1.*

C2) *Puntos silla si alguno de ellos es menor que 1. En este caso, cuando $t \rightarrow \infty$ las trayectorias tienden asintóticamente en espiral a la frontera del simplejo.*

La figura 1.2 muestra la ubicación de los casos anteriores en el plano de los parámetros (α, β) . Por la simetría respecto de α y β sólo describiremos los casos donde $\beta \leq \alpha$.

NOTAS.

- En [9] May-Leonard destacaron las propiedades del teorema y el caso C2).
- En su versión de A) prueban que xyz tiende asintóticamente a una constante sin observar que su fórmula (11), página 247 de [9], implica fácilmente que nuestra H es constante de movimiento. Para la dinámica en el simplejo unitario ambas afirmaciones son equivalentes porque ahí xyz y H coinciden.
- La argumentación de May-Leonard respecto a C2) es poco convincente.

¹Si $\alpha = \beta = 1$, todos los puntos del simplejo estándar son puntos críticos y el campo vectorial asociado es un campo radial.

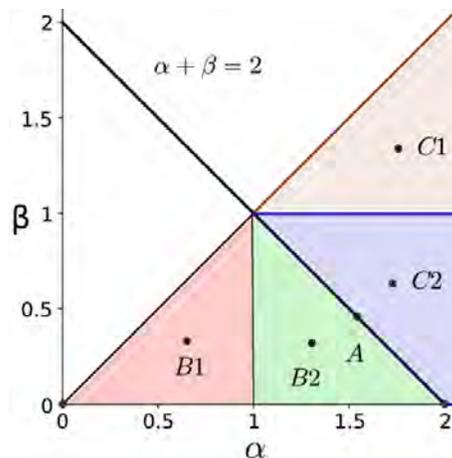


Figura 1.2. Casos ubicados en el espacio de parámetros α , β .

Demostración del Teorema 1.1.

Lema 1.1. *El producto interior $X \cdot \nabla H$ tiene en el interior del primer octante el mismo signo que $\alpha + \beta - 2$, salvo en la recta $\{x = y = z\}$ donde se anula. Por lo tanto, fuera de esa recta H decrece, es constante o crece a lo largo de las trayectorias según si $\alpha + \beta$ sea mayor, igual o menor que 2. En esa recta H alcanza su valor máximo $1/27$ y tiende a 0 al acercarse a la frontera del octante (menos en el origen).*

Demostración del lema. Calculando el producto interior se obtiene:

$$X \cdot \nabla H = -\frac{xyz(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)(\alpha + \beta - 2)}{(x + y + z)^4}.$$

La forma cuadrática $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ es positiva semidefinida. De hecho, se puede escribir como una suma de cuadrados y queda:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \left(x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2} - \frac{\sqrt{3}z}{2}\right)^2.$$

Lo que indica que es positiva, salvo cuando $x = y = z$. Por lo tanto, fuera de ésta, tiene el signo de $\alpha + \beta - 2$ y las demás afirmaciones siguen fácilmente de este hecho. \square

Las propiedades del teorema, se siguen del teorema de Hirsch [6] sobre la existencia de simplejos portadores en sistemas de competencia. Todos los puntos de equilibrio necesariamente pertenecen al simplejo. El hecho de que exista un único punto crítico P en el interior se desprende de [8].

Para demostrar las otras partes, se calcula la matriz jacobiana del campo en el punto de equilibrio interior. Multiplicada por el número positivo $\alpha + \beta + 1$, resulta ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta última son:

$$-(\alpha + \beta + 1), \frac{\alpha + \beta - 2 \pm i(\alpha - \beta)\sqrt{3}}{2}.$$

Cuando $\alpha + \beta \neq 2$ las trayectorias son asintóticas al punto fijo y también son asintóticas a la frontera del triángulo, ya que como no puede haber otros puntos de equilibrio (por [8]) y tampoco trayectorias cerradas pues esto contradiría el hecho de que H crece (decrece) a lo largo de las trayectorias.

□

1.3. Los sistemas de May-Leonard en \mathbb{R}^3 : El análisis exhaustivo de los casos

1.3.1. Análisis de los puntos críticos

Como se describió en la sección 1.1, solo hay 3 clases de puntos críticos, los vértices (puntos críticos sobre los ejes coordenados), puntos sobre las aristas de Σ o puntos Q y un punto P en el interior de \mathbb{R}^3 .

En el siguiente análisis solamente se presentan los resultados relativos al vértice sobre el eje x , al punto Q de la arista sobre el plano $z = 0$ y P . Los otros puntos críticos se obtienen permutando cíclicamente las coordenadas.

Entonces, la dinámica de los puntos críticos es:

a) En el vértice $V = (1, 0, 0)$ tenemos las siguientes parejas de valores y vectores propios:

1. $-1, (1, 0, 0)$.
2. $1 - \alpha, \left(\frac{\beta}{-2 + \alpha}, 0, 1\right)$.
3. $1 - \beta, \left(\frac{\alpha}{-2 + \beta}, 1, 0\right)$.

Cabe hacer notar que sobre el eje x , el vértice es un atractor, ya que su valor propio es -1 .

Analizaremos el caso en que $\beta \leq \alpha$, ya que si $\beta > \alpha$ solo hace que el sentido del giro de las soluciones se invierta (como puede apreciarse en las simulaciones).

Los posibles signos para los valores propios se pueden organizar en los siguientes casos:

1. Si $\alpha > 1$ y $\beta > 1$ entonces el vértice es atractor en la dirección de los planos coordenados.
2. Si $\alpha > 1$ y $\beta < 1$ entonces el vértice es punto silla.
3. Si $\alpha < 1$ y $\beta < 1$ entonces el vértice es repulsor en la dirección de los planos coordenados.
4. Si $\alpha = 1$ o $\beta = 1$ entonces el vértice tiene un valor propio 0.

b) El punto crítico sobre el plano $z = 0$ tiene coordenadas:

$$Q = \left(\frac{-1 + \alpha}{-1 + \alpha\beta}, \frac{-1 + \beta}{-1 + \alpha\beta}, 0 \right).$$

Para que el punto Q esté en el primer octante, se necesita que:

- i) si $\alpha < 1$ entonces $\beta < 1$ o
- ii) si $\alpha > 1$ entonces $\beta > 1$.

Uno de los vectores propios es transversal a Σ (que además está sobre el plano $z = 0$) y tiene valor propio -1 y nos confirma que Σ es atractora, pero no aporta más al análisis.

El segundo vector propio es tangente a Σ y es:

$$\left(-\frac{\alpha}{\beta}, 1, 0\right)$$

con valor propio:

$$\frac{1 - \alpha - \beta + \beta\alpha}{-1 + \alpha\beta}.$$

Si $\alpha < 1$ y $\beta < 1$ entonces el valor propio es negativo (porque el numerador es positivo), y si $\alpha > 1$ y $\beta > 1$ entonces el valor propio es positivo (ya que el numerador es positivo).

Por lo tanto, para el caso i) en la dirección tangente a la arista, Q será atractor y en el caso ii) Q será repulsor.

El último vector propio es tangente al simplejo pero $z \neq 0$, su valor propio está dado por

$$\frac{(-2 + \alpha + \beta)^2 - 3(-1 + \alpha)(-1 + \beta)}{1 - \alpha\beta}.$$

La forma cuadrática del numerador es definida positiva, por lo que el signo del valor propio depende de $1 - \alpha\beta$. Por lo tanto para el caso i) ($\alpha < 1, \beta < 1$) concluimos que el valor propio es positivo, esto lo hace atractor y para el caso ii) ($\alpha > 1$ y $\beta > 1$) el valor propio será negativo y por lo tanto el punto crítico será repulsor.

Esto quiere decir que el punto Q siempre es un punto silla.

c) El único punto en \mathbb{R}_+^3 es:

$$P = \left(\frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \frac{1}{\alpha + \beta + 1}\right).$$

La relación entre sus valores y vectores propios es la siguiente:

El valor propio -1 tiene asociado el vector propio $(1, 1, 1)$.

Los otros dos valores propios son conjugados dados por:

$$\frac{1}{\alpha + \beta + 1} \left(\frac{-2 + \alpha + \beta}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}(\alpha - \beta)}{2} \right).$$

El signo de la parte real está dado por $\alpha + \beta - 2$ por lo que si $\alpha + \beta < 2$ será un foco atractor y si $\alpha + \beta > 2$ será un foco repulsor.

Si $\alpha + \beta = 2$ la parte real se anula, por lo que el punto crítico es un centro pues 1.3 es constante de movimiento.

Tomando en cuenta las posibilidades, nos confirma los resultados del teorema y resumimos que tenemos los casos:

A) $2 = \alpha + \beta$. V_1 es silla y el P es un centro, las órbitas folian todo el simplejo portador, éste coincide con el simplejo estándar.

- B1) $\beta < 1$ y $\alpha < 1$. V_1 es repulsor, Q es silla y P es un foco atractor.
- B2) $\beta < 1$, $\alpha > 1$ y $2 > \alpha + \beta$. No hay punto Q y V_1 es punto silla, con valor propio positivo en la dirección del plano $y = 0$ y negativo en la dirección del plano $z = 0$. El punto P es un foco atractor y para este caso, las trayectorias convergen asintóticamente a la frontera del simplejo portador cuando $t \rightarrow -\infty$. P es un atractor global para $x \in \mathbb{R}_+^3$.
- B3) $\beta < 1$ y $\alpha = 1$. No hay punto Q y V_1 es repulsor, pero tienen un valor propio 0 asociado a un vector propio en el plano $z = 0$. El punto P es un foco atractor global.
- C1) $1 < \beta < \alpha$. V_1 es atractor, el punto Q es silla y P es un foco repulsor.
- C2) $\beta < 1$ y $2 < \alpha + \beta$. No hay punto crítico Q y V_1 se convierte en punto silla, con valor positivo en la dirección del plano $z = 0$ y negativo en la dirección del plano $y = 0$. El punto P es un foco repulsor y para este caso, las trayectorias convergen asintóticamente a la frontera del simplejo portador. La rapidez con la que se produce la convergencia a la frontera es menor a medida que $\alpha + \beta \approx 2$.
- C3) $\beta = 1$ y $\alpha > 1$. Desaparece Q y V_1 es atractor pero tienen un valor propio 0 asociado a un vector propio en el plano $y = 0$. El punto P es un foco repulsor.

El caso B3) es un caso de transición de los casos B1) a B2) y C3) es de transición para los casos C1) a C2).

NOTAS

1. El comportamiento del caso A) sólo se cumple cuando el simplejo portador es el simplejo estándar.
2. May y Leonard comentan en [9], después de simplificar su sistema para que sea simétrico y dependa de pocos parámetros que, *Es plausible que las características cualitativas de estas ecuaciones sigan siendo ciertas en casos asimétricos más generales*. El caso A) se presentará cuando el simplejo portador es plano, porque en ese caso puede llevarse a \mathbb{R}^2 y aplicaríamos los resultados de la tesis. Los casos B) y C) se presentarán con las mismas características para otros campos asimétricos cercanos a ML.

En las figuras 1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8 y 1.9 se muestran ejemplos concretos asociados a cada dinámica particular.

De las dinámicas estudiadas, hay una que nos interesa y corresponde al sistema LV que se presentó sobre el simplejo estándar, es decir sobre el triángulo figura 1.7. Para empezar a la extensión de las dinámicas en dimensiones superiores, empezaremos en el siguiente capítulo a generar dinámicas sobre polígonos convexos definidos en \mathbb{R}^2 .

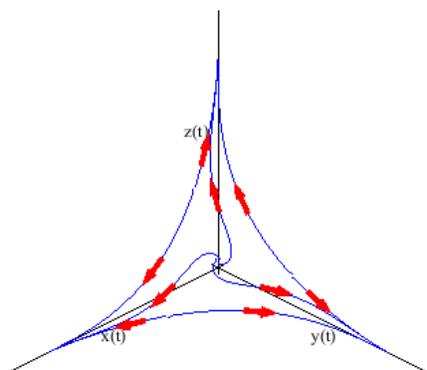


Figura 1.3. Caso C1) $\alpha = 4, \beta = 2$

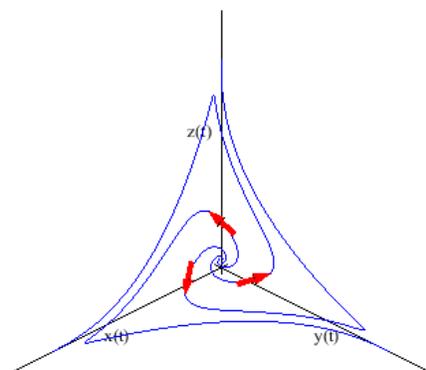


Figura 1.4. Caso C3) $\alpha = 3.5, \beta = 1$

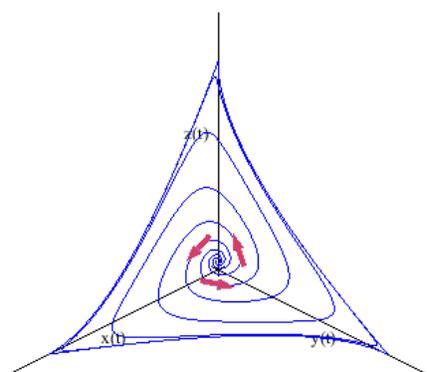


Figura 1.5. Caso C2) $\alpha = 3, \beta = 1/3$

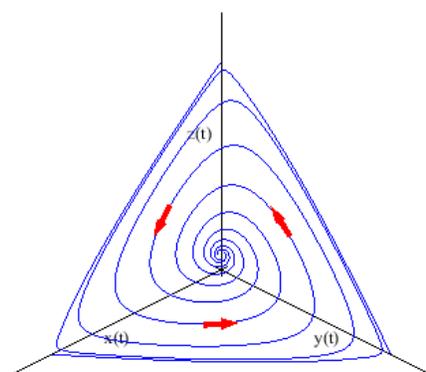


Figura 1.6. Caso B2) $\alpha = 5/4, \beta = 2/5$

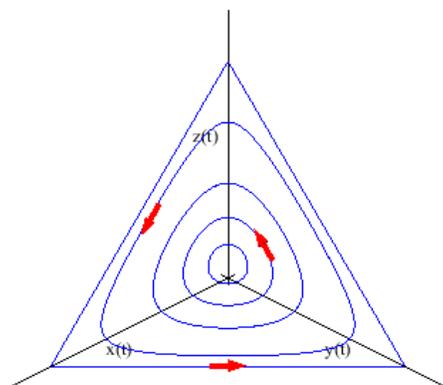


Figura 1.7. Caso A) $\alpha = 3/2, \beta = 1/2$

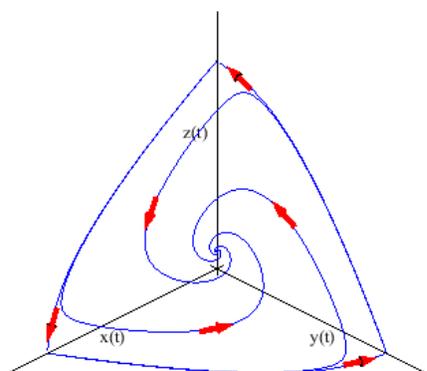


Figura 1.8. Caso B3) $\alpha = 1, \beta = 1/5$

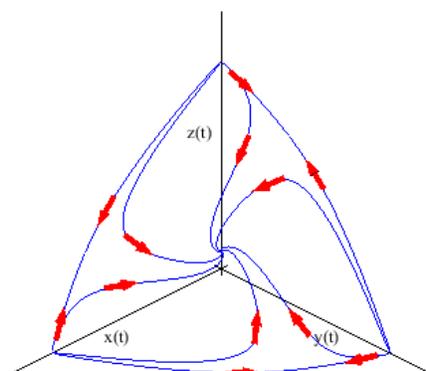


Figura 1.9. Caso B1) $\alpha = 3/4, \beta = 1/2$

Capítulo 2

Campos vectoriales con polígonos invariantes

El objetivo de este capítulo consiste en construir campos vectoriales polinomiales en el plano y que dejen invariante un polígono convexo de n lados, formado por un conjunto de n rectas.

La idea es que una vez entendida esta dinámica, podamos encontrar una manera de trasplantarla, de forma particular en polígonos regulares de n lados inmersos en el simplejo unitario de \mathbb{R}^n .

Para construir los campos polinomiales, exhibiremos un hamiltoniano y con su derivada simpléctica, construiremos un campo que cumpla con los objetivos del párrafo inicial, y probaremos que en el interior de las regiones acotadas por las intersecciones de las rectas, solo hay un punto crítico, que resulta ser un centro, rodeado por trayectorias cerradas que llenan toda la región y se acumulan en su frontera.

Los sistemas Lotka-Volterra, están formados por campos polinomiales de segundo grado, por esa razón, también probaremos que existen campos vectoriales polinomiales de segundo grado, que dejan invariante un triángulo y en algunos casos, en su interior habrá un punto crítico que es un centro.

En el caso de polígonos de 4 lados, los campos vectoriales polinomiales de segundo grado que lo dejan invariante, se reducen a un caso muy simple y no tienen puntos críticos en el interior del polígono. Para los polígonos de más lados, no hay campos vectoriales de segundo grado que dejen invariante al polígono.

Por lo tanto podemos concluir que no existen campos LV en el plano que dejen invariantes un polígono de más de 3 lados y que tengan un punto crítico en su interior.

2.1. Construcción de campos vectoriales polinomiales con polígonos convexos invariantes en \mathbb{R}^2

Consideremos un polígono convexo P de m lados en \mathbb{R}^2 , cuyos lados están definidos por m ecuaciones lineales:

$$L_i = a_i x + b_i y + c_i \tag{2.1}$$

Se construirá un campo simpléctico, definido por el hamiltoniano dado por el producto de las ecuaciones anteriores:

$$H = \prod_{i=1}^n L_i \quad (2.2)$$

La frontera del polígono es invariante como parte del conjunto de nivel $H = 0$ y sus vértices son puntos fijos del campo asociado.

Demostremos que en las regiones acotadas del complemento de estas rectas (en particular en el interior del polígono) hay un único punto fijo, que resulta ser un centro, rodeado por trayectorias cerradas que llenan toda la región y se acumulan en su frontera.

Teorema 2.1. *En cada región acotada U del complemento de $H = 0$ hay exactamente un punto crítico de H .*

Demostración. Supongamos que $L_i > 0$ en U (si no, basta cambiar el signo a las ecuaciones). Entonces $H > 0$ toma su máximo en la cerradura de U y ese es un punto crítico.

Demostremos que todo punto crítico en U es un máximo.

En cualquier punto crítico se cumple lo siguiente:

$$H_x = H \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{L_i} = 0$$

y

$$H_y = H \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{L_i} = 0$$

Mientras que

$$H_{xx} = H_x \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{L_i} - H \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{L_i^2} = -H \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{L_i^2}$$

ya que $H_x = 0$.

De la misma manera se llega a que

$$H_{xy} = -H \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{L_i^2}$$

y

$$H_{yy} = -H \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{L_i^2}$$

Denotemos por

$$v_i = \frac{a_i}{L_i},$$

$$V = (v_1, \dots, v_n),$$

$$w_i = \frac{b_i}{L_i},$$

$$W = (w_1, \dots, w_n).$$

Los vectores V y W son linealmente independientes, porque algún determinante

$$v_i w_j - v_j w_i = \frac{1}{L_i L_j} (a_i b_j - a_j b_i) \neq 0,$$

ya que como U no es vacío, entonces no todas las rectas pueden ser paralelas.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el determinante de la matriz hessiana en el punto crítico es:

$$H^2 \left(\left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n v_i w_i \right)^2 \right) = H^2 (|V|^2 |W|^2 - (V \cdot W)^2) > 0,$$

luego, el producto de los valores propios es positivo y ambos tienen el mismo signo.

Por otra parte, la traza se escribe:

$$-H \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 \right)$$

y como es negativa, los dos valores propios son negativos, la matriz hessiana es definida negativa y el punto crítico es un máximo.

Si todos los puntos críticos son máximos en el conjunto convexo U sólo puede haber uno y la proposición está demostrada. □

Esto implica que el punto crítico de H en U es un máximo y el campo hamiltoniano tiene un centro cuyas trayectorias cerradas llenan todo U y se acumulan en la frontera de U que es un polígono.

Si suponemos que no hay dos rectas paralelas y que tres rectas no pasan por un mismo punto (condiciones genéricas), podemos ver esto de otra manera¹, contando los puntos críticos de H :

Los puntos críticos de H son la intersección de las dos curvas algebraicas $H_x = 0$ y $H_y = 0$ de grado $n - 1$. Por el teorema de Bézout, no puede haber más de $(n - 1)^2$ puntos críticos.

Tenemos ya determinados los siguientes puntos críticos: uno por cada intersección de dos de las rectas (ya que tres no se intersectan en un mismo punto) y uno en cada componente acotada.

Al contar los puntos anteriores, por cada par de rectas hay una intersección y en total son

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

puntos de intersección.

Por otra parte, para $n = 3$ hay una sola componente acotada y para $n = 4$ hay 3.

Probaremos por inducción que el número de componentes acotadas es

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

de la siguiente manera:

Al agregar una nueva recta L' a las n que ya estaban, tenemos que L' las corta a todas. Luego L' queda separada en $n + 1$ intervalos (esto por las condiciones genéricas), de los cuales los dos extremos no están acotados y por eso no pueden pertenecer a ninguna región acotada.

¹Este método fue sugerido por Adriana Ortiz.

Los otros $n - 1$ restantes, producen cada uno, una nueva región acotada al cortar alguna de las regiones de la siguiente manera: si corta una región acotada la parte en dos, si corta a una no acotada, la parte en una acotada y una no acotada. Luego hay $n - 1$ nuevas regiones acotadas y esto prueba el paso de inducción.

Por lo tanto, el número total de puntos de intersección más el número de regiones acotadas es:

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = (n-1)^2.$$

Se concluye nuevamente que, en cada componente acotada, hay un solo punto crítico, pero ahora podemos decir además, que en las componentes no acotadas no puede haber ninguno.

En las figuras 2.2, 2.2 y 2.3 se muestran algunos ejemplos para algunos polígonos.

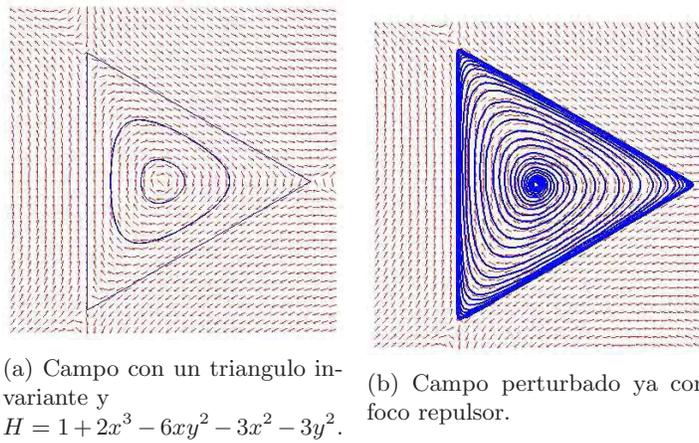


Figura 2.1. Campo simpléctico de H asociado a 3 rectas (izquierda). Perturbación del campo simpléctico, mediante $-\nabla H^2$ (derecha).

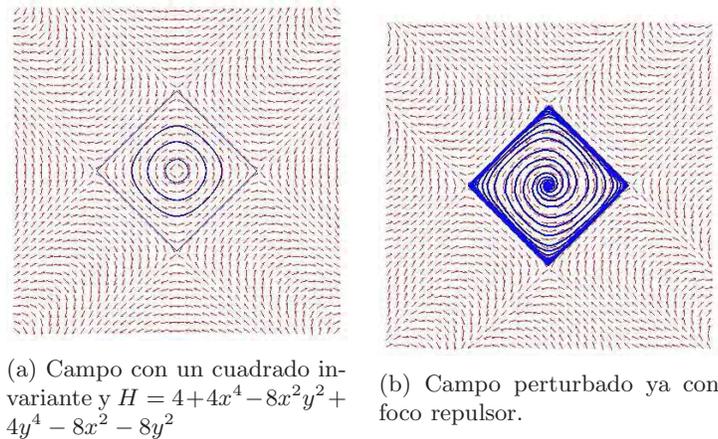


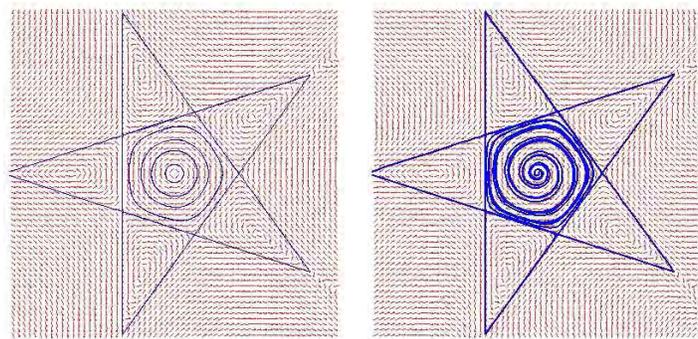
Figura 2.2. Campo simpléctico de H asociado a 4 rectas (izquierda). Perturbación del campo simpléctico, mediante $-\nabla H^2$ (derecha).

Se puede perturbar el sistema para que el centro se vuelva un punto fijo repulsor y todas las demás trayectorias salgan de ahí y tiendan hacia la frontera como sigue:

Si agregamos al campo un múltiplo escalar positivo (que puede ser arbitrariamente pequeño) del gradiente de la función $-H^2$, se obtiene un nuevo campo para el cual H deja de ser una constante del movimiento para convertirse en una función de Lyapunov.

El punto interior del polígono sigue siendo un punto fijo, pero será repulsor si es un máximo de H y todas las demás trayectorias del nuevo campo tienen como límite la frontera del polígono.

Hacemos notar que el grado del nuevo sistema aumenta a $2n - 1$.



(a) Campo con 5 rectas invariantes. (b) Campo con 5 rectas invariantes y con foco repulsor.

Figura 2.3. Campo simpléctico de H asociado a 5 rectas (izquierda). Perturbación del campo simpléctico, mediante $-\nabla H^2$ (derecha).

2.2. Campos de grado 2 con polígonos invariantes

Los campos polinomiales de grado 2 en \mathbb{R}^2 son especialmente importantes, porque están relacionados con los campos LV que preservan un polígono en \mathbb{R}^n . Veremos que hay muy pocos campos polinomiales de grado 2 en \mathbb{R}^2 que preservan un polígono y que, por lo tanto, hay muy pocos campos LV en \mathbb{R}^n que preservan un polígono plano. Esto nos llevará a buscar campos LV cuya dinámica se concentre en polígonos con curvatura.

2.2.1. Campos de grado 2 que preservan el triángulo

Consideremos a tres rectas L_1, L_2 y L_3 que definen el triángulo, S la unión de ellas y las componentes conexas del complemento de S en \mathbb{R}^2 denotándolas de la siguiente manera:

- \mathcal{T} , el interior del triángulo
- $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$, las regiones no acotadas adyacentes a una arista del triángulo
- $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$, las restantes regiones no acotadas.

Teorema 2.2. *Si X es un campo cuadrático, no nulo en \mathbb{R}^2 , que preserva un triángulo, sus ceros pueden ser:*

A) *Los tres vértices y un solo punto de equilibrio P que no está en S . En este caso, el punto P sólo puede ser:*

A1) *Un centro, si está en el interior del triángulo o en alguna de las regiones $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, o \mathcal{V}_3 .*

A2) Un punto silla cuyos valores propios tienen el mismo valor absoluto, si está en alguna de las regiones \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 o \mathcal{U}_3 .

B) Únicamente los tres vértices.

C) Los tres vértices y los puntos de una recta que pasa por dos de ellos.

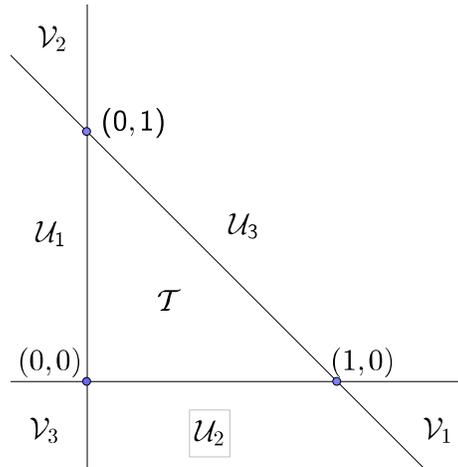


Figura 2.4. Regiones generadas por 3 rectas que definen el triángulo.

Demostración. Mediante una transformación afín, podemos llevar los vértices de cualquier triángulo a los puntos $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y el campo se transforma conservando todas las propiedades que se van a demostrar. Así que supondremos que esos son los vértices.

Las componentes de cualquier campo cuadrático se pueden expresar como:

$$X_1 = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1$$

$$X_2 = A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2$$

La condición de que el campo sea horizontal en el eje x se traduce en $A_2 = D_2 = F_2 = 0$ y la correspondiente al eje y es $C_1 = E_1 = F_1 = 0$. Así el campo X queda en

$$X_1 = A_1x^2 + 2B_1xy + D_1x$$

$$X_2 = 2B_2xy + C_2y^2 + E_2y$$

La condición de que en la recta $x + y = 1$, el campo sea perpendicular al vector $(1,1)$, implica que $D_1 = -A_1$, $C_2 = -E_2 = -(A_1 - 2B_1 - 2B_2)$ y el campo se escribe como

$$X_1 = A_1x^2 + 2B_1xy - A_1x$$

$$X_2 = 2B_2xy - E_2y^2 + E_2y$$

con $E_2 = A_1 - 2B_1 - 2B_2$.

Si $A_1 - 2B_2 \neq 0$ podemos suponer que $A_1 - 2B_2 > 0$ (si no cambiamos X por $-X$). Entonces, el único punto de equilibrio fuera de S es $P = (P_1, P_2)$ con

$$P_1 = \frac{E_2}{A_1 - 2B_2}$$

$$P_2 = \frac{A_1}{A_1 - 2B_2}$$

y

$$P_1 + P_2 - 1 = \frac{A_1 - 2B_1}{A_1 - 2B_2}$$

de donde

$$A_1 = P_2(A_1 - 2B_2)$$

$$E_2 = P_1(A_1 - 2B_2)$$

$$A_1 - 2B_1 = (P_1 + P_2 - 1)(A_1 - 2B_2)$$

Calculando el polinomio característico de la matriz jacobiana de X en P se obtiene

$$\lambda^2 - \frac{A_1 E_2 (A_1 - 2B_1)}{A_1 - 2B_2}$$

que se puede reescribir, por las relaciones anteriores como

$$\lambda^2 - P_1 P_2 (P_1 + P_2 - 1) (A_1 - 2B_2)^2$$

De aquí se concluye que los valores propios de la matriz jacobiana de X en P son:

$$\pm \sqrt{P_1 P_2 (P_1 + P_2 - 1) (A_1 - 2B_2)},$$

es decir, imaginarios puros cuando $P_1 P_2 (P_1 + P_2 - 1) < 0$ (caso A1 del teorema 2.2), reales distintos de suma 0 cuando $P_1 P_2 (P_1 + P_2 - 1) > 0$ (caso A2 del teorema 2.2) o ambos 0, (caso C) del teorema 2.2).

Falta ver el caso $A_1 - 2B_2 = 0$. El campo es entonces

$$X_1 = x(2B_2x + 2B_1y - 2B_2)$$

$$X_2 = y(2B_2x + 2B_1y - 2B_1)$$

Si los números $B_1, B_2, B_1 - B_2$ son todos distintos de 0, los únicos puntos de equilibrio son los vértices del triángulo.

Si exactamente uno de los números $B_1, B_2, B_1 - B_2$ es distinto de 0, entonces los puntos de equilibrio son todos los puntos de una de las rectas y el vértice opuesto.

Si dos de los números B_1, B_2 o $B_1 - B_2$ son cero, entonces el tercero también lo es y el campo es idénticamente 0. \square

2.2.2. Campos de grado 2 que preservan polígonos de más de tres lados

Si tomamos un polígono de más de tres lados, en general tres de sus lados formarán un triángulo. Un campo que deje invariante al polígono, dejará también invariante a ese triángulo y tendrá los puntos críticos que se describen en 2.2. Pero alguna de las otras rectas que lo definen cortará dos de los lados del triángulo y tendrá más puntos críticos de los ahí descritos. La única posibilidad es que el campo sea nulo.

El único caso en que sus lados no formen ningún triángulo, es cuando el polígono es un rectángulo.

Mediante una transformación lineal se puede suponer que se trata de un cuadrado con dos lados en los ejes x y y , en ese caso, se puede ver fácilmente (por el mismo método que en la demostración del teorema 2.2) que el campo tiene que ser de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax(1-x) \\ \dot{y} &= by(1-y)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Luego puede ser nulo si $a = b = 0$, ir en forma paralela a uno de los ejes coordenados, en dirección de un lado del cuadrado a su lado opuesto si $a = 0$ o $b = 0$ y por último puede ir de un vértice al vértice opuesto cuando $a \neq 0$ y $b \neq 0$, como se muestra en el ejemplo de la figura 2.5.

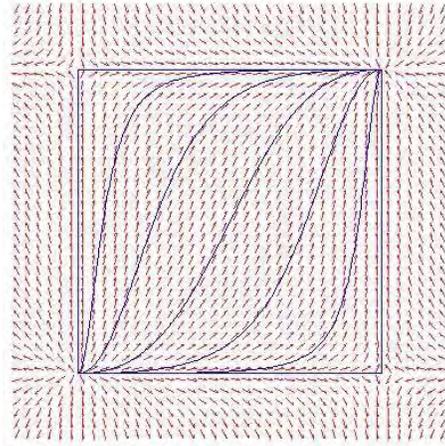


Figura 2.5. Campo cuadrático para valores $a = 1$, $b = 2$.

Entonces hemos demostrado:

Teorema 2.3. *Si X es un campo vectorial, cuadrático, no nulo en \mathbb{R}^2 que preserva un polígono de más de tres lados, entonces el polígono es un rectángulo y en su interior, el campo no tiene puntos de equilibrio.*

En el siguiente capítulo mostraremos cómo encajar el polígono de n lados en \mathbb{R}_+^n de forma geométrica, generando las ecuaciones de los vértices que lo definen.

Capítulo 3

El polígono de n lados encajado en \mathbb{R}^n

Recordemos que queremos construir un sistema LVK que generalice los sistemas ML, para eso primero debemos de encontrar ecuaciones que nos generen polígonos regulares de n lados inmersos en \mathbb{R}_+^n . Para simplificar los cálculos, podemos construirlos de tal forma que cada una de sus aristas estén contenidas en uno de los hiperplanos coordenados $x_i = 0$.

Un polígono de n lados (de hecho, un politopo de cualquier dimensión con n facetas) se puede realizar combinatoriamente, mediante uno que está dentro del simplejo unitario de \mathbb{R}_+^n , de manera que sus caras se encuentren en los diferentes hiperespacios coordenados.¹ Más interesante es tratar de ver si se puede realizar geoméricamente (o sea, isométricamente) de la misma manera.

En este capítulo vamos a mostrar una forma de hacer esto, en el caso de los polígonos regulares, primero encontrando relaciones entre los vértices del polígono y posteriormente vamos a mostrar las ecuaciones.

A continuación se muestran algunos casos sencillos conocidos en la literatura.

3.1. Ejemplos de polígonos inmersos en \mathbb{R}_+^n para $n = 3, 4$ y 5

Para $n = 3$ el simplejo unitario, con ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

y vértices

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0) \text{ y } (0, 0, 1).$$

cumple las condiciones para generar un triángulo en \mathbb{R}^3 .

Para $n = 4$, el polígono se puede obtener fácilmente, como el conjunto de puntos en \mathbb{R}_+^4 , que cumplen con las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = 1/2$$

y

$$x_3 + x_4 = 1/2$$

¹Esto puede verse usando la *transformación de Gale* (ver [11]) o, directamente por inducción en el número de caras o facetas.

sus vértices son $(1/2, 0, 1/2, 0)$, $(0, 1/2, 0, 1/2)$, $(0, 1/2, 1/2, 0)$ y $(1/2, 0, 0, 1/2)$ y sus aristas están en cada uno de los hiperplanos coordenados.

Para $n = 5$, se conoce desde hace tiempo (ver [10]), que tomando las raíces quintas de la unidad ($\rho^5 = 1$), las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Re(\rho)x_1 + \Re(\rho^2)x_2 + \Re(\rho^3)x_3 + \Re(\rho^4)x_4 + x_5 &= 0 \\ \Im(\rho)x_1 + \Im(\rho^2)x_2 + \Im(\rho^3)x_3 + \Im(\rho^4)x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

generan un polígono regular de 5 lados.

Uno de sus vértices es

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, 0 \right)$$

los otros se obtienen permutando cíclicamente las coordenadas.

Para dimensiones mayores, no es fácil obtener las ecuaciones porque en general, los coeficientes serán n puntos en \mathbb{R}^{n-3} , difíciles de visualizar².

Entonces vamos a empezar por encontrar sus vértices y a partir de estos, sus ecuaciones.

3.2. Los vértices y sus ecuaciones

Suponemos que un vértice en \mathbb{R}^n se puede escribir de la forma

$$V_1 = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, 0, 0)$$

porque, al pedir que cada una de las aristas esté en un hiperplano coordenado $x_i = 0$, cada vértice debe de tener dos componentes nulas, los demás vértices se obtienen con la permutación cíclica de las coordenadas de V_1 .

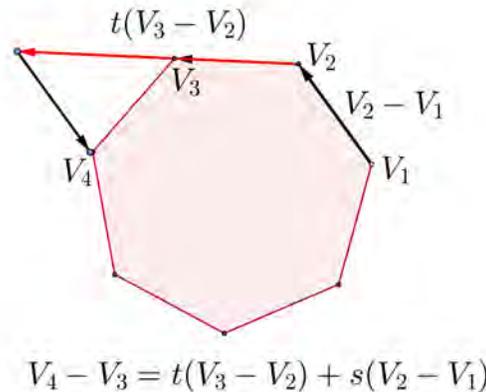


Figura 3.1. Relación entre 4 vértices consecutivos de un polígono.

²¿Cuál es la colección de 7 puntos en \mathbb{R}^4 que se pueden permutar cíclicamente mediante isometrías de \mathbb{R}^4 ? Los resultados que siguen responden a este tipo de preguntas, sobre las cuales se abundará un poco más al final del capítulo.

Como queremos que los vértices estén en un mismo plano, entre 4 vértices consecutivos debe haber relaciones lineales y son las siguientes:

$$V_4 - V_3 = s(V_2 - V_1) + t(V_3 - V_2) \quad (3.1)$$

(y las que se obtienen de las permutaciones cíclicas de los índices $1, \dots, n$, aunque por la simetría cíclica con la anterior es suficiente).

Para un polígono regular, los valores de s y de t son: $t = 2\tau$ y $s = -1$, donde $\tau = \cos(2\pi/n)$.

Así que, para obtener que los vértices V_i formen un polígono regular, debemos tener que

$$V_4 - V_3 = V_1 - V_2 + 2\tau(V_3 - V_2) \quad (3.2)$$

o sea,

$$V_2 - V_1 = 2\tau(V_3 - V_2) - (V_4 - V_3). \quad (3.3)$$

Aplicando esta relación, a partir de la segunda coordenada de los vértices, obtenemos las igualdades:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2\tau a_1 \\ a_3 - a_2 &= 2\tau(a_2 - a_1) - a_1 = (4\tau^2 - 1)a_1 \\ a_4 - a_3 &= 2\tau(a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) = (8\tau^3 - 4\tau)a_1 \\ &\dots \\ a_{i+1} - a_i &= 2\tau(a_i - a_{i-1}) - (a_{i-1} - a_{i-2}) \end{aligned}$$

Se sigue por inducción, que existe un polinomio $c_i(\tau)$ tal que

$$a_{i+1} - a_i = c_i(\tau)a_1$$

y que por lo tanto

$$a_{i+1} = \left(\sum_{j=0}^i c_j(\tau) \right) a_1.$$

Este polinomio debe cumplir que:

$$\begin{aligned} c_0(\tau) &= 1 \\ c_1(\tau) &= 2\tau \\ c_{i+1}(\tau) &= 2\tau c_i(\tau) - c_{i-1}(\tau) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-2} c_i(\tau) &= 0 \\ c_{n-1}(\tau) &= 0 \end{aligned}$$

(ya que $a_{n-1} = a_n = 0$).

Estas relaciones llevan a pensar en polinomios de Chebyshev y, en efecto, los de *segunda especie* U_i , definidos por la propiedad:

$$U_i(\cos(\theta)) = \frac{\text{sen}((i+1)\theta)}{\text{sen}(\theta)}$$

quedan caracterizados por las tres primeras relaciones de recurrencia (ver [1]), luego $c_i = U_i$.

Para ver que se cumplen las dos primeras relaciones obsérvese que:

$$U_{n-1}(\tau) = \frac{\text{sen}(2\pi)}{\text{sen}(2\pi/n)} = 0$$

y que

$$U_i(\tau) = \frac{\text{sen}((i+1)2\pi/n)}{\text{sen}(2\pi/n)} = \frac{\Im(\rho^{i+1})}{\Im(\rho)}$$

donde ρ es la raíz n -ésima de la unidad con argumento $2\pi/n$.

Luego

$$\sum_{i=0}^{n-2} U_i(\tau) = \frac{\sum_{i=0}^{n-2} \Im(\rho^{i+1})}{\Im(\rho)} = \frac{\Im(\sum_{i=0}^{n-2} \rho^{i+1})}{\Im(\rho)} = 0.$$

Entonces tomando

$$a_{i+1} = \left(\sum_{i=0}^i U_i(\tau) \right) a_1.$$

obtenemos que los vértices V_i nos definen un n -ágono plano (porque cumplen las relaciones lineales), regular (porque la distancia entre dos sucesivos es constante) y se localiza dentro de un simplejo (ya que la suma de todas las coordenadas de cada V_i es constante).

Como todas las coordenadas se pueden escribir en términos del valor de a_1 ,

$$V_1 = \left(a_1, \left(\sum_{i=0}^1 U_i(\tau) \right) a_1, \dots, \left(\sum_{i=0}^{n-3} U_i(\tau) \right) a_1, 0, 0 \right)$$

y para estar en el simplejo estándar se tiene que cumplir que

$$a_1 + \left(\sum_{i=0}^1 U_i(\tau) \right) a_1 + \dots + \left(\sum_{i=0}^{n-3} U_i(\tau) \right) a_1 = 1$$

entonces

$$a_1 \left(1 + \left(\sum_{i=0}^1 U_i(\tau) \right) + \dots + \left(\sum_{i=0}^{n-3} U_i(\tau) \right) \right) = 1$$

y al despejar queda:

$$a_1 = 1 / \left(1 + \left(\sum_{i=0}^1 U_i(\tau) \right) + \dots + \left(\sum_{i=0}^{n-3} U_i(\tau) \right) \right)$$

entonces los vértices pertenecen al simplejo unitario.

Obsérvese que como $\text{sen}(2\pi j/n)$ es la parte imaginaria de las raíces de la unidad, se tiene que los vértices son de la forma:

$$(a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 0, 0)$$

La coordenada de mayor subíndice aparece 1 o 2 veces según si n es impar o par.

Hemos demostrado el:

Teorema 3.1. *Existe un n -ágono regular en el simplejo unitario de \mathbb{R}^n tal que interseca a cada hiperplano coordenado en una de sus aristas y sus ecuaciones son:*

$$x_i - (2\tau + 1)x_{i+1} + (2\tau + 1)x_{i+2} - x_{i+3} = 0 \quad (3.4)$$

para $i = 1, \dots, n - 3$ y

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Demostración. Sus ecuaciones se derivan de las que cumplen los vértices:

$$a_{i+1} - a_i = 2\tau(a_i - a_{i-1}) - (a_{i-1} - a_{i-2})$$

o sea,

$$x_{i+1} - x_i = 2\tau(x_i - x_{i-1}) - (x_{i-1} - x_{i-2})$$

O renumerando mediante $j = i - 2$, se obtienen las ecuaciones básicas que generan el polígono regular plano en el simplejo unitario de \mathbb{R}^n y son:

$$x_j - (2\tau + 1)x_{j+1} + (2\tau + 1)x_{j+2} - x_{j+3} = 0$$

para $j = 1, \dots, n$.

De estas ecuaciones las $n - 3$ primeras son independientes, por lo cual, junto con la del simplejo unitario, definen al n -ágono. □

Ejemplificamos esto para algunos valores de n , solamente se describirá una coordenada, las restantes se obtienen con la permutación cíclica de las coordenadas.

El vértice del triángulo es:

$$V_1 = (1, 0, 0)$$

El vértice del cuadrado es:

$$V_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

El vértice del pentágono es:

$$V_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, 0, 0\right)$$

El vértice del hexágono es:

$$V_1 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, 0\right)$$

El vértice del heptágono es:

$$V_1 = \mu \left(1, 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right), 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + 2, 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right), 1, 0, 0\right)$$

con $\mu = 1/(6 + 6 \cos(\frac{2\pi}{7}) - 2 \cos(\frac{3\pi}{7}))$.

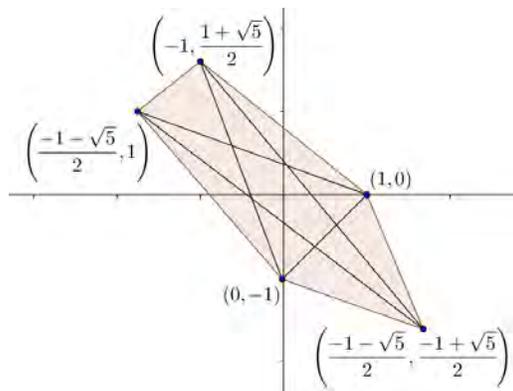


Figura 3.2. Configuración de 5 puntos en \mathbb{R}^2 .

3.3. La configuración de los coeficientes y sus cámaras centrales

Un resultado colateral de este estudio sobre polígonos, es una versión explícita y simétrica de los coeficientes de las ecuaciones que los definen (3.4). Los coeficientes forman una configuración especial de n puntos en \mathbb{R}^{n-3} , cuya envolvente convexa encierra al origen. Esta envolvente resulta ser un politopo especial de dimensión $n - 3$, que parece ser interesante de estudiar. En el caso del pentágono, se obtiene un pentágono más pequeño, con el origen en el centro de éste, formado por las diagonales como se muestra en la figura 3.2.

En el caso de un hexágono obtenemos un prisma triangular. Si consideramos las cámaras en las cuales queda dividido por los planos diagonales que pasan por tres de los vértices, resulta que el origen está en una pequeña cámara central que tiene la forma de una bipirámide triangular (que no está en posición general porque hay cuatro caras que se cortan en un vértice). Para observar distintas perspectivas se hizo un video que está en la dirección: <http://youtu.be/Wfo5-TaKziQ>.

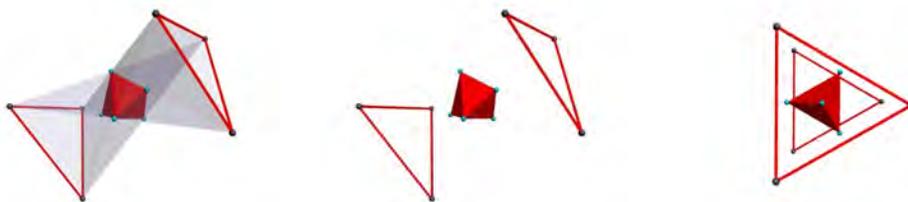


Figura 3.3. Vistas de la cámara central en \mathbb{R}^3 formada por 6 puntos.

Se observó que cuando se perturban los vértices del prisma (correspondiendo ahora a las ecuaciones de un hexágono asimétrico) se pueden obtener cámaras interiores diferentes a la bipirámide que sí están en posición general, con sólo 3 caras en cada vértice.

Con esto surgen otros prismas centrales que resultan de las intersecciones de los planos, se pueden ver los videos de las perturbaciones en las direcciones: <http://youtu.be/1OUmpLefJrM> y <http://youtu.be/ybB0RwmAUjo>. Se muestran las algunas perspectivas en la figura 3.4.

Esto da idea de una rica geometría que se podría explorar en dimensiones superiores, tratando de entender las relaciones entre el politopo y sus posibles cámaras centrales, la relación de éstas con el polígono, etc.

Pero por el momento no nos desviaremos de los sistemas dinámicos y dejaremos esta investigación para un trabajo posterior.

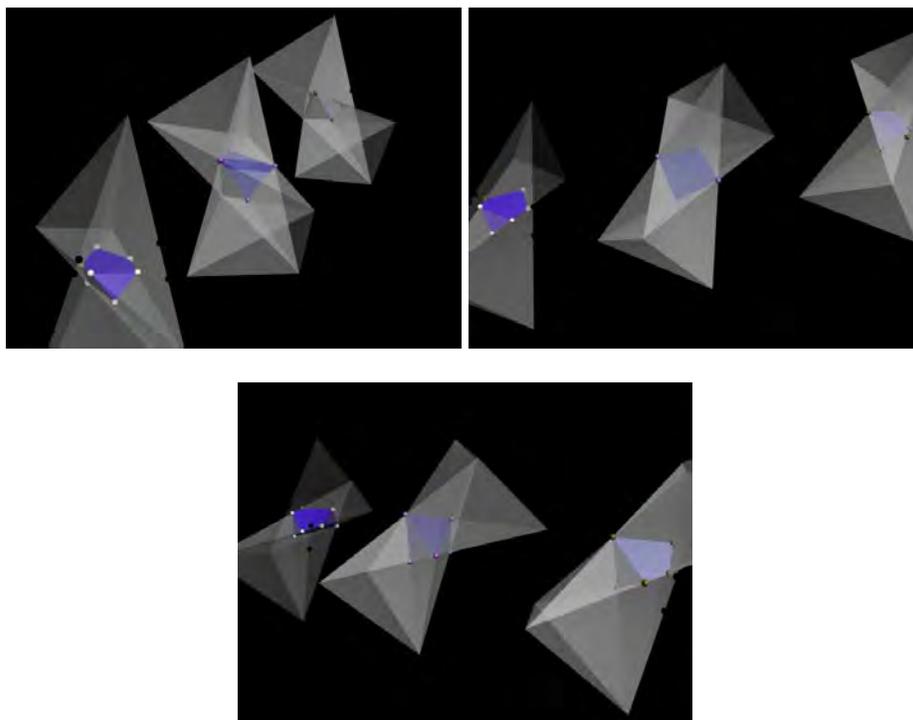


Figura 3.4. Vistas de la perturbación a la cámara central en \mathbb{R}^3 formada por 6 puntos.

Capítulo 4

Campos vectoriales LVK en \mathbb{R}_+^n con polígono portador

En el presente capítulo, se construyen campos Lotka-Volterra-Kolmogorov (LVK) que tienen a un polígono regular de n lados inmerso en \mathbb{R}_+^n , portador de su dinámica.

Para ello se construye en primer lugar, un campo Lotka-Volterra (LV) X al que llamaremos *básico*, que tiene al polígono como atractor y se anula en él. Este campo es una adaptación del construido de manera general en [3] con variedades ángulo-momento invariantes asociadas a politopos. Desarrollaremos en concreto este campo, especialmente para el caso de polígonos regulares.

Por ser este campo nulo en el polígono, dentro de sus perturbaciones se pueden realizar distintas dinámicas en su interior. Veremos que podemos modificarlo de manera que tenga un único punto de equilibrio en el interior del polígono, que puede ser un centro o un foco. Esto se realizará con un campo LVK, que será de grado alto.

La construcción se hará de acuerdo a los siguientes pasos:

- Usaremos los resultados del capítulo 3 para encajar el n -ágono regular en \mathbb{R}_+^n de manera que sus aristas estén en los subespacios $\{x_i = 0\}$ y esté contenido en el simplejo estándar $\Delta_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.
- Usando los resultados de [3], construiremos el campo LV básico X cuyo atractor es el polígono y también sus perturbaciones LVK.

4.1. Construcción para dimensiones 2 y 3

Empezaremos con la descripción para el segmento en \mathbb{R}^2 y para el triángulo en \mathbb{R}^3 , además de construir el campo básico mostraremos sus perturbaciones LVK que dejan fijo al simplejo y sus deformaciones que producen un centro o un foco en su interior y extenderemos las ideas para el caso de un cuadrado en \mathbb{R}^4 y un pentágono en \mathbb{R}^5 en las siguientes secciones.

4.1.1. El segmento en \mathbb{R}^2

Consideremos el segmento (simplejo estándar en \mathbb{R}^2) $\Delta_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y = 1\}$ y el campo X cuyas componentes son:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1-x-y) \\ \dot{y} &= y(1-x-y)\end{aligned}\tag{4.1}$$

éste es un campo radial y tiene a Δ_2 como atractor global, pero su dinámica sobre él no es muy interesante, pues se anula ahí.

Además del simplejo, buscamos que los ejes coordenados permanezcan invariantes, por eso se propone perturbar al campo base agregándole un campo (que puede ser arbitrariamente pequeño si lo multiplicamos por un escalar), de la forma:

$$-\nabla H_2^2 = -\nabla(xy)^2 = -2xy(y, x),$$

para que el campo deje invariante Δ_2 , debemos de tomar solo la proyección del campo anterior, sobre el simplejo estándar,

$$-2xy(y, x) + 2[xy(y, x) \cdot (1, 1)]\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

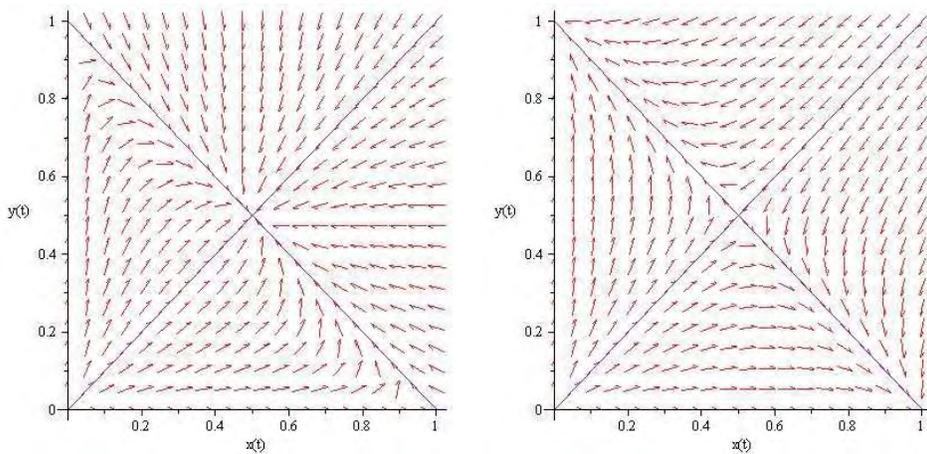
al simplificar, resulta un campo al que le llamaremos Y con componentes:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy(x-y) \\ \dot{y} &= yx(y-x)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Si le sumamos a X este campo multiplicado por una constante, se obtiene el campo $X + \varepsilon Y$ dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1-x-y(1-\varepsilon(x-y))) \\ \dot{y} &= y(1-y-x(1-\varepsilon(y-x))).\end{aligned}\tag{4.3}$$

El campo anterior es cúbico, por lo tanto es LVK y cumple que sigue siendo tangente al simplejo, pero ahora hay un sólo punto de equilibrio en su interior que es atractor. En el caso de la diferencia $X - \varepsilon Y$ éste será un punto silla. En la figura 4.1 se muestran ambas dinámicas.



(a) Campo con un punto atractor sobre el simplejo unitario de \mathbb{R}^2 . (b) Campo con un punto repulsor sobre el simplejo unitario de \mathbb{R}^2 .

Figura 4.1. Simulaciones asociadas al caso bidimensional.

4.1.2. El triángulo en \mathbb{R}^3

Consideremos el simplejo unitario en \mathbb{R}^3 y el campo X con componentes¹

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x - y - z) \\ \dot{y} &= y(1 - x - y - z) \\ \dot{z} &= z(1 - x - y - z)\end{aligned}\tag{4.4}$$

este campo es radial, tiene al simplejo unitario como atractor global y se anula en él. Observamos también, que tanto el simplejo como el campo, son simétricos con respecto a la permutación cíclica de las coordenadas.

Para hacer más interesante este campo, le podemos agregar como en la sección anterior, un campo que deje invariante a las aristas, en este caso las ecuaciones de las aristas del simplejo están dadas simplemente por las variables y por lo tanto podemos buscar un campo que:

- Conserve el producto $H_3 = xyz$
- Preserve el simplejo unitario $x + y + z = 1$

Como campo perturbador Y , proponemos al producto vectorial de los gradientes de H_3 y de $x+y+z$, sus componentes son:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(z - y) \\ \dot{y} &= y(x - z) \\ \dot{z} &= z(y - x)\end{aligned}\tag{4.5}$$

Observando que X también preserva H_3 , tenemos que la suma $X + \varepsilon Y$ preserva tanto a H_3 como al simplejo y que tiene en éste un centro alrededor del cual giran los puntos siguiendo órbitas cerradas.²

El campo $X + \varepsilon Y$ tiene componentes:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x - (1 - \varepsilon)y - (1 + \varepsilon)z) \\ \dot{y} &= y(1 - (1 + \varepsilon)x - y - (1 - \varepsilon)z) \\ \dot{z} &= z(1 - (1 - \varepsilon)x - (1 + \varepsilon)y - z)\end{aligned}\tag{4.6}$$

En este caso el campo sigue siendo LV, si $-1 < \varepsilon < 1$ es un campo May-Leonard como los estudiados en el capítulo 1, con valores $\alpha = 1 - \varepsilon$ y $\beta = 1 + \varepsilon$ y además $\alpha + \beta = 2$.

Tomando en cuenta lo expuesto en el capítulo 1, sabemos que tanto el origen y los vértices del triángulo son puntos críticos y el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es un centro.

Buscamos romper el centro del campo $X + \varepsilon Y$ para encontrar las otras dinámicas presentes en los campos ML. Para esto, le sumaremos un múltiplo escalar del gradiente de H_3^2 , pero modificado, de tal manera que se preserven las ecuaciones del triángulo de la siguiente manera:

Si sólo se toma la proyección de ∇H_3^2 sobre el simplejo, el triángulo seguirá siendo invariante. A continuación escribimos la construcción de la proyección de ∇H_3^2 sobre el simplejo:

¹Este campo ya fue utilizado por Smale en [12] para el simplejo unitario en general en \mathbb{R}^n .

²Las mismas propiedades que estamos estableciendo valen para cualquier combinación lineal de $aX + bY$ con $a > 0$ y $b \neq 0$.

$$Z = H_3 \left(\nabla H_3 - (\nabla H_3 \cdot (1, 1, 1)) \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right) \quad (4.7)$$

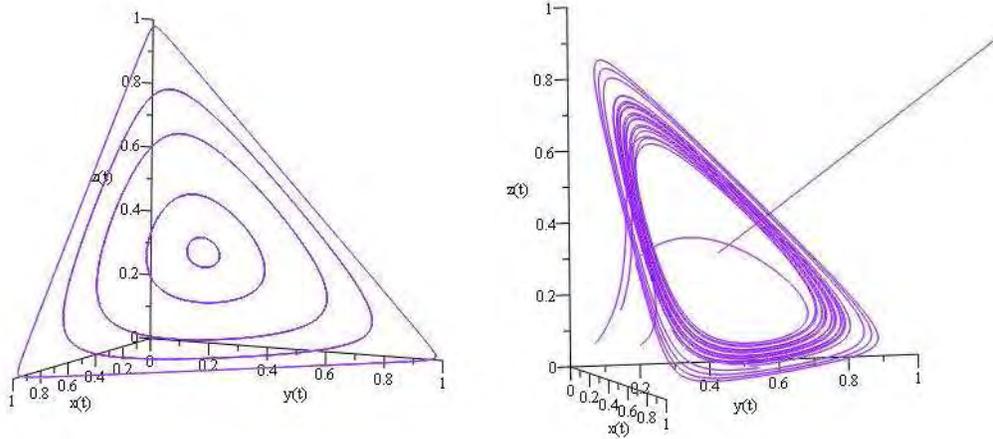
y se obtiene el campo cuyas coordenadas son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -xyz \left(\frac{2}{3}yz - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}xz \right) \\ \dot{y} &= -xyz \left(\frac{2}{3}xz - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}yz \right) \\ \dot{z} &= -xyz \left(\frac{2}{3}xy - \frac{1}{3}xz - \frac{1}{3}yz \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para generar la perturbación al campo $X + \varepsilon Y$ le sumamos ηZ , de esta forma obtenemos las componentes del campo perturbado $X + \varepsilon Y + \eta Z$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(1 - x - (1 - \varepsilon)y - (1 + \varepsilon)z - \eta yz \left(\frac{2}{3}yz - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}xz \right) \right) \\ \dot{y} &= y \left(1 - (1 + \varepsilon)x - y - (1 - \varepsilon)z - \eta xz \left(\frac{2}{3}xz - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}yz \right) \right) \\ \dot{z} &= z \left(1 - (1 - \varepsilon)x - (1 + \varepsilon)y - z - \eta xy \left(\frac{2}{3}xy - \frac{1}{3}xz - \frac{1}{3}yz \right) \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

En la figura 4.2 se muestra la dinámica de ambas perturbaciones.



(a) Campo $X + \varepsilon Y$.

(b) Campo $X + \varepsilon Y + \eta Z$.

Figura 4.2. Caso tridimensional de la perturbación, centro y foco repulsor.

Este campo tiene un foco repulsor en el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ pero sigue teniendo las siguientes propiedades heredadas del campo $X + \varepsilon Y$:

- El simplejo unitario es preservado, el infinito y el origen son repulsores porque el campo Z que se agregó es perpendicular al vector $(1, 1, 1)$.
- El triángulo es un atractor global, pero ahora H_3 es decreciente a lo largo de las trayectorias y en particular las del simplejo se separan del punto de equilibrio y tienden todas al borde del triángulo.

- Este comportamiento es igual al del modelo de May-Leonard, la desventaja es que tiene grado mayor y por lo tanto no es de tipo LV.

4.2. El cuadrado en \mathbb{R}^4

Recordando la ecuación 3.4 del capítulo 3 con el valor de $\tau = \cos(2\pi/4) = 0$ se obtuvo que para el cuadrado, el primer vértice es:

$$V_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right),$$

los restantes se obtienen con la permutación cíclica de las coordenadas y las ecuaciones que lo definen son:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Por lo que se mostrará en la sección 4.4, el campo base está dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - 2x_1 - 2x_3) \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - 2x_2 - 2x_4) \\ \dot{x}_3 &= x_3(1 - 2x_1 - 2x_3) \\ \dot{x}_4 &= x_4(1 - 2x_2 - 2x_4). \end{aligned} \tag{4.11}$$

El campo X es tipo LV de competencia y cumple las siguientes propiedades:

- El cuadrado es un atractor de todo punto en \mathbb{R}_+^4 .
- Sus ecuaciones son cíclicas.

Para demostrar que el cuadrado es atractor, destacamos que la dinámica en las coordenadas 1 y 3 es independiente de las coordenadas 2 y 4, además se cumple lo siguiente:

- a) Los únicos puntos críticos son los que están sobre el cuadrado.
- b) Si nos restringimos a las coordenadas x_1 y x_3 , el campo X es radial en las coordenadas x_1, x_3 y la ecuación $1 - 2x_1 - 2x_3 = 0$ es una superficie atractora para esas coordenadas pues si $1 - 2x_1 - 2x_3 > 0$ tanto \dot{x}_1 como \dot{x}_3 son positivos y si $1 - 2x_1 - 2x_3 < 0$ tanto \dot{x}_1 como \dot{x}_3 son negativos.
- c) Con la restricción a las coordenadas x_2 y x_4 el campo X se cumplen las mismas propiedades señaladas en el inciso b) pero con superficie atractora $1 - 2x_2 - 2x_4 = 0$.

Los argumentos para mostrar que el cuadrado será atractor de cualquier punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^4$, se basan en lo siguiente: supongamos que las coordenadas x_1, x_3 cumplen con $1 - 2x_1 - 2x_3 > 0$ y x_2, x_4 cumplen con $1 - 2x_2 - 2x_4 > 0$ entonces \dot{x}_1 y \dot{x}_3 son positivos haciendo que las coordenadas x_1, x_3 converjan a la superficie $1 - 2x_1 - 2x_3 = 0$ pero también se cumple que \dot{x}_2 y \dot{x}_4 son positivos esto también ocasiona que x_2, x_4 converjan a la superficie $1 - 2x_2 - 2x_4 = 0$, haciendo al cuadrado atractor, los otros casos se demuestran de forma parecida.

El infinito es repulsor ya que el campo es radial en las coordenadas x_1, x_3 y también en x_2, x_4 , además si x_1, x_3 cumplen que $1 - 2x_1 - 2x_3 < 0$ el campo es atractor, o si x_2, x_4 cumplen que $1 - 2x_2 - 2x_4 < 0$ también el campo será atractor en esas coordenadas, por lo que no puede haber ninguna trayectoria que diverja.

4.2.1. Perturbación LVK del cuadrado para generar un centro

En la sección anterior, se mostró una forma de generar un campo LV que tiene como atractor a un cuadrado y ya que la dinámica sobre él es muy simple, queremos producir otro tipo de dinámicas, pero que dejen al cuadrado invariante y siga siendo atractor.

Generaremos un campo perturbador al que llamaremos Y para producir un centro en el cuadrado y éste seguirá siendo invariante.

Queremos que los hiperplanos coordenados $x_i = 0$ (con $i = 1 \dots 4$) y el cuadrado sigan siendo invariantes, por lo que el campo Y debe ser tangente a ellos.

De las ecuaciones 4.10, que definen al cuadrado y la función $H_4 = x_1x_2x_3x_4$ se tomaron sus gradientes para hacer la matriz

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ x_2x_3x_4 & x_1x_3x_4 & x_1x_2x_4 & x_1x_2x_3 \end{pmatrix}$$

El campo Y estará formado por los menores de esa matriz con su signo (es decir, Y es el *producto vectorial* de los tres gradientes), de esta forma se tiene que sus componentes son:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1x_3(x_2 - x_4) \\ y_2 &= 2x_2x_4(x_3 - x_1) \\ y_3 &= 2x_1x_3(x_4 - x_2) \\ y_4 &= 2x_2x_4(x_1 - x_3) \end{aligned} \tag{4.12}$$

así el campo perturbado $X + \varepsilon Y$ es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \varepsilon y_1 &= x_1(1 - 2x_1 - 2x_3 + 2\varepsilon x_2x_3 - 2\varepsilon x_3x_4) \\ \dot{x}_2 + \varepsilon y_2 &= x_2(1 - 2x_2 - 2x_4 + 2\varepsilon x_3x_4 - 2\varepsilon x_1x_4) \\ \dot{x}_3 + \varepsilon y_3 &= x_3(1 - 2x_1 - 2x_3 + 2\varepsilon x_1x_4 - 2\varepsilon x_1x_2) \\ \dot{x}_4 + \varepsilon y_4 &= x_4(1 - 2x_2 - 2x_4 + 2\varepsilon x_1x_2 - 2\varepsilon x_2x_3) \end{aligned} \tag{4.13}$$

El único punto crítico en el interior de \mathbb{R}^4 es el punto $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y sus valores propios son:

$$\begin{bmatrix} i\varepsilon/4 \\ -i\varepsilon/4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para demostrar que el cuadrado sigue siendo atractor, nos auxiliaremos de las funciones $H_4 = x_1x_2x_3x_4$ y $H_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$, mostraremos que X es transversal a H_4 y además es creciente o decreciente respecto a las superficies de nivel de H_4 de acuerdo a la posición relativa con el simplejo unitario.

Al campo Y lo construimos de tal forma que fuera tangente a las superficies de nivel de H_4 y de H_1 por lo que:

$$\begin{aligned}
 (X + \varepsilon Y) \cdot \nabla H_4 &= X \cdot \nabla H_4 = \\
 -2x_1x_2x_3x_4(2x_1 + 2x_3 - 1) - 2x_1x_2x_3x_4(2x_2 + 2x_4 - 1) &= \\
 -4H_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1) &= -4H_4\Delta_4
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde Δ_4 es el simplejo estándar en \mathbb{R}^4 y también,

$$(X + \varepsilon Y) \cdot \nabla H_1 = -(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \frac{1}{2}) \tag{4.15}$$

De 4.14 tenemos que si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^4$ y satisface la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 > 0$$

entonces,

$$(X + \varepsilon Y) \cdot \nabla H_4 < 0$$

por lo tanto, si el punto \mathbf{x} está en un simplejo mayor a 1, el campo $X + \varepsilon Y$ hará que la curva solución cruce transversalmente a las superficies de nivel de H_4 para aproximarse al simplejo unitario.

Si el punto \mathbf{x} estuviera en un simplejo menor a 1, la desigualdad se invierte y el campo $X + \varepsilon Y$ hará que la curva solución sea creciente en H_4 para aproximarse al simplejo unitario.

4.2.1.1. Constante de movimiento para el cuadrado con un centro

Dentro del simplejo unitario, podemos despejar cualquiera de las variables para ponerla en términos de las restantes, sin pérdida de generalidad,

$$x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3,$$

al sustituir este resultado en 4.15 y simplificar se tiene que:

$$(X + \varepsilon Y) \cdot \nabla H_1 = \frac{1}{2}(1 - 2x_1 - 2x_3)$$

esto indica que se tiene el comportamiento de la subsección anterior (4.2) y podemos afirmar que dentro del simplejo unitario, las soluciones tienden al cuadrado.

Para mostrar que sobre el cuadrado se forman centros, hacemos notar que ahí H_4 es una constante de movimiento y además los valores del cuadrado, anulan simultáneamente las ecuaciones 4.14 y 4.15 (ya que las ecuaciones del cuadrado son precisamente $H_1 = 0$ y Δ_4), los puntos del cuadrado forman parte de las curvas intersección del H_4 y $H_1 = 0$ que son curvas solución del sistema y la intersección forma los centros.

Para observar la intersección, se puede parametrizar al cuadrado de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{2} - x_3, \frac{1}{2} - x_4, x_3, x_4\right)$$

con $x_3 \in [0, 1/2]$ y $x_4 \in [0, 1/2]$, la figura 4.3 muestra las curvas de nivel de H_4 cuyos valores varían de 0 a $1/4^4$.

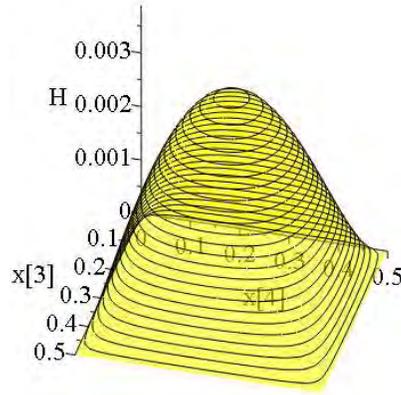


Figura 4.3. Curvas de nivel de H_4 intersectando al cuadrado.

4.2.2. Perturbación LVK del cuadrado para generar un foco

Para generar las otras dinámicas que aparecen en los sistemas ML, se buscó romper el centro.

Para ello, se perturbó al campo $X + \varepsilon Y$ con un campo Z , buscando que el cuadrado siguiera siendo invariante, así como los hiperplanos coordenados, por esto se eligió al campo definido por $-\nabla(H_4^2) = -H_4 \nabla H_4$, pero como queremos que este campo sea tangente al cuadrado, tenemos que tomar solamente la proyección sobre el cuadrado.

La proyección es:

$$-H_4(\nabla H_4 - \nabla H_4 \cdot (1, -1, 1, -1) \frac{(1, -1, 1, -1)}{4} - \nabla H_4 \cdot (1, 1, 1, 1) \frac{(1, 1, 1, 1)}{4}) \quad (4.16)$$

al simplificar, sus componentes quedaron así:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{x_1}{2}(x_1 x_2^2 x_3 x_4^2 - x_2^2 x_3^2 x_4^2) \\ \dot{z}_2 &= \frac{x_2}{2}(x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 - x_1^2 x_3^2 x_4^2) \\ \dot{z}_3 &= \frac{x_3}{2}(x_1 x_2^2 x_3 x_4^2 - x_1^2 x_2^2 x_4^2) \\ \dot{z}_4 &= \frac{x_4}{2}(x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 - x_1^2 x_2^2 x_3^2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Entonces las componentes del campo $X + \varepsilon Y + \eta Z$ son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \varepsilon \dot{y}_1 + \eta \dot{z}_1 &= x_1 \left(1 - 2x_1 - 2x_3 + 2\varepsilon x_2 x_3 - 2\varepsilon x_3 x_4 + \frac{\eta}{2} x_1 x_2^2 x_3 x_4^2 - \frac{\eta}{2} x_2^2 x_3^2 x_4^2 \right) \\ \dot{x}_2 + \varepsilon \dot{y}_2 + \eta \dot{z}_2 &= x_2 \left(1 - 2x_2 - 2x_4 + 2\varepsilon x_3 x_4 - 2\varepsilon x_1 x_4 + \frac{\eta}{2} x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 - \frac{\eta}{2} x_1^2 x_3^2 x_4^2 \right) \\ \dot{x}_3 + \varepsilon \dot{y}_3 + \eta \dot{z}_3 &= x_3 \left(1 - 2x_1 - 2x_3 + 2\varepsilon x_1 x_4 - 2\varepsilon x_1 x_2 + \frac{\eta}{2} x_1 x_2^2 x_3 x_4^2 - \frac{\eta}{2} x_1^2 x_2^2 x_4^2 \right) \\ \dot{x}_4 + \varepsilon \dot{y}_4 + \eta \dot{z}_4 &= x_4 \left(1 - 2x_2 - 2x_4 + 2\varepsilon x_1 x_2 - 2\varepsilon x_2 x_3 + \frac{\eta}{2} x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 - \frac{\eta}{2} x_1^2 x_2^2 x_3^2 \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

El único punto crítico en el interior de \mathbb{R}^4 sigue siendo el punto $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Haciendo un análisis de sus valores propios se obtuvo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\eta}{4096} + i\frac{\varepsilon}{4} \\ \frac{\eta}{4096} - i\frac{\varepsilon}{4} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

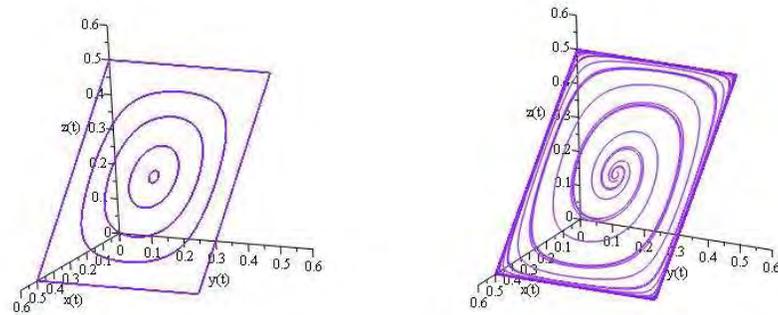
por lo que P es un foco atractor si $\eta < 0$ y foco repulsor si $\eta > 0$.

Para demostrar que el infinito es repulsor se utilizó a la función $H_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, al hacer el producto punto $(X + \varepsilon Y + \eta Z) \cdot \nabla H_1$ y simplificar quedó:

$$\begin{aligned} & (X + \varepsilon Y + \eta Z) \cdot (1, 1, 1, 1) = \\ & -[(x_1 + x_3)(2x_1 + 2x_3 - 1) + (x_2 + x_4)(2x_2 + 2x_4 - 1)] < 0 \end{aligned}$$

por lo que el campo perturbado es transversal a las superficies de nivel de H_1 y el infinito es repulsor.

Con los anteriores argumentos sólo podemos afirmar que el cuadrado sigue siendo atractor, para mostrar que el cuadrado es atractor global, falta demostrar que no hay ciclos límite o algo más exótico, sólo tenemos evidencia numérica de que efectivamente el cuadrado es atractor, presentamos a continuación las simulaciones del centro y del foco repulsor asociados al cuadrado en la figura 4.4.



(a) Campo $X + \varepsilon Y$

(b) Campo $X + \varepsilon Y + \eta Z$

Figura 4.4. Proyecciones a \mathbb{R}^3 de las perturbaciones al campo X para generar centros y focos.

Hemos demostrado:

Teorema 4.1. *Existen campos vectoriales LVK en \mathbb{R}_+^4 que tienen a un cuadrado como atractor en el interior de \mathbb{R}_+^4 con un punto de equilibrio en el centro del cuadrado que puede ser:*

- a) *un centro, cuyas trayectorias cerradas folian el cuadrado, (en este caso el cuadrado sería atractor global)*
- b) *o un foco que puede ser repulsor o atractor y cuyas trayectorias tienen como conjuntos límite al foco y a la frontera del cuadrado (conjetura basada en evidencia numérica).*

Estos campos vectoriales son invariantes bajo permutaciones cíclicas de las coordenadas y cambian de signo si se invierte el orden de las mismas.

Este es el arquetipo para construir campos base X LV en \mathbb{R}_+^n con un polígono regular de n lados como atractor que al perturbarlos con campos LVK dan origen a centros o focos atractores y repulsores, cuyas trayectorias tiene como conjuntos límite al foco y a la frontera del polígono.

4.3. El pentágono en \mathbb{R}^5

Para construir el pentágono regular en \mathbb{R}_+^5 se usaron los resultados del capítulo 3, el primer vértice es:

$$V_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, 0, 0 \right),$$

los restantes se obtienen con la permutación cíclica de las coordenadas, por lo visto en el capítulo 3 sus ecuaciones están dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 - (2\tau + 1)x_2 + (2\tau + 1)x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - (2\tau + 1)x_3 + (2\tau + 1)x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\text{con } \tau = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Por el procedimiento general que se mostrará en la sección 4.4, las componentes del campo base X están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_1 - (1 + \sqrt{5})x_3 - (1 + \sqrt{5})x_4 \right) \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_2 - (1 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_5 \right) \\ \dot{x}_3 &= x_3 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_3 - (1 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_1 \right) \\ \dot{x}_4 &= x_4 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_5 - (1 + \sqrt{5})x_2 \right) \\ \dot{x}_5 &= x_5 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_5 - (1 + \sqrt{5})x_1 - (1 + \sqrt{5})x_3 \right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

El campo X es un campo LV, para verificar que el pentágono es atractor, se hizo lo siguiente:

$$X \cdot \nabla H_5 = (5 + 3\sqrt{5})x_1x_2x_3x_4x_5(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) \tag{4.21}$$

donde $H_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$.

Usando 4.21 se puede ver que si un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^5$ se encuentra en un simplejo que no es el unitario, la solución es transversal a las superficies de nivel de H_5 . Si \mathbf{x} está en un simplejo menor al unitario, la solución deberá cruzar las superficies de nivel de H_5 de forma creciente hasta llegar al simplejo unitario, en caso de que \mathbf{x} esté en un simplejo mayor al unitario el cruce será decreciente, por lo que podemos concluir que el simplejo es atractor global de X .

Dentro del simplejo unitario, hay un conjunto de puntos críticos formando el pentágono, las ecuaciones bi-paramétricas del plano que contiene al pentágono son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{5}-1}{20}(2\sqrt{5}-5(1+\sqrt{5})x_4+10x_5) \\ x_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{20}(5+\sqrt{5}-10x_4-10x_5) \\ x_3 &= \frac{\sqrt{5}-1}{20}(2\sqrt{5}+10x_4-5(1+\sqrt{5})x_5) \end{aligned} \quad (4.22)$$

mientras que los valores propios de los puntos sobre el pentágono son:

$$\begin{array}{c} -3\frac{\sqrt{5}}{5}-1 \\ -1-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{(250+50\sqrt{5})x_4^2+(250+50\sqrt{5})x_5^2-100\sqrt{5}x_4x_5-100x_4-100x_5+20} \\ -1-\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{(250+50\sqrt{5})x_4^2+(250+50\sqrt{5})x_5^2-100\sqrt{5}x_4x_5-100x_4-100x_5+20} \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

El polinomio cuadrático

$$(250+50\sqrt{5})x_4^2+(250+50\sqrt{5})x_5^2-100\sqrt{5}x_4x_5-100x_4-100x_5+20$$

es definido positivo, su valor mínimo se alcanza cuando todas las coordenadas valen $\frac{1}{5}$, el valor del polinomio en ese punto es 0. El punto coincide con el centro del pentágono y al ser un pentágono regular, el valor máximo se alcanza en los vértices, pero ahí el valor de la forma cuadrática es 20 pues $x_4 = 0$ y $x_5 = 0$, lo que implica que el segundo valor propio es negativo, por lo que el pentágono es atractor.

Para demostrar que el pentágono es atractor global nos faltaría demostrar que el infinito es repulsor y que no hay ciclos límites dentro del simplejo unitario o algo más exótico, sólo podemos tener evidencia numérica de que es atractor global por las simulaciones que presentamos.

4.3.1. Perturbación LVK del pentágono para generar un centro

Generaremos un campo perturbador Y para producir un centro en el pentágono como se hizo para el cuadrado.

De las ecuaciones que definen al pentágono 4.19 junto con la función $H_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$ se tomaron sus gradientes para hacer la matriz:

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \frac{3\sqrt{5}+5}{2} & \frac{3\sqrt{5}+5}{2} & \frac{3\sqrt{5}+5}{2} & \frac{3\sqrt{5}+5}{2} & \frac{3\sqrt{5}+5}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ x_2 x_3 x_4 x_5 & x_1 x_3 x_4 x_5 & x_1 x_2 x_4 x_5 & x_1 x_2 x_3 x_5 & x_1 x_2 x_3 x_4 \end{pmatrix}$$

El campo Y estará formado por los menores de esa matriz con su signo (es decir, Y es el *producto vectorial* de los 4 gradientes), de esta forma se tiene que sus componentes son:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= \frac{5(\sqrt{5}+2)}{2} \left((\sqrt{5}-1)(x_3-x_4)x_2x_5 + 2(x_2-x_5)x_3x_4 \right) x_1 \\
 \dot{y}_2 &= \frac{5(\sqrt{5}+3)}{4} \left((\sqrt{5}+1)(x_3-x_1)x_4x_5 + 2(x_4-x_5)x_1x_3 \right) x_2 \\
 \dot{y}_3 &= \frac{5(\sqrt{5}+3)}{4} \left((\sqrt{5}+1)(x_4-x_2)x_5x_1 + 2(x_5-x_1)x_2x_4 \right) x_3 \\
 \dot{y}_4 &= \frac{5(\sqrt{5}+2)}{2} \left((\sqrt{5}-1)(x_1-x_2)x_3x_5 + 2(x_5-x_3)x_1x_2 \right) x_4 \\
 \dot{y}_5 &= \frac{5(\sqrt{5}+2)}{2} \left((\sqrt{5}-1)(x_2-x_3)x_4x_1 + 2(x_1-x_4)x_2x_3 \right) x_5
 \end{aligned}$$

así las componentes del campo perturbado son:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 + \epsilon \dot{y}_1 &= x_1 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_1 - (1 + \sqrt{5})x_3 - (1 + \sqrt{5})x_4 + \right. \\
 &\quad \left. \epsilon \frac{5(\sqrt{5}+2)}{2} \left((\sqrt{5}-1)(x_3-x_4)x_2x_5 + 2(x_2-x_5)x_3x_4 \right) \right) \\
 \dot{x}_2 + \epsilon \dot{y}_2 &= x_2 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_2 - (1 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_5 + \right. \\
 &\quad \left. \epsilon \frac{5(\sqrt{5}+3)}{4} \left((\sqrt{5}+1)(x_3-x_1)x_4x_5 + 2(x_4-x_5)x_1x_3 \right) \right) \\
 \dot{x}_3 + \epsilon \dot{y}_3 &= x_3 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_3 - (1 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_1 + \right. \\
 &\quad \left. \epsilon \frac{5(\sqrt{5}+3)}{4} \left((\sqrt{5}+1)(x_4-x_2)x_5x_1 + 2(x_5-x_1)x_2x_4 \right) \right) \\
 \dot{x}_4 + \epsilon \dot{y}_4 &= x_4 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_5 - (1 + \sqrt{5})x_2 + \right. \\
 &\quad \left. \epsilon \frac{5(\sqrt{5}+2)}{2} \left((\sqrt{5}-1)(x_1-x_2)x_3x_5 + 2(x_5-x_3)x_1x_2 \right) \right) \\
 \dot{x}_5 + \epsilon \dot{y}_5 &= x_5 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_5 - (1 + \sqrt{5})x_1 - (1 + \sqrt{5})x_3 + \right. \\
 &\quad \left. \epsilon \frac{5(\sqrt{5}+2)}{2} \left((\sqrt{5}-1)(x_2-x_3)x_4x_1 + 2(x_1-x_4)x_2x_3 \right) \right) \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

El único punto crítico en el interior de \mathbb{R}^5 es el punto $P = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ y sus valores propios son:

$$\begin{aligned}
 & -3\frac{\sqrt{5}}{5} - 1 \\
 & \frac{i\epsilon}{50} \sqrt{250 + 110\sqrt{5}} \\
 & -\frac{i\epsilon}{50} \sqrt{250 + 110\sqrt{5}} \\
 & -1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \\
 & -1 - \frac{\sqrt{5}}{5}
 \end{aligned}$$

Esto indica que el pentágono sigue siendo atractor y que es posible tener sobre él centros, en la siguiente subsección se mostrará que efectivamente hay centros que folian al pentágono.

4.3.1.1. Constante de movimiento para el pentágono con un centro

Para analizar que sobre el pentágono se generan centros, se usó el hecho de que el pentágono está inmerso en el plano generado por las ecuaciones 4.19 y su parametrización está dada por las ecuaciones 4.22.

Se propone como constante de movimiento a $H_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$. Al hacer el producto punto de $X + \epsilon Y$ con el gradiente de H_5 y simplificar quedó:

$$\nabla H_5 \cdot (X + \epsilon Y) = (5 + 3\sqrt{5})(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)$$

Esto nos dice que si \mathbf{x} pertenece al simplejo unitario, H_5 es una constante de movimiento, como sabemos que hay un plano invariante (donde está el pentágono), la intersección de H_5 y el plano generarán curvas solución que son centros como lo hacemos notar en la figura 4.5.

Estas curvas se pueden visualizar si se sustituye en H_5 la parametrización del pentágono 4.22. Los valores de las curvas de nivel asociadas a H_5 varían de 0 a $1/5^5$ desde el vértice hasta el centro.

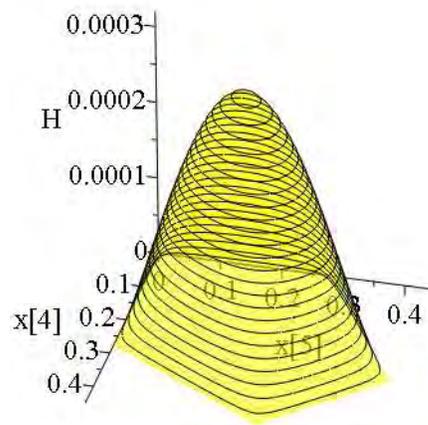


Figura 4.5. Curvas de nivel de H_5 intersectando al pentágono.

4.3.2. Perturbación LVK del pentágono para generar un foco

Para romper el centro, se perturbó el campo $X + \epsilon Y$ con un campo Z , obtenido de la proyección sobre el pentágono del campo definido por $-H_5 \nabla H_5$ como en caso del cuadrado 4.16, al simplificar quedó:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{x_1x_2x_3x_4^2x_5}{10} [((1 - \sqrt{5})x_1 - 6x_2)x_3x_5 + ((3 + \sqrt{5})x_5 + 2x_3)x_1x_2] \\ \dot{z}_2 &= \frac{x_1x_2x_3x_4x_5^2}{10} [((1 - \sqrt{5})x_2 + (\sqrt{5} - 3)x_1)x_3x_4 + ((4 + 2\sqrt{5})x_3 - (2 + 2\sqrt{5})x_4)x_1x_2] \\ \dot{z}_3 &= \frac{x_1x_2x_3x_4x_5}{10} [(\sqrt{5} + 3)(x_1 + x_5)x_2x_3x_4 - (2\sqrt{5} + 2)(x_2 + x_4)x_1x_3x_5 + (2\sqrt{5} - 2)x_1x_2x_4x_5] \\ \dot{z}_4 &= \frac{x_1^2x_2x_3x_4x_5}{10} [((1 - \sqrt{5})x_4 + (\sqrt{5} - 3)x_5)x_2x_3 + ((4 + 2\sqrt{5})x_3 - (2 + 2\sqrt{5})x_2)x_4x_5] \\ \dot{z}_5 &= \frac{x_1x_2^2x_3x_4x_5}{10} [((1 - \sqrt{5})x_5 - 6x_4)x_1x_3 + ((3 + \sqrt{5})x_1 + 2x_3)x_4x_5] \end{aligned}$$

Al agrupar los 3 campos se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 + \epsilon \dot{y}_1 + \eta \dot{z}_1 &= x_1 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_1 - (1 + \sqrt{5})x_3 - (1 + \sqrt{5})x_4 \right. \\
&\quad + \epsilon \frac{5(\sqrt{5} + 2)}{2} \left((\sqrt{5} - 1)(x_3 - x_4)x_2x_5 + 2(x_2 - x_5)x_3x_4 \right) \\
&\quad \left. + \eta \frac{x_2x_3x_4^2x_5}{10} [(1 - \sqrt{5})x_1 - 6x_2)x_3x_5 + ((3 + \sqrt{5})x_5 + 2x_3)x_1x_2] \right) \\
\dot{x}_2 + \epsilon \dot{y}_2 + \eta \dot{z}_2 &= x_2 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_2 - (1 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_5 \right. \\
&\quad + \epsilon \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{4} \left((\sqrt{5} + 1)(x_3 - x_1)x_4x_5 + 2(x_4 - x_5)x_1x_3 \right) \\
&\quad + \eta \frac{x_1x_3x_4x_5^2}{10} [(1 - \sqrt{5})x_2 + (\sqrt{5} - 3)x_1)x_3x_4 + \\
&\quad \left. ((4 + 2\sqrt{5})x_3 - (2 + 2\sqrt{5})x_4)x_1x_2] \right) \\
\dot{x}_3 + \epsilon \dot{y}_3 + \eta \dot{z}_3 &= x_3 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_3 - (1 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_1 \right. \\
&\quad + \epsilon \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{4} \left((\sqrt{5} + 1)(x_4 - x_2)x_5x_1 + 2(x_5 - x_1)x_2x_4 \right) \\
&\quad + \eta \frac{x_1x_2x_4x_5}{10} [(\sqrt{5} + 3)(x_1 + x_5)x_2x_3x_4 \\
&\quad \left. - (2\sqrt{5} + 2)(x_2 + x_4)x_1x_3x_5 + (2\sqrt{5} - 2)x_1x_2x_4x_5] \right) \\
\dot{x}_4 + \epsilon \dot{y}_4 + \eta \dot{z}_4 &= x_4 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_5 - (1 + \sqrt{5})x_2 \right. \\
&\quad + \epsilon \frac{5(\sqrt{5} + 2)}{2} \left((\sqrt{5} - 1)(x_1 - x_2)x_3x_5 + 2(x_5 - x_3)x_1x_2 \right) \\
&\quad + \eta \frac{x_1^2x_2x_3x_5}{10} [(1 - \sqrt{5})x_4 + (\sqrt{5} - 3)x_5)x_2x_3 + \\
&\quad \left. ((4 + 2\sqrt{5})x_3 - (2 + 2\sqrt{5})x_2)x_4x_5] \right) \\
\dot{x}_5 + \epsilon \dot{y}_5 + \eta \dot{z}_5 &= x_5 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_5 - (1 + \sqrt{5})x_1 - (1 + \sqrt{5})x_3 \right. \\
&\quad + \epsilon \frac{5(\sqrt{5} + 2)}{2} \left((\sqrt{5} - 1)(x_2 - x_3)x_4x_1 + 2(x_1 - x_4)x_2x_3 \right) \\
&\quad \left. + \eta \frac{x_1x_2^2x_3x_4}{10} [(1 - \sqrt{5})x_5 - 6x_4)x_1x_3 + ((3 + \sqrt{5})x_1 + 2x_3)x_4x_5] \right)
\end{aligned}$$

El único punto crítico en el interior de \mathbb{R}^5 del campo $X + \epsilon Y + \eta Z$ sigue siendo $P = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

Haciendo un análisis de sus valores propios se obtuvo:

$$\begin{aligned}
&-\frac{3\sqrt{5}}{5} - 1 \\
&\frac{\eta}{390625} + \frac{i\epsilon}{50} \sqrt{250 + 110\sqrt{5}} \\
&\frac{\eta}{390625} - \frac{i\epsilon}{50} \sqrt{250 + 110\sqrt{5}} \\
&-1 - \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\eta}{781250}(1 + \sqrt{5}) \\
&-1 - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\eta}{781250}(1 + \sqrt{5})
\end{aligned}$$

Por lo que P es un foco repulsor si $\eta > 0$ y es un foco atractor si $\eta < 0$.

Faltaría demostrar que el campo $X + \epsilon Y + \eta Z$ tiene como atractor global al pentágono, pero no hemos podido encontrar una función de Lyapunov que sirva para este propósito, esto quedará para un trabajo posterior.

Hemos demostrado:

Teorema 4.2. *Existen campos vectoriales LVK en \mathbb{R}_+^5 que tienen a un pentágono como atractor en el interior de \mathbb{R}_+^5 con un punto de equilibrio en el centro del pentágono que puede ser:*

- a) *un centro, cuyas trayectorias cerradas convergen a la frontera del pentágono.*
- b) *o un foco que puede ser repulsor o atractor, y cuyas trayectorias tienen como conjuntos límite al foco y a la frontera del pentágono (conjetura basada en la evidencia numérica)*

4.4. Construcción del campo base en \mathbb{R}_+^n

Los vértices del polígono satisfacen las ecuaciones:

$$x_j - (2\tau + 1)x_{j+1} + (2\tau + 1)x_{j+2} - x_{j+3} = 0 \quad (4.24)$$

para $j = 1, \dots, n$. Las primeras $n - 3$ son independientes y junto con el simplejo estándar, definen el n -ágono.

De estas ecuaciones podemos obtener un campo Lotka-Volterra como sigue:

Haciendo un cambio de coordenadas: $x_i = y_i^2$ obtenemos ecuaciones para una variedad a la que llamaremos Z en \mathbb{R}^n que es una intersección de cuádricas dadas por las ecuaciones

$$y_j^2 - (2\tau + 1)y_{j+1}^2 + (2\tau + 1)y_{j+2}^2 - y_{j+3}^2 = 0, \quad j = 1 \dots n - 3 \quad (4.25)$$

$$\sum_{i=1}^n ky_i^2 - 1 = 0 \quad (4.26)$$

Si denotamos a f_j como el lado izquierdo de la j -ésima de esas ecuaciones para $j = 1 \dots n - 2$, entonces, se sigue de la construcción general hecha en [3], que el potencial es:

$$V = - \sum_{j=1}^{n-2} f_j^2, \quad (4.27)$$

donde V toma su máximo valor de 0 en Z y es negativa en todo lo demás.

Entonces, el campo $Y = \nabla V$, tiene a Z como una variedad atractora invariante (de hecho todos sus puntos son puntos fijos), y como se muestra en [3] sabemos que Z es una variedad invariante normalmente hiperbólica de Y .

Las componentes de Y son de la forma

$$Y_i = y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j^2 \right) \quad (4.28)$$

Regresando a las coordenadas x_i se obtiene un campo X en \mathbb{R}_+^n con componentes ³

³El campo en las coordenadas x_i tendrá un factor de 2 en cada componente, que se quita para obtener X sin que cambien sus propiedades cualitativas.

$$X_i = x_i(b_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j) \tag{4.29}$$

Entonces X tiene al polígono como invariante y todos sus puntos son puntos fijos y atractores.

Es claro que por el mismo procedimiento se puede demostrar este resultado para cualquier dimensión, por lo tanto tenemos:

Teorema 4.3. *Existen campos vectoriales LVK en \mathbb{R}_+^n que tienen un n -ágono invariante, que es atractor en el interior de \mathbb{R}_+^n y con un punto de equilibrio en el centro del n -ágono que posee cualquiera de las siguientes dinámicas:*

- a) *Un centro cuyas trayectorias cerradas se acumulan en la frontera del n -ágono, o*
- b) *Un foco repulsor cuyas trayectorias son espirales asintóticas a la frontera del n -ágono (en este caso se tiene la conjetura basada en evidencia numérica).*

A continuación se muestran las simulaciones del centro y del foco repulsor asociados al pentágono en \mathbb{R}^5 (figura 4.6) y al hexágono en \mathbb{R}^6 (figura 4.7).

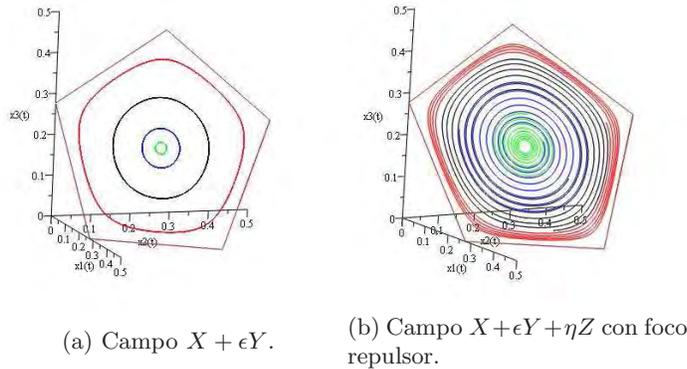


Figura 4.6. Perturbaciones LVK para el pentágono.

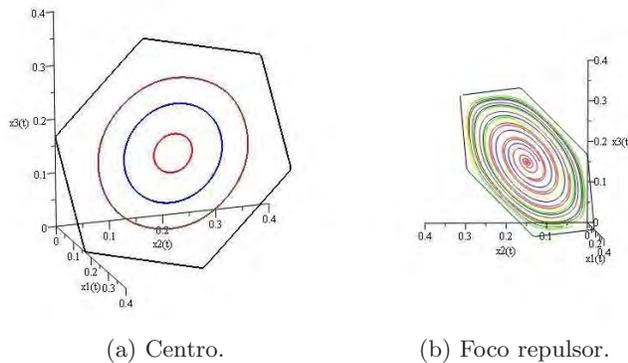


Figura 4.7. Perturbaciones LVK para el hexágono.

Capítulo 5

Perturbaciones LV

Un problema también interesante es el de encontrar perturbaciones que sean de tipo LV para dimensión $n > 3$ y que se encuentren dinámicas como las expuestas en el capítulo 4 para extender las ideas de [9].

Para polígonos de más de 3 lados el problema es difícil, demostraremos en la sección 5.1 que, a diferencia del caso $n = 3$, con los campos LV que dejan invariante al polígono plano no se obtienen dinámicas interesantes sobre él. Las dinámicas interesantes se pueden encontrar en polígonos curvilíneos cercanos al polígono plano. Esto lo demostraremos usando la teoría de estabilidad de variedades invariantes normalmente hiperbólicas.

Se pueden observar en las simulaciones numéricas, campos que tienen un foco repulsor con las características del sistema de May-Leonard, pero no hemos podido demostrar rigurosamente que se tienen exactamente los comportamientos del sistema de May-Leonard, debido a que no hemos podido construir una función adecuada que juegue el papel, según el caso, de integral primera (para comprobar que hay un centro) o de función de Lyapunov adecuada (para demostrar que las trayectorias tienden asintóticamente al borde del polígono). La búsqueda de esas funciones será parte de un trabajo posterior.

Hemos podido obtener, con base en el Teorema de Poincaré-Bendixon, un resultado parcial: existen campos que tienen un comportamiento de dominación rotativa entre las diferentes especies, pero esto podría suceder porque las trayectorias que parten del foco tienden asintóticamente ya sea a una trayectoria cíclica interior o al borde del polígono.

Se pudieron localizar valores de los parámetros de la perturbación que dan lugar a un conjunto de campos que presentan centros en el interior del simplejo portador en \mathbb{R}^4 , el análisis explícito se pudo hacer de manera completa.

5.1. Sistemas LV con n -ágono plano invariante en \mathbb{R}_+^n

Se mostrará primero que sistemas de tipo May-Leonard, con n -ágono invariante *plano* y dinámica interesante sobre él mismo no pueden existir si $n > 3$, enunciando el siguiente:

Teorema 5.1. *Si un sistema LV en \mathbb{R}_+^n tiene un n -ágono invariante plano entonces su restricción a éste es como sigue:*

- a) *Si $n = 4$, o bien es idénticamente 0, o bien todas sus trayectorias convergen a una arista o un vértice.*
- b) *Si $n > 4$, es idénticamente 0.*

Demostración. Consideremos una parametrización afín con coordenadas (u, v) del plano en \mathbb{R}^n que contiene al polígono. En términos de esa parametrización, los productos interiores del campo LV con los vectores normales al n -ágono se anulan en éste. Por ser esos productos polinomios en u, v que se anulan en la imagen inversa del n -ágono bajo la parametrización, también deben anularse en todo el plano. Esto significa que el campo es tangente al plano en todos sus puntos.

Esto induce un campo en el plano (u, v) que es cuadrático y deja invariante a un n -ágono. Por el teorema 2.3, el campo en el plano (u, v) sólo puede ser como el descrito en los incisos a), b) del teorema 5.1 y lo mismo sucederá con el campo original en el plano del n -ágono y el teorema está demostrado. \square

5.2. Perturbación al sistema en \mathbb{R}^4 con campos LV

De acuerdo a la técnica desarrollada en el capítulo 4, sabemos que en \mathbb{R}^4 , las componentes del campo de base son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - 2x_1 - 2x_3) \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - 2x_2 - 2x_4) \\ \dot{x}_3 &= x_3(1 - 2x_1 - 2x_3) \\ \dot{x}_4 &= x_4(1 - 2x_2 - 2x_4) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Al perturbar el campo X con un campo LV (X_{lv}) con componentes de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{lv1} &= x_1(f - ex_1 - ax_2 - bx_3 - cx_4) \\ \dot{x}_{lv2} &= x_2(f - cx_1 - ex_2 - ax_3 - bx_4) \\ \dot{x}_{lv3} &= x_3(f - bx_1 - cx_2 - ex_3 - ax_4) \\ \dot{x}_{lv4} &= x_4(f - ax_1 - bx_2 - cx_3 - ex_4) \end{aligned} \tag{5.2}$$

con a, b, c, e y f positivos para garantizar que el campo sea de competencia.

Se encontró que el campo $\hat{X} = X + X_{lv}$ tiene un único punto crítico en el interior de \mathbb{R}^4 dado por:

$$P = \mu(1, 1, 1, 1)$$

con $\mu = \frac{f+1}{4+a+b+c+e}$ y sus valores propios son:

$$\begin{aligned} & -1 - f \\ & \nu(a + c - b - e - 4) \\ & \nu(b - e + i(c - a)) \\ & \nu(b - e - i(c - a)) \end{aligned}$$

con $\nu = (1 + f)/(4 + a + b + c + e)$.

Para valores pequeños de los parámetros, los primeros 2 valores propios son positivos, así que los valores propios que nos interesan son los últimos 2 (conjugados).

$$\nu(b - e \pm i(c - a))$$

De lo anterior se puede concluir que si $b \neq e$ y $c \neq a$ el campo \hat{X} podrá tener un foco repulsor.

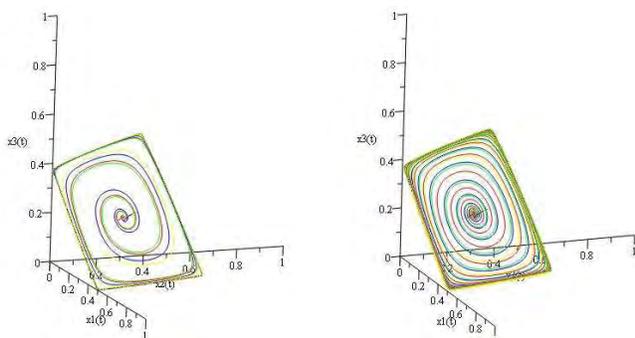
El análisis nos muestra la existencia de cuadrados curvilíneos invariantes para muchos valores de los parámetros.

Tomando en cuenta las posibilidades para los valores propios del punto crítico interior, surge la idea de poder encontrar bifurcaciones, pero solamente contamos con evidencia numérica de este hecho.

Sólo podemos concluir que a las trayectorias que se originan cerca del punto crítico le podrían suceder 2 cosas:

- a) Las trayectorias convergen asintóticamente a la frontera del cuadrilátero curvilíneo o,
- b) Las trayectorias convergen a una curva contenida en el cuadrilátero curvilíneo

En las figuras 5.1 y 5.2 se muestran las simulaciones para algunos valores particulares de las constantes para generar focos repulsores.



(a) Perturbación del cuadrado con valores $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{10}, c = e = f = 0$. (b) Perturbación del cuadrado con valores $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{20}, c = e = f = 0$.

Figura 5.1. Proyecciones en \mathbb{R}^3 de perturbaciones LV para el cuadrado.

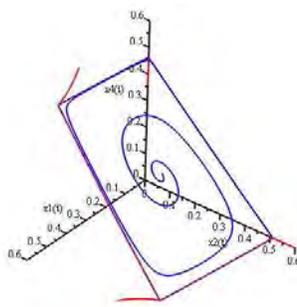


Figura 5.2. Proyección de la perturbación del campo base con valores $a = 0, e = f = 1/20, b = \frac{1}{10}$ y $c = \frac{1}{5}$.

5.3. Centros generados dentro del simplejo portador

Un resultado colateral fue el siguiente: si $a = 0, e = f = b$ entonces cuando se hace el producto punto entre el gradiente de $H_4 = x_1x_2x_3x_4$ y el campo \hat{X} se tiene que:

$$\nabla H_4 \cdot \hat{X} = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(4 + 2b - c)$$

De lo anterior concluimos que si $c = 4 + 2b$ entonces H_4 es una primera integral para ese conjunto de campos.

Las soluciones de este campo vectorial son un conjunto de curvas cerradas (centros) que folian el simplejo unitario $\Delta_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i = 1\}$.

En la figura 5.3 se muestran algunas curvas asociadas a H_4 dentro del simplejo portador.

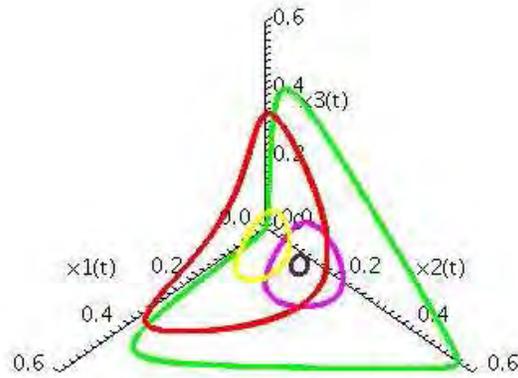


Figura 5.3. Proyección en \mathbb{R}^3 del campo base para valores $a = 0, e = f = b, c = 4 + 2b$.

Como el simplejo Δ_4 de \mathbb{R}^4 inmerso en \mathbb{R}^3 se puede visualizar como un tetraedro cuyas aristas están sobre los ejes coordenados y el origen, hablar del simplejo unitario o del tetraedro será lo mismo pues nos interesa la dinámica que se desarrolla en ellos.

Este caso se puede entender como el caso límite de las perturbaciones al cuadrado portador de la dinámica del campo base X , generadas por el campo Lotka-Volterra de la sección anterior.

El cuadrado se deforma en dos de las caras triangulares del tetraedro, la curva verde de la figura 5.3 es una aproximación a ellas.

Los centros de las curvas están agrupados en un segmento que une dos aristas del tetraedro, que no se intersectan (uno de ellos forma parte del eje x_2).

Esta familia de campos da idea de una rica dinámica a explorar que se dejará para un trabajo posterior.

5.4. Perturbación a los sistemas en \mathbb{R}^5 y \mathbb{R}^6

Como se vio en el capítulo 4 en la sección 4.3, el campo base del pentágono 4.20 es:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_1\left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_1 - (1 + \sqrt{5})x_3 - (1 + \sqrt{5})x_4\right) \\
 \dot{x}_2 &= x_2\left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_2 - (1 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_5\right) \\
 \dot{x}_3 &= x_3\left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_3 - (1 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_1\right) \\
 \dot{x}_4 &= x_4\left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_4 - (1 + \sqrt{5})x_5 - (1 + \sqrt{5})x_2\right) \\
 \dot{x}_5 &= x_5\left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 - (3 + \sqrt{5})x_5 - (1 + \sqrt{5})x_1 - (1 + \sqrt{5})x_3\right)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

El campo Lotka-Volterra con el que se perturba al campo base está representado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{lv1} &= x_1(f - ex_1 - ax_2 - bx_3 - cx_4 - dx_5) \\
 \dot{x}_{lv2} &= x_2(f - dx_1 - ex_2 - ax_3 - bx_4 - cx_5) \\
 \dot{x}_{lv3} &= x_3(f - cx_1 - dx_2 - ex_3 - ax_4 - bx_5) \\
 \dot{x}_{lv4} &= x_4(f - bx_1 - cx_2 - dx_3 - ex_4 - ax_5) \\
 \dot{x}_{lv5} &= x_5(f - ax_1 - bx_2 - cx_3 - dx_4 - ex_5)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

con a, b, c, d, e y f positivos.

Al perturbar el campo, se obtiene en el interior de \mathbb{R}^5 un único punto crítico dado por:

$$P = \mu(1, 1, 1, 1, 1)$$

con $\mu = \frac{1+3\sqrt{5}/5+f}{5+3\sqrt{5}+a+b+c+d+e}$ y cuyos valores propios son:

$$\begin{aligned}
 &\mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{8}(2(a+d) - (3+\sqrt{5})(b+c) + 2(1-\sqrt{5})e - 8\sqrt{5})\right. \\
 &\quad \left.\pm i\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}[(1+\sqrt{5})(b-c) + 2(d-a)]^2}\right), \\
 &\mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{8}(2(a+d) - (3+\sqrt{5})(b+c) + 2(1+\sqrt{5})e)\right. \\
 &\quad \left.\pm i\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}[2(a-d) + (1-\sqrt{5})(c-b)]^2}\right), \\
 &\quad -1 - \frac{3\sqrt{5}}{5} - f
 \end{aligned}$$

Se observa que para el primer par de valores propios $-8\sqrt{5}$ hace imposible que la parte real se anule con valores pequeños de las constantes, por lo que para una perturbación pequeña la parte real es siempre negativa contribuyendo a que el pentágono sea atractor.

Por el segundo par de vectores propios, existen valores pequeños de a, b, c, d, e y f tales que pueden hacer cero, positiva o negativa a la parte real y producen la perturbación del campo $\hat{X} = X + X_{lv}$ sin necesidad de aumentar el grado del sistema. Si queremos generar un foco repulsor sobre el pentágono curvilíneo, se tiene que cumplir que la parte real del tercer y cuarto valor propio deben de ser positivas:

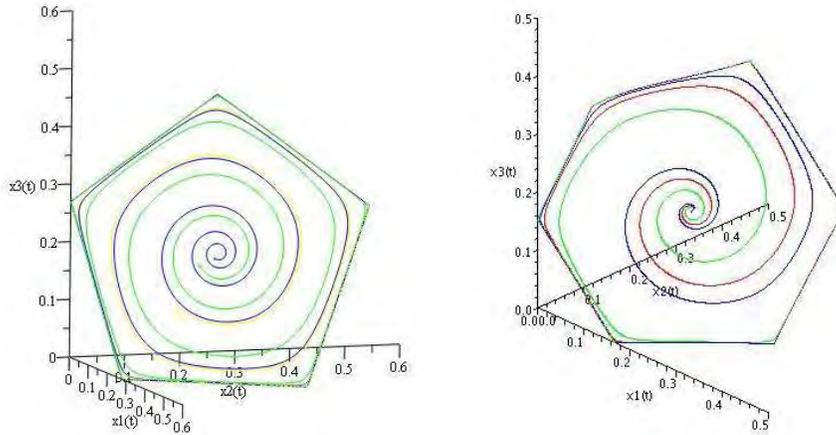
$$\frac{(3 + \sqrt{5})(b + c) - 2(a + d)}{2(1 + \sqrt{5})} > e$$

y para que la parte imaginaria no sea cero es suficiente que:

$$b \neq c \text{ y } a \neq d$$

De esta forma se produjo un foco repulsor, como se muestra en las simulaciones 5.4a.

Haciendo la simulación numérica para algunos valores de las constantes se obtuvieron los resultados de la figura 5.4.



(a) Perturbación del pentágono con valores $a = b = \frac{1}{5}$, $c = d = \frac{1}{10}$, $e = f = \frac{13}{100}$. (b) Perturbación del hexágono con valores $a = \frac{1}{10}$, $b = \frac{1}{10}$, $c = \frac{1}{20}$, $d = e = f = g = 0$.

Figura 5.4. Proyección de las perturbaciones en \mathbb{R}^3 para \mathbb{R}^5 y \mathbb{R}^6 .

5.5. Existencia de polígonos curvilíneos invariantes

Los resultados de las secciones anteriores nos lleva a enunciar el siguiente:

Teorema 5.2. *Para valores pequeños de los parámetros del campo X_{lv} , el campo \hat{X} tiene un n -ágono curvilíneo invariante. Para algunos valores de los parámetros puede presentarse en este n -ágono un único punto de equilibrio que sea un foco repulsor. Sus trayectorias emanan del foco y tienden a un comportamiento cíclico, el cuál puede ser:*

- A) *estrictamente periódico en el interior del cuadrilátero o*
- B) *asintótico a la frontera con el periodo tendiendo a infinito.*

En todas las simulaciones que se han analizado, incluso para valores grandes de los parámetros, se ha detectado la existencia de polígonos curvilíneos invariantes y sólo se ha podido detectar el comportamiento B) del teorema 5.2.

Demostremos el teorema usando resultados de [3]:

Consideremos un n -ágono en \mathbb{R}_+^n , transversal a los hiperplanos coordenados y a sus intersecciones, dado por ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_{ij} x_j = c_i$$

($i = 1 \dots n - 2$, con $x_i, \Lambda_{ij} \in \mathbb{R}$).

El campo básico LV X tiene como k -ésima componente

$$x_k(a_k - \sum_{j=1}^n b_{kj}x_j)$$

donde

$$a_k = \sum_{i=1}^{n-2} \Lambda_{ik}c_i$$

$$b_{kj} = \sum_{i=1}^{n-2} \Lambda_{ij}\Lambda_{ik}$$

Haciendo la substitución $x_i = y_i^2$ se obtiene un campo Y en \mathbb{R}^n con componentes

$$\frac{1}{2}y_k^2(a_k - \sum_{j=1}^n b_{kj}y_j^2)$$

que tiene a la variedad Z de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_{ij}y_j^2 = c_i$$

como variedad invariante atractora, simétrica respecto a todos los hiperplanos coordenados.

Se demuestra en [3] que esta variedad invariante es normalmente hiperbólica. Por lo tanto toda deformación pequeña \tilde{Y} de Y tiene cerca de Z una única variedad invariante \tilde{Z} difeomorfa a Z .

Una deformación LV pequeña \tilde{X} de X como campo LV producirá por el paso a las coordenadas y_i una deformación pequeña \tilde{Y} de Y y una variedad invariante \tilde{Z} . Por la simetría de \tilde{Y} , la reflexión de \tilde{Z} en cualquier plano coordenado sigue siendo invariante. Por la unicidad, \tilde{Z} y su reflexión deben coincidir, es decir, Z es simétrica respecto a todas las reflexiones en los planos coordenados. Por lo tanto, el cociente de \tilde{Z} bajo el grupo generado por esas reflexiones es su intersección con el primer ortante, que denotamos por \tilde{K} .

Z es transversal (de hecho ortogonal) a cada plano coordenado y a cada subespacio de codimensión 2, luego también lo es tanto su perturbación \tilde{Z} como a \tilde{K} . Entonces, si la deformación es suficientemente pequeña, las intersecciones de Z y \tilde{Z} con cualquiera de los semiespacios $\{x_i \geq 0\}$ o de las intersecciones de estos son difeomorfas. En particular, K y \tilde{K} son difeomorfos¹ y \tilde{K} es difeomorfo a un n -ágono. Volviendo a las coordenadas x_i obtenemos un n -ágono (curvilíneo) en \mathbb{R}_+^n invariante y atractor del campo \tilde{X} y hemos demostrado el teorema 5.2.

Notas: Con este resultado podemos demostrar la existencia del n -ágono invariante atractor, pero no podemos exhibir un ejemplo concreto no trivial, porque no sabemos cuán pequeña debe ser la deformación para que se satisfagan las condiciones de la prueba. Tampoco queda demostrado que el n -ágono sea *portador*, sólo que atrae a todos los puntos en una vecindad.

Esto, a diferencia del caso $n = 3$ donde se da una familia explícita y se argumenta usando el Teorema de Hirsch ([6]) sobre simplejos portadores. Una posibilidad de mejorar este resultado sería la de encontrar una generalización del Teorema de Hirsch aplicable a nuestra situación. Otra podría consistir en demostrar que al disminuir linealmente la deformación no cambia el retrato fase del campo.²

¹Esta demostración sería válida para cualquier politopo K dado por ecuaciones de la misma forma. En el caso de los polígonos se puede argumentar también que si \tilde{K} no fuera un n -ágono sería un n -ágono con asas. Pero entonces \tilde{Z} sería homeomorfa a Z con un gran número de asas agregadas y no sería difeomorfa a Z .

²Esto sucede en el caso $n = 3$, al menos en los sistemas de May-Leonard, según se ve en el diagrama de bifurcaciones en el espacio de parámetros 1.2, que es estrellado desde el punto $\alpha = \beta = 1$ (correspondiente al campo básico).

Parte II

Sistemas Lotka-Volterra de Competencia

Capítulo 6

Clasificación de los sistemas LVC

Introducción

En este capítulo presentaremos una clasificación de los sistemas Lotka-Volterra en competencia (LVC) para 4 especies visto como generalización de la clasificación de los sistemas LVC de 3 especies hecha por Mary Lou Zeeman en [13] en términos de la matriz de vértices.

Se explicará de forma breve la clasificación que aparece en [13], (para un mayor detalle recomendamos consultar la tesis de Juan Carlos Mendoza Herrera [5]) para después describir el comportamiento en sistemas de 4 dimensiones.

Cabe señalar que la dinámica de los sistemas LVC se estudia en el ortante positivo \mathbb{R}_+^n y está representada por la ecuación matricial:

$$\frac{dX}{dt} = X(B - AX)$$

donde A es una matriz de valores reales $a_{ij} > 0$ y B un vector columna con entradas $b_i > 0$.

Componente a componente se expresa como:

$$\dot{x}_i = x_i(b_i - \sum_j a_{ij}x_j)$$

Sea $N_i = b_i - \sum_j a_{ij}x_j$. Los hiperplanos dados por las ecuaciones $N_i = 0$ se llaman *ceroclinos*.

Los sistemas LVC(3) estables, son aquellos cuyos planos ceroclinos, tomados dos a dos, no intersecten en puntos que estén en los ejes y los sistemas LVC(4) ceroclínicamente estables cumplen lo anterior y además, sus hiperplanos ceroclinos tomados tres a tres, no se intersectan en un punto que esté en los planos coordenados.

En general para los sistemas LVC de n dimensiones, los puntos críticos satisfacen que $x_i = 0$ o que $N_i = 0$ para $i \in 1, \dots, n$.

Cuando $x_i = 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$, el punto crítico estará en un subespacio de dimensión $n - m$.

Morris W. Hirsh [7] demostró que los sistemas LVC presentan un conjunto invariante atractor homeomorfo al simplejo unitario $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ mediante la proyección radial. A Δ_n se le conoce como el “simplejo portador”, nombre que hace alusión a la capacidad de carga del modelo logístico en una dimensión. Todos los puntos críticos a excepción del origen pertenecen a él y por lo tanto toda la dinámica importante del sistema está contenida en él.

La descripción de la clasificación se hará en varios pasos:

- En la sección 6.1 mostraremos la forma de clasificar los sistemas LVC(3) expuesta en [13].
- En 6.2 mostraremos otra forma para construir todas las posibles matrices de vértices para sistemas LVC(2) y LVC(3) y daremos un conjunto de invariantes para mostrar que esas son todas.
- En 6.3 extenderemos el método para clasificar los sistemas LVC(4) y daremos un conjunto de invariantes asociados para mostrar que son todas las matrices.

6.1. Clasificación de los sistemas LVC(3) según [13]

Los sistemas LVC(3) ceroclínicamente estables pueden tener cuando mucho los siguientes puntos críticos:

- El origen, ya que $x_i = 0$ para toda $i \in 1, 2, 3$
- Los vértices, sólo habrá un $x_i \neq 0$ y entonces $N_i = b_i - a_{ii}x_i = 0$. El punto crítico es el resultado de la intersección del plano N_i con el eje x_i y tiene coordenada distinta de cero a b_i/a_{ii} .
- Los puntos sobre las aristas, hay dos valores $i \neq j$ tales que $x_i \neq 0$ y $x_j \neq 0$, entonces $N_i = b_i - a_{ii}x_i - a_{ij}x_j = 0$ y $N_j = b_j - a_{ji}x_i - a_{jj}x_j = 0$. El punto crítico es el resultado de intersectar los planos $N_i = 0$, $N_j = 0$ y $x_k = 0$.
- Punto interior P , el punto crítico se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones $N_i = 0$ para $i \in 1, 2, 3$

Recordemos que el simplejo portador Δ_3 es homeomorfo a un triángulo equilátero, con vértices sobre los vectores unitarios cartesianos.

La clasificación de [13] se basa en agrupar los sistemas módulo las simetrías del triángulo y se centra en estudiar si los planos ceroclinos son “mayores” (el punto crítico pertenece a la componente acotada) o son “menores” (el punto crítico pertenece a la componente no acotada) que el punto crítico, al tener esta información se puede determinar si el campo es atractor o repulsor en la componente asociada al plano ceroclino con el que se hace el análisis porque el valor propio es negativo si el plano ceroclino es “mayor” y es positivo si el plano ceroclino es “menor”.

Por ejemplo, para el punto crítico sobre el eje x_1 su única coordenada distinta de 0 es b_1/a_{11} , del análisis lineal se sabe que el valor propio asociado a la dirección de la componente x_i siempre es negativo, además el eje x_1 es un subespacio invariante con vector propio $(1, 0, 0)$, el otro punto crítico sobre el eje es el origen, que siempre es repulsor, por lo que se conoce totalmente la dinámica.

El punto $(b_1/a_{11}, 0, 0)$, tiene asociadas otras 2 direcciones, una de ellas es tangente al plano $x_3 = 0$ y la otra es tangente al plano $x_2 = 0$, para saber el signo del valor propio asociado a cada una de esas direcciones se puede hacer el análisis lineal, o también se puede simplemente, evaluar el punto crítico en N_2 y N_3 , si el resultado de la sustitución es negativo, querrá decir que está en la componente acotada (si es positivo estará en la componente no acotada), y ese signo es contrario al signo del valor propio en esa dirección.

Este análisis se puede hacer para cada uno de los vértices y la información de los signos se puede almacenar en una matriz de 3×3 con ceros en la diagonal.

A esta matriz se le conoce como “matriz de vértices” porque proporciona toda la información sobre la dinámica en los vértices.

$$V = \begin{pmatrix} 0 & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & 0 & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

donde $v_{ij} = \{+, -\}$

Si las entradas v_{ij} y v_{ji} de la matriz de vértices tienen el mismo signo, entonces hay un punto crítico en el plano $x_k = 0$, al que denotaremos por Q_{ij} con $i \neq j$, usando el teorema de Hirsch [7], podemos suponer que Q_{ij} está en la k -ésima arista del simplejo unitario con $k \neq j \neq i$.

El punto Q_{ij} (es único por la estabilidad ceroquina), tiene asociados 3 vectores propios, uno es transversal al simplejo y tangente al plano $x_k = 0$, su valor propio es negativo (ya que el simplejo es un atractor global). Otro vector propio es tangente al plano $x_k = 0$ y también al simplejo, el signo de su valor propio depende del signo de v_{ij} y v_{ji} , por eso si v_{ij} y v_{ji} son positivos, entonces el valor propio es negativo y si v_{ij} y v_{ji} son negativos, el valor propio será positivo. El tercer vector propio, es tangente al simplejo unitario y transversal al plano $x_k = 0$, para saber el signo del valor propio hay que evaluar Q_{ij} en N_k , si es positivo, estará en su componente acotada y entonces el valor propio tendrá signo negativo, si está en la componente no acotada, el valor propio tendrá signo positivo, por lo que podremos saber todo lo que aporta Q_{ij} a la dinámica del simplejo.

Al estar Q_{ij} en la k -ésima arista el signo se almacena en el renglón k de un vector columna de 3×1 , al que llamamos vector de aristas.

Lo anterior se puede hacer para cualquiera de los 3 posibles puntos críticos sobre las aristas del simplejo unitario.

Por último, la dinámica del punto crítico en el interior del simplejo no se puede describir solamente con la clasificación ceroquina para todos los casos, ya que con los tres planos ceroquinos solo se consigue ubicar al punto crítico (en caso de que exista) y no hay otro plano con quién hacer alguna comparación. Sin embargo, al ser relativamente pocos casos donde la configuración ceroquina no es completa (son los casos del 28 al 33) mostrados en [13], se logró encontrar las posibles dinámicas analizando al punto crítico usando otras técnicas como las señaladas en [2, 14].

6.2. Clases de equivalencia para los sistemas LVC en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

6.2.1. Matriz de vértices para el caso bidimensional

En \mathbb{R}^2 , Δ_2 es un segmento de recta que une los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$, por lo que la matriz de vértices es una matriz de 2×2 .

De lo anterior se desprende que hay 4 posibles matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & + \\ + & 0 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & - \\ + & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & + \\ - & 0 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & - \\ - & 0 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

módulo la simetría de Δ_2 , que en términos del sistema corresponde a las permutaciones de las coordenadas, solo tendríamos 3 casos posibles, 6.1, 6.2 y 6.4.

6.2.2. Matriz de vértices para el caso tridimensional

En \mathbb{R}^3 , Δ_3 es homeomorfo a un triángulo, para hacer la reclasificación de los casos encontrados en [13], se escribieron todas las matrices posibles de signos de 3×3 con ceros en la diagonal y luego se clasificaron en términos de las simetrías del triángulo, (el algoritmo está en el apéndice A.1) la conclusión es que hay un total de 16 matrices.

Estas son las matrices de vértices de 3×3 asociadas a los sistemas LVC(3) en \mathbb{R}^3 , los números que aparecen a la derecha son los casos citados en [13].

$$18 \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{bmatrix} 18, 26$$

$$15 \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ - & + & 0 \end{bmatrix} 15, 16, 20, 32$$

$$13 \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ - & - & 0 \end{bmatrix} 13, 19; \quad 3 \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & + \\ - & + & 0 \end{bmatrix} 3; \quad 17 \begin{bmatrix} 0 & + & - \\ + & 0 & + \\ - & + & 0 \end{bmatrix} 21, 17; \quad 2 \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & - \\ - & + & 0 \end{bmatrix} 2, 30;$$

$$1 \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & + \\ - & - & 0 \end{bmatrix} 1; \quad 4 \begin{bmatrix} 0 & - & + \\ - & 0 & + \\ - & + & 0 \end{bmatrix} 4; \quad 8 \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & - \\ - & - & 0 \end{bmatrix} 8, 14, 22, 28;$$

$$29 \begin{bmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & - \\ - & + & 0 \end{bmatrix} 29$$

$$7 \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{bmatrix} 7, 23; \quad 6 \begin{bmatrix} 0 & - & + \\ - & 0 & + \\ - & - & 0 \end{bmatrix} 6; \quad 11 \begin{bmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & + \\ - & + & 0 \end{bmatrix} 11, 25; \quad 5 \begin{bmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & + \\ - & - & 0 \end{bmatrix} 5, 31;$$

$$9 \begin{bmatrix} 0 & - & + \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{bmatrix} 9, 10, 24, 33$$

$$12 \begin{bmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{bmatrix} 12, 27$$

A continuación se proponen los invariantes para sustentar que no puede haber menos casos que los enunciados anteriormente.

1. El número de signos negativos en cada renglón.
2. El número de signos negativos en cada columna.

3. El determinante de la matriz

Para poder obtener el determinante, se vio la necesidad de reemplazar el signo por un +1 o un -1.

De esta forma si el resultado en un renglón da 2 esto quiere decir que el vértice asociado a ese renglón es atractor, si el resultado del renglón da 0 el vértice es silla y si el resultado es -2 el vértice es repulsor.

Caso	R1	R2	R3	C1	C2	C3	Δ
18	2	2	2	2	2	2	2
15	2	2	0	0	2	2	0
13	2	2	-2	0	0	2	-2
3	2	0	0	-2	2	2	-2
17	0	2	0	0	2	0	-2
2	2	0	0	0	2	0	2
1	2	0	-2	-2	0	2	0
4	0	0	0	-2	0	2	0
8	2	0	-2	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0
7	2	-2	-2	-2	0	0	2
6	0	0	-2	-2	-2	2	2
25	-2	0	0	-2	0	0	2
5	0	0	-2	-2	0	0	-2
9	0	-2	-2	-2	-2	0	0
12	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2

Cuadro 6.1. Tabla de invariantes asociados a las distintas matrices de vértices.

Bajo el criterio de que para cambiar de un caso a otro, es necesario que sólo haya una variación en un signo de la matriz de vértices se lograron encontrar las vecindades de cada matriz y así construir una gráfica con los 16 casos, la simetría de la gráfica es hexagonal, la gráfica se muestra en la figura 6.1, además se hizo un video que se puede ver en youtube <http://youtu.be/f40kCDyrZAO>.

Para saber el signo del valor propio asociado al vector en la dirección transversal $x_k = 0$ se investigó si el punto crítico está en la componente acotada (el valor propio es negativo) o en la no acotada (el vector propio es positivo) entre el hiperplano N_k y \mathbb{R}_+^3 .

Con esta información se reconstruyeron los 17 casos restantes que se indican en [13]. Una vez encontrados se construyó una gráfica que representa las vecindades de cada caso en términos del criterio de que, para pasar de un caso a otro, es necesario que solo haya una variación en un signo de la matriz de vértices o en el vector de aristas.

A continuación se muestran las gráficas de la clasificación para la matriz de vértices y también la gráfica de la reclasificación para la matriz de vértices y el vector columna.

También está el video de la clasificación para la matriz de vértices y el vector columna en la dirección: <http://youtu.be/S8n-3qXyAEI>.

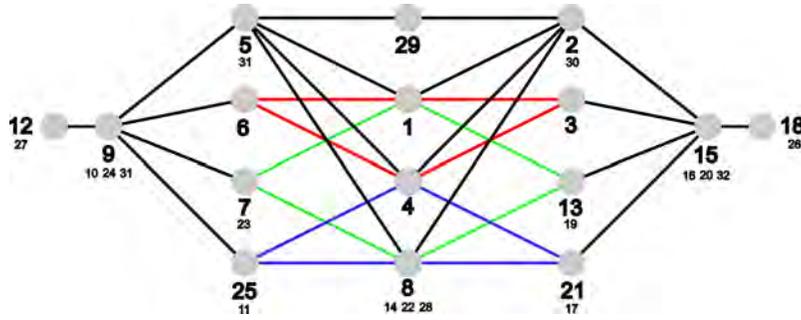


Figura 6.1. Clasificación de los casos LVC(3) respecto a la matriz de vértices

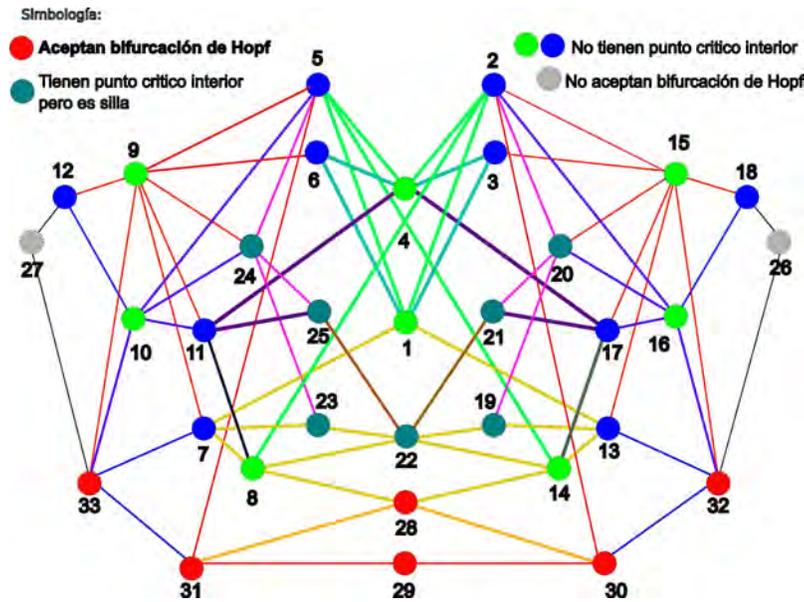


Figura 6.2. Gráfica de todos los casos LVC(3)

6.3. Matrices de vértices para el caso LVC(4) y su clasificación

Para obtener todas las matrices de vértices, se pensó que al ser Δ_4 homeomorfo a un tetraedro regular, para cada una de las 4 caras hay un triángulo cuya dinámica es la de un sistema LVC en \mathbb{R}^3 , por lo que la dinámica restringida a una de esas caras debe ser alguno de los 16 casos estudiados en [13], ya que solo contemplamos la matriz de vértices.

Los sistemas LVC(4) ceroclínicamente estables pueden tener los siguientes puntos críticos:

- El origen, ya que $x_i = 0$ para toda $i \in 1, 2, 3, 4$
- Los vértices, sólo habrá un $x_i \neq 0$ y entonces $N_i = b_i - a_{ii}x_i = 0$. El punto crítico es el resultado de la intersección del plano N_i con el eje x_i y tiene coordenada distinta de cero a b_i/a_{ii} .
- Los puntos sobre las aristas, hay dos valores $i \neq j$ tales que $x_i \neq 0$ y $x_j \neq 0$, entonces $N_i = b_i - a_{ii}x_i - a_{ij}x_j = 0$ y $N_j = b_j - a_{ji}x_i - a_{jj}x_j = 0$. El punto crítico es el resultado de intersectar los planos N_i, N_j y $x_k = 0$.

- Punto sobre las caras, solo $x_l = 0$, entonces $N_i = b_i - a_{ii}x_i - a_{ij}x_j - a_{ik}x_k = 0$, $N_j = b_j - a_{ji}x_i - a_{jj}x_j - a_{jk}x_k = 0$ y $N_k = b_k - a_{ki}x_i - a_{kj}x_j - a_{kk}x_k = 0$. El punto crítico es el resultado de intersectar los planos N_i, N_j, N_k y $x_l = 0$ con i, j, k, l distintos entre sí.
- Punto en el interior P , el punto crítico se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones $N_i = 0$ para $i \in 1, \dots, 4$.

La caracterización de los sistemas en \mathbb{R}^4 comienza por observar que el simplejo portador es homeomorfo a un tetraedro regular en \mathbb{R}^3 .

Para $n = 4$ la información dinámica de los vértices está almacenada en una matriz de vértices de 4×4 , haciendo una extensión inmediata del caso tridimensional incorporando al análisis un cuarto hiperplano ceroclineo.

La información de las aristas y las caras estará dada por otra matriz de aristas-caras de 4×4 que no se estudió en esta tesis.

6.3.1. Casos de la matriz de vértices para los sistemas LVC(4)

En Maple © se desarrolló un algoritmo para encontrar el conjunto de matrices de vértices que son independientes módulo la simetría del tetraedro. De las 4096 posibles matrices de vértices, solo 218 son independientes módulo la permutación de los ejes. El código está en el apéndice A.2 y en el apéndice B se muestran las 218 matrices de vértices.

Tomando en cuenta que cada submatriz de 3×3 es invariante módulo la simetría del tetraedro, se propuso asociar a cada caso 4 invariantes, uno por cada cara y le corresponde el número de caso respecto a la clasificación de vértices de [13]. Esto nos permite asegurar que los 218 casos representados son independientes.

Notación:

- La columna Caso corresponde al número de signos negativos de la matriz, los primeros dos dígitos forman el número y los últimos dos dígitos sirven para distinguir los casos entre sí.
- 123 es el tipo de caso en la cara 4 del tetraedro respecto de la clasificación de [13].
- 124 es el tipo de caso en la cara 3 del tetraedro respecto de la clasificación de [13].
- 134 es el tipo de caso en la cara 2 del tetraedro respecto de la clasificación de [13].
- 234 es el tipo de caso en la cara 1 del tetraedro respecto de la clasificación de [13].

De esta forma se concluyó que solamente habría que analizar 218 casos (de los 4096 posibles).

Caso	123	124	134	234
0001	18	18	18	18
0101	18	18	15	15
0201	18	18	17	17
0205	18	15	15	13
0204	18	15	15	3
0202	18	15	15	2
0203	15	15	15	15
0302	18	15	17	8
0301	18	15	17	4
0307	18	13	13	13
0308	18	3	3	3
0303	18	13	2	2
0306	18	2	2	3
0304	15	15	15	1
0313	15	15	15	29
0305	15	15	2	13
0309	15	15	13	3
0311	15	15	2	3
0312	15	15	17	17
0310	15	15	2	2

Caso	123	124	134	234
0404	15	13	1	13
0407	18	13	8	8
0418	13	13	3	3
0403	15	15	7	17
0405	15	15	8	8
0402	15	13	1	2
0406	15	2	13	29
0415	15	8	4	15
0414	2	13	3	2
0410	3	1	3	15
0419	3	2	2	13
0426	15	17	5	15
0421	18	8	2	4
0409	17	15	6	15
0417	2	2	2	2
0411	4	15	4	15
0408	3	4	4	18
0412	2	17	4	15
0416	17	17	17	17
0425	15	2	1	2
0422	2	1	15	2
0413	2	1	3	15
0427	18	11	17	17
0423	29	2	3	15
0424	15	8	3	17
0401	15	17	2	8
0420	15	17	13	4

Caso	123	124	134	234
0519	18	8	8	11
0505	18	4	4	11
0526	15	13	8	5
0533	15	8	8	1
0531	15	13	8	7
0514	15	4	29	8
0525	15	17	17	9
0537	15	17	4	11
0517	15	17	8	11
0508	15	1	8	4
0504	15	2	8	5
0515	15	2	7	4
0513	15	2	8	6
0503	15	2	4	5
0523	15	1	4	4
0511	15	3	4	6
0516	15	3	4	5
0520	13	3	8	4
0510	13	13	1	1
0509	13	2	4	4
0534	2	13	1	1
0512	2	2	1	29
0528	2	3	17	5
0538	2	2	17	7
0501	2	2	8	4
0518	2	3	1	1
0529	2	2	1	1
0521	2	13	1	29
0527	2	3	8	8
0522	3	2	29	1
0524	3	13	29	29
0530	3	13	1	1
0532	17	17	8	4
0536	17	13	2	5
0502	17	2	2	6
0506	17	13	13	6
0535	3	3	1	1
0507	3	3	17	7

Caso	123	124	134	234
0627	3	5	5	13
0637	7	2	2	6
0630	17	8	6	8
0641	8	8	3	11
0609	8	17	2	9
0611	15	8	5	11
0606	4	11	8	2
0640	8	5	4	17
0610	3	1	7	8
0633	8	13	1	6
0617	8	15	7	11
0623	17	8	13	9
0615	13	8	1	5
0628	1	2	8	7
0620	4	6	13	1
0625	7	1	3	4
0618	2	5	8	1
0642	1	8	2	5
0613	1	1	1	29
0626	29	1	1	1
0638	11	4	15	6
0629	9	3	4	17
0602	4	4	7	17
0619	11	13	4	4

Caso	123	124	134	234
0605	4	4	8	8
0644	8	8	4	4
0614	1	4	5	2
0639	2	5	1	4
0645	4	6	1	2
0601	5	1	4	3
0607	4	5	11	15
0643	9	2	4	17
0624	8	2	29	6
0634	29	5	3	8
0616	29	4	7	2
0622	4	29	5	13
0612	11	11	11	18
0635	17	17	17	12
0636	15	8	9	8
0631	8	8	9	15
0604	5	3	6	2
0632	2	7	13	5
0603	29	4	1	29
0621	13	13	7	7
0646	11	17	17	11
0647	2	2	5	5
0648	6	6	3	3
0608	1	1	1	1

Caso	123	124	134	234
0723	13	8	7	9
0727	1	1	7	7
0704	1	7	1	5
0726	2	8	7	9
0702	7	1	1	6
0735	17	8	8	12
0738	8	8	1	9
0733	3	7	7	11
0707	4	6	8	7
0716	29	1	5	7
0721	4	13	5	9
0728	3	5	8	9
0722	8	8	5	6
0732	6	6	1	1
0715	11	13	6	6
0717	2	5	11	7
0724	1	5	6	29
0731	9	4	2	6
0701	5	5	11	3
0705	8	4	9	29
0706	7	29	29	6
0709	11	8	4	11
0708	9	1	4	4
0710	5	7	4	4
0714	2	4	5	9
0718	6	9	3	4
0720	17	4	4	12
0729	5	29	1	5
0719	6	11	2	5
0711	13	11	5	5
0737	4	5	8	5
0734	4	11	17	9
0703	17	8	11	9
0736	4	1	8	9
0730	2	8	9	5
0712	5	1	6	1
0713	15	11	9	11
0725	1	5	5	1

Caso	123	124	134	234
0802	1	7	7	9
0804	8	8	7	12
0826	6	6	7	7
0811	13	11	9	9
0814	8	8	9	9
0808	5	1	9	7
0803	29	7	5	9
0806	4	9	8	9
0820	5	6	7	5
0807	9	6	1	6
0827	7	5	5	6
0813	2	9	11	9
0824	4	8	5	12
0809	3	9	9	11
0817	5	5	5	5
0812	9	9	4	4
0821	4	12	6	4
0822	5	9	11	4
0801	11	11	11	11
0819	1	5	9	5
0825	5	5	1	9
0810	6	1	9	5
0805	17	11	11	12
0815	9	5	29	6
0818	11	8	6	9
0823	8	5	11	9
0816	4	9	7	11

Caso	123	124	134	234
0901	5	5	9	9
0903	6	7	9	9
0902	7	5	9	9
0904	6	5	9	9
0905	11	11	9	9
0908	1	9	9	9
0911	29	9	9	9
0913	6	5	5	12
0906	7	7	7	12
0907	6	6	6	12
0909	5	5	7	12
0910	8	11	9	12
0912	4	11	9	12
1003	9	9	9	9
1004	7	9	9	12
1005	6	9	9	12
1002	5	9	9	12
1001	11	11	12	12
1101	9	9	12	12
1201	12	12	12	12

Apéndice A

Códigos para encontrar las matrices de vértices en los sistemas LVC(3) y LVC(4)

A.1. Código para encontrar las matrices de vértices LVC(3)

Este programa se escribió en Maple©V.13 y consiste en ir eliminando de toda la lista de matrices de signos las matrices que son equivalentes módulo permutaciones de los índices. Los comentarios al programa están después de los símbolos `##` y en **color rojo**.

```
with(LinearAlgebra);## se necesita cargar este paquete
Ren1 := [[0, 1, 1], [0, 1, -1], [0, -1, 1], [0, -1, -1]] ## con estas lineas se escriben
## todas las posibles matrices
Ren2 := [[1, 0, 1], [1, 0, -1], [-1, 0, 1], [-1, 0, -1]]
Ren3 := [[1, 1, 0], [-1, 1, 0], [1, -1, 0], [-1, -1, 0]]
M := [seq(seq(seq(Matrix(1 .. 3, 1 .. 3, [Ren1[i], Ren2[j], Ren3[k]]), k = 1 .. 4), j = 1 .. 4), i = 1 ..
4)]:
nops(M) 64## hay un total de 64 posibles matrices.
p[ij] := [[1, 2], [1, 3], [2, 3]];## para las permutaciones de los índices
C1 := [seq(RowOperation(M[2], p[ij][j]), j = 1 .. 3), ## con esto se fabrican todas las
## matrices equivalentes a
## M[2] (la segunda matriz de la lista)
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][1]), p[ij][2]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][2]), p[ij][1])];
C2 := [M[2], seq(ColumnOperation(C1[j], p[ij][j]), j = 1 .. 3),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[4], p[ij][1]), p[ij][2]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[5], p[ij][2]), p[ij][1])];
```

continúa en la siguiente página.

Con el siguiente código se van eliminando las matrices que son equivalentes en términos de la permutación de los índices, esto es equivalente a la equivalencia sobre la simetría del triángulo.

```

for k to nops(M) do
  for i from k+1 to nops(M) do
    for j to 6 do
      A := [seq(RowOperation(M[k], p[ij][j]), j = 1 .. 3),
            RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][1]), p[ij][2]),
            RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][2]), p[ij][1]));
      B := [M[k], seq(ColumnOperation(A[j], p[ij][j]), j = 1 .. 3),
            ColumnOperation(ColumnOperation(A[4], p[ij][1]), p[ij][2]),
            ColumnOperation(ColumnOperation(A[5], p[ij][2]), p[ij][1]));
      if Equal(B[j], M[i]) then
        M := subsop(i = NULL, M) end if
      end do
    end do
  end do
end do
nops(M)## este comando nos dice cuantas matrices hay al final
16

```

A.2. Código para encontrar las matrices de vértices LVC(4)

```

with(LinearAlgebra);## se necesita cargar este paquete
Ren1 := [[0, 1, 1, 1], [0, 1, 1, -1], [0, 1, -1, 1], [0, -1, 1, 1], [0, 1, -1, -1], [0, -1, 1, -1], [0, -1, -1, 1], [0,
-1, -1, -1]]
Ren2 := [[1, 0, 1, 1], [1, 0, 1, -1], [1, 0, -1, 1], [-1, 0, 1, 1], [1, 0, -1, -1], [-1, 0, 1, -1], [-1, 0, -1, 1], [-1,
0, -1, -1]]
Ren3 := [[1, 1, 0, 1], [1, 1, 0, -1], [1, -1, 0, 1], [-1, 1, 0, 1], [1, -1, 0, -1], [-1, 1, 0, -1], [-1, -1, 0, 1], [-1,
-1, 0, -1]]
Ren4 := [[1, 1, 1, 0], [1, 1, -1, 0], [1, -1, 1, 0], [-1, 1, 1, 0], [1, -1, -1, 0], [-1, 1, -1, 0], [-1, -1, 1, 0], [-1,
-1, -1, 0]]
M := [seq(seq(seq(Matrix(1 .. 4, 1 .. 4, [Ren1[i], Ren2[j], Ren3[k], Ren4[l]]),
l = 1 .. 8), k = 1 .. 8), j = 1 .. 8), i = 1 .. 8)];
nops(M); 4096
p[ij] := [[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]]
C1 := [seq(RowOperation(M[2], p[ij][j]), j = 1 .. 6),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][1]), p[ij][2]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][2]), p[ij][1]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][1]), p[ij][3]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][3]), p[ij][1]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][2]), p[ij][3]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][3]), p[ij][2]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][4]), p[ij][5]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][5]), p[ij][4]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][1]), p[ij][6]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][2]), p[ij][5]),
RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][3]), p[ij][4]),
RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][1]), p[ij][3]), p[ij][6]),
RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][3]), p[ij][1]), p[ij][4]),
RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][1]), p[ij][5]), p[ij][6]),
RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][3]), p[ij][4]), p[ij][1]),
RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][1]), p[ij][2]), p[ij][6]),
RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[2], p[ij][2]), p[ij][5]), p[ij][1])];

```

```
C2 := [M[2], seq(ColumnOperation(C1[j], p[ij][j]), j = 1 .. 6),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[7], p[ij][1]), p[ij][2]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[8], p[ij][2]), p[ij][1]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[9], p[ij][1]), p[ij][3]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[10], p[ij][3]), p[ij][1]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[11], p[ij][2]), p[ij][3]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[12], p[ij][3]), p[ij][2]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[13], p[ij][4]), p[ij][5]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[14], p[ij][5]), p[ij][4]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[15], p[ij][1]), p[ij][6]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[16], p[ij][2]), p[ij][5]),
ColumnOperation(ColumnOperation(C1[17], p[ij][3]), p[ij][4]),
ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[18], p[ij][1]), p[ij][3]), p[ij][6]),
ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[19], p[ij][3]), p[ij][1]), p[ij][4]),
ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[20], p[ij][1]), p[ij][5]), p[ij][6]),
ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[21], p[ij][3]), p[ij][4]), p[ij][1]),
ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[22], p[ij][1]), p[ij][2]), p[ij][6]),
ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[23], p[ij][2]), p[ij][5]), p[ij][1])];
```

```

for k from 1 to nops(M) do
  for i from k+1 to nops(M) do
    for j from 1 to 24 do
      C1 := [seq(RowOperation(M[k], p[ij][j]), j = 1 .. 6),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][1]), p[ij][2]),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][2]), p[ij][1]),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][1]), p[ij][3]),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][3]), p[ij][1]),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][2]), p[ij][3]),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][3]), p[ij][2]),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][4]), p[ij][5]),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][5]), p[ij][4]),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][1]), p[ij][6]),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][2]), p[ij][5]),
      RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][3]), p[ij][4]),
      RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][1]), p[ij][3]), p[ij][6]),
      RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][3]), p[ij][1]), p[ij][4]),
      RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][1]), p[ij][5]), p[ij][6]),
      RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][3]), p[ij][4]), p[ij][1]),
      RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][1]), p[ij][2]), p[ij][6]),
      RowOperation(RowOperation(RowOperation(M[k], p[ij][2]), p[ij][5]), p[ij][1])]:
      C2 := [M[k], seq(ColumnOperation(C1[j], p[ij][j]), j = 1 .. 6),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[7], p[ij][1]), p[ij][2]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[8], p[ij][2]), p[ij][1]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[9], p[ij][1]), p[ij][3]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[10], p[ij][3]), p[ij][1]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[11], p[ij][2]), p[ij][3]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[12], p[ij][3]), p[ij][2]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[13], p[ij][4]), p[ij][5]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[14], p[ij][5]), p[ij][4]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[15], p[ij][1]), p[ij][6]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[16], p[ij][2]), p[ij][5]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(C1[17], p[ij][3]), p[ij][4]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[18], p[ij][1]), p[ij][3]), p[ij][6]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[19], p[ij][3]), p[ij][1]), p[ij][4]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[20], p[ij][1]), p[ij][5]), p[ij][6]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[21], p[ij][3]), p[ij][4]), p[ij][1]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[22], p[ij][1]), p[ij][2]), p[ij][6]),
      ColumnOperation(ColumnOperation(ColumnOperation(C1[23], p[ij][2]), p[ij][5]), p[ij][1])]:
      if Equal( C2[j],M[i]) then
        M:=subsop(i=NULL,M);
      end if
    end do
  end do
end do
nops(M);
218

```

La lista de las matrices LVC(4) está en el apéndice B

Apéndice B

Matrices de vértices para los sistemas competitivos de cuatro especies

0 negativos 1 posibilidad

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1 negativos 1 posibilidad

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2 signos negativos, 5 posibilidades

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso con 3 signos negativos, 13 posibilidades

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bibliografía

- [1] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*, page 733. Academic Press, third edition, 1985.
- [2] S. Busenberg and P. van den Driessche. Analysis of a disease transmission model in a population with varying size. *J. Math Biol*, 28:257–271, 1990.
- [3] M. Chaperon and S. López De Medrano. Birth of attracting compact invariant submanifolds diffeomorphic to moment-angle manifolds in generic families of dynamics. *C. R. Acad. Sci. Paris*, I(346):1099–1102, 2008.
- [4] Zeeman E.C. and Zeeman M. L. From local to global behavior in competitive Lotka-Volterra systems. *Trans. of the A. M. S.*, 355(2):713–734, 2002.
- [5] Juan Carlos Mendoza Herrera. Sistemas tridimensionales Lotka-Volterra: una clasificación de las familias estables, Facultad de Ciencias, UNAM, 2012.
- [6] M. W. Hirsch. On existence and uniqueness of the carrying simplex for competitive dynamical systems. *J. Biol. Dyn.*, 2(2):169–179, April 2008.
- [7] M.W. Hirsch. Systems of differential equations which are competitive or cooperative iii: Competing species. *Nonlinearity*, 1:51–71, 1988.
- [8] J. Hofbauer and K. Sigmund. *The theory of evolution and dynamical systems: Mathematical aspects of selection*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [9] Robert M. May and Warren J. Leonard. Nonlinear aspects of competition between three species. *SIAM J. appl. Math.*, 29:243–253, 1975.
- [10] S. López De Medrano. Topology of the intersection of quadrics in \mathbb{R}^n . *Lectures Notes in Mathematics*, 1370:280–292, 1989.
- [11] I. Ch. Ramos Torres. Teorema de realización, IMATE-CU, UNAM, 2010.
- [12] Stephen Smale. On the differential equations of species in competition. *Journal of Mathematical Biology*, 3(1):5–7, 1976.
- [13] M. L. Zeeman. Hopf bifurcations in competitive three-dimensional Lotka-Volterra systems. *Dynamics and Stability of Systems* 8, pages 189–217, 1993.
- [14] M. L. Zeeman and P. van den Driessche. Three-dimensional competitive Lotka-Volterra systems with no periodic orbits. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58(1):227–234, 1998.

