UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCIÓN A LOS PRERRADICALES BÁSICOS Y MÓDULOS INYECTIVOS PRINCIPALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JORDI EMANUEL HERNÁNDEZ GÓMEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ RÍOS MONTES
2016

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX

1. Datos del alumno
Hernández
Gómez
Jordi Emanuel
53 88 77 15
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
412005938

2. Datos del tutor
Dr
José
Ríos
Montes

3. Datos del sinodal 1
Dr
Hugo Alberto
Rincón
Mejía

4. Datos del sinodal 2
Dr
Rogelio
Fernández Alonso
González

5. Datos del sinodal 3
Dr
Iván Fernando
Vilchis
Montalvo

6. Datos del sinodal 4
Dr
Luis Ángel
Zaldívar
Corichi

7. Datos del trabajo escrito
Introducción a los prerradicales básicos y módulos inyectivos principales
65 p
2016

A mi Papá.

Índice general

Introducción

Este trabajo da una visión detallada del artículo [1] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón y R. Fernández-Alonso, *Basic Preradicals and Main Injective Modules* (Journal of Algebra and Its Applications) y tiene por objetivo presentar a los prerradicales básicos y a los módulos inyectivos principales. Se abordan sus diversas propiedades, la profunda relación que guardan con los prerradicales exactos izquierdos y varias de sus aplicaciones, como por ejemplo, la caracterización de anillos semiartinianos con módulos inyectivos principales. El principal interés en estos objetos se debe a que brindan nueva luz al estudio, concepción y aplicación de los prerradicales exactos izquierdos. Esto es logrado exitosamente a través del establecimiento de una correspondencia uno a uno con los prerradicales básicos y de un isomorfismo reticular con la retícula de submódulos totalmente invariantes de un módulo inyectivo principal dado. Se puede decir que estos son los resultados más importantes que se obtienen, y de hecho, se proporcionan otras ya conocidas correspondencias del mismo estilo para obtener algunos hechos que necesitaremos y también para motivar lo que se desarrolla.

La tesis se divide en cuatro capítulos. En el capítulo 1 se hace una introducción a la teoría de los prerradicales, atendiendo las necesidades teóricas de nuestro fin y profundizando en algunos aspectos fundamentales, como lo son la estructura reticular y el comportamiento de las diversas operaciones de los prerradicales. En el capítulo 2 se construyen, se prueban propiedades y se dan aplicaciones de los módulos inyectivos principales. En el capítulo 3 se hace algo parecido con los prerradicales básicos y al final se dan condiciones equivalentes para que un prerradical exacto izquierdo sea extremo o radical en el marco de la teoría alcanzada. En el capítulo 4 se dan cuatro anillos interesantes con el fin de ejemplificar los resultados obtenidos en la categoría de módulos respectiva por medio de cálculos explícitos, y en el caso de los primeros tres ejemplos (secciones 4.1, 4.2 y 4.3), tratar de responder una pregunta que emerge naturalmente en torno a la construcción de módulos inyectivos principales y que ahora presentamos:

Dado el anillo R, ¿ existe alguna relación entre el mínimo cardinal κ_1 tal que $(E_0)^{\kappa_1}$ es un módulo inyectivo principal y el mínimo cardinal κ_2 tal que existe un monomorfismo $R \hookrightarrow (E_0)^{\kappa_2}$?

La respuesta es ”no, aparentemente”, pues en esos ejemplos se calculan κ_1 y κ_2 y los resultados son muy dispares entre sí.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de este trabajo R denota un anillo asociativo con identidad y R-Mod la categoría de R-módulos izquierdos unitarios. Cuando sea implícito que trabajamos con un anillo R, entenderemos por módulo un R-módulo izquierdo unitario y por morfismo un R-morfismo. Denotamos con R-Simp a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples, con $\mathcal{E}$ a la clase de todos los módulos inyectivos y con $\check{\mathcal{E}}$ a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos inyectivos inescindibles. Si $M \in R$-Mod, denotamos con EM a una cápsula inyectiva que contiene a M. La inclusión se representa con $\overset{\iota}{\hookrightarrow}$ y un monomorfismo arbitrario con $\hookrightarrow$; la aplicación cociente se representa con $\overset{\eta}{\twoheadrightarrow}$ y un epimorfismo arbitrario con $\twoheadrightarrow$. Si $M \in R$-Mod y N es un submódulo de M, escribimos $N \leqslant M$. Si además N es esencial en M, lo indicamos con $N \leqslant_e M$. Cuando $N \leqslant K \leqslant M$, $\frac{M}{N} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{K}$ representará al epimorfismo inducido por las aplicaciones cociente $M \overset{\eta_1}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{N}$ y $M \overset{\eta_2}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{K}$ y que tiene la propiedad de que $\pi\eta_1 = \eta_2$. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de morfismos que inducen un morfismo g por la propiedad universal de la suma directa, escribimos $g = \oplus_{i\in I} f_i$, y si inducen un morfismo h por la propiedad universal del producto directo, escribimos $h = \otimes_{i\in I} f_i$. Las sumas directas internas se representan con $\dot{\bigoplus}$.

1.1. Prerradicales

En esta primera sección se dará una rápida introducción a la teoría de los prerradicales, profundizando un poco en algunos aspectos que se usarán más tarde.

Definición 1.1.1. *Un prerradical sobre el anillo R es un funtor σ : R-Mod$\to$ R-Mod tal que para cada $M \in R$-Mod:*

1. $\sigma(M) \leqslant M$.

2. Si $N \in R$-Mod y $f \in Hom_R(M, N)$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \iota\uparrow & & \iota\uparrow \\ \sigma(M) & \xrightarrow{\sigma f} & \sigma(N) \end{array}$$

Observación 1.1.2. *De la definición anterior se desprende el hecho de que σf es la restricción de f a $\sigma(M)$, y por tanto, que $f(\sigma(M)) \leqslant \sigma(N)$.*

Algunos ejemplos de prerradicales son 0, 1, Zoc, Rad e $I\star$ ($I \leqslant R$), los cuales se calculan en un R-módulo M de la siguiente manera:

$$0(M) = 0.$$

$$1(M) = M.$$

$$Zoc(M) = \sum \{N \leqslant M \mid N \text{ es simple}\}.$$

$$Rad(M) = \bigcap \{N \leqslant M \mid N \text{ es máximo}\}.$$

$$I\star(M) = IM.$$

Observación 1.1.3. *$I \leqslant R$ es un ideal sii $I\star(R) = I$.*

En adelante, denotaremos con R-pr a la clase de los prerradicales sobre R.

Veamos algunas de las propiedades más básicas de los prerradicales.

Proposición 1.1.4. *Sean $\sigma \in R$-pr, $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$. Entonces:*

i) $\sigma(N) \leqslant \sigma(M) \cap N$.

ii) *Si* $N \leqslant \sigma(M)$, $\frac{\sigma(M)}{N} \leqslant \sigma(\frac{M}{N})$.

Dem. Sean σ un prerradical sobre R, M un R-módulo y $N \leqslant M$. Es claro que $i)$ se cumple, por lo que sólo probaremos $ii)$. Suponga que $N \leqslant \sigma(M)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} & \frac{M}{N} \\ \iota\uparrow & & \iota\uparrow \\ \sigma(M) & \xrightarrow{\sigma\eta} & \sigma(\frac{M}{N}) \end{array}$$

Por el diagrama anterior, $\frac{\sigma(M)}{N} = \frac{\sigma(M)+N}{N} = \eta(\sigma(M)) \leqslant \sigma(\frac{M}{N})$. ■

Proposición 1.1.5. *Sean $\sigma \in R$-pr y $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq R$-Mod. Entonces:*

i) $\sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} \sigma(M_i)$.

ii) $\sigma(\prod_{i\in I} M_i) \leqslant \prod_{i\in I} \sigma(M_i)$.

Dem. Sean σ un prerradical sobre R y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos.

i) Para cada $j \in I$, considere $u_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$, $u'_j : \sigma(M_j) \to \bigoplus_{i\in I}\sigma(M_i)$ las inclusiones canónicas y $\pi_j : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M_j$ la proyección canónica. Dado $j \in I$, tenemos que $\pi_j(\sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i)) \leqslant \sigma(M_j)$ por la definición de prerradical, de modo que si $(x_i)_{i\in I} \in \sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i)$, entonces $x_j = \pi_j((x_i)_{i\in I}) \in \sigma(M_j)$. Luego, $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}\sigma(M_i)$ y obtenemos que $\sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i) \leqslant \bigoplus_{i\in I}\sigma(M_i)$. Para la otra desigualdad, considere el morfismo $\oplus_{i\in I}\sigma u_j : \bigoplus_{i\in I}\sigma(M_i) \to \sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ que verifica el siguiente diagrama conmutativo para cada $j \in I$:

$$\begin{tikzcd}
\sigma(M_j) \arrow[r, hook, "u'_j"] \arrow[d, hook, "\sigma u_j"'] & \bigoplus_{i\in I}\sigma(M_i) \arrow[dl, "\oplus_{i\in I}\sigma u_j"] \\
\sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i) &
\end{tikzcd}$$

Si $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}\sigma(M_i)$, entonces $(x_i)_{i\in I} = (\oplus_{i\in I}\sigma u_j)(x_i)_{i\in I} \in \sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ por el diagrama anterior. Por tanto, $\bigoplus_{i\in I}\sigma(M_i) \leqslant \sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ y obtenemos la igualdad buscada.

ii) Se prueba de manera similar a como se probó la primera desigualdad del inciso *i)*. ■

Corolario 1.1.6. *Sean $\sigma \in R$-pr, $M \in R$-Mod y $N, K \leqslant M$ tales que $M = N \dot{\bigoplus} K$. Entonces $\sigma(M) = \sigma(N) \dot{\bigoplus} \sigma(K)$.*

Dem. Considere el isomorfismo $\varphi : N \dot{\bigoplus} K \to N \bigoplus K$ dado por $n + k \mapsto (n, k)$. En vista de la definición de prerradical y de la Proposición 1.1.5 (*i*) se tiene que $\sigma\varphi : \sigma(N \dot{\bigoplus} K) \to \sigma(N) \bigoplus \sigma(K)$ es también un isomorfismo. De aquí es fácil verificar que $\sigma(N \dot{\bigoplus} K) = \varphi^{-1}(\sigma(N) \bigoplus \sigma(K)) = \sigma(N) \dot{\bigoplus} \sigma(K)$. ■

A continuación, asociaremos a cada prerradical un par de clases de módulos con propiedades útiles, llamadas clase de pretorsión y clase libre de pretorsión, respectivamente.

Definición 1.1.7. *Sea C una clase no vacía de R-módulos. Se dice que C es cerrada bajo:*

1. *cocientes, si dado $M \in C$ y $N \leqslant M$, se tiene que $\frac{M}{N} \in C$.*

2. *submódulos, si dado $M \in C$ y $N \leqslant M$, se tiene que $N \in C$.*

3. *epimorfismos, si dado $M \in C$ y $M \twoheadrightarrow N$ un epimorfismo, se tiene que $N \in C$.*

4. *monomorfismos, si dado $M \in C$ y $N \hookrightarrow M$ un monomorfismo, se tiene que $N \in C$.*

5. *isomorfismos, si dado $M \in C$ y $M \cong N$ un isomorfismo, se tiene que $N \in C$.*

6. *sumas directas, si dada una familia $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq C$, se tiene que $\bigoplus_{i \in I} M_i \in C$.*

7. *productos directos, si dada una familia $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq C$, se tiene que $\prod_{i \in I} M_i \in C$.*

Una clase no vacía de R-módulos es llamada clase de pretorsión en R-Mod si es cerrada bajo sumas directas y epimorfismos. Dualmente, es llamada clase libre de pretorsión en R-Mod si es cerrada bajo productos y monomorfismos. Una clase de pretorsión en R-Mod se dice hereditaria si es cerrada bajo monomorfismos.

Observación 1.1.8. *Una clase no vacía de R-módulos es cerrada bajo epimorfismos (monomorfismos) sii es cerrada bajo cocientes (submódulos) e isomorfismos.*

Denotaremos con R-pretorsh a la colección de las clases de pretorsión hereditarias en R-Mod. Es claro que (R-pretorsh, $\subseteq$) es una clase parcialmente ordenada.

Definición 1.1.9. *Sea $\sigma \in R$-pr. Definimos la clase de R-módulos de σ-torsión como $\mathbb{T}_\sigma$=$\{M \in R\text{-Mod} \mid \sigma(M) = M\}$ y la clase de R-módulos libres de σ-torsión como $\mathbb{F}_\sigma$=$\{M \in R\text{-Mod} \mid \sigma(M) = 0\}$.*

Proposición 1.1.10. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase de pretorsión en R-Mod y $\mathbb{F}_\sigma$ es una clase libre de pretorsión en R-Mod.*

Dem. Que $\mathbb{T}_\sigma$ sea cerrada bajo sumas directas y que $\mathbb{F}_\sigma$ sea cerrada bajo productos se sigue inmediatamente de la Proposición 1.1.5. Usando el diagrama conmutativo inducido por la acción de σ sobre un módulo es sencillo verificar que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo cocientes y que $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos. Usándolo una vez más se obtiene la cerradura bajo isomorfimos. ■

Con ayuda de la proposición anterior podemos caracterizar sencillamente a los prerradicales 0 y 1.

Proposición 1.1.11. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $\sigma(ES) = 0$ para cada $S \in R$-Simp sii $\sigma = 0$.*

Dem. Sea $\sigma \in R$-pr tal que $\sigma(ES) = 0$ para cada $S \in R$-Simp. Entonces, por la Proposición 1.1.5 (*ii*), $\prod_{S \in R\text{-Simp}} ES \in \mathbb{F}_\sigma$. Si $M \in R$-Mod, por ser $\prod_{S \in R\text{-Simp}} ES$ un cogenerador de R-Mod, tenemos que $M \hookrightarrow (\prod_{S \in R\text{-Simp}} ES)^X$ para algún conjunto X. Puesto que $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo productos y monomorfismos por la Proposición 1.1.10, $M \in \mathbb{F}_\sigma$, y eso es lo mismo que $\sigma(M) = 0$. Como M fue arbitrario, $\sigma = 0$. El recíproco es claro. ■

Proposición 1.1.12. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $\sigma(R) = R$ sii $\sigma = 1$.*

Dem. Sea $\sigma \in R$-pr tal que $\sigma(R) = R$. Entonces $R \in \mathbb{T}_\sigma$. Si $M \in R$-Mod, por ser R un generador de R-Mod, tenemos que $R^{(X)} \twoheadrightarrow M$ para algún conjunto X. Puesto que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo sumas directas y epimorfismos por la Proposición 1.1.10, $M \in \mathbb{T}_\sigma$, y eso es lo mismo que $\sigma(M) = M$. Como M fue arbitrario, $\sigma = 1$. El recíproco es claro. ■

Recíprocamente, a las clases de pretorsión y libres de pretorsión se les puede asignar un prerradical especial, respectivamente. Es un ejercicio verificar la Proposición 1.1.15 que establece este hecho.

Definición 1.1.13. *Sea $\sigma \in R$-pr. Decimos que σ es:*

1. *idempotente si $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$ para cada $M \in R$-Mod.*

2. *radical si $\sigma(\frac{M}{\sigma(M)}) = 0$ para cada $M \in R$-Mod.*

3. *exacto izquierdo si como funtor es exacto izquierdo en R-Mod.*

4. *t-radical si $\sigma(M) = \sigma(R)M$ para cada $M \in R$-Mod.*

Definición 1.1.14. *Sean $\mathbb{T}$ y $\mathbb{F}$ clases no vacías de pretorsión y libre de pretorsíon en R-Mod, respectivamente. Definimos los prerradicales $\sigma_{\mathbb{T}}$ y $\sigma^{\mathbb{F}}$ como sigue:*

$$\sigma_{\mathbb{T}}(M) = \sum \{N \leqslant M \ \mid \ N \in \mathbb{T}\} \ y \ \sigma^{\mathbb{F}}(M) = \bigcap \{N \leqslant M \ \mid \ \frac{M}{N} \in \mathbb{F}\}$$

para cada $M \in R$-Mod.

Proposición 1.1.15. *Si $\mathbb{T}$ es una clase de pretorsión en R-Mod, entonces $\sigma_{\mathbb{T}}$ es prerradical idempotente sobre R. Si $\mathbb{F}$ es una clase libre de pretorsión en R-Mod, entonces $\sigma^{\mathbb{F}}$ es radical sobre R.* ■

Haber dado un par de asignaciones entre prerradicales y colecciones de clases de módulos en ambos sentidos no es coincidencia, como el siguiente y bien conocido resultado ilustra. La demostración se puede encontrar en [8] B. Stenström, *Rings of Quotients* (Springer-Verlag, Berlin, 1975).

Proposición 1.1.16. *Hay una correspondencia biyectiva entre prerradicales idempotentes sobre R y clases de pretorsión en R-Mod, dada por $\sigma \mapsto \mathbb{T}_\sigma$ y con inversa $\mathbb{T} \mapsto \sigma_{\mathbb{T}}$. Análogamente, existe una correspondencia biyectiva entre radicales sobre R y clases libres de pretorsión en R-Mod, dada por $\sigma \mapsto \mathbb{F}_\sigma$ y con inversa $\mathbb{F} \mapsto \sigma^{\mathbb{F}}$.* ■

A lo largo de este trabajo los prerradicales exactos izquierdos jugarán un papel central, por lo que ahora nos concentraremos un poco en ellos.

Proposición 1.1.17. *Sea $\sigma \in R$-pr. Son equivalentes:*

i) *σ es exacto izquierdo.*

ii) *$\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$ para cada $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$.*

iii) *σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es hereditaria.*

Dem. Sea σ un prerradical sobre R.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Suponga que σ es exacto izquierdo y considere $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$. Ya sabemos que $\sigma(N) \leqslant \sigma(M) \cap N$. Para probar la otra contención, considere el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[r, "\eta"] & \frac{M}{N} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sigma(N) \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\sigma\iota"] & \sigma(M) \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\sigma\eta"] & \sigma(\frac{M}{N}) \arrow[u, hook, "\iota"] &
\end{tikzcd}$$

Si $x \in \sigma(M) \cap N$, entonces $\sigma\eta(x) = \eta(x) = x + N = N$. Luego, $x \in ker\sigma\eta = Im\sigma\iota = \sigma(N)$. Por tanto, $\sigma(M) \cap N \leqslant \sigma(N)$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sea $M \in R$-Mod. Tenemos por hipótesis que $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M) \cap \sigma(M) = \sigma(M)$, lo cual prueba que σ es idempotente. Si $M \in \mathbb{T}_\sigma$ y $N \hookrightarrow M$, de nuevo, por la hipótesis, $\varphi N \leqslant M$ verifica que $\sigma(\varphi N) = \sigma(M) \cap \varphi N = M \cap \varphi N = \varphi N$, es decir, que $\varphi N \in \mathbb{T}_\sigma$. Como $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo isomorfismos, se sigue que $N \in \mathbb{T}_\sigma$.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* Suponga que σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es hereditaria. Sean $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$. Claramente $\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$. Como $\sigma(M) \cap N \leqslant \sigma(M)$, entonces $\sigma(M) \cap N \in \mathbb{T}_\sigma$, es decir, $\sigma(\sigma(M) \cap N) = \sigma(M) \cap N$. Por otro lado, $\sigma(N) \leqslant \sigma(M) \cap N \leqslant N$. Luego, $\sigma(N) = \sigma(\sigma(N)) \leqslant \sigma(\sigma(M) \cap N) = \sigma(M) \cap N \leqslant \sigma(N)$. Por tanto, $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Véase el diagrama de arriba, suponiendo que el renglón superior es exacto. Claramente se cumple que $\sigma\iota$ es un monomorfismo, por lo que basta probar la exactitud del renglón inferior. En efecto, es exacto pues $Im\sigma\iota = \sigma(N) = \sigma(M) \cap N = ker\eta_{\restriction\sigma(M)} = ker\sigma\eta$ en vista de la hipótesis. ■

Observación 1.1.18. *Por la proposición anterior,* 0 *y* 1 *son exactos izquierdos sobre R y todo prerradical exacto izquierdo sobre R es idempotente.*

Como se comprobará en el Teorema 1.1.22 y en la Proposición 1.1.25, es útil contar con las descripciones equivalentes de los prerradicales exactos izquierdos de la proposición anterior.

Denotaremos con R-pei a la clase de los prerradicales exactos izquierdos sobre R. Si un radical sobre R es exacto izquierdo, naturalmente lo llamaremos radical exacto izquierdo sobre R y denotaremos a esta clase como R-rei.

Definición 1.1.19. *Dos prerradicales $\sigma, \tau \in R$-pr están relacionados por $\sigma \preccurlyeq \tau$ si $\sigma(M) \leqslant \tau(M)$ para cada $M \in R$-Mod.*

Proposición 1.1.20. *(R-pr, $\preccurlyeq$) es una clase parcialmente ordenada. En particular, (R-pei, $\preccurlyeq$) también.* ■

Observación 1.1.21. *En R-pr y R-pei, 0 y 1 son los elementos menor y mayor, respectivamente.*

El Teorema 1.1.22 es el primero de varios con el mismo objetivo, brindar la posibilidad de estudiar R-pei desde un enfoque nuevo, muchas veces más sencillo (o equivalentemente, estudiar cierto objeto con los prerradicales exactos izquierdos). El verdadero valor de este tipo de resultados se podrá apreciar perfectamente en el último capítulo, donde se aplican con el fin de obtener información para el cálculo de objetos relacionados con los módulos inyectivos principales y prerradicales básicos, ambos tema principal de esta obra.

Teorema 1.1.22. *La siguiente correspondencia es biyectiva y preserva el orden:*

$$\begin{array}{ccc} (R\text{-pretorsh}, \subseteq) & \leftrightarrow & (R\text{-pei}, \preccurlyeq) \\ \mathbb{T} & \rightleftarrows & \sigma_{\mathbb{T}} \\ \mathbb{T}_{\sigma} & & \sigma \end{array}$$

Dem. Sea $\mathbb{T}$ una clase de pretorsión hereditaria en R-Mod. Por las Proposiciones 1.1.15 y 1.1.16 tenemos que $\sigma_{\mathbb{T}}$ es idempotente y $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\sigma_{\mathbb{T}}}$, respectivamente. En particular, $\mathbb{T}_{\sigma_{\mathbb{T}}}$ es hereditaria. En vista de la Proposición 1.1.17, $\sigma_{\mathbb{T}}$ es exacto izquierdo. Recíprocamente, si σ es exacto izquierdo, entonces es idempotente y $\mathbb{T}_{\sigma}$ es hereditaria por la Proposición 1.1.17. Además, $\mathbb{T}_{\sigma}$ también es una clase de pretorsión por la Proposición 1.1.16. Lo anterior prueba que la correspondencia está bien definida, y de hecho, también es biyectiva por la Proposición 1.1.16. Finalmente, de las definiciones de $\sigma_{\mathbb{T}}$ y $\mathbb{T}_{\sigma}$, es claro que esta correspondencia preserva el orden. ■

Con el orden $\preccurlyeq$ hay una forma de definir el menor prerradical exacto izquierdo mayor o igual a uno dado.

Definición 1.1.23. *Sea $\sigma \in R$-pr. Definimos $\widetilde{\sigma}$ como el prerradical tal que $\widetilde{\sigma}(M) = \sigma(EM) \cap M$ para cada $M \in R$-Mod.*

Observación 1.1.24. *La definición anterior es independiente de la cápsula inyectiva que se elija.*

Proposición 1.1.25. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $\widetilde{\sigma}$ es el menor prerradical exacto izquierdo sobre R que es mayor o igual a σ.*

Dem. Sean $\sigma \in R$-pr, $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$. Como EM es inyectivo, sabemos que hay un monomorfismo $\varphi : EN \hookrightarrow EM$ tal que al restringirlo a N es la inclusión de N a EM. Por tanto, es perfectamente posible hacer $EN \leqslant EM$ (por ejemplo, se puede tomar la imágen de φ, la cual es un módulo inyectivo que contiene a N), y siendo EN

inyectivo, tenemos $EM = EN\dot{\bigoplus}K$ para algún $K \leqslant EM$. En particular, note que $EN \cap \sigma(K) = 0$. También sabemos que $\sigma(EM) = \sigma(EN)\dot{\bigoplus}\sigma(K)$ por el Corolario 1.1.6. Ahora probemos que $(\sigma(EN)\dot{\bigoplus}\sigma(K)) \cap N = \sigma(EN) \cap N$. En efecto, claramente $\sigma(EN) \cap N \leqslant (\sigma(EN)\dot{\bigoplus}\sigma(K)) \cap N$. Por otro lado, si $x \in (\sigma(EN)\dot{\bigoplus}\sigma(K)) \cap N$, entonces $x \in N$ y $x = a+b$, donde $a \in \sigma(EN)$ y $b \in \sigma(K)$. Tenemos que $a+b = x \in N$, por lo que $b \in -a + N \subseteq \sigma(EN) + N \leqslant EN + N = EN$. Luego, $b \in EN \cap \sigma(K) = 0$, es decir, $b = 0$. Así, $x = a + 0 = a \in \sigma(EN)$. Siendo $x \in N$, se tiene $x \in \sigma(EN) \cap N$. Esto demuestra que $(\sigma(EN)\dot{\bigoplus}\sigma(K)) \cap N \leqslant \sigma(EN) \cap N$, y con ello, la igualdad buscada. Del análisis anterior, podemos concluir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma}(M) \cap N &= (\sigma(EM) \cap M) \cap N \\
&= \sigma(EM) \cap N \\
&= (\sigma(EN)\dot{\bigoplus}\sigma(K)) \cap N \\
&= \sigma(EN) \cap N \\
&= \widetilde{\sigma}(N).
\end{aligned}$$

Por la Proposición 1.1.17, $\widetilde{\sigma}$ es prerradical exacto izquierdo sobre R.

Ahora, sea $\tau \in R$-pei tal que $\sigma \preccurlyeq \tau$. Entonces $\widetilde{\sigma}(M) = \sigma(EM) \cap M \leqslant \tau(EM) \cap M = \tau(M)$ para cada $M \in R$-Mod. Esto demuestra que $\widetilde{\sigma} \preccurlyeq \tau$. ■

Observación 1.1.26. *$\sigma \in R$-pei sii $\sigma = \widetilde{\sigma}$.*

Ahora nos dedicaremos a establecer otra correspondencia para R-pei, muy en el espíritu de lo que se hizo para llegar al Teorema 1.1.22. Primero asociaremos a cada clase de pretorsión hereditaria un conjunto de ideales izquierdos del anillo que cumple tres condiciones, llamado filtro lineal.

Definición 1.1.27. *Sea $\mathscr{F}$ un conjunto no vacío de ideales izquierdos de R. Decimos que $\mathscr{F}$ es un filtro lineal en R si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Si $I \in \mathscr{F}$ y $I \leqslant J \leqslant R$, entonces $J \in \mathscr{F}$.*

2. *Si $I, J \in \mathscr{F}$, entonces $I \cap J \in \mathscr{F}$.*

3. *Si $I \in \mathscr{F}$ y $x \in R$, entonces $(I : x) \in \mathscr{F}$.*

Denotamos con R-fil al conjunto de todos los filtros lineales sobre R (observe que en efecto es un conjunto, pues la colección de todos los ideales izquierdos de R lo es). Es claro que (R-fil, $\subseteq$) es un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 1.1.28. *Sea $\mathbb{T} \in R$-pretorsh. Definimos el filtro lineal sobre R asociado a $\mathbb{T}$ como $\mathscr{F}_{\mathbb{T}}=\{I \leqslant R \mid \frac{R}{I} \in \mathbb{T}\}$.*

Proposición 1.1.29. *Sea $\mathbb{T} \in R$-pretorsh. Entonces $\mathscr{F}_{\mathbb{T}} \in R$-fil.*

Dem. Sea $\mathbb{T}$ una clase de pretorsión hereditaria en R-Mod. Verificaremos las tres condiciones de la Definición 1.1.27 para $\mathscr{F}_{\mathbb{T}}$.

1. Sean $I \in \mathscr{F}_{\mathbb{T}}$ y $I \leqslant J \leqslant R$. Tenemos que $\frac{R}{I} \in \mathbb{T}$. Como $\frac{R}{I} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \frac{R}{J}$, entonces $\frac{R}{J} \in \mathbb{T}$, es decir, $J \in \mathscr{F}_{\mathbb{T}}$.

2. Sean $I, J \in \mathscr{F}_{\mathbb{T}}$. Tenemos que $\frac{R}{I}, \frac{R}{J} \in \mathbb{T}$. Luego, $\frac{R}{I} \bigoplus \frac{R}{J} \in \mathbb{T}$, y como $\frac{R}{I\cap J} \hookrightarrow \frac{R}{I} \bigoplus \frac{R}{J}$ $(x + I \cap J \mapsto (x + I, x + J))$, entonces $\frac{R}{I\cap J} \in \mathbb{T}$, es decir, $I \cap J \in \mathscr{F}_{\mathbb{T}}$.

3. Sean $I \in \mathscr{F}_{\mathbb{T}}$ y $x \in R$. Tenemos que $\frac{R}{I} \in \mathbb{T}$. Como $\frac{R}{(I:x)} \cong \frac{R}{I}$ $(r + (I : x) \mapsto rx + I)$, entonces $\frac{R}{(I:x)} \in \mathbb{T}$, es decir, $(I : x) \in \mathscr{F}_{\mathbb{T}}$. ■

Ahora, asociamos a cada filtro lineal una clase de pretorsión hereditaria.

Definición 1.1.30. *Sea $\mathscr{F} \in R$-fil. Definimos la clase de R-módulos $\mathscr{F}$-discretos como $\mathscr{F}$-disc=$\{M \in R\text{-Mod} \mid ann(x) \in \mathscr{F}$ para cada $x \in M\}$.*

Proposición 1.1.31. *Sea $\mathscr{F} \in R$-fil. Entonces $\mathscr{F}$-disc $\in R$-pretorsh.*

Dem. Sean $\mathscr{F} \in R$-fil, $M \in \mathscr{F}$-disc y $N \leqslant M$. Dado $x \in N \leqslant M$, es claro que $ann(x) \in \mathscr{F}$, por lo que $N \in \mathscr{F}$-disc, es decir, $\mathscr{F}$-disc es cerrada bajo submódulos. Ahora considere $\bar{x} \in \frac{M}{N}$. Observe que $ann(\bar{x}) = (N : x) \leqslant R$. Puesto que $ann(x) = (0 : x) \leqslant (N : x) = ann(\bar{x})$ y $ann(x) \in \mathscr{F}$, entonces $ann(\bar{x}) \in \mathscr{F}$. Por tanto, $\frac{M}{N} \in \mathscr{F}$-disc, es decir, $\mathscr{F}$-disc es cerrada bajo cocientes. Si $M \overset{\varphi}{\cong} M'$, entonces $ann(x) = ann(\varphi x)$ para cada $x \in M$. Como φ es biyectiva y $M \in \mathscr{F}$-disc, entonces $M' \in \mathscr{F}$-disc, es decir, $\mathscr{F}$-disc es cerrada bajo isomorfismos. Finalmente, sean $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathscr{F}$-disc y $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$. Entonces $ann((x_\alpha)_{\alpha\in I}) = \bigcap_{\alpha\in I} ann(x_\alpha)$, y como $ann(x_\alpha) \in \mathscr{F}$ para cada $\alpha \in I$, $ann((x_\alpha)_{\alpha\in I}) \in \mathscr{F}$. Por tanto, $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \in \mathscr{F}$-disc, es decir, $\mathscr{F}$-disc es cerrada bajo sumas directas. Concluimos que $\mathscr{F}$-disc $\in R$-pretorsh. ■

Como se adivina, las asignaciones establecidas son inversas una de la otra.

Proposición 1.1.32. *Hay una correspondencia biyectiva entre filtros lineales sobre R y clases de pretorsión hereditarias en R-Mod, dada por $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}$-disc y con inversa $\mathbb{T} \mapsto \mathscr{F}_{\mathbb{T}}$.*

Dem. Basta demostrar que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{\mathscr{F}\text{-disc}}$ y que $\mathbb{T} = \mathscr{F}_{\mathbb{T}}$-disc.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\mathscr{F}\text{-disc}} &= \{I \leqslant R \mid \frac{R}{I} \in \mathscr{F}\text{-disc}\} \\
&= \{I \leqslant R \mid ann(\bar{x}) \in \mathscr{F} \text{ para cada } \bar{x} \in \frac{R}{I}\} \\
&= \{I \leqslant R \mid (I : x) \in \mathscr{F} \text{ para cada } x \in R\} \\
&= \mathscr{F}.
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que $(I:1) \in \mathscr{F}$ y $(I:1) \leqslant I$ implican que $I \in \mathscr{F}$ por ser $\mathscr{F}$ filtro lineal.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\mathbb{T}}\text{-disc} &= \{M \in R\text{-Mod} \mid ann(x) \in \mathscr{F}_{\mathbb{T}} \text{ para cada } x \in M\} \\
&= \{M \in R\text{-Mod} \mid \frac{R}{ann(x)} \in \mathbb{T} \text{ para cada } x \in M\} \\
&= \{M \in R\text{-Mod} \mid Rx \in \mathbb{T} \text{ para cada } x \in M\} \\
&= \mathbb{T}.
\end{aligned}$$

Para justificar la penúltima igualdad recuerde que $Rx \cong \frac{R}{ann(x)}$ para cada $x \in M$ y que $\mathbb{T}$ es cerrada bajo isomorfismos. La última igualdad se debe, por un lado, a que $Rx \in \mathbb{T}$ para cada $x \in M$ y $\bigoplus_{x\in M} Rx \twoheadrightarrow M$ implican que $M \in \mathbb{T}$ por ser $\mathbb{T}$ clase de pretorsión, y por otro lado, a que $M \in \mathbb{T}$ y $x \in M$ implican que $Rx \in \mathbb{T}$ por ser $\mathbb{T}$ hereditaria. ■

Ya podemos establecer la correspondencia biyectiva entre R-fil y R-pei.

Definición 1.1.33. *Sean $\mathscr{F} \in R$-fil y $\sigma \in R$-pei. Definimos el prerradical exacto izquierdo sobre R asociado a $\mathscr{F}$ como $\sigma_{\mathscr{F}} = \sigma_{\mathscr{F}\text{-disc}} = \{x \in M \mid ann(x) \in \mathscr{F}\}$ y el filtro lineal en R asociado a σ como $\mathscr{F}_\sigma = \mathscr{F}_{\mathbb{T}_\sigma} = \{I \leqslant R \mid \frac{R}{I} \in \mathbb{T}_\sigma\}$.*

Teorema 1.1.34. *La siguiente correspondencia es biyectiva y preserva el orden:*

$$\begin{array}{ccc}
(R\text{-fil}, \subseteq) & \leftrightarrow & (R\text{-pei}, \preccurlyeq) \\
\mathscr{F} & \rightleftarrows & \sigma_{\mathscr{F}} \\
\mathscr{F}_\sigma & & \sigma
\end{array}$$

Dem. La correspondencia es biyectiva gracias al Teorema 1.1.22 y a la Proposición 1.1.32. También preserva el orden en vista de las definiciones de $\sigma_{\mathscr{F}}$ y $\mathscr{F}_\sigma$ y del Teorema 1.1.22 una vez más. ■

Corolario 1.1.35. *R-pei y R-pretorsh son conjuntos. En particular, $(R\text{-pei}, \preccurlyeq)$ y $(R\text{-pretorsh}, \subseteq)$ son conjuntos parcialmente ordenados y las correspondencias de los Teoremas 1.1.22 y 1.1.34 son isomorfismos de conjuntos parcialmente ordenados.* ■

Para finalizar esta sección presentamos un subconjunto de R-pei que nos será de interés posterior.

Definición 1.1.36. *Sea $\sigma \in R$-pei. Decimos que σ es jansiano si $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo productos arbitrarios.*

Denotamos con R-jans al conjunto de los prerradicales jansianos. A continuación, damos condiciones equivalentes para que un prerradical exacto izquierdo sea jansiano.

Definición 1.1.37. *Sea $I \leqslant R$. Denotamos por $\eta(I)$ al conjunto de todos los ideales izquierdos de R que contienen a I.*

Observación 1.1.38. *$I \leqslant R$ es un ideal sii $\eta(I)$ es un filtro lineal en R.*

Proposición 1.1.39. *Sea $\sigma \in R$-pei. Son equivalentes:*

i) $\sigma \in R$*-jans.*

ii) $\mathscr{F}_\sigma$ *es cerrado bajo intersecciones arbitrarias.*

iii) $\mathscr{F}_\sigma = \eta(I)$ *para algún* $I \leqslant R$.

Dem. Sea σ un prerradical exacto izquierdo sobre R.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Suponga que $\sigma \in R$-jans y sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in J} \subseteq \mathscr{F}_\sigma$. Entonces $\{\frac{R}{I_\alpha}\}_{\alpha\in J} \subseteq \mathbb{T}_\sigma$, y como $\sigma \in R$-jans, $\prod_{\alpha\in J} \frac{R}{I_\alpha} \in \mathbb{T}_\sigma$. Considere el siguiente morfismo:

$$\begin{aligned} R &\to \prod_{\alpha\in J} \frac{R}{I_\alpha} \\ r &\mapsto (r + I_\alpha)_{\alpha\in J} \end{aligned}$$

Sabemos que el núcleo de este morfismo es $\bigcap_{\alpha\in J} I_\alpha$, por lo que $\frac{R}{\bigcap_{\alpha\in J} I_\alpha} \hookrightarrow \prod_{\alpha\in J} \frac{R}{I_\alpha} \in \mathbb{T}_\sigma$. Como $\sigma \in R$-pei, $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase de pretorsión hereditaria por el Teorema 1.1.22, y entonces $\frac{R}{\bigcap_{\alpha\in J} I_\alpha} \in \mathbb{T}_\sigma$. Luego, $\bigcap_{\alpha\in J} I_\alpha \in \mathscr{F}_\sigma$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Suponga que $\mathscr{F}_\sigma$ es cerrado bajo intersecciones y sea $I = \bigcap \mathscr{F}_\sigma \leqslant R$. Claramente $\mathscr{F}_\sigma$=$\eta(I)$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Suponga que $\mathscr{F}_\sigma$=$\eta(I)$ para algún $I \leqslant R$ y sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in J} \subseteq \mathbb{T}_\sigma$. Primero note que si $\alpha \in J$, entonces $M_\alpha = \sigma(M_\alpha) = \sigma_{\mathscr{F}_\sigma}(M_\alpha)$=$\{x \in M_\alpha \mid ann(x) \in \mathscr{F}_\sigma\}$ en vista del Teorema 1.1.34. De aquí que, si $x_\alpha \in M_\alpha$, entonces $ann(x_\alpha) \in \mathscr{F}_\sigma$=$\eta(I)$, es decir, $I \leqslant ann(x_\alpha)$. Dado $(x_\alpha)_{\alpha\in J} \in \prod_{\alpha\in J} M_\alpha$, se tiene que $I \leqslant \bigcap_{\alpha\in J} ann(x_\alpha) = ann((x_\alpha)_{\alpha\in J})$ por lo anterior. Luego, $ann((x_\alpha)_{\alpha\in J}) \in \eta(I) = \mathscr{F}_\sigma$. Por ello y, una vez más, por el Teorema 1.1.34, $\sigma(\prod_{\alpha\in J} M_\alpha) = \sigma_{\mathscr{F}_\sigma}(\prod_{\alpha\in J} M_\alpha)$=$\{x \in \prod_{\alpha\in J} M_\alpha \mid ann((x_\alpha)_{\alpha\in J}) \in \mathscr{F}_\sigma\}$=$\prod_{\alpha\in J} M_\alpha$. Esto demuestra que $\prod_{\alpha\in J} M_\alpha \in \mathbb{T}_\sigma$, y consecuentemente, que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo productos arbitrarios. Por ser $\sigma \in R$-pei, concluimos que $\sigma \in R$-jans. ■

Hay además una condición necesaria en términos del anillo.

Proposición 1.1.40. *Sea R anillo artiniano. Entonces R-pei = R-jans, es decir, todo prerradical exacto izquierdo es jansiano.*

Dem. Por la definición de prerradical jansiano, tenemos R-jans $\subseteq R$-pei. Veamos la otra contención. Sea $\sigma \in R$-pei. Como R es artiniano y $\mathscr{F}_\sigma$ es una familia no vacía de ideales izquierdos de R (R mismo es un elemento de esa familia), existe un ideal izquierdo mínimo I en $\mathscr{F}_\sigma$. Entonces $\mathscr{F}_\sigma = \eta(I)$, y por la Proposición 1.1.39, $\sigma \in R$-jans. Por tanto, R-pei $\subseteq R$-jans. Concluimos la igualdad buscada. ■

1.2. La gran retícula R-pr

En general, R-pr es una clase y para las clases mucho de la teoría de conjuntos deja de ser aplicable. Sin embargo, hay una variedad de nociones conocidas que pueden adaptarse sin mayor problemas a este tipo de objetos. Una de ellas es la noción de orden, como se vio en la sección anterior. Otra es la de retícula, que nos dedicaremos a estudiar ahora. Existen dos prerradicales imprescindibles en tal estudio, a saber, los prerradicales α_N^M y ω_N^M, por lo que se introducirán primero. Para presentarlos, es necesario definir los submódulos totalmente invariantes de un módulo dado.

Definición 1.2.1. *Sean $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$. Decimos que N es submódulo totalmente invariante de M, y escribimos $N \leqslant_{ti} M$, si $f(N) \leqslant N$ para cada $f \in End_R(M)$.*

Observación 1.2.2. *Si $\sigma \in R$-pr y $M \in R$-Mod, entonces $\sigma(M) \leqslant_{ti} M$.*

Definición 1.2.3. *Sean $M \in R$-Mod y $N \leqslant_{ti} M$. Los prerradicales α_N^M y ω_N^M se definen como sigue:*

$$\alpha_N^M(K) = \sum_{f \in Hom_R(M,K)} f(N) \quad y\ \omega_N^M(K) = \bigcap_{f \in Hom_R(K,M)} f^{-1}(N)$$

para cada $K \in R$-Mod.

Hay una forma práctica de saber cuándo dos de estos prerradicales del mismo tipo son iguales.

Proposición 1.2.4. *Sean $M, M' \in R$-Mod, $N \leqslant_{ti} M$, $N' \leqslant_{ti} M'$, $h_1 \in Hom_R(M, M')$ y $h_2 \in Hom_R(N, N')$. Suponga que h_1 y h_2 son isomorfismos tales que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h_1"] & M' \\ N \arrow[u, hook, "\iota_1"] \arrow[r, "h_2"] & N' \arrow[u, hook, "\iota_2"'] \end{tikzcd}$$

Entonces $\alpha_N^M = \alpha_{N'}^{M'}$ y $\omega_N^M = \omega_{N'}^{M'}$.

Dem. Sea K un R-módulo arbitrario. Con las mismas hipótesis del enunciado, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_N^M(K) = \sum_{f \in Hom_R(M,K)} f(N) &= \sum_{f \in Hom_R(M,K)} f(\iota_1(N)) = \sum_{f \in Hom_R(M,K)} f(h_1^{-1}\iota_2 h_2(N)) = \sum_{f \in Hom_R(M,K)} fh_1^{-1}(\iota_2 h_2(N)) \\ &= \sum_{f \in Hom_R(M,K)} fh_1^{-1}(N') \leqslant \sum_{g \in Hom_R(M',K)} g(N') = \alpha_{N'}^{M'}(K). \end{aligned}$$

Así, $\alpha_N^M(K) \leqslant \alpha_{N'}^{M'}(K)$ y de forma similar se verifica que $\alpha_{N'}^{M'}(K) \leqslant \alpha_N^M(K)$. Luego, $\alpha_N^M(K) = \alpha_{N'}^{M'}(K)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\omega_N^M(K) = &\bigcap_{f \in Hom_R(K,M)} f^{-1}(N) = \bigcap_{f \in Hom_R(K,M)} f^{-1}(\iota_1(N)) = \bigcap_{f \in Hom_R(K,M)} f^{-1}(h_1^{-1}\iota_2 h_2(N)) \\ = &\bigcap_{f \in Hom_R(K,M)} f^{-1}h_1^{-1}(\iota_2 h_2(N)) = \bigcap_{f \in Hom_R(K,M)} f^{-1}h_1^{-1}(N') = \bigcap_{f \in Hom_R(K,M)} (h_1 f)^{-1}(N') \\ \geqslant &\bigcap_{g \in Hom_R(K,M')} g^{-1}(N') = \omega_{N'}^{M'}(K).\end{aligned}$$

Por tanto, $\omega_N^M(K) \geqslant \omega_{N'}^{M'}(K)$ y de forma similar se verifica que $\omega_{N'}^{M'}(K) \geqslant \omega_N^M(K)$. Luego, $\omega_N^M(K) = \omega_{N'}^{M'}(K)$. Como K fue arbitrario, concluimos que $\alpha_N^M = \alpha_{N'}^{M'}$ y $\omega_N^M = \omega_{N'}^{M'}$. ■

Las propiedades más básicas de estos prerradicales se presentan en las próximas proposiciones.

Proposición 1.2.5. *Sea $M \in R$-Mod y suponga que $K \leqslant N \leqslant M$ con $K, N \leqslant_{ti} M$. Entonces $\alpha_K^M \preccurlyeq \alpha_N^M$ y $\omega_K^M \preccurlyeq \omega_N^M$.* ■

Proposición 1.2.6. *Sean $M \in R$-Mod y $N \leqslant_{ti} M$. Entonces se cumplen:*

i) $\alpha_N^M(M) = N$

ii) $\omega_N^M(M) = N$

Dem. Sean $M \in R$-Mod y N un R-submódulo totalmente invariante de M.

i) Siendo Id_M un endomorfismo de M, se tiene

$$N = Id_M(N) \leqslant \sum_{f \in End_R(M)} f(N) = \alpha_N^M(M).$$

Por otro lado, como $N \leqslant_{ti} M$, tenemos que $f(N) \leqslant N$ para cada $f \in End_R(M)$. Por ello, $\alpha_N^M(M) = \sum_{f \in End_R(M)} f(N) \leqslant N$ y obtenemos la igualdad buscada.

ii) Siendo Id_M un endomorfismo de M, se tiene

$$\omega_N^M(M) = \bigcap_{f \in End_R(M)} f^{-1}(N) \leqslant {Id_M}^{-1}(N) = N.$$

Por otro lado, como $N \leqslant_{ti} M$, tenemos que $N \leqslant f^{-1}(N)$ para cada $f \in End_R(M)$. Por ello, $N \leqslant \bigcap_{f \in End_R(M)} f^{-1}(N) = \omega_N^M(M)$ y obtenemos la igualdad buscada. ■

Ya es evidente como caracterizar a los submódulos totalmente invariantes de un módulo con el uso de prerradicales.

Proposición 1.2.7. *Sean $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$. Entonces $N \leqslant_{ti} M$ sii existe $\sigma \in R$-pr tal que $\sigma(M) = N$.*

Dem. La necesidad es consecuencia inmediata de la Proposición 1.2.6 y la suficiencia de la Observación 1.2.2. ■

Corolario 1.2.8. *Los ideales de R son precisamente sus ideales izquierdos totalmente invariantes, o lo que es lo mismo, sus R-submódulos totalmente invariantes.*

Dem. Por la Observación 1.1.3 y la Proposición 1.2.7, todo ideal de R es ideal izquierdo totalmente invariante. Recíprocamente, un ideal izquierdo totalmente invariante de R es en particular invariante bajo el endomorfismo $x \mapsto xr$ para cada $r \in R$. ■

Proposición 1.2.9. *Sean $\sigma \in R$-pr, $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$. Entonces $\sigma(M) = N$ sii $N \leqslant_{ti} M$ y $\alpha_N^M \preccurlyeq \sigma \preccurlyeq \omega_N^M$.*

Dem. Sean $\sigma \in R$-pr, $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$. Primero suponga que $\sigma(M) = N$. Entonces $N \leqslant_{ti} M$ por la Proposición 1.2.7. Para la segunda parte, considere $K \in R$-Mod. Por un lado tenemos que $f(N) = f(\sigma(M)) \leqslant \sigma(K)$ para cada $f \in Hom_R(M, K)$, de donde $\alpha_N^M(K) \leqslant \sigma(K)$. Por otro lado, $\sigma(K) \leqslant g^{-1}(g(\sigma(K))) \leqslant g^{-1}(\sigma(M)) = g^{-1}(N)$ para cada $g \in Hom_R(K, M)$, de donde $\sigma(K) \leqslant \omega_N^M(K)$. Como K fue arbitrario, obtenemos que $\alpha_N^M \preccurlyeq \sigma \preccurlyeq \omega_N^M$. Recíprocamente, asuma que $N \leqslant_{ti} M$ y $\alpha_N^M \preccurlyeq \sigma \preccurlyeq \omega_N^M$. Entonces $N = \alpha_N^M(M) \leqslant \sigma(M) \leqslant \omega_N^M(M) = N$ en vista de la Proposición 1.2.6. Luego, $\sigma(M) = N$. ■

Corolario 1.2.10. *Sean $M \in R$-Mod y $N \leqslant_{ti} M$. Entonces $\{\sigma \in R\text{-pr} \mid \sigma(M) = N\} = [\alpha_N^M, \omega_N^M]$.* ■

Corolario 1.2.11. *Sea $M \in R$-Mod. Entonces $\alpha_0^M = 0$ y $\omega_M^M = 1$.*

Dem. Sea $M \in R$-Mod. Note que $0(M) = 0$ y $1(M) = M$, por lo que $\alpha_0^M \preccurlyeq 0$ y $1 \preccurlyeq \omega_M^M$ en vista de la Proposición 1.2.9. Dado que 0 y 1 son el elemento menor y mayor de R-pr, respectivamente, se sigue el corolario. ■

Para R-pr hay cuatro operaciones muy naturales que probarán ser un aparato de cálculo de prerradicales muy poderoso.

Definición 1.2.12. *Las cuatro operaciones elementales de R-pr son $\wedge$ (ínfimo), $\vee$ (supremo), $\cdot$ (producto) y $:$ (coproducto). Dados $\sigma, \tau \in R$-pr, las operaciones anteriores se describen entre ellos como sigue:*

1. *$(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M)$ para cada $M \in R$-Mod.*

2. *$(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M)$ para cada $M \in R$-Mod.*

3. *$(\sigma \cdot \tau)(M) = \sigma(\tau(M))$ para cada $M \in R$-Mod.*

4. *$(\sigma : \tau)(M)$ es el único submódulo de M tal que $\frac{(\sigma:\tau)(M)}{\sigma(M)} = \tau(\frac{M}{\sigma(M)})$ para cada $M \in R$-Mod.*

Observación 1.2.13. *Por lo anterior, $\sigma \in R$-pr es idempotente sii $\sigma \cdot \sigma = \sigma$ y es radical sii $(\sigma : \sigma) = \sigma$.*

Proposición 1.2.14. *Las cuatro operaciones elementales de R-pr son asociativas. Las operaciones ínfimo y supremo de R-pr son conmutativas.* ■

La siguiente proposición muestra la relación entre las cuatro operaciones elementales y el orden $\preccurlyeq$.

Proposición 1.2.15. *Sean $\sigma, \tau, \eta \in R$-pr.*

i) $\sigma \cdot \tau \preccurlyeq \sigma \wedge \tau \preccurlyeq \sigma \vee \tau \preccurlyeq (\sigma : \tau)$.

ii) Si $\sigma \preccurlyeq \tau$, entonces:

ii.i) $\sigma \wedge \eta \preccurlyeq \tau \wedge \eta$.

ii.ii) $\sigma \vee \eta \preccurlyeq \tau \vee \eta$.

ii.iii) $\sigma \cdot \eta \preccurlyeq \tau \cdot \eta$ *y* $\eta \cdot \sigma \preccurlyeq \eta \cdot \tau$.

ii.iv) $(\sigma : \eta) \preccurlyeq (\sigma : \eta) \vee \tau \preccurlyeq (\tau : \eta)$ *y* $(\eta : \sigma) \preccurlyeq (\eta : \tau)$.

Dem. Sean σ ,τ y η prerradicales sobre R y $M \in R$-Mod.

i) Sólo probaremos la última desigualdad. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, two heads, "\eta"] & \frac{M}{\sigma(M)} \\
\tau(M) \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\tau\eta"] & \tau(\frac{M}{\sigma(M)}) \arrow[u, hook, "\iota"]
\end{tikzcd}$$

Por el diagrama, $\frac{\sigma(M)+\tau(M)}{\sigma(M)} \leqslant \tau(\frac{M}{\sigma(M)}) = \frac{(\sigma:\tau)(M)}{\sigma(M)}$. Luego, $(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M)+\tau(M) \leqslant (\sigma : \tau)(M)$. Como M fue arbitrario, $\sigma \vee \tau \preccurlyeq (\sigma : \tau)$.

ii) Suponga que $\sigma \preccurlyeq \tau$. Sólo probaremos la primera mitad de *ii.iv)*. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\frac{M}{\sigma(M)} \arrow[r, two heads, "\pi"] & \frac{M}{\tau(M)} \\
\eta(\frac{M}{\sigma(M)}) \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\eta\pi"] & \eta(\frac{M}{\tau(M)}) \arrow[u, hook, "\iota"]
\end{tikzcd}$$

Por el diagrama, $\frac{(\sigma:\eta)(M)+\tau(M)}{\tau(M)} = \pi(\frac{(\sigma:\eta)(M)}{\sigma(M)}) = \pi(\eta(\frac{M}{\sigma(M)})) \leqslant \eta(\frac{M}{\tau(M)}) = \frac{(\tau:\eta)(M)}{\tau(M)}$. Luego, $(\sigma : \eta)(M) \leqslant ((\sigma : \eta) \vee \tau)(M) = (\sigma : \eta)(M) + \tau(M) \leqslant (\tau : \eta)(M)$. Como M fue arbitrario, $(\sigma : \eta) \preccurlyeq (\sigma : \eta) \vee \tau \preccurlyeq (\tau : \eta)$. ■

Se puede ser más general en el caso del ínfimo y supremo.

Definición 1.2.16. *Sea Γ una clase de prerradicales sobre R. Las operaciones $\bigwedge$ (ínfimo) y $\bigwedge$ (supremo) se describen para Γ como sigue:*

$$(\bigwedge \Gamma)(M) = (\bigwedge_{\sigma\in\Gamma} \sigma)(M) = \bigcap_{\sigma\in\Gamma} \sigma(M) \text{ y } (\bigvee \Gamma)(M) = (\bigvee_{\sigma\in\Gamma} \sigma)(M) = \sum_{\sigma\in\Gamma} \sigma(M)$$

para cada $M \in R$-Mod.

Observación 1.2.17. *Como $\{\sigma(M) \mid \sigma \in \Gamma\}$ siempre es un conjunto, el ínfimo y supremo de Γ están bien definidos. Por otro lado, note que $\bigwedge \emptyset = 1$ y $\bigvee \emptyset = 0$. También es claro que estas operaciones son asociativas.*

Debe ser clara la siguiente extensión de la Proposición 1.2.15.

Proposición 1.2.18. *Sean $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R$-pr tales que $\sigma_\alpha \preccurlyeq \tau_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Entonces $\bigwedge_{\alpha\in I} \sigma_\alpha \preccurlyeq \bigwedge_{\alpha\in I} \tau_\alpha$ y $\bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha \preccurlyeq \bigvee_{\alpha\in I} \tau_\alpha$.* ■

El ínfimo y supremo son la operaciones que otorgan la estructura de retícula a R-pr. De hecho, es posible decir un poco más.

Proposición 1.2.19. *(R-pr, $\preccurlyeq$, $\wedge$, $\vee$) es una gran retícula completa.*

Dem. Es claro que inf($\{\sigma, \tau\}$)=$\sigma \wedge \tau$ y que sup($\{\sigma, \tau\}$)=$\sigma \vee \tau$ para cada $\sigma, \tau \in R$-pr. Más aún, inf(Γ)=$\bigwedge \Gamma$ y sup(Γ)=$\bigvee \Gamma$ para cada clase Γ de prerradicales sobre R. ■

Es notorio que todo prerradical sobre R se pueda describir como ínfimo y supremo de ciertas clases en R-pr.

Proposición 1.2.20. *Para cada $\sigma \in R$-pr, tenemos $\sigma = \bigvee\limits_{M\in R\text{-}Mod} \alpha^M_{\sigma(M)} = \bigwedge\limits_{M\in R\text{-}Mod} \omega^M_{\sigma(M)}$.*

Dem. Es claro de las Proposiciones 1.2.6 y 1.2.9. ■

La siguiente proposición resume las propiedades más importantes que relacionan las operaciones definidas hasta ahora y también caracteriza a los radicales y prerradicales idempotentes en términos del producto y coproducto. Antes de probarla, convengamos que $\sigma \cdot \tau$ se represente como $\sigma\tau$ para cada $\sigma, \tau \in R$-pr de aquí en adelante y establezcamos el siguiente lema.

Lema 1.2.21. *Sea $\sigma \in R$-pr.*

i) Si σ es radical, $M \in R$-Mod y $N \leqslant \sigma(M)$, entonces $\frac{\sigma(M)}{N} = \sigma(\frac{M}{N})$.

ii) Si σ es idempotente, entonces $\sigma = \sigma(\sigma : \tau)$.

Dem. Sea σ prerradical sobre R.

i) Suponga que σ es radical, $M \in R$-Mod y $N \leqslant \sigma(M)$. Por la Proposición 1.1.4 (ii) sólo necesitamos probar la otra desigualdad. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \frac{M}{N} \arrow[r, two heads, "\pi"] & \frac{M}{\sigma(M)} \\ \sigma(\frac{M}{N}) \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\sigma\pi"] & \sigma(\frac{M}{\sigma(M)}) = 0 \arrow[u, hook, "\iota"] \end{tikzcd}$$

Por el diagrama, $\sigma(\frac{M}{N}) \leqslant ker\pi = \frac{\sigma(M)}{N}$. Por tanto, $\frac{\sigma(M)}{N} = \sigma(\frac{M}{N})$.

ii) Suponga que σ es idempotente. Claramente $\sigma(\sigma : \tau) \preccurlyeq \sigma$. Por otro lado, como $\sigma \preccurlyeq \sigma \vee \tau \preccurlyeq (\sigma : \tau)$ y $\sigma\sigma = \sigma$, $\sigma \preccurlyeq \sigma(\sigma : \tau)$. Por tanto, $\sigma = \sigma(\sigma : \tau)$. ■

Proposición 1.2.22. *Sean $\sigma, \tau, \eta \in R$-pr y $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq R$-pr.*

i) (ley modular) Si $\sigma \preccurlyeq \tau$, entonces $\sigma \vee (\tau \wedge \eta) = \tau \wedge (\sigma \vee \eta)$.

ii) $\tau \wedge (\bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha) = \bigvee_{\alpha\in I} (\tau \wedge \sigma_\alpha)$.

iii) a) $(\bigwedge_{\alpha\in I} \sigma_\alpha) \cdot \tau = \bigwedge_{\alpha\in I} (\sigma_\alpha \cdot \tau)$

b) $(\bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha) \cdot \tau = \bigvee_{\alpha\in I} (\sigma_\alpha \cdot \tau)$

c) $(\tau : \bigwedge_{\alpha\in I} \sigma_\alpha) = \bigwedge_{\alpha\in I} (\tau : \sigma_\alpha)$

d) $(\tau : \bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha) = \bigvee_{\alpha\in I} (\tau : \sigma_\alpha)$.

iv) $(\tau : \eta)\cdot\sigma \preccurlyeq (\tau \cdot \sigma : \eta \cdot \sigma)$; σ es radical sii $(\tau : \eta)\cdot\sigma$=$(\tau \cdot \sigma : \eta \cdot \sigma)$ para cada $\tau, \eta \in R$-pr.

v) $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta) \preccurlyeq (\sigma : \tau \cdot \eta)$; σ es idempotente sii $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta)$=$(\sigma : \tau \cdot \eta)$ para cada $\tau, \eta \in R$-pr.

Dem. Sean σ,τ y η prerradicales sobre R y $M \in R$-Mod. Se probaran únicamente iv) y v).

iv) La Proposición 1.1.4 (ii) muestra que $\frac{\sigma(M)}{\tau(\sigma(M))} \leqslant \sigma(\frac{M}{\tau(\sigma(M))})$ por ser $\tau(\sigma(M)) \leqslant \sigma(M)$. Entonces $\eta(\frac{\sigma(M)}{\tau(\sigma(M))}) \leqslant \eta(\sigma(\frac{M}{\tau(\sigma(M))}))$. Así, $\frac{((\tau:\eta)\sigma)(M)}{\tau\sigma(M)} = \frac{(\tau:\eta)(\sigma(M))}{\tau(\sigma(M))} = \eta(\frac{\sigma(M)}{\tau(\sigma(M))}) \leqslant \eta(\sigma(\frac{M}{\tau(\sigma(M))})) = \eta\sigma(\frac{M}{\tau\sigma(M)}) = \frac{(\tau\sigma:\eta\sigma)(M)}{\tau\sigma(M)}$. Luego, $((\tau : \eta)\sigma)(M) \leqslant (\tau\sigma : \eta\sigma)(M)$. Como M fue arbitrario, obtenemos que $(\tau : \eta)\sigma \preccurlyeq (\tau\sigma : \eta\sigma)$. Veamos la segunda parte. Suponga que σ es radical. Entonces $\frac{\sigma(M)}{\tau(\sigma(M))} = \sigma(\frac{M}{\tau(\sigma(M))})$ por el Lema 1.2.21 (i). De la demostración de la primer parte, es inmediato que $((\tau : \eta)\sigma)(M)$=$(\tau\sigma : \eta\sigma)(M)$.

Concluimos que $(\tau : \eta)\sigma = (\tau\sigma : \eta\sigma)$ para cada $\tau, \eta \in R$-pr. El recíproco es claro tomando $\tau = \eta = 1$.

$v)$ Primero note que $\sigma((\sigma : \eta)(M)) \leqslant \sigma(M) \leqslant (\sigma : \eta)(M)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\frac{(\sigma:\eta)(M)}{\sigma((\sigma:\eta)(M))} \arrow[r, two heads, "\pi"] & \frac{(\sigma:\eta)(M)}{\sigma(M)} \\
\tau\left(\frac{(\sigma:\eta)(M)}{\sigma((\sigma:\eta)(M))}\right) \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\tau\pi"] & \tau\left(\frac{(\sigma:\eta)(M)}{\sigma(M)}\right) \arrow[u, hook, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Por el diagrama anterior, $\frac{(\sigma:\tau)((\sigma:\eta)(M))+\sigma(M)}{\sigma(M)} = \pi(\frac{(\sigma:\tau)((\sigma:\eta)(M))}{\sigma((\sigma:\eta)(M))}) = \pi(\tau(\frac{(\sigma:\eta)(M)}{\sigma((\sigma:\eta)(M))})) \leqslant \tau(\frac{(\sigma:\eta)(M)}{\sigma(M)}) = \tau(\eta(\frac{M}{\sigma(M)})) = \tau\eta(\frac{M}{\sigma(M)}) = \frac{(\sigma:\tau\eta)(M)}{\sigma(M)}$. Por tanto, $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta)(M) = (\sigma : \tau)((\sigma : \eta)(M)) \leqslant (\sigma : \tau)((\sigma : \eta)(M)) + \sigma(M) \leqslant (\sigma : \tau\eta)(M)$. Como M fue arbitrario, obtenemos que $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta) \preccurlyeq (\sigma : \tau\eta)$. Veamos la segunda parte. Suponga que σ es idempotente. Entonces $\sigma = \sigma(\sigma : \tau)$ por el Lema 1.2.21 (ii). Luego, $\frac{(\sigma:\tau)((\sigma:\eta)(M))}{\sigma((\sigma:\eta)(M))} = \tau(\frac{(\sigma:\eta)(M)}{\sigma((\sigma:\eta)(M))}) = \tau(\frac{(\sigma:\eta)(M)}{\sigma(M)}) = \tau(\eta(\frac{M}{\sigma(M)})) = \tau\eta(\frac{M}{\sigma(M)}) = \frac{(\sigma:\tau\eta)(M)}{\sigma(M)} = \frac{(\sigma:\tau\eta)(M)}{\sigma((\sigma:\eta)(M))}$. Por tanto, $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta)(M) = (\sigma : \tau\eta)(M)$. Concluimos que $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta)$=$(\sigma : \tau\eta)$ para cada $\tau, \eta \in R$-pr. El recíproco es claro tomando $\tau = \eta = 1$. ■

Probemos ahora que R-pr es una gran retícula atómica y coatómica. De hecho, seremos capaces de determinar todos los átomos y coátomos en ella. Antes, requerimos dos lemas previos.

Lema 1.2.23. *Sea $S \in R$-Simp. Entonces $S \leqslant N$ para cada $0 \neq N \leqslant ES$ y $f(S) = S$ para cada $f \in End_R(ES)$ tal que $f(S) \neq 0$. En particular, ES es uniforme y $S \leqslant_{ti} ES$.*

Dem. Sea $S \in R$-Simp. Si $0 \neq N \leqslant ES$, entonces $S \cap N \neq 0$ por ser $S \leqslant_e ES$. Como $0 \neq S \cap N \leqslant S$ y S es simple, entonces $S = S \cap N$. Luego, $S \leqslant N$. Ahora, si $f \in End_R(ES)$ y $f(S) \neq 0$, entonces $S \leqslant f(S)$ por lo anterior y además $f(S)$ es simple. Entonces $f(S) = S$. En particular, ES es uniforme y $S \leqslant_{ti} ES$. ■

Lema 1.2.24. *Sean $S, T \in R$-Simp no isomorfos. Entonces $f(S) = 0$ para cada $f \in Hom_R(ES, ET)$.*

Dem. Sean $S, T \in R$-Simp y $f \in Hom_R(ES, ET)$. Si $f(S) \neq 0$, entonces $T \leqslant f(S)$ por el Lema 1.2.23 y además $f(S)$ es simple e isomorfo a S. Consecuentemente, $T = f(S) \cong S$. ■

Teorema 1.2.25. *R-pr es una gran retícula atómica y coatómica. El conjunto de átomos es $\{\alpha_S^{ES} \mid S \in R\text{-Simp}\}$ y el conjunto de coátomos es $\{\omega_I^R \mid I$ es ideal máximo de $R\}$.*

Dem. Antes que nada, note que $\{\alpha_S^{ES} \mid S \in R\text{-Simp}\}$ y $\{\omega_I^R \mid I$ es ideal máximo de $R\}$ son conjuntos gracias a que R-Simp y $\{I \leqslant R \mid I$ es ideal máximo de $R\}$ lo son.

Concentrémonos en la primera parte. Sea $0 \neq \sigma \in R$-pr. Por la Proposición 1.1.11, existe $S \in R$-Simp tal que $\sigma(ES) \neq 0$. Luego, $S \leqslant \sigma(ES) \leqslant_{ti} ES$ y $S \leqslant_{ti} ES$ por el Lema 1.2.23. Puesto que $\alpha^{ES}_{\sigma(ES)} \preccurlyeq \sigma$ por la Proposición 1.2.9 y $\alpha^{ES}_{S} \preccurlyeq \alpha^{ES}_{\sigma(ES)}$ por la Proposición 1.2.5, entonces $\alpha^{ES}_{S} \preccurlyeq \sigma$. Veamos que α^{ES}_{S} es átomo de R-pr para cada $S \in R$-Simp. Sea $\tau \in R$-pr tal que $\tau \prec \alpha^{ES}_{S}$. Como $\alpha^{ES}_{S}(ES) = S$, entonces $\tau(ES) = 0$ o S. Por la Proposición 1.2.9 y por cómo se eligió a τ, es necesario que $\tau(ES) = 0$. Por otro lado, si $T \in R$-Simp y T no es isomorfo a S, entonces $\alpha^{ES}_{S}(ET) = 0$ gracias al Lema 1.2.24. Luego, $\tau(ET) = 0$. Concluimos que $\tau = 0$ en vista de la Proposición 1.1.11. Así, hemos probado que R-pr es una gran retícula atómica y el conjunto de átomos es $\{\alpha^{ES}_{S} \mid S \in R\text{-Simp}\}$.

Para la segunda parte considere $1 \neq \sigma \in R$-pr. Entonces $\sigma(R) \neq R$ por la Proposición 1.1.12. Por una aplicación inmediata del Lema de Zorn, se obtiene la existencia de un ideal máximo I de R tal que $\sigma(R) \leqslant I$. Sabemos que I es totalmente invariante en R por el Corolario 1.2.8. Luego, $\omega^{R}_{\sigma(R)} \preccurlyeq \omega^{R}_{I}$ por la Proposición 1.2.5, y como $\sigma \preccurlyeq \omega^{R}_{\sigma(R)}$, entonces $\sigma \preccurlyeq \omega^{R}_{I}$. Veamos que ω^{R}_{I} es coátomo de R-pr para cada I ideal máximo de R. Sea $\tau \in R$-pr tal que $\omega^{R}_{I} \prec \tau$. Entonces $I = \omega^{R}_{I}(R) \leqslant \tau(R)$. Por la Proposición 1.2.9 y por como se eligió a τ, es necesario que $\tau(R) \neq I$. Luego, $\tau(R) = R$ por ser I máximo en R. Concluimos que $\tau = 1$ en vista de la Proposición 1.1.12. Así, hemos probado que R-pr es una gran retícula coatómica y el conjunto de coátomos es $\{\omega^{R}_{I} \mid I \text{ es ideal máximo de } R\}$. ■

Finalizamos esta sección proporcionando una muy útil forma de calcular los prerradicales α^{M}_{N} y ω^{M}_{N} cuando los módulos N y M son sumas directas o productos.

Proposición 1.2.26. *Sean $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq R$-Mod y $N_i \leqslant M_i$ para cada $i \in I$. Considere $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$, $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, $N' = \prod_{i\in I} N_i$ y $M' = \prod_{i\in I} M_i$.*

i) Si $N \leqslant_{ti} M$, entonces $N_i \leqslant_{ti} M_i$ para cada $i \in I$, $\alpha^{M}_{N} = \bigvee_{i\in I} \alpha^{M_i}_{N_i}$ y $\omega^{M}_{N} = \bigwedge_{i\in I} \omega^{M_i}_{N_i}$.

ii) Si $N' \leqslant_{ti} M'$, entonces $N_i \leqslant_{ti} M_i$ para cada $i \in I$ y $\omega^{M'}_{N'} = \bigwedge_{i\in I} \omega^{M_i}_{N_i}$.

Dem. Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos, $N_i \leqslant M_i$ para cada $i \in I$ y N, M, N' y M' como en el enunciado del teorema.

i) Suponga que $N \leqslant_{ti} M$ y sean $j \in I$ y $f_j \in End_R(M_j)$. Defina $h_i = 0 \in End_R(M_i)$ para cada $i \neq j$, $h_j = f_j$ y $f = \oplus_{i\in I} h_i \in End_R(M)$. También considere $u_i : M_i \to M$ la inclusión canónica y $\pi_i : M \to M_i$ la proyección canónica para cada $i \in I$. Como $u_j(N_j) \leqslant N \leqslant_{ti} M$, entonces $f(u_j(N_j)) \leqslant N$. Luego, $f_j(N_j) = h_j(N_j) = \pi_j f u_j(N_j) = \pi_j(f(u_j(N_j))) \leqslant \pi_j(N) = N_j$. Esto prueba que N_j es totalmente invariante en M_j. Como j fue arbitrario, $N_i \leqslant_{ti} M_i$ para cada $i \in I$. Para ver que $\alpha^{M}_{N} = \bigvee_{i\in I} \alpha^{M_i}_{N_i}$, sean $K \in R$-Mod, $g \in Hom_R(M, K)$, $j \in I$ y $g_j \in Hom_R(M_j, K)$. Entonces $g(N) = g(\sum_{i\in I} u_i(N_i)) = \sum_{i\in I} g u_i(N_i) \leqslant \sum_{i\in I} \alpha^{M_i}_{N_i}(K)$ y $g_j(N_j) = g_j(\pi_j(N)) = g_j \pi_j(N) \leqslant \alpha^{M}_{N}(K)$, de donde $\alpha^{M_j}_{N_j}(K) \leqslant \alpha^{M}_{N}(K) \leqslant (\bigvee_{i\in I} \alpha^{M_i}_{N_i})(K)$. Como K y j

fueron arbitrarios, $\bigvee_{i\in I}\alpha_{N_i}^{M_i}\preccurlyeq\alpha_N^M\preccurlyeq\bigvee_{i\in I}\alpha_{N_i}^{M_i}$ y tenemos la igualdad. Para ver que $\omega_N^M=\bigwedge_{i\in I}\omega_{N_i}^{M_i}$, sean $K\in R$-Mod, $j\in I$, $g_j\in Hom_R(K,M_j)$ y $g\in Hom_R(K,M)$. Entonces $\omega_N^M(K)\leqslant(u_jg_j)^{-1}(N)=g_j{}^{-1}(N_j)$ y $\bigcap_{i\in I}\omega_{N_i}^{M_i}(K)\leqslant\bigcap_{i\in I}(\pi_ig)^{-1}(N_i)=\bigcap_{i\in I}g^{-1}(N)=g^{-1}(N)$, de donde $(\bigwedge_{i\in I}\omega_{N_i}^{M_i})(K)\leqslant\omega_N^M(K)\leqslant\omega_{N_j}^{M_j}(K)$. Como K y j fueron arbitrarios, $\bigwedge_{i\in I}\omega_{N_i}^{M_i}\preccurlyeq\omega_N^M\preccurlyeq\bigwedge_{i\in I}\omega_{N_i}^{M_i}$ y tenemos la igualdad.

ii) Suponga que $N'\leqslant_{ti}M'$ y sean $j\in I$ y $f_j\in End_R(M_j)$. Defina $h_i=0\in End_R(M_i)$ para cada $i\neq j$, $h_j=f_j$ y $f=\otimes_{i\in I}h_i\in End_R(M')$. También considere $u_i:M_i\to M'$ la inclusión canónica y $\pi_i:M'\to M_i$ la proyección canónica para cada $i\in I$. Como $u_j(N_j)\leqslant N'\leqslant_{ti}M'$, entonces $f(u_j(N_j))\leqslant N'$. Luego, $f_j(N_j)=h_j(N_j)=\pi_jfu_j(N_j)=\pi_j(f(u_j(N_j)))\leqslant\pi_j(N')=N_j$. Esto prueba que N_j es totalmente invariante en M_j. Como j fue arbitrario, $N_i\leqslant_{ti}M_i$ para cada $i\in I$. Para ver que $\omega_{N'}^{M'}=\bigwedge_{i\in I}\omega_{N_i}^{M_i}$, sean $K\in R$-Mod, $j\in I$, $g_j\in Hom_R(K,M_j)$ y $g\in Hom_R(K,M')$. Entonces $\omega_{N'}^{M'}(K)\leqslant(u_jg_j)^{-1}(N')=g_j{}^{-1}(N_j)$ y $\bigcap_{i\in I}\omega_{N_i}^{M_i}(K)\leqslant\bigcap_{i\in I}(\pi_ig)^{-1}(N_i)=\bigcap_{i\in I}g^{-1}(N')=g^{-1}(N')$, de donde $(\bigwedge_{i\in I}\omega_{N_i}^{M_i})(K)\leqslant\omega_{N'}^{M'}(K)\leqslant\omega_{N_j}^{M_j}(K)$. Como K y j fueron arbitrarios, $\bigwedge_{i\in I}\omega_{N_i}^{M_i}\preccurlyeq\omega_{N'}^{M'}\preccurlyeq\bigwedge_{i\in I}\omega_{N_i}^{M_i}$ y tenemos la igualdad. ■

1.3. Operadores en R-pr

En esta sección construiremos dos operadores de prerradicales con algunas propiedades interesantes y los calcularemos en los prerradicales alfa y omega. Primero veamos una consecuencia de las Proposiciones 1.2.15, 1.2.18 y 1.2.22.

Proposición 1.3.1. *En R-pr las clases de prerradicales idempotentes y de t-radicales son cerradas bajo supremos arbitrarios y las clases de radicales y prerradicales exactos izquierdos son cerradas bajo ínfimos arbitrarios.*

Dem. Sea $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq R$-pr.

Suponga que σ_α es idempotente para cada $\alpha\in I$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha=\bigvee_{\alpha\in I}(\sigma_\alpha\sigma_\alpha)\preccurlyeq\bigvee_{\alpha\in I}(\sigma_\alpha\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)=(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)\preccurlyeq\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha.$$

Esto muestra que $\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ es idempotente.

Suponga que σ_α es t-radical para cada $\alpha\in I$. Entonces

$$\begin{aligned}(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(M)=\sum_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M)=\sum_{\alpha\in I}(\sigma_\alpha(R)M)=(\sum_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(R))M\\ =(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(R)M \text{ para cada } M\in R\text{-Mod}.\end{aligned}$$

Esto muestra que $\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ es t-radical.

Suponga que σ_α es radical para cada $\alpha \in I$. Entonces

$$(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha : \bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha) = \bigwedge_{\alpha\in I}(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha : \sigma_\alpha) \preccurlyeq \bigwedge_{\alpha\in I}(\sigma_\alpha\colon \sigma_\alpha) = \bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha \preccurlyeq (\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha : \bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha).$$

Esto muestra que $\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ es radical.

Suponga que σ_α es exacto izquierdo para cada $\alpha \in I$. Entonces

$$\begin{aligned}(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(N) &= \bigcap_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(N) = \bigcap_{\alpha\in I}(\sigma_\alpha(M)\cap N) = (\bigcap_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M))\cap N\\ &= (\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(M)\cap N \text{ para cada } M\in R\text{-Mod y } N\leqslant M.\end{aligned}$$

Esto muestra que $\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ es exacto izquierdo. ■

Ya podemos dar una caracterización de los principales tipos de prerradicales en términos reticulares.

Proposición 1.3.2. *Sea $\sigma \in R$-pr.*

i) α_M^M es idempotente para cada $M \in R$-Mod. Más aún, σ es idempotente sii $\sigma = \bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma}\alpha_M^M$.

ii) ω_0^M es radical para cada $M \in R$-Mod. Más aún, σ es radical sii $\sigma = \bigwedge_{M\in\mathbb{F}_\sigma}\omega_0^M$.

iii) ω_K^E es exacto izquierdo para cada $E \in \mathcal{E}$ y $K\leqslant_{ti}E$. Más aún, σ es exacto izquierdo sii $\sigma = \bigwedge_{E\in\mathcal{E}}\omega_{\sigma(E)}^E$.

iv) ω_0^E es radical exacto izquierdo para cada $E \in \mathcal{E}$. Más aún, σ es radical exacto izquierdo sii $\sigma = \bigwedge_{E\in\mathbb{F}_\sigma\cap\mathcal{E}}\omega_0^E$.

Dem. Sea σ prerradical sobre R.

i) Veamos que α_M^M es idempotente para cada $M \in R$-Mod. Considere $K \in R$-Mod. Por la definición de $\alpha_M^M(K)$ tenemos que $Hom_R(M,K) = Hom_R(M,\alpha_M^M(K))$. Entonces $\alpha_M^M\alpha_M^M(K) = \alpha_M^M(\alpha_M^M(K)) = \sum_{f\in Hom_R(M,\alpha_M^M(K))} f(N) = \sum_{f\in Hom_R(M,K)} f(N) = \alpha_M^M(K)$. Como K fue arbitrario, α_M^M es idempotente.

Probemos que σ es idempotente sii $\sigma = \bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma}\alpha_M^M$. Suponga primero que σ es idempotente. Por un lado, $\alpha_M^M \preccurlyeq \sigma$ para cada $M \in \mathbb{T}_\sigma$. Por tanto, $\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma}\alpha_M^M \preccurlyeq \sigma$. Por otro lado, si $K \in R$-Mod, entonces $\sigma(\sigma(K)) = \sigma(K)$ y $\sigma(K) = \alpha_{\sigma(K)}^{\sigma(K)}(\sigma(K)) \leqslant \alpha_{\sigma(K)}^{\sigma(K)}(K)$. Luego, $\sigma(K) \leqslant (\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma}\alpha_M^M)(K)$. Como K fue arbitrario, $\sigma \preccurlyeq \bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma}\alpha_M^M$ y obtenemos la igualdad buscada. Recíprocamente, suponga que $\sigma = \bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma}\alpha_M^M$. De la primer parte y por la Proposición 1.3.1, σ es idempotente.

ii) Veamos que ω_0^M es radical para cada $M \in R$-Mod. Considere $K \in R$-Mod y $k + \omega_0^M(K) \in \omega_0^M(\frac{K}{\omega_0^M(K)})$. Suponga que $k \notin \omega_0^M(K)$. Entonces existe $g \in Hom_R(K, M)$ tal que $g(k) \neq 0$. Sean $\eta : K \to \frac{K}{\omega_0^M(K)}$ el mapa cociente y $\bar{g} \in Hom_R(\frac{K}{\omega_0^M(K)}, M)$ tal que $g = \bar{g}\eta$ (Teorema del Factor). Observe que $\bar{g}(k+\omega_0^M(K))) = 0$ pues $k+\omega_0^M(K) \in \omega_0^M(\frac{K}{\omega_0^M(K)}) = \bigcap_{f\in Hom_R(\frac{K}{\omega_0^M(K)},M)} kerf$. Entonces $0 \neq g(k) = \bar{g}\eta(k) = \bar{g}(\eta(k)) = \bar{g}(k + \omega_0^M(K)) = 0$, lo cual no puede ser. Por tanto, $k \in \omega_0^M(K)$. Luego, $\omega_0^M(\frac{K}{\omega_0^M(K)}) = 0$. Como K fue arbitrario, ω_0^M es radical.

Probemos que σ es radical sii $\sigma = \bigwedge_{M\in\mathbb{F}_\sigma} \omega_0^M$. Suponga primero que σ es radical. Por un lado, $\sigma \preccurlyeq \omega_0^M$ para cada $M \in \mathbb{F}_\sigma$. Por tanto, $\sigma \preccurlyeq \bigwedge_{M\in\mathbb{F}_\sigma} \omega_0^M$. Por otro lado, si $K \in R$-Mod, entonces $\frac{K}{\sigma(K)} \in \mathbb{F}_\sigma$ y $\omega_0^{K/\sigma(K)}(K) = \bigcap_{f\in Hom_R(K,\frac{K}{\sigma(K)})} kerf \leqslant ker\eta = \sigma(K)$, donde $\eta : K \to \frac{K}{\sigma(K)}$ es el mapa cociente. Luego, $(\bigwedge_{M\in\mathbb{F}_\sigma} \omega_0^M)(K) \leqslant \omega_0^{K/\sigma(K)}(K) \leqslant \sigma(K)$. Como K fue arbitrario, $\bigwedge_{M\in\mathbb{F}_\sigma} \omega_0^M \preccurlyeq \sigma$ y obtenemos la igualdad buscada. Recíprocamente, suponga que $\sigma = \bigwedge_{M\in\mathbb{F}_\sigma} \omega_0^M$. De la primer parte y por la Proposición 1.3.1, σ es radical.

iii) Veamos que ω_K^E es exacto izquierdo para cada $E \in \mathcal{E}$ y $K \leqslant_{ti} E$. Considere $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$. Ya sabemos que $\omega_K^E(N) \leqslant \omega_K^E(M) \cap N$. Para la otra desigualdad, sean $x \in \omega_K^E(M) \cap N$ y $f \in Hom_R(N, E)$. Entonces $x \in N \cap g^{-1}(K)$ para cada $g \in Hom_R(M, E)$. Por otra parte, como E es inyectivo, existe $\bar{f} \in Hom_R(M, E)$ tal que $\bar{f} \restriction_N = f$. Así, $x \in N \cap \bar{f}^{-1}(K)$ y entonces $f(x) = \bar{f}(x) \in K$. Luego, $x \in f^{-1}(K)$ y como f fue arbitrario, $x \in \omega_K^E(N)$. Concluimos que $\omega_K^E(M) \cap N \leqslant \omega_K^E(N)$ y obtenemos la igualdad. Como M y $N \leqslant M$ fueron arbitrarios, ω_K^E es exacto izquierdo.

Probemos que σ es exacto izquierdo sii $\sigma = \bigwedge_{E\in\mathcal{E}} \omega_{\sigma(E)}^E$. Suponga primero que σ es exacto izquierdo. Por un lado, $\sigma \preccurlyeq \omega_{\sigma(E)}^E$ para cada $E \in \mathcal{E}$. Por tanto, $\sigma \preccurlyeq \bigwedge_{E\in\mathcal{E}} \omega_{\sigma(E)}^E$. Por otro lado, si $K \in R$-Mod, entonces $\sigma(K) = \sigma(EK) \cap K = \iota^{-1}(\sigma(EK))$, donde $\iota : K \to EK$ es la inclusión. Luego, $(\bigwedge_{E\in\mathcal{E}} \omega_{\sigma(E)}^E)(K) \leqslant \omega_{\sigma(EK)}^{EK}(K) \leqslant \sigma(K)$. Como K fue arbitrario, $\bigwedge_{E\in} \omega_{\sigma(E)}^E \preccurlyeq \sigma$ y obtenemos la igualdad buscada. Recíprocamente, suponga que $\sigma = \bigwedge_{E\in\mathcal{E}} \omega_{\sigma(E)}^E$. De la primer parte y por la Proposición 1.3.1, σ es exacto izquierdo.

iv) Que ω_0^E sea radical exacto izquierdo para cada $E \in \mathcal{E}$ es claro de *ii*) y de *iii*).

Probemos que σ es radical exacto izquierdo sii $\sigma = \bigwedge_{E\in\mathbb{F}_\sigma\cap\mathcal{E}} \omega_0^E$. Suponga primero que σ es radical exacto izquierdo. Por un lado, $\sigma \preccurlyeq \omega_0^E$ para cada $E \in \mathbb{F}_\sigma \cap \mathcal{E}$. Por tanto, $\sigma \preccurlyeq \bigwedge_{E\in\mathbb{F}_\sigma\cap\mathcal{E}} \omega_0^E$. Por otro lado, si $K \in R$-Mod, entonces $\frac{K}{\sigma(K)} \in \mathbb{F}_\sigma$ y $\sigma(\frac{K}{\sigma(K)}) = \sigma(E\frac{K}{\sigma(K)}) \cap \frac{K}{\sigma(K)}$. Por ser $\frac{K}{\sigma(K)} \leqslant_e E\frac{K}{\sigma(K)}$, tenemos que $\sigma(E\frac{K}{\sigma(K)}) = 0$. Luego, $(\bigwedge_{E\in\mathbb{F}_\sigma\cap\mathcal{E}} \omega_0^E)(K) \leqslant \omega_0^{EK/\sigma(K)}(K) = \bigcap_{f\in Hom_R(K,E\frac{K}{\sigma(K)})} kerf \leqslant ker\eta = \sigma(K)$, donde

$\eta : K \to \frac{K}{\sigma(K)}$ es el mapa cociente. Como K fue arbitrario, $\bigwedge_{E\in\mathbb{F}_\sigma\cap\mathcal{E}} \omega_0^E \preccurlyeq \sigma$ y obtenemos la igualdad buscada. Recíprocamente, suponga que $\sigma = \bigwedge_{E\in\mathbb{F}_\sigma\cap\mathcal{E}} \omega_0^E$. De la primera parte y por la Proposición 1.3.1, σ es radical exacto izquierdo. ■

Para la construcción de los operadores mencionados al inicio de la sección necesitamos un par de clases de prerradicales.

Definición 1.3.3. *Sea $\sigma \in R$-pr. Definimos las clases de prerradicales e_σ=$\{\tau \in R\text{-pr} \mid \tau\sigma = \sigma\}$ y c_σ=$\{\tau \in R\text{-pr} \mid (\sigma : \tau) = \sigma\}$.*

El siguiente resultado es una sencilla aplicación de la Proposición 1.2.22.

Proposición 1.3.4. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces e_σ y c_σ son cerradas bajo ínfimos y supremos arbitrarios.*

Dem. Sea σ prerradical sobre R.

Considere $\Gamma \subseteq e_\sigma$.

$$(\bigwedge_{\tau\in\Gamma} \tau)\sigma = \bigwedge_{\tau\in\Gamma} \tau\sigma = \bigwedge_{\tau\in\Gamma} \sigma = \sigma.$$

$$(\bigvee_{\tau\in\Gamma} \tau)\sigma = \bigvee_{\tau\in\Gamma} \tau\sigma = \bigvee_{\tau\in\Gamma} \sigma = \sigma.$$

Considere $\Gamma \subseteq c_\sigma$.

$$(\sigma : \bigwedge_{\tau\in\Gamma} \tau) = \bigwedge_{\tau\in\Gamma} (\sigma : \tau) = \bigwedge_{\tau\in\Gamma} \sigma = \sigma.$$

$$(\sigma : \bigvee_{\tau\in\Gamma} \tau) = \bigvee_{\tau\in\Gamma} (\sigma : \tau) = \bigvee_{\tau\in\Gamma} \sigma = \sigma. \quad \blacksquare$$

Finalmente construimos al par de operadores.

Definición 1.3.5. *Sea $\sigma \in R$-pr. Definimos el igualador de σ como $e(\sigma) = \bigwedge e_\sigma$ y el coigualador de σ como $c(\sigma) = \bigvee c_\sigma$.*

Observación 1.3.6. *Por la Proposición 1.3.4, se tiene que $e(\sigma)\sigma = \sigma$ y $(\sigma : c(\sigma)) = \sigma$. Obviamente $e(\sigma)$ es el ínfimo de e_σ y $c(\sigma)$ es el supremo de c_σ.*

Proposición 1.3.7. *Sea $\sigma \in R$-pr.*

i) a) $\sigma \preccurlyeq e(\sigma)$.
b) $e(\sigma)$ es prerradical idempotente.
c) $e(\sigma) = \sigma$ sii σ es idempotente.
d) $e(\sigma) = \bigvee_{M\in R\text{-}Mod} \alpha_{\sigma(M)}^{\sigma(M)}$.

ii) a) $c(\sigma) \preccurlyeq \sigma$.
b) $c(\sigma)$ *es radical.*
c) $c(\sigma) = \sigma$ *sii* σ *es radical.*
d) $c(\sigma) = \bigwedge_{M\in R\text{-}Mod} \omega_0^{M/N}$.

Dem. Sea σ prerradical sobre R.

i) a) Tenemos que $\sigma = e(\sigma)\sigma \preccurlyeq e(\sigma)$.

b) Note que $(e(\sigma)e(\sigma))\sigma = e(\sigma)(e(\sigma)\sigma) = e(\sigma)\sigma = \sigma$, por lo que $e(\sigma)e(\sigma) \in e_\sigma$. Así, $e(\sigma) \preccurlyeq e(\sigma)e(\sigma) \preccurlyeq e(\sigma)$ y entonces $e(\sigma)$ es idempotente.

c) Si $e(\sigma) = \sigma$, entonces σ es idempotente por *b)*. Recíprocamente, si σ es idempotente, entonces $\sigma \in e_\sigma$. Luego, $e(\sigma) \preccurlyeq \sigma$. Por *a)* se sigue que $e(\sigma) = \sigma$.

d) Por *b)*, $e(\sigma)$ es idempotente. Entonces $\bigvee_{N\in\mathbb{T}_{e(\sigma)}} \alpha_N^N = e(\sigma)$ en vista de la Proposición 1.3.2 (*i*). Sabemos que $\sigma(M) \in \mathbb{T}_{e(\sigma)}$ para cada $M \in R$-Mod. Por ello, $\alpha_{\sigma(M)}^{\sigma(M)} \preccurlyeq \bigvee_{\sigma\in\mathbb{T}_{e(\sigma)}} \alpha_N^N = e(\sigma)$. Luego, $\bigvee_{M\in R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^{\sigma(M)} \preccurlyeq e(\sigma)$. Ahora, si $K \in R$-Mod, entonces $\sigma(K) = \alpha_{\sigma(K)}^{\sigma(K)}(\sigma(K)) = (\alpha_{\sigma(K)}^{\sigma(K)}\sigma)(K)$. En particular, $\sigma(K) = (\alpha_{\sigma(K)}^{\sigma(K)}\sigma)(K) \leqslant (\bigvee_{M\in R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^{\sigma(M)}\sigma)(K)$. Por ello, $\sigma \preccurlyeq \bigvee_{M\in R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^{\sigma(M)}\sigma = (\bigvee_{M\in R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^{\sigma(M)})\sigma \preccurlyeq \sigma$. Por tanto, $\bigvee_{M\in R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^{\sigma(M)} \in e_\sigma$ y entonces $e(\sigma) \preccurlyeq \bigvee_{M\in R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^{\sigma(M)}$. Concluimos que $e(\sigma) = \bigvee_{M\in R\text{-Mod}} \alpha_{\sigma(M)}^{\sigma(M)}$.

ii) a) Tenemos que $c(\sigma) \preccurlyeq (\sigma : c(\sigma)) = \sigma$.

b) Note que $(\sigma : (c(\sigma) : c(\sigma))) = ((\sigma : c(\sigma)) : c(\sigma)) = (\sigma : c(\sigma)) = \sigma$, por lo que $(c(\sigma) : c(\sigma)) \in c_\sigma$. Así, $c(\sigma) \preccurlyeq (c(\sigma) : c(\sigma)) \preccurlyeq c(\sigma)$ y entonces $c(\sigma)$ es radical.

c) Si $c(\sigma) = \sigma$, entonces σ es radical por *b)*. Recíprocamente, si σ es radical, entonces $\sigma \in c_\sigma$. Luego, $\sigma \preccurlyeq c(\sigma)$. Por *a)* se sigue que $c(\sigma) = \sigma$.

d) Para cada $M \in R$-Mod sabemos que $\frac{M}{\sigma(M)} \in \mathbb{F}_{c(\sigma)}$. Por ello, $c(\sigma) \preccurlyeq \omega_0^{M/\sigma(M)}$. Luego, $c(\sigma) \preccurlyeq \bigwedge_{M\in R\text{-Mod}} \omega_0^{M/\sigma(M)}$. Ahora, si $K \in R$-Mod, entonces $\frac{(\sigma:\omega_0^{K/\sigma(K)})(K)}{\sigma(K)} = \omega_0^{K/\sigma(K)}(\frac{K}{\sigma(K)}) = 0$, o equivalentemente, $(\sigma : \omega_0^{K/\sigma(M)})(K) = \sigma(K)$. En particular, tenemos que $(\sigma : \bigwedge_{M\in R-Mod} \omega_0^{M/\sigma(M)})(K) \leqslant (\sigma : \omega_0^{K/\sigma(K)})(K) = \sigma(K)$. De esto se sigue que $\sigma \preccurlyeq \bigwedge_{M\in R\text{-Mod}} (\sigma : \omega_0^{M/\sigma(M)}) = (\sigma : \bigwedge_{M\in R\text{-Mod}} \omega_0^{M/\sigma(M)}) \preccurlyeq \sigma$. Por tanto, $\bigwedge_{M\in R\text{-Mod}} \omega_0^{M/\sigma(M)} \in c_\sigma$ y entonces $\bigwedge_{M\in R\text{-Mod}} \omega_0^{M/\sigma(M)} \preccurlyeq c(\sigma)$. Concluimos que $c(\sigma) = \bigwedge_{M\in R\text{-Mod}} \omega_0^{M/N}$. ■

Finalizamos esta sección con el cálculo del igualador de un prerradical alfa y el cálculo del coigualador de un prerradical omega.

Proposición 1.3.8. *Sean $M \in R$-Mod y $N \leqslant_{ti} M$. Entonces:*

i) $e(\alpha_N^M) = \alpha_N^N$.

ii) $c(\omega_N^M) = \omega_0^{M/N}$.

Dem. Sean M un R-módulo y $N \leqslant_{ti} M$.

i) Tenemos que $\alpha_N^N = \alpha_{\alpha_N^M(M)}^{\alpha_N^M(M)} \preccurlyeq \bigvee_{K\in R\text{-Mod}} \alpha_{\alpha_N^M(K)}^{\alpha_N^M(K)}$. Entonces $\alpha_N^N \preccurlyeq e(\alpha_N^M)$ por la Proposición 1.3.7 (i) (d). Por otro lado, $\alpha_N^N \alpha_N^M \preccurlyeq \alpha_N^M$ y $\alpha_N^N \alpha_N^M(M) = \alpha_N^N(N) = N$. De esta última igualdad obtenemos que $\alpha_N^M \preccurlyeq \alpha_N^N \alpha_N^M$. Por tanto, $\alpha_N^N \alpha_N^M = \alpha_N^M$, es decir, $\alpha_N^N \in e_{\alpha_N^M}$. Luego, $e(\alpha_N^M) \preccurlyeq \alpha_N^N$. Concluimos que $e(\alpha_N^M) = \alpha_N^N$.

ii) Tenemos que $\bigwedge_{K\in R\text{-Mod}} \omega_0^{K/\omega_N^M(K)} \preccurlyeq \omega_0^{M/\omega_N^M(M)} = \omega_0^{M/N}$. Entonces $c(\omega_N^M) \preccurlyeq \omega_0^{M/N}$ por la Proposición 1.3.7 (ii) (d). Por otro lado, $\omega_N^M \preccurlyeq (\omega_N^M : \omega_0^{M/N})$ y $\frac{(\omega_N^M : \omega_0^{M/N})(M)}{N} = \frac{(\omega_N^M : \omega_0^{M/N})(M)}{\omega_N^M(M)} = \omega_0^{M/N}(\frac{M}{\omega_N^M(M)}) = \omega_0^{M/N}(\frac{M}{N}) = 0$, es decir, $(\omega_N^M : \omega_0^{M/N})(M) = N$. De esta última igualdad obtenemos que $(\omega_N^M : \omega_0^{M/N}) \preccurlyeq \omega_N^M$. Por tanto, $(\omega_N^M : \omega_0^{M/N}) = \omega_N^M$, es decir, $\omega_0^{M/N} \in c_{\omega_N^M}$. Luego, $\omega_0^{M/N} \preccurlyeq c(\omega_N^M)$. Concluimos que $c(\omega_N^M) = \omega_0^{M/N}$. ■

1.4. Pseudocomplementos en R-pr

Para facilitar el desarrollo de algunas pruebas en esta sección conviene dar la siguiente definición.

Definición 1.4.1. *Sea $\sigma \in R$-pr. Definimos $S_\sigma = \{S \in R\text{-Simp} \mid \sigma(ES) \neq 0\}$.*

La definición principal en esta sección es la de pseudocomplemento de un prerradical y se extrapola directamente de la definición análoga para módulos.

Definición 1.4.2. *Sea $\sigma \in R$-pr. Un pseudocomplemento para σ es un elemento $\sigma' \in R$-pr tal que:*

1. $\sigma \wedge \sigma' = 0$

2. *Para cada $\tau \in R$-pr tal que $\sigma' \prec \tau$, se tiene $\sigma \wedge \tau \neq 0$.*

A priori, no hay garantía de que cada elemento de R-pr tenga un pseudocomplemento. Más aún, incluso en el caso de que un pseudocomplemento exista para cada prerradical, éste no tiene por que ser único. Como sea, tenemos el siguiente hecho notable.

Teorema 1.4.3. *Cada $\sigma \in R$-pr tiene un pseudocomplemento $\sigma^\perp$ único con la propiedad de que si $\tau \in R$-pr y $\sigma \wedge \tau = 0$, entonces $\tau \preccurlyeq \sigma^\perp$.*

Dem. Sea $\sigma \in R$-pr y defina $\sigma^\perp = \bigwedge_{S \in S_\sigma} \omega_0^{ES}$. Antes de verificar que $\sigma^\perp$ es un pseudocomplemento para σ, probemos que cumple la propiedad mencionada en el enunciado del teorema. Sean $\tau \in R$-pr tal que $\sigma \wedge \tau = 0$ y $S \in S_\sigma$. Entonces $\sigma(ES) \cap \tau(ES) = (\sigma \wedge \tau)(ES) = 0$ y $\sigma(ES) \neq 0$. Dado que $\sigma(ES) \leqslant_e ES$ por el Lema 1.2.23, tenemos que $\tau(ES) = 0$, y con ello, que $\tau \preccurlyeq \omega_0^{ES}$. Luego, $\tau \preccurlyeq \bigwedge_{S \in S_\sigma} \omega_0^{ES} = \sigma^\perp$. Ya podemos ver que $\sigma^\perp$ es un pseudocomplemento para σ. Sea $T \in R$-Simp. Si $\sigma(ET) = 0$, entonces $(\sigma \wedge \sigma^\perp)(ET) \leqslant \sigma(ET) = 0$; si $\sigma(ET) \neq 0$, entonces $T \in S_\sigma$, y por ello $(\sigma \wedge \sigma^\perp)(ET) \leqslant \sigma^\perp(ET) \leqslant \omega_0^{ET}(ET) = 0$. En cualquier caso, $(\sigma \wedge \sigma^\perp)(ET) = 0$. Como $T \in R$-Simp fue arbitrario, $\sigma \wedge \sigma^\perp = 0$ por la Proposición 1.1.11. Ahora, sea $\tau \in R$-pr tal que $\sigma^\perp \prec \tau$ y suponga que $\sigma \wedge \tau = 0$. Entonces $\tau \preccurlyeq \sigma^\perp$ por lo primero que se hizo en la demostración. Por cómo se eligió a τ, esto no puede ser. Por tanto, $\sigma \wedge \tau \neq 0$. Concluimos que $\sigma^\perp$ es un pseudocomplemento para σ. Falta ver que $\sigma^\perp$ queda determinado por la propiedad mencionada en el enunciado del teorema de manera única. Suponga que η es un pseudocomplemento para σ y también cumple esa propiedad. Tenemos que $\sigma \wedge \sigma^\perp = 0$ y $\sigma \wedge \eta = 0$. Entonces $\sigma^\perp \preccurlyeq \eta$ y $\eta \preccurlyeq \sigma^\perp$, por lo que $\eta = \sigma^\perp$. ■

Observación 1.4.4. *Sea $\sigma \in R$-pr. Al pseudocomplemento para σ que se construye en el Teorema 1.4.3 se denotará siempre con $\sigma^\perp$.*

Continuemos la discusión de los pseudocomplementos proporcionando algunas de sus propiedades básicas.

Proposición 1.4.5. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $\sigma^\perp$ es radical exacto izquierdo sobre R.*

Dem. Sea $\sigma \in R$-pr. Sabemos que ω_0^{ES} es radical exacto izquierdo sobre R para cada $S \in S_\sigma$ por la Proposición 1.3.2. Como las clases de radicales y prerradicales exactos izquierdos son cerradas bajo ínfimos arbitrarios por la Proposición 1.3.1, tenemos que $\sigma^\perp = \bigwedge_{S \in S_\sigma} \omega_0^{ES}$ es radical exacto izquierdo sobre R. ■

Proposición 1.4.6. *Sean $\sigma, \tau \in R$-pr y $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq R$-pr.*

i) Si $\sigma \preccurlyeq \tau$, entonces $\tau^\perp \preccurlyeq \sigma^\perp$.

ii) $\sigma \preccurlyeq \sigma^{\perp\perp}$.

iii) $\sigma^\perp = \sigma^{\perp\perp\perp}$.

iv) $\bigwedge_{\alpha \in I} \sigma_\alpha^\perp = (\bigvee_{\alpha \in I} \sigma_\alpha)^\perp$.

Dem. Sean $\sigma, \tau \in R$-pr y $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq R$-pr.

i) Si $\sigma \preccurlyeq \tau$, entonces $\sigma \wedge \tau^\perp \preccurlyeq \tau \wedge \tau^\perp = 0$. Luego, $\tau^\perp \preccurlyeq \sigma^\perp$ por el Teorema 1.4.3.

ii) Como $\sigma^\perp \wedge \sigma = \sigma \wedge \sigma^\perp = 0$, entonces $\sigma \preccurlyeq \sigma^{\perp\perp}$ por el Teorema 1.4.3.

iii) Tenemos $\sigma \preccurlyeq \sigma^{\perp\perp}$ por *ii*). Entonces $\sigma^{\perp\perp\perp} \preccurlyeq \sigma^{\perp}$ por *i*) y $\sigma^{\perp} \preccurlyeq \sigma^{\perp\perp\perp}$ por *ii*). Luego, $\sigma^{\perp} = \sigma^{\perp\perp\perp}$.

iv)
$$\begin{aligned}
\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_{\alpha}^{\perp} &= \bigwedge_{\alpha\in I}\left(\bigwedge_{S\in S_{\sigma_\alpha}}\omega_0^{ES}\right)\\
&= \bigwedge\{\omega_0^{ES} \mid S \in S_{\sigma_\alpha} \text{ para algún } \alpha\in I\}\\
&= \bigwedge\{\ \omega_0^{ES} \mid S \in R\text{- Simp y } \sigma_\alpha(ES)\neq 0 \text{ para algún } \alpha\in I\}\\
&= \bigwedge\{\omega_0^{ES} \mid S \in R\text{- Simp y } \textstyle\sum_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(ES)\neq 0\}\\
&= \bigwedge\{\omega_0^{ES} \mid S \in R\text{−Simp y } (\textstyle\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(ES)\neq 0\}\\
&= \bigwedge_{S\in S_{\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha}}\omega_0^{ES}\\
&= (\textstyle\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)^{\perp}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 1.4.7. *Sean $\sigma \in R$-pr y $S \in R$-Simp. Entonces $S \in S_\sigma$ sii $S \notin S_{\sigma^\perp}$, es decir, $\sigma(ES) \neq 0$ sii $\sigma^\perp(ES) = 0$.*

Dem. Sean $\sigma \in R$-pr y $S \in R$-Simp. Si $S \in S_\sigma$, entonces $\sigma^\perp = \bigwedge_{S\in S_\sigma}\omega_0^{ES} \preccurlyeq \omega_0^{ES}$. Por tanto, $\sigma^\perp(ES) \leqslant \omega_0^{ES}(ES) = 0$ y así $S \notin S_{\sigma^\perp}$. Recíprocamente, si $S \notin S_\sigma$, entonces $(\sigma \wedge \alpha_S^{ES})(ES) = \sigma(ES) \cap \alpha_S^{ES}(ES) = 0 \cap S = 0$. Ahora, si $T \in R$-Simp y T no es isomorfo a S, entonces $(\sigma \wedge \alpha_S^{ES})(ET) = \sigma(ET) \cap \alpha_S^{ES}(ET) = \sigma(ET) \cap 0 = 0$ en vista del Lema 1.2.24. Por tanto, $\sigma \wedge \alpha_S^{ES} = 0$ por la Proposición 1.1.11, y entonces $\alpha_S^{ES} \preccurlyeq \sigma^\perp$ por el Teorema 1.4.3. Luego, $0 \neq S = \alpha_S^{ES}(ES) \leqslant \sigma^\perp(ES)$, por lo que $S \in S_{\sigma^\perp}$. $\blacksquare$

Proposición 1.4.8. *Sea $S \in R$-Simp. Entonces $(\alpha_S^{ES})^\perp = \omega_0^{ES}$.*

Dem. Sea $S \in R$-Simp. Primero note que si $\alpha_S^{ES} \wedge \omega_0^{ES} = 0$, entonces $\omega_0^{ES} \preccurlyeq (\alpha_S^{ES})^\perp$ por el Teorema 1.4.3. Por otro lado, si sucede que $(\alpha_S^{ES})^\perp(ES) = 0$, entonces $(\alpha_S^{ES})^\perp \preccurlyeq \omega_0^{ES}$. Luego, de cumplirse ambas condiciones, se sigue el lema.

Veamos que $\alpha_S^{ES} \wedge \omega_0^{ES} = 0$. Tenemos que $\alpha_S^{ES} \wedge \omega_0^{ES}(ES) \preccurlyeq \omega_0^{ES}(ES) = 0$. Ahora, si $T \in R$-Simp y T no es isomorfo a S, entonces $(\alpha_S^{ES} \wedge \omega_0^{ES})(ET) \preccurlyeq \alpha_S^{ES}(ET) = 0$ en vista del Lema 1.2.24. Luego, $\alpha_S^{ES} \wedge \omega_0^{ES} = 0$ por la Proposición 1.1.11.

Veamos que $(\alpha_S^{ES})^\perp(ES) = 0$. Como $\alpha_S^{ES}(ES) = S \neq 0$, tenemos que $S \in S_{\alpha_S^{ES}}$. Por tanto, $(\alpha_S^{ES})^\perp(ES) = (\bigwedge_{S'\in S_{\alpha_S^{ES}}}\omega_0^{ES'})(ES) \preccurlyeq \omega_0^{ES}(ES) = 0$. Luego, $(\alpha_S^{ES})^\perp(ES) = 0$. $\blacksquare$

Se puede definir una relación de equivalencia muy natural entre prerradicales usando los pseudocomplementos.

Definición 1.4.9. *Dos prerradicales $\sigma, \tau \in R$-pr están relacionados por $\sigma \sim_\perp \tau$ si $\sigma^\perp = \tau^\perp$.*

Observación 1.4.10. *$\sim_\perp$ es relación de equivalencia en R-pr. A la clase de equivalencia de $\sigma \in R$-pr se denotará por $[\sigma]_\perp$.*

Proposición 1.4.11. *Sean $\sigma, \tau \in R$-pr. Entonces $\sigma \sim_\perp \tau$ sii $S_\sigma = S_\tau$.*

Dem. Sean $\sigma, \tau \in R$-pr. Suponga que $\sigma \sim_{\perp} \tau$ y considere $S \in R$-Simp. Por la Proposición 1.4.7, $\sigma(ES) \neq 0$ sii $\sigma^{\perp}(ES) = 0 = \tau^{\perp}(ES)$ sii $\tau(ES) \neq 0$. Por tanto, $S_\sigma = S_\tau$. Recíprocamente, si $S_\sigma = S_\tau$, entonces $\sigma^{\perp} = \bigwedge_{S \in S_\sigma} \omega_0^{ES} = \bigwedge_{S \in S_\tau} \omega_0^{ES} = \tau^{\perp}$. Por tanto, $\sigma \sim_{\perp} \tau$. ■

Determinemos completamente las clases de equivalencia inducidas por $\sim_{\perp}$.

Teorema 1.4.12. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $[\sigma]_{\perp} = \left[\bigvee_{S \in S_\sigma} \alpha_S^{ES}, \sigma^{\perp\perp}\right]$.*

Dem. Sea $\sigma \in R$-pr. Si $\tau \in [\sigma]_{\perp}$, entonces $\sigma^{\perp\perp} = (\sigma^{\perp})^{\perp} = (\tau^{\perp})^{\perp} = \tau^{\perp\perp}$ y $S_\sigma = S_\tau$ por la Proposición 1.4.11, por lo que $\bigvee_{S \in S_\sigma} \alpha_S^{ES} = \bigvee_{S \in S_\tau} \alpha_S^{ES}$. Para cada $S \in S_\tau$ tenemos que $\alpha_S^{ES} \preccurlyeq \alpha_{\tau(ES)}^{ES} \preccurlyeq \tau$. Luego, $\bigvee_{S \in S_\sigma} \alpha_S^{ES} = \bigvee_{S \in S_\tau} \alpha_S^{ES} \preccurlyeq \tau$. Además, $\tau \preccurlyeq \tau^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp}$ por la Proposición 1.4.6. Por tanto, $\tau \in \left[\bigvee_{S \in S_\sigma} \alpha_S^{ES}, \sigma^{\perp\perp}\right]$. Esto prueba que $[\sigma]_{\perp} \subseteq \left[\bigvee_{S \in S_\sigma} \alpha_S^{ES}, \sigma^{\perp\perp}\right]$. Recíprocamente, si $\tau \in \left[\bigvee_{S \in S_\sigma} \alpha_S^{ES}, \sigma^{\perp\perp}\right]$, entonces $\sigma^{\perp} = \sigma^{\perp\perp\perp} = (\sigma^{\perp\perp})^{\perp} \preccurlyeq \tau^{\perp} \preccurlyeq (\bigvee_{S \in S_\sigma} \alpha_S^{ES})^{\perp} = \bigwedge_{S \in S_\sigma} (\alpha_S^{ES})^{\perp} = \bigwedge_{S \in S_\sigma} \omega_0^{ES} = \sigma^{\perp}$ por las Proposiciones 1.4.6 y 1.4.8. Por tanto, $\sigma^{\perp} = \tau^{\perp}$, es decir, $\tau \in [\sigma]_{\perp}$. Esto prueba que $\left[\bigvee_{S \in S_\sigma} \alpha_S^{ES}, \sigma^{\perp\perp}\right] \subseteq [\sigma]_{\perp}$. Concluimos que $[\sigma]_{\perp} = \left[\bigvee_{S \in S_\sigma} \alpha_S^{ES}, \sigma^{\perp\perp}\right]$. ■

Para finalizar esta sección aprovechamos en dar otra relación de equivalencia entre prerradicales y determinamos las clases de equivalencia como en el caso de los pseudocomplementos.

Definición 1.4.13. *Sea $C \subseteq R$-Mod. Dos prerradicales $\sigma, \tau \in R$-pr están relacionados por $\sigma \sim_C \tau$ si $\sigma(M) = \tau(M)$ para cada $M \in C$.*

Observación 1.4.14. *Para cada $C \subseteq R$-Mod, $\sim_C$ es una relación de equivalencia en R-pr. A la clase de equivalencia de $\sigma \in R$-pr se denotará por $[\sigma]_C$.*

Proposición 1.4.15. *Sean $C \subseteq R$-Mod y $\sigma \in R$-pr. Entonces*

$$[\sigma]_C = \left[\bigvee_{M \in C} \alpha_{\sigma(M)}^M, \bigwedge_{M \in C} \omega_{\sigma(M)}^M\right].$$

Dem. Sean $C \subseteq R$-Mod y $\sigma \in R$-pr. Si $\sigma \sim_C \tau$ y $M \in C$, entonces $\sigma(M) = \tau(M)$, de modo que $\alpha_{\sigma(M)}^M \preccurlyeq \tau \preccurlyeq \omega_{\sigma(M)}^M$. Luego, $\bigvee_{M \in C} \alpha_{\sigma(M)}^M \preccurlyeq \tau \preccurlyeq \bigwedge_{M \in C} \omega_{\sigma(M)}^M$. Recíprocamente, si $\tau \in \left[\bigvee_{M \in C} \alpha_{\sigma(M)}^M, \bigwedge_{M \in C} \omega_{\sigma(M)}^M\right]$, entonces $\sigma(M') = \alpha_{\sigma(M')}^{M'}(M') \leqslant (\bigvee_{M \in C} \alpha_{\sigma(M)}^M)(M') \leqslant \tau(M') \leqslant (\bigwedge_{M \in C} \omega_{\sigma(M)}^M)(M') \leqslant \omega_{\sigma(M')}^{M'}(M') = \sigma(M')$ para cada $M' \in C$. Por tanto, $\sigma(M') = \tau(M')$ para cada $M' \in C$. Luego, $\sigma \sim_C \tau$. ■

Capítulo 2

Módulos inyectivos principales

2.1. Construcción

Como lo indica el título de esta sección, construiremos los denominados módulos inyectivos principales. Como consecuencia, podremos refinar la descripción de los prerradicales exactos izquierdos de la Proposición 1.3.2.

Proposición 2.1.1. *Para cada $\sigma \in R$-pei existe un conjunto $\mathcal{E}_\sigma$ de módulos inyectivos tal que $\sigma = \bigwedge_{E\in\mathcal{E}_\sigma} \omega^E_{\sigma(E)}$.*

Dem. Sea $\sigma \in R$-pei. Por la Proposición 1.3.2 tenemos que $\omega^E_{\sigma(E)}$ es exacto izquierdo sobre R para cada $E \in \mathcal{E}$ y que $\sigma = \bigwedge_{E\in\mathcal{E}} \omega^E_{\sigma(E)}$. Dados $E, Q \in \mathcal{E}$, definimos $E \sim Q$ sii $\omega^E_{\sigma(E)} = \omega^Q_{\sigma(Q)}$. Es claro que $\sim$ es relación de equivalencia. Por el axioma de elección para conglomerados existe una función de elección $\epsilon : {}^{\mathcal{E}}/_{\sim} \to \mathcal{E}$ que claramente es inyectiva. Defina la función $\varphi : {}^{\mathcal{E}}/_{\sim} \to R$-pei dada por $x \mapsto \omega^{\epsilon(x)}_{\sigma(\epsilon(x))}$ y observe que $\omega^{\epsilon(x)}_{\sigma(\epsilon(x))} = \omega^{\epsilon(y)}_{\sigma(\epsilon(y))}$ sii $\epsilon(x) \sim \epsilon(y)$ sii $[\epsilon(x)] = [\epsilon(y)]$ sii $x = y$ para cualesquiera $x, y \in {}^{\mathcal{E}}/_{\sim}$, por lo que φ es inyectiva. Como R-pei es conjunto, la inyectividad de φ implica que ${}^{\mathcal{E}}/_{\sim}$ es conjunto. A su vez, la inyectividad de ϵ implica que $\mathcal{E}_\sigma = \epsilon({}^{\mathcal{E}}/_{\sim})$ también es conjunto. Este conjunto verifica que $\{\omega^E_{\sigma(E)} \mid E \in \mathcal{E}\}$=$\{\omega^E_{\sigma(E)} \mid E \in \mathcal{E}_\sigma\}$. Por tanto, $\sigma = \bigwedge_{E\in\mathcal{E}_\sigma} \omega^E_{\sigma(E)}$. ■

Desde ahora, para cada $\sigma \in R$-pei denotaremos con $\mathcal{E}_\sigma$ a un conjunto fijo de módulos inyectivos con la propiedad de la Proposición 2.1.1.

Proposición 2.1.2. *Para cada $\sigma \in R$-pei existe un módulo inyectivo E_σ tal que $\sigma = \omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)}$. De hecho, esto se cumple para cada módulo inyectivo E_σ que contenga un copia isomorfa de cada $E \in \mathcal{E}_\sigma$.*

Dem. Sean $\sigma \in R$-pei y E_σ un módulo inyectivo que contenga un copia isomorfa de cada $E \in \mathcal{E}_\sigma$. Por ejemplo, podemos tomar $E_\sigma = \prod_{E\in\mathcal{E}_\sigma} E$ o $E_\sigma = E(\bigoplus_{E\in\mathcal{E}_\sigma} E)$. Si $E \in \mathcal{E}_\sigma$, entonces $E_\sigma \cong E \bigoplus Q$ para algún $Q \in \mathcal{E}$, de modo que $\omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)} = \omega^{E\bigoplus Q}_{\sigma(E\bigoplus Q)} = \omega^{E\bigoplus Q}_{\sigma(E)\bigoplus\sigma(Q)} = \omega^E_{\sigma(E)} \wedge \omega^Q_{\sigma(Q)} \preccurlyeq \omega^E_{\sigma(E)}$ por las Proposiciones 1.2.4 y 1.2.26. Por tanto,

$\omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)} \preccurlyeq \bigwedge_{E\in\mathcal{E}_\sigma} \omega^{E}_{\sigma(E)} = \sigma$. Como $\sigma \preccurlyeq \omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)}$, concluimos que $\sigma = \omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)}$. ■

Desde ahora, para cada $\sigma \in R$-pei denotaremos con E_σ a $\prod_{E\in\mathcal{E}_\sigma} E$ y lo consideraremos como el módulo inyectivo canónico que satisface la propiedad de la Proposición 2.1.2. Ahora llegamos a la definición principal de este capítulo.

Definición 2.1.3. *Un módulo inyectivo E es llamado módulo inyectivo principal si $\sigma = \omega^{E}_{\sigma(E)}$ para cada $\sigma \in R$-pei.*

Teorema 2.1.4. *R-Mod tiene módulos inyectivos principales. De hecho, si $\bar{E}$ es un módulo inyectivo que contiene una copia isomorfa de E_σ para cada $\sigma \in R$-pei, entonces $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal.*

Dem. Sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo que contiene una copia isomorfa de E_σ para cada $\sigma \in R$-pei. Por ejemplo, podemos tomar $\bar{E} = \prod_{\sigma\in R\text{-pei}} E_\sigma$ o $\bar{E} = E(\bigoplus_{\sigma\in R\text{-pei}} E_\sigma)$ ya que R-pei es un conjunto. Si $\sigma \in R$-pei, entonces $\bar{E} \cong E_\sigma \bigoplus Q$ para algún $Q \in \mathcal{E}$, de modo que $\omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} = \omega^{E_\sigma \bigoplus Q}_{\sigma(E_\sigma \bigoplus Q)} = \omega^{E_\sigma \bigoplus Q}_{\sigma(E_\sigma)\bigoplus \sigma(Q)} = \omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)} \wedge \omega^{Q}_{\sigma(Q)} \preccurlyeq \omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)} = \sigma$ por las Proposiciones 1.2.4 y 1.2.26. Como $\sigma \preccurlyeq \omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})}$, obtenemos que $\sigma = \omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})}$. Concluimos que $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal. ■

Hay abundancia de módulos inyectivos principales en R-Mod, como la siguiente Proposición muestra.

Proposición 2.1.5. *Sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Si $\bar{\bar{E}}$ es un módulo inyectivo que contiene una copia isomorfa de $\bar{E}$, entonces $\bar{\bar{E}}$ es módulo inyectivo principal.*

Dem. Sean $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y $\bar{\bar{E}}$ un módulo inyectivo que contiene una copia isomorfa de $\bar{E}$. Entonces $\bar{\bar{E}} \cong \bar{E} \bigoplus Q$ para algún $Q \in \mathcal{E}$. Si $\sigma \in R$-pei, entonces $\omega^{\bar{\bar{E}}}_{\sigma(\bar{\bar{E}})} = \omega^{\bar{E}\bigoplus Q}_{\sigma(\bar{E}\bigoplus Q)} = \omega^{\bar{E}\bigoplus Q}_{\sigma(\bar{E})\bigoplus \sigma(Q)} = \omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} \wedge \omega^{Q}_{\sigma(Q)} \preccurlyeq \omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} = \sigma$ por las Proposiciones 1.2.4 y 1.2.26. Como $\sigma \preccurlyeq \omega^{\bar{\bar{E}}}_{\sigma(\bar{\bar{E}})}$, obtenemos que $\sigma = \omega^{\bar{\bar{E}}}_{\sigma(\bar{\bar{E}})}$. Concluimos que $\bar{\bar{E}}$ es módulo inyectivo principal. ■

Sea $E_0 = E(\bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} S)$. Sabemos que E_0 es un cogenerador inyectivo de R-Mod. Podemos construir un módulo inyectivo principal a partir de E_0 de la siguiente forma.

Proposición 2.1.6. *Sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y $\kappa = \sharp\bar{E}$. Entonces $(E_0)^\kappa$ es un módulo inyectivo principal.*

Dem. Sean $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y $\kappa = \sharp\bar{E}$. Si $0 \neq x \in \bar{E}$, $K_x \leqslant Rx$ es máximo (existe pues $0 \neq Rx$ es finitamente generado) y $f_x \in Hom_R(Rx, E_0)$ está dada por la composición $Rx \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} \frac{Rx}{K_x} \hookrightarrow E_0$, entonces existe $\bar{f}_x \in Hom_R(\bar{E}, E_0)$ tal que $\bar{f}_x \restriction_{Rx} = f_x$ por ser E_0 inyectivo. Además, note que $\bar{f}_x(x) \neq 0$. Defina $\bar{f}_0 = 0 \in Hom_R(\bar{E}, E_0)$. Entonces la familia $\{\bar{f}_x\}_{x\in\bar{E}}$ induce $f = \otimes_{x\in\bar{E}} \bar{f}_x \in Hom_R(\bar{E}, (E_0)^{\bar{E}})$ por la propiedad universal del producto. Observe que f es monomorfismo, pues si $x \neq 0$ y $\pi_x : (E_0)^{\bar{E}} \to E_0$ es la proyección canónica en la coordenada x, entonces

$\pi_x f(x) = \bar{f}_x(x) \neq 0$, es decir, $f(x) \neq 0$. Claramente $(E_0)^{\kappa} \cong (E_0)^{\bar{E}}$, por lo que $(E_0)^{\kappa}$ es un módulo inyectivo principal en vista de la Proposición 2.1.5. ■

En los ejemplos 4.1, 4.2 y 4.3 del último capítulo se intenta responder la siguiente pregunta:

Dado el anillo R, ¿ existe alguna relación entre el mínimo cardinal κ_1 tal que $(E_0)^{\kappa_1}$ es un módulo inyectivo principal y el mínimo cardinal κ_2 tal que existe un monomorfismo $R \hookrightarrow (E_0)^{\kappa_2}$?

Un análisis de cada caso muestra que no existe una relación aparente entre esos cardinales. Ahora describiremos al módulo inyectivo principal canónico de R-Mod para R neteriano o artiniano.

Caso neteriano.

Proposición 2.1.7. *Sea R anillo neteriano. Entonces todo módulo inyectivo se descompone como suma directa de módulos inyectivos inescindibles.*

Corolario 2.1.8. *Sea R anillo neteriano. Si $E \in \mathcal{E}$, entonces $E \cong \bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} Q^{(\kappa_Q)}$ para alguna familia de cardinales $\{\kappa_Q\}_{Q \in \check{\mathcal{E}}}$.* ■

Teorema 2.1.9. *Sea R anillo neteriano. Entonces $\bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} Q$ es un módulo inyectivo principal.*

Dem. Sea $\sigma \in R$-pei. Por la Proposición 2.1.2, existe $E_\sigma \in \mathcal{E}$ tal que $\sigma = \omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)}$. Como R es neteriano, existe una familia de cardinales $\{\kappa_Q\}_{Q \in \check{\mathcal{E}}}$ tal que $E_\sigma \cong \bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} Q^{(\kappa_Q)}$ por el Corolario 2.1.8. Entonces

$$\begin{aligned}
\sigma &= \omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)} = \omega^{\bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} Q^{(\kappa_Q)}}_{\sigma(\bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} Q^{(\kappa_Q)})} = \omega^{\bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} Q^{(\kappa_Q)}}_{\bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} \sigma(Q^{(\kappa_Q)})} = \bigwedge_{Q \in \check{\mathcal{E}}} \omega^{Q^{(\kappa_Q)}}_{\sigma(Q^{(\kappa_Q)})} \\
&= \bigwedge_{Q \in \check{\mathcal{E}}} \omega^{Q^{(\kappa_Q)}}_{\sigma(Q)^{(\kappa_Q)}} = \bigwedge_{Q \in \check{\mathcal{E}}} \bigwedge_{\kappa_Q} \omega^{Q}_{\sigma(Q)} = \bigwedge_{Q \in \check{\mathcal{E}}} \omega^{Q}_{\sigma(Q)} = \omega^{\bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} Q}_{\bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} \sigma(Q)} \\
&= \omega^{\bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} Q}_{\sigma(\bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} Q)}
\end{aligned}$$

en vista de las Proposiciónes 1.2.4 y 1.2.26. Concluimos que $\bigoplus_{Q \in \check{\mathcal{E}}} Q$ es un módulo inyectivo principal. ■

Caso artiniano.

Teorema 2.1.10. *Sea R anillo artiniano. Entonces todo módulo inyectivo se descompone como suma directa de cápsulas inyectivas de módulos simples.*

Corolario 2.1.11. *Sea R anillo artiniano. Si $E \in \mathcal{E}$, entonces $E \cong \bigoplus_{S \in R\text{-}Simp} ES^{(\kappa_S)}$ para alguna familia de cardinales $\{\kappa_S\}_{S \in R\text{-}Simp}$.* ■

Proposición 2.1.12. *Sea R anillo artiniano. Entonces $\bigoplus_{S\in R\text{-}Simp} ES$ es un módulo inyectivo principal.*

Dem. Sea $\sigma \in R$-pei. Por la Proposición 2.1.2, existe $E_\sigma \in \mathcal{E}$ tal que $\sigma = \omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)}$. Como R es artiniano, existe una familia de cardinales $\{\kappa_S\}_{S\in R\text{-Simp}}$ tal que $E_\sigma \cong \bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} ES^{(\kappa_S)}$ por el Coroloario 2.1.11. Entonces

$$\sigma = \omega^{E_\sigma}_{\sigma(E_\sigma)} = \omega^{\bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} S^{(\kappa_S)}}_{\sigma(\bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} S^{(\kappa_S)})} = \omega^{\bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} ES^{(\kappa_S)}}_{\bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} \sigma(ES^{(\kappa_S)})} = \bigwedge_{S\in R\text{-Simp}} \omega^{ES^{(\kappa_S)}}_{\sigma(ES^{(\kappa_S)})}$$
$$= \bigwedge_{S\in R\text{-Simp}} \omega^{ES^{(\kappa_S)}}_{\sigma(ES)^{(\kappa_S)}} = \bigwedge_{S\in R\text{-Simp}} \bigwedge_{\kappa_S} \omega^{ES}_{\sigma(ES)} = \bigwedge_{S\in R\text{-Simp}} \omega^{ES}_{\sigma(ES)} = \omega^{\bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} ES}_{\bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} \sigma(ES)}$$
$$= \omega^{\bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} ES}_{\sigma(\bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} ES)}$$

en vista de las Proposiciones 1.2.4 y 1.2.26. Concluimos que $\bigoplus_{S\in R\text{-Simp}} ES$ es un módulo inyectivo principal. ■

2.2. Propiedades

Es notable que todo módulo inyectivo principal contiene una copia isomorfa de la cápsula inyectiva de cada módulo simple, y en consecuencia que sea cogenerador inyectivo de R-Mod. Sin embargo, antes de poder demostrar estas propiedades se necesita probar primero que la cápsula inyectiva de todo simple es finitamente cogenerada y que los módulos uniformes contenidos isomórficamente en una suma directa están necesariamente contenidos isomórficamente en un sumando directo.

Proposición 2.2.1. *Sea $M \in R$-Mod. Si $Zoc(M)$ es finitamente generado y esencial en M, entonces M es finitamente cogenerado.*

Dem. Sea $\{N_\alpha\}_{i\in I} \subseteq Sub_R(M)$ tal que $\bigcap_{i\in I} N_\alpha = 0$. Observe que $N_\alpha \cap Zoc(M) \leqslant Zoc(M)$ para cada $\alpha \in I$. Además, $\bigcap_{i\in I} (N_\alpha \cap Zoc(M)) = (\bigcap_{i\in I} N_\alpha) \cap Zoc(M) = 0$. Por hipótesis, $Zoc(M)$ es finitamente generado, y como es semisimple, también es finitamente cogenerado. Por tanto, existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{\alpha\in J} (N_\alpha \cap Zoc(M)) = 0$. Luego, $(\bigcap_{\alpha\in J} N_\alpha) \cap Zoc(M) = 0$, y como $Zoc(M) \leqslant_e M$, entonces $\bigcap_{\alpha\in J} N_\alpha = 0$. Por tanto, M es finitamente cogenerado. ■

Corolario 2.2.2. *Sea $S \in R$-Simp. Entonces ES es finitamente cogenerado.*

Dem. Claramente S es finitamente generado y $S \leqslant_e ES$. Por el Lema 1.2.23, S es el único simple que está contenido en ES, por lo que $S = Zoc(ES)$. En vista de la Proposición 2.2.1, ES es finitamente cogenerado. ■

Proposición 2.2.3. *Sean $U \in R$-Mod uniforme y $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq R$-Mod. Si $f : U \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ es un monomorfismo, entonces existe $i \in I$ tal que $\pi_i f$ es monomorfismo, donde $\pi_i : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M_i$ es la proyección canónica en la coordenada i.*

Dem. Sean $U \in R$-Mod uniforme, $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq R$-Mod y $f : U \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ un monomorfismo. Si I tiene un sólo elemento, la Proposición se sigue. Asuma ahora que I tiene dos elementos. Suponga sin pérdida de generalidad que $U \leqslant M_1 \bigoplus M_2$ y sean $\sigma_1 = \pi_1 \upharpoonright_U$, $\sigma_2 = \pi_2 \upharpoonright_U$, donde $\pi_1 : M_1 \bigoplus M_2 \to M_1$ y $\pi_2 : M_1 \bigoplus M_2 \to M_2$ son las proyecciones canónicas en la primera y segunda coordenada, respectivamente. Si ni σ_1 ni σ_2 son monomorfismos, entonces $ker\sigma_1 \neq 0 \neq ker\sigma_2$. Como U es uniforme, $ker\sigma_1 \cap ker\sigma_2 \neq 0$. Luego, si $0 \neq u \in ker\sigma_1 \cap ker\sigma_2$, entonces $\pi_1(u) = 0 = \pi_2(u)$, es decir, $u = 0$. Esto no puede ser, y en consecuencia, σ_1 o σ_2 es un monomorfismo. Por inducción, la Proposición se sigue para I finito.

Caso general:

Suponga sin pérdida de generalidad que $U \leqslant \bigoplus_{i \in I} M_i$ y sean $0 \neq u \in U$ y J=$\{\alpha \in I \mid \pi_\alpha(u) \neq 0\}$. Entonces J es finito no vacío y $\bigoplus_{i \in I} M_i \cong (\bigoplus_{j \in J} M_j) \bigoplus (\bigoplus_{i \in I\text{-}J} M_i)$. Defina $\sigma_1 = \rho_1 \upharpoonright_U$ y $\sigma_2 = \rho_2 \upharpoonright_U$, donde $\rho_1 : \bigoplus_{i \in I} M_i \cong (\bigoplus_{j \in J} M_j) \bigoplus (\bigoplus_{i \in I\text{-}J} M_i) \xrightarrow{\pi_1} \bigoplus_{j \in J} M_j$ y $\rho_2 : \bigoplus_{i \in I} M_i \cong (\bigoplus_{j \in J} M_j) \bigoplus (\bigoplus_{i \in I\text{-}J} M_i) \xrightarrow{\pi_2} \bigoplus_{i \in I\text{-}J} M_i$ son la composición del isomorfismo $\cong$ con las proyecciones canónicas en la primera y segunda coordenada, respectivamente. Por la definición de J, tenemos que $\sigma_2(u) = 0$, es decir, que $ker\sigma_2 \neq 0$. Suponga que $ker\sigma_1 \neq 0$. Como U es uniforme, $ker\sigma_1 \cap ker\sigma_2 \neq 0$. Luego, si $0 \neq u' \in ker\sigma_1 \cap ker\sigma_2$, entonces $\pi_1(u') = 0 = \pi_2(u')$, es decir, $u' = 0$. Esto no puede ser, y en consecuencia, $ker\sigma_1 = 0$. Por tanto, σ_1 es un monomorfismo. Por el caso finito se sigue el caso general. ∎

Proposición 2.2.4. *Sean $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y $S \in R$-Simp. Entonces existe un monomorfismo $ES \hookrightarrow \bar{E}$.*

Dem. Sean $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y $S \in R$-Simp. Como $\omega_0^{ES} \in R$-pei, entonces $\omega_0^{ES} = \omega^{\bar{E}}_{\omega_0^{ES}(\bar{E})}$. Por tanto, $\omega_0^{\bar{E}}(ES) \leqslant \omega^{\bar{E}}_{\omega_0^{ES}(\bar{E})}(ES) = \omega_0^{ES}(ES) = 0$, y en consecuencia, $\omega_0^{\bar{E}}(ES) = 0$. Por otro lado, la familia $\{f\}_{f \in Hom_R(ES,\bar{E})}$ induce $\varphi = \otimes_{f \in Hom_R(ES,\bar{E})} f \in Hom_R(ES, \bar{E}^{Hom_R(ES,\bar{E})})$ por la propiedad universal del producto. Observe que φ es monomorfismo por ser $ker\varphi = \bigcap_{f \in Hom_R(ES,\bar{E})} ker f = \omega_0^{\bar{E}}(ES) = 0$. Ya que ES es finitamente cogenerado por el Corolario 2.2.2, se sigue que $ES \hookrightarrow \bar{E}^X$ para algún $X \subseteq Hom_R(ES, \bar{E})$ finito. También sabemos que ES es uniforme por la Proposición 1.2.23, por lo que $ES \hookrightarrow \bar{E}$ en vista de la Proposición 2.2.3. ∎

Corolario 2.2.5. *Cada módulo inyectivo principal es cogenerador de R-Mod.*

Dem. Por la Proposición 2.2.4, $ES \hookrightarrow \bar{E}$ para cada $S \in R$-Simp . En particular, $S \hookrightarrow \bar{E}$ para cada $S \in R$-Simp, por lo que $\bigoplus_{S \in R\text{-Simp}} S \hookrightarrow \bar{E}$. Como $\bar{E}$ es inyectivo, $E_0 \hookrightarrow \bar{E}$ y se sigue el corolario. ∎

Lo siguiente es una caracterización de una clase de anillos en términos de módulos inyectivos principales.

Teorema 2.2.6. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) Todo módulo no cero contiene un submódulo uniforme.

ii) Todo módulo inyectivo es la cápsula inyectiva de una suma directa de submódulos uniformes.

iii) Todo módulo inyectivo principal es la cápsula inyectiva de una suma directa de submódulos uniformes.

Dem. Considere un anillo R.

$i) \Rightarrow ii)$ Suponga que todo módulo no cero contiene un submódulo uniforme. Sean E un modulo inyectivo y $\mathcal{F}$ el conjunto de familias independientes consistentes de submódulos uniformes de E. Por hipótesis, E tiene un submódulo uniforme, por lo que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Considere ahora el orden parcial $\subseteq$ en $\mathcal{F}$. Dada una cadena $\{I_\alpha\}_{\alpha \in J} \subseteq \mathcal{F}$, es claro que $\bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha \in \mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{F}$ tiene un elemento máximo I gracias al Lema de Zorn. Si sucede que $\dot{\bigoplus}_{U \in I} U \leqslant_e E$, entonces E es la cápsula inyectiva de $\dot{\bigoplus}_{U \in I} U$ y la implicación queda demostrada. Veamos que esa condición se cumple. Sea $0 \neq N \leqslant E$ y suponga que $(\dot{\bigoplus}_{U \in I} U) \cap N = 0$. Por hipótesis, existe $U' \leqslant N$ uniforme. Como $U \cap U' \leqslant (\dot{\bigoplus}_{U \in I} U) \cap N = 0$ para cada $U \in I$, tenemos que $I \cup \{U'\} \in \mathcal{F}$. Esto no puede ser ya que I es máximo en $\mathcal{F}$. Por tanto, $(\dot{\bigoplus}_{U \in I} U) \cap N \neq 0$. Concluimos que $\dot{\bigoplus}_{U \in I} U \leqslant_e E$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Claro.

$iii) \Rightarrow i)$ Suponga que todo módulo inyectivo principal es la cápsula inyectiva de una suma directa de submódulos uniformes. Sean $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y $0 \neq M \in R$-Mod. Sabemos que $\bar{\bar{E}} = \bar{E}^{Hom_R(EM, \bar{E})}$ también es un módulo inyectivo principal en vista de la Proposición 2.1.5. Entonces existe una familia independiente I consistente de submódulos uniformes de $\bar{\bar{E}}$ tal que $\bar{\bar{E}} = E(\dot{\bigoplus}_{U \in I} U)$. Como $\omega_0^{EM} \in R$-pei, entonces $\omega_0^{EM} = \omega^{\bar{E}}_{\omega_0^{EM}(\bar{E})}$. Por tanto, $\omega_0^{\bar{E}}(EM) \leqslant \omega^{\bar{E}}_{\omega_0^{EM}(\bar{E})}(EM) = \omega_0^{EM}(EM) = 0$, y en consecuencia, $\omega_0^{\bar{E}}(EM) = 0$. Por otro lado, la familia $\{f\}_{f \in Hom_R(EM, \bar{E})}$ induce $\varphi = \otimes_{f \in Hom_R(EM, \bar{E})} f \in Hom_R(EM, \bar{\bar{E}})$ por la propiedad universal del producto. Observe que φ es un monomorfismo por ser $ker \varphi = \bigcap_{f \in Hom_R(EM, \bar{E})} ker f = \omega_0^{\bar{E}}(EM) = 0$. Así pues, considere M' la imágen de M bajo el monomorfismo $M \overset{\iota}{\hookrightarrow} EM \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \bar{\bar{E}} = E(\dot{\bigoplus}_{U \in I} U)$ y $N = M' \cap (\dot{\bigoplus}_{U \in I} U)$. Como $0 \neq M' \leqslant E(\dot{\bigoplus}_{U \in I} U)$ y $\dot{\bigoplus}_{U \in I} U \leqslant_e E(\dot{\bigoplus}_{U \in I} U)$, entonces $N \neq 0$. Para cada $0 \neq x \in N$, defina $Sop(x) = \{U \in I \mid \pi_U(x) \neq 0\}$ y note que $Sop(x)$ es finito no vacío y $x = \sum_{U \in Sop(x)} \pi_U(x)$. Sean $n = \min_{0 \neq x \in N}(\sharp Sop(x))$ y $0 \neq y \in N$ tal que $\sharp Sop(y) = n$. De este modo, $Sop(y) = \{U_i\}_{i=1}^n$ para algunos $U_1, U_2, ..., U_n \in I$. Veamos que $ann(y) = ann(\pi_{U_i}(y))$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Sea $r \in ann(y)$ e $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Entonces $0 = ry = r \sum_{i=1}^n \pi_{U_i}(y) = \sum_{i=1}^n r\pi_{U_i}(y)$. Luego, $0 = \pi_{U_i}(0) = \pi_{U_i}(\sum_{i=1}^n r\pi_{U_i}(y)) = r\pi_{U_i}(y)$, es decir, $r \in ann(\pi_{U_i}(y))$. Esto prueba que $ann(y) \subseteq ann(\pi_{U_i}(y))$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Recíprocamente, sea $r \in ann(\pi_{U_i}(y))$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y suponga que $r \notin ann(y)$. Entonces $0 \neq ry \in N$. Si $U \in Sop(ry)$, tenemos que $r\pi_U(y) = \pi_U(ry) \neq 0$. Por ello, $\pi_U(y) \neq 0$, es decir, $U \in Sop(y)$. De aquí que $Sop(ry) \subseteq Sop(y)$. Usemos esto para hallar una contradicción. Como $r \in ann(\pi_{U_i}(y))$, $\pi_{U_i}(ry) = r\pi_{U_i}(y) = 0$, por lo que $U_i \in Sop(y)$-$Sop(ry)$. Luego, $Sop(ry) \subsetneq Sop(y)$, y en consecuencia, $\sharp Sop(ry) < \sharp Sop(y) = n$. Esto no es posible por cómo se eligió a n, de donde $r \in ann(y)$. Por tanto, $ann(\pi_{U_i}(y)) \subseteq ann(y)$. Se sigue que $ann(y) = ann(\pi_{U_i}(y))$ para cada $i \in\{ 1, 2, ..., n\}$. En particular, por ser $1 \leqslant n$, $Ry \cong {}^{R}/_{ann(y)} = {}^{R}/_{ann(\pi_{U_1}(y))} \cong R\pi_{U_1}(y) \leqslant U_1$. Como U_1 es uniforme, lo anterior implica que Ry es uniforme en M'. Concluimos que M también tiene un submódulo uniforme. ■

Como ejemplo, tenemos que todo anillo uniserial satisface las condiciones equivalentes del Teorema 2.2.6.

2.3. Submódulos totalmente invariantes

En esta sección damos a R-pei la estructura de retícula y encontramos un isomorfismo reticular entre esta y la retícula de los submódulos totalmente invariantes de un módulo inyectivo principal arbitrario. También abordamos la cuestión de cómo describir explícitamente esta última retícula cuando se posee información sobre el anillo.

Atendiendo la primera tarea de esta sección, recordemos que en R-pr introducimos la operación ínfimo y supremo para obtener la estructura de retícula. En el caso de R-pei se hará lo mismo, y de hecho, la operación ínfimo también nos servirá para ello. No obstante, la operación supremo de R-pr no sirve del todo. Por ello introducimos una ligera variación de esta operación en R-pei.

Definición 2.3.1. *Para cualesquiera $\sigma, \tau \in$ R-pei, la operación supremo de R-pei denotada por $\widetilde{\vee}$ es descrita por $\sigma\widetilde{\vee}\tau = \widetilde{\sigma \vee \tau}$.*

Proposición 2.3.2. *(R-pei,$\preccurlyeq$,$\wedge$,$\widetilde{\vee}$) es una retícula.*

Dem. Ya sabemos que R-pei es un conjunto parcialmente ordenado por $\preccurlyeq$. Dados $\sigma, \tau \in R$-pei, tenemos que $\sigma \wedge \tau \in R$-pei por la Proposición 1.3.1 y que $\sigma\widetilde{\vee}\tau \in R$-pei por la Proposición 1.1.25. Además, es claro que inf$\{\sigma$,$\tau\}$=$\sigma \wedge \tau$. Por otro lado, $\sigma(M), \tau(M) \leqslant \sigma(M) + \tau(M) \leqslant \widetilde{\sigma}(M) + \widetilde{\tau}(M) = (\sigma(EM) \cap M) + (\tau(EM) \cap M) \leqslant (\sigma(EM) + \tau(EM)) \cap M = (\sigma \vee \tau)(EM) \cap M = (\widetilde{\sigma \vee \tau})(M) = (\sigma\widetilde{\vee}\tau)(M)$ para cada $M \in R$-Mod, por lo que $\sigma\widetilde{\vee}\tau$ es cota superior de σ y τ en R-pei. Ahora, si $\eta \in R$-pei es tal que $\sigma, \tau \preccurlyeq \eta$, entonces $\sigma \vee \tau \preccurlyeq \eta$. Por la Proposición 1.1.25, $\sigma\widetilde{\vee}\tau = \widetilde{\sigma \vee \tau} \preccurlyeq \eta$. Esto prueba que $sup\{\sigma, \tau\} = \sigma\widetilde{\vee}\tau$. ■

Es una suerte que la intersección y la suma de submódulos totalmente invariantes de un módulo dado sea totalmente invariante también. De hecho, hacen de este conjunto una subretícula de la retícula de submódulos del módulo dado. Demos la siguiente notación útil.

Definición 2.3.3. *Sea $M \in R$-Mod. Definimos $S_{ti}(M)$ como el conjunto de submódulos totalmente invariantes de M.*

Observación 2.3.4. *$S_{ti}(R)$ es el conjunto de ideales de R por el Corolario 1.2.8.*

Proposición 2.3.5. *Sea $M \in R$-Mod. Entonces $(S_{ti}(M),\leqslant,\cap,+)$ es una retícula.*

Dem. Directo de la Proposición 1.2.7. ■

Lo que pretendemos demostrar es que las retículas de prerradicales exactos izquierdos y la retícula de submódulos totalmente invariantes de un módulo inyectivo principal son isomorfas. Para ello, probemos primero un lema.

Lema 2.3.6. *Sea φ una función biyectiva definida entre retículas. Si tanto φ como su inversa preservan el orden, entonces φ es un isomorfismo de retículas. Si tanto φ como su inversa lo invierten, entonces φ es un anti-isomorfismo de retículas.*

Dem. Sea φ una función biyectiva definida entre las retículas $(X,\preccurlyeq,\wedge,\vee)$ y $(Y,\leqslant,\cap,+)$ y suponga que tanto φ como su inversa preservan el orden. Entonces:

$$\begin{aligned}
a, b \in X &\Rightarrow a \wedge b \preccurlyeq a, b \\
&\Rightarrow \varphi(a \wedge b) \leqslant \varphi(a), \varphi(b) \\
&\Rightarrow \varphi(a \wedge b) \leqslant \varphi(a) \cap \varphi(b) \leqslant \varphi(a), \varphi(b) \\
&\Rightarrow a \wedge b \preccurlyeq \varphi^{-1}(\varphi(a) \cap \varphi(b)) \preccurlyeq a, b \\
&\Rightarrow a \wedge b \preccurlyeq \varphi^{-1}(\varphi(a) \cap \varphi(b)) \preccurlyeq a \wedge b \\
&\Rightarrow a \wedge b = \varphi^{-1}(\varphi(a) \cap \varphi(b)) \\
&\Rightarrow \varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)
\end{aligned}$$

Es claro que se puede demostrar lo análogo para $\vee$. Luego, φ es morfismo de retículas, y al ser biyectivo, es automáticamente un isomorfismo de retículas. El caso en que φ y su inversa invierten el orden se trata con la misma técnica. ■

Teorema 2.3.7. *Sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. La siguiente correspondencia es un isomorfismo de retículas:*

$$\begin{array}{ccc}
(S_{ti}(\bar{E}), \leqslant, \cap, +) & \leftrightarrow & (R\text{-}pei, \preccurlyeq, \wedge, \widetilde{\vee}) \\
N & \rightleftarrows & \omega_N^{\bar{E}} \\
\sigma(\bar{E}) & & \sigma
\end{array}$$

En particular, $\sharp S_{ti}(\bar{E}) = \sharp R$-pei.

Dem. Sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y defina las siguientes funciones:

$$\begin{array}{c} \varphi : R\text{-pei} \to S_{ti}(\bar{E}) \\ \sigma \mapsto \sigma(\bar{E}) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} \psi : S_{ti}(\bar{E}) \to R\text{-pei} \\ N \mapsto \omega_N^{\bar{E}} \end{array}$$

Entonces $\varphi\psi(N) = \varphi(\psi(N)) = \varphi(\omega_N^{\bar{E}}) = \omega_N^{\bar{E}}(\bar{E}) = N = Id_{S_{ti}(\bar{E})}(N)$ para cada $N \in S_{ti}(\bar{E})$, y como $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal, $\psi\varphi(\sigma) = \psi(\varphi(\sigma)) =$

$\psi(\sigma(\bar{E})) = \omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} = \sigma = Id_{R\text{-pei}}(\sigma)$ para cada $\sigma \in R$-pei. Lo anterior prueba que φ y ψ son funciones inversas una de la otra, es decir, que φ es una función biyectiva y ψ es su inversa. Ahora, sean $\sigma, \tau \in R$-pei y $N, M \in S_{ti}(\bar{E})$. Si $\sigma \preccurlyeq \tau$, entonces $\varphi(\sigma) = \sigma(\bar{E}) \leqslant \tau(\bar{E}) = \varphi(\tau)$, y si $N \leqslant M$, entonces $\psi(N) = \omega^{\bar{E}}_N \preccurlyeq \omega^{\bar{E}}_M = \psi(M)$. Por tanto, φ y ψ preservan el orden. Por el Lema 2.3.6, φ es un isomorfismo de retículas. Concluimos que las retículas $(S_{ti}(\bar{E}),\leqslant,\cap,+)$ y $(R\text{-pei},\preccurlyeq,\wedge,\widetilde{\vee})$ son isomorfas. En particular, $\sharp S_{ti}(\bar{E}) = \sharp R$-pei. ■

Corolario 2.3.8. *Sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Entonces $\sharp S_{ti}(E) \leqslant \sharp S_{ti}(\bar{E})$ para cada módulo inyectivo E.*

Dem. Sean $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y E un módulo inyectivo. La función $\psi_E : S_{ti}(E) \to R$-pei dada por $\psi_E(N) = \omega^{\bar{E}}_N$ para cada $N \in S_{ti}(E)$ es inyectiva, pues la función $\varphi_E : R\text{-pei} \to S_{ti}(E)$ dada por $\varphi_E(\sigma) = \sigma(E)$ para cada $\sigma \in R$-pei es su invera izquierda (ver la prueba del Teorema 2.3.7 y notar que se prueba que φ es la inversa izquierda de ψ sin usar que $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal). Por tanto, $\sharp S_{ti}(E) \leqslant \sharp R$-pei, y como $\sharp R\text{-pei} = \sharp S_{ti}(\bar{E})$ por el Teorema 2.3.7, entonces $\sharp S_{ti}(E) \leqslant \sharp S_{ti}(\bar{E})$. ■

Cuando el anillo R es artiniano, los submódulos totalmente invariantes de un módulo inyectivo principal están en correspondencia uno a uno con los ideales de R. Más aún se puede decir, tal correspondencia es un anti-isomorfismo entre las retículas respectivas y también es explícita, por lo que hay una manera de calcular los primeros o los segundos, según sea el caso. Requerimos unos lemas primero.

Lema 2.3.9. *Sean $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y $K \leqslant_{ti} \bar{E}$. Si $M \in \mathbb{T}_{\omega^{\bar{E}}_K}$, entonces $Ann(K)M = 0$.*

Dem. Sean $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal, $K \leqslant_{ti} \bar{E}$ y $M \in \mathbb{T}_{\omega^{\bar{E}}_K}$. Entonces

$$\begin{aligned} Ann(K)M &= Ann(K)\omega^{\bar{E}}_K(M) = Ann(K)\Big(\bigcap_{f\in Hom_R(M,\bar{E})} f^{-1}(K)\Big) \\ &\leqslant \bigcap_{f\in Hom_R(M,\bar{E})} (Ann(K)f^{-1}(K)) = \bigcap_{f\in Hom_R(M,\bar{E})} f^{-1}(Ann(K)K) \\ &= \bigcap_{f\in Hom_R(M,\bar{E})} f^{-1}(0) = \omega^{\bar{E}}_0(M) = \omega^{\bar{E}}_{0(\bar{E})}(M) = 0(M) = 0 \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se debe a que 0 es un prerradical exacto izquierdo. ■

Lema 2.3.10. *Sean R anillo artiniano, $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y $K \leqslant_{ti} \bar{E}$. Entonces $\omega^{\bar{E}}_K = \sigma_{\eta(Ann(K))}$, o equivalentemente, $\mathscr{F}_{\omega^{\bar{E}}_K} = \eta(Ann(K))$.*

Dem. Sean R anillo artiniano, $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y $K \leqslant_{ti} \bar{E}$. Recuerde que $\omega^{\bar{E}}_K$ es exacto izquierdo sobre R, por lo que $\mathscr{F}_{\omega^{\bar{E}}_K}$ es un filtro lineal en R gracias al Teorema 1.1.34. Probaremos que $\mathscr{F}_{\omega^{\bar{E}}_K} = \eta(Ann(K))$ por contenciones.

$\subseteq$. Sea $I \in \mathscr{F}_{\omega_K^{\bar{E}}}$. Entonces $\frac{R}{I} \in \mathbb{T}_{\omega_K^{\bar{E}}}$, de modo que $Ann(K)\frac{R}{I} = 0$ en vista del Lema 2.3.9. Por tanto, $Ann(K) \leqslant I$, y entonces $I \in \eta(Ann(K))$.

$\supseteq$. Basta ver que $Ann(K) \in \mathscr{F}_{\omega_K^{\bar{E}}}$. Por el Teorema 1.1.34, se sigue que $K = \omega_K^{\bar{E}}(\bar{E}) = \sigma_{\mathscr{F}_{\omega_K^{\bar{E}}}}(\bar{E})$=$\{x \in \bar{E} \mid ann(x) \in \mathscr{F}_{\omega_K^{\bar{E}}}\}$, de modo que $ann(x) \in \mathscr{F}_{\omega_K^{\bar{E}}}$ para cada $x \in K$. Como R es artiniano, tenemos que R-pei $=$ R-jans por la Proposición 1.1.40. En particular, $\omega_K^{\bar{E}}$ es jansiano, o equivalentemente, $\mathscr{F}_{\omega_K^{\bar{E}}}$ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias por la Proposición 1.1.39. De aquí que $Ann(K) = \bigcap_{x\in K} ann(x) \in \mathscr{F}_{\omega_K^{\bar{E}}}$.

Concluimos la igualdad buscada. La equivalencia se sigue inmediatamente del Teorema 1.1.34. ■

Definición 2.3.11. *Sean $M \in R$-Mod e $I \leqslant R$. Definimos $Ann_M(I)$ =$\{x \in M \mid Ix = 0\}$.*

Lema 2.3.12. *Sean $M \in R$-Mod e I un ideal de R. Entonces $\sigma_{\eta(I)}(M) = Ann_M(I)$.*

Dem. Sean $M \in R$-Mod e I un ideal de R. Considere el filtro lineal $\eta(I)$ y su prerradical asociado $\sigma_{\eta(I)}$. Si $x \in M$, entonces $x \in \sigma_{\eta(I)}(M)$ =$\{x \in M \mid ann(x) \in \eta(I)\}$ sii $ann(x) \in \eta(I)$ sii $I \leqslant ann(x)$ =$\{r \in R \mid rx = 0\}$ sii $Ix = 0$ sii $x \in$$\{x \in M \mid Ix = 0\}$= $Ann_M(I)$. Concluimos que $\sigma_{\eta(I)}(M) = Ann_M(I)$. ■

Teorema 2.3.13. *Sean R anillo artiniano y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Entonces las retículas ($S_{ti}(R)$,$\leqslant$,$\cap$,$+$) y ($S_{ti}(\bar{E})$,$\leqslant$,$\cap$,$+$) son anti-isomorfas. En particular, ($S_{ti}(\bar{E})$,$\leqslant$,$\cap$,$+$) es una retícula neteriana.*

Dem. Sean R anillo artiniano y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y defina las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : S_{ti}(R) \to S_{ti}(\bar{E}) & & \psi : S_{ti}(\bar{E}) \to S_{ti}(R) \\ I \mapsto Ann_{\bar{E}}(I) & \text{y} & K \mapsto Ann(K) \end{array}$$

Si I es un ideal de R, entonces $\sigma_{\eta(I)}(\bar{E}) = Ann_{\bar{E}}(I)$ por el Lema 2.3.12, de modo que $Ann_{\bar{E}}(I)$ es un submódulo totalmente invariante de $\bar{E}$. Por otra parte, es bien sabido que el anulador de cualquier R-módulo es un ideal de R. Por tanto, ambas asignaciones están bien definidas. Sea $K \leqslant_{ti} \bar{E}$. Entonces $\omega_K^{\bar{E}} = \sigma_{\eta(Ann(K))}$ por el Lema 2.3.10 y $Ann_{\bar{E}}(Ann(K)) = \sigma_{\eta(Ann(K))}(\bar{E})$ por el Lema 2.3.12. Luego, $\varphi\psi(K) = \varphi(Ann(K)) = Ann_{\bar{E}}(Ann(K)) = \sigma_{\eta(Ann(K))}(\bar{E}) = \omega_K^{\bar{E}}(\bar{E}) = K = Id_{S_{ti}(\bar{E})}(K)$. Conversamente, sea I ideal de R. Entonces $\eta(I)$ es un filtro lineal. Luego, $\sigma_{\eta(I)} \in R$-pei por el Teorema 1.1.34, y como $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal, se sigue que $\sigma_{\eta(I)} = \omega^{\bar{E}}_{\sigma_{\eta(I)}(\bar{E})}$. En particular, los filtros lineales asociados a $\sigma_{\eta(I)}$ y $\omega^{\bar{E}}_{\sigma_{\eta(I)}(\bar{E})}$ coinciden. En nuestro caso, es posible dar una descripción más explícita de esos filtros: $\eta(I) = \mathscr{F}_{\sigma_{\eta(I)}}$ por el Teorema 1.1.34 y $\mathscr{F}_{\omega^{\bar{E}}_{\sigma_{\eta(I)}(\bar{E})}} = \eta(Ann(\sigma_{\eta(I)}(\bar{E}))) = \eta(Ann(Ann_{\bar{E}}(I)))$ por los Lemas 2.3.10 y 2.3.12, respectivamente. Luego, $\eta(I) = \mathscr{F}_{\sigma_{\eta(I)}} = \mathscr{F}_{\omega^{\bar{E}}_{\sigma_{\eta(I)}(\bar{E})}} = \eta(Ann(Ann_{\bar{E}}(I)))$. De esta igualdad entre filtros es fácil verificar que $I = Ann(Ann_{\bar{E}}(I))$. Por tanto, $\psi\varphi(I) =$

$\psi(Ann_{\bar{E}}(I)) = Ann(Ann_{\bar{E}}(I)) = I = Id_{S_{ti}(R)}(I)$. Hemos probado que φ y ψ son funciones inversas una de la otra, es decir, que φ es una función biyectiva y ψ es su inversa. Ahora, sean $I, J \in S_{ti}(R)$ y $N, K \in S_{ti}(\bar{E})$. Si $I \leqslant J$, entonces $\varphi(J) = Ann_{\bar{E}}(J) \leqslant Ann_{\bar{E}}(I) = \varphi(I)$, y si $N \leqslant K$, entonces $\psi(K) = Ann(K) \leqslant Ann(N) = \psi(N)$. Se sigue que φ y ψ invierten el orden. Por el Lema 2.3.6, φ es un anti-isomorfismo de retículas. Concluimos que las retículas $(S_{ti}(R),\leqslant,\cap,+)$ y $(S_{ti}(\bar{E}),\leqslant,\cap,+)$ son anti-isomorfas. Note que por ser R artiniano, tenemos que $(S_{ti}(R),\leqslant,\cap,+)$ es una retícula artiniana. Luego, a causa del anti-isomorfismo, $(S_{ti}(\bar{E}),\leqslant,\cap,+)$ es una retícula neteriana. ■

2.4. Módulos inyectivos principales y filtraciones en R-pei

Hay una forma natural de definir la dimensión de un módulo en términos de prerradicales. En nuestro contexto, esta definición se refina bastante al restringirnos a los prerradicales exactos izquierdos. Para tal fin es necesario definir las denominadas filtraciones en R-pei.

Definición 2.4.1. *Una filtración en R-pei es una familia de prerradicales exactos izquierdos $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in Or}$ tal que si $\alpha, \beta \in Or$ y $\alpha \leqslant \beta$, entonces $\tau_\alpha \preccurlyeq \tau_\beta$.*

Definición 2.4.2. *Sean $M \in R$-Mod y $\mathcal{F} = \{\tau_\alpha\}_{\alpha \in Or}$ una filtración en R-pei. Decimos que M tiene $\mathcal{F}$-dimensión h si h es un ordinal que satisface $M \in \mathbb{T}_{\tau_h}$ y para cada ordinal i tal que $i < h$, se tiene que $M \notin \mathbb{T}_{\tau_i}$. En este caso escribimos $\mathcal{F}dim(M) = h$. Si $M \notin \mathbb{T}_{\tau_i}$ para todo ordinal i, decimos que M no tiene $\mathcal{F}$-dimensión. El anillo R tiene $\mathcal{F}$-dimensión h si el módulo ${}_RR$ tiene $\mathcal{F}$-dimensión h y en este caso también escribimos $\mathcal{F}dim(R) = h$.*

La siguiente caracterización de anillos con $\mathcal{F}$-dimensión h es una sencilla traducción de definiciones y aplicación de propiedades bien conocidas de los prerradicales.

Proposición 2.4.3. *Sea $\mathcal{F} = \{\tau_\alpha\}_{\alpha \in Or}$ una filtración en R-pei. Entonces R tiene $\mathcal{F}$-dimensión h sii $\tau_h = 1$ y h es el menor ordinal con esa propiedad.*

Dem. Sea $\mathcal{F} = \{\tau_\alpha\}_{\alpha \in Or}$ una filtración en R-pei. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\text{dim}(R) = h &\Leftrightarrow R \in \mathbb{T}_{\tau_h} \text{ y } R \notin \mathbb{T}_{\tau_i} \text{ para cada ordinal } i \text{ tal que } i < h \\
&\Leftrightarrow \tau_h(R) = R \text{ y } \tau_i(R) \neq R \text{ para cada ordinal } i \text{ tal que } i < h \\
&\Leftrightarrow \tau_h = 1 \text{ y } \tau_i \neq 1 \text{ para cada ordinal } i \text{ tal que } i < h \text{ (Prop. 1.1.12)} \\
&\Leftrightarrow \tau_h = 1 \text{ y } h \text{ es el menor ordinal con esa propiedad. } \blacksquare
\end{aligned}$$

Ahora damos una caracterización de anillos con $\mathcal{F}$-dimensión h en términos de módulos inyectivos principales.

Teorema 2.4.4. *Sean $\mathcal{F} = \{\tau_\alpha\}_{\alpha \in Or}$ una filtración en R-pei y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Entonces R tiene $\mathcal{F}$-dimensión h sii $\bar{E}$ tiene $\mathcal{F}$-dimensión h.*

Dem. Sean $\mathcal{F} = \{\tau_\alpha\}_{\alpha\in Or}$ una filtración en R-pei y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Si $\mathcal{F}\dim(R) = h$, entonces $\tau_h = 1$ y h es el menor ordinal con esa propiedad por la Proposición 2.4.3. En particular, $\tau_h(\bar{E}) = \bar{E}$, es decir, $\bar{E} \in \mathbb{T}_{\tau_h}$. Por otro lado, como $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal y $\mathcal{F} \subseteq R$-pei, entonces $\tau_i = \omega^{\bar{E}}_{\tau_i(\bar{E})}$ para cada $i < h$. Suponga que $\tau_i(\bar{E}) = \bar{E}$ para algún $i < h$. Entonces $\tau_i = \omega^{\bar{E}}_{\tau_i(\bar{E})} = \omega^{\bar{E}}_{\bar{E}} = 1$, lo cual no puede ser, dado que h es el menor ordinal tal que $\tau_h = 1$. Por tanto, $\tau_i(\bar{E}) \neq \bar{E}$. Luego, $\bar{E} \notin \mathbb{T}_{\tau_i}$ para cada $i < h$. Concluimos que $\mathcal{F}\dim(\bar{E}) = h$. Recíprocamente, si $\mathcal{F}\dim(\bar{E}) = h$, entonces $\bar{E} \in \mathbb{T}_{\tau_h}$ y $\bar{E} \notin \mathbb{T}_{\tau_i}$ para cada $i < h$, o equivalentemente, $\tau_h(\bar{E}) = \bar{E}$ y $\tau_i(\bar{E}) \neq \bar{E}$ para cada $i < h$. Por otro lado, como $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal y $\mathcal{F} \subseteq R$-pei, entonces $\tau_h = \omega^{\bar{E}}_{\tau_h(\bar{E})} = \omega^{\bar{E}}_{\bar{E}} = 1$. En particular, $\tau_h(R) = R$, es decir, $R \in \mathbb{T}_{\tau_h}$. Ahora, si $i < h$, entonces $\tau_i \neq 1$ en vista de que $\tau_i(\bar{E}) \neq \bar{E}$, o lo que es lo mismo, $R \notin \mathbb{T}_{\tau_i}$ por la Proposición 1.1.12. Por tanto, $R \notin \mathbb{T}_{\tau_i}$ para cada $i < h$. Concluimos que $\mathcal{F}\dim(R) = h$. ■

Aplicaremos los resultados anteriores para caracterizar una clase de anillos mediante los módulos inyectivos principales. Primero que nada, construimos la filtración de Loewy y daremos las definiciones de sucesión de Loewy y longitud de Loewy de un módulo dado, así como la de módulo semiartiniano.

Definición 2.4.5. *Definimos $Zoc_0 = 0$, $Zoc_{\alpha+1} = (Zoc_\alpha : Zoc)$ para cada ordinal α y $Zoc_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} Zoc_\beta$ si α es un ordinal límite.*

Observación 2.4.6. *$Zoc_1 = Zoc$ y si $\alpha, \beta \in Or$ son tales que $\alpha \leqslant \beta$, entonces $Zoc_\alpha \preccurlyeq Zoc_\beta$.*

Proposición 2.4.7. *$\mathcal{L} = \{Zoc_\alpha\}_{\alpha\in Or}$ es una filtración en R-pei. $\mathcal{L}$ es llamada la filtración de Loewy.*

Dem. Por inducción transfinita probaremos que $Zoc_\alpha \in R$-pei para cada $\alpha \in Or$. Ya sabemos que $Zoc_0 = 0$ es exacto izquierdo sobre R. Suponga entonces que Zoc_α es exacto izquierdo sobre R para algún ordinal α. Si $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{Zoc_{\alpha+1}(N)}{Zoc_\alpha(N)} &= Zoc(\frac{N}{Zoc_\alpha(N)}) = Zoc(\frac{M}{Zoc_\alpha(N)}) \cap \frac{N}{Zoc_\alpha(N)} \\ &= \frac{Zoc_{\alpha+1}(M)}{Zoc_\alpha(N)} \cap \frac{N}{Zoc_\alpha(N)} = \frac{Zoc_{\alpha+1}(M) \cap N}{Zoc_\alpha(N)}.\end{aligned}$$

Luego, $Zoc_{\alpha+1}(N) = Zoc_{\alpha+1}(M) \cap N$. Por tanto, $Zoc_{\alpha+1}$ es exacto izquierdo sobre R. Ahora, suponga que α es ordinal límite y que Zoc_β es exacto izquierdo sobre R para cada $\beta < \alpha$. Si $M \in R$-Mod y $N \leqslant M$, entonces

$$\begin{aligned}Zoc_\alpha(N) &= (\bigvee_{\beta<\alpha} Zoc_\beta)(N) = \sum_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(N) = \bigcup_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(N) = \bigcup_{\beta<\alpha} (Zoc_\beta(M) \cap N) \\ &= (\bigcup_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(M)) \cap N = (\sum_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(M)) \cap N = (\bigvee_{\beta<\alpha} Zoc_\beta)(M) \cap N \\ &= Zoc_\alpha(M) \cap N.\end{aligned}$$

Por tanto, Zoc_α es exacto izquierdo sobre R. Por el Principio de Inducción Transfinita concluimos que $Zoc_\alpha \in R$-pei para cada $\alpha \in Or$. Por la Observación 2.4.6, es claro que esta familia es una filtración en R-pei. ■

Definición 2.4.8. *Sea $M \in R$-Mod. Definimos la sucesión de Loewy de M como la siguiente cadena de submódulos de M:*

$$0 \leqslant Zoc(M) \leqslant Zoc_2(M) \leqslant \cdots \leqslant Zoc_\alpha(M) \leqslant \ldots \qquad (\alpha \in Or).$$

Como la colección de submódulos de M es un conjunto, entonces existe un mínimo ordinal en el que la sucesión de Loewy de M se estaciona. Definimos $\gamma(M)$ como ese ordinal y lo llamamos la longitud de Loewy de M. Decimos que M es semiartiniano si $Zoc_{\gamma(M)}(M) = M$.

Proposición 2.4.9. *Sea $M \in R$-Mod. Entonces M es semiartiniano sii $\mathcal{L}dim(M) = \gamma(M)$.*

Dem. Sea $M \in R$-Mod semiartiniano. Entonces $Zoc_{\gamma(M)}(M) = M$, es decir, $M \in \mathbb{T}_{Zoc_{\gamma(M)}}$. Sea i un ordinal tal que $i < \gamma(M)$ y suponga que $M \in \mathbb{T}_{Zoc_i}$. Dado $\delta \geqslant i$, tenemos que $M = Zoc_i(M) \leqslant Zoc_\delta(M) \leqslant M$. Por tanto, $Zoc_i(M) = Zoc_\delta(M)$ para cada $\delta \geqslant i$. Esto prueba que la sucesión de Loewy de M se estaciona en i, lo cual no puede ser, en vista de la definición de $\gamma(M)$. Luego, $M \notin \mathbb{T}_{Zoc_i}$ para cada $i < \gamma(M)$, y en consecuencia, $\mathcal{L}\mathrm{dim}(M) = \gamma(M)$. El recíproco es claro. ■

Teorema 2.4.10. *Sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Entonces R es anillo semiartiniano sii $\bar{E}$ es semiartiniano.*

Dem. Sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Suponga primero que R es anillo semiartiniano. Entonces $\mathcal{L}\mathrm{dim}(R) = \gamma(R)$ por la Proposición 2.4.9, y en consecuencia, $\mathcal{L}\mathrm{dim}(\bar{E}) = \gamma(R)$ por el Teorema 2.4.4. En particular, $Zoc_{\gamma(R)}(\bar{E}) = \bar{E}$. Veamos que $Zoc_{\gamma(\bar{E})}(\bar{E}) = \bar{E}$. Si $\gamma(\bar{E}) \leqslant \gamma(R)$, entonces $Zoc_{\gamma(\bar{E})}(\bar{E}) \leqslant Zoc_{\gamma(R)}(\bar{E})$. Luego, $Zoc_{\gamma(\bar{E})}(\bar{E}) = Zoc_{\gamma(R)}(\bar{E}) = \bar{E}$ en vista de la definición de $\gamma(\bar{E})$. Si $\gamma(R) \leqslant \gamma(\bar{E})$, entonces $\bar{E} = Zoc_{\gamma(R)}(\bar{E}) \leqslant Zoc_{\gamma(\bar{E})}(\bar{E}) \leqslant \bar{E}$, y por tanto, $Zoc_{\gamma(\bar{E})}(\bar{E}) = \bar{E}$. En cualquier caso se tiene $Zoc_{\gamma(\bar{E})}(\bar{E}) = \bar{E}$, por lo que $\bar{E}$ es semiartiniano. Recíprocamente, suponga que $\bar{E}$ es semiartiniano. Probaremos primero que $Zoc_{\gamma(R)} = 1$. Para esto, asuma que $Zoc_{\gamma(R)} \prec 1$. Como $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal y $Zoc_{\gamma(\bar{E})} \in R$-pei, entonces $Zoc_{\gamma(\bar{E})} = \omega^{\bar{E}}_{Zoc_{\gamma(\bar{E})}(\bar{E})}$. Recuerde que $\bar{E}$ es semiartiniano si $Zoc_{\gamma(\bar{E})}(\bar{E}) = \bar{E}$. Por tanto, $Zoc_{\gamma(\bar{E})} = \omega^{\bar{E}}_{Zoc_{\gamma(\bar{E})}(\bar{E})} = \omega^{\bar{E}}_{\bar{E}} = 1$. Luego, $Zoc_{\gamma(R)} \prec 1 = Zoc_{\gamma(\bar{E})}$, y entonces $\gamma(R) \leqslant \gamma(\bar{E})$. De la definición de $\gamma(R)$, tenemos que $Zoc_{\gamma(R)}(R) = Zoc_\delta(R)$ para cada $\delta \geqslant \gamma(R)$. En particular, $Zoc_{\gamma(R)}(R) = Zoc_{\gamma(\bar{E})}(R) = 1(R) = R$, y así, $Zoc_{\gamma(R)} = 1$, lo cual es contrario a lo que asumimos. Así pues, $Zoc_{\gamma(R)} = 1$. Consecuentemente, $Zoc_{\gamma(R)}(R) = R$, y esto es precisamente que R sea anillo semiartiniano. ■

Capítulo 3

Prerradicales básicos

3.1. La partición de R-pr inducida por $\sim_{\mathcal{E}}$

En esta sección se estudiará la relación de equivalencia $\sim_{\mathcal{E}}$ en R-pr aplicando los resultados de la sección 1.4. Recuerde que para cada $\sigma \in R$-pr denotamos con $\widetilde{\sigma}$ al prerradical sobre R que se calcula en un R-módulo M como $\widetilde{\sigma}(M) = \sigma(EM) \cap M$ y que es el menor prerradical exacto izquierdo sobre R que es mayor o igual a σ por la Proposición 1.1.25.

Proposición 3.1.1. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $[\sigma]_{\mathcal{E}} = \left[\bigvee_{E\in\mathcal{E}} \alpha^{E}_{\sigma(E)}, \bigwedge_{E\in\mathcal{E}} \omega^{E}_{\sigma(E)}\right]$.*

Dem. Directo de la Proposición 1.4.15.

Observación 3.1.2. *$\bigwedge [\sigma]_{\mathcal{E}} = \bigvee_{E\in\mathcal{E}} \alpha^{E}_{\sigma(E)} \in [\sigma]_{\mathcal{E}}$ y $\bigvee [\sigma]_{\mathcal{E}} = \bigwedge_{E\in\mathcal{E}} \omega^{E}_{\sigma(E)} \in [\sigma]_{\mathcal{E}}$.*

Proposición 3.1.3. *Sean $\sigma, \tau \in R$-pr. Entonces $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau}$ sii $\sigma \sim_{\mathcal{E}} \tau$.*

Dem. Sean $\sigma, \tau \in R$-pr. Suponga primero que $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau}$. Si $E' \in \mathcal{E}$, entonces $\sigma(E') = \sigma(E') \cap E' = \sigma(EE') \cap E = \widetilde{\sigma}(E') = \widetilde{\tau}(E') = \tau(EE') \cap E' = \tau(E') \cap E' = \tau(E')$. Como $E' \in \mathcal{E}$ fue arbitrario, $\sigma \sim_{\mathcal{E}} \tau$. Recíprocamente, suponga que $\sigma \sim_{\mathcal{E}} \tau$. Si $M \in R$-Mod, entonces $\widetilde{\sigma}(M) = \sigma(EM) \cap M = \tau(EM) \cap E = \widetilde{\tau}(E)$. Como $M \in R$-Mod fue arbitrario, $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau}$. ■

Proposición 3.1.4. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $\widetilde{\sigma} \in [\sigma]_{\mathcal{E}}$. Más aún, $\widetilde{\sigma} = \bigvee [\sigma]_{\mathcal{E}}$.*

Dem. Sea $\sigma \in R$-pr. Si $E' \in \mathcal{E}$, entonces $\widetilde{\sigma}(E') = \sigma(EE') \cap E' = \sigma(E') \cap E' = \sigma(E')$. Como $E' \in \mathcal{E}$ fue arbitrario, $\widetilde{\sigma} \sim_{\mathcal{E}} \sigma$, y en consecuencia, $\widetilde{\sigma} \in [\sigma]_{\mathcal{E}}$. En particular, $\widetilde{\sigma} \preccurlyeq \bigvee [\sigma]_{\mathcal{E}}$. Por otro lado, recuerde que $\bigvee [\sigma]_{\mathcal{E}} = \bigwedge_{E\in\mathcal{E}} \omega^{E}_{\sigma(E)}$. Luego, si $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal, entonces $\bigvee [\sigma]_{\mathcal{E}} \preccurlyeq \omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} = \omega^{\bar{E}}_{\widetilde{\sigma}(\bar{E})} = \widetilde{\sigma}$ por ser $\widetilde{\sigma} \in R$-pei. Concluimos que $\widetilde{\sigma} = \bigvee [\sigma]_{\mathcal{E}}$. ■

Los módulos inyectivos principales pueden ser usados para describir más sencillamente la relación $\sim_{\mathcal{E}}$, y por ende, la partición que induce en R-pr.

Proposición 3.1.5. *Sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Entonces $\sim_{\mathcal{E}} = \sim_{\bar{E}}$.*

Dem. Sean $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y $\sigma, \tau \in R$-pr. Suponga que $\sigma \sim_{\mathcal{E}} \tau$. Entonces $\sigma(E) = \tau(E)$ para cada $E \in \mathcal{E}$. En particular, $\sigma(\bar{E}) = \tau(\bar{E})$. Por tanto, $\sigma \sim_{\bar{E}} \tau$. Recíprocamente, suponga que $\sigma \sim_{\bar{E}} \tau$. Entonces $\widetilde{\sigma}(\bar{E}) = \sigma(E\bar{E}) \cap \bar{E} = \sigma(\bar{E}) = \tau(\bar{E}) = \tau(E\bar{E}) \cap \bar{E} = \widetilde{\tau}(\bar{E})$. Como $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal y $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau} \in R$-pei, se sigue que $\widetilde{\sigma} = \omega^{\bar{E}}_{\widetilde{\sigma}(\bar{E})} = \omega^{\bar{E}}_{\widetilde{\tau}(\bar{E})} = \widetilde{\tau}$. Concluimos que $\sigma \sim_{\mathcal{E}} \tau$ en vista de la Proposición 3.1.3. ■

Corolario 3.1.6. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $[\sigma]_{\mathcal{E}} = [\sigma]_{\bar{E}}$.* ■

3.2. El prerradical básico asociado a un prerradical

La definición principal de este capítulo es la de prerradical básico.

Definición 3.2.1. *Sea $\sigma \in R$-pr. Definimos el prerradical básico asociado a σ como $\underline{\sigma} = \bigwedge [\sigma]_{\mathcal{E}}$. Decimos que σ es prerradical básico si $\sigma = \underline{\sigma}$.*

Observación 3.2.2. *$\underline{\sigma} \in [\sigma]_{\mathcal{E}}$ por la Observación 3.1.2.*

Como ejemplo, tenemos que $\underline{0} = 0$ y $\underline{1} = \bigvee_{E \in \mathcal{E}} \alpha^E_E$.

Podemos describir al prerradical básico asociado a un prerradical en términos de módulos inyectivos principales.

Proposición 3.2.3. *Sean $\sigma \in R$-pr y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Entonces $\underline{\sigma} = \alpha^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})}$.*

Dem. Sean $\sigma \in R$-pr y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Tenemos que $[\sigma]_{\mathcal{E}} = [\sigma]_{\bar{E}}$ por el Corolario 3.1.6 y que $[\sigma]_{\bar{E}} = \left[\alpha^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})}, \omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})}\right]$ por la Proposición 1.4.15. Por tanto, $\underline{\sigma} = \bigwedge [\sigma]_E = \bigwedge [\sigma]_{\bar{E}} = \alpha^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})}$. ■

Veamos algunas propiedades elementales de los prerradicales básicos.

Proposición 3.2.4. *Sean $\sigma, \tau \in R$-pr.*

i) $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau}$ sii $\underline{\sigma} = \underline{\tau}$.

ii) Si $\sigma \preccurlyeq \tau$, entonces $\underline{\sigma} \preccurlyeq \underline{\tau}$.

Dem. Sean $\sigma, \tau \in R$-pr.

i) Suponga que $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau}$. Entonces $\sigma \sim_{\mathcal{E}} \tau$ por la Proposición 3.1.3, o equivalentemente, $[\sigma]_{\mathcal{E}} = [\tau]_{\mathcal{E}}$. Por tanto, $\underline{\sigma} = \bigwedge [\sigma]_{\mathcal{E}} = \bigwedge [\tau]_{\mathcal{E}} = \underline{\tau}$. Recíprocamente, suponga que $\underline{\sigma} = \underline{\tau}$ y sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Entonces $\alpha^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} = \underline{\sigma} = \underline{\tau} = \alpha^{\bar{E}}_{\tau(\bar{E})}$ por la Proposición 3.2.3. En particular, $\sigma(\bar{E}) = \alpha^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})}(\bar{E}) = \alpha^{\bar{E}}_{\tau(\bar{E})}(\bar{E}) = \tau(\bar{E})$, lo cual prueba que $\sigma \sim_{\bar{E}} \tau$, o lo que es lo mismo, que $\sigma \sim_{\mathcal{E}} \tau$ en vista de la Proposición 3.1.5. Luego, $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau}$ por la Proposición 3.1.3.

ii) Suponga que $\sigma \preccurlyeq \tau$ y sea $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Como $\sigma(\bar{E}) \leqslant \tau(\bar{E})$, se sigue inmediatamente que $\underline{\sigma} = \alpha^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} \preccurlyeq \alpha^{\bar{E}}_{\tau(\bar{E})} = \underline{\tau}$. ■

Proposición 3.2.5. *Sea* $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R$*-pr. Entonces* $\underline{\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha} = \bigvee_{\alpha\in I}\underline{\sigma_\alpha}$.

Dem. Sea $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R$-pr. Si $\beta \in I$, entonces $\underline{\sigma_\beta} \preccurlyeq \underline{\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha}$ por la Proposición 3.2.4 (*ii*). Por tanto, $\bigvee_{\alpha\in I}\underline{\sigma_\alpha} \preccurlyeq \underline{\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha}$. Por otro lado, si $E \in \mathcal{E}$, entonces $(\bigvee_{\alpha\in I}\underline{\sigma_\alpha})(E) = \sum_{\alpha\in I}\underline{\sigma_\alpha}(E) = \sum_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(E) = (\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(E)$ puesto que $\underline{\sigma_\alpha} \in [\sigma_\alpha]_E$ para cada $\alpha \in I$. Por tanto, $\bigvee_{\alpha\in I}\underline{\sigma_\alpha} \in \left[\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha\right]_{\mathcal{E}}$, y entonces $\underline{\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha} = \bigwedge\left[\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha\right]_{\mathcal{E}} \preccurlyeq \bigvee_{\alpha\in I}\underline{\sigma_\alpha}$. Concluimos que $\underline{\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha} = \bigvee_{\alpha\in I}\underline{\sigma_\alpha}$. ■

Denotamos con R-prb a la clase de los prerradicales básicos sobre R.

Corolario 3.2.6. *R-prb es cerrada bajo supremos arbitrarios.* ■

Dado $\sigma \in R$-pr, las clases de equivalencia $[\sigma]_{\mathcal{E}}$ y $[\sigma]_{\perp}$ se relacionan como sigue:

Proposición 3.2.7. *Sea* $\sigma \in R$*-pr. Entonces* $[\sigma]_{\mathcal{E}} \subseteq [\sigma]_{\perp}$*. En particular,* $(\underline{\sigma})^{\perp} = \sigma^{\perp} = (\widetilde{\sigma})^{\perp}$.

Dem. Sea $\sigma \in R$-pr y suponga que $\tau \in [\sigma]_{\mathcal{E}}$, o lo que es lo mismo, que $\sigma \sim_{\mathcal{E}} \tau$. Por la Proposición 3.1.3, esto también es equivalente a que $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau}$, por lo que si $S \in R$-Simp, entonces $\sigma(ES) = \widetilde{\sigma}(ES) = \widetilde{\tau}(ES) = \tau(ES)$. Por tanto, $\sigma(ES) \neq 0$ sii $\tau(ES) \neq 0$ para cada $S \in R$-Simp. Lo anterior prueba que $S_\sigma = S_\tau$, o equivalentemente, que $\sigma \sim_{\perp} \tau$ por el Lema 1.4.11, y entonces $\tau \in [\sigma]_{\perp}$. Consecuentemente, $[\sigma]_{\mathcal{E}} \subseteq [\sigma]_{\perp}$. Para la segunda parte recuerde que $\underline{\sigma} \in [\sigma]_{\mathcal{E}}$ por la Observación 3.2.2 y también que $\widetilde{\sigma} \in [\sigma]_{\mathcal{E}}$ por la Proposición 3.1.4. Entonces $\underline{\sigma} \in [\sigma]_{\perp}$ y $\widetilde{\sigma} \in [\sigma]_{\perp}$ por lo anterior, de modo que $(\underline{\sigma})^{\perp} = \sigma^{\perp} = (\widetilde{\sigma})^{\perp}$. ■

Proposición 3.2.8. *Si* $E \in \mathcal{E}$ *y* $M \leqslant_{ti} E$*, entonces* $\alpha^E_M \in R$*-prb.*

Dem. Sean $E \in \mathcal{E}$ y $M \leqslant_{ti} E$. Como $\alpha^E_M \in \left[\alpha^E_M\right]_{\mathcal{E}}$, entonces $\underline{\alpha^E_M} = \bigwedge\left[\alpha^E_M\right]_{\mathcal{E}} \preccurlyeq \alpha^E_M$. Por otro lado, $\underline{\alpha^E_M} \in \left[\alpha^E_M\right]_{\mathcal{E}}$, es decir, $\alpha^E_M \sim_{\mathcal{E}} \underline{\alpha^E_M}$. En particular, $\underline{\alpha^E_M}(E) = \alpha^E_M(E) = M$. Luego, $\alpha^E_M \preccurlyeq \underline{\alpha^E_M}$. Concluimos que $\alpha^E_M = \underline{\alpha^E_M}$, es decir, que $\alpha^E_M \in R$-prb. ■

Teorema 3.2.9. *La siguiente correspondencia es biyectiva:*

$$\begin{array}{ccc} R\text{-}prb & \to & R\text{-}pei \\ \sigma & \rightleftarrows & \widetilde{\sigma} \\ \underline{\sigma} & & \sigma \end{array}$$

En particular, R-prb es conjunto y $\sharp R$-prb$=\sharp R$-pei.

Dem. Defina la función $\varphi : R$-prb $\to R$-pei dada por $\sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$. Esta función está bien definida por la Proposición 1.1.25. Mostremos que es una biyección. Sean $\sigma, \tau \in R$-prb. Si $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$, es decir, si $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\tau}$, entonces $\underline{\sigma} = \underline{\tau}$ por la Proposición 3.2.4 (*i*). Como σ y τ son prerradicales básicos, $\sigma = \tau$. Esto prueba la inyectividad. Sea ahora

$\tau \in R$-pei. Como $\underline{\tau} \in [\tau]_{\mathcal{E}}$, entonces $[\tau]_{\mathcal{E}} = [\underline{\tau}]_{\mathcal{E}}$. Luego, $\underline{\tau} = \bigwedge [\tau]_{\mathcal{E}} = \bigwedge [\underline{\tau}]_{\mathcal{E}} = \underline{\underline{\tau}}$. Por ello, $\widetilde{\tau} = \widetilde{(\underline{\tau})}$ debido a la Proposición 3.2.4 (i). Como τ es exacto izquierdo, $\tau = \widetilde{\tau}$, y entonces $\tau = \widetilde{\tau} = \widetilde{(\underline{\tau})} = \varphi(\underline{\tau})$. Esto prueba la suprayectividad. Se sigue que φ es biyectiva. Además, es claro que la asignación $\sigma \mapsto \underline{\sigma}$ es su inversa. Por tanto, R-prb y R-pei están en correspondencia biyectiva. En particular, R-prb es conjunto y $\sharp R$-prb$=\sharp R$-pei. ■

Corolario 3.2.10. *$\{\alpha_M^E \mid E \in \mathcal{E}$ y $M \leqslant_{ti} E\}$ es un conjunto.* ■

Definición 3.2.11. *Sea $\sigma \in R$-pr. Decimos que σ es extremo si $\sigma(ES) = 0$ o $\sigma(ES) = ES$ para cada $S \in R$-Simp.*

El siguiente resultado caracteriza a los prerradicales extremos de R-pei en términos de módulos inyectivos principales.

Teorema 3.2.12. *Sean $\sigma \in R$-pei y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Son equivalentes:*

$i)$ σ es extremo.

$ii)$ Para cada $S \in R$-Simp y cada monomorfismo $S \hookrightarrow \sigma(\bar{E})$ existe un monomorfismo $ES \hookrightarrow \sigma(\bar{E})$.

$iii)$ $\sigma^{\perp} = \omega_0^{\sigma(\bar{E})}$.

Dem. Sean $\sigma \in R$-pei y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal.

$i) \Rightarrow ii)$ Suponga que σ es extremo y sean $S \in R$-Simp y $f : S \to \sigma(\bar{E})$ un monomorfismo. Puesto que $\bar{E}$ es inyectivo y $S \leqslant_e ES$, entonces existe un monomorfismo $\bar{f} : ES \to \bar{E}$ que extiende a ιf, donde $\iota : \sigma(\bar{E}) \to \bar{E}$ es la inclusión. Consecuentemente, $\sigma\bar{f} : \sigma(ES) \to \sigma(\bar{E})$ también es un monomorfismo. Por otro lado, como $\sigma \in R$-pei, entonces σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos por la Proposición 1.1.17. En particular, $\sigma(\bar{E}) \in \mathbb{T}_\sigma$, y como $f(S) \leqslant \sigma(\bar{E})$, se tiene que $f(S) \in \mathbb{T}_\sigma$, es decir, que $\sigma(f(S)) = f(S)$. Por ser f monomorfismo, $S \overset{f}{\cong} f(S)$, de modo que $\sigma(S) \overset{\sigma f}{\cong} \sigma(f(S)) = f(S) \overset{f^{-1}}{\cong} S$. De aquí es fácil verificar que $\sigma(S) = S$. Ahora, como σ es extremo, $\sigma(ES) = 0$ o ES. Si $\sigma(ES) = 0$, entonces $\sigma(S) = 0$, lo cual no es cierto. Por tanto, $\sigma(ES) = ES$, y entonces $\sigma\bar{f} : ES \to \sigma(\bar{E})$ es el monomorfismo buscado.

$ii) \Rightarrow iii)$ Suponga que para cada $S \in R$-Simp y cada monomorfismo $S \hookrightarrow \sigma(\bar{E})$ existe un monomorfismo $ES \hookrightarrow \sigma(\bar{E})$. Si $\sigma(\bar{E}) = 0$, entonces $\sigma = \omega_{\sigma(\bar{E})}^{\bar{E}} = \omega_0^{\bar{E}} = \omega_{0(\bar{E})}^{\bar{E}} = 0$ por ser 0 exacto izquierdo sobre R. Luego, $0^{\perp} = \bigwedge_{S \in S_0} \omega_0^{ES} = \bigwedge_{S \in \emptyset} \omega_0^{ES} = 1 = \omega_0^0 = \omega_0^{0(\bar{E})}$ y este caso es probado. Asuma pues que $\sigma(\bar{E}) \neq 0$. Si $x \in \sigma(\bar{E})$-$\{0\}$, $K_x \leqslant Rx \leqslant \sigma(\bar{E})$ es máximo (existe pues $0 \neq Rx$ es finitamente generado) y $f_x \in Hom_R(Rx, E\frac{Rx}{K_x})$ está dada por la composición $Rx \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} \frac{Rx}{K_x} \overset{\iota}{\hookrightarrow} E\frac{Rx}{K_x}$, entonces existe $\bar{f}_x \in Hom_R(\sigma(\bar{E}), E\frac{Rx}{K_x})$ tal que $\bar{f}_x \restriction_{Rx} = f_x$ por ser $E\frac{Rx}{K_x}$ inyectivo. Además, note que $\bar{f}_x(x) \neq 0$. Como σ es exacto izquierdo, entonces es idempotente, de modo que $0 \neq \bar{f}_x(x) \in \bar{f}_x(\sigma(\bar{E})) = \bar{f}_x(\sigma(\sigma(\bar{E}))) \leqslant \sigma(E\frac{Rx}{K_x})$. Por tanto, $\sigma(E\frac{Rx}{K_x}) \neq 0$, es decir, $\frac{Rx}{K_x} \in S_\sigma$. Se sigue que

$$\sigma^\perp(\sigma(\bar{E})) = (\bigwedge_{S \in S_\sigma} \omega_0^{ES})(\sigma(\bar{E})) = \bigcap_{S \in S_\sigma} \omega_0^{ES}(\sigma(\bar{E})) \leqslant \bigcap_{x \in \sigma(\bar{E})\text{-}\{0\}} \omega_0^{E\frac{Rx}{K_x}}(\sigma(\bar{E}))$$

$$= \bigcap_{x \in \sigma(\bar{E})\text{-}\{0\}} (\bigcap_{f \in Hom_R(\sigma(\bar{E}), E\frac{Rx}{K_x})} ker f) \leqslant \bigcap_{x \in \sigma(\bar{E})\text{-}\{0\}} ker \bar{f}_x = 0.$$

Justifiquemos la última igualdad. Suponga que existe $0 \neq y \in \bigcap_{x \in \sigma(\bar{E})\text{-}\{0\}} ker \bar{f}_x \leqslant \sigma(\bar{E})$. Entonces $y \notin ker \bar{f}_y$. Sin embargo, ya se hizo notar antes que $\bar{f}_y(y) \neq 0$, es decir, que $y \notin ker \bar{f}_y$, lo cual no puede ser. Por tanto, $\bigcap_{x \in \sigma(\bar{E})\text{-}\{0\}} ker \bar{f}_x = 0$. Hemos así probado que $\sigma^\perp(\sigma(\bar{E})) = 0$, y con ello, que $\sigma^\perp \preccurlyeq \omega_0^{\sigma(\bar{E})}$. Para probar la otra desigualdad considere $S \in S_\sigma$. Sabemos que existe un monomorfismo $j : ES \to \bar{E}$ por la la Proposición 2.2.4. Por tanto, $0 \neq \sigma(ES) {=} \omega_{\sigma(\bar{E})}^{\bar{E}}(ES) {=} \bigcap_{f \in Hom_R(ES, \bar{E})} f^{-1}(\sigma(\bar{E})) \leqslant j^{-1}(\sigma(\bar{E}))$. Luego, $S \leqslant j^{-1}(\sigma(\bar{E}))$ en vista del Lema 1.2.23, y como j es monomorfismo, $S \cong j(S) \leqslant j(j^{-1}(\sigma(\bar{E}))) \leqslant \sigma(\bar{E})$. Por ello, $S \hookrightarrow \sigma(\bar{E})$, y debido a las hipótesis, $ES \hookrightarrow \sigma(\bar{E})$. Así, $\omega_0^{\sigma(\bar{E})}(ES) {=} \bigcap_{f \in Hom_R(ES, \sigma(\bar{E}))} ker f \leqslant ker(ES \hookrightarrow \sigma(\bar{E})) {=} 0$. En consecuencia, $\omega_0^{\sigma(\bar{E})} = 0$, y entonces $\omega_0^{\sigma(\bar{E})} \preccurlyeq \omega_0^{ES}$. Hemos así probado que $\omega_0^{\sigma(\bar{E})} \preccurlyeq \omega_0^{ES}$ para cada $S \in S_\sigma$, y con ello, que $\omega_0^{\sigma(\bar{E})} \preccurlyeq \sigma^\perp$. Concluimos que $\sigma^\perp = \omega_0^{\sigma(\bar{E})}$.

$iii) \Rightarrow i)$ Suponga que $\sigma^\perp = \omega_0^{\sigma(\bar{E})}$ y sea $S \in R$-Simp tal que $\sigma(ES) \neq 0$. Sabemos que $\sigma^\perp(ES) = 0$ en vista de la Proposición 1.4.7, de modo que $\omega_0^{\sigma(\bar{E})}(ES) = \sigma^\perp(ES) = 0$. Por otro lado, la familia $\{f\}_{f \in Hom_R(ES, \sigma(\bar{E}))}$ induce $\varphi := \otimes_{f \in Hom_R(ES, \sigma(\bar{E}))} f \in Hom_R(ES, \sigma(\bar{E})^{Hom_R(ES, \sigma(\bar{E}))})$ por la propiedad universal del producto. Observe que φ es monomorfismo, pues $ker \varphi = \bigcap_{f \in Hom_R(ES, \sigma(\bar{E}))} ker f = \omega_0^{\sigma(\bar{E})}(ES) = 0$. Ya que ES es finitamente cogenerado por el Corolario 2.2.2, tenemos que $ES \hookrightarrow \sigma(\bar{E})^X$ para algún $X \subseteq Hom_R(ES, \sigma(\bar{E}))$ finito. Como ES también es uniforme por el Lema 1.2.23, se sigue que existe un monomorfismo $j : ES \to \sigma(\bar{E})$ por la Proposición 2.2.3. Si K es la imágen de ES bajo este monomorfismo, entonces $\sigma(K) = \sigma(\sigma(\bar{E})) \cap K = \sigma(\bar{E}) \cap K = K$ en vista de que σ es exacto izquierdo. Por tanto, $\sigma(ES) \overset{\sigma j}{\cong} K = \sigma(K) \overset{j^{-1}}{\cong} ES$. De aquí es fácil verificar que $\sigma(ES) = ES$. Concluimos que σ es extremo. ■

Corolario 3.2.13. *Sean $\sigma \in R$-pei y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Si $\sigma(\bar{E})$ es un sumando directo de $\bar{E}$, entonces σ y $\sigma^\perp$ son radicales y $\underline{\sigma}$ es idempotente. De hecho, $\sigma = \omega_0^{\bar{E}/\sigma(\bar{E})}$, $\sigma^\perp = \omega_0^{\sigma(\bar{E})}$ y $\underline{\sigma} = \alpha_{\sigma(\bar{E})}^{\sigma(\bar{E})}$.*

Dem. Sean $\sigma \in R$-pei y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal y suponga que $\sigma(\bar{E})$ es un sumando directo de $\bar{E}$. Entonces $\bar{E} \overset{h_1}{\cong} \sigma(\bar{E}) \bigoplus \frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}$. Considere el isomorfismo $h_2 : \sigma(\bar{E}) \to \sigma(\bar{E}) \bigoplus 0$ dado por $x \mapsto (x, 0)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\bar{E} \arrow[r, "h_1"] & \sigma(\bar{E}) \bigoplus \frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})} \\
\sigma(\bar{E}) \arrow[u, hook, "\iota_1"] \arrow[r, "h_2"] & \sigma(\bar{E}) \bigoplus 0 \arrow[u, hook, "\iota_2"]
\end{tikzcd}$$

Luego, $\omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} = \omega^{\sigma(\bar{E})\bigoplus \bar{E}/\sigma(\bar{E})}_{\sigma(\bar{E})\bigoplus 0}$ y $\alpha^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} = \alpha^{\sigma(\bar{E})\bigoplus \bar{E}/\sigma(\bar{E})}_{\sigma(\bar{E})\bigoplus 0}$ por la Proposición 1.2.4. Además, ya sabemos que $\sigma = \omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})}$ por ser σ exacto izquierdo y que $\underline{\sigma} = \alpha^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})}$ por la Proposición 3.2.3. Entonces $\sigma = \omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} = \omega^{\sigma(\bar{E})\bigoplus \bar{E}/\sigma(\bar{E})}_{\sigma(\bar{E})\bigoplus 0} = \omega^{\sigma(\bar{E})}_{\sigma(\bar{E})} \wedge \omega_0^{\bar{E}/\sigma(\bar{E})} = 1 \wedge \omega_0^{\bar{E}/\sigma(\bar{E})} = \omega_0^{\bar{E}/\sigma(\bar{E})}$ y $\underline{\sigma} = \alpha^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})} = \alpha^{\sigma(\bar{E})\bigoplus \bar{E}/\sigma(\bar{E})}_{\sigma(\bar{E})\bigoplus 0} = \alpha^{\sigma(\bar{E})}_{\sigma(\bar{E})} \vee \alpha_0^{\bar{E}/\sigma(\bar{E})} = \alpha^{\sigma(\bar{E})}_{\sigma(\bar{E})} \vee 0 = \alpha^{\sigma(\bar{E})}_{\sigma(\bar{E})}$ gracias a la Proposición 1.2.26. En particular, σ es radical y $\underline{\sigma}$ es idempotente en vista de la Proposición 1.3.2. Por otra parte, $\sigma(\bar{E})$ es inyectivo, de modo que la condición $ii)$ del Teorema 3.2.12 se cumple. Consecuentemente, $\sigma^{\perp} = \omega_0^{\sigma(\bar{E})}$ por el mismo teorema. Finalmente, $\sigma^{\perp}$ es radical por la Proposición 1.4.5. ■

El siguiente resultado caracteriza a los radicales de R-pei en términos de módulos inyectivos principales.

Teorema 3.2.14. *Sean $\sigma \in R$-pei y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal. Son equivalentes:*

i) σ es radical.

ii) $\sigma = \omega_0^{\bar{E}/\sigma(\bar{E})}$.

iii) $\sigma = \omega_0^{E\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}}$.

iv) Existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $\sigma(\bar{E}) = \bigcap_{f \in Hom_R(\bar{E}, E)} ker f$.

Dem. Sean $\sigma \in R$-pei y $\bar{E}$ un módulo inyectivo principal.

$i) \Leftrightarrow ii)$ Suponga que σ es radical. Por la Proposición 1.3.7 (ii) (c), σ es radical sii $\sigma = c(\sigma)$ y por la Proposición 1.3.8 (ii), $c(\sigma) = c(\omega^{\bar{E}}_{\sigma(\bar{E})}) = \omega_0^{\bar{E}/\sigma(\bar{E})}$. Luego, σ es radical sii $\sigma = \omega_0^{\bar{E}/\sigma(\bar{E})}$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Suponga que $\sigma = \omega_0^{\bar{E}/\sigma(\bar{E})}$. Entonces $\sigma(E\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}) \cap \frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})} = \sigma(\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}) = 0$, y dado que $\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})} \leqslant_e E\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}$, se tiene que $\sigma(E\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}) = 0$. Por tanto, $\sigma \preccurlyeq \omega_0^{E\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}}$. Por otro lado, $\omega_0^{E\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}}(\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}) \preccurlyeq \omega_0^{E\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}}(E\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}) = 0$, de modo que $\omega_0^{E\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}} \preccurlyeq \omega_0^{\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}} = \sigma$. Concluimos que $\sigma = \omega_0^{E\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}}$.

$iii) \Rightarrow i)$ Se sigue inmediatamente de la Proposición 1.3.2.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Suponga que $\sigma = \omega_0^{E_{\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}}}$. Entonces $\omega_0^{E_{\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}}}(\bar{E}) = \sigma(\bar{E})$, lo cual significa que $\sigma(\bar{E}) = \bigcap_{f\in Hom_R(\bar{E},E_{\frac{\bar{E}}{\sigma(\bar{E})}})} kerf$.

iv) $\Rightarrow$ *i)* Suponga que existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $\sigma(\bar{E}) = \bigcap_{f\in Hom_R(\bar{E},E)} kerf$. Esto es equivalentemente a que $\omega_0^E(\bar{E}) = \sigma(\bar{E})$. Así, $\omega_0^E \sim_{\bar{E}} \sigma$, o lo que es lo mismo, $\omega_0^E \sim_{\mathcal{E}} \sigma$ por la Proposición 3.1.5. Luego, $\widetilde{\omega_0^E} = \widetilde{\sigma}$ por la Proposición 3.1.3 y como ω_0^E y σ son exactos izquierdos, se sigue que $\omega_0^E = \sigma$. Se concluye que σ es radical. ■

Capítulo 4

Ejemplos

4.1. $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2$

Denotemos por $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2$ al conjunto $\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_2 \text{ y } y \in (\mathbb{Z}_2)^2\}$. $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2$ adquiere estructura de anillo asociativo con identidad multiplicativa $\begin{pmatrix} 1 & (0,0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dotándolo de las operaciones usuales de suma y producto para matrices. Además, es un anillo conmutativo artiniano.

Es sencillo mostrar que $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \bigoplus 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \bigoplus \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \{(0,0),(1,1)\} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son ideales de este anillo. De hecho, esta lista consiste de todos sus ideales no triviales, ya que cualquier otro subgrupo aditivo no trivial posee un elemento de la forma $\begin{pmatrix} 1 & (a,b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{Z}_2)$, que es su mismo inverso multiplicativo. Por consiguiente, la retícula de ideales es:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2 \arrow[d, dash] & \\
& J \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
I_1 \arrow[dr, dash] & I_2 \arrow[d, dash] & I_3 \arrow[dl, dash] \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior muestra que J es el único ideal máximo, por lo que $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2$-Simp tiene un sólo elemento S, que además es isomorfo a I_1, I_2 e I_3 por ser ideales mínimos. Note también que $J \leqslant_e \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2$ y que la suma de cualesquiera dos de los ideales I_1, I_2 e I_3 es una suma directa interna igual a J.

El módulo inyectivo principal canónico en $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2$-Mod es $\bigoplus_{S\in\mathbb{Z}_2\ltimes(\mathbb{Z}_2)^2\text{-Simp}} ES = ES = E_0$ por la Proposición 2.1.12. De aquí que $\kappa_1 = 1$. Para calcular κ_2, primero observe que la composición $J = I_1 \dot{\bigoplus} I_2 \cong S \bigoplus S \hookrightarrow E(S \bigoplus S) = ES \bigoplus ES$ induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, hook, "e"] \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2 \arrow[d, hook, dashed] \\ S \bigoplus S \arrow[r, hook] & ES \bigoplus ES \end{tikzcd}$$

Esto prueba que hay un monomorfismo $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2 \hookrightarrow (E_0)^2$. No obstante, no sucede que $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^2 \hookrightarrow E_0$, ya que $E_0 = ES$ es uniforme por la Proposición 1.2.23, y por ende, sólo puede contener a un simple (que en este caso es S) y no a tres. Por tanto, $\kappa_2 = 2$.

4.2. $\mathbb{Z}$

Es bien sabido que el conjunto de los grupos abelianos divisibles e inescindibles, o lo que es lo mismo, el conjunto de los $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos inescindibles, es $\check{\mathcal{E}}=\{\mathbb{Z}_{p^\infty} \mid p \text{ es primo}\}\cup\{\mathbb{Q}\}$ y que $\bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty} \cong {}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$. Como $\mathbb{Z}$ es un anillo neteriano, se sigue inmediatamente que $\bigoplus_{Q\in\check{\mathcal{E}}} Q = \mathbb{Q} \bigoplus (\bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}) \cong \mathbb{Q} \bigoplus {}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$ es el módulo inyectivo principal canónico en $\mathbb{Z}$-Mod por la Proposición 2.1.9. Por otra parte, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un anillo uniserial que contiene a $\mathbb{Z}_p$, lo cual implica que $E\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Recordando que sobre un anillo neteriano las cápsulas inyectivas conmutan con las sumas directas, se deduce que $E_0 = E(\bigoplus_{S\in\mathbb{Z}\text{-Simp}} S) = E(\bigoplus_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{p \text{ primo}} E\mathbb{Z}_p = \bigoplus_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_{p^\infty} \cong {}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$.

Para cada $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ considere el morfismo $f_q : \mathbb{Q} \to {}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$ dado por $r \mapsto rq + \mathbb{Z}$, cuyo núcleo claramente es $q^{-1}\mathbb{Z}$. La familia $\{f_q\}_{q\in\mathbb{Q}\text{-}\{0\}}$ induce el morfismo $f = \otimes_{q\in\mathbb{Q}\text{-}\{0\}} f_q : \mathbb{Q} \to ({}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}})^{\mathbb{Q}\text{-}\{0\}}$ por la propiedad universal del producto. Observe que tiene núcleo trivial, ya que $\bigcap_{q\in\mathbb{Q}\text{-}\{0\}} ker f_q = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}\text{-}\{0\}} q^{-1}\mathbb{Z} \leqslant \bigcap_{p \text{ primo}} p\mathbb{Z} = 0$. Consecuentemente, f es monomorfismo, y puesto que $({}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}})^{\mathbb{Q}\text{-}\{0\}} \cong (E_0)^{\aleph_0}$, $\mathbb{Q} \hookrightarrow (E_0)^{\aleph_0}$. Luego, $\mathbb{Q} \bigoplus {}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}} \hookrightarrow (E_0)^{\aleph_0}$ y $\mathbb{Z} \hookrightarrow (E_0)^{\aleph_0}$. En particular, $(E_0)^{\aleph_0}$ es un módulo inyectivo principal por la Proposición 2.1.5.

Mostremos que $\kappa_1 = \aleph_0 = \kappa_2$. Para esto, suponga primero que m es un entero positivo tal que $(E_0)^m$ es un módulo inyectivo principal. Entonces $\mathbb{Z}$-pei$=\{\omega_N^{(\bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty})^m} \mid N \leqslant_{ti} (\bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty})^m\}$ gracias al Teorema 2.3.7, y como los subgrupos de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ son de la forma $\mathbb{Z}_{p^k}$ con $0 \leqslant k \leqslant \infty$ (convengamos en denotar con $\mathbb{Z}_{p^0}$ al subgrupo 0 de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$) y todos ellos son subgrupos totalmente invariantes, se tiene que $\mathbb{Z}$-pei también es el conjunto de todos los posibles ínfimos entre elementos del conjunto $\{\omega_{\mathbb{Z}_{p^k}}^{\mathbb{Z}_{p^\infty}} \mid p \text{ es primo y } 0 \leqslant k \leqslant \infty\}$ en vista de las Proposiciones 1.1.5 (i), 1.2.7 y 1.2.26 (i). Ya que $\omega_0^{\mathbb{Q}}$ es exacto izquierdo sobre $\mathbb{Z}$ por la Proposición 1.3.2, lo anterior implica que $\omega_0^{\mathbb{Q}}$

es el ínfimo de un subconjunto Γ de $\{\omega_{\mathbb{Z}_{p^k}}^{\mathbb{Z}_{p^\infty}} \mid p$ es primo y $0 \leqslant k \leqslant \infty\}$. Si Γ es vacío o Γ=$\{1\}$, entonces $\omega_0^{\mathbb{Q}}$ es el prerradical 1, lo cual es imposible ($\omega_0^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 0$). Por tanto, Γ es no vacío y $\Gamma \neq\{1\}$, así que existen un primo p y un entero $0 \leqslant n < \infty$ mínimo con la propiedad de que $\omega_{\mathbb{Z}_{p^n}}^{\mathbb{Z}_{p^\infty}} \in \Gamma$. Para cada primo p, $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}) = 0$ ($\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un grupo de torsión y $\mathbb{Q}$ es un grupo libre de torsión), por lo que $\omega_0^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Por otro lado, para cualesquiera dos primos distintos p y q, $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{q^\infty}) = 0$ (si hay un morfismo no cero h, entonces existe $0 \neq x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ tal que $0 \neq h(x) \in \mathbb{Z}_{q^\infty}$ es anulado por una potencia de p mayor a uno, lo cual no puede ser), de modo que $\omega_{\mathbb{Z}_{q^k}}^{\mathbb{Z}_{q^\infty}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ para cada $0 \leqslant k \leqslant \infty$. Luego, $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \omega_0^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = (\bigwedge \Gamma)(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = (\omega_{\mathbb{Z}_{p^n}}^{\mathbb{Z}_{p^\infty}} \wedge (\bigwedge(\Gamma\text{-}\{\omega_{\mathbb{Z}_{p^N}}^{\mathbb{Z}_{p^\infty}}\}_{n \leqslant N \leqslant \infty}))(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \omega_{\mathbb{Z}_{p^n}}^{\mathbb{Z}_{p^\infty}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \cap \mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^n}$ (si $\Gamma\text{-}\{\omega_{\mathbb{Z}_{p^N}}^{\mathbb{Z}_{p^\infty}}\}_{n \leqslant N \leqslant \infty}$ es no vacío, entonces sus elementos son de la forma $\omega_{\mathbb{Z}_{q^k}}^{\mathbb{Z}_{q^\infty}}$ con q un primo distinto de p y $0 \leqslant k \leqslant \infty$). Esto contradice que $\omega_0^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, por lo que es falso que $(E_0)^m$ sea un módulo inyectivo principal. Obtenemos entonces que $\kappa_1 = \aleph_0$. Finalmente, si $\aleph_0$ no fuera el menor cardinal tal que $\mathbb{Z} \hookrightarrow (E_0)^{\aleph_0}$, entonces $\mathbb{Z}$, que es un grupo abeliano libre de torsión, estaría encajado en un producto finito de copias de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, que es un grupo de torsión, lo cual no puede ser. De aquí que $\kappa_2 = \aleph_0$.

4.3. $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$

Sean p un primo, $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ el anillo de enteros p-ádicos y $\mathbb{Q}_p$ su campo de fracciones. Los ideales de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ son 0 y $p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ con $0 \leqslant k$, por lo que $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}}{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}}$ es un grupo de torsión para cada $0 \leqslant k$.

Considere $\pi \in \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ y $a \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Si $\pi = \sum_{i=0}^{\infty} t_i p^i$, donde $0 \leqslant t_i < p$ para cada i y $o(a) = p^n$ para algún entero no negativo n, definimos πa=$(\sum_{i=0}^{n-1} t_i p^i)a$. Con esta operación, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ adquiere estructura de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$-módulo. Denotemos por $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ al conjunto $\{(a, b) \mid a \in \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ y $b \in \mathbb{Z}_{p^\infty}\}$. Dados $(\pi, a), (\pi', a') \in \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$, definimos el producto de (π, a) y (π', a') como $(\pi, a)(\pi', a') = (\pi\pi', \pi a' + \pi' a)$ usando la acción de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ sobre $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Con este producto y con la suma de parejas coordenada a coordenada, $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ adquiere estructura de anillo asociativo con identidad multiplicativa $(1, 0)$. Además, es un anillo uniserial conmutativo.

La cadena de ideales del anillo es $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \supset p\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \supset \cdots \supset p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \supset \cdots \supset 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \supset \cdots \supset 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k} \supset \cdots \supset 0 \bigoplus \mathbb{Z}_p \supset 0$. Cada ideal es totalmente invariante por la Proposición 1.2.8 y $p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ es generado por $(p^k, 0)$ para cada $0 \leqslant k$ gracias a que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible. También es sencillo verificar con la cadena anterior que $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-Simp=$\{0 \bigoplus \mathbb{Z}_p\}$ y que $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-fil=$\{\eta(I) \mid I \leqslant \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}\} \cup \{\eta(\mathbb{Q}_p)\}$, donde $\eta(\mathbb{Q}_p)$ se define como $\{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \mid 0 \leqslant k\}$.

Las asignaciones $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}}{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}}\to 0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^k}$ y $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}}{0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^k}}\to p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$ dadas por $\bar{r}\mapsto(0,{}^1\!/\!{}_{p^k})r$ y $\bar{r}\mapsto p^k r$, respectivamente, son isomorfismos de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$-módulos para cada $0\leqslant k$. Definimos $\left(p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}\right)^c=0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^k}$, $(0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^k})^c=p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $(0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty})^c=0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$. En vista de lo anterior, si $I\leqslant\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$ e $I\neq 0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$, entonces $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}}{I}\cong I^c$. Más aún, se cumplen las siguientes propiedades para cualquier $I\leqslant\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$:

i) $I^{cc}=I$.
ii) $Ann(I)=I^c$.
iii) Si $I\leqslant J\leqslant\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$, entonces $J^c\leqslant I^c$.

Por otra parte, tenemos un isomorfismo de anillos $\chi:\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}}{0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}}\to\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ dado por $(\pi,a)+0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}\mapsto\pi$. La composición $\rho:\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}\xrightarrow{\eta}\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}}{0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}}\xrightarrow{\chi}\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ induce estructuras de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$-módulo en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ y $\mathbb{Q}_p$ por medio del cambio de anillos. Con estas estructuras se puede verificar que χ es un isomorfismo de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$-módulos. Consecuentemente ρ también es un morfismo de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$-módulos.

Necesitamos dos hechos importantes y nada evidentes:

$\mathbb{Q}_p$ y $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$ son inyectivos en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$-Mod.

Dem. Primero lo probaremos para $\mathbb{Q}_p$. Sean $I\leqslant\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $f\in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}}(I,\mathbb{Q}_p)$. Veamos que f se puede extender a todo el anillo.

Caso 1. $I=p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$ para algún $0\leqslant k$.

Suponga que $f(p^k,0)=\frac{\pi_1}{\pi_2}$ para algunos $\pi_2,\pi_2\in\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ y $\pi_2\neq 0$. Entonces $f(r(p^k,0))=rf(p^k,0)=r\frac{\pi_1}{\pi_2}=r\frac{p^k\pi_1}{p^k\pi_2}=r(p^k\frac{\pi_1}{p^k\pi_2})=r(\rho(p^k,0)\frac{\pi_1}{p^k\pi_2})=r((p^k,0)\frac{\pi_1}{p^k\pi_2})=r(p^k,0)(\frac{\pi_1}{p^k\pi_2})$ para cada $r\in\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Como $p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es generado por $(p^k,0)$, lo anterior significa que f está dado por la acción de elementos de $p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\bigoplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$ sobre un elemento fijo de $\mathbb{Q}_p$, lo cual es equivalente a que f se pueda extender a todo el anillo.

Caso 2. $I=0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^k}$ para algún $0\leqslant k\leqslant\infty$.

Observe que $\mathbb{Q}$ es subanillo de $\mathbb{Q}_p$. Por ello, $\mathbb{Q}_p$ adquiere una estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Si β es una base, entonces $\mathbb{Q}_p\cong\mathbb{Q}^{(\beta)}$ como espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$, y por ende, también como grupos. Esto implica que $\mathbb{Q}_p$ es un grupo libre de torsión. Como $0\bigoplus\mathbb{Z}_{p^k}$ es un grupo de torsión, es necesario que $f=0$. Por tanto, f se puede extender a todo el anillo.

Por el criterio de Baer, se sigue que $\mathbb{Q}_p$ es inyectivo en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}\ltimes\mathbb{Z}_{p^\infty}$-Mod.

Ahora lo probaremos para $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Sean $I \leqslant \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $f \in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(I, \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty})$. Mostraremos que f se puede extender a todo el anillo.

Caso 1. $I = p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ para algún $0 \leqslant k$.

Recuerde que para cada $a \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ existe $b \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ tal que $p^k b = a$ ya que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible.

Subcaso 1.1. $f(p^k, 0) = (0, a)$ para algún $a \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Entonces $f(p^k, 0) = (0, b)(p^k, 0)$ para algún $b \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, por lo que $f(r(p^k, 0)) = rf(p^k, 0) = r(0, b)(p^k, 0) = (r(p^k, 0))(0, b)$ para cada $r \in \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Subcaso 1.2. $f(p^k, 0) = (\pi, a)$ para algunos $0 \neq \pi \in \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ y $a \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Claramente $Ann(p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}$. Si denotamos con ${}^1\!/_{p^k}$ al generador de $\mathbb{Z}_{p^k}$, $(0, \pi({}^1\!/_{p^k})) = (0, {}^1\!/_{p^k})(\pi, a) \in (0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k})(\pi, a) = Ann(p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty})f(p^k, 0) = f(Ann(p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty})(p^k, 0)) = 0$, de modo que $\pi({}^1\!/_{p^k}) = 0$. Como ${}^1\!/_{p^k}$ tiene orden p^k, entonces $\pi \in p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ en vista de la definición de la acción de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ sobre $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Luego, si denotamos con ${}^\pi\!/_{p^k}$ al elemento de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ tal que $\pi = p^k\,{}^\pi\!/_{p^k}$, obtenemos que $f(p^k, 0) = ({}^\pi\!/_{p^k}, b)(p^k, 0)$ para algún $b \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, por lo que $f(r(p^k, 0)) = rf(p^k, 0) = r({}^\pi\!/_{p^k}, b)(p^k, 0) = (r(p^k, 0))({}^\pi\!/_{p^k}, b)$ para cada $r \in \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Como $p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ es generado por $(p^k, 0)$, en cada subcaso se ha mostrado que f está dada por la acción de los elementos de $p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ sobre un elemento fijo en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$, lo cual es equivalente a que f se pueda extender a todo el anillo.

Caso 2. $I = 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}$ para algún $0 \leqslant k \leqslant \infty$.

Como $0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}$ es un grupo de torsión, f mapea a $0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}$ en el subgrupo de torsión de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$, que es $0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Puesto que $0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ son isomorfos como grupos, $0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible, es decir, es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo. Por tanto, f es extendido a un elemento $\bar{f} \in End_{\mathbb{Z}}(0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty})$.

Existe un isomorfismo de anillos $\star$ entre $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ y $End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$, dado por

$$\begin{aligned} \star : \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} &\to End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \\ \pi &\mapsto \begin{array}{c} \pi^\star : \mathbb{Z}_{p^\infty} \to \mathbb{Z}_{p^\infty} \\ a \mapsto \pi a \end{array} \end{aligned}$$

(Puede consultar [7] P.A. Krylov, Alexander V. Mikhalev, Askar Tuganbaev, *Endomorphism Rings of Abelian Groups* (Springer, Netherlands, 2003)). Esto significa que todos los endomorfismos de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ son multiplicación por algún entero

p-ádico. Observe que $\star$ se prolonga a $End_{\mathbb{Z}}(0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty})$, a través del isomorfismo de anillos canónico

$$\begin{array}{c} End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \to End_{\mathbb{Z}}(0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}) \\ f \mapsto \begin{array}{c} 0 \oplus f : 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \to 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \\ (0,a) \mapsto (0, f(a)) \end{array} \end{array}$$

Por lo anterior, existe un entero p-ádico π tal que $\bar{f} = 0 \oplus \pi^\star$. Luego, $f(0,a) = \bar{f}(0,a) = (0 \oplus \pi^\star)(0,a) = (0, \pi a) = (0,a)(\pi, 0)$ para cada $(0,a) \in 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}$. Esto significa que f está dada por la acción de los elementos de $0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}$ sobre un elemento fijo en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$, lo cual es equivalente a que f se pueda extender a todo el anillo.

Por el criterio de Baer, se sigue que $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ es inyectivo en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-Mod (o en otras palabras, que $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ es anillo autoinyectivo). $\blacksquare$

De ambos hechos podemos concluir que $(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}) \bigoplus \mathbb{Q}_p$ es inyectivo en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-Mod. Más aún, $\mathbb{Q}_p = E\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ por ser $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ esencial como $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-submódulo en $\mathbb{Q}_p$ (si $0 \neq \frac{\pi_1}{\pi_2} \in \mathbb{Q}_p$, entonces $0 \neq \pi_1 \in \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ y $\pi_1 = (\pi_2, 0)\frac{\pi_1}{\pi_2}$) y $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty} = E(0 \bigoplus \mathbb{Z}_p) = E_0$ por ser $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ un anillo uniserial.

$\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-pei es el conjunto $\{\omega_I^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}} \mid I \leqslant \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}\} \cup \{\omega_0^{\mathbb{Q}_p}\}$. Para probarlo bastará ver que este último conjunto está en correspondencia uno a uno con el conjunto de filtros lineales de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ bajo la biyección del Teorema 1.1.34. Más precisamente, probaremos que

$\mathscr{F}_{\omega_{I^c}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}} = \eta(I)$ para cada $I \leqslant \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $\mathscr{F}_{\omega_0^{\mathbb{Q}_p}} = \eta(\mathbb{Q}_p)$.

Dem. Dividamos la prueba en dos partes.

Parte 1. Sea $I \leqslant \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Probemos que $\mathscr{F}_{\omega_{I^c}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}} = \eta(I)$, es decir, que $\eta(I)=\{J \leqslant \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty} | \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J} \in \mathbb{T}_{\omega_{I^c}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}}\}$.

$\subseteq$. Sea $J \in \eta(I)$.

Caso 1. $J \neq 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Recuerde que $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J} \cong J^c \leqslant I^c$. Si $f \in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(J^c, \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty})$, entonces $f(J^c) \leqslant J^c$, ya que J^c es ideal totalmente invariante de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ es anillo autoinyectivo. Por tanto, $f(J^c) \leqslant I^c$, de modo que $\omega_{I^c}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(J^c) = J^c$. Consecuentemente, $\omega_{I^c}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J}) = \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J}$.

Caso 2. $J = 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Recuerde que $\chi : \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \to \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ es un isomorfismo. Si $f \in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}, \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty})$, entonces f no puede ser un monomorfismo ($\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ es un grupo libre de torsión y todo ideal de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ tiene elementos de orden finito), por lo que f se factoriza a través de un cociente de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ de la forma $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}}{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}}$ para algún $0 \leqslant k$. Como este cociente es un grupo de torsión, $f(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}) \leqslant 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \leqslant I^c$, de modo que $\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}) = \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$. Consecuentemente, $\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{I^c}(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}) = \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}$.

$\supseteq$. Sea $J \leqslant \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ tal que $J \notin \eta(I)$ y suponga que $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J} \in \mathbb{T}_{\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{I^c}}$. Observe que

$$\begin{aligned}
I\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J} &= Ann(I^c)\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{I^c}(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J}) \\
&= Ann(I^c)(\bigcap_{f \in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J}, \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty})} f^{-1}(I^c)) \\
&\leqslant \bigcap_{f \in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J}, \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty})} Ann(I^c)f^{-1}(I^c) \\
&= \bigcap_{f \in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J}, \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty})} f^{-1}(Ann(I^c)I^c) \\
&= \bigcap_{f \in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J}, \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty})} ker f
\end{aligned}$$

Caso 1. $J \neq 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Tenemos que $I\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J} \leqslant ker(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J} \cong J^c \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0$ en vista de la observación anterior. Esto prueba que $I \leqslant J$, lo cual no es posible. Por tanto, $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{J} \notin \mathbb{T}_{\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{I^c}}$.

Caso 2. $J = 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Como $ker(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \xrightarrow{\eta} \frac{\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}}{\frac{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}} \cong \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \cong 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}) = \frac{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}$ para cada $0 \leqslant k$, tenemos que $I\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \leqslant \bigcap_{0 \leqslant k} \frac{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} = 0$ en vista de la observación anterior. Esto prueba que $I \leqslant 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$, lo cual no es posible. Por tanto, $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \notin \mathbb{T}_{\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{I^c}}$.

Parte 2. Probemos que $\mathscr{F}_{\omega_0^{\mathbb{Q}_p}} = \eta(\mathbb{Q}_p)$, es decir, que $\eta(\mathbb{Q}_p)$=$\{I \leqslant \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty} | \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{I} \in \mathbb{T}_{\omega_0^{\mathbb{Q}_p}}\}$.

$\subseteq$: Sea $I \in \eta(\mathbb{Q}_p)$. Entonces $I = p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ para algún $0 \leqslant k$. Además, ya sabemos que $(p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty})^c = 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}$. Por otra parte, $Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}(0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^m}, \mathbb{Q}_p) = 0$ ($\mathbb{Q}_p$ es libre de torsión), de modo que $\omega_0^{\mathbb{Q}_p}(0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^m}) = 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^m}$. Se sigue que $\omega_0^{\mathbb{Q}_p}(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}) = \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}$, es decir, que $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \in \mathbb{T}_{\omega_0^{\mathbb{Q}_p}}$.

$\supseteq$: Sea $I \leqslant \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ tal que $I \notin \eta(\mathbb{Q}_p)$.

Caso 1. $I = 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Ya sabemos que $\chi : \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \to \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ es un isomorfismo. Por otra parte, $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ es un monomorfismo, de modo que $\omega_0^{\mathbb{Q}_p}(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}) = 0 \neq \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$. Se sigue que $\omega_0^{\mathbb{Q}_p}(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}) \neq \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}$, o equivalentemente, que $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \notin \mathbb{T}_{\omega_0^{\mathbb{Q}_p}}$.

Caso 2. $I = 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}$ para algún $0 \leqslant k$.

Ya sabemos que $(0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k})^c = p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Por otra parte, la composición de morfismos $p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \xrightarrow{\eta} \frac{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \hookrightarrow \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \overset{\chi}{\cong} \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ tiene núcleo $0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$, de modo que $\omega_0^{\mathbb{Q}_p}(p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}) \leqslant 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \neq p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Se sigue que $\omega_0^{\mathbb{Q}_p}(\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}}) \neq \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}}$, o equivalentemente, que $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}} \notin \mathbb{T}_{\omega_0^{\mathbb{Q}_p}}$. ■

Con lo anterior queda probado que $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-pei=$\{\omega_I^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}} | I \leqslant \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}\} \cup \{\omega_0^{\mathbb{Q}_p}\}$.

Observe que $1 = \omega_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}} \succ \omega_{p\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}} \succ \cdots \succ \omega_{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}} \succ \cdots \succ \omega_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}} \succ \omega_0^{\mathbb{Q}_p} \succ \cdots \succ \omega_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}} \succ \cdots \succ \omega_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_p}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}} \succ \omega_0^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}} = 0$, pues los filtros lineales de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ satisfacen $\eta(0) \supset \eta(0 \bigoplus \mathbb{Z}_p) \supset \cdots \supset \eta(0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}) \supset \cdots \supset \eta(0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}) \supset \eta(\mathbb{Q}_p) \supset \cdots \supset \eta(p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}) \supset \cdots \supset \eta(p\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}) \supset \eta(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty})$ y la correspondencia del Teorema 1.1.34 preserva el orden.

Ahora nos dedicaremos a probar que $(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}) \bigoplus \mathbb{Q}_p$ es un módulo inyectivo principal en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-Mod. Para esto necesitamos algunos cálculos:

$\omega_{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$ para cada $0 \leqslant k$, $\omega_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$ y $\omega_0^{\mathbb{Q}_p}(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Dem. Sea $f \in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\mathbb{Q}_p, \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty})$ y suponga que $Imf \nleqslant 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Entonces la composición $\mathbb{Q}_p \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \xrightarrow{\rho} \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ es un morfismo no cero. Como ρ es suprayectiva, también es un morfismo de $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$-módulos. Esto no puede ser, pues $Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}}(\mathbb{Q}_p, \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}) = 0$ (si $g \in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}}(\mathbb{Q}_p, \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}})$ y $\frac{\pi_1}{\pi_2} \in \mathbb{Q}_p$, entonces $g(\frac{\pi_1}{\pi_2}) = g(\frac{p^k\pi_1}{p^k\pi_2}) = p^k g(\frac{\pi_1}{p^k\pi_2}) \in p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$ para cada $0 \leqslant k$, por lo que $g(\frac{\pi_1}{\pi_2}) = 0$). Por tanto, $Imf \leqslant 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$, y en consecuencia, $\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$ para cada $0 \leqslant k$ y $\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$. Ahora, sea $f \in Hom_{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}_p)$. Como $\mathbb{Q}_p$ es un grupo libre de torsión, necesariamente $0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \leqslant kerf$. Por otro lado, la composición $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \xrightarrow{\eta} \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \overset{\chi}{\cong} \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ es un morfismo con núcleo $0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Consecuentemente, $\omega_0^{\mathbb{Q}_p}(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$. ■

Con la cadena de prerradicales y los cálculos anteriores obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\omega^{(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}) \bigoplus \mathbb{Q}_p}_{\sigma((\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}) \bigoplus \mathbb{Q}_p)} &= \omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{\sigma(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty})} \wedge \omega^{\mathbb{Q}_p}_{\sigma(\mathbb{Q}_p)} \\
&= \begin{cases}
\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \wedge \omega^{\mathbb{Q}_p}_{\mathbb{Q}_p} = \omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} & \text{si } \sigma = \omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \\
\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \wedge \omega^{\mathbb{Q}_p}_{\mathbb{Q}_p} = \omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} & \text{si } \sigma = \omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \\
\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \wedge \omega^{\mathbb{Q}_p}_{0} = \omega^{\mathbb{Q}_p}_{0} & \text{si } \sigma = \omega^{\mathbb{Q}_p}_{0} \\
\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}} \wedge \omega^{\mathbb{Q}_p}_{\omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}}(\mathbb{Q}_p)} = \omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}} & \text{si } \sigma = \omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k}}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Esto prueba que $(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}) \bigoplus \mathbb{Q}_p$ es un módulo inyectivo principal en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-Mod.

La familia $\{\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \xrightarrow{\eta} \frac{\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}}{\frac{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}} \cong \frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}} \cong 0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^k} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty} = E_0 \mid 0 \leqslant k\}$ induce un morfismo θ por la propiedad universal del producto. Observe que $ker\theta = \bigcap_{0 \leqslant k} \frac{p^k\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} = 0$, por lo que $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \overset{\theta}{\hookrightarrow} (E_0)^{\aleph_0}$. Puesto que $\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \leqslant_e E\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}$, θ induce ahora un monomorfismo $E\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \hookrightarrow {E_0}^{\aleph_0}$, y como $\mathbb{Q}_p = E\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \cong E\frac{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}$, entonces $\mathbb{Q}_p \hookrightarrow (E_0)^{\aleph_0}$. Por tanto, $(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}) \bigoplus \mathbb{Q}_p \hookrightarrow (E_0)^{\aleph_0}$. En particular, $(E_0)^{\aleph_0}$ también es un módulo inyectivo principal en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-Mod por la Proposición 2.1.5. De hecho, $\aleph_0$ es el menor cardinal con esta propiedad, pues asumiendo que $(E_0)^n$ sea un módulo inyectivo principal en $\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$-Mod para algún $0 < n$, tenemos por el Teorema 2.3.7 que $\omega_0^{\mathbb{Q}_p} \overset{\varphi}{\mapsto} \omega_0^{\mathbb{Q}_p}((E_0)^n) = (\omega_0^{\mathbb{Q}_p}(E_0))^n = (\omega_0^{\mathbb{Q}_p}(\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}))^n = (0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty})^n \overset{\psi}{\mapsto} \omega^{(E_0)^n}_{(0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty})^n} = \bigwedge_{i=1}^n \omega^{E_0}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} = \omega^{E_0}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} = \omega^{\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} \ltimes \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{0 \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}} \neq \omega_0^{\mathbb{Q}_p}$, lo cual no puede ser. Luego, $\kappa_1 = \aleph_0$. Por otro lado, es evidente que $\kappa_2 = 1$.

4.4. $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$

Denotemos por $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ al anillo de matrices $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$, donde p es primo. Por ser finito, $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ es un anillo artiniano izquierdo.

Existe una correspondencia biyectiva $\Im$ entre $\{V \subseteq (\mathbb{Z}_p)^2 \mid V$ es subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_p)^2$ sobre $\mathbb{Z}_p\}$ y $\{I \leqslant M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p) \mid I \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}\}$, dada por $V \mapsto \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z_p & Z_p \end{pmatrix} \mid (b,c) \in V\}$. Por otra parte, note que $J_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 \\ \mathbb{Z}_p & 0 \end{pmatrix}$ es un ideal izquierdo. Denotemos con $S_1 = \Im(\text{eje x de } (\mathbb{Z}_p)^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}_p & 0 \end{pmatrix}$, ${S_1}^{\perp} = \Im(\text{eje y de } (\mathbb{Z}_p)^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ y $J_2 = \Im((\mathbb{Z}_p)^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$. Entonces los grupos cociente $\frac{M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)}{J_1}$, $\frac{M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)}{J_2}$ y $\frac{J_1}{S_1}$ tienen orden p, por lo que hemos encontrado a todos los ideales izquierdos no triviales de $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$. Es fácil mostrar que S_1, J_1 y J_2 son los únicos ideales bilaterales no triviales, que $S_1 \cong \frac{M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)}{J_1}$ y que cualesquiera dos ideales contenidos en J_2 que correspondan a subespacios vectoriales de dimensión 1 en $(\mathbb{Z}_p)^2$ son isomorfos. Por consiguiente, la retícula de ideales izquierdos es:

$$\begin{tikzcd}
 & M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
J_1 \arrow[dr, dash] & & J_2 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & S_1 \arrow[dr, dash] & \ldots \Im(V) \ldots \arrow[d, dash] & {S_1}^{\perp} \arrow[dl, dash] \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

(V es cualquier recta por el origen distinta a los ejes coordenados en $(\mathbb{Z}_p)^2$). El diagrama anterior muestra que J_1 y J_2 son lo únicos ideales izquierdos máximos, por lo que si denotamos con S_2 a $\frac{M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)}{J_2}$, tenemos $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-Simp$=\{S_1, S_2\}$ ($S_1 \ncong S_2$, pues tienen anuladores distintos). Note también que $S_1 \leqslant_e J_1$ y que $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p) = J_1 \dot{\bigoplus} {S_1}^{\perp}$. Como $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ es libre en $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-Mod, esto último implica que J_1 y ${S_1}^{\perp}$ son proyectivos. De hecho, $\Im(V)$ es proyectivo para cualquier V con $dim_{\mathbb{Z}_p}(V) = 1$, pues en ese caso $\Im(V) \cong {S_1}^{\perp}$. Más aún, como la suma directa módulos de proyectivos es un módulo proyectivo, entonces $J_2 = S_1 \dot{\bigoplus} {S_1}^{\perp}$ también es proyectivo. Hemos así probado que todo ideal izquierdo de este anillo es proyectivo, o en otras palabras, que $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ es anillo hereditario izquierdo.

Para progresar en nuestro estudio del anillo $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$, necesitamos el siguiente resultado técnico extraído de [6] Tsit-Yuen Lam, *Lectures on Modules and Rings*

(Springer-Verlag, New York, 1999):

Sean R y S anillos tales que $R \subseteq S$, $\emptyset \neq B \subseteq R$ e $I \in S$-Mod. Suponga que $BS \subseteq R$ y que $Ann_I(B) = 0$. Si I es inyectivo como S-módulo, entonces I es inyectivo como R-módulo con la estructura inducida por el cambio de anillos $R \hookrightarrow S$.

Dem. Sea $J \leqslant R$ y $f \in Hom_R(J, I)$.

Considere los S-módulos SJ y S y defina el siguiente morfismo de S-módulos:

$$\begin{aligned} &g : SJ \to I \\ &\textstyle\sum s_i a_i \mapsto \sum s_i f(a_i), \end{aligned}$$

donde $s_i \in S_i$ y $a_i \in J$ para cada i.

Veamos que g está bien definida. Suponga que $\sum s_i a_i = 0$ y sea $b \in B$. Como $BS \subseteq R$ y $\sum bs_i a_i = 0$, entonces $b \sum s_i f(a_i) = \sum bs_i f(a_i) = \sum f(bs_i a_i) = f(\sum bs_i a_i) = 0$. Por ser b arbitrario, $\sum s_i f(a_i) \in Ann_I(B)$. Luego, $\sum s_i f(a_i) = 0$.

Como I es inyectivo en S-Mod, g es extendido a S por un morfismo de S-módulos $\bar{g}$. Note también que g extiende a f. Por otra parte, I, SJ y S son R-módulos con la estructura inducida por el cambio de anillos $R \hookrightarrow S$. Además, todo morfismo de S-módulos definido entre ellos es también un morfismo de R-módulos. Consecuentemente, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en R-Mod:

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dd, bend right, "f"'] & R \arrow[d, hook] \\
SJ \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] & S \arrow[dl, dashed, "\bar{g}"] \\
I &
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior muestra que la restricción de $\bar{g}$ a R es un morfismo de R-módulos que extiende a f. Por el criterio de Baer, se sigue que I es inyectivo en R-Mod. ■

$M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ y $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ son anillos tales que $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p) \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$, $\emptyset \neq J_2 \subseteq M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ y $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p) \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-Mod. Más aún, $J_2 M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} = J_2 \subseteq M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ y $Ann_{M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)}(J_2) = 0$, pues si $0 \neq \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ y, por ejemplo $x \neq 0$, entonces $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in J_2$ cumple que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & x^{-1}z \end{pmatrix} \neq 0$ (los casos $y, z, w \neq 0$ son análogos). Puesto que $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ es inyectivo como $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-módulo por ser anillo semisimple (Teorema de Wedderburn-Artin),

$M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ es inyectivo como $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-módulo con la estructura inducida por el cambio de anillos $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p) \hookrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ en vista del resultado anterior. Por otra parte, es sencillo mostrar que $J_1 \cong {}^{M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)}/\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ y $S_2 \cong \frac{J_1}{S_1}$ ($\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ es un $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-submódulo de $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$). Como $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ es anillo hereditario izquierdo, la clase de los módulos inyectivos sobre $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ es cerrada bajo cocientes. Luego, por ser $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ inyectivo en $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-Mod, J_1 es inyectivo en $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-Mod, y de hecho, $J_1 = ES_1$. Consecuentemente, S_2 también es inyectivo en $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-Mod. Por tanto, el módulo inyectivo principal en $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-Mod es $\bar{E} = \bigoplus_{S\in M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)\text{ - Simp}} ES = ES_1 \bigoplus ES_2 = J_1 \bigoplus S_2$ por la Proposición 2.1.12.

Un cálculo sencillo muestra que $Ann_{\bar{E}}(0) = \bar{E}$, $Ann_{\bar{E}}(S_1) = S_1 \bigoplus S_2$, $Ann_{\bar{E}}(J_1) = S_1 \bigoplus 0$, $Ann_{\bar{E}}(J_2) = 0 \bigoplus S_2$ y $Ann_{\bar{E}}(M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)) = 0$, por lo que $S_{ti}(\bar{E})$=$\{0,\ S_1 \bigoplus 0,\ 0 \bigoplus S_2,\ S_1 \bigoplus S_2,\ \bar{E}\}$ en vista del Teorema 2.3.13. Como $\omega_0^{\bar{E}} = \omega_{0(\bar{E})}^{\bar{E}} = 0$, $\omega_{S_1 \bigoplus 0}^{\bar{E}} = \omega_{S_1}^{J_1} \wedge \omega_0^{S_2} = \omega_0^{S_2}$ ($\omega_0^{S_2}(J_1) = S_1$ debido a que $ker(J_1 \xrightarrow{\eta} \frac{J_1}{S_1} \cong S_2) = S_1$ y que no existe un monomorfismo $J_1 \hookrightarrow S_2$ por ser $S_1 \lneq J_1$ y S_2 simple, por lo que $\omega_0^{S_2} \preccurlyeq \omega_{S_1}^{J_1}$), $\omega_{0 \bigoplus S_2}^{\bar{E}} = \omega_0^{J_1} \wedge \omega_{S_2}^{S_2} = \omega_0^{J_1}$, $\omega_{S_1 \bigoplus S_2}^{\bar{E}} = \omega_{S_1}^{J_1} \wedge \omega_{S_2}^{S_2} = \omega_{S_1}^{J_1}$ y $\omega_{\bar{E}}^{\bar{E}} = 1$, se sigue que $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-pei=$\{0,\ \omega_0^{S_2},\ \omega_0^{J_1},\ \omega_{S_1}^{J_1},\ 1\}$ por el Teorema 2.3.7. Más aún, $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-rei=$\{0,\ \omega_0^{S_2},\ \omega_0^{J_1},\ 1\}$, pues si $\omega_{S_1}^{J_1}$ fuera radical, entonces $S_2 = \omega_{S_1}^{J_1}(S_2) = (\omega_0^{\bar{E}/\omega_{S_1}^{J_1}(\bar{E})})(S_2) = (\omega_0^{J_1 \bigoplus S_2/\omega_{S_1}^{J_1}(J_1) \bigoplus \omega_{S_1}^{J_1}(S_2)})(S_2) = (\omega_0^{\frac{J_1}{S_1} \bigoplus \frac{S_2}{S_2}})(S_2) = (\omega_0^{S_2} \wedge \omega_0^0)(S_2) = \omega_0^{S_2}(S_2) = 0$ por el Teorema 3.2.14 ($S_2 = \omega_{S_1}^{J_1}(S_2)$ ya que $Hom_{M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)}(S_2, J_1) = 0$ por ser S_1 el único simple en J_1), lo cual no puede ser. Finalmente, $\alpha_0^{\bar{E}} = 0$, $\alpha_{S_1 \bigoplus 0}^{\bar{E}} = \alpha_{S_1}^{J_1} \vee \alpha_0^{S_2} = \alpha_{S_1}^{J_1}$, $\alpha_{0 \bigoplus S_2}^{\bar{E}} = \alpha_0^{J_1} \vee \alpha_{S_2}^{S_2} = \alpha_{S_2}^{S_2}$, $\alpha_{S_1 \bigoplus S_2}^{\bar{E}} = \alpha_{S_1}^{J_1} \vee \alpha_{S_2}^{S_2}$, $\alpha_{\bar{E}}^{\bar{E}} = \alpha_{J_1}^{J_1} \vee \alpha_{S_2}^{S_2} = \alpha_{J_1}^{J_1}$ ($\alpha_{J_1}^{J_1}(S_2) = S_2$, por lo que $\alpha_{S_2}^{S_2} \preccurlyeq \alpha_{J_1}^{J_1}$) y todos estos prerradicales básicos son distintos. Luego, $M^{\blacktriangledown}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$-prb=$\{0,\ \alpha_{S_1}^{J_1},\ \alpha_{S_2}^{S_2},\ \alpha_{S_1}^{J_1} \vee \alpha_{S_2}^{S_2},\ \alpha_{J_1}^{J_1}\}$ por la biyección del Teorema 3.2.9.

Bibliografía

[1] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón y R. Fernández-Alonso, *Basic Preradicals and Main Injective Modules*, J. Algebra Appl. 8(1) (2009) 1-16.

[2] L. Bican, T. Kepka y P. Nemec, *Rings, Modules and Preradicals* (Marcel Dekker, New York, 1982).

[3] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso y C. Signoret, *The lattice structure of preradicals*, Comm. Algebra 30(3) (2002) 1533-1544.

[4] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso y C. Signoret, *The lattice structure of preradicals II. Partitions*, J. Algebra Appl. 1(2) (2002) 201-214.

[5] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso y C. Signoret, *The lattice structure of preradicals III. Operators*, J. Pure and Appl. Algebra 190(2) (2004) 251-265.

[6] Tsit-Yuen Lam, *Lectures on Modules and Rings* (Springer-Verlag, New York, 1999).

[7] P. A. Krylov, Alexander V. Mikhalev, Askar Tuganbaev, *Endomorphism Rings of Abelian Groups* (Springer, Netherlands, 2003).

[8] B. Stenström, *Rings of Quotients* (Springer-Verlag, Berlin, 1975).