



**Universidad Nacional Autónoma de México**  
**Programa de Posgrado en Ciencias de la Administración**

**El exponente de Hurst y su utilización en los mercados  
financieros. Una aplicación al Tipo de Cambio en México.**

**T e s i s**

Que para optar por el grado de:

**Maestro en Finanzas**

Presenta:

**Fernando Andrés Calzada Salas**

Tutor:

**Dr. Arturo Morales Castro**

**Facultad de Contaduría y Administración**

**México, D. F., diciembre de 2015**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## ÍNDICE

RESUMEN .....	5
ABSTRACT .....	6
<b>CAPÍTULO I .....</b>	<b>7</b>
1. Introducción .....	7
<b>CAPÍTULO II .....</b>	<b>10</b>
2. Justificación .....	10
2.1 Evidencias Anteriores .....	10
2.2 Necesidades surgidas alrededor del tema .....	11
<b>CAPÍTULO III .....</b>	<b>12</b>
3. Teorías, Modelos económicos y Métodos de análisis de Riesgo Tradicionales y su fundamentación .....	12
3.1 Teoría de los Mercados Eficientes .....	12
3.1.1 Definición de Mercado Eficiente .....	12
3.1.2 Implicaciones sobre los Mercados Eficientes .....	13
3.2 Modelo CAPM .....	13
3.2.1 Definición .....	13
3.2.2 Supuestos alrededor del modelo CAPM .....	15
3.3 Valor en Riesgo (VaR) .....	16
3.3.1 Definición .....	16
3.3.2 Definiciones alternativas de Valor en Riesgo .....	17
3.3.3 Métodos para determinar el Valor en Riesgo en activos financieros .....	17
3.4 Diferencias entre los supuestos de los modelos tradicionales y los eventos que ocurren cotidianamente en los mercados .....	19
<b>CAPÍTULO IV .....</b>	<b>25</b>
4. Marco Teórico .....	25
4.1 Conceptos Fundamentales .....	25

4.1.1	Definición de Fractal.....	25
4.1.2	Conceptos asociados a la definición de Fractal.....	26
4.1.3	Determinación de la dimensión fractal de un objeto y aplicación práctica (Curva de Koch).....	30
4.1.4	Definiciones Asociadas al Movimiento Browniano.....	33
4.1.5	Hipótesis del Mercado Fractal.....	41
<b>CAPÍTULO V.....</b>		<b>44</b>
5.	Metodología.....	44
5.1	Planteamiento del Problema .....	44
5.2	Objetivo General .....	44
5.3	Objetivos específicos.....	45
5.4	Pregunta de Investigación.....	45
5.5	Hipótesis.....	45
5.6	Matriz de congruencia .....	45
5.7	Información utilizada .....	47
5.8	Métodos de Análisis.....	47
5.8.1	Análisis de relación “Rendimiento sobre Desviación Estándar Acumulada”. ....	47
5.8.2	Determinación de distribución de “colas pesadas” .....	49
5.8.3	Prueba de normalidad .....	49
5.8.3.1	Conceptos preliminares.....	49
5.8.3.2	Prueba de normalidad de Jarque-Bera.....	52
5.8.4	Obtención de evidencia de comportamiento similar al movimiento Browniano fraccional.....	53
<b>CAPÍTULO VI.....</b>		<b>54</b>
6.	Algoritmia y Programación para el cálculo del exponente de Hurst. ....	54
6.1	Análisis de Rango Re-escalado (Descripción y Algoritmia) .....	54
6.1.1	Descripción.....	54
6.1.2	Algoritmo para la obtención del exponente de Hurst con base en el análisis de rango re-escalado.....	56
6.2	Herramientas Computacionales para obtención del exponente de Hurst. ....	60
6.2.1	Aplicación CORONEL V1.0.4.....	60

<b>CAPÍTULO VII.....</b>	<b>62</b>
7. Evidencias.....	62
7.1 Prueba de Normalidad .....	62
7.2 Prueba de distribución leptocúrtica .....	64
7.3 Relación rendimiento sobre desviación estándar acumulada .....	65
7.4 Evidencia de comportamiento similar al movimiento Browniano Fractal en función al exponente de Hurst asociado. ....	67
7.4.1 Contraste de valores.....	70
 <b>CAPÍTULO VIII .....</b>	 <b>71</b>
8. Discusión, conclusiones y recomendaciones. ....	71
8.1 Conclusiones .....	71
8.2 Conclusiones derivadas.....	72
8.2.1 Primera conclusión derivada. ....	72
8.2.2 Caso particular de la primera conclusión derivada. ....	74
8.2.3 Segunda conclusión derivada. ....	74
8.3 Líneas de Investigación propuestas .....	76
8.3.1 Primera Línea de investigación.....	76
8.3.2 Segunda Línea de investigación.....	76
8.4 Reflexión Final.....	77
 <b>BBIBLIOGRAFÍA.....</b>	 <b>78</b>
 <b>APÉNDICES .....</b>	 <b>80</b>

## Resumen

En la presente tesis se analiza el comportamiento de los rendimientos de la variable Tipo de cambio “Peso Mexicano sobre Dólar Norteamericano” (MXN/USD) en términos de su apego a las condiciones necesarias para ser analizados con los métodos convencionales de evaluación de riesgos financieros; lo anterior con la finalidad de validar la aplicación de dichos métodos sobre este escenario.

Se hace hincapié en características como el tipo de distribución de los datos que componen la muestra de rendimientos, la similitud de sus variaciones con el movimiento Browniano simple o si es que esta serie de rendimientos es de tipo persistente. Para comprobar los supuestos anteriores, se aplican conceptos como: distribución de colas pesadas –o leptocúrtica–, geometría fractal, movimiento Browniano fraccional y, sobre todo, el concepto de exponente de Hurst –y su obtención a través del uso de herramientas computacionales utilizando el método de rango re-escalado– para determinar el tipo de movimiento que tienen los rendimientos analizados.

Los resultados obtenidos en este trabajo, arrojan que los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD tienen una distribución de colas pesadas –en comparación con la distribución normal, planteada como condición inicial para los datos de algunos métodos de análisis de riesgos– y un comportamiento en sus variaciones similar al movimientos Browniano fraccional, comportamiento determinado a partir del exponente de Hurst asociado.

Palabras clave: Exponente de Hurst, geometría fractal, persistencia, análisis de riesgo, mercado fractal, Movimiento Browniano, rango re-escalado.

## **Abstract**

In this thesis, MXN/USD (Mexican Peso / US Dollar) exchange rate yields behavior is studied in terms of the conditions needed to be analyzed with conventional risk analysis methods; this with the goal of validate the use of the referred methods.

In this case, data distribution sort of the related yields and their similitude with simple Brownian motion –or persistent behavior– are specially mentioned; in order to prove these assumptions, the concepts of heavy tails, fractal geometry, fractional Brownian motion and Hurst exponent –and how to get this using computing technology in the application of rescaled range method– are considered to determine the sort of movements related with the mentioned yields.

Obtained results show that the MXN/USD yields are heavy-tail distributed –in contrast with the normal distribution raised as initial condition for some risk analysis methods– and, their variations' behavior is similar to fractional Brownian motion; this, determined by the related Hurst exponent.

Keywords: Hurst exponent, fractal geometry, persistence, risk analysis, fractal markets, Brownian motion, rescaled range.

## CAPITULO I

Este capítulo pretende servir de marco introductorio al presente trabajo de investigación esperando que, a través de la lectura de estos párrafos, se puedan conocer las circunstancias iniciales así como el propósito de dicho trabajo.

### 1. Introducción

Los modelos de análisis de riesgo que existen en la actualidad han permitido determinar de manera aceptable los niveles de riesgo a los que están expuestos los diferentes activos financieros operados en los mercados.

Muchos de estos modelos fundamentan los niveles de volatilidad asociados a sus parámetros en las series históricas disponibles para dichos activos; estos valores también son utilizados para generar medidas de ubicación (esperanza basada en promedios de las series) y dispersión (varianzas y desviaciones estándar) y utilizarlos como parámetros dentro de los modelos que así lo requieran.

Haciendo referencia a los rendimientos asociados a activos financieros, la medida convencional para la determinación del riesgo es la volatilidad de los respectivos rendimientos la cual se basa en la desviación estándar de las series históricas asociadas; la asignación de un nivel de confianza asociada al nivel de riesgo obtenido así como el horizonte de tiempo correspondiente al rendimiento esperado, aunados a la correspondiente desviación estándar, permiten determinar el Valor en Riesgo (VaR) de los activos de nuestro interés.

No obstante la aceptación generalizada de los citados modelos –y la evolución que han propiciado dentro del campo del análisis de riesgos–, éstos se fundamentan en una serie de supuestos que han demostrado no cumplirse en su totalidad para el caso de los rendimientos de ciertos activos financieros<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> La demostración del cumplimiento o incumplimiento de dichos supuestos sobre el tipo de cambio “Pesos Mexicano sobre Dólar Norteamericano” (MXN/USD) es uno de los objetivos principales del presente trabajo.



Una de las limitantes que se debe considerar dentro de los modelos de análisis de riesgo tradicionalmente utilizados, es que asumen que los niveles de volatilidad asociados a las series históricas en las que se basan son obtenidos de un valor paramétrico único que sirve de base para la obtención de un resultado fundamentado en otros parámetros estadísticos –o para generación de valores aleatorios en el caso del método de Montecarlo–, en lugar de considerar los registros de las variaciones en los rendimientos de los activos como referencias históricas susceptibles a repetición de patrones de comportamiento –este comportamiento es similar a ciertas características de entes geométricos denominados fractales.

Paralelamente al desarrollo de los modelos de análisis de riesgo mencionados, se han planteado nuevos modelos de pronóstico para estimar los niveles de riesgo de ciertos activos financieros los cuales no se fundamentan en los supuestos mencionados.

Bajo este contexto, uno de los modelos alternativos más aceptados es el que involucra conceptos asociados a la geometría fractal y que plantea que las series de tiempo mencionadas en este capítulo tienden a asemejarse a un objeto fractal –es decir, a un espacio geométrico de patrones auto-repetibles<sup>2</sup>.

Utilizando como antecedente los párrafos anteriores, el presente trabajo de investigación pretende comprobar si el comportamiento de los rendimientos diarios del tipo de cambio “Peso Mexicano sobre Dólar Norteamericano” (MXN/USD) cumple con los supuestos planteados como condición inicial necesaria para la utilización de los modelos de análisis de riesgo utilizados convencionalmente y, en caso de no cumplir con ellos, determinar el comportamiento de dichos rendimientos en función de su similitud con cuerpos fractales.

En la siguiente página se presenta la matriz de congruencia con el objetivo general y los objetivos específicos de esta tesis, así como las hipótesis y preguntas de investigación asociadas; en el capítulo V estos tópicos serán descritos de una manera más puntual.

---

<sup>2</sup> En 1963, Benoit Mandelbrot comprobó el citado comportamiento en los rendimientos del precio del algodón.

<b>Pregunta Principal</b>	<b>Objetivo General</b>	<b>Hipótesis Principal</b>
¿Los modelos convencionales de análisis de riesgo se ajustan a los supuestos sobre los que se sustentan, en el caso específico de las variaciones diarias en los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD?	Comprobar si, para el caso del tipo de cambio MXN/USD, se cumplen los supuestos sobre los que se cimientan los modelos tradicionales de análisis de riesgo que representan variables financieras con el fin de sustentar la efectividad de dichos modelos.	Los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD, no se ajustan a los supuestos requeridos por los modelos convencionales de análisis de riesgo para variables financieras y, por lo tanto, dichos modelos pueden no ser totalmente eficaces para representar a esta variable en específico.
<b>Preguntas Secundarias</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>Hipótesis Secundarias</b>
¿Se cumple que los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD tiene un comportamiento similar al movimiento Browniano simple?	Comprobar si, para este caso, se cumple que las variaciones en sus rendimientos diarios tienen un comportamiento afín al movimiento browniano convencional	Los rendimientos diarios del tipo de cambio MXN/USD no tienen un comportamiento similar al movimiento Browniano simple.
¿Se cumple el supuesto de normalidad para la distribución correspondiente a los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD?	Comprobar si, para este caso, se cumple que la distribución de sus rendimientos diarios obedece a una distribución normal (sin asimetría ni leptocurtosis).	Los rendimientos diarios del tipo de cambio MXN/USD no están distribuidos normalmente y, más bien, tiene un patrón de distribución de colas pesadas (leptocúrtica)
¿En caso de no tener un patrón similar al movimiento Browniano simple, que tipo de comportamiento siguen los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD?	Determinar, para el caso de esta variable, si el comportamiento de los rendimientos diarios se ajusta a un movimiento browniano de tipo fraccional en caso de que no se ajusten a un movimiento browniano convencional.	Los rendimientos diarios del tipo de cambio MXN/USD tienen un comportamiento similar al movimiento Browniano fraccional.

**Matriz de congruencia específico para este caso de estudio. (Calzada, 2015). Basado en Gallardo-Bolaños, 2000**

## Capítulo II

En este capítulo se plantea la justificación de la investigación presentada en términos de las motivaciones y necesidades alrededor de la misma, así como la serie de antecedentes que sirvieron de base para elegir este tema de tesis.

### **2. Justificación**

Se plantean los siguientes enunciados como justificación para realizar la presente investigación:

#### **2.1 Evidencias Anteriores**

La revisión previa de la literatura relacionada con el tema correspondiente a esta investigación –principalmente la referente al tema de geometría fractal y su relación directa con variables financieras– fue una de las principales motivaciones para incursionar en esta área de conocimiento, la cual presenta perspectivas alternativas a la manera convencional para abordar el tema de administración de riesgos financieros.

La citada revisión literaria muestra que existen una gran cantidad de trabajos que estudian la relación existente entre la geometría fractal y algunas variables financieras que parecen tener rendimientos con comportamiento persistente en lugar de aleatorio<sup>3</sup>; no obstante un porcentaje importante de estos trabajos, si bien plantean la asociación de dichos conceptos, pueden incurrir en alguno de estos comportamientos en su desarrollo:

- a) no proponen una herramienta o metodología sencilla para evaluar las variables que presentan para su estudio, dejando al lector la sensación de falta de continuidad o de alta complejidad en los conceptos analizados sin motivar la aplicación de dichos conceptos como alternativa viable para el análisis y evaluación de riesgos, o
- b) presentan el correspondiente modelo alternativo como una opción excluyente de los métodos convencionales que persiguen el mismo objetivo sin proponer la interacción de los mismos para generar una

---

<sup>3</sup> En posteriores apartados se definirá el concepto de comportamiento persistente.

metodología que sea más robusta que la propuesta por análisis aislados derivados de diferentes modelos.

## **2.2 Necesidades surgidas alrededor del tema**

Otra de las motivaciones de este trabajo surge de la necesidad de explicar de manera clara las metodologías alternativas para evaluar los rendimientos de variables financieras, específicamente las que incluyen el concepto de geometría fractal.

Se debe considerar que, si bien ya existe literatura alrededor del tema objeto del presente estudio, la manera en que se aborda en muchos casos no motiva su utilización al ser presentada de manera teórica o al no presentar una herramienta que promueva su utilización; se considera que esta es la razón principal por la cual su difusión no es tan notoria como la de los métodos convencionales que persiguen el mismo fin, por lo que es difícil encontrar literatura que promueva el uso conjunto de los diferentes métodos de análisis.

## Capítulo III

Este capítulo pretende ilustrar los modelos económicos, teorías y métodos de análisis de riesgo más aceptados y utilizados en la actualidad, así como los supuestos sobre los cuales se fundamentan –en comparación con escenarios de los que se ha demostrado su ocurrencia y que, al no ser afines a los supuestos mencionados, podrían no ser la mejor plataforma teórica para los modelos, teorías y métodos tradicionales.

Lo planteado en el párrafo anterior tiene la finalidad de sustentar la hipótesis de nuestro estudio.

### **3. Teorías, Modelos económicos y Métodos de análisis de Riesgo Tradicionales y su fundamentación**

Las teorías, modelos y métodos que se presentan a continuación, se aplican a diferentes aspectos del ámbito financiero y tienen en común los supuestos sobre los cuales están soportados.

#### **3.1 Teoría de los Mercados Eficientes**

##### **3.1.1 Definición de Mercado Eficiente**

Acotando esta definición a mercados financieros, se considera un mercado eficiente a aquel punto de conferencia de oferentes y demandantes, donde:

- a) los precios de los activos negociados dentro de dichos mercados son capaces de obtener y dejar disponible, para el público, toda la información que pueda tener impacto sobre el precio de los activos que en él se negocian;
- b) los precios asociados a dichos activos se ajustan de manera integral y oportuna a la nueva información liberada y
- c) los cambios en los precios de los activos son totalmente imprevisibles y las fluctuaciones en sus rendimientos tienen un comportamiento análogo a una caminata aleatoria.

### 3.1.2 Implicaciones relacionadas con los Mercados Eficientes

- 1) Las fluctuaciones en los rendimientos de los activos asociados a estos mercados no almacenan memoria, es decir: los valores de las fluctuaciones ocurridas en el presente no están asociadas a los valores ni sucesos anteriores y obedecen a procesos puramente aleatorios.
- 2) Todos los participantes de este mercado tienen acceso a la misma información<sup>4</sup> y con la misma oportunidad; en función de lo anterior todos los participantes tienen las mismas probabilidades de éxito y fracaso dentro de este mercado<sup>5</sup>.
- 3) La única forma de que toda la información relevante para los activos de este mercado se refleje inmediatamente en su precio es que dichos activos compitan entre sí por la preferencia de los demandantes.
- 4) Todos los activos que participan en este mercado están perfectamente valuados, es decir: sus participantes obtendrán un rendimiento sobre su inversión totalmente adecuado a su nivel de riesgo.

Las características de un mercado eficiente conducirían a situaciones de equilibrio tales que la inversión de tiempo, dinero o recursos realizada para analizar el valor intrínseco de los activos de este mercado sea infructuosa, en virtud de que la valuación de activos a la que tienen acceso todos los participantes no sería distinta al valor implícito que ellos pudieran obtener con base a un análisis propio.

## 3.2 **Modelo CAPM**

### 3.2.1 Definición

El modelo CAPM (Siglas de *Capital Asset Pricing Model*) permite establecer una relación entre el precio de un activo financiero y el riesgo implícito a la adquisición del mismo. Este modelo se basa en la correlación que existe entre

---

<sup>4</sup>Haciendo referencia a información que sea relevante para las fluctuaciones en los precios de los activos asociados a este mercado.

<sup>5</sup>El hecho de que tengan la misma probabilidad de éxito no implica que todos los participantes en el mercado tengan los mismos resultados.

los rendimientos de un activo financiero y los rendimientos del mercado donde el activo opera<sup>6</sup>.

La correlación existente entre las variables mencionadas permitirá, a través de métodos de regresión lineal, obtener una función con los siguientes parámetros:

- a) Un parámetro independiente que representa la tasa libre de riesgo (**Rf**) y que corresponde a los rendimientos equivalentes a invertir en un activo considerado con riesgo nulo; este tipo de rendimiento<sup>7</sup>, regularmente equivale a la tasa de inflación de la región donde opera el activo.
- b) Un parámetro lineal<sup>8</sup> denominado “Beta” ( $\beta$ ) que representa la pendiente del término lineal de la función (dicho término lineal es la diferencia entre el rendimiento del mercado [**Rm**] menos el rendimiento libre de riesgo);

La valuación del modelo, una vez obtenidos la tasa libre de riesgo (**Rf**) y la “Beta” ( $\beta$ ), permite obtener el valor proyectado del rendimiento del activo involucrado en función de la variación de los rendimientos promedio del mercado donde se opera.

De acuerdo a lo anterior, el modelo CAPM se puede representar con la función:

$$\text{CAPM} = R_f + \beta * (R_m - R_f)$$

---

<sup>6</sup>Considerando que el mercado donde opera el activo sólo está expuesto al riesgo denominado como sistémico, a diferencia del activo en cuestión el cual también se expone a otros factores de riesgo, denominados en su conjunto como riesgo no sistémico.

<sup>7</sup>Nominal

<sup>8</sup>Al tratarse de un método de regresión lineal, los parámetros resultantes serán una ordenada al origen y la pendiente de la recta obtenida. En este caso  $\beta$  corresponde al valor de dicha pendiente.

Este modelo es utilizado muy frecuentemente en la estimación de valor de activos financieros, en virtud de que permite obtener una estimación del rendimiento del activo presentando un método de obtención de resultados relativamente sencillo.

### 3.2.2 Supuestos alrededor del modelo CAPM

A pesar de la aceptación generalizada de este modelo –y no obstante que los resultados arrojados por él han demostrado ser de mucha utilidad para el ámbito financiero –este modelo representa una visión parcial de la manera en que se proyectan los rendimientos de los activos financieros que componen el mercado.

Los supuestos considerados por este modelo, se mencionan en los siguientes incisos:

- a) Todos los inversionistas tienen el mismo horizonte de tiempo sobre sus activos –o activos con el mismo horizonte de tiempo.
- b) Las estimaciones de los inversionistas sobre los rendimientos esperados de sus activos, varianzas y correlaciones de rendimientos contra todos los demás activos son idénticos –es decir, el mercado asociado se comporta como un mercado eficiente respecto a la valuación de activos.
- c) Se busca maximizar la utilidad esperada sobre los activos en un solo evento de duración finita y definida –adicionalmente, los rendimientos esperados están calculados sobre este periodo definido.
- d) Los participantes del mercado involucrados tienen invertidos todos sus recursos en este mercado<sup>9</sup>.
- e) Los inversionista pueden fondearse –a través de una instancia hipotética– con cantidades ilimitadas de recursos considerando la tasa libre de riesgo del mercado sin que exista de por medio la venta en

---

<sup>9</sup>Lo que provoca que ningún participante del mercado disponga de recursos para influenciar el precio de algún activo; por esta razón, el precio de cada activo es el precio de equilibrio.



directo de otro activo financiero o algún instrumento en garantía con una tasa premio implícita.

- f) Todos los activos tienen el mismo nivel de liquidez<sup>10</sup>.
- g) En las operaciones realizadas en este mercado no se involucran costos de operación, ni impuestos de ningún tipo.
- h) Las emisiones de los activos son fijas y todas ellas están circulando en el mercado al mismo tiempo.

Se puede observar que los supuestos alrededor de este modelo pueden implicar una limitante para el uso generalizado del mismo.

### **3.3 Valor en Riesgo (VaR)**

El cálculo del Valor en Riesgo es una metodología que permite homogeneizar la obtención de la magnitud de los diferentes riesgos relevantes para alguna entidad y es, en la actualidad, la medida más aceptada de medición y ponderación de riesgo –considerando al riesgo como la probabilidad de obtener un resultado diferente al esperado originalmente.

El Valor en Riesgo pretende estimar las pérdidas en las que se puede incurrir en cierto periodo de tiempo pero, al ser inciertas las pérdidas y ganancias, es necesario asociar probabilidades de ocurrencia a las diferentes pérdidas potenciales<sup>11</sup>.

#### **3.3.1 Definición**

El Valor en Riesgo (*VaR* por sus siglas en inglés) es un cuantificador de riesgo que expresa, potencialmente, la máxima pérdida que experimenta la tenencia de un activo financiero en un horizonte de tiempo determinado y dado cierto nivel de confianza.

---

<sup>10</sup>Desde el punto de vista económico, esta igualdad de nivel de liquidez también establece igualdad entre dichos activos como instrumento de cambio.

<sup>11</sup>Banco de México, 2005.

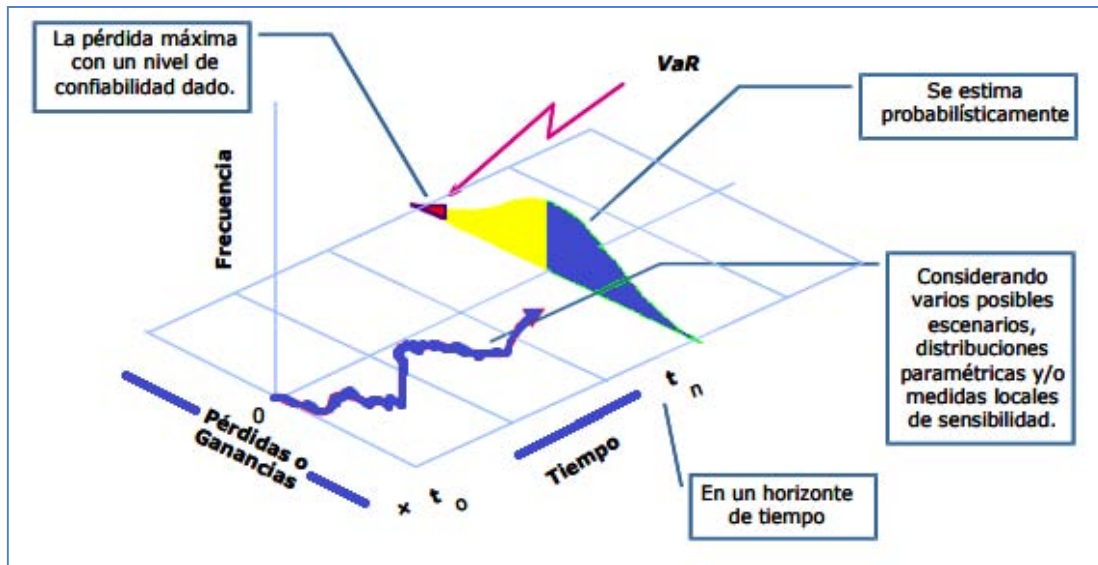


Fig. 1 Esquematización del Valor en Riesgo (VaR). (Banco de México, 2005)

### 3.3.2 Definiciones alternativas de Valor en Riesgo

Se presentan las siguientes definiciones alternativas de Valor en Riesgo<sup>12</sup>:

- a) Procedimiento numérico, estadístico o matemático que permite conocer la posición en Riesgo relacionada a un activo financiero.
- b) Conjunto de metodologías y procedimientos que permiten estimar la posición en riesgo.
- c) Técnica de gestión del riesgo de una entidad financiera que pueden derivar en una reorganización de la gestión de sus posiciones en función del binomio rendimiento-riesgo.

### 3.3.3 Métodos para determinar el Valor en Riesgo en activos financieros

Existen varias metodologías para determinar el Valor en Riesgo; para los fines que persigue esta investigación, una clasificación válida de estos métodos (de Lara, 2014) corresponde a dividirlos en métodos paramétricos y no paramétricos.

<sup>12</sup>Independientemente de las definiciones alternativas, la definición más adecuada para la presente investigación es la presentada en el apartado 3.3.1

### Métodos Paramétricos:

Su característica principal consiste en suponer que los rendimientos de un activo financiero se distribuyen de acuerdo a una curva de densidad de probabilidad normal.

Bajo dicho supuesto de normalidad –y del supuesto de una media de rendimientos igual a cero–, el modelo paramétrico que permite estimar el Valor en Riesgo sobre la posición de un activo es:

$$\text{VaR} = F * S * \sigma * t^{1/2}$$

Donde:

- **F** es el coeficiente asociado al nivel de confianza<sup>13</sup> elegido para el cálculo.
- **S** es el monto total (en unidad monetaria) de la posición<sup>14</sup> sobre el activo (o exposición total en riesgo).
- **$\sigma$**  es el valor de la desviación estándar de los rendimientos del activo (obtenidos de datos históricos).
- **t** es el horizonte de tiempo (en el lapso de tiempo correspondiente al rendimiento) para el cual se desea calcular el VaR.

Otro método paramétrico considerado en la actualidad para el cálculo del VaR es el denominado *Simulación de Montecarlo*.

---

<sup>13</sup>El factor F, en una distribución normal, representa el umbral medido en desviaciones estándar después de la media en el que se supera el nivel de confianza elegido (es decir cuando se alcanza el nivel de significancia).

Los valores más comunes de F son: 1.65 (para un nivel de confianza del 95%) y 2.33 (para un nivel de confianza del 99%)

<sup>14</sup>Cuando se incluye este factor en el cálculo del VaR, el resultado se denomina VaR absoluto, en virtud de que se calcula sobre toda la posición del activo.

En caso de no considerarse este factor, el resultado se denomina VaR relativo y corresponde al Valor en Riesgo por cada unidad monetaria del activo correspondiente.

El método de Montecarlo consiste en la generación de números aleatorios<sup>15</sup> para simular los rendimientos futuros del activo –con igual probabilidad de ocurrencia entre ellos. Este proceso se repite un número considerable de veces (10,000 o más) y los rendimientos se ordenan de tal forma que, dado el nivel de confianza se pueda elegir el percentil que determine el VaR correspondiente.

*Métodos No Paramétricos o de simulación histórica:*

Su característica principal consiste en valerse de una serie histórica de rendimientos sobre las posiciones de riesgo para construir una serie hipotética de rendimientos a futuro, con el supuesto de que se ha conservado la posición del activo durante el periodo de tiempo similar al plazo de la serie histórica.

Para la aplicación de este método, se debe de conformar una serie histórica de frecuencia diaria considerando un periodo que contemple más de 250 datos (y preferentemente hasta 500). A partir del histograma de frecuencias de los rendimientos simulados se calcula el percentil correspondiente al nivel de confianza elegido<sup>16</sup>.

**3.4 Diferencias entre los supuestos de los modelos tradicionales y los eventos que ocurren cotidianamente en los mercados**

Una característica que ha permitido que los modelos económicos y de riesgo utilizados actualmente en el ámbito financiero –y que da la oportunidad de representar y proyectar el comportamiento de los mercados y de los activos que los componen– se hayan difundido de forma generalizada y sean aceptados tan ampliamente por los operadores y analistas financieros es la simplificación y homogenización de los escenarios que en ellos se representan.

---

<sup>15</sup> La simulación de Montecarlo se considera un método paramétrico en virtud de que los números aleatorios generados para su aplicación son generados, supuestamente, siguiendo una distribución normal que considera la desviación estándar de los rendimientos obtenidos de series históricas del activo en cuestión.

<sup>16</sup>Por ejemplo: se considerará el primer percentil si se eligió un nivel de confianza del 99 por ciento.

Esta homogenización de modelos ha demostrado su efectividad al pronosticar y esquematizar aceptablemente una parte importante del comportamiento global de los mercados.

No obstante esta simplificación y generalización de escenarios nos impide realizar un estudio más profundo de lo que intentan representar, dando pie a que cierto número de eventos no previstos dentro de dichos modelos tengan más factibilidad de ocurrencia que la pronosticada, –principalmente en referencia a los movimientos inesperados dentro de los mercados y cuya probabilidad de ocurrencia se cataloga como virtualmente inexistente desde la perspectiva de los modelos tradicionales.

Lo anterior está en función de los supuestos postulados a priori en cada uno de los modelos tradicionales los cuales, en muchas ocasiones, no coinciden con la manera convencional en la que operan los mercados financieros.

La siguiente tabla nos presenta un comparativo de los supuestos correspondientes a los modelos financieros tradicionales en contraste con lo que se ha observado como la operación convencional de los mercados.

<b>Supuestos en los modelos financieros tradicionales</b>	<b>Eventos ocurridos en la operación normal de los mercados</b>
<p>Los participantes del mercado toman decisiones totalmente racionales y el único objetivo que los mueve es el enriquecimiento propio.</p> <p>En el momento que éstos eligen el (los) activo(s) sobre los que invertirán, lo harán esperando obtener la máxima riqueza y bienestar posible; esto permitirá que el mercado funcione de manera eficiente y sus acciones lleven con rapidez al equilibrio de precios en el mercado.</p>	<p>Los participantes del mercado no siempre se comportan de manera racional ni obedeciendo a sus propios intereses.</p> <p>En algunas ocasiones, el inversionista se comporta de manera irracional; en el momento que negocia activos, sus emociones pueden influenciar sus decisiones, haciendo que el mercado no constituya un modelo como el planteado en los modelos tradicionales.</p>

<p><b>Supuestos en los modelos financieros tradicionales</b></p>	<p><b>Eventos ocurridos en la operación normal de los mercados</b></p>
<p>Todos los participantes del mercado tienen la misma oportunidad sobre la información referente a los activos negociados en el mercado y <u>todos la aprovechan de la misma manera.</u></p> <p>Lo anterior permite que las decisiones que se tomen con base en esta información sean similares en todos los casos.</p>	<p>Si bien los escenarios con diferencias de oportunidad de información o los escenarios de información privilegiada no son tan frecuentes, no se puede argumentar que todos los participantes del mercado aprovechan la información de la misma manera aunque tengan la misma oportunidad de acceso a la misma.</p> <p>Lo anterior permite asegurar que las decisiones que tomen con base en la información obtenida sean distintas en cada caso.</p>
<p>El perfil de los inversionistas dentro del mercado es idéntico:</p> <p>Los participantes del mercado tienen las mismas expectativas y el mismo horizonte de tiempo sobre sus activos.</p> <p>Lo anterior, aunado a la supuesta identidad de respuesta a la información, hará que los inversionistas tomen decisiones similares, es decir, los inversores tienen respuestas y expectativas homogéneas.</p>	<p>La experiencia obtenida de la operación en los mercados financieros es que no todos los participantes de estos mercados tienen perfiles similares.</p> <p>Sin considerar las diferencias en los volúmenes de sus activos, las diferencias en los horizontes de tiempo o la capacidad de liquidez de cada inversionista pueden ser muy notorias.</p>

<b>Supuestos en los modelos financieros tradicionales</b>	<b>Eventos ocurridos en la operación normal de los mercados</b>
<p>El cambio en los precios de los activos financieros en un mercado es prácticamente continuo.</p> <p>Las cotizaciones de los activos involucrados en este mercado, no pueden variar drásticamente de un lapso de tiempo a otro, si no que cambian de forma paulatina.</p>	<p>El redondeo de precios por parte de las casas de corretaje puede hacer que los cambios continuos en los precios sean imperceptibles. De igual manera, si algún activo se encuentra bajo una fuerte demanda, es normal que su precio se mueva varios puntos base en un instante.</p> <p>Esto puede provocar que los mercados financieros tengan características que les dé una apariencia de discontinuos.</p>
<p>El cambio en los rendimientos de los activos financieros que componen el mercado sigue un patrón de movimiento Browniano simple.</p>	<p>Se ha comprobado que los cambios en los rendimientos de algunos activos financieros no obedecen precisamente a un patrón de movimiento Browniano simple.</p>

**Comparación de los supuestos en los modelos financieros tradicionales Vs. Evidencias ocurridas en la operación normal de los mercados. (Calzada, 2015)**

La última comparación realizada en el cuadro anterior se detalla a continuación:

El supuesto de que los rendimientos de los activos financieros siguen un patrón similar al movimiento Browniano simple obedece a la adaptación de las

propiedades de este tipo de movimiento a condiciones de tipo económico, es decir:

- a) Los rendimientos de los activos financieros tienen independencia estadística. Es decir, el precio del activo en el momento  $t$  es totalmente independiente al precio del activo en el momento  $t-1$  (y este, a su vez, es independiente al del momento  $t-2$ ), de forma que los rendimientos obtenidos en el pasado no influyen en los del presente.
- b) Los rendimientos de los activos financieros tienen estacionariedad<sup>17</sup> estadística. Es decir los procesos estocásticos involucrados en la generación de rendimientos son invariantes en cualquier instante del tiempo, esta afirmación implica que la serie de rendimientos resultante sea homocedástica.
- c) Los rendimientos de los activos financieros tienen una distribución normal. De forma complementaria, la cantidad de eventos que se aleja drásticamente de la media son muy escasos (cercaos al 0.3%).

La experiencia operativa de los mercados financieros nos indica que, en algunas ocasiones, las consideraciones hechas sobre las tendencias análogas al movimiento browniano en los rendimientos obedece a otro tipo de comportamientos, en virtud de que:

- a) Los rendimientos de los activos financieros pueden no ser, propiamente, estadísticamente independientes. La variación en los rendimientos de los activos en el momento actual, puede depender de los movimientos ocurridos en el pasado y afectar los rendimientos que ocurran en el futuro.
- b) Los cambios en los rendimientos en los activos pueden no obedecer a procesos meramente aleatorios, es decir: un rumor, un evento inesperado o un comportamiento irracional de los participantes del mercado pueden influir sobre los precios de los activos discriminando la supuesta propiedad de estacionariedad.

---

<sup>17</sup>Una serie de tiempo tiene estacionariedad estadística si su media y su varianza se mantienen constantes respecto al tiempo (Gujarati , 2009)



- c) Los cambios en los rendimientos de los activos pudieran no seguir una distribución normal. Inclusive la distribución a la que obedecen podría ser asimétrica y/o leptocúrtica<sup>18</sup>—o de “colas pesadas”.

Las observaciones anteriores podrían derivar en que los modelos tradicionales para determinación del riesgo en activos financieros pudieran ser susceptibles a errores en función de su lejanía con los supuestos preestablecidos para la aplicación de los modelos que definen el comportamiento de dichos activos.

Específicamente, en el caso de los métodos paramétricos para el cálculo del VaR, se plantean las siguientes limitantes (De Lara, 2014) en su utilización:

- a) La utilización de estos métodos parte del supuesto de que los rendimientos que sirvieron de base para obtener los parámetros correspondientes (específicamente el de dispersión: la desviación estándar) están distribuidos de forma normal.
- b) Estos métodos no proponen alternativas respecto al problema de distribuciones leptocúrticas (o de colas pesadas) y, en función de lo anterior, podría no haber una estimación aceptable del volumen de las pérdidas sobre el activo correspondiente ya que el valor asociado al nivel de confianza de la variable analizada no corresponde al mismo valor que el de una distribución normal.

---

<sup>18</sup>Escenario en el cual la distribución de los datos contenidos en una muestra contienen más del 1% de sus valores fuera del rango  $\{x \mid \mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma\}$

## Capítulo IV

Este capítulo se centra en introducir todos los conceptos y antecedentes necesarios para la elaboración del presente trabajo mostrando, en primera instancia, todos y cada uno de los elementos de manera independiente y conceptualizada con el fin de aplicarlos y enfocarlos al panorama general del tema que nos atañe.

De manera complementaria a los conceptos planteados, se describe la interrelación existente entre los mismos (principalmente en las definiciones correspondientes a movimiento browniano y geometría fractal) y la utilización general de dichos conceptos en el ámbito correspondiente a nuestro estudio así como el enfoque que se pretende dar a los mismos para su futura utilización: distinguir el movimiento browniano simple del fraccional utilizando un método cuantitativo –también descrito en esta sección.

### 4. Marco Teórico.

Los conceptos inicialmente presentados en este apartado se pueden dividir en dos temas centrales, los cuales se relacionan con lo descrito al final del apartado; sean los dos temas centrales objetos del presente estudio las definiciones alrededor de Geometría Fractal y Movimiento Browniano.

El lector apreciará, al finalizar este capítulo, cómo ambos campos de estudio se conjuntarán para definir las diferencias existentes entre los dos tipos de variables involucradas en este trabajo.

#### 4.1 Conceptos Fundamentales.

##### 4.1.1 Definición de Fractal.

En 1975, Benoit Mandelbrot definió a los fractales (Talanquer, 2003) como el conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir una dimensión fraccional.

Aunque la definición anterior está muy próxima a la definición formal, muchas de las características mencionadas aplican a entes geométricos

unidimensionales o al perímetro de algunos objetos. Una definición más formal es la siguiente:

**Definición:** Un **fractal** (Orlin-Grabbe, 1996) es el espacio geométrico que cuenta con las siguientes características:

- a) cumple con la propiedad de auto-similitud,
- b) tiene una dimensión de valor no entero (denominada dimensión fractal o fraccional) y que es más grande que su dimensión topológica.

Para comprender mejor la citada definición se propone partir de los conceptos mencionados:

#### **4.1.2 Conceptos asociados a la definición de Fractal.**

##### **Definición de auto-similitud**

Según Mandelbrot (Talanquer, 2003) un objeto es auto similar o auto semejante si sus componentes son de una forma o estructura similar al objeto que los contiene, estos componentes pueden presentarse a una escala distinta o estar ligeramente deformados –esta propiedad es recurrente, es decir: cada componente también estará compuesto por factores similares.

La auto-similitud se puede clasificar en 3 tipos:

- a) **Auto similitud estadística.** Es el tipo menos restrictivo de auto similitud: en este caso, el objeto deberá tener magnitudes numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de objetos de este tipo de auto-similitud.
- b) **Cuasi auto-similitud.** exige que el objeto referido sea aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los objetos de este tipo contienen copias distorsionadas de ellos mismos. D. Sullivan definió matemáticamente el concepto de conjunto cuasi auto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los objetos definidos por relaciones de recurrencia suelen tener este tipo de auto-similitud.
- c) **Auto similitud exacta.** Es el tipo de auto similitud más restrictivo: exige que el objeto estudiado sea idéntico a diferentes escalas. Este tipo de auto-similitud se puede encontrar en objetos definidos por sistemas de funciones iteradas (IFS).

La invariancia de escala es una forma exacta de auto-similitud en la que, al amplificar el tamaño del objeto en cuestión, se aprecia una pequeña parte del objeto que es totalmente similar al original.

Definición de Dimensión topológica o euclidiana.

El concepto de dimensión topológica (Dieudonne, 1994) está asociado a entes geométricos y a los conjuntos necesarios para contenerlo (o cubrirlo), de manera similar a la dimensión de frontera –o de cubrimiento– de Lebesgue:

“Un ente geométrico tiene una dimensión de Frontera de Lebesgue igual a  $m + 1$  si todos los espacios que lo limitan tiene una dimensión de frontera igual a  $m$ ”

Una definición similar fue introducida por Henri Poincaré y expresa que “Para un ente geométrico, si los bordes de los entornos de todos los componentes de dicho ente son espacios *n-menos-uno-dimensionales*, se puede afirmar que el espacio considerado para el ente es *n-dimensional*”.

De esta manera:

- Para un conjunto vacío su dimensión topológica,  $D$ , será = -1
- Para un punto, su dimensión topológica,  $D$ , será = 0, en virtud de que sus fronteras no pueden ser definidas y se consideran conjunto vacío, es decir entes con  $D = -1$
- Para un segmento de línea:  $D = 1$  (en virtud de que sus fronteras se componen de puntos con  $D = 0$ )
- Para un plano:  $D = 2$  (en virtud de que sus fronteras se componen de segmentos de línea con  $D = 1$ )
- Para un cuerpo geométrico de bordes planos:  $D = 3$  (en virtud de que sus fronteras se componen de planos con  $D = 2$ )

De lo anterior se desprende que dos espacios homeomórficos tienen la misma dimensión.

Definición de Homeomorfismo:

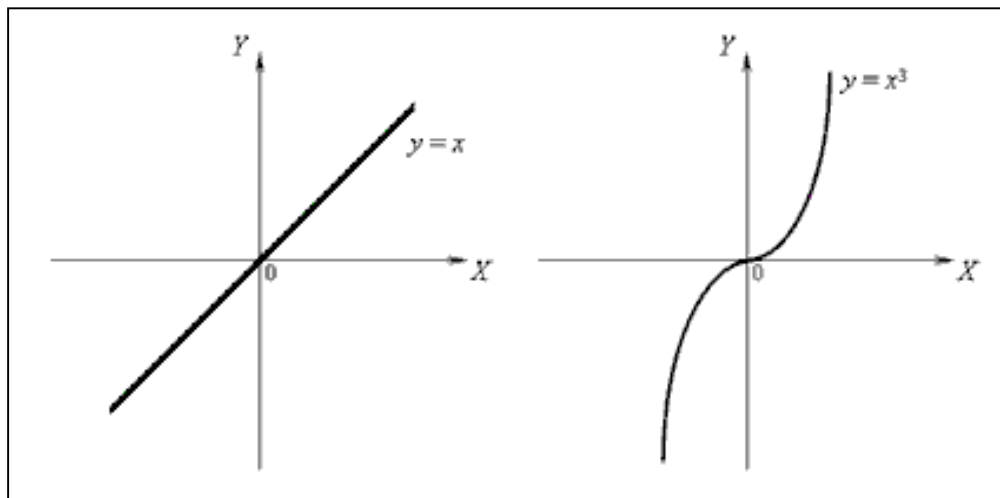
Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos, y  $f$  una función de  $X$  a  $Y$ ; entonces,  $f$  es un homeomorfismo si se cumple que:

- $f$  es una función biyectiva.
- $f$  es una función continua.
- La función inversa de  $f$  es continua.

En referencia a un cuerpo geométrico, un homeomorfismo se puede considerar, de manera figurativa, como la deformación de un espacio geométrico para transformarlo en otro sin romperlo, perforarlo o fusionarlo; en este caso, la dimensión topológica del objeto resultante no cambiará.

Considerar el siguiente ejemplo gráfico: imaginar la transformación de un segmento de línea que se pudiera expresar a través de la función  $f(x) = x$ , por el de una curva definida por la función  $g(x) = x^3$ ; estas dos funciones son continua y derivable en todos los puntos.

Considerando que ambas funciones:  $f(x)$  y  $g(x)$  son homomorfismos (son biyectivas, continuas y sus inversos son continuos), se puede considerar que la transformación de un segmento de línea con la forma de  $f(x)$  en un segmento idéntico a  $g(x)$ , permite que ambos segmentos sigan tendiendo a la misma dimensión topológica ( $D=1$ )



**Funciones  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x^3$ . (Calzada Salas, 2015)**

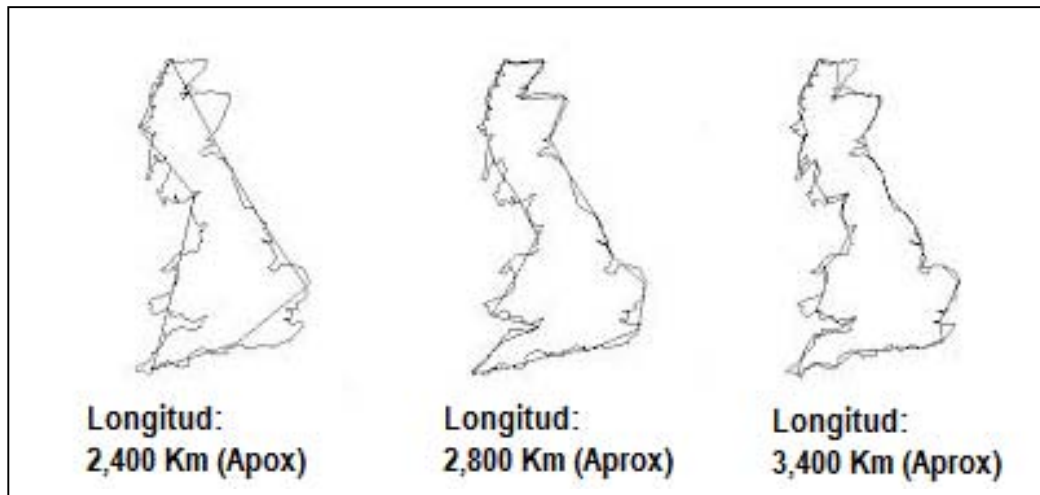
### Definición de Dimensión Fractal.

La dimensión fractal de un objeto es una relación que proporciona un índice estadístico para medir los cambios sobre la magnitud de un objeto en términos de su dimensión topológica con respecto a la exactitud o cambio de escala sobre dicha medición (Falconer, 2003).

En el caso de los objetos denominados como fractales:

- a) Su dimensión fractal es un número fraccional,
- b) Su dimensión fractal es mayor a su dimensión topológica y
- c) El número de objetos de frontera de dimensión  $n-1$  necesarios para cubrir al objeto es indefinido.

Este último inciso se puede ejemplificar con la “Paradoja de la Costa del Reino Unido”.



**Paradoja de la costa de Reino Unido (*The Coastline Paradox*<sup>19</sup>). (Calzada, 2015). Basado en Mandelbrot, 1983.**

Con el fin de entender mejor este concepto, se puede decir que la dimensión fractal nos permite determinar cuán “áspero” es el ente geométrico en cuestión.

<sup>19</sup> “*The coastline paradox*”: Mientras más cercanos son los puntos de medición de la costa de Reino Unido, su longitud parece ir en aumento; si los puntos de medición estuvieran lo suficientemente cercanos, la longitud de la costa crecería indefinidamente, al igual que el número de puntos de medición.

**Definición complementaria: Invariancia a escala.**

Se define a la invariancia a escala como la propiedad de algunos entes geométricos de mantener su magnitud y proporciones después de haber sido multiplicados por un factor escalar constante.

Esta propiedad no necesariamente está asociada a objetos fractales: tal sea el caso de la función  $f(x) = x$ ; en este caso, cualquier segmento de esta función que sea analizado presentará invariancia a escala; no obstante, y de acuerdo a las definiciones anteriores, la línea recta que representa gráficamente esta función no tiene una dimensión fraccional.

**4.1.3 Determinación de la dimensión fractal de un objeto y aplicación práctica (Curva de Koch)**

Una forma generalmente aceptada para la determinación de la dimensión fractal de un objeto es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, la cual es una generalización numérica del espacio vectorial que puede contener un objeto y que permite determinar si este tiene una dimensión no expresable en términos de números enteros.

La dimensión de Hausdorff (Talanquer, 2003) puede obtenerse a través de la expresión:

$$Df = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{M}{m}\right)}$$

Donde

**N:** Numero de componentes idénticos en las que se divide el objeto generador

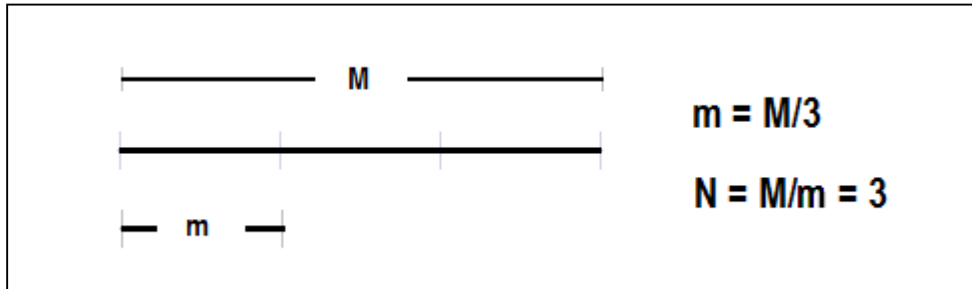
**M:** Magnitud del objeto generador

**m:** magnitud del componente derivado de la división del objeto generador<sup>20</sup>.

---

<sup>20</sup>Basándose en los preceptos de la geometría euclidiana, se podría deducir que, la magnitud de **M** es igual a **N** veces la magnitud de **m**.

Supóngase el ejemplo de un segmento de línea que se divide en 3 partes iguales. En este caso la longitud (magnitud) del segmento será  $M$ , el número de componentes generados será igual a 3 y la longitud de los componentes será la tercera parte de su generador:  $M/3$ .

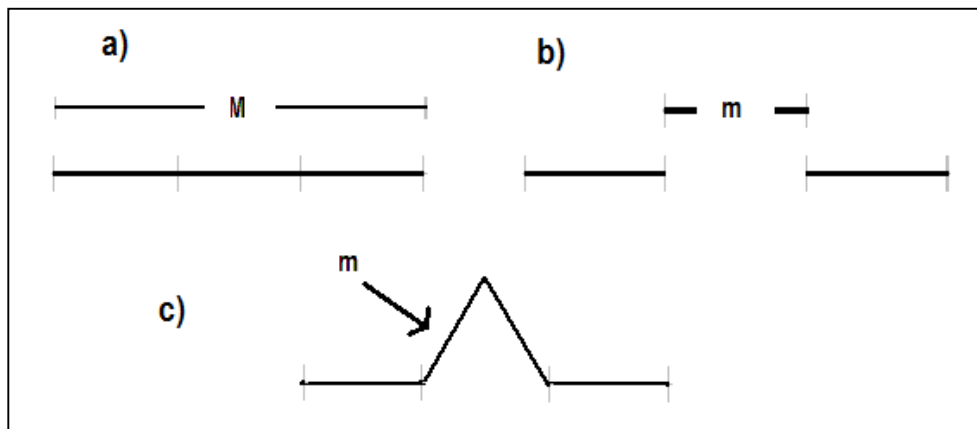


**Segmento de línea con dimensión de Hausdorff igual a 1. (Calzada, 2015). Basado en Talanquer, 2003.**

Para este caso en particular, la dimensión de Hausdorff equivale a:

$$Df = \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{M}{M/3}\right)} = \frac{\log(3)}{\log(3)} = 1$$

Para el caso de la curva de Koch, se presupone que el segmento original se divide en 3 componentes iguales y el componente intermedio se sustituye por dos elementos idénticos al segmento cambiado, como si fueran dos lados de un triángulo equilátero:



**Generador de la curva de Koch. (Calzada, 2015). Basado en Talanquer, 2003.**



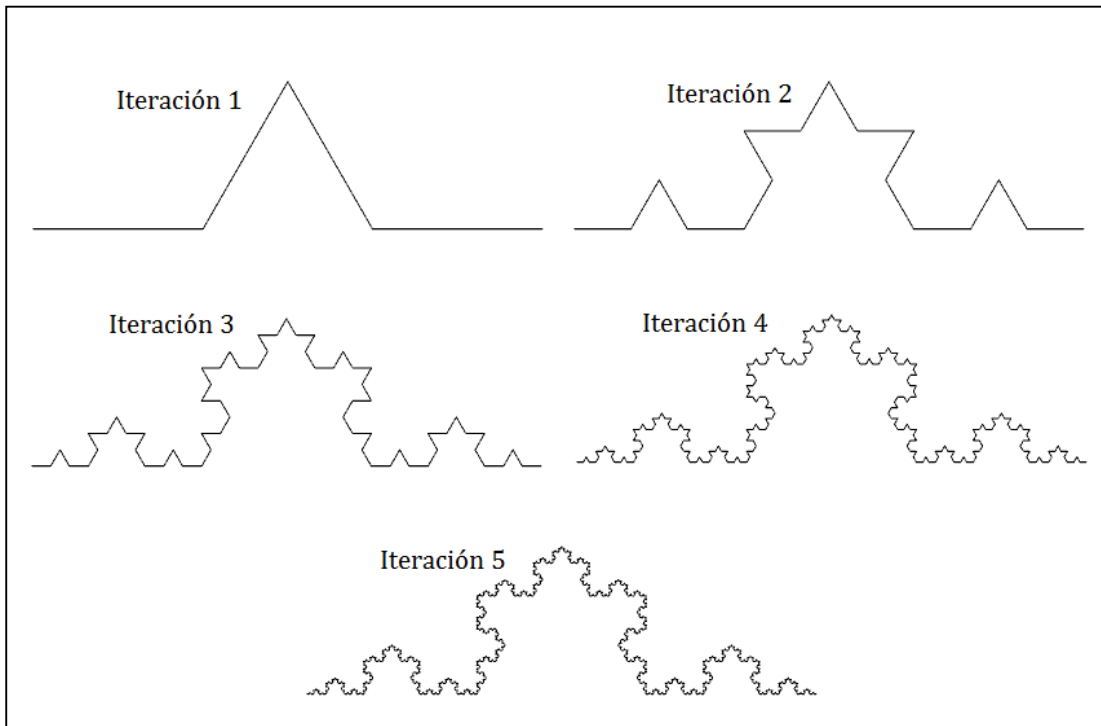
Por las propiedades de auto-similitud de los fractales, cada uno de los factores del generador de la curva de Koch será igual a su predecesor<sup>21</sup>; y cada uno de los factores servirá de generador para otros componentes del mismo. Si la citada relación se extendiera hasta el infinito, la longitud de la curva de Koch resultante estaría definida por una serie de resultado divergente, por lo que se podría considerar de longitud infinita.

Para el caso de la curva de Koch, su dimensión de Hausdorff está determinada por la siguiente expresión:

$$Df = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{M}{m}\right)} = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{M}{M/3}\right)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2619$$

Lo que significa que cubre más espacio que una línea pero menos espacio que un plano (Talanquer, 2003).

La siguiente ilustración muestra un ejemplo de la curva de Koch hasta su quinta iteración:



**Curva de Koch hasta su quinta iteración. (Batlle, 2009).**

<sup>21</sup>En el caso de la curva de Koch, este método permite generar un fractal de auto-similitud exacta.

#### **4.1.4 Definiciones Asociadas al Movimiento Browniano.**

##### Procesos Estocásticos.

Un proceso estocástico (Venegas, 2008) es un modelo matemático que define el comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio. Se define como una colección o familia de variables aleatorias

$$\{X_t, \rightarrow t \in T\}$$

ordenadas según el subíndice  $t$  –que en general suele corresponder con la variable: tiempo.

Por tanto, para cada instante  $t$  se tendrá una variable aleatoria distinta representada por  $X_t$ .

De lo anterior se desprende que un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo.

Este concepto ha resultado fundamental para el desarrollo de la teoría financiera, principalmente para definir escenarios de riesgo e incertidumbre: Los procesos estocásticos han resultado útiles para describir el comportamiento de las variables financieras en el tiempo.

##### Movimiento Browniano.

**Definición:** Sea  $(\Omega, F, P)$ <sup>22</sup> un espacio de probabilidad, se define al movimiento Browniano (Venegas, 2008), estándar y unidimensional, como el proceso aleatorio definido sobre el citado espacio de probabilidad

$$W = \{W_t\}_{t \geq 0}$$

Tal que dicho proceso cumple con las siguientes características<sup>23</sup>:

---

<sup>22</sup>Donde el espacio muestral  $\Omega$  contiene los eventos susceptibles a ocurrencia con una probabilidad  $P$  dentro del universo de sucesos aleatorios  $F$ .

<sup>23</sup>Por las características citadas en este apartado, el movimiento browniano coincide con el proceso Wiener.

i) Sus trayectorias son continuas (es decir, no existen discontinuidades sobre el conjunto  $\{t | t \in T\}$  donde T corresponde al espacio de tiempo donde se desarrolla el proceso;

ii) Se cumple que:

$$P\{\omega \in \Omega | W_0(\omega) = 0\} = 1$$

Es decir, el proceso comienza en  $t = 0$  con probabilidad de ocurrencia igual a 1;

iii) se cumple que para cualquier conjunto de tiempos  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ , ocurre que los incrementos:

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son estocásticamente independientes (es decir, sus variaciones de valor en el tiempo son independientes) y

iv) Para cualquier par de eventos en el tiempo t y s con  $0 \leq s \leq t$ , se cumple que

$$W_t - W_s \sim N(0, t-s)$$

Es decir  $W_t - W_s$  es una variable gaussiana<sup>24</sup>, con media cero y varianza  $t - s$ .

Del inciso iv, se desprende que los movimientos acumulados en el intervalo de tiempos  $[W_s, W_t]$  la desviación estándar asociada es  $(t-s)^{1/2}$  →o, considerando una distribución normal estándar:  $\sigma(t-s)^{1/2}$

De lo anterior se puede concluir que una serie de T eventos que sigan un patrón de movimiento browniano simple tendrá una desviación estándar<sup>25</sup> de

---

<sup>24</sup>Una variable X es gaussiana o normal  $[X \sim N(\mu, \sigma^2)]$  cuando su distribución de probabilidad está definida por:

$$\Phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu, \sigma^2}(u) du = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du, \quad x \in \mathbb{R}$$

<sup>25</sup> Este concepto es importante ya que está asociado a la definición de Movimiento Browniano Fractal.

$\sigma T^{1/2}$ , es decir, la escala de incrementos en el movimiento Browniano simple está dada por la raíz cuadrada del tiempo ( $t^{1/2}$ ).

El modelo del movimiento browniano es, actualmente, uno de los modelos más utilizados para describir la evolución y el comportamiento de muchas series temporales utilizadas en el ámbito financiero (Orlin-Grabbe, 1996), en virtud de que se considera que los rendimientos de dichas series tienen un comportamiento en el tiempo semejante a este tipo de procesos estocásticos.

### Movimiento Browniano Geométrico.

Definición: El movimiento Browniano Geométrico es una variación del movimiento Browniano tradicional propuesto por Paul Samuelson, donde la variable aleatoria, bajo una función logarítmica sigue un movimiento Browniano con tendencia definida.

Este tipo de movimiento se caracteriza por los siguientes aspectos:

- a) Tiene incrementos estacionarios e independientes.
- b) La distribución de los rendimientos es homocedástica en los periodos semejantes, es decir, la varianza se encuentra equi-distribuida dentro de los intervalos de duración constante y de acuerdo a la estacionalidad que los rige.
- c) La distribución de las variaciones de los rendimientos tiene una distribución gaussiana o normal.
- d) Al igual que el movimiento Browniano simple, este tiene trayectorias continuas.

Desde su definición, el modelo de Movimiento Browniano Geométrico ha sido utilizado ampliamente para definir el comportamiento de variables utilizadas en entornos financieros que siguen un patrón estacional.

Si bien, a diferencia del modelo Movimiento Browniano simple, el Movimiento Browniano Geométrico tiene propiedades de incrementos estacionarios, éste último al igual que su predecesor conserva las propiedades de distribución normal y aplica sobre variables estocásticas.

### Movimiento Browniano Fraccional.

Definición: El movimiento Browniano Fraccional es una variación del modelo del Movimiento Browniano simple en el cual, los incrementos de la variable  $X$ , siendo  $X(t)$  el valor de la trayectoria browniana en un periodo de duración  $t$ , serán estadísticamente equivalentes a un coeficiente denominado exponente de Hurst<sup>26</sup> y que está asociado a los valores de la serie de tiempo durante la vida de la variable  $X$ .

Esta diferencia surge a partir de que los incrementos en el movimiento Browniano fraccional, si bien son gaussianos, estos se encuentran correlacionados (Orlin-Grabbe, 1996), en contraste con el movimiento Browniano simple, donde cada uno de los incrementos se considera un proceso estocástico.

A partir de esta definición se observa que los valores que pueda tener el valor de la trayectoria, ya no obedece a una variable puramente aleatoria si no que depende de los valores pasados de los movimientos asociados, es decir: depende de la “memoria” de la serie.

Este movimiento considera dependencia estadística además de tener la característica, en todas sus escalas de tiempo, de varianza cíclica no periódica; cuenta, además con las propiedades de auto-similitud y dimensión de Hausdorff fraccional, características inherentes de los conjuntos fractales las cuales le confieren una mayor variabilidad de comportamientos.

En relación a lo anterior, si una serie de tiempo cuenta con la propiedad de dependencia estadística, debería de modelarse utilizando movimientos brownianos fraccionales, los cuales difieren del movimiento browniano simple por incorporar las características de independencia o dependencia propias de series cuya relevancia de información hace que requieran ser estudiadas con frecuencia y oportunidad, partiendo, prácticamente, de los mismos supuestos de los modelos desarrollados con el movimiento browniano simple (Luengas-Ardila-Moreno, 2010).

Este concepto es relevante en virtud de que muchas variables que definen los rendimientos de un activo financiero tienen un comportamiento similar a este

---

<sup>26</sup>A diferencia del movimiento Browniano simple donde los incrementos en la variable asociada están dados por el exponente constante:  $\frac{1}{2}$  (raíz cuadrada)

tipo de movimiento, es decir obedecen a una memoria definida por su misma serie de tiempo.

El movimiento Browniano Fraccional incluye un nuevo concepto: El Exponente de Hurst, el cual se detallará a continuación.

### Exponente de Hurst.

Definición: El exponente de Hurst es una magnitud que permite establecer la relación que existe entre la escala de incrementos en el movimiento Browniano con respecto a la persistencia de la variable involucrada; esta magnitud puede tomar valores entre 0 y 1, y, dependiendo de éste, se puede determinar si la serie que se está analizando tiene, o no, incrementos correlacionados.

Dada la definición anterior y la relación tiempo-incremento, se puede afirmar que, en un patrón de movimiento Browniano fraccional, una serie temporal compuesta de  $T$  movimientos tendrá una desviación estándar de  $\sigma T^H$ , donde  $H$  corresponde al exponente de Hurst.

Entonces, se podría hacer extensiva una de las propiedades<sup>27</sup> del movimiento Browniano simple proponiendo que, en referencia al movimiento Browniano fraccional, para cualquier par de eventos en el tiempo  $t$  y  $s$  con  $0 \leq s \leq t$ , se cumple que los movimientos contenidos en el intervalo de tiempo  $[t, s]$  tendrán una varianza:

$$\sigma^2 = (t-s)^{2H}$$

Siendo el movimiento Browniano simple un caso particular de los escenarios contemplados dentro del movimiento Browniano fraccional donde el exponente de Hurst ( $H$ ) es igual a 0.5 y donde, adicionalmente, se cumple la propiedad de que los eventos asociados a este tipo de movimiento tienen una distribución normal.

---

<sup>27</sup>Indicada en el inciso iv del apartado correspondiente a sus propiedades.

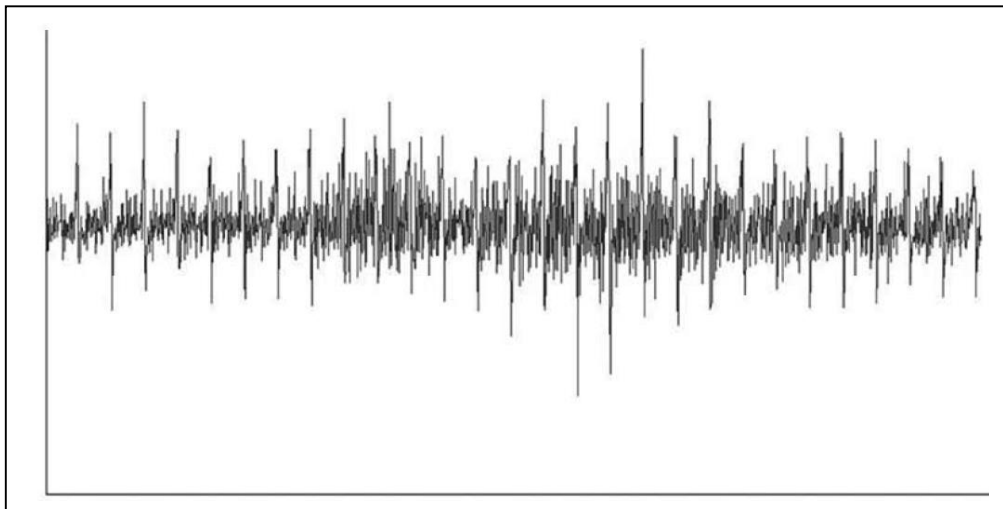
Interpretación del Exponente de Hurst (categorización del movimiento Browniano en función de H)

Cada rango de valores que puede tomar el exponente de Hurst ( $0 < H < 1$ ) le confieren, a una serie temporal cuyos movimientos se ajusten al Movimiento Browniano correspondiente, un conjunto de características que se define de acuerdo a las siguientes tres categorías.

a) Exponente de Hurst igual a 0.5

Este escenario corresponde al movimiento Browniano simple, caracterizado por sus incrementos independientes y asociados en su totalidad a procesos estocásticos (no existe memoria asociada a sus movimientos). A este tipo de movimientos se le denomina Ruido Blanco<sup>28</sup>; este ruido rara vez alcanza movimientos mayores a 3 veces el valor de su desviación estándar asociada.

En el siguiente gráfico se muestra un ejemplo de su comportamiento a lo largo del tiempo.



**Serie de tiempo que se ajusta a un Movimiento Browniano con un valor de H muy cercano a 0.5 (Luengas-Ardila-Moreno, 2010).**

---

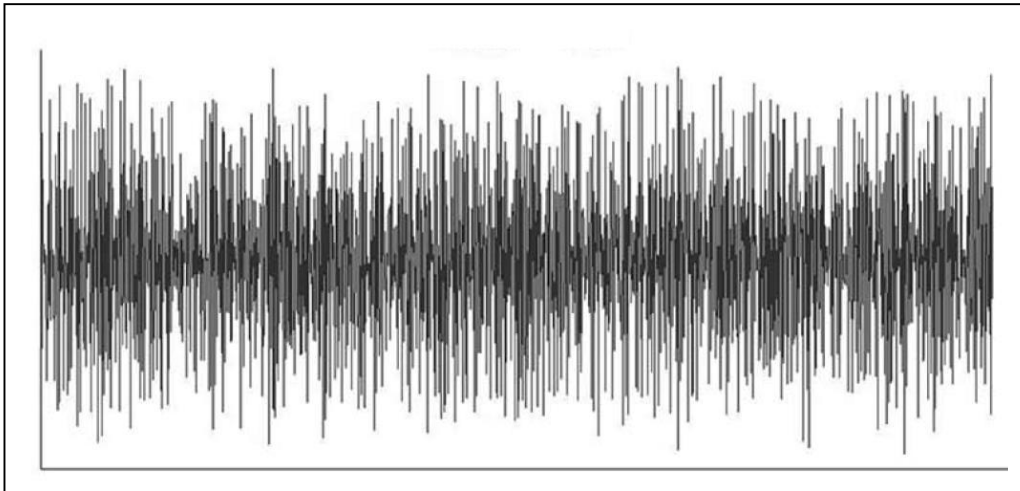
<sup>28</sup>Ruido Blanco Gaussiano (WGN por sus siglas en inglés)

b) Exponente de Hurst mayor a cero y menor a 0.5

Este escenario hace referencia a series denominadas “anti-persistentes” o “con reversión a la media”. La anti-persistencia es la tendencia constante a volver a la medida de ubicación, y por tanto a generar desplazamientos absolutos más cortos que los demás tipos de movimiento.

Bajo este supuesto, una serie temporal que presente este comportamiento<sup>29</sup> y que en el evento  $t-1$  haya registrado un valor superior a la media calculada para dicha serie, tiene muy altas probabilidades de registrar un valor por debajo de dicha media en el evento  $t_0$ .

El siguiente gráfico muestra un ejemplo de su comportamiento a lo largo del tiempo.



**Serie de tiempo que se ajusta a un Movimiento Browniano con un valor de H igual a 0.13 (Luengas-Ardila-Moreno, 2010).**

c) Exponente de Hurst mayor a 0.5 y menor a 1

Este escenario se refiere a las series denominadas como persistentes<sup>30</sup>, las cuales refuerzan su tendencia con el paso del tiempo, es decir: si los valores de los incrementos son superiores (o inferiores) a la media en el

---

<sup>29</sup>A este tipo de movimiento se le denomina “Ruido rosa” y es común encontrarlo en procesos de equilibrio dinámico y turbulencia.

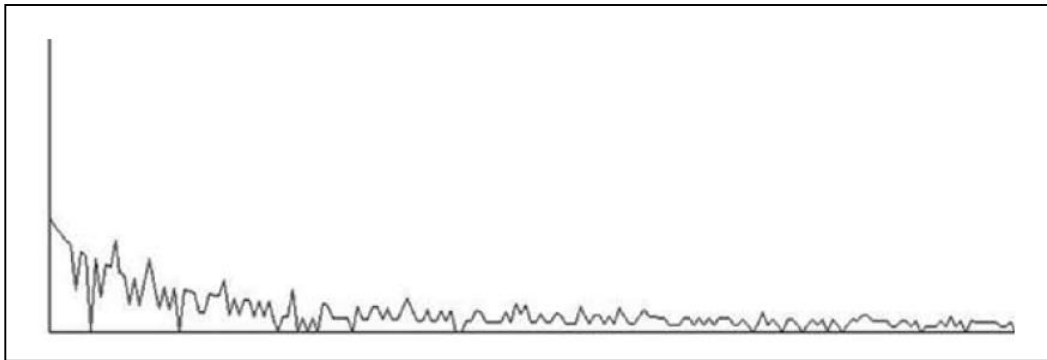
<sup>30</sup>Este tipo de movimiento se denomina “Ruido Negro” y es un comportamiento que se encuentra muy comúnmente en fenómenos naturales.



evento  $t-1$ , las probabilidades de que el movimiento registrado en el evento  $t_0$  conserve esta tendencia son altas.

Estas series tienen una característica de “memoria de largo plazo” es decir: teóricamente, los valores de los incrementos registrados en la serie en el evento  $t_0$  dependen de los valores de los incrementos ocurridos en el pasado.

El siguiente gráfico muestra un ejemplo del comportamiento de este tipo de movimiento a lo largo del tiempo.



**Serie de tiempo que se ajusta a un Movimiento Browniano con un valor de H igual a 0.91 (Luengas-Ardila-Moreno, 2010).**

#### Dimensión fractal en función del exponente de Hurst.

Benoit Mandelbrot (1982) plantea que existe una relación entre la dimensión fractal de una serie de tiempo y el coeficiente de Hurst asociado a ella. Esta relación está dada por la siguiente expresión:

$$D_F = 2 - H$$

Donde

$D_F$ : Corresponde a la dimensión fractal de la serie analizada

$H$ : Corresponde al coeficiente de Hurst asociado a dicha serie.

Esta forma de establecer la dimensión sobre una serie de tiempo permite que se pueda asociar a ella, de manera implícita al exponente de Hurst asociado, su dimensión fractal.

De esta manera, el movimiento browniano ( $H = 0.5$ ) tendrá una dimensión fractal de 1.5; si en nuestra serie de tiempo el coeficiente de Hurst es mayor a 0.5, la dimensión fractal disminuirá y la representación gráfica correspondiente

tenderá a acercarse a una recta, en el caso contrario ( $H < 0.5$ ) la dimensión fractal aumentará y la representación gráfica será más parecida a una superficie (tal es el caso de las variaciones anti-persistentes asociadas al ruido rosa<sup>31</sup>).

#### **4.1.5 Hipótesis del Mercado Fractal**

**Preliminares:** Edgar Peters formalizó el concepto de Mercado Fractal en 1991, así como los supuestos alrededor del mismo, con el fin de explicar el comportamiento heterogéneo de los inversionistas dentro de los mercados financieros con respecto a los horizontes de tiempo asociados a dichas inversiones y la supuesta liquidez del mercado, vinculando dichos comportamientos con conceptos descritos en la teoría fractal planteada por B. Mandelbrot.

**Concepto:** La Hipótesis del Mercado Fractal (HMF) se basa en una serie de supuestos que contrastan con la Hipótesis del Mercado eficiente (HME). Los supuestos formados alrededor de esta hipótesis pretenden explicar el comportamiento de los mercados financieros de una manera afín a los sucesos observados cotidianamente centrándose principalmente en los conceptos de:

- a) Horizonte de la Inversión<sup>32</sup>,
- b) liquidez del mercado<sup>33</sup> e

---

<sup>31</sup> Las gráficas que describen el comportamiento de los diferentes tipos de movimiento Browniano, muestran que, para una serie de tiempo con una cantidad similar de observaciones, la longitud de la línea que permite describir al ruido es mucho mayor que la que describe al ruido negro, siendo el primero más parecido a una superficie que el segundo.

<sup>32</sup> Se define como **horizonte de inversión** de un activo financiero a la cantidad de tiempo que un inversionista planea tener la posición de dicho activo; la duración de dicho horizonte está asociada con la exposición al riesgo del inversionista y del retorno de la inversión.

<sup>33</sup> La **liquidez del mercado** está asociada a la facilidad con la que cada uno de los inversionistas que participan en él pueden comprar y vender activos financieros sin que estas acciones afecten los precios de referencia de dichos activos. Dicha liquidez tendrá lugar siempre y cuando los inversionistas estén dispuestos a negociar con alguno de sus pares; de esta manera, para que la negociación pueda realizarse,

- c) Impacto de la información<sup>34</sup> en los Mercados.

Los supuestos en los que se basa la Hipótesis del mercado Fractal son los siguientes:

- a) El mercado se mantiene estable en función de que en él participen inversionistas con diferentes horizontes de inversión. Esta acción asegura la liquidez del mercado y, por lo tanto, su facilidad de operación<sup>35</sup>.
- b) La información asociada a los activos que componen el mercado adquiere su relevancia en función del horizonte de la inversión; de esta manera los horizontes de inversión a corto plazo darán mayor valor a la información asociada con el análisis técnico sobre el activo y los horizontes de inversión a largo plazo valorarán la información derivada del análisis fundamental del emisor.
- c) En caso de producirse un evento sobre un activo de largo plazo que ponga en duda la información derivada del análisis fundamental hecho sobre su emisor, los tenedores de este activo optarán, ya sea por dejar de participar en el mercado o por hacerse de activos de menor plazo. Cuando esto ocurre de manera generalizada, los horizontes de

---

los inversionistas deberán tener diferentes perspectivas sobre los rendimientos que les darán los citados activos.

<sup>34</sup> La hipótesis del Mercado Eficiente plantea que todos los participantes del mercado poseen la misma información relacionada a los activos financieros que circulan en el mercado. En apartados posteriores se discutirá, no solo el conocimiento de dicha información si no la oportunidad con la que se accede y el aprovechamiento que se tiene de la misma.

<sup>35</sup> Si existieran desajustes por crisis en los inversionistas a corto plazo, los participantes con un horizonte temporal más largo podrían –aprovechando la oportunidad– adquirir los activos de corto plazo a precio menor y estabilizar de nuevo el mercado; es decir, siempre que exista otro inversionista con un horizonte de inversión más largo que el participante en crisis, el mercado se estabilizará por sí mismo.

inversión del mercado se hacen homogéneos y el mercado se vuelve inestable<sup>36</sup>.

- d) El conjunto de precios –y fluctuaciones de los mismos– sobre los activos financieros que componen el mercado será, en términos generales, el resultante de una combinación de información técnica para activos de corto plazo y de información fundamental para activos de largo plazo. Los precios de activos de corto plazo tenderán a ser más volátiles que los de los activos a largo plazo<sup>37</sup>.
- e) Si el valor de un activo no se encuentra asociado a ningún ciclo económico, este no tendrá una tendencia de largo plazo y su valor estará asociado a su comercialización, la liquidez del mercado y la información técnica asociada al mismo.

---

<sup>36</sup> Este fenómeno ocurre debido a que ya no existirían inversionistas con horizonte a largo plazo que permitan la estabilidad del mercado a causa del fenómeno descrito en el inciso a.

<sup>37</sup> Probablemente, dicha volatilidad sobre los precios en horizontes a corto plazo podría entenderse mejor con teorías sociológicas asociadas al comportamiento colectivo en lugar del uso de modelos econométricos.

## **Capítulo V**

En este capítulo, se detallará la metodología a seguir dentro de la presente investigación para que, a partir del planteamiento de la hipótesis inicial y con base en la aplicación del análisis propuesto, se puedan obtener los elementos de validez o rechazo correspondientes.

### **5. Metodología**

#### **5.1 Planteamiento del Problema**

Como ya se planteó en apartados anteriores, se ha comprobado que algunas variables asociadas a los rendimientos de activos financieros pueden no tener un comportamiento acorde a los supuestos asociados a los modelos económicos que los representan, por lo que los valores y proyecciones derivadas de dichos modelos podrían tener una probabilidad de error notoriamente superior a la supuesta por los citados escenarios.

La presente investigación se concentra en el caso específico del tipo de cambio Peso Mexicano sobre Dólar Norteamericano (MXN/USD), activo para el cual se intentan determinar el cumplimiento de las condiciones de distribución normal en los valores de sus rendimientos a lo largo del tiempo, así como qué tan cercanos son los movimientos diarios en sus rendimientos a un movimiento Browniano convencional o si es que su comportamiento está más asociado al movimiento Browniano fraccional.

En función de cuan apegados sean los valores mencionados a los supuestos iniciales propios de los modelos antes mencionados será posible determinar si los modelos tradicionales son, o no, suficientes para definir su comportamiento.

#### **5.2 Objetivo General**

Comprobar si, para el caso del tipo de cambio MXN/USD, se cumplen los supuestos sobre los que se cimientan los modelos tradicionales de análisis de riesgo que representan variables financieras con el fin de sustentar la efectividad de dichos modelos.

### **5.3 Objetivos específicos**

Para el caso del tipo de cambio MXN/USD, y con el fin de cumplir con el objetivo general de la presente investigación, se pretende determinar:

- a) Si las variaciones en sus rendimientos diarios se comportan de manera afín al movimiento browniano convencional.
- b) Si es que la distribución de sus rendimientos diarios obedece a una distribución normal o tiene comportamiento asimétrico, leptocúrtico (de colas pesadas) u obedece a ambos comportamientos.
- c) En caso de que sus rendimientos diarios no se ajusten a un movimiento browniano convencional, determinar si su comportamiento se asocia con movimiento browniano de tipo fraccional

### **5.4 Pregunta de Investigación**

¿Los modelos convencionales de análisis de riesgo se ajustan a los supuestos sobre los que se sustentan en el caso de las variaciones diarias en los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD?

### **5.5 Hipótesis**

Los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD, no se ajustan a las condiciones de distribución normal y sus movimientos no corresponden a un movimiento Browniano convencional, por lo que los modelos tradicionales que definen variables financieras y que se basan en dichos supuestos podrían no ser totalmente eficaces para representar a esta variable financiera.

### **5.6 Matriz de congruencia**

En el siguiente cuadro se muestra la matriz de congruencia entre las preguntas de investigación, los objetivos de la investigación y las hipótesis generadas alrededor de los mismos<sup>38</sup>, agrupados de acuerdo a la relación que existe entre ellos.

---

<sup>38</sup>Se consideran tanto el objetivo general como los objetivos específicos y sus correspondientes hipótesis y preguntas de investigación.

<b>Pregunta Principal</b>	<b>Objetivo General</b>	<b>Hipótesis Principal</b>
¿Los modelos convencionales de análisis de riesgo se ajustan a los supuestos sobre los que se sustentan, en el caso específico de las variaciones diarias en los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD?	Comprobar si, para el caso del tipo de cambio MXN/USD, se cumplen los supuestos sobre los que se cimientan los modelos tradicionales de análisis de riesgo que representan variables financieras con el fin de sustentar la efectividad de dichos modelos.	Los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD, no se ajustan a los supuestos requeridos por los modelos convencionales de análisis de riesgo para variables financieras y, por lo tanto, dichos modelos pueden no ser totalmente eficaces para representar a esta variable en específico.
<b>Preguntas Secundarias</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>Hipótesis Secundarias</b>
¿Se cumple que los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD tiene un comportamiento similar al movimiento Browniano simple?	Comprobar si, para este caso, se cumple que las variaciones en sus rendimientos diarios tienen un comportamiento afín al movimiento browniano convencional	Los rendimientos diarios del tipo de cambio MXN/USD no tienen un comportamiento similar al movimiento Browniano simple.
¿Se cumple el supuesto de normalidad para la distribución correspondiente a los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD?	Comprobar si, para este caso, se cumple que la distribución de sus rendimientos diarios obedece a una distribución normal (sin asimetría ni leptocurtosis).	Los rendimientos diarios del tipo de cambio MXN/USD no están distribuidos normalmente y, más bien, tiene un patrón de distribución de colas pesadas (leptocúrtica)
¿En caso de no tener un patrón similar al movimiento Browniano simple, que tipo de comportamiento siguen los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD?	Determinar, para el caso de esta variable, si el comportamiento de los rendimientos diarios se ajusta a un movimiento browniano de tipo fraccional en caso de que no se ajusten a un movimiento browniano convencional.	Los rendimientos diarios del tipo de cambio MXN/USD tienen un comportamiento similar al movimiento Browniano fraccional.

**Matriz de congruencia específico para este caso de estudio. (Calzada, 2015). Basado en Gallardo-Bolaños, 2000**

## **5.7 Información utilizada**

Para llevar a cabo la presente investigación, fue utilizada la serie histórica del tipo de cambio MXN/USD con las siguientes características:

- Esta información fue obtenida a través del portal de Banco de México: [www.banxico.org.mx](http://www.banxico.org.mx)<sup>39</sup>.
- No obstante que esta información es de frecuencia diaria, presenta rendimientos igual a cero para los días no laborables, por lo que estas observaciones fueron retiradas de la serie para eliminar algún efecto de persistencia que no sea propio de la misma<sup>40</sup>.
- Se consideran los registros del tipo de cambio, desde el 22 de diciembre de 1994<sup>41</sup> hasta el 31 de diciembre de 2015, con un total de 5289 observaciones.

## **5.8 Métodos de Análisis**

De acuerdo a los objetivos que se persiguen, se propone que la información analizada sea sometida a las siguientes pruebas:

### **5.8.1 Análisis de relación “Rendimiento sobre Desviación Estándar Acumulada”**

Según Mandelbrot (2004), este tipo de análisis sirve como guía para determinar si las series de tiempo sometidas a éste tienen un comportamiento similar al movimiento Browniano simple; este autor muestra cómo una serie que se ajusta a este tipo de movimiento tendrá un comportamiento

---

<sup>39</sup>Banco De México:

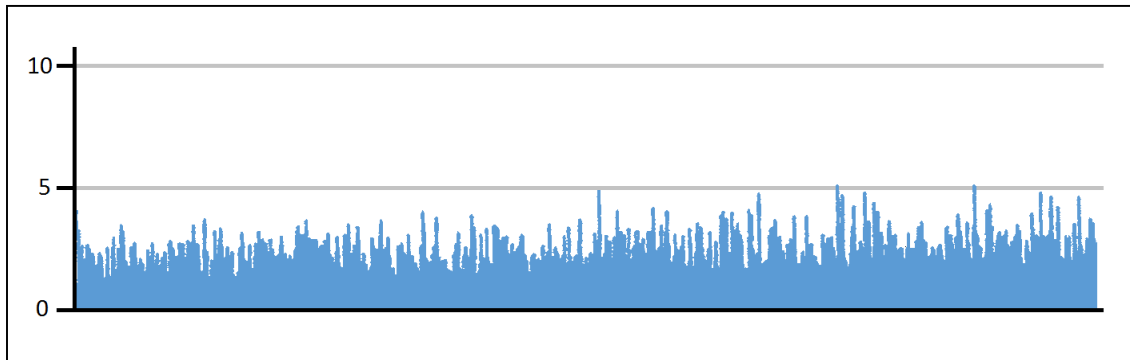
Sistema de Información Económica (SIE), serie **SF60653**: Tipo de cambio pesos por dólar E.U.A., (Tipo de cambio para solventar obligaciones denominadas en moneda extranjera, a la fecha de liquidación)

<sup>40</sup> La citada serie también fue evaluada considerando las observaciones eliminadas y los resultados obtenidos fueron muy similares a los presentados en la comprobación de la hipótesis.

<sup>41</sup> Fecha de inicio del régimen cambiario MXN/USD utilizado actualmente en México: Desde el 11 de noviembre de 1991 y hasta el 21 de diciembre de 1994 se utilizó el régimen de Bandas cambiarias con desliz controlado; después de esta fecha y hasta la actualidad se utiliza el régimen de libre flotación. Fuente: [www.banxico.org.mx](http://www.banxico.org.mx), “Regímenes cambiarios en México a partir de 1954.



homogéneo y valores umbrales (máximos y mínimos) en el orden de 5 desviaciones estándar<sup>42</sup>.



**Fig. 1. Cambios en el Movimiento Browniano simple (en número de desviaciones estándar)<sup>43</sup>.**

Para la realización de este tipo de análisis se llevan a cabo los siguientes pasos:

- a) Una vez obtenida la serie con los valores diarios del tipo de cambio (MXN/USD), se obtienen los rendimientos correspondientes para generar, con ellos, una nueva serie de tiempo.
- b) Con esta nueva serie se calcula, para cada uno de los registros, la desviación estándar acumulada, considerando los registros asociados al intervalo comprendido desde el inicio de la serie hasta la fecha correspondiente.
- c) Obtener, en valor absoluto, la relación rendimiento/desviación estándar acumulada para cada registro de la serie de tiempo.
- d) Graficar los datos obtenidos en el inciso c para determinar si su comportamiento es similar a los cambios asociados al movimiento Browniano.

---

<sup>42</sup>Recordando las características del movimiento Browniano, las series que lo emulen deberán tener una distribución normal, por lo que los datos contenidos en el intervalo  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  deberán corresponder, aproximadamente, al 99.75% del total de los datos de la serie.

<sup>43</sup>Valores Absolutos

Se contempla la aplicación de este método para comparar los datos resultantes con los cambios ocurridos en un comportamiento equivalente al movimiento Browniano simple con el fin de determinar si sus características corresponden con este tipo de comportamiento.

### 5.8.2 Determinación de distribución de “colas pesadas”

Se considera que una distribución de probabilidades es de “colas pesadas” cuando, dentro de un muestreo estadístico<sup>44</sup>, más del 1% de los eventos asociados se concentra fuera del intervalo  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ , en este caso se considera que la probabilidad de ocurrencia de eventos extremos es notoriamente mayor a la ocurrida en la distribución normal.

Como ya se ha mencionado, la ocurrencia de este fenómeno también es una limitante para la utilización de técnicas y modelos financieros tradicionales, especialmente en la determinación del Valor en Riesgo, VaR.

En el presente trabajo se contempla la utilización de este método para obtener la frecuencia de eventos extremos; esta técnica aunada al análisis del Rendimiento sobre la desviación estándar acumulada permite determinar si la aplicación de un método paramétrico de determinación del VaR pudiera no ser eficaz en virtud de que las características citadas en estos incisos impactan en la validez del nivel de significancia considerado en el citado método.

### 5.8.3 Prueba de normalidad

El método elegido para comprobar la normalidad en la distribución de las observaciones en los rendimientos diarios del tipo de cambio MXN/USD es el Método Jarque-Bera.

#### 5.8.3.1 Conceptos preliminares

Para comprender mejor la manera en la que se aplica la prueba de normalidad elegida, es necesario definir los momentos superiores de la distribución de probabilidad:

---

<sup>44</sup>En una distribución normal, fuera de este intervalo se debería de concentrar menos del 0.3% de los eventos correspondientes al muestreo.

El tercero y cuarto momento de una distribución de probabilidades sirven para definir su “forma específica”, en particular su asimetría (o carencia de simetría)  $A$  y su curtosis (o apuntamiento)  $K$ .

**Asimetría:** Una de las expresiones más aceptadas para calcular la asimetría de una distribución de probabilidad es el coeficiente de asimetría de Fisher ( $A_F$ ) el cual evalúa si los datos se encuentran simétricamente distribuidos respecto a la media o si tienden a concentrarse a la izquierda o a la derecha de ésta.

De acuerdo a esta definición, cuanto mayor sea el valor absoluto de la suma:

$$\sum(x_i - \bar{x})^3$$

mayor será la asimetría en la distribución.

**Definición:** Sea el conjunto  $X=(x_1, x_2, \dots, x_N)$  una serie de datos que describen una distribución, y sea  $\bar{x}$  la media,  $s$  la desviación estándar y  $N$  el número de datos de dicho conjunto, entonces el coeficiente de asimetría de Fisher está dada por:

$$A_F = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3}{N s^3}$$

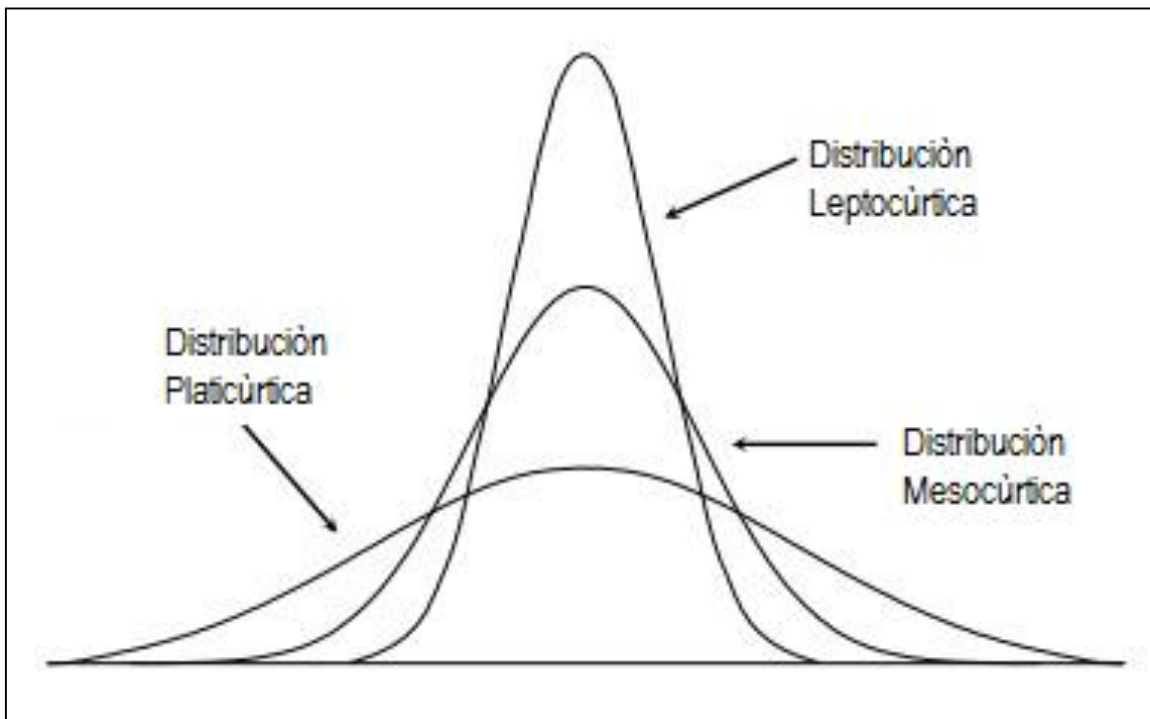
- Si  $A_F < 0 \rightarrow$  la distribución tiene una asimetría negativa y es más densa en valores menores a la media.
- Si  $A_F = 0 \rightarrow$  la distribución es simétrica.
- Si  $A_F > 0 \rightarrow$  la distribución tiene una asimetría positiva y es más densa en valores mayores a la media.

**Curtosis:** La curtosis nos permite determinar la cantidad de datos cercanos a la media con respecto al total que componen la distribución de probabilidades en función de qué tan escarpada o aplanada es la gráfica que define a dicha función.

**Definición:** Sea el conjunto  $X=(x_1, x_2, \dots, x_N)$  una serie de datos que describen una distribución, y sea  $x$  la media,  $s$  la desviación estándar y  $N$  el número de datos de dicho conjunto, entonces la curtosis ( $K$ ) de la distribución de probabilidad está dada por:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x)^4}{Ns^4}$$

- Las Distribuciones de Probabilidad con  $K < 3$  se denominan platicúrticas (anchas o de colas cortas)
- Las Distribuciones de Probabilidad con  $K > 3$  se denominan leptocúrticas (delgadas o de colas pesadas)
- Las Distribuciones de Probabilidad con  $K = 3$  se conocen como mesocúrticas; su ejemplo más representativo es la distribución normal



**Fig. 2 Curtosis en Distribuciones de Probabilidad**

### 5.8.3.2 Prueba de normalidad de Jarque-Bera

La prueba de normalidad Jarque-Bera es una prueba asintótica o de muestras grandes; para llevar a cabo esta prueba es necesario calcular, primeramente, la asimetría y la curtosis de la serie de datos analizados y aplicar el siguiente estadístico de prueba:

$$JB = n \left( \frac{A^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right)$$

Donde

- n**: es el tamaño de la muestra,
- A**: es el coeficiente de asimetría
- K**: es el coeficiente de curtosis.

Para una variable normalmente distribuida,  $A = 0$ ,  $K = 3$ ; entonces la Prueba Jarque-Bera constituye una hipótesis conjunta en la que ambos valores (asimetría y curtosis) hacen que el estadístico JB tenga un valor de cero.

Jarque y Bera demostraron que, en las muestras grandes de funciones de probabilidad normalmente distribuidas, el estadístico que proponen sigue la distribución xi-cuadrada con 2 grados de libertad (Gujarati, 2010).

Si el valor p calculado del estadístico JB es lo suficientemente bajo en una aplicación –lo cual ocurre si el estadístico JB difiere notoriamente de cero– se puede rechazar la hipótesis de que los valores en la distribución están normalmente distribuidos.

Por otro lado, si el valor p de la distribución xi-cuadrada es lo suficientemente grande –lo cual sucede cuando el valor del estadístico es muy cercano a cero– no se rechaza la suposición de normalidad.

Como ya se mencionó, el valor de este estadístico depende, entre otros factores, del valor de curtosis de la muestra analizada por lo que su valor podría estar asociado con la evidencia de existencia de colas pesadas en la distribución de la serie asociada.

#### 5.8.4 Obtención de evidencia de comportamiento similar al movimiento Browniano fraccional.

Como se ha mencionado en apartados anteriores, muchos de los modelos y técnicas de análisis de riesgo financiero tradicionales parten del supuesto de que los rendimientos asociados al activo financiero objeto de estudio tienen un comportamiento similar al movimiento browniano simple.

Otros estudios han demostrado que existen activos financieros cuyo comportamiento de sus rendimientos a lo largo del tiempo, más que corresponder a un movimiento Browniano simple, obedecen a un movimiento browniano fraccional (MBF).

Uno de los objetivos de este estudio es obtener evidencia de que los rendimientos asociados al tipo de cambio MXN/USD tiene un comportamiento similar al MBF; este comportamiento se asocia a las variables previamente planteadas en el presente capítulo para cuestionar si los resultados obtenidos de la aplicación de los modelos y/o técnicas de análisis de riesgo tradicionales son aceptables en función del cumplimiento de los supuestos que los fundamentan.

Un valor que ha sido ampliamente utilizado para determinar si una serie de tiempo tiene un comportamiento similar al Movimiento Browniano Simple o al Movimiento Browniano Fraccional es el exponente de Hurst, descrito en el Marco Teórico de la presente investigación.

En el siguiente capítulo, se describe de manera puntual el algoritmo utilizado para calcular el exponente de Hurst de manera general, así como las herramientas utilizadas para la aplicación de dicho algoritmo.

## Capítulo VI

En el capítulo anterior se describieron los métodos utilizados para comprobar las hipótesis planteadas en el presente trabajo de investigación. Uno de los puntos más relevantes de este trabajo es la determinación del comportamiento de la variable Tipo de cambio MXN/USD en términos de su similitud con el Movimiento Browniano –ya sea simple o fraccional según sea el caso–; la variable relevante para la determinación de dicho comportamiento –de acuerdo a definiciones dadas en capítulos anteriores–, es el exponente de Hurst.

En virtud de que algunos cálculos implícitos relacionados a la obtención de este exponente son iterativos, se recomienda hacer uso de herramientas y procesos computacionales para facilitar la programación del algoritmo que planteé la resolución de dicha tarea.

En el presente capítulo se describe el método de rango re-escalado –el cual nos permite calcular el exponente de Hurst asociado a una serie de tiempo– así como el algoritmo que describe dicho método y las herramientas de cómputo desarrolladas para instrumentar este algoritmo y complementar los cálculos necesarios para comprobar las hipótesis alrededor de la presente investigación.

### **6. Algoritmia y Programación para el cálculo del exponente de Hurst.**

#### **6.1 Análisis de Rango Re-escalado (Descripción y Algoritmia)**

El análisis de Rango Re-escalado (R/S), fue concebido y desarrollado por Harold Hurst mientras realizaba una investigación sobre los cambios en la altitud de la marea del Río Nilo en Egipto (Hurst, 1951). Posteriormente, Benoit Mandelbrot se basó en esta metodología para aplicarla en series de tiempo relacionadas con activos financieros para determinar la existencia o inexistencia de aleatoriedad en su comportamiento (Mandelbrot, 1970).

##### **6.1.1 Descripción**

Basado en el concepto del movimiento Browniano Simple –el cual plantea que una partícula suspendida en un fluido que tenga un movimiento errático se mueve a razón de la raíz cuadrada del tiempo asociado (Einstein, 1956) – y a

sus hallazgos derivados de sus estudios meteorológicos en el río Nilo, Hurst desarrolló la siguiente expresión para describir el comportamiento de series de tiempo, las cuales no necesariamente corresponden a movimientos del tipo browniano simple.

$$(R/S)_n = cn^H \quad (1)$$

Donde:

- $(R/S)$  → Corresponde a la notación utilizada para el estadístico de rango re-escalado.
- $c$  → se refiere a una constante de proporcionalidad
- $n$  → corresponde al número de datos considerado en el intervalo de tiempo estudiado
- $H$  → corresponde al exponente de Hurst.

Cabe señalar que  $(R/S)$  es un estadístico con media valor cero, expresado en términos de desviación estándar y cuyo análisis es de tipo no paramétrico en virtud de que no está referido a ninguna distribución específica (Luengas, Ardila y Moreno; 2010).

La idea central detrás de este concepto (Kristoufek, 2010), radica en que el rango –el cual se puede asociar a una medida de dispersión– sobre una serie de tiempo sigue una determinada regla de escalamiento para diferentes valores de  $n$ , considerando:

$$n = T/k$$

Donde

$T$  → Corresponde al total de registros de la serie de tiempo y

$K$  → Corresponde a un número entero positivo tal que  $k = 1, 2, 3, \dots, i$ ;

los valores de rango<sup>45</sup> sobre dispersión correspondientes a dicha regla de escalamiento permitirá determinar si la serie de tiempo objeto de estudio tiene un comportamiento aleatorio, persistente o anti-persistente.

---

<sup>45</sup>Se define el rango como la diferencia entre el valor mínimo y el valor máximo existentes en una muestra de datos.



Kristoufek (2010), sugiere que una relación lineal –logarítmica a ambos lados de la igualdad– indica la forma en que se escala el factor de potencia en la expresión (1), y que para despejar dicho factor se puede hacer uso de una regresión lineal utilizando el método de Mínimos Cuadrados Ordinario (MCO) logarítmica a ambos lados de la relación anterior; de esta aseveración se desprende que.

$$\log(R/S)n \sim \log(c) + H*\log(n)$$

Donde  $H$  equivale al exponente de Hurst.

Por lo que se puede deducir que el exponente de Hurst corresponderá a la pendiente de la recta que describe a la función con mayor bondad de ajuste para la correlación de los datos correspondientes al logaritmo del número de datos de cada partición de la serie con el correspondiente logaritmo del cociente “rango sobre desviación estándar”.

#### 6.1.2 Algoritmo para la obtención del exponente de Hurst con base en el análisis de rango re-escalado.

Tal como se mencionó en la introducción de este capítulo, una forma simple de obtener el exponente de Hurst asociado a una serie de tiempo, es a través de la aplicación de algoritmos y uso de herramientas computacionales para las secuencias iterativas planteadas en el apartado anterior.

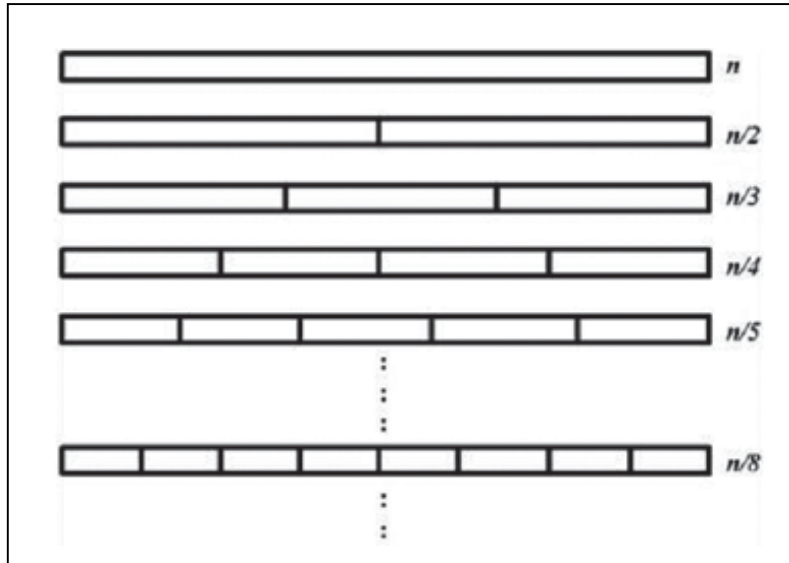
Se proponen la aplicación el siguiente algoritmo (Quintero y Ruiz, 2011) para conseguir dicho fin:

- a) Partiendo de la serie de tiempo original, objeto de interés, –de tamaño  $M$ –, se obtienen los rendimientos correspondientes en una serie de tamaño  $N = M - 1$ , donde cada rendimiento está definido por:

$$N_i = \log ( M_i / M_{i-1} ) , \quad \text{para } i = 2,3,4\dots,M$$

- b) La serie de tiempo  $N$  se divide en  $A$  sub-periodos (llamados, de aquí en adelante, particiones) contiguos de  $n$  registros, tal que  $n = N / A$  (para  $A = 1, 2, 3\dots$ ).
- c) Se nombra a cada partición como  $I_a$ , (para  $a = 1, 2, 3\dots$ ), cada elemento en  $I_a$  se etiqueta como  $N_{k,a}$ , tal que  $k = 1, 2, 3\dots,n$

La siguiente figura ejemplifica la manera en que se realizan las particiones realizadas sobre la serie original<sup>46</sup>.



**Ejemplo de división iterativa sobre la serie original y las particiones generadas alrededor de la misma (Quintero y Ruiz, 2011)**

d) Para cada partición  $I_a$  se obtiene la media  $e_a$  de acuerdo a la expresión:

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{k, a}$$

e) Se acumulan las diferencias con respecto a la media  $e_a$  para cada partición  $I_a$  para obtener la serie de tiempo acumulada  $X_{k,d}$ , definida como:

$$X_{k,d} = \sum_{k=1}^n (N_{i,d} - e_a), \quad \text{para } K = 1, 2, 3, \dots, n$$

<sup>46</sup> Al variar el número de particiones se obtiene, en cada iteración, la serie dividida en intervalos de igual número de datos, si la serie tiene características de auto-afinidad, sin importar el tamaño de los intervalos, debe conservar las mismas características (Luengas, Ardila y Moreno; 2010).

- f) Se obtiene el rango  $RI_d$  definido como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de  $X_{k,d}$  para cada partición de  $I_a$

$$RI_d = \text{MAX}(X_{k,d}) - \text{MIN}(X_{k,d}), \quad \text{donde } 1 \leq k \leq n$$

- g) Se obtiene la desviación estándar  $SI_d$ , para cada partición  $I_a$  de la manera convencional.
- h) Para cada partición  $I_a$ , se normaliza el rango  $RI_d$  dividiéndolo entre la correspondiente desviación estándar  $SI_{d,c}$

De esta manera, el rango re-escalado para cada partición  $I_a$  estará definido por  $RI_d / SI_d$ . Al tener periodos continuos de longitud regular, se obtienen los valores promedio  $R/S$  para cada valor de  $n$  de la siguiente forma:

$$(R/S)_n = \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A (RI_d / SI_d), \quad \text{Para } n = 1, 2, 3, \dots$$

- i) Con los valores obtenidos de los logaritmos de  $N/A$  y de  $(R/S)_N$  correspondientes, se obtiene la regresión lineal de dicha relación utilizando el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) para obtener un modelo de la forma:

$$\log (R/S)_n = \beta_0 + \beta_1 * \log(n)$$

- j) Se considera el valor correspondiente a  $\beta_1$  como el exponente de Hurst<sup>47</sup> asociado a la serie de tiempo analizada.

---

<sup>47</sup> Se puede observar que este parámetro corresponde a la pendiente de la función lineal obtenida por la regresión mientras que el otro parámetro correspondería a la ordenada al origen.

Los datos mostrados en la siguiente tabla ilustran los datos a correlacionar para obtener la regresión requerida en el proceso anterior:

Datos (A)	Rango re-escalado R/S (B)	Log(A)	Log(B)
N	$(R/S)_N$	Log(N)	Log[(R/S) <sub>N</sub> ]
N/2	$(R/S)_{N/2}$	Log(N/2)	Log[(R/S) <sub>N/2</sub> ]
N/3	$(R/S)_{N/3}$	Log(N/3)	Log[(R/S) <sub>N/3</sub> ]
⋮	⋮	⋮	⋮
N/i	$(R/S)_{N/i}$	Log(N/i)	Log[(R/S) <sub>N/i</sub> ]
⋮	⋮	⋮	⋮

**Construcción de pares para regresión lineal. (Calzada, 2015).  
Basado en Quintero y Ruiz (2011)**

Como se puede apreciar en el citado algoritmo, los cálculos necesarios para obtener los pares de correlación necesarios para calcular el exponente de Hurst están en función del número de veces que se desee dividir la serie original.

Al repetirse el mismo proceso para cada división de la serie original y el conjunto de particiones asociadas, esto da lugar a un proceso iterativo que podría programarse y resolverse a través de una herramienta de cómputo.

El siguiente apartado describe la herramienta desarrollada para resolver el algoritmo planteado.

## **6.2 Herramientas Computacionales para obtención del exponente de Hurst.**

### **6.2.1 Aplicación CORONEL V1.0.4**

Como complemento a este trabajo de investigación, se desarrolló, basado en el algoritmo descrito, una aplicación de software capaz de obtener el exponente de Hurst de una serie de tiempo determinada, basándose en el algoritmo descrito en el apartado anterior y considerando 20 particiones sobre la serie de datos correspondiente.

De igual manera, esta aplicación utiliza el método de Mínimos Cuadrados Ordinario para realizar la regresión lineal sobre los datos obtenidos y calcular el parámetro correspondiente al exponente de Hurst, presentándolo como su salida más relevante<sup>48</sup>.

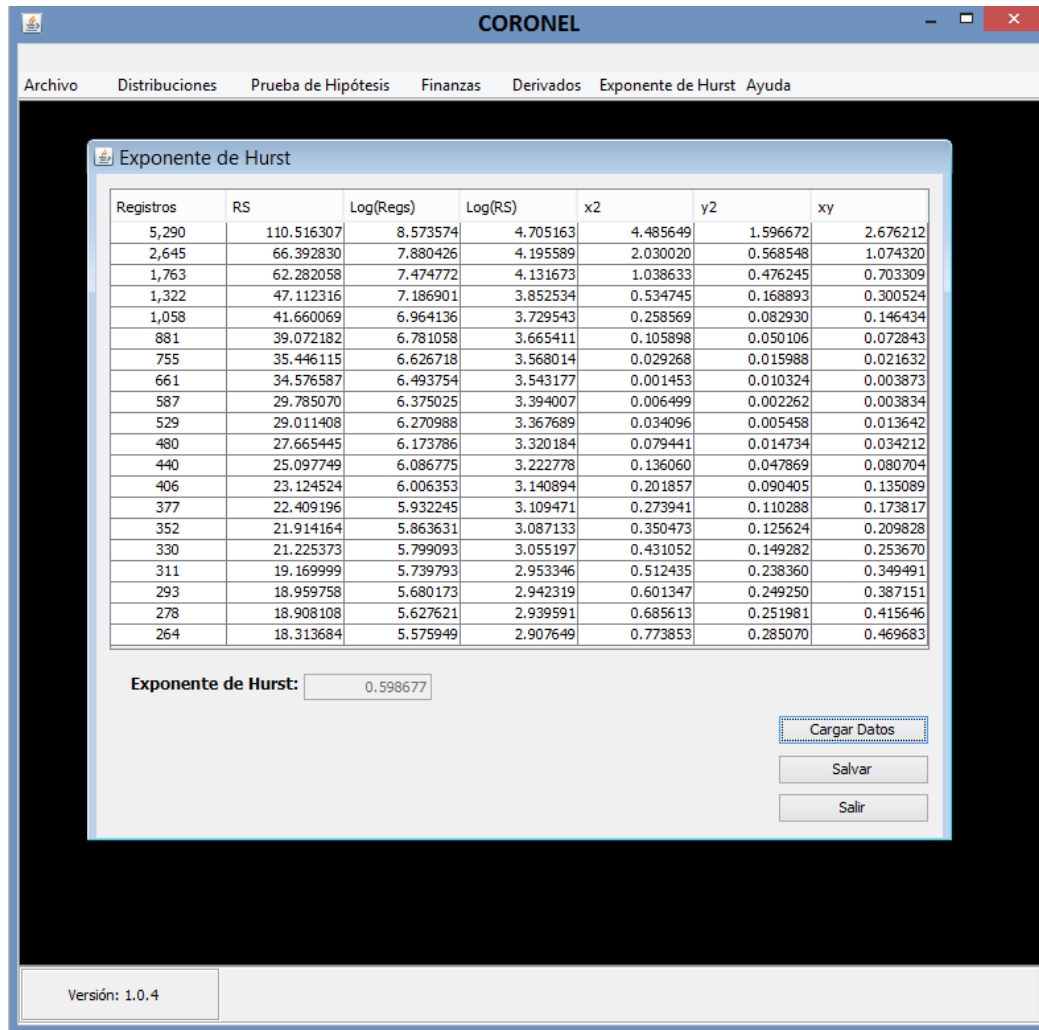
Dicha aplicación fue desarrollada como una extensión del Software denominado como CORONEL V1.0.4 –también desarrollado por el autor del presente trabajo.

CORONEL V1.0.4 es una aplicación desarrollada en Java<sup>®</sup> *Standard Edition* con interfaz gráfica programada con herramientas SWING cuya finalidad es resolver distintos problemas presentados durante el curso de las materias que forman parte del plan de estudios del programa de maestría en Finanzas Bursátiles de la Facultad de Contaduría y Administración de la UNAM.

A la plataforma de CORONEL V1.0.4 se adicionó la herramienta descrita para obtener el exponente de Hurst correspondiente a una serie de tiempo; esta herramienta es la utilizada en el presente trabajo para demostrar las hipótesis planteadas en el presente trabajo de investigación.

---

<sup>48</sup> El código generado para la programación de dicha herramienta se presenta en los apéndices de este trabajo.



**Vista de la herramienta para obtener el exponente de Hurst sobre el software CORONEL V.1.0.4 (Calzada, 2015)**

De manera complementaria, fue utilizada la aplicación Excel<sup>®</sup> 2010 para:

- Comprobar las primera iteraciones realizadas al aplicar el método de análisis de rango re-escalado para los correspondientes datos,
- comprobar los cálculos relacionados con la regresión lineal utilizando el método MCO y
- fungir como herramienta de apoyo para el software CORONEL sirviendo para generar las gráficas relacionadas con el análisis de rango re-escalado.

## Capítulo VII

Dando seguimiento a la metodología planteada en el capítulo anterior y con el fin de comprobar las hipótesis planteadas en el presente estudio, este capítulo muestra los resultados obtenidos sobre la serie de tiempo del periodo estudiado de los rendimientos de la variable financiera *Tipo de Cambio MXN / USD* en función de:

- a) El patrón de distribución encontrado en el muestreo realizado, del cual se pretende demostrar que no es normal;
- b) la evidencia de una distribución de colas pesadas para los rendimientos de la variable objeto de este estudio;
- c) la relación rendimiento/dispersión acumulada de cada uno de los valores que componen dicho muestreo y
- d) la evidencia de comportamiento similar al movimiento Browniano (ya sea simple o fractal) en los valores de nuestra serie de tiempo, valiéndonos del exponente de Hurst asociado.

Las mencionadas evidencias se obtuvieron utilizando las herramientas y metodologías propuestas *a priori* para este fin.

### 7. Evidencias

#### 7.1 Prueba de Normalidad

Para el conjunto de datos analizado –el cual, de acuerdo al número de muestras podría tener una distribución normal– se encontraron, de acuerdo a previo cálculo, los valores estadísticos mostrados a continuación y que sirven de evidencia para afirmar que la distribución de los datos correspondientes a la serie analizada en la presente investigación no tiene un comportamiento normal.

De acuerdo a la metodología descrita, se utilizó el estadístico Jarque-Bera para determinar si la distribución de los rendimientos diarios del Tipo de Cambio (MXN / USD) tiene o no una distribución normal, para lo cual fue necesario obtener los valores de asimetría y curtosis asociados a dicha serie de rendimientos.

Los valores obtenidos<sup>49</sup> se muestran en la siguiente tabla:

Parámetro	Valor
Tamaño de la muestra	5290
Media	0.00030303
Desviación estándar	0.00913651
Coefficiente de Asimetría	3.06977411
Curtosis	102.868504

**Tabla de parámetros estadísticos asociados a la serie de tiempo “Tipo de cambio MXN/USD”. (Calzada, 2015)**

Previo al cálculo del estadístico Jarque-Bera, se puede apreciar una asimetría positiva –con mayor frecuencia en valores superiores a la media– y una curtosis notoriamente mayor al valor 3 lo que significa que los rendimientos analizados podrían seguir una distribución de colar anchas<sup>50</sup>.

El valor obtenido para el estadístico Jarque-Bera es:

$$JB = n \left( \frac{A^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right);$$

$$JB = 5290 \left( \frac{3.06977411^2}{6} + \frac{(102.868504-3)^2}{24} \right);$$

$$\underline{JB = 2,206,264.97}$$

Se puede apreciar que el valor que contribuye en mayor forma a que el estadístico analizado alcance este valor tan alto es el correspondiente a la curtosis.

---

<sup>49</sup> Resultados obtenidos utilizando la hoja de cálculo Microsoft Excel<sup>®</sup> 2010.

<sup>50</sup> Esta suposición se demostrará en los siguientes apartados



Para la distribución xi-cuadrada con dos grados de libertad<sup>51</sup>, el valor máximo encontrado –correspondiente a 10.5966 (Gujarati, 2010)<sup>52</sup> y el cual es notoriamente inferior al obtenido en el presente estudio<sup>53</sup>– corresponde solamente el 0.5% del área de la citada distribución<sup>54</sup>.

Dados los valores anteriores, se puede rechazar la hipótesis de que los rendimientos asociados al Tipo de Cambio (MXN / USD) están distribuidos normalmente.

### **7.2 Prueba de distribución leptocúrtica**

En el apartado anterior se observó la existencia de un valor de curtosis notoriamente elevado para la serie que atañe a este estudio, lo que podía significar la existencia de una distribución de colas pesadas para dichos datos. En adición a lo anterior y para demostrar dicha suposición se obtuvo el porcentaje de los rendimientos que estaban fuera del rango  $\mu \pm 3\sigma$ , obteniendo los siguientes resultados<sup>55</sup>.

<b>Descripción</b>	<b>Valor</b>
$\mu - 3\sigma$	-0.02710652
$\mu + 3\sigma$	0.02771257
Tamaño de la Muestra	5290
# de valores fuera del rango $\mu \pm 3\sigma$	70
% de valores fuera de rango con respecto a la muestra	1.323 %

**Tabla de valores relacionados a la evidencia de distribución de colas pesadas en la serie de tiempo “Tipo de cambio MXN/USD”. (Calzada, 2015)**

<sup>51</sup> Se ha demostrado que el estadístico Jarque-Bera es acorde a la distribución xi-cuadrada con 2 gl para funciones de probabilidad normalmente distribuidas

<sup>52</sup> A su vez tomado del compendio *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, 3ª edición, tabla 8. Cambridge University Press.

<sup>53</sup> De acuerdo a las definiciones anteriores, el estadístico Jarque-Bera asociado debe tener valores muy cercanos a cero para considerar que el muestreo correspondiente tiene una distribución normal.

<sup>55</sup> Resultados obtenidos utilizando la hoja de cálculo Microsoft Excel 2010.

Partiendo de la afirmación de que una muestra de datos distribuida normalmente, solamente tendrá el 0.3% fuera del intervalo  $\mu \pm 3\sigma$  y que una distribución que tenga más del 1% de sus valores fuera de dicho rango se puede considerar “de colas pesadas”, se cuenta con la evidencia suficiente para afirmar que el muestreo analizado tiene una distribución similar a esta última (distribución de colas pesadas).

### **7.3 Relación rendimiento sobre desviación estándar acumulada**

De acuerdo a definiciones descritas en el marco teórico de la presente investigación, el movimiento browniano simple tiene un comportamiento aleatorio independiente de eventos ocurridos en el pasado para la misma serie.

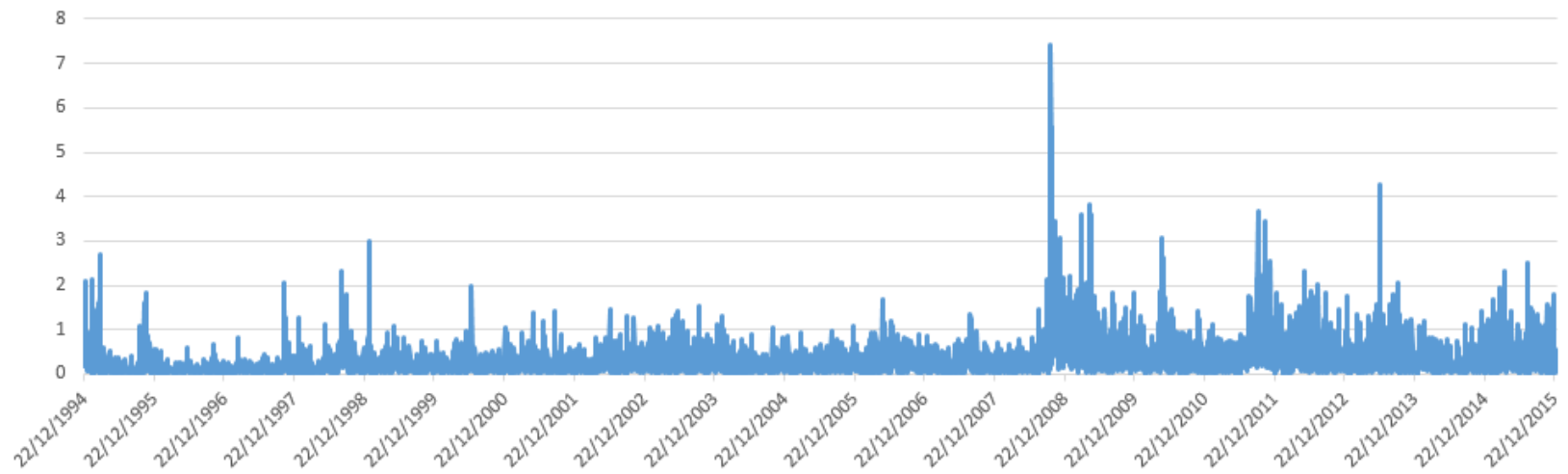
La característica descrita –hablando de series sobre variables financieras y considerando que éstas están normalmente distribuidas– provocará que la gráfica que representa a la serie de tiempo tenga una apariencia uniforme a lo largo de tiempo.

Con el fin de obtener evidencia sobre la relación descrita, se realizó el siguiente proceso con la serie de tiempo objeto de este estudio:

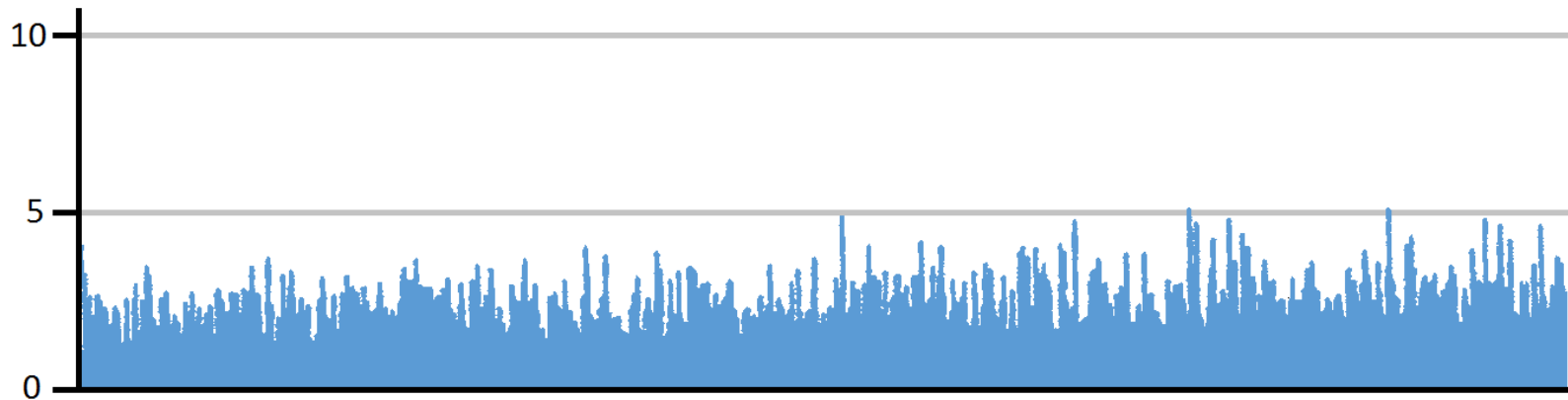
- a) Se ordenaron los rendimientos propios de la serie de forma cronológica;
- b) Para cada uno de los registros de la serie se calculó la desviación estándar acumulada desde el inicio de la misma hasta el registro previo correspondiente;
- c) Se dividió el valor del registro del momento  $t_n$  entre la desviación estándar acumulada en el intervalo  $[t_0, t_{n-1}]$ ;
- d) Se generó la gráfica correspondiente a la relación rendimiento/desviación estándar acumulada.

La figura de la siguiente página, muestra la gráfica obtenida valiéndose del proceso anterior para los valores objetos de nuestro estudio en comparación con una gráfica sometida al mismo proceso con valores que siguen un patrón similar al movimiento Browniano Simple.

a)



b)



Comparación de la gráfica (a) de relación rendimiento/ $\sigma$  acumulada para el tipo de cambio MXN/USD (Calzada, 2015) y la gráfica (b) de relación movimiento/ $\sigma$  acumulada de un ejemplo de movimiento Browniano simple (Mandelbrot, 2006). Ambas en número de desviaciones estándar ( $\sigma$ ) y en valores absolutos.

En la figura anterior<sup>56</sup>, se observa que la relación rendimiento sobre desviación estándar presenta, en el caso del tipo de cambio MXN/USD un comportamiento muy poco uniforme e incluso un registro con un valor notoriamente superior a 5 desviaciones estándar, mientras que en el caso del movimiento Browniano Simple, los valores límite<sup>57</sup> son igual a 5.

La evidencia anterior propone que los rendimientos propios de nuestro estudio no tienen un comportamiento similar al movimiento Browniano Simple.

En el siguiente apartado se pretende encontrar la similitud de dichos rendimientos con el movimiento Browniano Fraccional, basándose en el exponente de Hurst correspondiente.

#### **7.4 Evidencia de comportamiento similar al movimiento Browniano Fractal en función al exponente de Hurst asociado.**

Se empleó la herramienta para el cálculo del exponente de Hurst de la aplicación **CORONEL V1.0.4** utilizando como datos de entrada los rendimientos diarios del tipo de cambio MXN/USD.

Los valores para la correlación entre el número de valores en las particiones de la serie original y el correspondiente rango re-escalado se presentan en la siguiente tabla:

---

<sup>56</sup>La gráfica a), así como los cálculos necesarios para su obtención, fueron realizados utilizando la hoja de cálculo Microsoft Excel 2010.

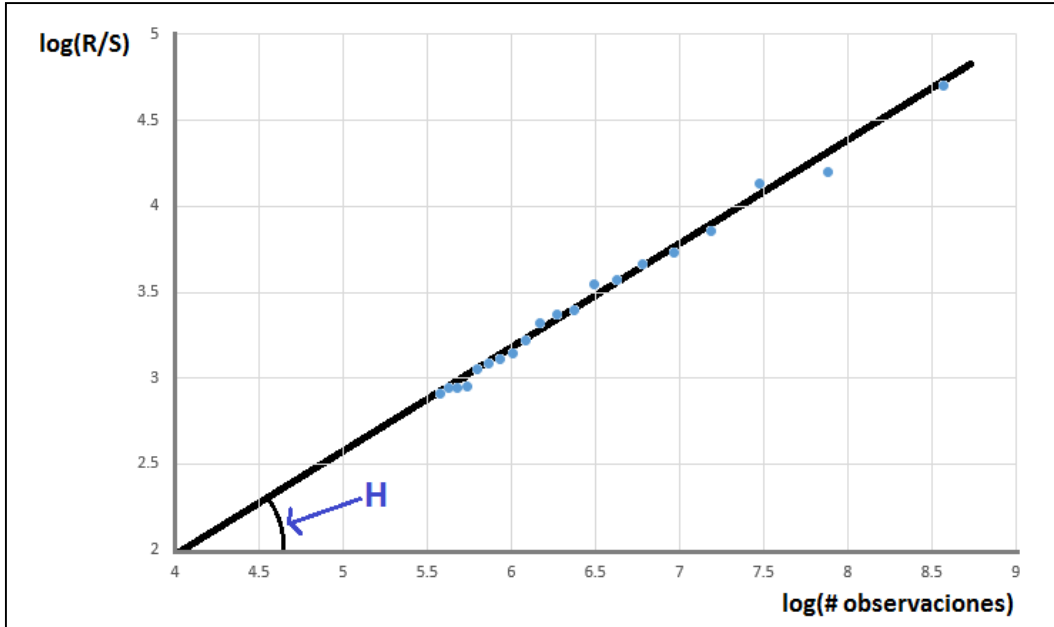
<sup>57</sup>En ambos casos, se plasman valores absolutos.

Partición	Valores por Partición (A)	Rango re-escalado (B)	Log (A)	Log (B)
N	5290	110.516307	8.57357352	4.70516308
N / 2	2645	66.39283	7.88042634	4.19558907
N / 3	1763	62.282058	7.47477218	4.13167339
N / 4	1322	47.112316	7.18690102	3.85253445
N / 5	1058	41.660069	6.96413561	3.72954309
N / 6	881	39.072182	6.78105763	3.66541076
N / 7	755	35.446115	6.62671775	3.56801366
N / 8	661	34.576587	6.49375384	3.54317678
N / 9	587	29.78507	6.37502482	3.39400726
N / 10	529	29.011408	6.27098843	3.36768913
N / 11	480	27.665445	6.1737861	3.32018416
N / 12	440	25.097749	6.08677473	3.22277816
N / 13	406	23.124524	6.00635316	3.1408937
N / 14	377	22.409196	5.93224519	3.10947141
N / 15	352	21.914164	5.86363118	3.08713319
N / 16	330	21.225373	5.79909265	3.05519731
N / 17	311	19.169999	5.73979291	2.9533465
N / 18	293	18.959758	5.68017261	2.94231873
N / 19	278	18.908108	5.62762111	2.93959082
N / 20	264	18.313684	5.5759491	2.90764854

De estos valores se desprende el exponente de Hurst asociado, el cual es igual a:

$$H = 0.598677$$

La siguiente figura muestra gráficamente la correlación existente entre el número de registros considerado en cada partición de la serie y la correspondiente razón rango/desviación estándar.



**Grafica de correlación #de datos por partición Vs. Rango Rescalado para la serie de rendimientos Tipo de Cambio MXN/USD (Calzada, 2015)**

Exponente de Hurst

Registros	RS	Log(Regs)	Log(RS)	x2	y2	xy
5,290	110.516307	8.573574	4.705163	4.485649	1.596672	2.676212
2,645	66.392830	7.880426	4.195589	2.030020	0.568548	1.074320
1,763	62.282058	7.474772	4.131673	1.038633	0.476245	0.703309
1,322	47.112316	7.186901	3.852534	0.534745	0.168893	0.300524
1,058	41.660069	6.964136	3.729543	0.258569	0.082930	0.146434
881	39.072182	6.781058	3.665411	0.105898	0.050106	0.072843
755	35.446115	6.626718	3.568014	0.029268	0.015988	0.021632
661	34.576587	6.493754	3.543177	0.001453	0.010324	0.003873
587	29.785070	6.375025	3.394007	0.006499	0.002262	0.003834
529	29.011408	6.270988	3.367689	0.034096	0.005458	0.013642
480	27.665445	6.173786	3.320184	0.079441	0.014734	0.034212
440	25.097749	6.086775	3.222778	0.136060	0.047869	0.080704
406	23.124524	6.006353	3.140894	0.201857	0.090405	0.135089
377	22.409196	5.932245	3.109471	0.273941	0.110288	0.173817
352	21.914164	5.863631	3.087133	0.350473	0.125624	0.209828
330	21.225373	5.799093	3.055197	0.431052	0.149282	0.253670
311	19.169999	5.739793	2.953346	0.512435	0.238360	0.349491
293	18.959758	5.680173	2.942319	0.601347	0.249250	0.387151
278	18.908108	5.627621	2.939591	0.685613	0.251981	0.415646
264	18.313684	5.575949	2.907649	0.773853	0.285070	0.469683

Exponente de Hurst:

Cargar Datos

Salvar

Salir

**Impresión de pantalla de la Utilería para cálculo de exponente de Hurst del software CORONEL V1.0.4 usando como datos los rendimientos diarios del Tipo de cambio MXN/USD (Calzada, 2015)**

#### 7.4.1 Contraste de valores

El exponente de Hurst asociado a la serie de tiempo analizada, corresponde a  $H = 0.598677$ , valor que es superior a  $H = 0.5$  (valor del exponente de Hurst asociado a series con comportamiento similar al movimiento browniano simple).

Por la evidencia anterior se puede afirmar, en función del valor del exponente de Hurst obtenido ( $H > 0.5$ ), que la serie de tiempo correspondiente a los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD es persistente y tiene un comportamiento similar al movimiento Browniano fractal.

## Capítulo VIII

En este capítulo se plasman todas las conclusiones y reflexiones derivadas de la presente investigación, intentando contrastarlas con trabajos afines al tema e intentando hacer recomendaciones de valor y propuestas de líneas de investigación, también referentes al tema que es objeto de esta tesis.

### 8. Discusión, conclusiones y recomendaciones

#### 8.1 Conclusiones

De los resultados obtenidos en el presente trabajo, se pueden desprender las siguientes conclusiones, en función de las hipótesis secundarias planteadas para esta investigación:

- a) La presente investigación demuestra que los rendimientos diarios del tipo de cambio MXN/USD no están distribuidos de manera normal;
- b) así también, se comprueba que los rendimientos diarios del tipo de cambio MXN/USD tienen un patrón de distribución de colas pesadas.
- c) Se comprueba, además, que los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD **NO** tiene un comportamiento similar al movimiento Browniano simple;
- d) de manera complementaria, se comprueba que la variable objeto del presente estudio tiene un comportamiento similar al movimiento Browniano Fractal.

El cumplimiento de dichas hipótesis secundarias permite comprobar la hipótesis principal, la cual fue planteada de la siguiente manera:

*“Los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD, no se ajustan a las condiciones de distribución normal y sus movimientos no corresponden a un movimiento Browniano convencional, por lo que los modelos tradicionales que definen variables financieras y que se basan en dichos supuestos podrían no ser totalmente eficaces para representar a esta variable financiera”*



Estas conclusiones se obtuvieron de los resultados numéricos generados en la presente investigación y se limitan a la aceptación de las hipótesis con base en evidencia objetiva.

De manera complementaria y a partir de las conclusiones obtenidas, se plantean algunas recomendaciones y conclusiones derivadas, las cuales son objeto de los siguientes apartados.

## **8.2 Conclusiones derivadas**

Se dejan a consideración del lector las siguientes conclusiones colaterales que se generaron a lo largo de la investigación realizada.

### **8.2.1 Primera conclusión derivada**

Los resultados obtenidos respecto a la distribución de los datos de la variable analizada –rendimientos del tipo de cambio MXN/USD– en función del exponente de Hurst asociado a dicha variable, podría tener una relación directa con el correspondiente Valor en Riesgo (VaR) paramétrico obtenido para dicha variable con los métodos convencionales; en virtud de que la obtención de dicha medida podría estar asociada a la variable mencionada, dicha asociación se puede componer de la siguiente manera:

En la expresión que define al VaR paramétrico, el factor que asocia el tiempo con el Valor en Riesgo está potenciado al valor de 0.5 –raíz cuadrada–, correspondiendo este valor al coeficiente de Hurst de una serie de tiempo que tiene un comportamiento Browniano Simple, al considerarse que sus movimientos en un periodo de tiempo  $t$  serán iguales a  $t^{1/2}$ .

En nuestro caso particular, y al demostrarse que la serie de tiempo analizada tiene un patrón persistente que permite desplazamientos mayores a  $t^{1/2}$ , –al tener un valor  $H > 0.5$ – podría considerarse este valor en el exponente asociado al tiempo implícito en la expresión que define al VaR, quedando de la forma  $t^H$ .

De acuerdo a lo anterior, la expresión que define al VaR absoluto de modo paramétrico, podría expresarse de la siguiente manera.

$$\text{VaR} = F * S * \sigma * t^H$$

Donde:

**F** → equivale al coeficiente asociado al nivel de confianza elegido para el cálculo.

**S** → corresponde al monto total (en unidad monetaria) de la posición sobre el activo (o exposición total en riesgo).

**σ** → equivale al valor de la desviación estándar de los rendimientos del activo (obtenidos de datos históricos).

**t** → corresponde al horizonte de tiempo (en el lapso de tiempo correspondiente al rendimiento) para el cual se desea calcular el VaR.

**H** → Corresponde al exponente de Hurst (que para el caso particular es ~0.599)

En lugar de la expresión convencional:

$$\text{VaR} = F * S * \sigma * t^{\frac{1}{2}}$$

En función de los párrafos anteriores, se puede observar que el valor en riesgo de la expresión propuesta tendrá un factor adicional con respecto a la expresión convencional equivalente a  $t^{H-\frac{1}{2}}$ ; se puede apreciar que, al ser  $H > 0.5$ , el VaR obtenido con la expresión propuesta será mayor al obtenido con el método convencional.

De la misma forma se puede deducir que ambas expresiones para el cálculo del VaR –la propuesta y la convencional–, serán equivalentes cuando.

- a) El coeficiente de Hurst asociado a la serie estudiada sea  $H = 0.5$  (es decir, que los valores de serie de tiempo estudiada tengan un comportamiento equivalente al Movimiento Browniano Simple) o
- b) Solamente se contemple la proyección de una observación dentro de la serie de tiempo a estudiar (es decir,  $t = 1$ )

### 8.2.2 Caso particular de la primera Conclusión derivada (nivel de confianza igual al 99%)

Para la variable objeto de nuestro caso de estudio—la cual tiene una distribución leptocúrtica o de colas pesadas—, también se observó lo siguiente:

Considerando que la serie de tiempo que define al tipo de cambio MXN/USD, tiene una distribución leptocúrtica —donde más del 1% de los registros se concentran fuera del intervalo  $\mu \pm 3\sigma$ , a diferencia de una distribución normal, donde fuera de este intervalo sólo se concentra el 0.13% de los registros de la muestra— podríamos considerar un valor mayor a 2.33 como el factor de la expresión del VaR asociado para un nivel de confianza del 99%, en virtud de que dicho valor representa el número de desviaciones estándar por arriba de la media que contienen el 99% de los registros en una distribución normal; de esta manera, el valor asociado a dicho nivel de confianza que, en este caso, será más cercano a 3 desviaciones estándar arriba de la media y podría ajustarse a un valor  $\sim 3$ .

### 8.2.3 Segunda conclusión derivada

Considerando que la serie de tiempo asociada a los rendimientos del tipo de cambio MXN/USD tiene un comportamiento persistente y no aleatorio, podrían encontrarse patrones en momentos anteriores de dicha serie que fueran, si no iguales, similares a los ocurridos en el pasado inmediato, de tal manera que podrían ocurrir casos donde:

$$S \sim S'$$

Siendo:

$S \rightarrow$  los registros de la serie de rendimientos:

$$(Reg_{t0}, Reg_{t-1}, Reg_{t-2}, \dots, Reg_{t-n})$$

$S' \rightarrow$  los registros de la serie de rendimientos:

$$(Reg_{t-k}, Reg_{t-(k+1)}, Reg_{t-(k+2)}, \dots, Reg_{t-(k+n)})$$

$Reg_{t0} \rightarrow$  el registro de la serie de rendimientos más reciente.

$Reg_{t-1} \rightarrow$  el registro de la serie de rendimientos previo al más reciente.

Para  $k <> 0$

Por lo que, para el caso del método del VaR histórico, podrían encontrarse pares de segmentos de la serie que cumplan con la similitud planteada en esta reflexión y hacer la proyección de valores para los valores consecutivos  $(\text{Reg}_{t+1}, \text{Reg}_{t+2}, \dots, \text{Reg}_{t+n})$  de la serie de tiempo utilizando los rendimientos consecutivos  $(\text{Reg}_{t+k}, \text{Reg}_{t+(k+1)}, \text{Reg}_{t+(k+2)}, \dots, \text{Reg}_{t+(k+n)})$ , respectivamente, siendo:

$\text{Reg}_{t+1}$  → el primer registro a proyectar de la serie de rendimientos inmediatamente posterior al registro  $\text{Reg}_{t0}$ .

$\text{Reg}_{t+n}$  → el registro a proyectar de la serie de rendimientos n observaciones posterior al registro  $\text{Reg}_{t0}$ .

Considerando que, si los rendimientos precedentes de dichas series se ajustaron de la forma mencionada, podría existir mayor probabilidad de que los valores proyectados también tengan esta similitud con los valores pasados correspondientes.

Esta reflexión puede resultar de utilidad para la elección del intervalo de tiempo a considerar en el método del VaR Histórico.

### **8.3 Líneas de Investigación propuestas**

#### **8.3.1 Primera Línea de investigación.**

Con base en la segunda reflexión del apartado anterior, se propone el desarrollo de una aplicación –objeto de las ciencias de la computación– que, con fines de encontrar el periodo más adecuado para realizar proyecciones de rendimientos para el método de VaR histórico, sea capaz de encontrar –dentro de la serie de rendimientos de la variable objeto de estudio– los periodos que sean similares al periodo más reciente y evalúe cual es el más adecuado para ser considerado, con fines de proyección, en la aplicación de dicho método de análisis de riesgo.

#### **8.3.2 Segunda Línea de investigación.**

Ya se ha hablado sobre el significado de valores asociados exponente de Hurst y su correspondencia con el comportamiento de las series de tiempo asociadas de acuerdo a si son persistentes, anti-persistentes o aleatorias; no obstante lo anterior, sólo se ha mencionado que cualquier valor –para el exponente de Hurst– mayor a 0.5, denota un comportamiento persistente para la serie analizada y en ninguna de las bibliografías consultadas se hace referencia a umbrales que permitan discernir, para un valor determinado del exponente de Hurst, si es adecuada la utilización de los métodos convencionales de evaluación de riesgo o se recomienda alguna alternativa distinta .

Se puede considerar como una línea de investigación válida para el campo de las matemáticas aplicadas a las finanzas proponer estos rangos de validez respecto al método de análisis de riesgo utilizado para evaluar un activo financiero en función del exponente de Hurst de la serie de tiempo asociada a dicho activo.

#### **8.4 Reflexión Final**

Los resultados obtenidos para esta investigación son congruentes con los encontrados por otras personas que han incursionado en el tema: existen otras tesis que evalúan otras variables financieras desde el punto de vista de la geometría fractal y el movimiento Browniano Fractal y las evidencias encontradas por ello muestran ser congruentes con el presente trabajo.

Tal es el caso de Batlle y Grebol en España (2009), Luengas, Ardila y Moreno en Colombia (2010), así como Rendón de la Torre y Sierra Juárez en México, los cuales estudian variables financieras propias de sus respectivos países.

Se concuerda con los autores citados en la relevancia del exponente de Hurst como potencial elemento de evaluación de riesgo de rendimientos sobre activos financieros, en función de su asociación con modelos que evalúan y proyectan estas variables, tal es el caso concreto del Valor en Riesgo (VaR).

No obstante, también se considera que, de acuerdo a la investigación realizada así como los resultados encontrados en la misma, se puede pensar en una interacción de los métodos convencionales de evaluación de riesgo sobre activos financieros con los propuestos en este trabajo y los relacionados con el comportamiento persistente en rendimientos de activos financieros.

Se espera que los resultados obtenidos en el presente trabajo sirvan como incentivo para evaluar otras variables financieras utilizando esta metodología y que los resultados obtenidos sirvan para validar o cuestionar los modelos de evaluación de riesgo utilizados comúnmente.

## Bibliografía

- Jorion, Philippe. (2013). Valor en Riesgo, el nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados. México: Limusa.
- De Lara Haro, Alfonso (2014). Medición y control de riesgos financieros. México: Limusa.
- Grabbe, J. Orlin. (1996). International Financial Markets. New Jersey: Prentice Hall.
- Talanquer, Vicente. (2003). Fractus, fracta, fractal; fractales, de laberintos y espejos. México: Fondo de cultura económica.
- Gujarati, Damodar & Porter, Dawn. (2009). Econometría. México: McGrawHill.
- Venegas Martinez, Francisco. (2008). Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. Mexico: Cengage Learning.
- Mandelbrot, Benoit & Hudson, Richard L. (2004). Fractales y Finanzas, Una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar. Barcelona: TusQuest.
- Mandelbrot, Benoit. (1983) The Fractal Geometry of Nature. New York: W. H. Freeman.
- Einstein, Albert. (1956) Investigations on the Theory of Brownian Movement. New York: Dover.
- Peters, E. (1994). Fractal Market Analysis, Applying Chaos Theory to Investment an Economic. New York: John Wiley and Sons.
- Hurst, Harold. E. (1951). The Long-term storage capacity of reservoirs. Transactions of the American Society of Civil Engineers.
- Dieudonne, J. A. (1994). A History of Algebraic and Differential Topology. Boston: Birkhäuser.

- Rendón de la Torre, Stephanie. Memoria de largo plazo en el índice S&P 500: Un enfoque fractal aplicando el coeficiente de Hurst con el método R/S. México: UNAM.
- Falconer, Kenneth (2003). Fractal Geometry. New York: Wiley.
- Kristoufek , Ladislav. (2010). Rescaled Range Analysis and Detrended Fluctuation Analysis: Finite Sample Properties and Confidence Intervals. Czech Economic Review.
- Batlle Joher, Anna & Grébol Montoro, Sandra. (2009). Fractales en los Mercados Financieros. Barcelona: Universitat Pompeu Fabra.
- Luengas D., Diego, Ardila R., Esperanza & Moreno T., John F. (2010). Metodología e interpretación del coeficiente de Hurst. Colombia: Universidad Externado de Colombia.
- Sierra Juárez, Guillermo. (2006). Procesos de Hurst y movimientos brownianos fraccionales en mercados fractales. México: Revista de Administración, Finanzas y Economía.
- Valles Oseguera, Alonso. (2015). Comportamiento del modelo CAPM en entornos de crisis en México. Mexico: UNAM.
- Gallardo Bolaños, Norma Angélica (2000). Las fuentes de financiamiento en México. El ahorro y la inversión ante la globalización económica. Mexico:UNAM.
- Grajales C.,Carlos & Pérez R, Ocaris. (2010). Valor en Riesgo para un Portafolio con Opciones Financieras. Colombia: Revista Ingenierías Universidad de Medellín.
- Banco de México. (2005).Definiciones básicas de riesgos. México. Obtenido de:  
[www.banxico.org.mx/sistema-financiero/material-educativo/intermedio/riesgos/%7BA5059B92-176D-0BB6-2958-7257E2799FAD%7D.pdf](http://www.banxico.org.mx/sistema-financiero/material-educativo/intermedio/riesgos/%7BA5059B92-176D-0BB6-2958-7257E2799FAD%7D.pdf)



## APÉNDICES

### **Rutinas desarrolladas por el autor de la tesis para obtener el exponente de Hurst de una lista de rendimientos ordenados cronológicamente.**

Consideraciones. Previo a la presentación del código descrito, se plantean las siguientes consideraciones:

- a) El código fue desarrollado en lenguaje de programación Java 7 Standard Edition.
- b) Para realizar dicho código, se utilizó como herramienta de desarrollo la Versión 7.4.1 del Ambiente de Desarrollo Integrado Neat Beans.
- c) En este anexo se presenta, solamente, el código relacionado con la obtención del coeficiente de Hurst y la lectura de los valores de entrada necesarios para este fin.
- d) Los métodos desarrollados para la presentación de datos, amigabilidad con el usuario, obtención de datos, formato y compatibilidad con otros paquetes de software fueron hechos utilizando las bibliotecas:
  - Swing Layout Extensions
  - iText-2.1.6.jar

### **Código correspondiente a la clase para el cálculo de valores de rango re-escalado**

```
package coronel.negocio;
import java.util.ArrayList;
import java.util.List;

/**
 * @author Andrés Calzada S.
 */

public class Hurst {
    private int iteraciones = 20;

    private double[] x = null;
    private double[] x_mu = null;
    private double[] cumsum = null;
```

```

private double[] tau = null;
private double[] RS = null;
private double[] RsobreS = null;
private double[] R = null;
private double[] S = null;
private List<Double> datosEntrada = new
ArrayList<Double>();

/*Método que obtiene como salida el promedio
de los datos contenidos en el arreglo
proporcionado como entrada */
public double media(double[] arreglo){
double suma = 0.0;
for (double valor : arreglo){
suma = suma + valor;
}
return suma/arreglo.length;
}

/*Método que obtiene como salida la desviación
estándar de los datos contenidos en el
arreglo proporcionado como entrada */
public double desvEst(double[] arreglo){
double media = this.media(arreglo);
//System.out.println("%%%%%%%%MEDIA DESVEST: " +
media);
double suma = 0.0;
for (double valor : arreglo){
suma = suma + Math.pow(valor - media, 2);
}
//System.out.println("%%%%%%%%SUMA DESVEST: " + suma);
return Math.pow(suma/(arreglo.length - 1), 0.5);
}

/*Método que obtiene como salida el valor
máximo de los datos contenidos en el
arreglo proporcionado como entrada */
public double max(double[] arreglo){
double max = arreglo[0];
for (double valor : arreglo){
if (valor > max)
max = valor;
}
return max;
}

```

```

/*Método que obtiene como salida el valor
minimo de los datos contenidos en el
arreglo proporcionado como entrada */
public double min(double[] arreglo){
    double min = arreglo[0];
    for (double valor : arreglo){
        if (valor < min)
            min = valor;
    }
    return min;
}

/*Metodo para obtener del valor de
rango re-escalado en función del numero
de iteración respecto al divisor de la lista
inicial y con respecto al segmento de datos
iterado*/
public void rs(int m, int j){
    double media = 0.0;
    double acum = 0.0;

    x      = new double[m];
    x_mu   = new double[m];
    cumsum = new double[m];

    for (int i = 0; i < x.length; i++){
        x[i] = datosEntrada.get(j*m + i);
    }
    media = media(x);

    for (int i = 0; i < x.length; i++){
        x_mu[i] = x[i] - media;
        acum = acum + x_mu[i] /*x[i] - media*/;
        cumsum[i] = acum;
    }

    R[j] = max(cumsum) - min(cumsum);
    S[j] = desvEst(x);

    RsobreS[j] = R[j] / S[j];

    System.out.println("j: " + j);
    System.out.println("media: " + media);
    System.out.println("rango: " + R[j]);
}

```

```

        System.out.println("desvest: " + S[j]);
        System.out.println("rango resc: " + RsobreS[j]);
        System.out.println("-----");
    }

    /*Metodo para generar los correspondientes
    pares del tamaño del segmento de datos
    con respecto al valor de rango re-escalado*/
    public void genera_puntos(){
        RS = new double[iteraciones];
        tau = new double[iteraciones];

        for (int i = 0; i < iteraciones; i++){
            R = new double[i+1];
            S = new double[i+1];
            RsobreS = new double[i+1];

            int m = (int) Math.floor(datosEntrada.size() /
(i+1) /*(2*(i+1))*/);

            for (int j = 0; j <= i; j++){
                this.rs(m, j);
            }
            tau[i] = m;
            RS[i] = media(RsobreS);

            System.out.println("=====
            =====");
            System.out.println("i: " + i);
            System.out.println("m: " + tau[i]);
            System.out.println("media rango reesc: " + RS[i]);

            System.out.println("=====
            =====");
        }
    }
}

```

```

/*Método que toma la información inicial
 para ingresarla como datos de entrada para
 el cálculo de puntos del arreglo de rango
 re-escalado*/
public void setDatosEntrada(List<Double> datosEntrada) {
    this.datosEntrada = datosEntrada;
}

//Tamaño particiones
/*Método que regresa la lista del tamaño de los
 segmento en la que fue dividida la lista
 de datos inicial para contratasla con el
 valor de rango re-escalado correspondiente */
public List<Double> getTau() {
    List<Double> lstTau = new ArrayList<Double>();
    for(double dato : tau){
        lstTau.add(dato);
    }
    return lstTau;
}

//RS
/*Método que regresa la lista con los
 valores de rango re-escalado para
 contratasla con el correspondiente tamaño del
 segmento en la que fue dividida la lista */
public List<Double> getRS() {
    List<Double> lstRS = new ArrayList<Double>();
    for(double dato : RS){
        lstRS.add(dato);
    }
    return lstRS;
}
}

```

*Código correspondiente a la clase para el cálculo del exponente de Hurst, aplicando regresión lineal a los datos correlacionados: logaritmo del tamaño del segmento de la serie Vs. logaritmo del correspondiente valor de rango re-escalado*

```
package coronel.negocio;

import java.util.ArrayList;
import java.util.List;

/**
 * @author Andrés Calzada S.
 */
public class RegresionLineal {
    private List<Double> datos_X = new ArrayList<Double>();
    private List<Double> datos_Y = new ArrayList<Double>();
    private List<Double> x = new ArrayList<Double>();
    private List<Double> y = new ArrayList<Double>();
    private List<Double> x2 = new ArrayList<Double>();
    private List<Double> y2 = new ArrayList<Double>();
    private List<Double> xy = new ArrayList<Double>();
    private double a = 0;
    private double b = 0;
    private double media_X = 0;
    private double media_Y = 0;
    private int arrSize = 0;

    public RegresionLineal (List<Double> X, List<Double> Y){
        this.datos_X = X;
        this.datos_Y = Y;
        this.media_X = media(this.datos_X);
        this.media_Y = media(this.datos_Y);
        this.arrSize = this.datos_X.size();
    }

    /*Método que obtiene como salida el promedio
    de los datos contenidos en el arreglo
    proporcionado como entrada */
    public double media(List<Double> arreglo){
        double suma = 0.0;
        for (double valor : arreglo){
            suma = suma + valor;
        }
        return suma/arreglo.size();
    }
}
```

```

/*Método que obtiene como salida el valor
acumulado de los datos contenidos en el
arreglo proporcionado como entrada */
public double acum(List<Double> arreglo){
    double suma = 0.0;
    for (double valor : arreglo){
        suma = suma + valor;
    }
    return suma;
}

/*Método que calcula la regresión lineal
de los datos proporcionados como entrada
utilizando el método de mínimos cuadrados
ordinario*/
public void calculaRegresion(){
    for (int i = 0; i < this.arrSize; i++){
        x.add(datos_X.get(i) - this.media_X);
        y.add(datos_Y.get(i) - this.media_Y);
        x2.add(x.get(i) * x.get(i));
        y2.add(y.get(i) * y.get(i));
        xy.add(x.get(i) * y.get(i));
    }
}

/*Método que obtiene el valor del parámetro
lineal de la función obtenida como resultado
de la regresión lineal.
Este valor, en el caso de la correlación:
logaritmo del tamaño del segmento de la serie
Vs. logaritmo del correspondiente valor
de rango re-escalado, corresponde a la
magnitud del exponente de Hurst asociado*/
public double getB(){
    return acum(xy) / acum(x2);
}

```

```
/*Métodos que obtiene el contenido
de listas auxiliares*/
public List<Double> getLst_x(){
    return x;
}

public List<Double> getLst_y(){
    return y;
}

public List<Double> getLst_x2(){
    return x2;
}

public List<Double> getLst_y2(){
    return y2;
}

public List<Double> getLst_xy(){
    return xy;
}
}
```



*Código correspondiente a la clase para presentación de datos basado en la arquitectura Modelo-Vista-Controlador*

```
package coronel.GUI;

import coronel.negocio.RegresionLineal;
import coronel.negocio.Hurst;
import coronel.utils.Utils;
import java.util.ArrayList;
import java.util.List;
import javax.swing.table.AbstractTableModel;

/**
 * @author Andrés Calzada S.
 */

public class TblmodHurst extends AbstractTableModel{
//    private List<String> lstFechas = new
ArrayList<String>();
//    private List<Double> lstTCs = new ArrayList<Double>();
    private List<Double> lstTau = new ArrayList<Double>();
    private List<Double> lstRS = new ArrayList<Double>();
    private List<Double> lstLogTau = new ArrayList<Double>();
    private List<Double> lstLogRS = new ArrayList<Double>();
    private final int numCols = 7;
    private RegresionLineal rl = null;

    int lstColsEditables[] = {};
    List<String> header = new ArrayList<String>();
    private mainMDI mdi = null;
    int caso = 0;
    private Hurst objHurst = null;

    public TblmodHurst(mainMDI mdi){
        this.mdi = mdi;
        header.add("Registros");
        header.add("RS");
        header.add("Log(Regs)");
        header.add("Log(RS)");
        header.add("x2");
        header.add("y2");
        header.add("xy");
        objHurst = new Hurst();
    }
}
```

```

    /* Método que limpia las listas de valores
    antes de ingresar los datos de entrada*/
public void clearList(){
//      lstFechas.clear();
//      lstTCs.clear();
      lstTau.clear();
      lstRS.clear();
}

/* Método que expone la instancia de la clase
RegresionLineal asociado al cálculo*/
public RegresionLineal getRegresionLineal(){
    return rl;
}

/* Método que obtiene los valores de entrada en listas*/
public void cargoDatos(List<String> fechas, List<Double>
TCs){
//      lstFechas = fechas;
//      lstTCs = TCs;
objHurst.setDatosEntrada(TCs);
objHurst.genera_puntos();
lstTau = objHurst.getTau();
lstRS = objHurst.getRS();

    for (double valor : lstTau)
        lstLogTau.add(Math.log(valor));

    for (double valor : lstRS)
        lstLogRS.add(Math.log(valor));

    rl = new RegresionLineal(lstLogTau, lstLogRS);
    rl.calculaRegresion();
}

```

```

/* Método de presentación de datos para impresión
en documento de salida*/
public String getTramaArchivoPlano(String separador){

    StringBuilder trama = new StringBuilder("");
    String encabezado = "TAU" + separador +
        "RS \n" ;

    trama.append(encabezado);
    for(int i = 0; i < lstTau.size(); i++){
        trama.append(Utills.formatoString(lstTau.get(i), 6,
false));
        trama.append(separador);
        trama.append(Utills.formatoString(lstRS.get(i), 6,
false));
        trama.append("\n");
    }
    return trama.toString();
}

/* Métodos correspondientes a la interface uimplementada
(AbstractTableModel) */
@Override
public int getRowCount() {
    return lstTau.size();
}

@Override
public int getColumnCount() {
    return this.header.size();
}

@Override
public String getColumnName(int col) {
    return (col > numCols ? "ERROR" :
header.get(col).toString());
}

@Override
public Object getValueAt(int row, int col) {
    int decimales = 6;
    Object colTmp = null;
    switch(col){
        case 0:

```

```

        colTmp = Utils.formatoString(lstTau.get(row),
0, true);
        break;

        case 1:
            colTmp = Utils.formatoString(lstRS.get(row),
decimales, true);
            break;

        case 2:
            colTmp =
Utils.formatoString(lstLogTau.get(row), decimales, true);
            break;

        case 3:
            colTmp =
Utils.formatoString(lstLogRS.get(row), decimales, true);
            break;

        case 4:
            colTmp =
Utils.formatoString(rl.getLst_x2().get(row), decimales, true);
            break;

        case 5:
            colTmp =
Utils.formatoString(rl.getLst_y2().get(row), decimales, true);
            break;

        case 6:
            colTmp =
Utils.formatoString(rl.getLst_xy().get(row), decimales, true);
            break;

        default:
            break;
    }
    return colTmp;
}
}

```