



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA
INGENIERÍA QUÍMICA

TRANSFORMADA DE FOURIER APLICADA A LA
PERMEABILIDAD DINÁMICA DE UN FLUIDO
BIOLÓGICO VISCOELÁSTICO: SANGRE HUMANA

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
INGENIERO QUÍMICO
PRESENTA
ZAMORA CISNEROS DAVID URIEL

DIRECTOR DE TESIS
DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

CIUDAD DE MÉXICO, 2016





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE.**

Comunico a usted que al alumno(a) Zamora Cisneros David Uriel con número de cuenta 30828236-6 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 01 del mes de Abril de 2016 a las 13:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	M. EN M. GENARO ALTAMIRANO GARCÍA
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	DR. ESTEBAN MINOR PÉREZ
SUPLENTE	DR. MARIANO PÉREZ CAMACHO
SUPLENTE	I.Q. ALEJANDRO JUVENAL GUZMÁN GÓMEZ

Genaro Altamirano García
 Edson E. Herrera Valencia
 Esteban Minor Pérez
 Mariano Pérez Camacho

El título de la tesis que se presenta es: "Transformada de Fourier aplicada a la permeabilidad dinámica de un fluido biológico visco elástico: sangre humana".

Opción de Titulación: Convencional

ATENTAMENTE
 "POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
 México, D. F. a 08 de Marzo de 2016.

DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NÚÑEZ
 DIRECTOR



RECIBI:

OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES
Y DE GRADO

Vo.Bo.

Dominica Ortiz Bautista
 I.Q. DOMINGA ORTIZ BAUTISTA
 JEFA DE LA CARRERA DE I.Q.

AGRADECIMIENTOS

- A la carrera de Ingeniería Química de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.
- A mi asesor el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia por la oportunidad brindada para la realización de este trabajo bajo su tutela. Por el apoyo, los conocimientos, la experiencia transmitida y el tiempo invertido para la llevar a cabo este proyecto, así como su amistad y sus consejos, no solo para mi desarrollo académico, sino también personal y moral.
- Al M. en C. Genaro Altamirano García, por sus aportaciones, comentarios y sugerencias para con este proyecto.
- Al Dr. Esteban Minor Perez por el interés especial en la realización de este trabajo así como las aportaciones, comentarios y sugerencias con el mismo.
- Al Dr. Mariano Perez Camacho por otorgar ese otro punto de vista necesario para que hacer crecer la calidad de este trabajo, para que tenga una potencial evolución a temas más reales, así como sus aportaciones, sus críticas y sugerencias para mejorar la calidad de esta trabajo.
- Al I.Q. Alejandro Juvenal Guzmán Gómez por los comentarios, sugerencias, aportaciones e interés hacia este proyecto con motivo de enriquecer el conocimiento y la calidad aportado por este trabajo.
- Y a todas aquellas personas que aportaron y alimentaron con sus comentarios, apoyo, críticas e interés la realización de este proyecto y la culminación de mi carrera.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM << IN115615 >> << Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos aplicados a sistemas biológicos >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM << PE112716 >> << Material didáctico teórico, protocolos experimentales y aula virtual de las materias de Fenómenos de Transporte (Cuarto Semestre) y Transferencia de Masa (Séptimo Semestre) correspondientes a los ciclos intermedio y terminal de la carrera de Ingeniería Química>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Trabajo realizado gracias al apoyo del Programa de Vinculación con Egresados de la UNAM y de su Programa de Becas para Titulación Exalumnos de Alto Rendimiento. Agradezco la beca recibida.

DEDICATORIAS

Doy gracias a Dios por la oportunidad de incurrir en este viaje llamado “vida”, por la familia y los amigos que tengo. Por todas las personas y lugares que conozco y conoceré, por los momentos que aún quedan por vivir, las nuevas experiencias y conocimientos que tengo y obtendré y los logros que he de alcanzar. GRACIAS.

Así también dedico la realización de este trabajo y el gran logro que supone:

- **A mi tan amado y admirado padre David Zamora Hernández:** *por todo el amor y el apoyo que me has brindado no solo para la preparación y realización de mi carrera, sino también para la vida, todos los consejos y en algunos casos regaños que me has dado y que se quedaran grabados en mi corazón. Por todas las desveladas y desmañadas que te das para sacar adelante a la familia, a mi madre. Que sepas que eres mi orgullo e inspiración. Y que sepas que este logro no sólo es mío, sino tuyo también.*
- **A mi tan amada y alegre madre Claudia Cisneros Cisneros:** *por todo el amor y el apoyo que hacia mi demostraste sin falta. Ese amor maternal incondicional que para mí fue y sigue siendo la base de mis triunfos. Por todo el cuidado, la atención que mantienes en mi hasta ahora y que espero nunca cese. Por todos los consejos y la sabiduría con la que cuentas y nos brindas sin reparo. Y para que tengas muy en cuenta que eres el pilar que sostiene los muros de nuestro hogar y de nuestra familia. Gracias, te amo.*
- **A mis queridos hermanos Omar Arturo, Diana Claudia y Diego Alonso Zamora Cisneros:** *por todo el tiempo compartido y que hace falta por compartir. Por el apoyo y por todos esos detalles que en mi hacen una mejor persona. Por el interés que muestran por mi formación y por mí mismo. Muchas gracias.*
- **A mi asesor de tesis Edtson Emilio Herrera Valencia:** *por la oportunidad que me brindo para poder participar en este tipo de proyectos, por todo el tiempo invertido y la atención que mantuvo hasta ahora por mí. Por los conocimientos, experiencias, y consejos que me brindo no sólo como su alumno si no como su amigo. Por la amistad que me ha brindado y espero que crezca cada día más. Muchas Gracias.*
- **A mi querido padrino, primo y amigo José Valdovinos Valencia:** *por todo el apoyo que me ha brindado desde siempre. El interés y atención que me brindaste. Por mi formación, mi educación, mi familia. Que se sepas que estoy muy gratamente agradecido.*
- **A mis amigos Ever, Mario, Daniel, Luis, Hugo, Vianney, Gilberto, Ignacio, Licet, Marcos, Stephany y:** *por el compañerismo, cariño y apoyo que me han brindado. Por los todo lo momentos que compartimos en la facultad, por los partidos (algunos ganados o perdidos), por esas desveladas para las entregas de trabajos y apoyos en tareas, por las fiestirijillas en la que estuvimos juntos y disfrutamos, por el interés que demostraron y por la inspiración que hicieron llegar a mí. Pero sobre todo por su amistad, que dure toda la vida y mucho más. Y que sepan que en mi cuentan con un amigo fiel.*

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS	VII
ÍNDICE DE TABLAS	XI
NOMENCLATURA.....	XII
GLOSARIO	XIV
RESUMEN.....	XVII
CAPÍTULO I.....	19
INTRODUCCIÓN	19
1.1 Fluidos en medios porosos.	20
1.2 Aplicaciones de los fluidos viscoelásticos pulsátiles.....	22
1.2.1 Medio Poroso.	22
1.3 Permeabilidad.....	27
1.3.1 Permeabilidad intrínseca	27
1.3.2 Permeabilidad dinámica.....	28
CAPÍTULO II.....	31
ANTECEDENTES.....	31
CAPÍTULO III.....	40
OBJETIVOS E HIPÓTESIS	40
3.1 Objetivos.....	41
3.1.1 Objetivo General.....	41
3.1.2 Objetivos particulares	41
3.2 Hipótesis	41
CAPÍTULO IV	42
MARCO TEÓRICO	42
4.1 Fenómenos de Transporte.....	43
4.1.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento.	43
4.1.2 La ecuación de transporte de energía.....	44
4.1.3 Ecuación de transporte de masa.	44
4.2 Reología.	45
4.2.1 Tensor de Deformación.	45
4.2.2 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.	45

4.2.3 El tensor rapidez de deformación.	46
4.2.4 El tensor de Vorticidad.....	46
4.2.5 Tensor de esfuerzos.	47
4.3 Tipos de Fluido.	47
4.3.1 Fluido newtoniano.....	48
4.3.2 Fluidos no newtonianos.	48
4.4 Ecuaciones Constitutivas.	49
4.4.1 Ecuaciones constitutivas de viscoelásticidad lineal.....	49
4.5 Síntesis de los modelos expuestos en esta sección.....	52
4.6 Pruebas de flujo.	52
4.6.1 Flujo cortante en estado estacionario.	52
4.6.2 Funciones materiales del modelo de Maxwell.....	54
4.6.3 Modelo de Jeffreys	55
4.6.4 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias.	55
4.6.5 Modelo de Maxwell.....	56
4.6.6 Modelo de Jeffreys	57
CAPÍTULO V	59
SISTEMA FÍSICO	59
5.1 Descripción del problema físico del flujo pulsátil	60
5.2 Dinámica de flujo	61
5.2.1 Vector de velocidad	61
5.2.2 Tensores cinemáticos	61
5.3 Ecuaciones de continuidad y momento.....	64
5.4 Ecuaciones constitutivas.....	66
5.5 Modelo dinámico viscoelástico lineal de la presente tesis de licenciatura. ...	68
CAPÍTULO VI	69
MODELADO TEÓRICO	69
6.1 Modelo de Jeffreys sin efectos inerciales	70
6.1.1 Perfil de velocidades para el modelo de Jeffreys	70
6.1.2 Flujo volumétrico en estado no estacionario.	72
6.1.3 Formalismo de Fourier.....	74

6.1.4 Flujo oscilatorio a baja frecuencia	74
6.2 Modelo de Jeffreys con efectos inerciales	76
6.3 Flujo volumétrico pulsátil	82
6.3.1 Permeabilidad dinámica	85
6.3.2 Flujo volumétrico pulsátil	86
CAPÍTULO VII	88
SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	88
7.1 Ecuaciones analíticas relevantes para el estudio y análisis del sistema.....	90
7.1.1 Análisis sin efectos inerciales	90
7.1.2 Análisis con efectos inerciales	90
7.2 Simulaciones computacionales	92
7.2.1 Análisis sin efectos inerciales	92
7.2.2 Comparación con datos reométricos de sangre y sin efectos inerciales	98
7.2.3 Análisis dinámico con inercia	102
7.3 Aplicaciones en datos de sangre con bajo contenido de colesterol	109
7.3.1 Análisis sin efectos inerciales	109
7.3.2 Análisis con efectos inerciales	113
CAPÍTULO VIII	121
CONCLUSIONES	121
CAPÍTULO IX	126
TRABAJO FUTURO	126
APÉNDICE A	128
APÉNDICE B	131
BIBLIOGRAFÍA	141

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.2-1. Esquema de un medio poroso.	22
Figura 1.2-2. Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosidad constante y una zona intermedia tipo ley de potencia.	27

Tabla 2.1-1. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso para fluidos newtonianos.....	33
Tabla 2.2-2. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso para fluidos no newtonianos.....	34
Figura 2.6-1. Organización del trabajo desarrollo en la tesis.	39
Tabla 4.1-1. Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa respectivamente.	43
Figura 4.4-1. Se ilustra el Modelo de Maxwell en término de un pistón y un resorte el pistón describe la parte viscosa (disipativa) y el resorte la parte elástica (recuperación).....	50
Figura 4.4-2. Muestra un elemento acoplado en serie de un solvente (contribución viscosa) y un polímero, el cual se puede describir en término de un modelo de Maxwell y un solvente (polímero).	52
Figura 4.6-4. Ilustra el flujo cortante simple en un sistema de placas paralelas. El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo (es decir, un sistema en donde, las variables dinámicas del sistema dependen dela posición).	53
Figura 4.6-5. En el flujo oscilatorio la muestra es colocada en un sistema de placas paralelas y la placa superior se le aplica una perturbación oscilatoria de tal manera que describe un movimiento oscilatorio en el cual, se estudia la respuesta mecánica del sistema, es decir, la contribución elástica y la viscosa.	56
Figura 5.1-1. Ilustra el sistema de estudio. Un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ un fluido complejo (sangre humana) fluye por efecto de un gradiente de presión pulsátil. En el lado derecho del capilar, se representa un punto material en coordenadas cilíndricas.	60
Figura 7.2-1. Se ilustra la fluidez real adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido, que relaciona los tiempos de relajacion de Maxwell y Jeffreys.....	92
Figura 7.2-2. Se ilustra la viscosidad real adimensional en función de la frecuencia adimensional para diferentes valores de tiempo reducido, que relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.	93
Figura 7.2-3. Se ilustra la fluidez real adimensional como función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.....	94
Figura 7.2-4. Se ilustra la viscosidad real adimensional como función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.....	95
Figura 7.2-5. Se ilustra la fluidez imaginaria adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido.	96
Figura 7.2-6. Se ilustra la viscosidad imaginaria adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido.	97

Figura 7.2-7. Ilustra la función fluidez imaginaria adimensional en función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.....	98
Figura 7.2-8. Ilustra la función viscosidad imaginaria adimensional en función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.....	99
Figura 7.2-9. Se ilustra el flujo volumétrico real adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido, que relaciona los tiempos de relajacion de Maxwell y Jeffreys.	100
Figura 7.2-10. Se ilustra el flujo volumétrico imaginario adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido, que relaciona los tiempos de relajacion de Maxwell y Jeffreys.....	101
Figura 7.2-11a Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para valor del número de Reynolds pequeño ($Re=0.1$), y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).	102
Figura 7.2-11b Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para valor del número de Reynolds pequeño ($Re=0.1$), y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).	102
Figura 7.2-11c Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para valor del número de Reynolds ($Re=1$), y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).	103
Figura 7.2-11d Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para valor del número de Reynolds ($Re=1$), y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).	103
Figura 7.2-11e Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para un valor pequeño del número de Reynolds ($Re = 0.001$) y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).	105
Figura 7.2-11f Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para un valor pequeño del número de Reynolds ($Re = 0.001$) y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).	105
Figura 7.2-12a Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional en una corta ventana de observación, un número de Reynolds ($Re=1$) y un valor del tiempo reducido adimensional para un fluido de Jeffreys.	107
Figura 7.2-12b Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional en una corta ventana de observación, un número de Reynolds ($Re=1$) y un valor del tiempo reducido adimensional para un fluido de Jeffreys.	107
Figura 7.3-1. Se ilustra la flujo volumétrico real adimensional como función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.....	109

Figura 7.3-2. Se ilustra la flujo volumétrico real adimensional como función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.....	110
Figura 7.3-3. Se ilustra la flujo total adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido, que relaciona los tiempos de relajacion de Maxwell y Jeffreys.	111
Figura 7.3-4. Se ilustra el flujo total adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores de tiempos de relajación.....	112
Figura 7.3-5a Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor fijo para el número de Reynolds ($Re = 1$).	113
Figura 7.3-5b Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor fijo para el número de Reynolds ($Re = 1$).	113
Figura 7.3-6a Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor para el número de Reynolds ($Re = 10$).	115
Figura 7.3-6b Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor para el número de Reynolds ($Re = 10$).	115
Figura 7.3-6c Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor para el número de Reynolds ($Re = 12$).	116
Figura 7.3-6d Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor para el número de Reynolds ($Re = 12$).	116
Figura 7.3-7a Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor fijo para el número de Reynolds ($Re = 0.1$).	119
Figura 7.3-7b Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor fijo para el número de Reynolds ($Re = 0.1$).	119



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1-1. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso para fluidos newtonianos.....	33
Tabla 2.2-2. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso para fluidos no newtonianos.....	34
Tabla 4.1-1. Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa respectivamente.	43

NOMENCLATURA

Vectores y tensores

σ	Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]
D	Tensor rapidez de deformación [1/s]
∇V	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
∇V^T	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]
V	Vector de velocidad [m/s]
g	Vector de aceleración de la gravedad [1/s]

Operadores Matemáticos

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$	Operador Nabla [1/m]
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	Derivada parcial de la coordenada x^i [1/m]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
π	Constante Pi [1]
\mathcal{F}	Transformada de Fourier

Variables dimensionales

a	Radio del capilar [m]
L	Longitud del capilar [m]
V_z	Componente axial del vector de velocidad [m/s]
r	Coordenada radial adimensional [m]
t	Tiempo [s]
Q	Flujo volumétrico [m ³ /s]
G_0	Modulo de Elastico [Pa]
K	Permeabilidad dinámica [m ²]
K^*	Permeabilidad dinámica reducida [m ²]
K_R^*	Parte real de la permeabilidad reducida [m ²]

K_I^*	Parte imaginaria de la permeabilidad reducida [m ²]
K_N	Permeabilidad Newtoniana [m ²]
q	Flujo volumétrico en un medio poroso [m ³ /s]
G'	Modulo de almacenamiento de Maxwell
G''	Modulo de perdida de Maxwell

Variables adimensionales

τ	Esfuerzo cortante adimensional [1]
ε	Porosidad [1]

Letras Griegas

α	Exponente del modelo de Ellis [1]
$\dot{\gamma}_{rz}$	Rapidez de deformación rz [1/s]
Φ_0	Fluidez a baja rapidez de deformación [1/Pa s]
Φ_1	Fluidez a moderada rapidez de deformación [1/Pas ⁿ]
λ_0	Tiempo de relajación de Maxwell [s]
λ_J	Tiempo de retardo de Jeffrey [s]
ω	Frecuencia angular [rad/s]
ρ	Densidad [rad/s]
σ_{rz}	Componente rz del esfuerzo cortante [Pa]
σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa]
η_0	Viscosidad a bajo corte [Pa s]
η_s	Viscosidad del solvente [Pa s]
η_p	Viscosidad del polímero [Pa s]
η'	Parte real de la Viscosidad compleja [Pa s]

η

Viscosidad compleja [Pa s]

GLOSARIO

Deformación:	Cambio de posición con respecto a otra.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación)
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley newton aplicada a un medio continuo.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Esfuerzo en la pared:	Esfuerzo evaluado en la pared.
Fluido:	Es aquel que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversiblemente.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no-newtoniano:	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
Fluido viscoelástico:	Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.
Fluido biológico:	Son las diferentes excreciones y secreciones que provienen del organismo.
Flujo cortante:	Flujo que se aplica una fuerza tangencial al sistema que se deforma continua e irreversiblemente.
Flujo homogéneo:	Es el flujo en la cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.
Flujo oscilante:	Es el flujo que se origina cuando un plato oscila a una función periódica.
Flujo pulsátil:	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.

Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo.
Frecuencia Angular:	Se refiere a la frecuencia del movimiento circular expresada en proporción del cambio de ángulo.
Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo.
Medio poroso:	Es un medio (volumen) en donde coexisten orificios de forma irregular interconectados.
Modelo de Ellis:	Ecuación constitutiva no newtoniana que contiene como caso particular el modelo newtoniano y el modelo de ley de potencia.
Modelo de Maxwell:	Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapidez de deformación baja (viscoelasticidad lineal).
Modelo de Jeffrey:	Ecuación geológica viscoelástico lineal que acopla un solvente con un polímero.
Viscoelasticidad lineal:	Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
Viscoelasticidad no lineal:	Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
Permeabilidad:	Medida de la resistencia a fluir en un medio poroso.
Permeabilidad dinámica:	Es una medida de la resistencia en el espacio de las frecuencias.
Porosidad:	Es la medida de espacios vacíos en un volumen total.
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Sangre:	Fluido biológico que presenta dos fases y que es viscoelástico.
Tensor de Esfuerzo:	Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.
Tiempo de relajación:	Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo.



- Tiempo de retardo:** Es el tiempo en el que tarda el material en llegar al equilibrio debido a la aplicación de un esfuerzo cortante.
- Velocidad promedio:** Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.
- Viscosidad:** Es una medida de la resistencia a fluir de un sistema

RESUMEN

En este trabajo se estudia la permeabilidad dinámica de un fluido biológico viscoelástico (Sangre Humana) en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. Para describir la transferencia de momento y reología se suponen las siguientes condiciones: (i) proceso isotérmico, (ii) fluido incompresible, (iii) estado no estacionario, (iv) fluido viscoelástico, (v) los efectos gravitacionales son despreciables, (vi) el sistema (fluido) es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión en la dirección z y (vii) la reología y la dinámica de flujo es descrita por la ecuación constitutiva del modelo viscoelástico de Jeffreys el cual acopla al solvente y el polímero a través de una ecuación constitutiva Maxwelliana. Al combinar la ecuación de momento con la ecuación constitutiva reológica se obtuvo una ecuación diferencial parcial lineal que describe los cambios de la velocidad debido a la inercia y la viscoelasticidad, inducidos por el gradiente de presión. Suponiendo, que la función velocidad es continua el espacio temporal es transformado al espacio de frecuencias utilizando el operador de Fourier (transformada de Fourier). Suponiendo la condición de no deslizamiento se obtienen expresiones analíticas para el perfil de velocidad, el flujo volumétrico y la permeabilidad dinámica en función del número de Reynolds, el cual, relaciona los mecanismos inerciales y viscosos, y el tiempo reducido adimensional, el cual es un cociente entre los tiempos de Jeffreys y Maxwell, respectivamente. Físicamente, el tiempo reducido se puede interpretar como un cociente entre las viscosidades del solvente y del polímero. A partir del cálculo de la permeabilidad compleja se obtienen la parte real e imaginaria, las cuales describen la mecánica lineal entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico. La parte real muestra curvas de relajación, las cuales se ven afectadas por las propiedades materiales del medio así como la parte disipativa que corresponde a esta componente de la permeabilidad. La parte imaginaria muestra una serie de curvas resonantes y comportamiento tipo diente de sierra aludiendo a la parte elástica del sistema. En casos específicos, en donde se tiene datos con un número de Reynolds bajo y un tiempo reducido muy pequeño i. e., los efectos viscosos se superponen a los efectos inerciales que tienen relación en el número de Reynolds y el comportamiento aportado por la parte del polímero domina sobre el aportado por el solvente, se tiene que la sucesión de curvas resonantes se presentan en la parte real de la permeabilidad y el comportamiento tipo diente de sierra en la parte compleja de la permeabilidad.

Finalmente, las bondades de nuestro modelo son probadas con datos reométricos de sangre con bajo contenido de colesterol y se demuestra la concordancia entre las proyecciones teóricas y los datos experimentales, todo esto en el ámbito del régimen de viscoelasticidad lineal.

Palabras claves: Permeabilidad dinámica, Viscoelástico, Modelo de Maxwell, Modelo de Jeffreys, Transformada de Fourier.

ABSTRACT

In this work, the dynamic permeability of a biologic viscoelastic liquid (Human Blood) in a capillary of radius $r=a$ and length $z=L$ was studied. To describe the momentum transfer and rheology, the following conditions are assumed: (i) isothermal process, (ii) incompressible fluid, (iii) non-steady state, (iv) viscoelastic fluid, (v) the gravitational effects are negligible, (vi) the system (fluid) is continuous and irreversibly deformed by a pressure gradient in the axial z direction, (vii) the rheology and the dynamic of the flow is described by the constitutive equation of the Jeffreys viscoelastic model, which couples the solvent and the polymer through a Maxwellian constitutive equation.

By combining the momentum equation with the rheological constitutive equation, a linear partial differential equation that describe the changes in the velocity gradient due to inertia and viscoelasticity is obtained. All of this induced by a pressure gradient.

Assuming that the speed function is continuous, the temporary space is transformed to the frequency domain using the Fourier operator (Fourier Transform). Assuming the non-slip condition, analytical expressions for the velocity profile, the volumetric flow and the dynamic permeability are obtained as a function of Reynolds number, which relates the inertial and viscous mechanisms, and the reduced dimensionless time, which is a quotient of the Jeffreys to the Maxwell times.

Physically, the reduced time can be interpreted as a quotient between the solvent and polymer viscosities. From the calculation of the complex permeability, the real and imaginary parts are obtained, describing the linear mechanics between the pressure gradient and the volumetric flow. The real part shows relaxation curves, which are affected by the material properties of the medium through the characteristic dimensionless number; while, the imaginary part shows a series of resonant curves and a saw-tooth behavior corresponding to the elastic part of the system.

Finally, the benefits of our model predictions are tested by rheometric blood data with low cholesterol and agreement between the theoretical projections and the experimental data, in linear viscoelastic regime, is demonstrated.

Keywords: Dynamic Permeability, Viscoelastic, Maxwell Model, Jeffreys Model, Fourier Transform.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Fluidos en medios porosos.

La descripción de flujo de fluidos pulsátiles u oscilantes tiene una gran aplicación en áreas de la explotación petrolera, medios porosos, el transporte de agua en mantos acuíferos y en los campos geotérmicos, transporte de biofluidos en membranas, fluidos electroreológicos y en reactores químicos, entre otras ramas de la ciencias naturales (Cuevas & Del Rio 2001, Del Rio & Castrejón-Pita 2003, Del Rio 1993, Del Rio et al. 1998; Herrera-Valencia & Rey 2014). Por otra parte, su estudio es una parte fundamental de la mecánica de fluidos, termodinámica irreversible y en particular de la reología de fluidos complejos (Sochi 2010; Garcia-Colin & Rodriguez 1991, Barnes et al. 1989, Bird et al. 1987, Bird et al. 2002; Currie 1974). En este contexto una de las aplicaciones más importantes de los fluidos pulsátiles es la concerniente al concepto de permeabilidad la cual, se define como la resistencia que presenta un medio por el que pasa un fluido (Del Rio & Castrejón Pita 1987; Del Rio et al. 1998).

Este concepto ha sido muy explotado en reología de la sangre para describir el flujo pulsátil a través de una vena (Herrera et al 2009, 2010; Moreno et al. 2015). Por otra parte, el uso de boquillas oscilantes ha mejorado las condiciones de procesos de materia prima en los extrusores, los cuales se estudian en ciencia de polímeros (Herrera et al. 2009, 2010).

Para poder describir estos flujos se debe definir primeramente lo que es un medio poroso (Sochi 2010; Del Rio & Castrejón-Pita 1987, Del Rio et al. 1998; López de Haro et al. 1996; Kim et al. 1987; Ochoa Tapia et al. 1998; Ochoa Tapia 1995; Quintard & Withaker 1997; Whitaker 1966 a,b, 1967, 1987).

Para aclarar las propiedades de estos interesantes fluidos, empecemos presentando las ecuaciones de balance que describen la conservación de la masa y del momento:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.1-1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (1.1-2)$$

Donde ρ es la densidad de masa del fluido, \mathbf{V} el campo de velocidades, p es la presión y $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscosos (Bird et al. 2002; Withaker 1976; Bird et al. 1974) La Ec. (1.1-1) es la ecuación de continuidad que representa la conservación de masa en un sistema sin generación química.

La Ec. (1.1-2) es la ecuación de balance de cantidad de movimiento. Desde la perspectiva matemática para que este conjunto de ecuaciones sea un problema cerrado hacen falta las condiciones iniciales y de frontera (del Rio & Castrejón 2003). Desde el punto de vista físico, estas ecuaciones requieren información

adicional, una ecuación de estado entre la presión y la densidad y otra relación entre el tensor de esfuerzos y el gradiente de velocidades para que se pueda considerar un sistema cerrado (del Rio & Castrejón 2003), es decir un sistema que tiene el mismo número de incógnitas que de ecuaciones.

Precisamente, las ecuaciones constitutivas y de estado especifican el tipo de fluido que se pretende describir. Estas relaciones hacen la distinción entre un gas, un fluido incompresible y viscoelástico (Whitaker 1976a,b, 1967,1987).

El agua, el más común de los fluidos, es un buen ejemplo de un fluido newtoniano incompresible. (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991).

La aproximación de fluido incompresible no es una restricción muy severa, dado que para la mayoría de los líquidos como el agua es del orden de $\Delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ para cambios de presión del orden de atmosferas (Del Rio & Castrejón, 2003) y por lo tanto, la suposición de incompresibilidad es una aproximación razonable (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991). La clasificación de fluidos newtoniano tiene que ver con la ecuación constitutiva que relaciona el tensor de esfuerzos con el gradiente de velocidades en una forma lineal (bajas deformaciones) y en otra no lineal (altas deformaciones). Para el caso de fluidos newtonianos podemos escribir (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991).

$$\sigma = 2\mu D \quad (1.1-3)$$

Donde μ es una propiedad material conocida como viscosidad la cual, se puede interpretar como una medida de la resistencia a fluir de un medio (fluido) (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991).

Como se puede apreciar, con esta ecuación se tiene un conjunto de ecuaciones para dos incógnitas, p y \mathbf{V} que dadas las condiciones iniciales y de frontera puede resolverse. Sin embargo, en este trabajo, estamos interesados en ilustrar que pasa en los fluidos que interviene en la explotación petrolera, en los reactores químicos y los biofluidos que presentan características que los hacen ser llamados no newtonianos (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991).

La característica fundamental de los fluidos no-newtonianos es que la ecuación constitutiva ya no es lineal (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991; Del Rio & Castrejón 2003). Algunos de estos fluidos los podemos encontrar en sitios comunes. Por ejemplo, la miel; que al parar de verterla observamos un comportamiento inercial al ver que continua fluyendo por unos instantes más. En algunos procesos químicos industriales los fluidos tienen propiedades diferentes a las del agua y muchas veces son llamados fluidos complejos o exóticos (Del Rio & Castrejón 2003, García-Colín & Rodríguez, 1991;

(Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991; Del Rio & Castrejón 2003). Los fluidos no newtonianos muestran muchas propiedades diferentes entre ellas la elasticidad. Los fluidos viscoelásticos se caracterizan por presentar comportamiento disipativo y de almacenamiento asociado a la viscosidad y elasticidad respectivamente (Del Rio & Castrejón, 2003; Bird et al. 2002).

1.2 Aplicaciones de los fluidos viscoelásticos pulsátiles

1.2.1 Medio Poroso.

Una de las aplicaciones más importantes de los fluidos viscoelásticos o complejos es relacionado al transporte de cantidad de movimiento en medios porosos. Un medio poroso se puede definir como un cuerpo sólido con hoyos interconectados (poros) (Del Rio & Castrejón 2003; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987). Estos poros pueden ser espacios extremadamente pequeños, intersticios moleculares, y otros muy grandes, cavernas (Del Rio & Castrejón 2003). Como se comprende con esta definición se abarca desde membranas muy poco permeables hasta la corteza terrestre en escalas muy diferentes, Fig.1.2-1.

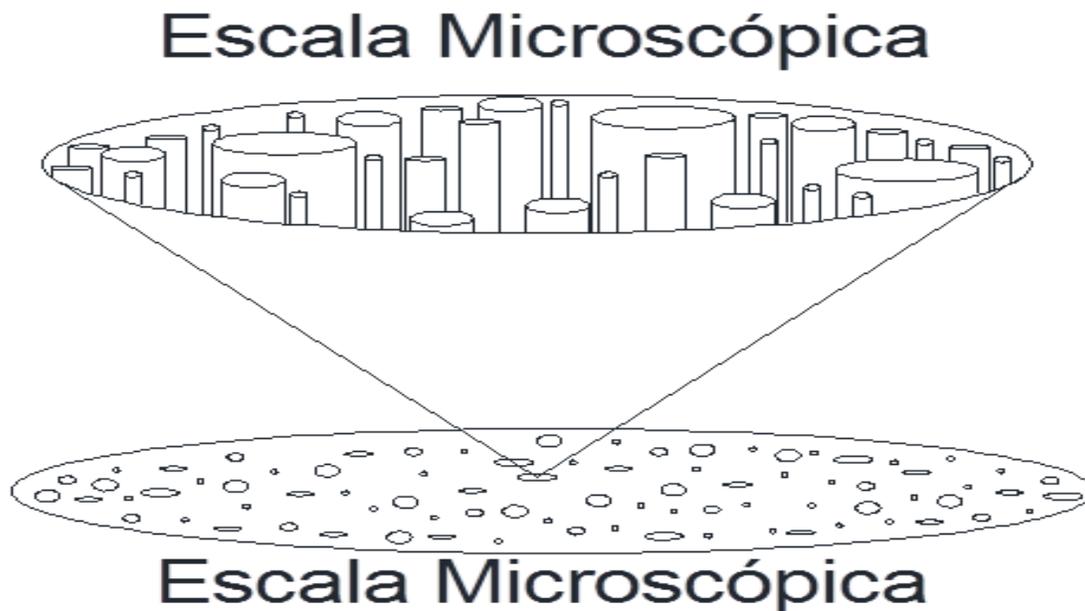


Figura 1.2-1. Esquema de un medio poroso.

Para muchos autores, la idea de poro se tomará como el espacio intermedio entre dos extremos señalados, de tal forma que los espacios sean grandes desde el punto de vista macroscópico, pero pequeños para las escalas del sistema (Del Rio & Castrejón 2003; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia 1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987). También se abordará el transporte del fluido en medios porosos y por lo tanto este medio debe ser atravesado por un fluido; de esta forma se requiere

que podamos encontrar espacios huecos en el material que estén interconectados dentro del medio poroso. Es obvio que el estudio de flujo de materia solo considera los poros efectivos y los espacios aislados no juegan papel alguno en el transporte de masa (López de Haro et al. 1997). El medio poroso puede ser caracterizado por varias propiedades geométricas, como son la porosidad ε definida como la fracción de espacio vacío con respecto al volumen total, en nuestro caso será el espacio interconectado. Es común que en la literatura se use el término diámetro promedio de poro, pero esto solo tendría sentido estrictamente si los huecos tuvieran forma cilíndrica o esférica (Del Rio & Castrejón 2003; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia 1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987; López de Haro et al. 1997).

1.2.1.1 Transporte en medios porosos.

La descripción del transporte en medios porosos presenta dificultades que radican tanto en la compleja estructura del medio poroso como en las propiedades físicas de los fluidos (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia 1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987). Esta complejidad del transporte en medios porosos se presenta claramente al describir el conjunto de ecuaciones de balance y ecuaciones constitutivas, consideradas para modelar el flujo en medios porosos. Antes de comenzar y para centrar nuestra atención en la permeabilidad debemos hacer una aproximación y suponer que el transporte de energía no es importante en el sistema (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia 1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987).

Entonces, bajo una situación isotérmica, para describir el flujo a través de un medio poroso se requiere en principio resolver el problema dado por las Ecs. (1.1-1) y (1.1-2) que deben resolverse bajo las condiciones de frontera que generalmente se toman como la condición de no deslizamiento en la frontera (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al. & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991).

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega \quad (1.2-4)$$

Donde Ω es la superficie del sólido. Evidentemente el desorden de la superficie introduce una complejidad adicional a la no linealidad de la Ec. (1.2-4). Por supuesto, también se requiere la condición inicial en todo el campo de velocidades para la solución del problema, esto es otro reto mayor (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al. & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991).

1.2.3 Hemorreología: Sangre Humana

La reología es la ciencia que estudia la respuesta de los fluidos complejos en término de dos parámetros principales: el esfuerzo y deformación (flujo). La sangre humana es un fluido de reología muy compleja, porque la viscosidad de la sangre no es proporcional al esfuerzo aplicado, es decir, es un fluido no newtoniano que cuenta con características adelgazantes al corte (cuanto mayor sea el esfuerzo aplicado menor es su viscosidad). Esto se debe en parte a la formación de estructuras transitorias (que se destruyen por el flujo) de muy corta duración, cuyo tamaño e intensidad dependen de la concentración de colesterol total, entre otros factores.

El estudio de la sangre presenta un reto mundialmente, ya que el primer paso se concentra en la caracterización de la misma y el segundo al efecto de diferentes patologías, entre las cuales se pueden citar: (i) la hiperglucemia asociada con la diabetes tipo I y II, que se han declarado como epidemia nacional, (ii) hipercolesterolemia asociada con el colesterol alto que afecta las arterias y que provocan los infartos al miocardio, (iii) el cáncer que es un desequilibrio en la producción de glóbulos blancos y (iv) todo tipo de enfermedades de transmisión sexual.

La sangre humana es un fluido con gran cantidad de funciones dentro del cuerpo humano, entre ellas la entrega de oxígeno y la remoción de dióxido de carbono de tejidos distales, y el transporte de nutrientes y metabolitos. Los trastornos metabólicos en la actualidad dan problemas que atañen a los seres humanos cada vez con mayor frecuencia: estos se atribuyen a un sin número de factores de estrés, medio ambiente, alimentación y genéticos, como la hipercolesterolemia familiar. De los múltiples trastornos metabólicos presentes en un ser humano, la hipercolesterolemia (altas concentraciones de colesterol en sangre > 200 mg/ dL) tiene grandes repercusiones en la fisiología cardiovascular. La sangre es un fluido con dos fases perfectamente diferenciadas: una suspensión de células (eritrocitos y leucocitos) que llamaremos fase dispersa en un medio líquido, como el plasma (agua, sales, proteínas y metabolitos), que llamaremos fase continua. La viscosidad de la sangre depende directamente de la relación entre la cantidad de células y el contenido de proteínas y metabolitos en el plasma. El colesterol total junto con los triglicéridos son las sustancias que más afectan la reología de la sangre humana. La sangre con concentraciones aumentadas de colesterol total presenta características bioquímicas y mecánicas diferentes de las de la sangre con concentraciones normales; la diferencia de viscosidad entre ambas es del orden de 10 veces.

1.2.3.1 La reología considera dos tipos de fluidos: newtonianos y no newtonianos

La sangre humana se ha considerado con frecuencia como un fluido newtoniano, es decir, en muchas simulaciones y artículos se supone que su viscosidad no depende del esfuerzo aplicado. Esto no es real y para que la sangre se comportara así tendría que estar muy diluida o poseer un bajo peso molecular. La sangre está compuesta de células suspendidas en un medio líquido (plasma) y la interacción entre las células depende de la velocidad a la cual se mueve el fluido; cuando dicho fluido está estático, la repulsión entre las células de la sangre, debida a la carga negativa de sus membranas, y el contenido de colesterol total y triglicéridos interactúan en un balance tal que los eritrocitos no coalescen en estructuras estables, esto ocurre solo cuando la sangre está en presencia de un anticoagulante como el ácido etilen-diamin-tetra-acético (EDTA) y no existe una patología asociada.

1.2.3.2 La sangre humana: un fluido no newtoniano

En la reología generalmente se considera dos tipos de fluidos: los newtonianos, cuya viscosidad no depende del esfuerzo aplicado o de la velocidad de flujo, ejemplos de estos fluidos son: líquidos de bajo peso molecular (moléculas pequeñas) como el agua, los aceites, los alcoholes, etc., y los fluidos no newtonianos que, curiosamente, son los que más abundan en la naturaleza y en la industria. Estos fluidos tienden a modificar su estructura con el flujo y por lo tanto, su viscosidad. Un ejemplo muy común es la pasta de dientes que usamos todos los días; mientras no le apliquemos un esfuerzo, la viscosidad de la pasta es extremadamente alta y no fluye hasta que le aplicamos un esfuerzo lo suficientemente grande como para modificar su estructura y deformarla (flujo). Otros ejemplos de estos fluidos son las pinturas, el chocolate, la mayoría de los fluidos corporales, mayonesa, catsup, secreciones de insectos entre otros.

1.2.3.3 Las propiedades del flujo de la sangre dependen de varios factores

La sangre es un fluido con reología muy compleja, cuyas propiedades de flujo resultan afectadas por la orientación y deformabilidad de las células sanguíneas. Las propiedades de agregación transitoria de las células sanguíneas, en este caso los glóbulos rojos y las plaquetas, obedecen a una teoría que sostiene que las macromoléculas, como el colesterol, promueven la agregación transitoria de los eritrocitos, ya que se interponen entre una célula y otra y generan puentes entre sus membranas para reducir la interacción electrostática natural entre estas.

1.2.3.4 Por qué la sangre humana se comporta como un fluido no newtoniano

Un fluido newtoniano como el agua es un sistema homogéneo de una sola fase, no tiene partículas en suspensión que puedan interactuar, además de que su estructura química es simple por ser una molécula pequeña compuesta solo por un átomo de oxígeno unido a dos átomos de hidrógeno. Por esta razón el agua en estado líquido tendrá la misma viscosidad independientemente de la rapidez con la que se deforme. La sangre, por otro lado, es un sistema que está formado por una fase continua (plasma), que en esencia es un fluido newtoniano, pero tiene partículas en suspensión (fase dispersa) que interactúan entre sí con el plasma. Esta fase dispersa está compuesta de células cuyas membranas tienen una carga eléctrica negativa y sustancias como el colesterol. Esto da lugar a un sistema complejo cuya respuesta reológica es muy variada dependiendo del sistema de flujo y las condiciones en las que se estudie. La Figura 1.2-2 muestra una curva teórica y experimental para una muestra de sangre humana con alto contenido de colesterol. En el reograma se observa que las curvas presentan adelgazamiento al corte, es decir, a mayor velocidad de corte la viscosidad disminuye. A bajas deformaciones de corte, la sangre muestra conglomerados de partículas y todas las estructuras están orientadas al azar (fase dispersa) y por lo tanto mayor resistencia al flujo. En la segunda etapa a esfuerzos moderados, los constituyentes de la sangre (eritrocitos, fase dispersa) se orientan más en la dirección de flujo, lo que da origen a estructuras que cada vez se oponen menos al flujo y por lo tanto la viscosidad disminuye. Estas estructuras no son estables pues al dejar de fluir, el sistema recobra su estructura original y la viscosidad se eleva. Dentro del cuerpo humano, la sangre está sometida a rapidez de deformación del orden de $1-100 \text{ s}^{-1}$ que corresponde a la parte central del reograma teórico.

Las propiedades de agregación de las células sanguíneas en este caso los glóbulos rojos, obedecen a una teoría muy simple la cual sostiene que las macromoléculas (colesterol, por ejemplo) promueven la agregación de los eritrocitos ya que se interponen entre una célula y otra generando puentes entre sus membranas lo cual reduce la interacción electrostática natural entre dos células.

1.2.3.5 Como se estudia la sangre en un reómetro

La sangre, como cualquier otro fluido, puede estudiarse mediante técnicas reométricas. La sangre humana para su estudio se debe de obtener de voluntarios sanos, sin coagulopatía en curso, mediante la aplicación en un torniquete a la altura del músculo bíceps que genera turgencia para realzar las venas cefálicas y basilica. Se procede a realizar una punción y extraer sangre (5 mL aproximadamente) en un tubo adicionado con EDTA para evitar la coagulación de la sangre durante el ensayo. Los ensayos efectuados se hacen en situaciones de flujo controlado como el denominado flujo de corte simple en estado estacionario, en el que fluido se coloca entre un disco y un cono (con un ángulo pequeño cercano a un grado) del

mismo diámetro, el cono gira a una velocidad angular controlada y se determina la viscosidad a diferentes velocidades de giro. La temperatura es controlada durante la prueba y se trata de mantenerla en condiciones similares a las de una persona sana (Temperatura cercana a los 37 grados Celsius).

El equipo que controla la temperatura, la velocidad de giro del cono y mide el torque generado se denomina reómetro. En este caso se utiliza un equipo de la marca TA Instruments modelo AR-G2, con geometría de cono y platos a una temperatura de 37 C.

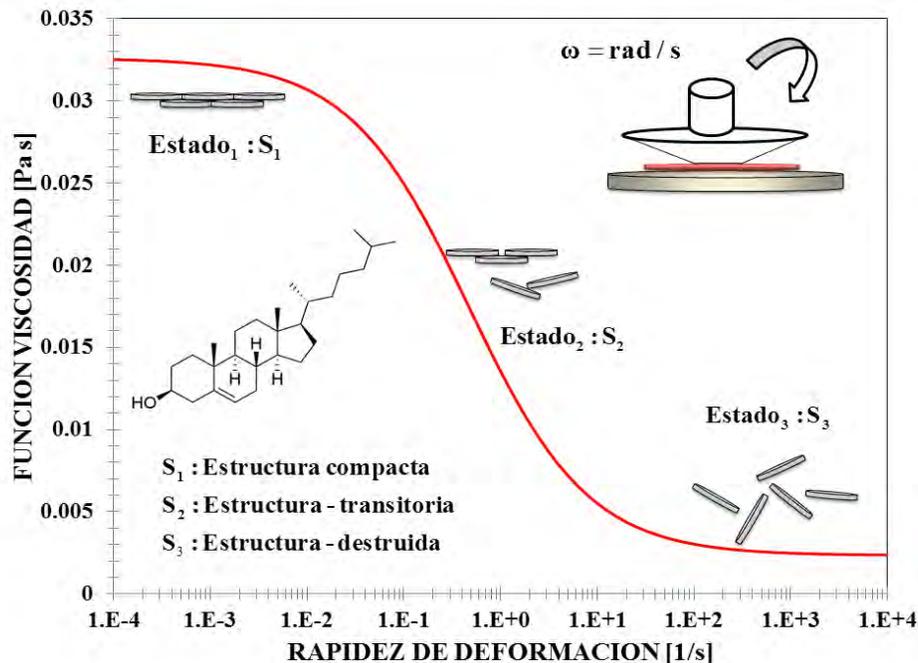


Figura 1.2-2. Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosidad constante y una zona intermedia tipo ley de potencia.

1.3 Permeabilidad

1.3.1 Permeabilidad intrínseca

La permeabilidad intrínseca es el término asociado a la conductividad del medio poroso con respecto al fluido y nos indica que tan fácilmente fluye un fluido a través de un medio poroso (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia 1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987). Se acostumbra definir el Darcy como la unidad de medición de la permeabilidad y su equivalencia es de 9.87 cm², i.e. 1 Darcy = 9.87 cm². Existen muchas formas de modelar un medio poroso, por ejemplo considérese un sólido al

que se le barrena en múltiples lugares conservando los ejes de barrenos paralelos, esto sería un manojo de tubos (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia 1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987), **esta aproximación es la más simple de todas y se conoce como la teoría del poro promedio.** Otra forma de modelar sería considerar un sistema como un cumulo de esferas solidas fijadas azarosamente distribuidas (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998). Se ha encontrado que algunos medios porosos muestran características de autosimilaridad y por ello también se han tratado de modelar a los medios porosos como fractales (Turcio et al. 2014). Como se observa, describir la microestructura de un medio poroso es un tema abierto y lleno de posibilidades (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia 1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987).

1.3.2 Permeabilidad dinámica

La permeabilidad dinámica es aquella que depende del tiempo a través de la frecuencia.

Por otro lado, como ya mencionamos, el sistema de Ecuaciones (1.1-1) y (1.1-2) no es un sistema cerrado, es necesario introducir dos ecuaciones más que especifiquen el tipo de fluido de trabajo. La primera de las ecuaciones de estado entre la presión y la densidad, la segunda se refiere a la ecuación constitutiva para el tensor de esfuerzos viscosos; pero estas podrán ser escogidas entre las Ecuaciones (1.1-3) o (1.2-4). Como ya mencionamos, es la selección de esta última ecuación donde centraremos las diferencias entre los fluidos newtonianos y no newtonianos que se estudian en este proyecto de licenciatura (del Rio 2003; Bird et al. 2002; Whitaker 1986). Por lo tanto, bajo la hipótesis de incompresibilidad, el sistema de Ecuaciones (1.1-1) y (1.1-2) se transforma en:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.3-5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.3-6)$$

Estas son las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales que tenemos que resolver en la intrincada geometría de la Fig.1. Para resolver estas ecuaciones en un medio poroso, generalmente se utilizan modelos muy simples o se define nuevas variables promedio (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991). Con este análisis capturaremos las características esenciales de los flujos de interés tecnológicos y discutimos la relevancia de contar con aproximaciones analíticas a la compleja problemática real.

Finalmente, en esta tesis abordamos de una forma simple la descripción del flujo de líquidos viscoelásticos en el régimen lineal, i.e. a deformaciones bajas en un

capilar con aplicaciones al flujo pulsátil sanguíneo. En el capítulo II se plantean los antecedentes del flujo de líquidos viscoelásticos en capilares. En el capítulo III se plantean los objetivos y las hipótesis del trabajo. El capítulo IV describe los elementos básicos para el entendimiento del trabajo asociados con los fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos. El capítulo V describe el sistema físico junto con las ecuaciones más importantes teóricas utilizadas en la descripción del flujo. En el capítulo VI se deducen las expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico y permeabilidad dinámica. En el capítulo VII se ilustran las simulaciones computacionales para las expresiones analíticas obtenidas así como la descripción y el análisis para cada una de ellas. En el capítulo VIII las conclusiones del trabajo son presentadas. El trabajo futuro: continuación, seguimiento y aplicación por parte de este trabajo es descrito en el capítulo IX. Y finalmente en el Apéndice A se detalla una alternativa que puede ser utilizada para llegar al flujo volumétrico descrito por la literatura.

En este proyecto de licenciatura se tomara como base las siguientes restricciones para modelar el flujo de un fluido viscoelástico pulsátil en un sistema biológico utilizando la transformada de Fourier. Las principales restricciones son descritas a continuación:

- a) Para describir el flujo pulsátil, se modela el flujo sanguíneo en un capilar de radio constante es decir, no existe cambios en el radio por efecto de la longitud axial. Se desprecian la vascularización de las venas y solo se describe el efecto del flujo pulsátil en una vena.
- b) Para caracterizar nuestro fluido utilizamos el modelo viscoelástico de Jeffreys, el cual, contiene tres propiedades materiales como las son: tiempo de relajación, viscosidad Newtoniana y tiempo de retardo de Jeffreys. Este sistema acopla la contribución de un fluido Newtoniano asociado al solvente y uno viscoelástico de Maxwell, el cual, describe la solución polimérica.
- c) Para describir la cinemática del fluido en el sistema, despreciamos los efectos convectivos de la ecuación de movimiento resultando un modelo dinámico lineal que combina los efectos viscoelásticos con los de la inercia.
- d) Para resolver la ecuación dinámica lineal se utiliza el formalismo de Fourier, el cual, nos permite obtener expresiones cerradas para la velocidad y el flujo volumétrico y analizar la respuesta dinámica oscilatoria en el sistema
- e) El flujo volumétrico dinámico es función de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión, propiedades geométricas, propiedades del medio como

son: (i) viscosidad y (ii) densidad del fluido y finalmente de la permeabilidad dinámica compleja que incluye los efectos inerciales y viscosos mediante un cociente de funciones de Bessel que proporcionan un comportamiento oscilante y resonante en el sistema.

- f) Un hecho importante en este trabajo, es que la permeabilidad intrínseca es una propiedad del sistema, i.e., es una condición geométrica y tiene que ver con un problema de tipo geométrico de los planos que forma la estructura porosa. Este hecho implica que la permeabilidad es función de la porosidad, diámetro del poro, tortuosidad etc., y no del medio.
- g) Los mecanismos de transferencia de energía y de masa no son tomados en cuenta, debido a que la complejidad de nuestro sistema aumentaría porque se habría que acoplar en la ecuación de momento, la de energía y masa.

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES

2.1 Ley de Darcy para un fluido newtoniano.

El estudio de la mecánica de fluidos (newtonianos y no newtonianos) en medios porosos, es uno de los temas más fascinantes y atractivos para la gente que hace investigación en fenómenos de transporte y reología de todo el mundo. La descripción del transporte de cantidad de movimiento en el medio poroso es bastante complejo, debido a la distribución azarosa de los poros en el medio, la irregularidad del diámetro del poro y la tortuosidad (Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). Debido a esto, se han implementado diferentes aproximaciones de tipo analítico, con el fin de describir la dinámica en estos sistemas. Uno de los primeros intentos en la descripción del flujo en medios porosos, es el modelo de Darcy (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). Esta ecuación empírica se basa en la suposición del poro promedio, i.e. supone que todos los poros tienen el mismo diámetro y que el sistema puede ser descrito por un manojito de capilares. La ecuación de Darcy se representa como:

$$V_0 = \frac{k}{\mu} (-\nabla_z p) \quad (2.1-7)$$

La Ec. (2.1-7) describe la velocidad promedio superficial V_0 en función de la permeabilidad k la cual, es una medida de la resistencia que presenta el medio poroso al paso de un fluido, la viscosidad μ que representa la resistencia del fluido a ser deformado mediante un esfuerzo cortante y el gradiente de presión $\nabla_z p$ que en este caso, es la fuerza motriz que genera la deformación en el fluido. La Ec. (2.1-7) representa el primer intento de describir el flujo en un medio poroso y en particular, para un fluido newtoniano, la permeabilidad k toma la siguiente forma analítica:

$$k(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon a^2}{8} \quad (2.1-8)$$

La permeabilidad intrínseca k solo depende de la porosidad y del cuadrado del radio del tubo y de un factor numérico que resulta de la integral de superficie en el flujo volumétrico. Evidentemente, se ha tratado de obtener ecuaciones empíricas que describan la permeabilidad intrínseca que es una medida de la capacidad que tiene el sistema (fluido), de ser deformado en un medio poroso (Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991). En la tabla 1 se presenta un resumen de los modelos más utilizados en la investigación de fluido en medios porosos. Los modelos más empleados en la literatura son los de: (i) Darcy, (ii) Blake-Kozeny-Carman y (iii) Ergun.

Tabla 2.1-1. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso para fluidos newtonianos.

Modelo	Ecuación
Darcy	$\frac{\Delta p}{L} = \mu \frac{V_0}{K}$
Blake-Kozeny-Carman	$\frac{\Delta p}{L} = \frac{72C\mu V_0 (1-\varepsilon)^2}{D_p^2 \varepsilon^3}$
Ergun	$\frac{\Delta p}{L} = \frac{150\mu V_0 (1-\varepsilon)^2}{D_p^2 \varepsilon^3} + \frac{1.75\rho V_0 (1-\varepsilon)}{D_p \varepsilon^3}$

a) Modelo de Darcy

El modelo de Darcy como se explicó, es un modelo que puede ser deducido suponiendo la teoría del capilar promedio, es decir que todos los poros son aproximados por medio de un capilar de radio constante. Este puede ser inferido a partir de las ecuaciones Navier-Stokes de la mecánica clásica, despreciando la inercia del material y suponiendo estado estacionario (Sochi 2010; Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991). Es importante, comentar que el modelo de Darcy solo es válido para flujo isotérmico, estado estacionario y solo toma en cuenta los mecanismos viscosos. El modelo de Darcy ha sido extendido para tomar en cuenta efectos complejos como los observados en fluidos no newtonianos en situaciones de varias fases termodinámicas. Varias generalizaciones del modelo de Darcy han sido deducidas incluyendo efectos no lineales como la inercia y la elasticidad respectivamente (Sochi et al. 2010; Shenoy 1993; Schowalter 1978).

b) Modelo Blake-Kozeny-Carman (BKC)

El modelo empírico de Blake-Kozeny-Carman es uno de los más importantes y populares en la dinámica del medio continuo, para describir el flujo a través de los medios porosos. Este modelo empírico incorpora la porosidad del medio ε , el diámetro del poro D_p y la tortuosidad del medio C , i.e. el camino libre que siguen los elementos materiales en el medio poroso. Por último, el modelo de BKC ha sido aplicado en flujo laminar a través de columnas empacadas a números de Reynolds pequeños, en donde los efectos cinéticos debido a la tortuosidad del fluido en la cama empacada son despreciables. Extensiones empíricas de este modelo para describir la transición de flujo laminar a turbulento ha sido reportado en la literatura especializada concerniente al tema.

c) Modelo de Ergun

El modelo de Ergun contiene dos contribuciones principales. La primera de ellas asociada a los mecanismos viscosos y diámetro del poro, el segundo toma en cuenta los mecanismos inerciales a través de la densidad del medio. Es importante comentar que estos modelos son empíricos y la gran mayoría de estos sistemas relacionan la fuerza motriz con las propiedades materiales del medio como son: (i) La viscosidad, (ii) La inercia, (iii) El tamaño de partícula y (iv) La tortuosidad del medio. Otra hipótesis importante, en estas propuestas es la de flujo laminar, i.e., que el número de Reynolds es menor a 200 ($Re > 200$). Por otra parte si, el número de Reynolds aumenta se tendría que modificar las aproximaciones de flujo debido a que los mecanismos inerciales juegan un papel preponderante en la descripción del flujo turbulento. (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002).

2.2 Modelos no-newtonianos para la descripción del flujo en el medio poroso.

Como se explicó en el capítulo I los fluidos newtonianos muestran una relación lineal entre el tensor rapidez de deformación y tensor de esfuerzos. Cuando los sistemas complejos de estudio presentan una relación no lineal, se necesita introducir ecuaciones empíricas o fenomenológicas que describan con un grado mayor de exactitud el flujo y la reología de estos sistemas. Cuando la viscosidad del fluido presenta una dependencia con la rapidez de deformación, puede ser representada por medio de una función llamada función viscosidad. Si el fluido presenta componentes viscosas y elásticas, este puede ser estudiado incorporando la dinámica de Hooke en las ecuaciones constitutivas. Los modelos viscoelásticos pueden ser estudiados en el régimen de viscoelasticidad lineal (bajas deformaciones) y en el régimen de viscoelasticidad no lineal (altas deformaciones). En la tabla 2.2-2 se muestran alguno de los modelos no newtonianos más empleados en la literatura especializada en fenómenos de transporte y reología.

Tabla 2.2-2. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso para fluidos no newtonianos.

Modelos	Modelo Reológico	Función Viscosidad
Ley de Potencia	$\sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = m \left(\sqrt[n-1]{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} \right)$
Ellis	$\sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_\sigma) = \frac{\eta_0}{1 + \left(\frac{ \sigma }{\sigma_{1/2}} \right)^{\alpha-1}}$

Reinner Phillipoff	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D}$	$\eta(\Pi_\sigma) = \frac{1}{\varphi_\infty + \frac{\varphi_0 - \varphi_\infty}{1 + \left(\frac{ \boldsymbol{\sigma} }{\sigma_s}\right)^2}}$
Carreau	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left[1 + (\lambda \Pi_D)^2\right]^{(1-n)/2}}$
Hershel-Bulkley	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = \frac{\eta_\infty}{\Pi_D} + m(\Pi_D)^{n-1}$
Maxwell	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D}$	$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$
Jeffreys	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \eta_0 \mathbf{D}$	$\eta = \eta_0 \frac{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$
Convectiva Superior de Maxwell	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_M \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta_0 \mathbf{D}$	En corte es la misma que el fluido Newtoniano
Oldroyd-B	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_M \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta_0 \left(\mathbf{D} + \lambda_J \overset{\nabla}{\mathbf{D}}\right)$	En corte es la misma que el fluido Newtoniano

Es preciso destacar, que esta tesis solo abordara fluidos no newtonianos viscoelásticos lineales (Maxwell y Jeffreys).

2.3 Ley de Darcy para un fluido no newtoniano (ley de potencia)

El modelo de Darcy ha sido modificado para tomar en cuenta los efectos adelgazantes, engrosantes al corte debido a las características no newtonianos de sistemas complejos (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al. & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). La diferencia del modelo de Darcy de un fluido newtoniano y uno no newtoniano radica en la viscosidad aparente μ_{app} . Por ejemplo, para un fluido no-newtoniano tipo ley de potencia el modelo de Darcy toma la forma general:

$$V_0 = \frac{\varepsilon \langle V \rangle}{A} = \frac{k}{\mu_{NN}} (-\nabla_z p) \quad (2.3-9)$$

En donde la viscosidad aparente toma la forma para un fluido tipo ley de potencia tiene la siguiente representación:

$$\mu_{app} = m \left(\frac{\langle V \rangle}{D} \right)^{n-1} \quad (2.3-10)$$

En la Ec. (2.3-10) $\langle V \rangle$ es la velocidad promedio del sistema y D es la longitud característica del sistema, m y n son los parámetros del modelo de ley de potencia. Es importante, notar que el cociente $\langle V \rangle / D$ es la rapidez de deformación característica del modelo de ley de potencia. La velocidad promedio para el modelo de ley de potencia:

$$\langle V \rangle = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left(-\frac{1}{2m} \nabla_z p \right)^\alpha \quad (2.3-11)$$

2.4 Ley de Darcy para un fluido viscoelástico (Modelo de Maxwell)

El modelo generalizado de Darcy ha sido utilizado para la descripción de fluidos viscoelásticos empleados en la descripción del flujo pulsátil sanguíneo y de sistemas micelares en medios porosos (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). El modelo generalizado de Darcy para un fluido viscoelástico toma la forma:

$$V_0 = \frac{\varepsilon \langle V \rangle}{A} = \frac{k}{\mu_{M-I}} (-\nabla_z p) \quad (2.4-12)$$

En donde la permeabilidad dinámica puede ser descrita de la siguiente manera:

$$\mu_{M-I} = \frac{\rho(i\omega) a^2 / 8}{1 - 2 \frac{J_1(\beta a) / \beta a}{J_0(\beta a)}} \quad (2.4-13)$$

Nótese que la viscosidad (Ec. (2.4-13)) es una combinación de propiedades materiales que incluyen la densidad del líquido, la frecuencia en el espacio de Fourier y de un parámetro beta β , el cual se puede interpretar como el inverso de una longitud característica. Para un fluido de Maxwell, i.e. el parámetro beta se define en la siguiente forma:

$$\beta^2 = -\frac{\rho(i\omega)}{\eta_0 / (1 + \lambda_0(i\omega))} \quad (2.4-14)$$

Y en el caso de un fluido newtoniano, i.e. cuando el tiempo de relajación de Maxwell tiende a cero $\lambda_0 = 0$, la Ec. (2.4-14) se simplifica a:

$$\beta^2 = -\frac{\rho(i\omega)}{\eta_0} \quad (2.4-15)$$

Nótese que la función viscosidad que se está manejando corresponde al modelo de Maxwell, y esta puede ser generalizada a cualquier fluido visco-elástico lineal en el régimen de bajas deformaciones (Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al. & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). Nótese que al incluir la inercia en el sistema, la permeabilidad intrínseca depende de la frecuencia, de la inercia del fluido y de un cociente de dos funciones de Bessel las cuales pueden inducir un fenómeno de tipo resonante en las curvas de permeabilidad compleja.

2.5 Ley de Darcy: efectos difusivos

En la que ε es la porosidad, la relación entre el volumen de huecos y el volumen total) k es la permeabilidad del medio poroso. La velocidad V_0 que interviene en estas ecuaciones es la velocidad superficial (velocidad volumétrica de flujo a través de la unidad de área de la sección del sólido más el fluido) promediada en una pequeña región del espacio (pequeña con respecto a las dimensiones macroscópicas del sistema de flujo pero grande con respecto al tamaño con respecto al tamaño del poro). Brinkman (1947) ha sugerido la siguiente modificación empírica de la ley de Darcy.

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{V}_0 + \mu \nabla^2 \mathbf{V}_0 + \rho \mathbf{g} \quad (2.5-16)$$

El término $\mu \nabla^2 \mathbf{V}_0$ se introduce para tener en cuenta la distorsión de los perfiles de velocidad en las aproximaciones de las paredes.

2.6 Resumen de los principales puntos estudiados en este capítulo

En este capítulo, se ha discutido alguno de las ecuaciones más empleadas en la generalización del flujo en un medio poroso. La primera aproximación es considerar un manojito de tubos y suponer que la permeabilidad intrínseca puede ser modelada con alguna de las ecuaciones empíricas de la Tabla 2.1-1. Por otra parte, si el fluido es no newtoniano, puede ser caracterizado por medio de las ecuaciones constitutivas reológicas de la Tabla 2.2-2. En el régimen de viscoelasticidad lineal se puede usar la misma técnica de Del Rio et al. (2003) para llevar al sistema del espacio temporal al de las frecuencias con el fin de deducir una expresión para la permeabilidad compleja (Ver problema 3 V4 de la ref. Bird et al. 2002). El trabajo de Del Rio et al. (2013) puede ser extendido para cualquier otro modelo viscoelástico (Jeffreys, Burgers, Maxwell Generalizado, etc) con y sin efectos de inercia incluidos.

Hasta este momento, existen varias preguntas que deben ser contestadas las cuales son formuladas a continuación:

- ✓ La permeabilidad estática o dinámica depende solamente de las propiedades del poro, es decir es independiente del fluido. En este caso, se puede separar el problema en utilizar las ecuaciones empíricas de la Tabla 2.1-1 y modelar el fluido con alguna de las ecuaciones constitutivas de la Tabla 2.2-2.
- ✓ El efecto de las propiedades del fluido debe influir en la permeabilidad dinámicas combinado con la fuerza motriz, i.e. no solamente las propiedades del poro y geométricas sino también las propiedades materiales del fluido y el gradiente de presión.
- ✓ Por último la porosidad puede ser considerada como un problema de tipo geométrico y el tamaño del poro puede variar dependiendo de las características fisicoquímicas del mismo, por lo que se necesitan combinar datos geofísicos con reométricos con el fin de caracterizar las propiedades materiales del sistema.

Por otro lado y debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas actuales y potenciales de los líquidos no-newtonianos, así como la ausencia de resultados analíticos simples que permitan contrastar las predicciones numéricas y las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de tesis de licenciatura. Para este efecto, la distribución y el contenido del material de la presente tesis se muestran en la Fig. 2.6-1, posterior a eso, se plantea el objetivo general, los objetivos particulares y la hipótesis de trabajo.

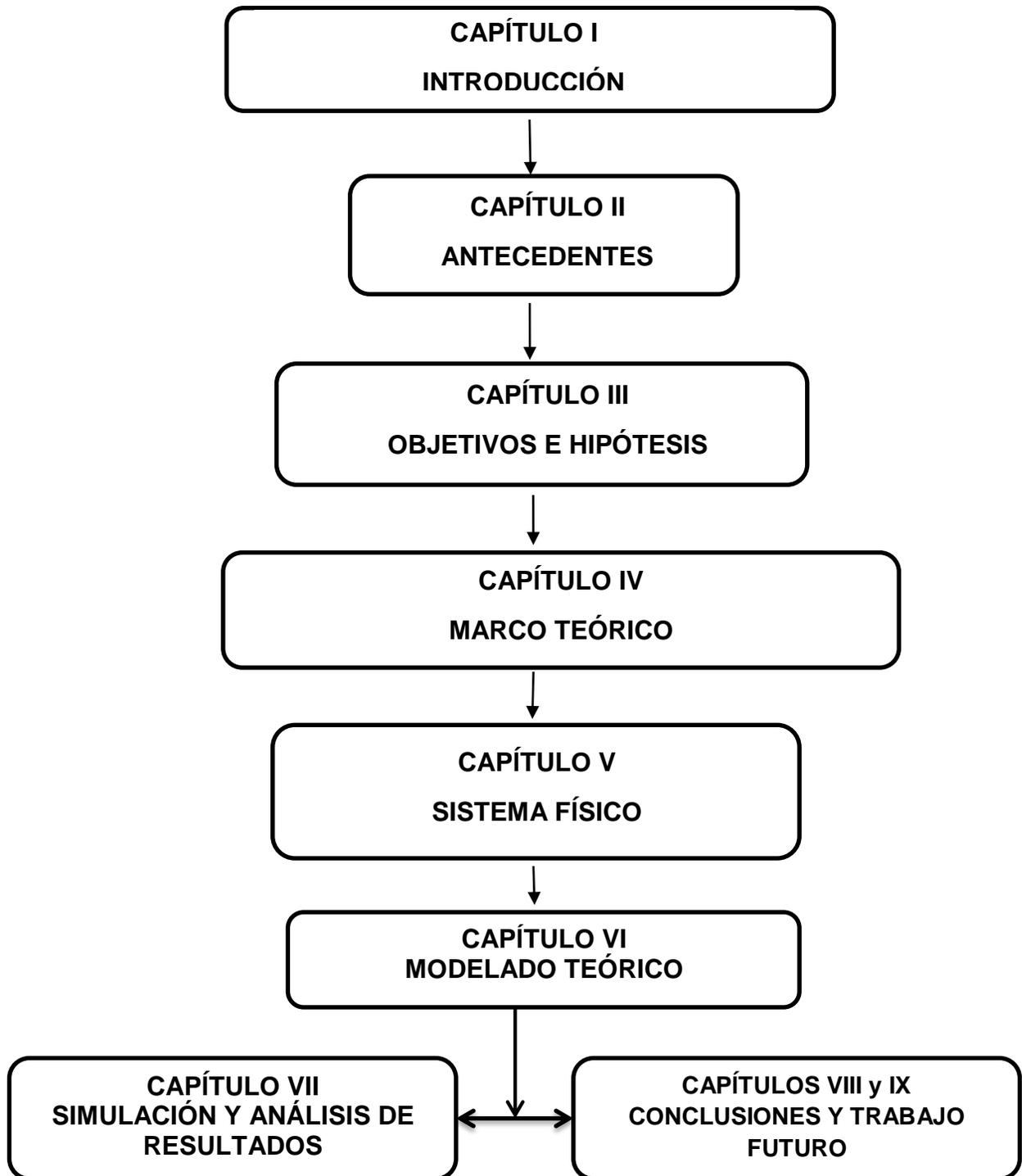


Figura 2.6-1. Organización del trabajo desarrollo en la tesis.

CAPÍTULO III

OBJETIVOS E HIPÓTESIS

3.1 Objetivos

En esta sección se presentan el objetivo general, los objetivos particulares y la hipótesis del trabajo de esta investigación.

3.1.1 Objetivo General

El objetivo esencial del presente trabajo es contribuir al entendimiento de la permeabilidad dinámica de un fluido viscoelástico caracterizado por el modelo de Jeffreys, el cual combina el esfuerzo del solvente (fluido Newtoniano) con el esfuerzo del polímero asociado con el modelo de Maxwell.

3.1.2 Objetivos particulares

- ✓ Deducir un modelo dinámico lineal que involucre los mecanismos inerciales viscoelásticos lineales a partir de la ecuación de momento y la ecuación reológica constitutiva de Jeffreys.
- ✓ Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar la ecuación dinámica lineal y que se obtengan grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.
- ✓ Obtener expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico y tomando en cuenta los mecanismos inerciales viscoelásticos asociados con los mecanismos de relajación y de retardo de Maxwell y de Jeffreys, respectivamente.
- ✓ Aplicar el formalismo de Fourier para resolver la ecuación dinámica lineal propuesta y obtener una expresión analítica que relacione el perfil de velocidades y el flujo volumétrico con el gradiente de presión.
- ✓ Obtener una expresión analítica para la permeabilidad dinámica del sistema relacionando la variable de entrada (gradiente de presión) y la de salida (flujo volumétrico).
- ✓ Utilizar datos reométricos provenientes de la literatura con el fin de obtener la respuesta dinámica del sistema: Permeabilidad dinámica compleja (real e imaginaria).

3.2 Hipótesis

Si se considera el plasma sanguíneo como un solvente y el hematocrito como un polímero, entonces la sangre puede ser aproximada como un fluido de Jeffreys.

CAPÍTULO IV

MARCO TEÓRICO

4.1 Fenómenos de Transporte.

Los Fenómenos de Transporte, se define como la rama de la Ingeniería Química que estudia los mecanismos de transporte en momento, energía y masa. Los fenómenos de transporte pueden ser estudiados a nivel macroscópico, microscópico y molecular (Bird et. al. 1987, 2002). La ecuación diferencial básica de transporte puede ser descrita en término de la derivada material D/Dt (Bird et. al. 2002; Bird et. al. 1987):

$$\frac{DX}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{X} = -\nabla \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{f} \quad (4.1-1)$$

Tabla 4.1-1. Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa respectivamente.

Mecanismo de Transporte	X	Y	f
Momento (Newton)	ρV		ρg
Energía (Termodinámica Irreversible)	$U = \rho C_p T$	$q = -k \nabla T$	$\sigma : \mathbf{D}$
Masa (Conservación de los moles en un sistema)	C_A	$N_A = -c D_{AB} \nabla X_A + X_A (N_A + N_B)$	R_A
Continuidad (Conservación de la masa)	ρ	ρV	0

El primer término de la Ec. (4.1-1), representa la derivada material de la propiedad X, la cual es igual a los cambios espaciales del flux a través de la divergencia del flux Y y por último la fuente (Bird et. al. 2002; Bird et. al. 1987).

4.1.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento.

La ecuación de momento, se basa principalmente en la segunda ley de Newton del movimiento en un medio continuo, la cual puede ser escrita de la siguiente manera (Bird et. al. 2002; Bird et. al. 1987):

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (4.1-2)$$

En la Ec. (4.1-2) ρ es la densidad del líquido, \mathbf{V} es el vector de velocidad, p es el gradiente de presión, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscoso, y \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad, que en el campo terrestre es constante. Si el fluido que

describe la relación del tensor de esfuerzos con la rapidez de deformación es lineal, la Ec. (4.1-2) se transforma en la Ec. de Navier-Stokes para los fluidos newtonianos (Bird et. al 1987, 2002):

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (4.1-3)$$

La Ec. (4.1-3) es base para el cálculo de la porosidad y del flujo en un medio poroso.

4.1.2 La ecuación de transporte de energía.

La ecuación de energía $U = \rho C_p T + \text{const.}$, se puede interpretar como una extensión de la primera ley de la termodinámica a un sistema irreversible, en donde el tiempo si es una variable importante, ya que desde el punto de vista clásico, no es tomada en cuenta. Se tiene lo siguiente (Bird et. al 1987, 2002):

$$\frac{D}{Dt} U = \rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) T = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = k \nabla^2 T + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (4.1-4)$$

La Ec. (4.1-4) describe la evolución temporal y espacial de la temperatura como función como una consecuencia del flux de energía, y del trabajo irreversible realizado por un agente externo sobre los mecanismos viscosos (Bird et. al 1987, 2002). La Ec. (4.1-4) es punto de partida en los cálculos del perfil de temperatura asociado a los procesos moleculares y los disipativos respectivamente.

4.1.3 Ecuación de transporte de masa.

La Ecuación que describe los cambios espaciales y temporales del flujo molar puede ser descrita a través de la siguiente expresión:

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = c D_{AB} \nabla^2 X_A - \nabla X_A \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) - X_A \nabla \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) + R_A \quad (4.1-5)$$

La Ec. (4.1-5) describe los cambios temporales y espaciales de la concentración de la especie A por efecto de los mecanismos difusivos y de las contribuciones de los cambios espaciales a través del movimiento global del fluido. Cuando el movimiento global del fluido se desprecia es decir, los cambios espaciales en el movimiento global del fluido son despreciables y solamente los mecanismos difusivos son apreciables y el término de generación es obtenido, se tiene lo siguiente (Bird et. al 1987, 2002):

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = D_{AB} \nabla^2 (c X_A) - k_n^n C_A^n = D_{AB} \nabla^2 C_A - k_n^n C_A^n \quad (4.1-6)$$

La Ec. (4.1-6) describe los cambios espaciales y temporales de la concentración como función de los mecanismos difusivos y de reacción química respectivamente.

4.2 Reología.

La reología, es decir la ciencia del flujo y la deformación, estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra parte (Bird et. al 1987, 2002). La reología es la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia (Bird et. al 1987, 2002). Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material. Un sistema es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante (Bird et. al 1987, 2002). En su forma más simple, la viscosidad μ es una propiedad de transporte, que se puede interpretar como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo (Bird et. al 1987, 2002).

4.2.1 Tensor de Deformación.

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual nos describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable. El tensor de deformación es adimensional debido a que $[u_i] = L; [x_i] = L$. Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera (Bird et. al 1987, 2002):

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.1-7)$$

Nótese, que el tensor de deformación carece de unidades por ser el cociente de dos longitudes características.

4.2.2 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera (Bird et. al 1987, 2002):

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.2-8)$$

A diferencia del tensor de deformación, el tensor gradiente tiene unidades de inverso del tiempo.

4.2.3 El tensor rapidez de deformación.

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{V}$ puede ser descompuesto en una parte simétrica $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V})_S$ y anti simétrica $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V})_A$ llamados tensor rapidez de deformación y tensor de vorticidad (Bird et. al 1987, 2002):

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (4.2-9)$$

En coordenadas cartesianas (x, y, z), el tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma matricial (Bird et. al 1987, 2002):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.2-10)$$

Es importante notar, que el tensor rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, esto implica que su transpuesta es igual al tensor, i.e. $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$. Físicamente, esta matriz simétrica nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado el sistema (Bird et. al 1987, 2002).

4.2.4 El tensor de Vorticidad.

El tensor de Vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el sistema (Bird et. al 1987, 2002):

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2-11)$$

Es importante notar, que el tensor de Vorticidad, es un tensor de segundo orden simétrico, es decir $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$. Físicamente nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo (Bird et. al 1987, 2002).

4.2.5 Tensor de esfuerzos.

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzos normales (Bird et. al 1987, 2002). Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.2-12)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales.

4.3 Tipos de Fluido.

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos. En Mecánica del medio continuo, una ecuación constitutiva describe la relación entre las variables dinámicas en el sistema, en particular el esfuerzo y la deformación, i.e.

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}).$$

4.3.1 Fluido newtoniano.

Los newtonianos son fluidos en los que el deslizamiento relativo de los elementos de fluido, al circular uno sobre otro, es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son newtonianos. Las pastas, emulsiones, fluidos biológicos, polímeros, suspensiones de sólidos y otras mezclas son probablemente no newtonianos. Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. La viscosidad de un fluido newtoniano no depende del tiempo de aplicación de esfuerzo, aunque sí puede depender tanto de la temperatura como de la presión a la que se encuentre. En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} = \mu(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (4.3-13)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana μ y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (4.3-13) el tensor de esfuerzo cortante, $\boldsymbol{\sigma}$ tiene unidades de Pa y el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} tiene inverso de segundo respectivamente (1/s). Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen la Ec. (4.3-13) son newtonianos.

4.3.2 Fluidos no newtonianos.

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son, en general, no-newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos no es lineal. Estados fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo.

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple de un fluido no-newtoniano, es aquella en donde la viscosidad no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto, la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión, composición, pH y la rapidez con la que se deforma (Bird et. al 1987, 2002).

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\text{II}_D)\mathbf{D} = \eta(\text{II}_D)(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (4.3-14)$$

En la Ec. (4.3-14) $\eta(\text{II}_D)$ es la función viscosidad generalizada, la cual depende del segundo invariante del tensor de rapidez de deformación, de la siguiente forma:

$$\Pi_D = \sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} \quad (4.3-15)$$

4.4 Ecuaciones Constitutivas.

4.4.1 Ecuaciones constitutivas de viscoelasticidad lineal.

La viscoelasticidad es un tipo de comportamiento reológico que presentan ciertos materiales que exhiben tantas propiedades viscosas con propiedades elásticas cuando se deforman. Un material viscoelástico lineal general es un material para el cual existe una relación lineal entre la tensión, sus derivadas y la deformación y sus derivadas, el caso unidimensional, la relación más general posible de un material viscoelástico lineal, es (Bird et. al 1987, 2002):

$$\boldsymbol{\sigma} + A^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} + \dots + A^{(n1)} \frac{\partial^{(n1)}}{\partial t^{(n1)}} \boldsymbol{\sigma} = B^{(0)} \boldsymbol{\varepsilon} + B^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon} + \dots + B^{(n2)} \frac{\partial^{(n2)}}{\partial t^{(n2)}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.4-16)$$

Existen diversos modelos constitutivos para materiales viscoelásticos lineales. Esos modelos incluyen el modelo de Maxwell, el modelo de Kelvin-Voight y el modelo del sólido viscoelástico lineal estándar que combina los dos modelos anteriores. Todos estos modelos descomponen la tensión y deformación en dos sumandos, uno que representa los efectos elásticos y otro que representan los efectos viscosos, siendo estos modelos, interpretables en términos de muelles y amortiguadores. Cada uno de estos modelos difiere en la disposición de los muelles y amortiguadores.

4.4.1.1 Modelo de Maxwell.

El modelo de Maxwell (Fig. 4.4-1) se puede describir como la suma de una contribución viscosa y otra elástica que está asociada con la recuperación:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_{\text{Newton}} + \boldsymbol{\gamma}_{\text{Hook}} \quad (4.4-17)$$

Derivando la deformación total, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{Newton}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{Hook}} \quad (4.4-18)$$

La contribución de Newton y de Hooke se sustituye en la expresión anterior:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{Newton}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{Hook}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\eta_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{G_0} \right) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\eta_0} + \frac{1}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.4-19)$$

Multiplicando la Ec. (4.4-19) por la viscosidad, se obtiene la siguiente expresión:

$$\eta_0 \dot{\gamma} = \sigma + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \sigma = \left(1 + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma \quad (4.4-20)$$

Si se define el tiempo de relajación de Maxwell, como $\lambda_0 = \eta_0 / G_0$ por lo que la expresión anterior toma la forma:

$$\left(1 + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (4.4-21)$$

Finalmente, si el tensor que describe la evolución de la deformación $\dot{\gamma}$ se expresa en términos del tensor rapidez de deformación, i.e. $\dot{\gamma} = 2\mathbf{D}$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (4.4-22)$$

El modelo de Maxwell predice que la tensión decaerá exponencialmente con el tiempo en un polímero sometido a deformación constante, lo cual se ajusta bastante bien a lo observado experimentalmente para muchos polímeros. Sin embargo, una limitación importante es que no predice el comportamiento de flujo lento (creep) de muchos polímeros ya que en este caso predice un aumento lineal de la deformación con el tiempo si la tensión es constante, sin embargo la mayor parte de los polímeros muestran una tasa de deformación decreciente con el tiempo. Las principales aplicaciones de este modelo son la modelización de los polímeros termoplásticos cerca de su temperatura de fusión, la de hormigón fresco y la de numerosos metales cerca de su punto de fusión.

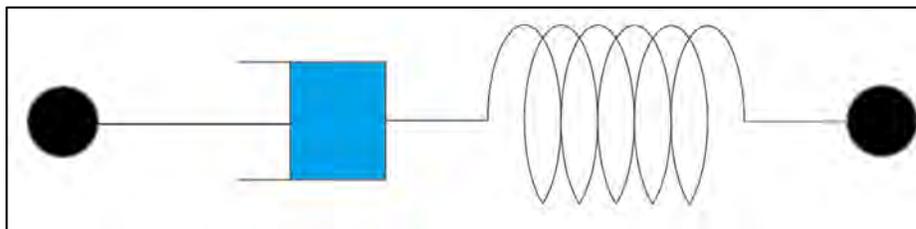


Figura 4.4-1. Se ilustra el Modelo de Maxwell en término de un pistón y un resorte el pistón describe la parte viscosa (disipativa) y el resorte la parte elástica (recuperación).

4.4.1.2 Modelo de Jeffreys.

El segundo modelo de Jeffreys puede considerarse como la suma de un esfuerzo asociado al solvente y otro al polímero, i.e.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_p = 2\eta_s \mathbf{D} + \frac{2\eta_p \mathbf{D}}{1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}} \quad (4.4-23)$$

Si se define el siguiente operador temporal $O(t)$ asociado al Modelo de Maxwell

$$O(t) \triangleq 1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.4-24)$$

Aplicando el operador temporal Ec. (4.4-24) en la Ec. (4.4-23), se obtiene la siguiente:

$$\left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = \left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) 2\eta_s \mathbf{D} + 2\eta_p \mathbf{D} \quad (4.4-25)$$

Desarrollando la Ec. (4.4-25) y factorizando, se obtiene la siguiente expresión:

$$\left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2(\eta_s + \eta_p) \left(1 + \left(\frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p}\right) \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D} \quad (4.4-26)$$

Finalmente se tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{\left(1 + \lambda_s \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}} \quad (4.4-27)$$

Este modelo contiene tres propiedades materiales las cuales son dos tiempos característicos y una viscosidad a bajo corte $\{\eta_0, \lambda_p, \lambda_{Jp}\}$. La Ec. (4.4-27) es frecuentemente utilizada en la descripción de polímeros de peso molecular bajo. Esta ecuación constitutiva se reduce al modelo newtoniano cuando el tiempo de Maxwell y Jeffreys tiende a cero, i.e. $\{\lambda_s = \lambda_p = 0\}$, al modelo de Maxwell cuando $\{\lambda_p = 0\}$, al modelo de Hooke cuando el frente de velocidades es homogéneo, es decir, a baja rapidez de deformación.

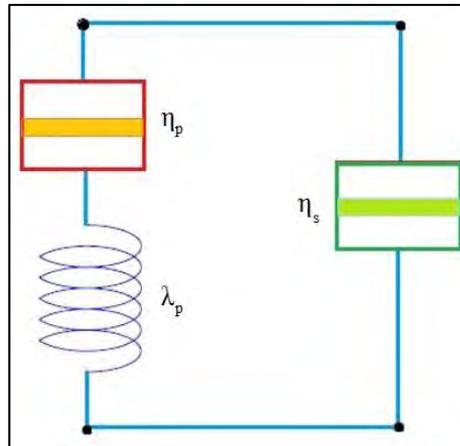


Figura 4.4-2. Muestra un elemento acoplado en serie de un solvente (contribución viscosa) y un polímero, el cual se puede describir en término de un modelo de Maxwell y un solvente (polímero).

4.5 Síntesis de los modelos expuestos en esta sección.

Finalmente, los modelos discutidos en esta sección nos permiten establecer las diferencias de los modelos inelásticos newtonianos más comunes de la literatura. En general para las soluciones de bajo peso molecular como el agua, acetona, algunos líquidos inmiscibles. Por otra parte, los fluidos no newtonianos presentan un reto en la descripción de sistemas complejos. La aplicación de estos fluidos se presenta en diferentes situaciones físicas, como por ejemplo: La ciencia y la ingeniería de nuevos materiales como son: (i) Fibras sintéticas (utilizadas en la industria espacial), (ii) Polímeros (plásticos), (iii) Polímeros asociativos (utilizados como agentes estabilizantes en la industria de las pinturas base agua), (iv) Cristales líquidos (utilizados por sus propiedades ópticas en pantallas de cristales líquidos, fibras sintéticas, y reconstrucción de tejido óseo en bioingeniería), (v) Fluidos biológicos, los cuales representan un reto para los ingenieros modernos. En este contexto, los fluidos biológicos involucran conocimientos multidisciplinarios, como la física, química, biología, matemáticas e ingeniería. Ejemplo de estos fluidos son los que secretan los insectos, la formación de la seda de la araña y diferentes gusanos, los fluidos corporales, y la sangre con diferentes patologías que representan una pandemia en la actualidad por el estilo de vida sedentaria en el que se vive actualmente.

4.6 Pruebas de flujo.

4.6.1 Flujo cortante en estado estacionario.

En esta prueba, la muestra es deformada por medio de un esfuerzo cortante el cual se puede representar por medio de dos placas paralelas en las cuales se aplica una fuerza en dirección del flujo de tal manera que la transferencia de

momento se da en la componente ortogonal a la velocidad como se muestra en la Fig. 4.6-3.

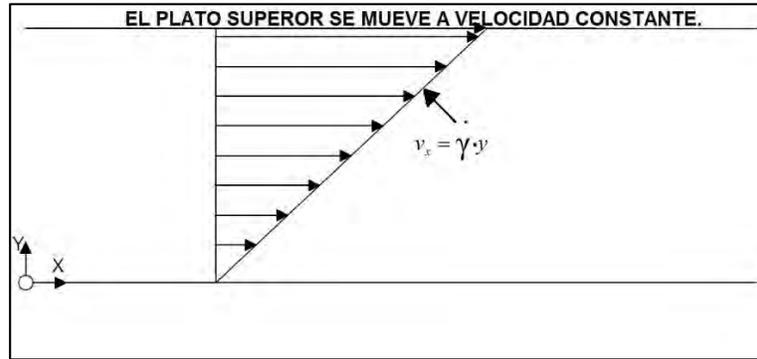


Figura 1.6-3. Ilustra el flujo cortante simple en un sistema de placas paralelas. El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo (es decir, un sistema en donde, las variables dinámicas del sistema dependen de la posición).

El flujo cortante simple se genera cuando las fuerzas que actúan en el sistema, quedan fuera de la diagonal principal de la matriz asociada al tensor de esfuerzos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6-28)$$

Sustituyendo las matrices del tensor de esfuerzos y rapidez de deformación en el modelo de Maxwell, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2\eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6-29)$$

Desacoplando el sistema de matrices descrito por la Ec. (4.6-29)

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{xz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{xz} \quad (4.6-30a)$$

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) N_1 = 0 \quad (4.6-30b)$$

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) = \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) N_2 = 0 \quad (4.6-30c)$$

En estado estacionario, este modelo se reduce al newtoniano, i.e.

$$\sigma_{xz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{xz} \quad (4.6-31a)$$

$$N_1 = 0 \quad (4.6-31b)$$

$$N_2 = 0 \quad (4.6-31c)$$

4.6.2 Funciones materiales del modelo de Maxwell

Las funciones materiales, se pueden calcular a través de las Ecs. (4.6-30 y 4.6-31), por lo que se tiene lo siguiente:

a) Función viscosidad

$$\eta \left(\dot{\gamma}_{xz} \right) = \frac{\sigma_{xz}}{\dot{\gamma}_{xz}} = \eta_0 \quad (4.6-32)$$

b) Primera diferencia de esfuerzos normales

$$\Psi_1 = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\dot{\gamma}_{xz}} = 0 \quad (4.6-33)$$

c) Segunda diferencia de esfuerzos normales

$$\Psi_2 = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{\dot{\gamma}_{xz}} = 0 \quad (4.6-34)$$

Por lo tanto, el modelo de Maxwell en un flujo cortante simple en estado estacionario coincide con el modelo de Newton de los fluidos viscosos y la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales son cero, lo que implica que no hay respuesta elástica en el régimen de viscoelasticidad lineal.

4.6.3 Modelo de Jeffreys

Procediendo de la misma manera que el modelo de Maxwell, la componente xz del modelo Jeffreys está dado por la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2\eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\eta_0 \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6-35)$$

Desacoplando el sistema de matrices descrito por la Ec. (4.6-35)

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{xz} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma}_{xz} \quad (4.6-36a)$$

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) N_1 = 0 \quad (4.6-36b)$$

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) = \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) N_2 = 0 \quad (4.6-36c)$$

En estado estacionario, este modelo se reduce al modelo de Maxwell y al newtoniano. Por otra parte las funciones materiales: (i) Función viscosidad, (ii) Primer coeficiente de esfuerzos normales, (iii) Segundo coeficiente de esfuerzos normales respectivamente, son iguales a las Ecs. (4.6-34 a 4.6-36), por lo que no es necesario describirlas de nuevo.

4.6.4 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias.

En esta prueba se coloca la muestra entre dos placas y la placa superior se pone a oscilar a bajas frecuencias, i.e. en el régimen de viscoelasticidad lineal.

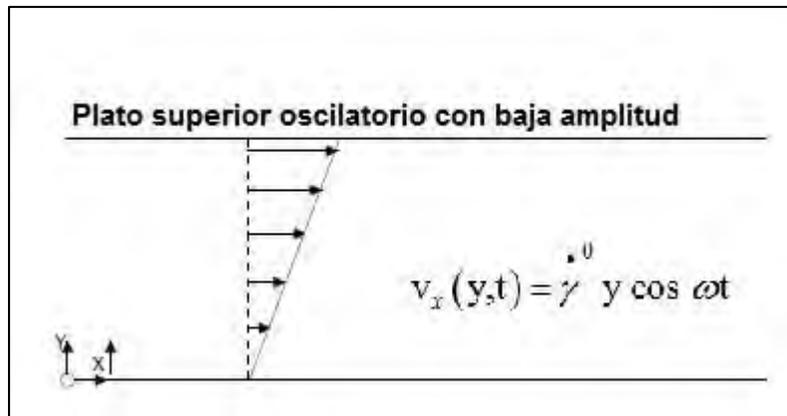


Figura 4.6-5. En el flujo oscilatorio la muestra es colocada en un sistema de placas paralelas y la placa superior se le aplica una perturbación oscilatoria de tal manera que describe un movimiento oscilatorio en el cual, se estudia la respuesta mecánica del sistema, es decir, la contribución elástica y la viscosa.

4.6.5 Modelo de Maxwell.

En flujo oscilatorio se estudia la respuesta mecánica del material por lo que el modelo de Maxwell toma la siguiente forma en el espacio de Fourier de las frecuencias:

$$(1 + \lambda_0 \cdot i\omega) \sigma_{xz}(\omega) = \eta_0 \dot{\gamma}(\omega) \quad (4.6-37)$$

Dividiendo el esfuerzo y la rapidez de deformación, se obtiene la viscosidad compleja:

$$\eta(i\omega) = \frac{\sigma(i\omega)}{\dot{\gamma}(i\omega)} = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 i\omega} \quad (4.6-38)$$

La viscosidad compleja $\eta(i\omega)$ se puede desacoplar en una parte real y otra imaginaria por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\eta(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \eta_0 \frac{1}{1 + i\lambda_0\omega} \cdot \frac{1 - i\lambda_0\omega}{1 - i\lambda_0\omega} = G_0 \lambda_0 \left\{ \frac{1}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} - i \frac{\lambda_0 \omega}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \right\} \quad (4.6-39)$$

Separando la parte real y la imaginaria de la Ec. (4.6-39), se tiene la siguiente expresión para la viscosidad real e imaginaria respectivamente:

$$\eta'(\omega) = \frac{G_0 \lambda_0}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (4.6-40)$$

Y la parte imaginaria toma la forma:

$$\eta''(\omega) = \frac{\eta_0 \lambda_0 \omega}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (4.6-41)$$

y recordando que los módulos y viscosidades complejas están dados por las siguientes expresiones: $G''(\omega) = \omega \eta'(\omega)$ y $G'(\omega) = \omega \eta''(\omega)$. Por último, igualando las ecuaciones obtenemos:

$$G'(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0^2 \omega^2}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (4.6-42)$$

Y la parte imaginaria toma la forma:

$$G''(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0 \omega}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (4.6-43)$$

Las Ecs. (4.6-42 y 4.6-43) son las expresiones analíticas para los módulos de almacenamiento y pérdida del modelo de Maxwell respectivamente. Estas expresiones describen las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia. Un hecho importante, es cuando se igualan las dos expresiones: $\omega_{\text{cruce}} = 1/\lambda_0$, se obtiene el tiempo de relajación de Maxwell, por lo que en el caso más simple, el sistema de flujo oscilatorio, permite calcular una de las propiedades materiales del sistema, conocida como tiempo de relajación de Maxwell. Obsérvese, que cuando la frecuencia aumenta, la Ec. (4.6-42) tiene a un valor constante, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G'(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_0 \frac{\lambda_0^2 \omega^2}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} = G_0 \quad (4.6-44)$$

Los casos particulares de las Ecs. (4.6-42 y 4.6-43) nos permiten calcular los parámetros materiales del sistema (η_0 , λ_0 , G_0) respectivamente. EN el siguiente ejemplo, se modela el flujo oscilatorio del modelo de Jeffreys.

4.6.6 Modelo de Jeffreys

Aplicando el formalismo de Fourier en la Ec. (4.4-27) se obtiene la siguiente expresión para la función viscosidad:

$$(1 + \lambda_0 \cdot i\omega) \sigma_{rz}(\omega) = \eta_0 (1 + \lambda_J \cdot i\omega) \dot{\gamma}(\omega) \quad (4.6-45)$$

La función viscosidad compleja toma la forma:

$$\eta(i\omega) = \frac{\sigma(i\omega)}{\dot{\gamma}(i\omega)} = \frac{\eta_0 (1 + \lambda_J i\omega)}{1 + \lambda_0 i\omega} \quad (4.6-46)$$

Multiplicando por el complejo conjugado del denominador de la Ec. (4.6-46), se tiene lo siguiente:

$$\eta(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \eta_0 \frac{1+i\lambda_J\omega}{1+i\lambda_0\omega} \cdot \frac{1-i\lambda_0\omega}{1-i\lambda_0\omega} = G_0\lambda_0 \left\{ \frac{1+\lambda_J\lambda_0\omega^2}{1+\lambda_0^2\omega^2} - i \frac{(\lambda_0 - \lambda_J)\omega}{1+\lambda_0^2\omega^2} \right\} \quad (4.6-47)$$

la parte real se puede expresar como:

$$\eta'(\omega) = G_0\lambda_0 \frac{1+\lambda_0\lambda_J}{1+\lambda_0^2\omega^2} \omega^2 \quad (4.6-48)$$

y la imaginaria respectivamente, toma la forma:

$$\eta''(\omega) = G_0\lambda_0 \frac{\lambda_0 - \lambda_J}{1+\lambda_0^2\omega^2} \omega \quad (4.6-49)$$

Igualando ambos miembros de la ecuación y recordando que los módulos y viscosidades complejas están dados por las siguientes expresiones: $G''(\omega) = \omega\eta'(\omega)$ y $G'(\omega) = \omega\eta''(\omega)$. Los módulos complejos de pérdida y almacenamiento, toman la forma:

$$G'(\omega) = \omega\eta_0 \frac{\lambda_0^2\omega^2}{1+(\lambda_0\omega)^2} \quad (4.6-50)$$

y

$$G''(\omega) = \eta_0 \frac{(\lambda_0 - \lambda_J)}{1+(\lambda_0\omega)^2} \omega^2 \quad (4.6-51)$$

Las Ecs. (4.6-50 y 4.6-51) describen las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia. En particular, los modelos de Maxwell y de Jeffreys son punto de partida en los cálculos de la permeabilidad dinámica que se calculara en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO V

SISTEMA FÍSICO

5.1 Descripción del problema físico del flujo pulsátil

En esta sección se modela el sistema del flujo de Poiseuille en un líquido complejo sometido a un gradiente de presión pulsátil en un fluido viscoelástico caracterizado por la ecuación constitutiva viscoelástica de Jeffreys. Esta ecuación acopla el esfuerzo cortante del solvente, con el del polímero por lo que contiene tres parámetros materiales. La Fig. (5.1-1) ilustra el sistema de estudio en la presente tesis de licenciatura. Se tienen un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ en donde un fluido estructurado sangre humana fluye por efecto de un gradiente de presión pulsátil que corta el fluido, es decir lo deforma continua e irreversiblemente.

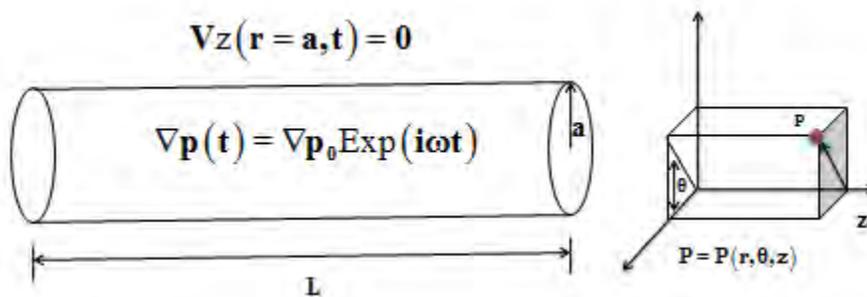


Figura 5.1-1. Ilustra el sistema de estudio. Un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ un fluido complejo (sangre humana) fluye por efecto de un gradiente de presión pulsátil. En el lado derecho del capilar, se representa un punto material en coordenadas cilíndricas.

Las condiciones de proceso son mencionadas a continuación

- Proceso en estado estacionario: Ningún atributo o variable dinámica del sistema depende del tiempo, matemáticamente significa que la derivada con respecto al tiempo es cero, i.e. $\partial \{ \} / \partial t = 0$.
- Proceso Isotérmico: El sistema mantiene su temperatura constante, i.e. no es necesario incluir el balance de energía térmica en los cálculos. Los cambios temporales y espaciales de la temperatura son cero y matemáticamente se expresa como: $\partial T / \partial i = 0$; $i = \{t, x\}$, en donde x es cualquier coordenada generalizada.
- Fluido Incompresible: El fluido (sangre humana) mantiene su densidad constante, i.e. la densidad no depende de la posición ni del tiempo. Matemáticamente se tiene un campo solenoidal en donde la divergencia del vector velocidad es cero: $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
- El fluido se mueve por la influencia de un gradiente de presión pulsátil, i.e. un gradiente que depende de la frecuencia y del tiempo y que matemáticamente se puede representar mediante una exponencial compleja: $\nabla p(t) = \nabla p_0 \text{Exp}(i\omega t)$. En el gradiente de presión pulsátil, ∇p_0 es el gradiente de presión constante en la dirección axial z .

- e) Flujo unidireccional, i.e. el campo de velocidades solo tiene una componente en la dirección del eje coordenado z: $\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r, \theta, z))$
- f) Efectos gravitacionales no se toman en cuenta, i.e. el campo gravitacional no es la fuerza motriz que deforma el fluido, por lo que se desprecia en las simulaciones pertinentes.
- g) El sistema de coordenadas se coloca en el centro del tubo en dirección del flujo, como se observa en la Fig. 5.1-1. EL eje z corresponde a la velocidad del sistema, el eje r al del gradiente de velocidad y el eje θ representa al de la Vorticidad.
- h) Existe simetría cilíndrica en el sistema, i.e. ninguna variable, atributo o característica del sistema depende de la coordenada angular θ .

5.2 Dinámica de flujo

5.2.1 Vector de velocidad

El vector de velocidad en este sistema de flujo está dado por el siguiente vector renglón:

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r, \theta, z, t)) \quad (5.2-1)$$

5.2.2 Tensores cinemáticos

- a) Tensor gradiente de velocidad

Utilizando el tensor gradiente de velocidad definido en el Cap. II en coordenadas cilíndricas, y el vector de velocidad en la Ec. (5.2-1), se tiene la siguiente matriz cuadrada

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2-2)$$

Físicamente el tensor gradiente de velocidad, da información acerca de los cambios de la velocidad en dirección espacial.

- b) Transpuesta del tensor gradiente de velocidad

$$(\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_z}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2-3)$$

c) Tensores dinámicos

Físicamente, este tensor nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado el sistema, en este caso, la transferencia de momento se da en la dirección del eje coordenado z y se transmite en la dirección ortogonal a z en este caso r.

d) Tensor rapidez de deformación

A partir de las definiciones del capítulo II, el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} se construye a partir del tensor gradiente de velocidad y su transpuesta respectivamente, i.e. $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T)/2$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_z}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \frac{dV_z}{dr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.2-4)$$

Físicamente, este tensor nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado el sistema, en este caso, la transferencia de momento se da en la dirección del eje coordenado x y se transmite en la dirección y.

e) Tensor de Vorticidad

A partir de las definiciones del capítulo II, el tensor rapidez de Vorticidad \mathbf{W} se construye a partir del tensor gradiente de velocidad y su transpuesta respectivamente, i.e. $\mathbf{W} = (\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T)/2$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - \nabla\mathbf{V}^T) &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_z}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \frac{dV_z}{dr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.2-5)$$

Este tensor nos da información acerca de las rotaciones materiales en el sistema. Por lo tanto, en un fluido cortante existen elementos cortantes que se deforman continua e irreversiblemente y que rotan por efecto del flujo

f) Tensor de esfuerzos

Matemáticamente el tensor de esfuerzos es una matriz simétrica que describe la transferencia de cantidad movimiento y físicamente nos da la distribución de las fuerzas en cada área de los elementos de control que son cortados debido al flujo.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.2-6)$$

La Ec. (5.2-6) contiene información acerca de los elementos cortantes y extensionales respectivamente. Por ejemplo, los elementos cortantes son los responsables de deformar continua e irreversiblemente el fluido, y cumplen la condición $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ debido a la simetría del tensor de esfuerzo. Los elementos en la diagonal principal $\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$, están asociados con la elasticidad del material en

flujo cortante en estado estacionario. A partir de estos, se define la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales:

$$N_1 = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \begin{cases} \neq 0; \text{No-Newtoniano viscoelastico} \\ = 0; \text{Newtoniano} \end{cases} \quad (5.2-7)$$

$$N_2 = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \begin{cases} \neq 0; \text{No-Newtoniano viscoelastico} \\ = 0; \text{Newtoniano} \end{cases}$$

El cálculo de la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales puede ser aplicado para explicar la formación de vórtices en contracciones expansiones de flujo.

5.3 Ecuaciones de continuidad y momento

En esta sección se presentan las ecuaciones generales para el estudio del flujo electro-osmótico.

a) Ecuación de continuidad

Suponiendo que el fluido es incompresible y que el flujo es unidireccional, es decir que el vector velocidad solo tiene componente en y, entonces:

$$\overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{\text{Fluido-Incompresible}} + \underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0; V_x \neq f(x) \quad (5.3-7)$$

b) Ecuación de momento modificada por el campo eléctrico

La ecuación de momento es la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo. Aplicando un balance de fuerza a un elemento de control, se tiene la siguiente ecuación de carácter vectorial desacoplada toma la forma:

Componente x de la ecuación de movimiento modificada

$$\begin{aligned}
 & \overset{=0}{\frac{\partial V_r}{\partial t}} + \underbrace{\overset{=0}{V_r \frac{\partial V_r}{\partial r}} + \overset{=0}{V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta}}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{\overset{=0}{V_z \frac{\partial V_r}{\partial z}}}_{\text{Ecuación de Continuidad}} = - \overset{=0}{\frac{\partial p}{\partial r}} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta}}_{\text{Transferencia de momento solo en la dirección r}} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la dirección z}} + \underbrace{\overset{=0}{\rho g_r}}_{\text{Efectos Gravitacionales}} \\
 & + Fe_r
 \end{aligned}
 \tag{5.3-8}$$

Componente θ de la ecuación de movimiento modificada

$$\begin{aligned}
 & \overset{=0}{\frac{\partial V_\theta}{\partial t}} + \underbrace{\overset{=0}{V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r}} + \overset{=0}{V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{\overset{=0}{V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z}}}_{\text{Ecuación de Continuidad}} = - \overset{=0}{\frac{\partial p}{\partial \theta}} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la dirección r}} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la dirección } \theta} \\
 & + \underbrace{\overset{=0}{\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la dirección z}} + \underbrace{\overset{=0}{\rho g_\theta}}_{\text{Efectos Gravitacionales}} + \underbrace{\overset{=0}{Fe_\theta}}_{\text{No hay campo Electrico en la dirección } \theta}
 \end{aligned}
 \tag{5.3-9}$$

Componente z de la ecuación de movimiento modificada

$$\begin{aligned}
 & \overset{=0}{\frac{\partial V_z}{\partial t}} + \underbrace{\overset{=0}{V_r \frac{\partial V_z}{\partial r}} + \overset{=0}{V_\theta \frac{\partial V_z}{\partial \theta}}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{\overset{=0}{V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}}}_{\text{Ecuación de Continuidad}} = - \overset{=0}{\frac{\partial p}{\partial z}} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la dirección r}} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la dirección } \theta} \\
 & + \underbrace{\overset{=0}{\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la dirección z}} + \underbrace{\overset{=0}{\rho g_z}}_{\text{Efectos Gravitacionales}} + \underbrace{\overset{=0}{Fe_z}}_{\text{No hay campo electrico en la dirección z}}
 \end{aligned}
 \tag{5.3-10}$$

Aplicando las hipótesis anteriores (estado estacionario, fluido incompresible, solo hay transferencia de momento en la componente y_x del tensor de esfuerzos, se llega a la siguiente expresión simplificada.

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = - \frac{\partial p(t)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz})
 \tag{5.3-11}$$

c) Gradiente de presión pulsátil

El gradiente de presión pulsátil se propone como el producto de un gradiente de presión en estado estacionario multiplicado por una función exponencial respectivamente:

$$\frac{\partial p(t)}{\partial z} = \frac{\partial p_0}{\partial z} \text{Exp}(i\omega t) = \frac{\partial p_0}{\partial z} (\text{Cos}(\omega t) + i\text{Sin}(\omega t)) \quad (5.3-12)$$

La ecuación anterior representa la fuerza eléctrica que experimenta el sistema fluido-coloide. Nótese que ρ_e es la densidad de carga en el sistema. En este punto suponemos que la densidad constante sin embargo, una siguiente aproximación es la de pensar en una distribución de carga por unidad de volumen. Finalmente el balance de fuerza toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = - \frac{\partial p_0}{\partial z} \text{Exp}(i\omega t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) \quad (5.3-13)$$

5.4 Ecuaciones constitutivas

a) Modelo Newtoniano

El modelo llamado *Ley de la viscosidad de Newton* describe el esfuerzo de deformación como una relación lineal entre la viscosidad y el gradiente de velocidad.

$$\sigma_{yx} = -\mu \frac{dV_x}{dy} \quad (5.4-14)$$

b) Modelo Viscoelástico de Jeffreys

El modelo viscoelástico de Jeffreys es una de las ecuaciones reológicas más sencillas viscoelásticas no lineales, la cual puede ser descrita en forma tensorial de la siguiente manera:

$$\sigma + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{D} \quad (5.4-15)$$

Suponiendo flujo homogéneo, i.e. ninguna variable dinámica del sistema (esfuerzo, rapidez de deformación) depende de la posición, asumiendo todas las demás restricciones, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4-16)$$

Al sumar las matrices, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4-17)$$

Desacoplando las matrices se tiene las siguientes ecuaciones diferenciales parciales para los esfuerzos normales:

$$\sigma_{rr} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rr} = 0 \quad (5.4-18a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (5.4-18b)$$

$$\sigma_{zz} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} = 0 \quad (5.4-18c)$$

Para los esfuerzos cortantes, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{zr} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zr} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial r} \quad (5.4-19a)$$

$$\sigma_{rz} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rz} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial r} \quad (5.4-19b)$$

Nótese que tanto la componente rz y zr de la ecuación constitutiva tiene la misma estructura matemática

5.5 Modelo dinámico viscoelástico lineal de la presente tesis de licenciatura.

Combinando la componente rz de la ecuación de movimiento con la constitutiva, se tiene el siguiente modelo lineal:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p(t)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (5.5-20)$$

Factorizando el esfuerzo cortante rz, del modelo de Jeffreys, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz} = \eta_0 \frac{\left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial V_z}{\partial r}}{1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}} \quad (5.5-21)$$

Combinando las dos ecuaciones, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p(t)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_0 \frac{\left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial V_z}{\partial r}}{1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}} \right) \quad (5.5-21)$$

Multiplicando por el operador lineal $1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}$, se tiene el siguiente resultado:

$$\rho \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p(t)}{\partial z} + \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) \quad (5.5-22)$$

El modelo dinámico desarrollado nos permite obtener como cambia la velocidad en función de la posición y el tiempo a través de variaciones en los mecanismos viscoelásticos, inerciales y viscosos. Aplicando el operador temporal, sobre el modelo se obtiene lo siguiente:

$$\boxed{\rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} + \rho \lambda_M \frac{\partial^2 V_z(r,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(t)}{\partial z} - \lambda_M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial p(t)}{\partial z} + \eta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \eta_0 \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right)} \quad (5.5-23)$$

Esta ecuación es la más importante del presente análisis y es punto de partida en los cálculos posteriores que se presentaran en los capítulos siguientes

CAPÍTULO VI

MODELADO TEÓRICO

6.1 Modelo de Jeffreys sin efectos inerciales

Partiendo de la hipótesis de flujo a Reynolds bajos, es decir los mecanismos inerciales son despreciables, la ecuación de momento se reduce a un balance entre el gradiente de presión y la divergencia del tensor de esfuerzos, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.1-1)$$

Integrando con respecto a la coordenada radial se tiene lo siguiente expresión general:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} r + \frac{C_1}{r} \quad (6.1-2)$$

Como el esfuerzo debe ser una función acotada, i.e. en $r = 0$ se cumple que $|\sigma_{rz}| \leq M$ por lo que la constante C_1 de la Ec. (6.1-2) debe ser cero por consistencia física, por lo que la componente rz del esfuerzo toma la forma:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} r \quad (6.1-3)$$

La Ec. (6.1-3) describe el esfuerzo cortante rz en función de la mitad del gradiente de presión, multiplicada por la coordenada radial. **Nótese, que esta expresión es completamente general y no depende del sistema, i.e. en la Ec. (6.1-3) no está incluida ninguna propiedad material del sistema (viscosidades, densidades, tiempos de relajación, etc).**

La componente rz del modelo de Jeffreys, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz} + \lambda_M \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{rz} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma}_{rz} \quad (6.1-4)$$

o factorizando el operador lineal se tiene lo siguiente:

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{rz} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma}_{rz} \quad (6.1-5)$$

Nótese que el tiempo de Relajación de Jeffreys es un Múltiplo del de Maxwell. De hecho, el tiempo de Jeffreys se puede visualizar como un tiempo del orden de un tiempo a rapidez de deformación alta.

6.1.1 Perfil de velocidades para el modelo de Jeffreys

La ecuación diferencial parcial Ec. (6.1-5) describe la evolución temporal de la componente rz de los tensores de esfuerzo y rapidez de deformación

respectivamente. Integrando con respecto a la coordenada radial r , se tiene lo siguiente:

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \int \sigma_{rz} dr = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \int \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} dr = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) V_z(r,t) \quad (6.1-6)$$

Integrando y simplificando la Ec. (6.1-6) se tiene lo siguiente:

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{4\eta_0} \frac{dp}{dz} r^2\right) + C_1(t) = \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) V_z(r,t) \quad (6.1-7)$$

Al aplicar la condición de frontera de no deslizamiento en el capilar, i.e. $V_z(r = a, t) = 0$, se tiene lo siguiente:

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{a^2}{4\eta_0} \frac{dp}{dz}\right) + C_1(t) = 0 \quad (6.1-8)$$

Por lo que,

$$C_1(t) = -\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{a^2}{4\eta_0} \frac{dp}{dz}\right) \quad (6.1-9)$$

Combinando las Ecs (6.1-7 y 6.1-9) se tiene lo siguiente:

$$\left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) V_z(r,t) = \frac{a^2}{4\eta_0} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\frac{dp}{dz}\right) \quad (6.1-10)$$

En particular, si los tiempos de Maxwell y Jeffreys son cero, i.e. $\lambda_M = \lambda_J = 0$, el modelo de Jeffreys se reduce al modelo newtoniano:

$$V_z(r,t) = \frac{a^2}{4\eta_0} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \left(-\frac{dp}{dz}\right) \quad (6.1-11)$$

Por otra parte, se puede obtener una expresión cerrada para la velocidad axial en función del tiempo. Dividiendo por el tiempo de retardo de Jeffreys la Ec. (6.1-10) y multiplicando por la exponencial $\text{Exp}[t/\lambda_J]$.

$$e^{\lambda_J t} \left(\frac{1}{\lambda_J} + \frac{\partial}{\partial t}\right) V_z(r,t) = \frac{a^2}{4\eta_0} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) e^{\lambda_J t} \left(\frac{1}{\lambda_J} + \frac{\lambda_M}{\lambda_J} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\frac{dp}{dz}\right) \quad (6.1-12)$$

Simplificando la expresión anterior, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{\lambda_J t} V_z(r,t)) = \frac{a^2}{4\eta_0} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) e^{\lambda_J t} \left(\frac{1}{\lambda_J} + \frac{\lambda_M}{\lambda_J} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\frac{dp}{dz}\right) \quad (6.1-13)$$

Integrando con respecto a la variable temporal t , se tiene lo siguiente:

$$V_z(r,t) = \frac{a^2}{4\eta_0} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) e^{-t/\lambda_j} \int_0^t e^{\tau/\lambda_j} \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{\lambda_M}{\lambda_j} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(-\frac{dp(\tau)}{dz} \right) d\tau + C e^{-t/\lambda_j} \quad (6.1-14)$$

Aplicando la condición inicial $t = 0$; $V_z = 0$, se tiene lo siguiente:

$$V_z(r,t) = \frac{a^2}{4\eta_0} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) e^{-t/\lambda_j} \int_0^t e^{\tau/\lambda_j} \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{\lambda_M}{\lambda_j} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(-\frac{dp(\tau)}{dz} \right) d\tau \quad (6.1-15)$$

Para resolver la Ec. (6.1-15) se necesita información del gradiente de presión transitorio. Es claro que el efecto transitorio representa un reto debido a la complejidad matemática que se presenta por lo que es necesario formulismo matemáticos que permitan describir este tipo de sistemas.

6.1.2 Flujo volumétrico en estado no estacionario.

La expresión del flujo volumétrico en función de la viscosidad puede ser escrita en términos de una integral doble de la siguiente manera:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta \quad (6.1-16)$$

Debido a la simetría cilíndrica, el vector velocidad no depende de la coordenada angular θ , por lo que se puede integrar con respecto a θ la Ec. (6.1-16) por lo que:

$$Q(t) = 2\pi \int_0^a V_z(r,t) r dr \quad (6.1-17)$$

La Ec. (6.1-16) representa el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$. La ecuación anterior es empleada cuando se conoce el perfil de velocidades en función de la coordenada radial y es general para cualquier tipo de fluido. Integrando por partes con respecto a r , tomando $u = V_z(r, t)$ y $dV = r dr$, se tiene lo siguiente:

$$Q(t) = 2\pi \left(\frac{1}{2} V_z(r,t) r^2 \Big|_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \right) = \pi \left(V_z(a,t) a^2 - V_z(0,t) 0^2 - \int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \right) \quad (6.1-18)$$

Aplicando la condición de no deslizamiento en el capilar se obtiene otra versión de la Ec. (6.1-16) para el flujo volumétrico:

$$Q(t) = -\pi \int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \quad (6.1-19)$$

La Ec. (6.1-19) es equivalente a la Ec. (6.1-17) excepto que, para calcularla se necesita información de la rapidez con la que se deforma el sistema (fluido). La Ec. (6.1-19) será punto de partida en la descripción de la permeabilidad dinámica y el flujo volumétrico pulsátil. Multiplicando por la segunda potencia de r e integrando con respecto a r de 0 al límite superior a , se tiene lo siguiente:

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\pi \int_0^a \sigma_{rz} r^2 dr\right) = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) -\pi \int_0^a r^2 \dot{\gamma}_{rz} dr = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(t) \quad (6.1-20)$$

Al sustituir la componente rz del tensor de esfuerzos Ec. (6.1-1) y combinando las Ecs. (6.1-20) con la Ec. (6.1-19), se tiene la evolución del flujo volumétrico en función del gradiente de presión en la dirección axial.

$$\left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(t) = \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{dp(t)}{dz}\right) \quad (6.1-21)$$

Como en el caso de la velocidad, si los tiempos de Maxwell y Jeffreys son cero, i.e. $\lambda_M = \lambda_J = 0$, se obtiene el flujo volumétrico para el moldeo newtoniano. Esta ecuación es conocida como de Hagen y Pouseuille:

$$Q_N(t) = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \left(-\frac{dp(t)}{dz}\right) \quad (6.1-22)$$

Combinando las Ecs. (6.1-21) y (6.1-22)

$$\left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(t) = \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) Q_N(t) \quad (6.1-23)$$

Procediendo como en el caso de la velocidad axial, se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{1}{\lambda_J} + \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(t) = \left(\frac{1}{\lambda_J} + \frac{\lambda_M}{\lambda_J} \frac{\partial}{\partial t}\right) Q_N(t) \quad (6.1-24)$$

Para resolver la ecuación diferencial lineal descrita por la Ec. (6.1-23), se multiplica por la exponencial decreciente y aplicando el mismo tratamiento mecánico de las Ecs (6.1-12 a 6.1-15).

$$Q(t) = e^{-t/\lambda_J} \int_0^t e^{\tau/\lambda_J} \left(\frac{1}{\lambda_J} + \frac{\lambda_M}{\lambda_J} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left(-\frac{dp(\tau)}{dz}\right) d\tau + C e^{-t/\lambda_J} \quad (6.1-25)$$

Imponiendo la restricción que al tiempo $t = 0$; el flujo volumétrico es $Q(t=0) = Q_0$, por lo que se tiene el siguiente resultado:

$$Q(t) = \left(Q_0 + \int_0^t e^{\tau/\lambda_J} \left(\frac{1}{\lambda_J} + \frac{\lambda_M}{\lambda_J} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) (Q_N(\tau)) d\tau\right) e^{-t/\lambda_J} \quad (6.1-26)$$

La Ec. (6.1-25) describe la evolución del flujo volumétrico en función del gradiente de presión en la dirección axial respectivamente. En la siguiente sección, presentamos un método alternativo para deducir el flujo volumétrico en función de la frecuencia adimensional.

6.1.3 Formalismo de Fourier

Si suponemos que el flujo volumétrico es una función continua y satisface el formalismo de la Transformada de Fourier, se tiene la siguiente definición formal (Haberman 2003):

$$F(\omega) = \mathfrak{T}(f(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.1-27)$$

Los resultados más importantes de la transformada de Fourier se aplican en la transformada de una derivada temporal (Haberman 2003):

$$\mathfrak{T}\left(\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(t)}{\partial t} e^{i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega t} f(t)}{2\pi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \left(\frac{i\omega}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = 0 - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = -i\omega F(\omega) \quad (6.1-28)$$

Suponiendo que en $t = 0$ la función $f(t)$ se anula, i.e. $f(\infty) = f(0) = 0$, se tiene que la derivada temporal de una función continua $f(t)$ toma la forma:

$$\mathfrak{T}\left(\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right) = -i\omega F(\omega) \quad (6.1-29)$$

Es fácil demostrar por inducción matemática, que la transformada de Fourier de derivadas de órdenes superiores puede ser descrita como un múltiplo de la Ec. (6.1-27), por lo que:

$$\mathfrak{T}\left(\frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k}\right) = (-i\omega)^k F(\omega) \quad (6.1-30)$$

Los resultados deducidos en esta sección serán punto de partida en la descripción del flujo oscilatorio.

6.1.4 Flujo oscilatorio a baja frecuencia

La expresión anterior se puede expresar en términos del formalismo de Fourier:

$$\left(\frac{1}{\lambda_J} + \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(t) = \left(\frac{1}{\lambda_J} + \frac{\lambda_M}{\lambda_J} \frac{\partial}{\partial t}\right) Q_N(t) \quad (6.1-31)$$

Al sustituir la componente rz del tensor de esfuerzos en la Ec. (6.1-31) se tiene lo siguiente:

$$Q_J(t) = \frac{1}{\eta_0} \frac{1 + \lambda_M}{1 + \lambda_J} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\pi \int_0^a \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 dr \right) = \frac{1 + \lambda_M}{1 + \lambda_J} \frac{\partial}{\partial t} \left(\pi \frac{a^4}{8\eta_0} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right) = \frac{1 + \lambda_M}{1 + \lambda_J} \frac{\partial}{\partial t} Q_N(t) \quad (6.1-32)$$

Aplicando la transformada de Fourier, a la ecuación diferencial, Ec. (6.1-32) se tiene lo siguiente:

$$Q(t) = Q_0 \frac{1 + \lambda_M}{1 + \lambda_J} \frac{\partial}{\partial t} \xrightarrow{s} Q(\omega) = Q_0 \frac{1 + \lambda_0(-i\omega)}{1 + \lambda_J(-i\omega)} \quad (6.1-33)$$

La Ec. (6.1-33) es una función compleja de variable compleja la cual, se puede descomponer en una parte real e imaginaria respectivamente:

$$Q(\omega) = Q_R(\omega) - i Q_I(\omega) \quad (6.1-34)$$

Multiplicando por el conjugado del denominador $(1 + \lambda_J(-i\omega))$, i.e. $(1 + \lambda_J(i\omega))$ se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = Q_0 \frac{(1 + \lambda_M(-i\omega)) (1 + \lambda_J(i\omega))}{(1 + \lambda_J(-i\omega)) (1 + \lambda_J(i\omega))} \quad (6.1-35)$$

Al multiplicar las funciones racionales, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = Q_0 \frac{1 + \lambda_M \lambda_J \omega^2 + i(\lambda_J - \lambda_M)\omega}{(1 + \lambda_J^2(-i\omega))} = Q_0 \frac{1 + \lambda_M \lambda_J \omega^2}{(1 + \lambda_J^2(-i\omega))} - i Q_0 \frac{(\lambda_M - \lambda_J)\omega}{(1 + \lambda_J^2(-i\omega))} \quad (6.1-36)$$

La parte real del flujo volumétrico en el régimen de viscoelasticidad lineal, i.e. a bajas deformaciones toma la forma:

$$Q_R(\omega) = Q_0 \frac{1 + \lambda_M \lambda_J \omega^2}{1 + (\omega \lambda_J)^2} \quad (6.1-37)$$

Y la parte imaginaria toma la forma:

$$Q_I(\omega) = Q_0 \frac{(\lambda_M - \lambda_J)\omega}{1 + (\omega \lambda_J)^2} \quad (6.1-38)$$

Finalmente la magnitud del flujo volumétrico complejo está dada por la siguiente expresión:

$$Q^*(\omega) = \sqrt{(Q_R(\omega))^2 + (Q_I(\omega))^2} \quad (6.1-39)$$

Finalmente, las expresiones de los módulos flujos volumétricos se pueden expresar en término de producto de flujo volumétrico del fluido newtoniano multiplicados por una fluidez adimensional real e imaginaria respectivamente:

$$Q_R(\omega) = Q_0 \frac{1 + \lambda_M \lambda_J \omega^2}{1 + (\omega \lambda_J)^2} = Q_0 \phi_R^* \quad (6.1-40)$$

Y

$$Q_I(\omega) = Q_0 \frac{(\lambda_M - \lambda_J)\omega}{1 + (\omega \lambda_J)^2} = Q_0 \phi_I^* \quad (6.1-41)$$

En donde las fluideces toman la forma:

$$\phi_R^* = \frac{\phi_R}{\phi_0} = \frac{1 + \lambda_M \lambda_J \omega^2}{1 + (\omega \lambda_J)^2} \quad (6.1-42)$$

Y

$$\phi_I^* = \frac{\phi_I}{\phi_0} = \frac{(\lambda_M - \lambda_J)\omega}{1 + (\omega \lambda_J)^2} \quad (6.1-43)$$

Finalmente, el flujo real e imaginario es proporcional a la fluidez es decir al inverso de la viscosidad.

$$Q^*(\omega) = \frac{Q(\omega)}{Q_0} = \frac{Q_R(\omega)}{Q_0} + i \frac{Q_I(\omega)}{Q_0} = \phi_R^*(\omega) + i \phi_I^*(\omega) \quad (6.1-44)$$

6.2 Modelo de Jeffreys con efectos inerciales

La componente z de la ecuación de movimiento tomando en cuenta los mecanismos inerciales, toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (6.2-45)$$

El término $\rho \frac{\partial V_z}{\partial t}$ es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración instantánea en el sistema.

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_{rz} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma}_{rz} \quad (6.2-46)$$

La Ec. (6.1-46) se puede factorizar de la siguiente manera:

$$\sigma_{rz} = \eta_0 \frac{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}} \dot{\gamma}_{rz} \quad (6.2-47)$$

Al combinar las Ecs. (6.1-45 y 6.1-47), se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_Z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_0 \frac{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}} \dot{\gamma}_{rz} \right) \quad (6.2-48)$$

Al multiplicar la Ec. (6.1-45) $1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}$ se tiene lo siguiente:

$$\rho \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_Z}{\partial t} = \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma}_{rz} \right) \quad (6.2-49)$$

Simplificando, se tiene lo siguiente:

$$\rho \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_Z}{\partial t} = \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \dot{\gamma}_{rz} \right) \quad (6.2-50)$$

La rapidez de deformación $\dot{\gamma}_{rz} = dV_Z/dr$ se puede expresar de la siguiente:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V_Z(r,t) = \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_Z}{\partial r} \right) \quad (6.2-51)$$

La Ec. (6.1-51) se puede es diferencial lineal y describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y tiempo. Aplicando el formalismo de Fourier, en la ecuación antes mencionada se tiene lo siguiente:

$$\mathfrak{F} \left\{ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V_Z(r,t) \right\} = \left\{ \rho (-i\omega + \lambda_M (-i\omega)^2) V_Z(r,\omega) \right\} \quad (6.2-52a)$$

$$\mathfrak{F} \left\{ \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-\frac{\partial p(t)}{\partial z} \right) \right\} = (1 + \lambda_M (-i\omega)) \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.2-52b)$$

$$\mathfrak{F} \left\{ \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_Z}{\partial r} \right) \right\} = \eta_0 (1 + \lambda_J (-i\omega)) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_Z(r,\omega)}{\partial r} \right) \quad (6.2-52c)$$

Sustituyendo la Ec. (6.1-52) en la Ec. (6.1-51):

$$\rho(-i\omega + \lambda_M(-i\omega)^2) V_Z(r, \omega) = (1 + \lambda_M(-i\omega)) \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) + \eta_0 (1 + \lambda_J(-i\omega)) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) \quad (6.2-53)$$

Dividiendo la Ec. (6.1-53) por $\eta_0(1 + \lambda_J(-i\omega))$, se tiene la siguiente relación matemática:

$$\rho(-i\omega) \frac{1 + \lambda_M(-i\omega)}{\eta_0(1 + \lambda_J(-i\omega))} V_Z(r, \omega) = \frac{1 + \lambda_M(-i\omega)}{\eta_0(1 + \lambda_J(-i\omega))} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) \quad (6.2-54)$$

Simplificando la Ec. (6.1-54) y definiendo la fluidez compleja como el inverso de la viscosidad compleja, se tiene lo siguiente:

$$\varphi^* = \frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0} \frac{1 + \lambda_M(-i\omega)}{1 + \lambda_J(-i\omega)} = \varphi_0 \frac{1 + \lambda_M(-i\omega)}{1 + \lambda_J(-i\omega)} \quad (6.2-55a)$$

Para separar la contribución real e imaginaria de la fluidez compleja, se multiplica por el complejo conjugado del denominador $1 + \lambda_J(-i\omega)$, i.e. $1 + \lambda_J(i\omega)$ por lo que se tiene lo siguiente:

$$\varphi^* = \varphi_0 \frac{1 + \lambda_M(-i\omega)}{1 + \lambda_J(-i\omega)} \cdot \frac{1 + \lambda_J(i\omega)}{1 + \lambda_J(i\omega)} = \varphi_0 \frac{1 + \lambda_M \lambda_J \omega^2 - (\lambda_M - \lambda_J) \omega i}{1 + \lambda_J^2 \omega^2} \quad (6.2-55b)$$

Finalmente la fluidez compleja, se puede escribir como:

$$\varphi^*(\omega) = \varphi_R(\omega) - i\varphi_I(\omega) = \varphi_0 \frac{1 + \lambda_M \lambda_J \omega^2}{1 + \lambda_J^2 \omega^2} - i \varphi_0 \frac{(\lambda_M - \lambda_J) \omega}{1 + \lambda_J^2 \omega^2} \quad (6.2-55c)$$

La Ec. (6.1-54) puede ser escrita en término de la fluidez compleja por lo que,

$$\rho(-i\omega) \varphi^*(\omega) V_Z(r, \omega) = \varphi^*(\omega) \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) \quad (6.2-56)$$

Simplificando esta expresión, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) + \rho(i\omega) \varphi(\omega) V_Z(r, \omega) = \varphi(\omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.2-57)$$

Factorizando la función velocidad $V_Z(r, \omega)$

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \rho(i\omega) \varphi(\omega) \right\} V_z(r, \omega) = \varphi(\omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.2-58)$$

Para resolver la Ecuación diferencial de Bessel se propone el siguiente cambio de variable:

$$\alpha^2 = \rho(i\omega) \varphi(\omega) \quad (6.2-59)$$

Nótese que α tiene unidades de longitud. Sustituyendo en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2 \right\} V_z(r, \omega) = \varphi(\omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.2-60)$$

La parte homogénea se resuelve de la siguiente manera:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2 \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (6.2-61)$$

Desarrollando la velocidad en el espacio de Fourier, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2 \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (6.2-62)$$

Multiplicando por r^2 se tiene la ecuación diferencial del modelo de Bessel:

$$\left\{ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2 r^2 \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (6.2-63)$$

La Ec. (6.2-63) es paramétrica de Bessel y para resolverla se propone el siguiente cambio de variable $z = \alpha r$

$$\left\{ z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \frac{\partial}{\partial z} + z^2 \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (6.2-64)$$

La solución de la ecuación diferencial Ec. (6.1-64) está dada por la Expresión:

$$V_z(z, \omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) \quad (6.2-65)$$

En la Ec. (6.2-65) $\{J_0(x), Y_0(x)\}$ son las funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda especie respectivamente. La solución particular para el problema de la Ec. (6.1-60) se puede expresar como:

$$Vz_p(r, \omega) = A$$

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2 \right\} Vz(r, \omega) = \varphi(\omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.2-66)$$

Sustituyendo en la Expresión general, se tiene lo siguiente:

$$\alpha^2 A = \varphi(\omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.2-67)$$

Por lo que, la constante A se despeja y se tiene lo siguiente:

$$A = \frac{\varphi(\omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right)}{\alpha^2} = \frac{\varphi(\omega)}{\rho(i\omega)\varphi(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.2-68)$$

En donde el operador diferencial espacial se anula debido a que la solución particular es una constante:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) Vz(r, \omega) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) A = 0 \quad (6.2-69)$$

Por lo que, la solución es la solución homogénea dada por las series de Bessel Ec. (6.2-65) y sol. Particular Ec. (6.2-68) por lo que, se tiene lo siguiente:

$$Vz(z, \omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.2-70)$$

o

$$Vz(\alpha r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + C_2 Y_0(\alpha r) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.2-71)$$

La solución general contiene dos constantes de integración C_1 y C_2 las cuales deben de determinarse a partir de las condiciones de frontera, las cuales se pueden describir como:

$$C.F.1: r = 0; Vz(0, \omega) = 0; \left| Vz(0, \omega) \right| \leq M \quad (6.2-72a)$$

$$C.F.2: r = a; Vz(\alpha a, \omega) = 0 \quad (6.2-72b)$$

La primera de estas condiciones obedece a que la solución particular debe de permanecer acotada, i.e. que para ningún valor que tome la coordenada radial debe ser infinita. Por otra parte, la segunda condición de frontera se relaciona con la

condición de no deslizamiento en la frontera (pared del tubo capilar). Al sustituir la primera C.F.1 en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = V_z(\alpha r = 0, \omega) = C_1 J_0(\alpha 0) + C_2 Y_0(\alpha 0) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.1-73)$$

Simplificando la expresión se obtiene la siguiente expresión algebraica:

$$V_{z_{\max}} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-\infty) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.1-74)$$

Simplificando la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = C_2 \cdot (-\infty) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cong C_2 \cdot (-\infty) \quad (6.1-75)$$

La última igualdad, demuestra que la velocidad en el centro del capilar, es infinita lo que carece de sentido físico. Para evitar esta inconsistencia física, la constante C_2 debe ser cero. Por lo que la solución general toma la forma:

$$V_z(\alpha r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.1-76)$$

La segunda condición de frontera al sustituirla nos da la siguiente información física:

$$V_z(\alpha a, \omega) = C_1 J_0(\alpha a) + C_2 Y_0(\alpha a) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.1-77)$$

De análisis de la primera condición de frontera se deduce que la constante C_2 es cero por lo que al despejar C_1 se tiene lo siguiente:

$$C_1 = -\frac{1}{J_0(\alpha a) \rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.1-78)$$

Finalmente al sustituir las constantes C_1 y C_2 en la solución general, se tiene lo siguiente:

$$V_z(\alpha r, \omega) = -\frac{1}{J_0(\alpha a) \rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) J_0(\alpha r) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (6.1-79)$$

Factorizando la velocidad axial en el espacio de Fourier, se tiene:

$$V_z(\alpha r, \omega) = \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left(1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} \right) \quad (6.1-80)$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del sistema $\{\rho, \eta_0, \lambda_0, \lambda_j\}$, la fuerza motriz que deforma continua e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial. Nótese, que el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir a efectos resonantes en el sistema.

6.3 Flujo volumétrico pulsátil

La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, esta dada por:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r, t) r dr d\theta = 2\pi \int_0^a V_z(r, t) r dr \quad (6.3-81)$$

Al tomar la transformada de Fourier del flujo volumétrico, se tiene lo siguientes:

$$\mathfrak{T}\{Q(t)\} = Q(\omega) = \mathfrak{T}\left\{2\pi \int_0^a V_z(\alpha r, t) r dr\right\} \quad (6.3-82)$$

Por otra parte suponiendo que la función es continua, el operador de Fourier se puede introducir en la doble integral por lo que se tiene lo siguiente:

$$\mathfrak{T}\left\{2\pi \int_0^a V_z(\alpha r, t) r dr\right\} = 2\pi \int_0^a \mathfrak{T}\{V_z(\alpha r, t)\} r dr = 2\pi \int_0^a V_z(\alpha r, \omega) r dr \quad (6.3-83)$$

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a V_z(\alpha r, \omega) r dr \quad (6.3-84)$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el espacio de Fourier en la integral de flujo volumétrico Ec. (6.3-84)

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a V_z(\alpha r, \omega) r dr = 2\pi \int_0^a \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left(1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} \right) r dr \quad (6.3-85)$$

Simplificando esta expresión, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^a \left(1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} \right) r dr \quad (6.3-86)$$

Para simplificar la integración de la Ec. (6.3-86) se propone el siguiente cambio de variable: $u = r/a$,

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_{0/a}^{a/a} \left(1 - \frac{J_0\left(\alpha a \left(\frac{r}{a}\right)\right)}{J_0(\alpha a)} \right) \left(\frac{r}{a}\right) d\left(\frac{r}{a}\right) \quad (6.3-87)$$

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^1 \left(1 - \frac{J_0(\alpha a u)}{J_0(\alpha a)} \right) u du \quad (6.3-88)$$

Definiendo $\alpha a = \beta$ como una longitud característica adimensional, la Ec. (6.3-88) toma la forma:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^\beta \left(1 - \frac{J_0(\beta u)}{J_0(\beta)} \right) u du \quad (6.3-89)$$

En la Ec. (6.3-88) se hace el siguiente cambio de variable $z = \beta u$, por lo que:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^\beta \left(1 - \frac{J_0(z)}{J_0(\beta)} \right) z dz \quad (6.3-90a)$$

Aplicando linealidad de la suma, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ \int_0^\beta z dz - \frac{1}{J_0(\beta)} \int_0^\beta J_0(z) z dz \right\} \quad (6.3-90b)$$

Para integrar las funciones de Bessel, se utiliza la siguiente propiedad matemática:

$$\frac{d}{dz} [zJ_1(z)] = zJ_0(z) \quad (6.3-91)$$

En la Ec. (6.3-91) J_1 es la función de Bessel de primera especie de orden 1. Al sustituir la Ec. (6.3-91), en la integral de la expresión del flujo volumétrico:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ \int_0^\beta z dz - \frac{1}{J_0(\beta)} \int_0^\beta \frac{d}{dz} [zJ_1(z)] dz \right\} \quad (6.3-92)$$

Al simplificar la Ec. (6.3-92) se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^\beta - \frac{zJ_1(z)}{J_0(\beta)} \Big|_0^\beta \right\} \quad (6.3-93)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, i.e. evaluando la función de Bessel en los límites superior e inferior respectivamente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{\beta J_1(\beta)}{J_0(\beta)} \right\} \quad (6.3-94)$$

Simplificando, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right\} \quad (6.3-95)$$

La Ec. (6.3-95) es el resultado más importante del presente análisis y es punto de partida en los cálculos posteriores. Un hecho importante de la Ec. (6.3-95) es la dependencia con el parámetro β el cual, nos aporta información acerca de los mecanismos inerciales y de flujo a través de la función fluidez compleja.

La Ec. (6.3-95) puede ser re-escrita de la siguiente manera:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho\omega} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cdot i \left\{ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right\} \quad (6.3-95)$$

Para poder desacoplar la Ec. (6.3-95) en una contribución real y otra imaginaria, las funciones de Bessel deben ser desarrolladas:

$$1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} = -\frac{(\beta)^2}{8} - \frac{(\beta)^4}{48} - \frac{11}{3072}(\beta)^6 - \frac{11}{3072}(\beta)^8 + O((\beta)^{10}) \quad (6.3-96)$$

Sustituyendo la Ec. (6.3-96), en la Ec. (6.3-95)

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho\omega} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cdot i \left(-\frac{1}{8}(\beta^2)^1 - \frac{1}{48}(\beta^2)^2 - \frac{11}{3072}(\beta^2)^3 - \frac{11}{3072}(\beta^2)^3 + O((\beta^2)^{10}) \right) \quad (6.3-97)$$

El parámetro β se puede expresar en término de las fluideces real y compleja respectivamente:

$$\beta^2 = (\alpha a)^2 = a^2 \rho(i\omega) \varphi^*(\omega) = a^2 \rho(i\omega) (\varphi_R(\omega) - i\varphi_I(\omega)) = a^2 \rho\omega (\varphi_I(\omega) + i\varphi_R(\omega)) \quad (6.3-98)$$

Combinando las últimas dos expresiones, el flujo volumétrico puede ser descrito como:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho \omega} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) i^3 \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \left(De \omega^* \bar{\varphi}^* \right)^j \quad (6.3-99)$$

En término de las fluideces real e imaginaria se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{(\rho/\lambda_0)} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) i^3 \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \omega^{*j-1} De^j \left(\varphi_I^*(\omega) + i\varphi_R^*(\omega) \right)^j \quad (6.3-100)$$

El flujo volumétrico puede ser expresado en término de una serie de potencias infinita la cual, depende de las propiedades inerciales y viscoelásticas a través del número de Deborah y de las fluideces real e imaginaria respectivamente. Las cantidades adimensionales definidas en el flujo volumétrico son las siguientes:

$$De = \frac{a^2 \rho \varphi_0}{\lambda_0} = \frac{\text{Inercia}}{\text{Viscoelasticidad}} = \begin{cases} De \gg 1 : \text{Inercia} \\ De = 1 : \text{Inercia} = \text{Viscoelasticidad} \\ De \ll 1 : \text{Viscoelasticidad} \end{cases}$$

$$\omega^* = \omega \lambda_0$$

$$\bar{\varphi}_I(\omega^*) = \frac{(1 - \lambda^*) \omega^*}{1 + (\lambda^*)^2 \omega^{*2}} \quad (6.3-101 \text{ a,b,c,d})$$

$$\bar{\varphi}_R(\omega^*) = \frac{\lambda^* \omega^{*2}}{1 + (\lambda^*)^2 \omega^{*2}}$$

Las expresiones (6.3-101 b-d) son las expresiones de la frecuencia, las fluideces reales e imaginaria respectivamente. Nótese que a frecuencias bajas, i.e. tiempos largos, el flujo volumétrico se transforma en:

$$\text{Lim}_{\omega^* \rightarrow 0} Q(\omega^*) \cong \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \left(-\frac{\partial p(\omega^*)}{\partial z} \right) \quad (6.3-102)$$

La Ec. (6.3-102) representa el modelo newtoniano en el espacio de frecuencias.

6.3.1 Permeabilidad dinámica

Una forma de entender la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión es la permeabilidad dinámica del medio:

$$Q(\omega^*) = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} 8i^3 \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \omega^{*j-1} De^{j-1} \left(\varphi_I^*(\omega^*) + i\varphi_R^*(\omega^*) \right)^j \left(-\frac{\partial p(\omega^*)}{\partial z} \right) \quad (6.3-103)$$

El flujo volumétrico puede ser escrito en términos de la velocidad superficial volumétrica:

$$V_0(\omega^*) = \varepsilon \langle V(\omega^*) \rangle = \varepsilon \left(\frac{Q(\omega^*)}{\pi a^2} \right) \quad (6.3-104)$$

Finalmente la velocidad superficial está dada por la siguiente expresión analítica

$$V_0(\omega^*) = \frac{\varepsilon a^2 / 8}{\eta_0} (2i)^3 \sum_{j=1}^N \delta_j (\omega^*)^{j-1} \text{De}^{j-1} (\phi_1^*(\omega^*) + i\phi_R^*(\omega^*))^j \left(-\frac{\partial p(\omega^*)}{\partial z} \right) \quad (6.3-105)$$

Finalmente la velocidad superficial, puede ser definida como:

$$V_0(\omega^*) = \frac{K_D}{\eta_0} \left(-\frac{\partial p(\omega^*)}{\partial z} \right) \quad (6.3-106)$$

En donde la permeabilidad intrínseca (no depende de la frecuencia) y la dinámica K_D están dadas por las siguientes expresiones real y compleja respectivamente:

$$K_I = \varepsilon a^2 / 8$$

$$K_D = K_I \left\{ i^3 \sum_{j=1}^N (8\delta_j) (\omega^*)^{j-1} \text{De}^{j-1} (\phi_1^*(\omega^*) + i\phi_R^*(\omega^*))^j \right\} \quad (6.3-107)$$

Nótese que la permeabilidad compleja es una serie infinita y para separar las partes real y compleja, se debe de dar un valor al índice superior de la suma. La Ec. (6.3-107) se puede interpretar como que la permeabilidad dinámica es un múltiplo de la Newtoniana. Una manera de simplificar los cálculos es definir una permeabilidad reducida, i.e. $K_r^* = K_D / K_I$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\boxed{K^* = \frac{K_D}{K_I} = (K^*)_R + i(K^*)_I = i^3 \sum_{j=1}^N (8\delta_j) (\omega^*)^{j-1} \text{De}^{j-1} (\phi_1^*(\omega^*) + i\phi_R^*(\omega^*))^j} \quad (6.3-108)$$

En la Ec. (6.3-108) $\{(K^*)_R, (K^*)_I\}$ representan la parte real e imaginaria de la permeabilidad compleja respectivamente.

6.3.2 Flujo volumétrico pulsátil

Uno de los cálculos más importantes es el relacionado con el flujo volumétrico a gradiente de presión pulsátil. Suponiendo que el gradiente de presión pulsátil puede ser escrito en términos de una función exponencial compleja.

$$\begin{aligned} Q(t^*) &= Q(\omega^*) \text{Exp}(i\omega^* t^*) \\ \nabla_z p(t^*) &= \nabla_z p(\omega^*) \text{Exp}(i\omega^* t^*) \end{aligned} \quad (6.3-109)$$

Donde Q_0 y $\nabla_z p(\omega)$ son las amplitudes complejas pulsátiles propuestas:

Si se desarrollan las funciones complejas, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} Q(t^*) &= Q(\omega^*) \text{Exp}(i\omega^* t^*) = (Q'(\omega^*) + iQ''(\omega^*)) (\text{Cos}(\omega^* t^*) + i\text{Sin}(\omega^* t^*)) \\ \nabla_z p(t^*) &= \nabla_z p(\omega^*) \text{Exp}(i\omega^* t^*) = (\nabla_z p'(\omega^*) + i\nabla_z p''(\omega^*)) (\text{Cos}(\omega^* t^*) + i\text{Sin}(\omega^* t^*)) \end{aligned} \quad (6.3-109 \text{ a,b})$$

Al desacoplar la parte real e imaginaria del flujo volumétrico y del gradiente de presión pulsátil;

$$\begin{aligned} Q_R(t^*) &= Q'(\omega^*) \text{Cos}(\omega^* t^*) - Q''(\omega^*) \text{Sin}(\omega^* t^*) \\ Q_I(t^*) &= Q''(\omega^*) \text{Cos}(\omega^* t^*) + Q'(\omega^*) \text{Sin}(\omega^* t^*) \end{aligned} \quad (6.3-110 \text{ a,b})$$

Y para la parte real e imaginaria del gradiente de presión

$$\begin{aligned} \nabla_z p_R(t^*) &= \nabla_z p'(\omega^*) \text{Cos}(\omega^* t^*) - \nabla_z p''(\omega^*) \text{Sin}(\omega^* t^*) \\ \nabla_z p_I(t^*) &= \nabla_z p''(\omega^*) \text{Cos}(\omega^* t^*) - \nabla_z p'(\omega^*) \text{Sin}(\omega^* t^*) \end{aligned} \quad (6.3-111 \text{ a,b})$$

Finalmente las expresiones (6.3-110) y (6.3-111) son los resultados más importantes del presente análisis. En la siguiente sección, se presentaran los resultados de las simulaciones más importantes de este trabajo:

CAPÍTULO VII

SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan las principales simulaciones y análisis de resultados de la presente teoría. En la primera sección se discuten los resultados obtenidos a número de Reynolds bajos, i.e. los mecanismos inerciales son pequeños en comparación con los viscosos. Esto simplifica mucho las expresiones y se obtienen expresiones cerradas para el perfil de velocidades y flujo volumétrico. Este análisis tiene dos consecuencias importantes: (i) La primera de ellas es la de clarificar el comportamiento del flujo volumétrico y su dependencia con la frecuencia del sistema y el rol que tiene los parámetros materiales intrínsecos al fluido.

En la segunda parte, se integran los resultados principales incluyendo los mecanismos inerciales a través del número de Reynolds y los procesos viscoelásticos en el sistema, con el número de Deborah. Es importante resaltar que el efecto de la inercia induce comportamientos resonantes, inducidos por el cociente de funciones de Bessel a ordenes cero y primero respectivamente.

Para visualizar los resultados computacionales, se propuso un conjunto de variables adimensionales, las cuales permiten:

- a) Acotar el espacio solución del conjunto de soluciones analíticas.
- b) Las variables adimensionales inducen grupos adimensionales los cuales permiten analizar los diferentes mecanismos involucrados como son: (i) inerciales, (ii) viscosos, (iii) viscoelásticos y (iv) de retardo.

Las variables adimensionales son empleadas para la frecuencia, tiempo de proceso, coordenada radial r y fluidez respectivamente. A continuación, se presentan un resumen de los resultados más importantes:

$$r^* = \frac{r}{a}; Q_R^* = \frac{Q_R}{Q_0}; Q_I^* = \frac{Q_I}{Q_0}; \varphi_R^* = \frac{\varphi_R}{\varphi_0}; \varphi_I^* = \frac{\varphi_I}{\varphi_0}; \omega^* = \lambda_M \omega; t^* = \lambda_M t; Z^* = \frac{Z}{a};$$

$$VZ^* = \frac{VZ}{a/\lambda_0}; p^* = \frac{p}{G_0}; K^* = \frac{K}{a^2}$$

El conjunto de números adimensionales que se obtiene al introducir estas variables adimensionales:

$$Re = \frac{a^2/\rho\eta_0^{-1}}{\lambda_M}; \lambda^* = \frac{\lambda_M}{\lambda_J}$$

Los números adimensionales que se obtiene debido a las variables adimensionales son el Reynolds y el Deborah. Ambos son números que describen los mecanismos inerciales, viscosos, y viscoelásticos en el sistema respectivamente.

7.1 Ecuaciones analíticas relevantes para el estudio y análisis del sistema

7.1.1 Análisis sin efectos inerciales

a) Ecuación dinámica de flujo

$$\sigma_{rz} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right) r^* \quad (7.1-1)$$

b) Perfil de velocidades en estado no estacionario (Viscoelástico)

$$V_z^*(r^*, t^*) = \frac{1}{4} \left(1 - (r^*)^2 \right) e^{-\lambda^* t^*} \lambda^* \int_0^{t^*} e^{\lambda^* \tau} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \tau^*} \right) \left(-\frac{dp^*}{dz^*}(\tau^*) \right) d\tau^* \quad (7.1-2)$$

c) Perfil de velocidades en estado estacionario (Newtoniano)

$$V_z^*(r^*, t^*) = \frac{1}{4} \left(1 - (r^*)^2 \right) \left(-\frac{dp^*}{dz^*} \right) \quad (7.1-3)$$

d) Flujo volumétrico transitorio

$$Q(t) = \left(Q_0 + \lambda^* \int_0^{t^*} e^{\lambda^* \tau} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \tau^*} \right) (Q_N(t)) d\tau \right) e^{\lambda^* t^*} \quad (7.1-4)$$

e) Flujo volumétrico en el espacio de la frecuencia

$$Q^*(\omega^*) = Q_R^*(\omega^*) - iQ_I^*(\omega^*) = \frac{1 + \lambda^* \omega^{*2}}{1 + \lambda^{*2} \omega^{*2}} - i \frac{1 - \lambda^*}{1 + \lambda^{*2} \omega^{*2}} \omega^* \quad (7.1-5)$$

f) Fluidez compleja real

$$\varphi_R^* = \frac{1 + \lambda^* \omega^{*2}}{1 + \lambda^{*2} \omega^{*2}} \quad (7.1-6)$$

g) Fluidez compleja imaginaria

$$\varphi_I^* = \frac{1 - \lambda^*}{1 + \lambda^{*2} \omega^{*2}} \omega^* \quad (7.1-7)$$

7.1.2 Análisis con efectos inerciales

h) Velocidad en el espacio de Fourier

$$V_z(r^*, \omega) = \frac{G_0}{\rho a^2 (i\omega)} \left(\frac{\partial p^*(\omega)}{\partial z^*} \right) \left(1 - \frac{J_0(\beta r^*)}{J_0(\beta)} \right); \beta = \alpha a \quad (7.1-8)$$

i) Flujo volumétrico en el espacio de Fourier

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho \omega} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cdot i \left\{ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right\} \quad (7.1-9)$$

j) Flujo volumétrico en término de las fluideces

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{(\rho/\lambda_0)} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) i^3 \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \omega^{*j-1} D e^j (\varphi_I^*(\omega) + i\varphi_R^*(\omega))^j \quad (7.1-10)$$

k) Velocidad superficial de flujo volumétrico

$$V_0(\omega^*) = \frac{K_D}{\eta_0} \left(-\frac{\partial p(\omega^*)}{\partial z} \right) \quad (7.1-11)$$

l) Permeabilidad intrínseca

$$K_I = \frac{\varepsilon a^2}{8} \quad (7.1-12)$$

m) Permeabilidad dinámica

$$K_D = K_I \left\{ i^3 \sum_{j=1}^N (8\delta_j) (\omega^*)^{j-1} D e^{j-1} (\varphi_I^*(\omega^*) + i\varphi_R^*(\omega^*))^j \right\} \quad (7.1-13)$$

j) Permeabilidad reducida

$$K^* = \frac{K_D}{K_I} = (K^*)_R + i(K^*)_I = i^3 \sum_{j=1}^N (8\delta_j) (\omega^*)^{j-1} D e^{j-1} (\varphi_I^*(\omega^*) + i\varphi_R^*(\omega^*))^j \quad (7.1-14)$$

7.2 Simulaciones computacionales

7.2.1 Análisis sin efectos inerciales

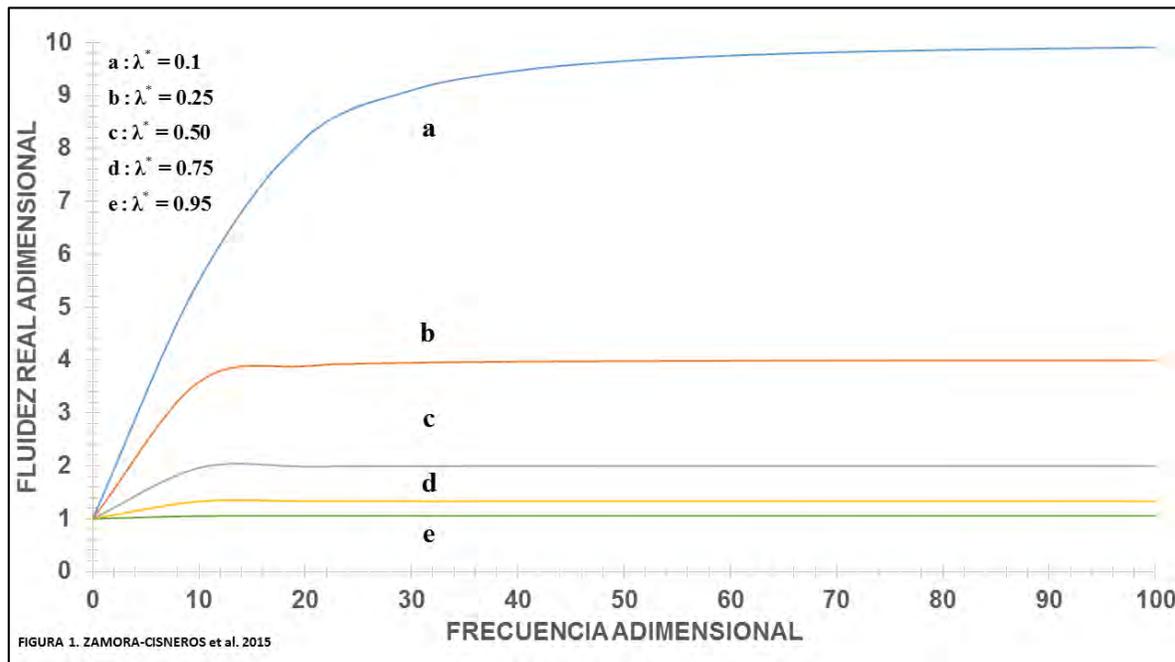


Figura 7.2-1. Se ilustra la fluidez real adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido, que relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

La Fig. 7.2-1 muestra los resultados de la fluidez real adimensional en función de la frecuencia adimensional en el sistema como función del tiempo reducido.

Matemáticamente, a frecuencias cortas, la fluidez muestra un comportamiento monótono creciente lineal en un intervalo de [0,10].

A una frecuencia adimensional crítica el sistema muestra un comportamiento asintótico en donde el sistema es independiente de la frecuencia adimensional, es decir, su comportamiento es constante. Notece que el comportamiento de la fluidez en las simulaciones es el mismo, excepto que se ve desplazado hacia valores mayores debido al tiempo reducido el cual relaciona los mecanismos asociados a Maxwell y Jeffreys.

Físicamente, el tiempo adimensional está relacionado con los mecanismos asociados a la viscosidad del solvente y del polímero. Un tiempo que tiende a valores cercanos a uno significa que la viscosidad del solvente es muy parecida a la del polímero por el contrario, un tiempo muy pequeño nos presenta una mayor fluidez asociada a una viscosidad del solvente menor que la del polímero como se observa en la Fig. 7.2-1.

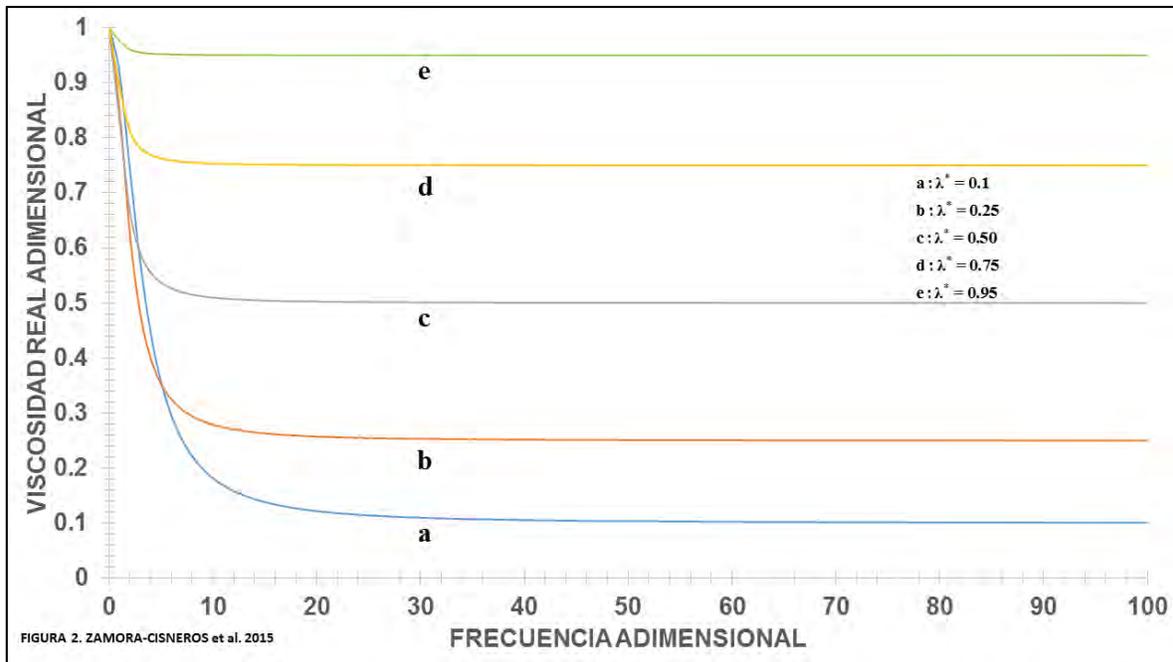


Figura 7.2-2. Se ilustra la viscosidad real adimensional en función de la frecuencia adimensional para diferentes valores de tiempo reducido, que relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

La Fig. 7.2-2 muestra los resultados de la viscosidad real adimensional en función de la frecuencia adimensional en el sistema como función del tiempo reducido.

Matemáticamente, a tiempos cortos, la viscosidad muestra un comportamiento monótono decreciente en un intervalo de 0 a 10.

A una frecuencia adimensional crítica, mostrar un comportamiento asintótico en donde el sistema se vuelve independiente de la frecuencia adimensional, es decir, se vuelve constante. Notece que el comportamiento de la viscosidad en las simulaciones es similar al mostrado por las simulaciones de la fluidez real, pues la viscosidad es simplemente el inverso de la fluidez, donde se ve desplazada la viscosidad a valores mayores conforme la frecuencia adimensional, que relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y de Jeffreys, va aumentando.

Físicamente, el tiempo adimensional esta relacionado con los mecanismos asociados a la viscosidad del solvente y del polímero. Un tiempo que tiende a valores cercanos a uno significa que la viscosidad del solvente es muy parecida a la del polímero por el contrario, un tiempo muy pequeño nos presenta una mayor fluidez asociada a una viscosidad del solvente menor que la del polímero, que lleva como consiguiente una viscosidad real adimensional menor como se observa en la Fig. 7.2-2.

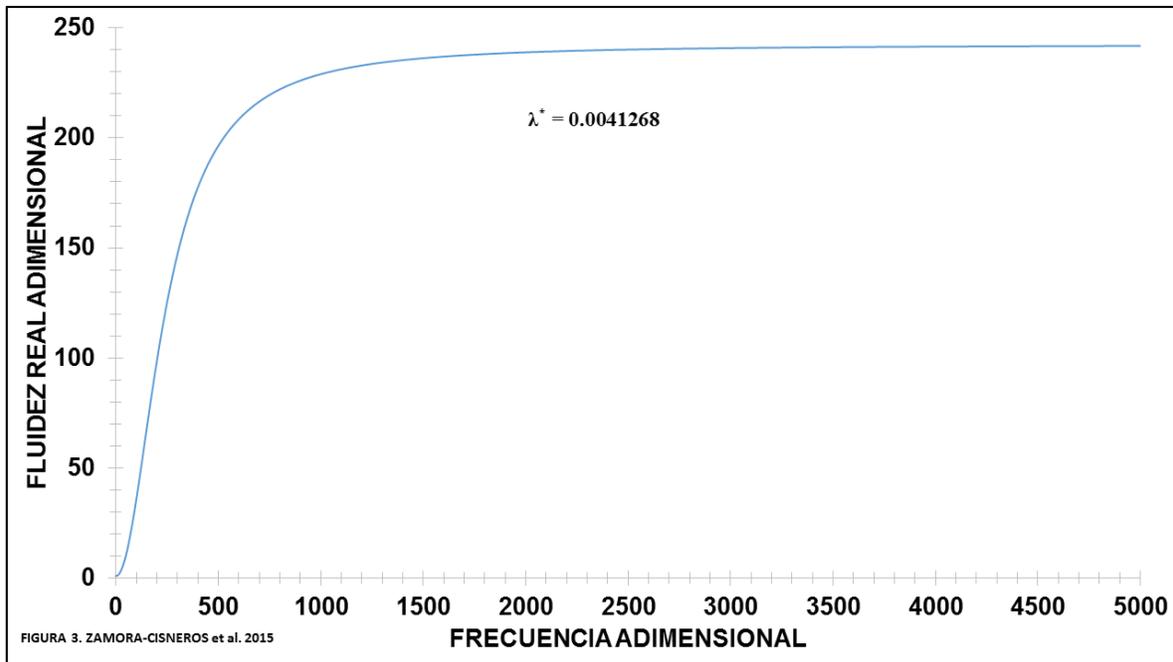


Figura 7.2-3. Se ilustra la fluidez real adimensional como función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.

La Fig. 7.2-3 muestra los resultados de la simulación para la fluidez real adimensional en función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre con bajo contenido de colesterol para el tiempo reducido adimensional, el cual relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

Matemáticamente, la función muestra un comportamiento monótono creciente a pequeños valores de la frecuencia adimensional. Nótese, que a valores moderados de la frecuencia adimensional se presenta un valor crítico en el cual la fluidez es lineal, constante y por lo tanto, independiente de la frecuencia, todo esto con forma de límite asintótico aproximadamente a partir de $\omega^* = 2500$.

Físicamente, el tiempo reducido adimensional está relacionado con los mecanismos asociados a las viscosidades del solvente y la del polímero. Al tener un tiempo reducido adimensional pequeño se infiere que la contribución aportada por el solvente es despreciable con respecto a la contribución aportada por el polímero, i.e., que los glóbulos rojos o eritrocitos dominan sobre la parte del plasma. Por otra parte, cuando aumenta la viscosidad del plasma la fluidez disminuye y se vuelve independiente de la frecuencia adimensional. Es claro que al aumentar la viscosidad se necesita un mayor consumo de energía debido a la fricción en las paredes de las venas, por esta razón se desea tener una viscosidad menor que induce un menor trabajo por unidad de tiempo por efecto de la bomba peristáltica que se tiene en el cuerpo humano (corazón).

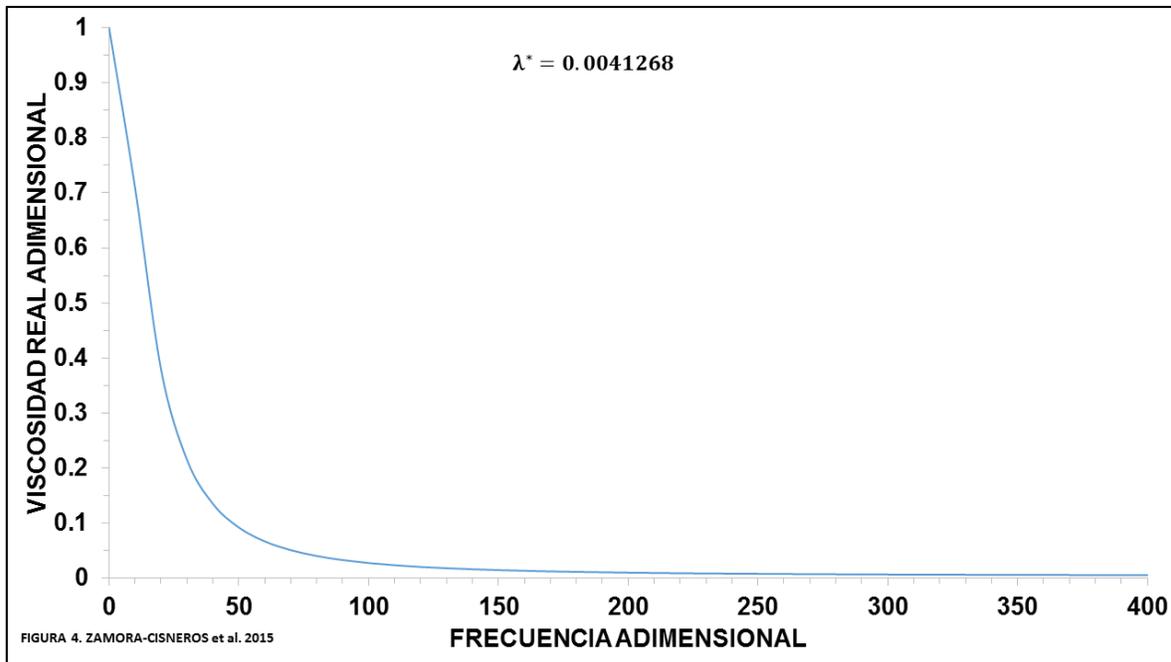


Figura 7.2-4. Se ilustra la viscosidad real adimensional como función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.

La Fig. 7.2-4 muestra los resultados de la simulación para la viscosidad real adimensional en función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol bajo para el tiempo reducido adimensional, el cual relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

Matemáticamente, la función muestra un comportamiento monótono decreciente a valores pequeños de la frecuencia adimensional. Nótese, que a valores moderados de la frecuencia adimensional se presenta un valor crítico en donde la viscosidad llega a tener el comportamiento de un límite asintótico en donde ésta se vuelve independiente de la frecuencia adimensional, es decir, constante, guarda un comportamiento muy similar al presentado por la Fig. 7.2-3.

Físicamente, el tiempo reducido adimensional está relacionado con los mecanismos asociados a las viscosidades del solvente y del polímero. A valores pequeños de la frecuencia adimensional la viscosidad muestra un comportamiento monótono decreciente hasta llegar a un punto crítico en donde se presenta un límite asintótico, de esto se infiere que, con el tiempo reducido pequeño, en donde la contribución del polímero es mayor a la dada por el solvente, y a frecuencias bajas es donde la viscosidad llega a ser tal que el consumo de energía, debido a la fricción en las paredes de las venas, es el menor. De esto se puede inferir que la mayor contribución a la disipación de energía es en el tiempo reducido en donde la viscosidad del polímero es mayor que la del solvente y el sistema no ha evolucionado tanto, en este caso el polímero son los eritrocitos y el solvente el

plasma de la sangre y así se tiene un menor trabajo por unidad de tiempo utilizado por efecto de la bomba peristáltica del cuerpo humano (corazón).

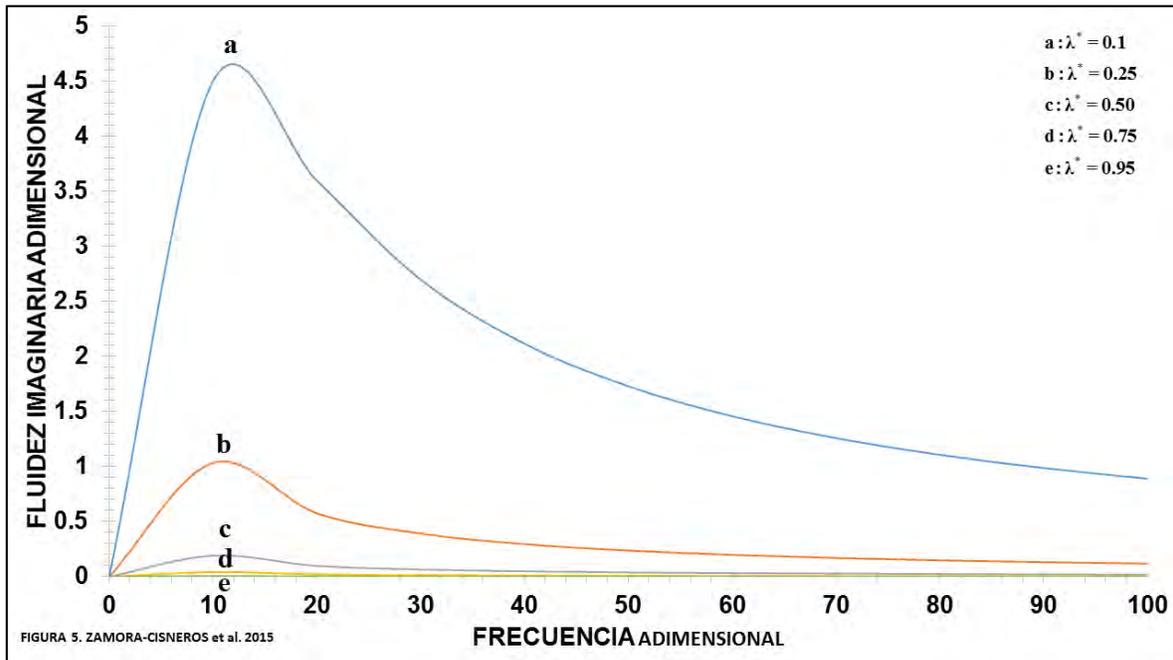


Figura 7.2-5. Se ilustra la fluidez imaginaria adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido.

La Fig. 7.2-5 muestra el comportamiento de la componente imaginaria de la fluidez compleja, que complementa con la parte real de la Fig. 7.2-1.

Matemáticamente, a frecuencias cortas, la función fluidez muestra un comportamiento monótono creciente lineal en un intervalo de $[0,10]$. Sin embargo, existe un punto en donde la fluidez llega a un máximo en donde la derivada de la fluidez con respecto a la frecuencia es cero. Nótese que el comportamiento de la función es similar a las curvas resonantes que se muestran en la literatura, así como también el comportamiento de cada una de las fluideces es el mismo, excepto que se ven desplazadas hacia abajo conforme el tiempo reducido adimensional aumenta en su valor.

Físicamente, el tiempo adimensional esta relacionado con los mecanismos asociados a la viscosidad del solvente y del polímero. Un tiempo que tiende a valores cercanos a uno significa que la viscosidad del solvente es muy parecida a la del polímero por el contrario, un tiempo muy pequeño nos presenta una mayor fluidez asociada a una viscosidad del solvente menor que la del polímero como se observa en la Fig. 7.2-5.

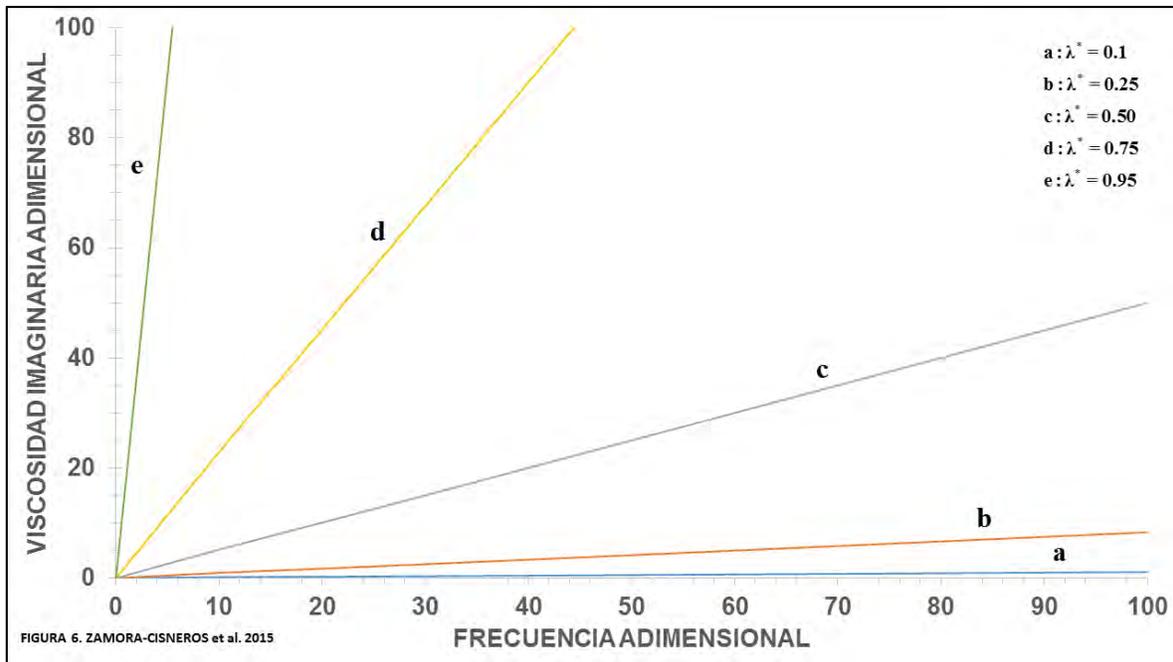


Figura 7.2-6. Se ilustra la viscosidad imaginaria adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido.

La Fig. 7.2-6 muestra el comportamiento dado por la componente imaginaria de la viscosidad compleja, que complementa con la parte real de la Fig. 7.2-2.

Matemáticamente, la función viscosidad presenta un comportamiento monótono creciente lineal para todos tiempos reducidos adimensionales en todo el intervalo de frecuencias. Nótese que los tiempos reducidos más pequeños presentan una respuesta lineal y asintótica en la que el sistema se vuelve independiente, es decir, constante. Es importante resaltar que los tiempos de relajación determinan completamente la respuesta dinámica de las frecuencias imaginarias y reales.

Físicamente, el sistema muestra un aumento progresivo y lineal para los tiempos reducidos adimensional cercanos a uno en donde la viscosidad del solvente se empieza a igualar a la viscosidad del polímero, de estos hechos se infiere que para momentos en los que la viscosidad del polímero es la que dictamina el comportamiento del flujo, esta es menor, como por el contrario, donde la respuesta mecánica es dictaminada por la viscosidad del solvente está es mayor.

7.2.2 Comparación con datos reométricos de sangre y sin efectos inerciales

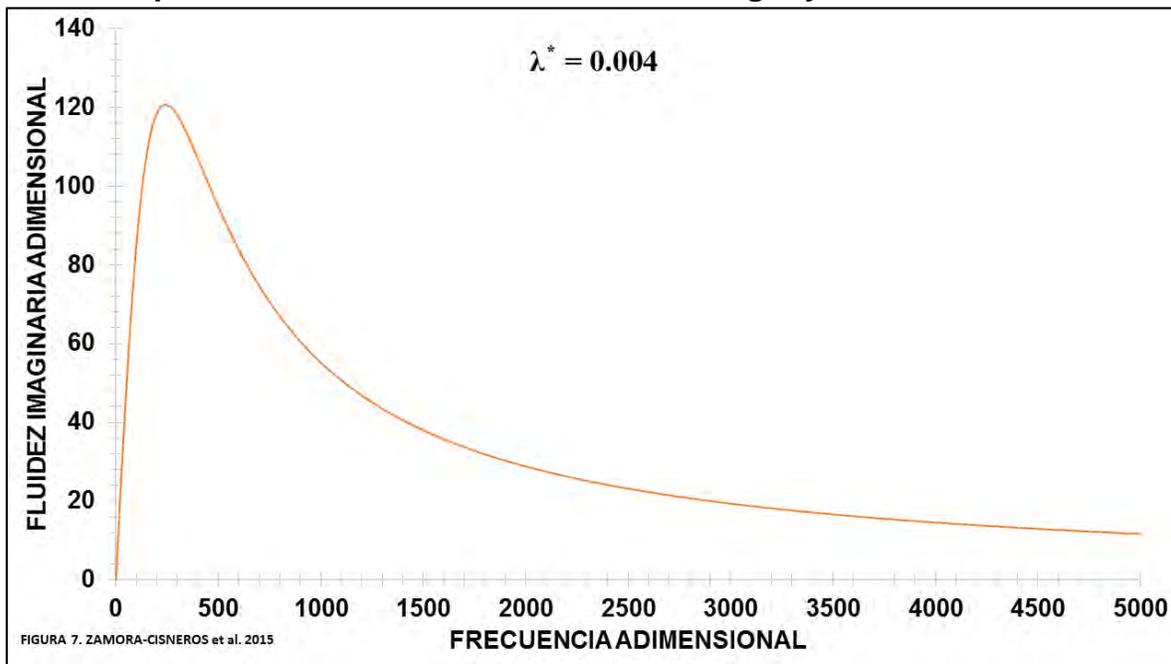


Figura 7.2-7. Ilustra la función fluidez imaginaria adimensional en función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.

La Fig. 7.2-7 muestra la respuesta dinámica de la fluidez como función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol bajo para el tiempo reducido adimensional, el cual relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

Matemáticamente, a frecuencias bajas se observa un comportamiento lineal en el intervalo de $[0,200]$, seguido de un comportamiento monótono creciente en donde se presenta un máximo local a valores bajos de la frecuencia adimensional. Seguido de este punto, la fluidez presenta un comportamiento monótono decreciente en donde la función presenta un comportamiento asintótico e independiente de la frecuencia. Nótese que los tiempos más pequeños presentan una respuesta lineal en todo el intervalo de frecuencias mientras que los tiempos grandes no presentan este comportamiento. Es importante resaltar que los tiempos de relajación determinan completamente la respuesta dinámica de las fluideces imaginarias y reales, y estos a su vez se ven afectados por el estado de la sangre (alto/bajo contenido de colesterol, hábitos alimenticios, diabetes, etc.).

Físicamente, a valores pequeños de la frecuencia adimensional y un tiempo reducido adimensional bajo, la fluidez se comporta de manera creciente. Esto quiere decir que en los momentos donde la viscosidad del polímero se sobrepone a la viscosidad del solvente, pues el tiempo reducido adimensional es el que guarda esta relación entre las viscosidades, la fluidez tiende a crecer, por lo tanto, la viscosidad disminuye. Es importante resaltar en comportamiento parecido a las curvas

resonantes presentes en la literatura, en la cual, se puede observar la parte disipativa mostrando las propiedades materiales del sistema.

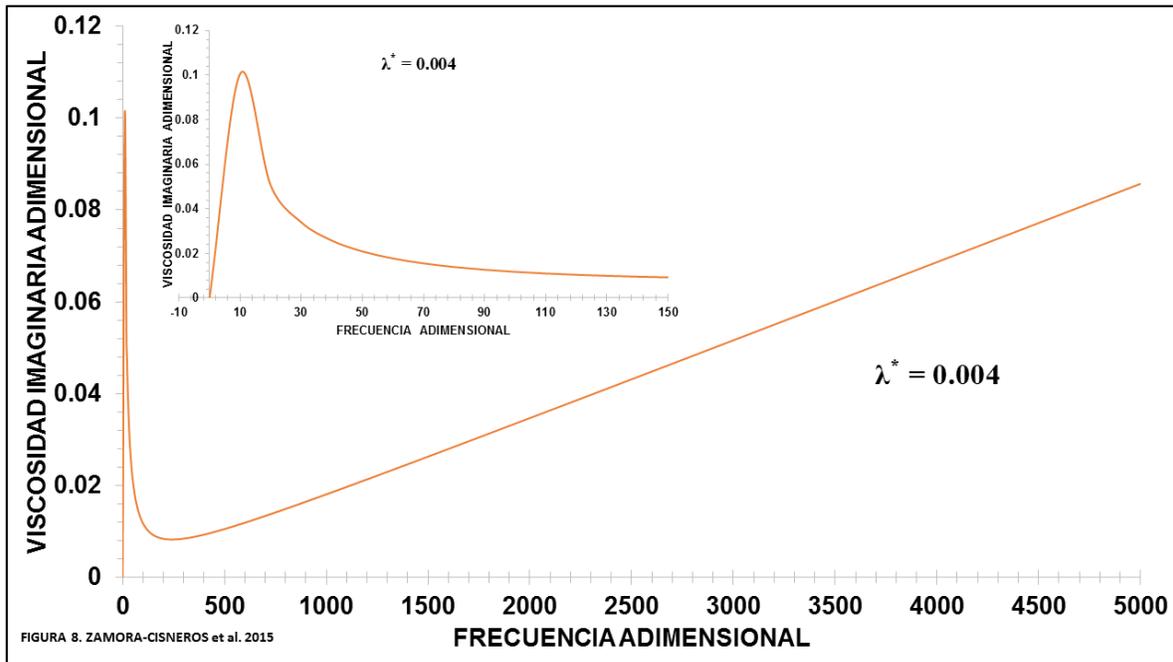


Figura 7.2-8. Ilustra la función viscosidad imaginaria adimensional en función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.

La Fig. 7.2-8 muestra la respuesta de la viscosidad como función de la frecuencia con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol para el tiempo reducido adimensional, el cual relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

Matemáticamente, es claro que el sistema muestra el clásico comportamiento resonante descrito en la literatura presente a valores cortos de la frecuencia adimensional como se puede notar en la ventana de observación de la Fig. 7.2-8. Así también, se detecta un comportamiento monótono creciente lineal hasta un valor crítico en donde la derivada de la viscosidad con respecto a la frecuencia es cero, es decir, es un máximo. Para un valor de frecuencia mayor al crítico se presenta un comportamiento monótono decreciente en donde se puede apreciar un mínimo local. Seguido de este comportamiento, y seguido del mínimo global antes mencionado, la viscosidad presenta un comportamiento creciente lineal con una pendiente positiva, el cual no deja de aumentar. Es importante resaltar que el comportamiento mostrado a frecuencias bajas es similar al presentado en la Fig. 7.2-7 en todo el intervalo de frecuencias.

Físicamente, para valores de la frecuencia adimensional cortos se tiene la máxima energía disipada asociada a la viscosidad en un intervalo $[0,30]$, esto significa, que se tiene una estructura compleja formada por los eritrocitos, también

llamada agregación celular, observable en el máximo de las curvas resonantes. Nótese, que a una frecuencia crítica la viscosidad decrece hasta un mínimo observable en el intervalo de frecuencias cortas [200,400] debido a la disgregación del cúmulo celular, por este motivo se infiere que a mayor fluidez estas agregaciones celulares se desestructuran dando paso a una menor viscosidad.

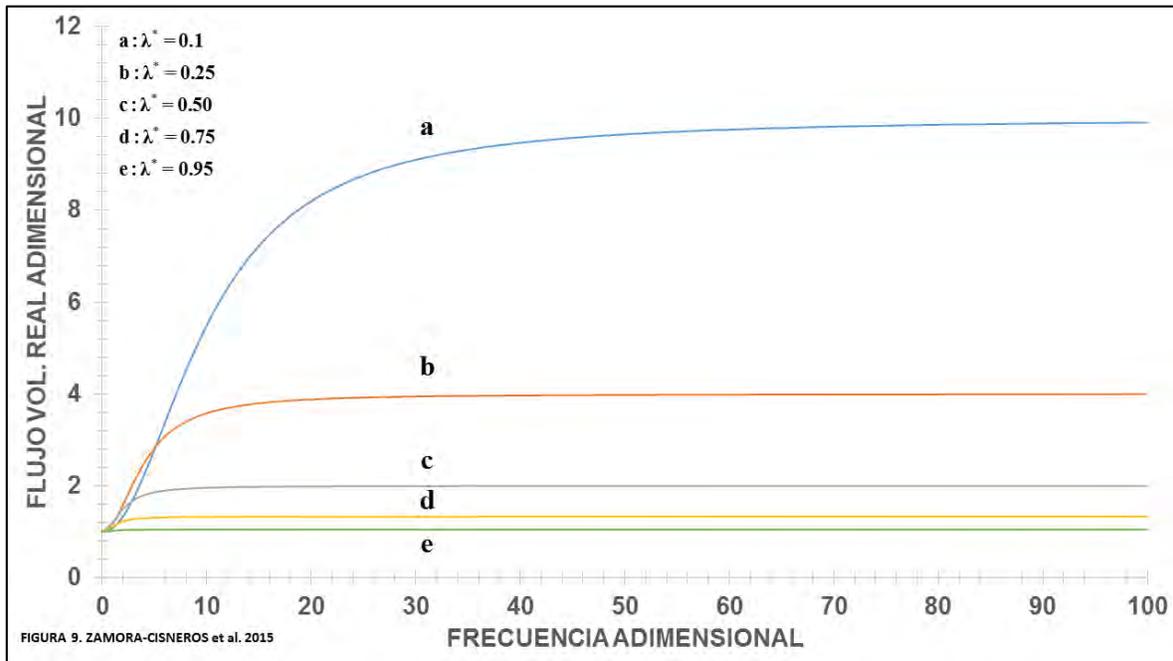


Figura 7.2-9. Se ilustra el flujo volumétrico real adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido, que relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

La Fig. 7.2-9 muestra los resultados del flujo volumétrico real adimensional en función de la frecuencia adimensional en el sistema como función del tiempo reducido.

Matemáticamente, a frecuencias cortas, el flujo volumétrico real adimensional muestra un comportamiento monótono creciente en un intervalo de [0,10].

A una frecuencia adimensional crítica el sistema muestra un comportamiento asintótico en donde el sistema es independiente de la frecuencia adimensional, es decir, su comportamiento es constante. Notece que el comportamiento del flujo en las simulaciones es el mismo, excepto que se ve desplazado hacia valores mayores debido al tiempo reducido el cual relaciona los mecanismos asociados a Maxwell y Jeffreys.

Físicamente, el tiempo adimensional está relacionado con los mecanismos asociados a la viscosidad del solvente y del polímero. Un tiempo que tiende a valores cercanos a uno significa que la viscosidad del solvente es muy parecida a la del polímero por el contrario, un tiempo muy pequeño nos presenta una mayor

flujo asociado a una viscosidad del solvente menor que la del polímero como se observa en la Fig. 7.2-9.

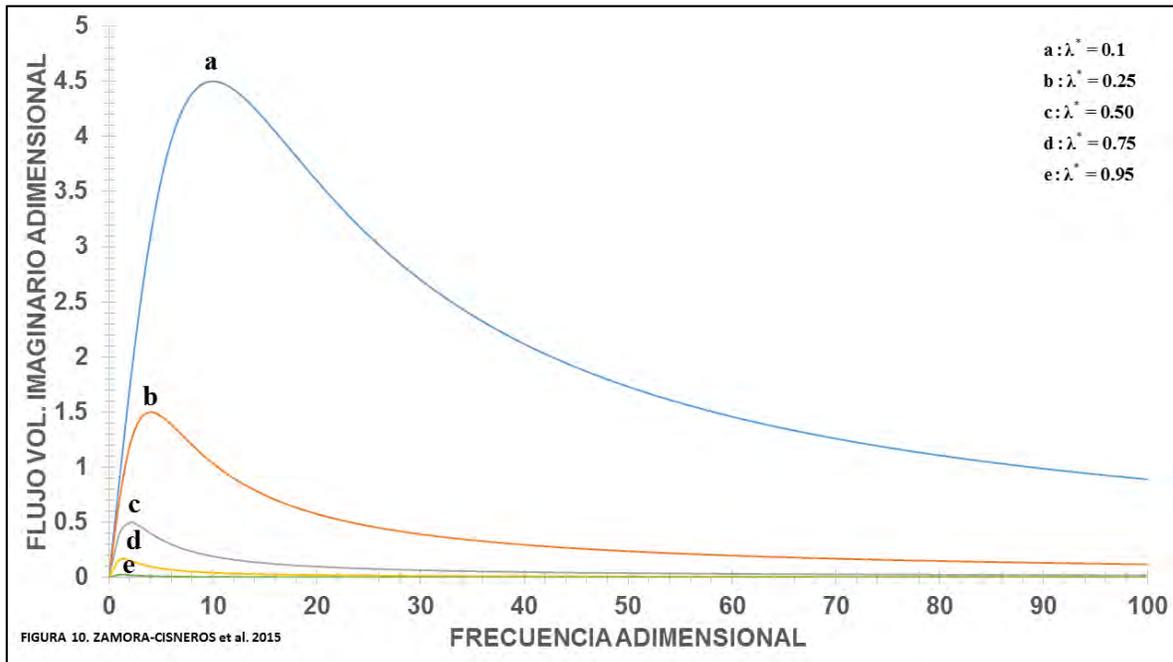


Figura 7.2-10. Se ilustra el flujo volumétrico imaginario adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido, que relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

La Fig. 7.2-10 muestra los resultados del flujo volumétrico imaginario adimensional en función de la frecuencia adimensional en el sistema como función del tiempo reducido.

Matemáticamente, a frecuencias cortas, el flujo volumétrico muestra un comportamiento monótono creciente lineal en un intervalo de $[0, 10]$. Sin embargo, existe un punto en donde el flujo llega a un máximo en donde la derivada del flujo con respecto a la frecuencia es cero. Nótese que el comportamiento de la función es similar a las curvas resonantes que se muestran en la literatura, así como también el comportamiento de cada una de los flujos es el mismo, excepto que se ven desplazados hacia abajo conforme el tiempo reducido adimensional aumenta en su valor.

Físicamente, el tiempo adimensional está relacionado con los mecanismos asociados a la viscosidad del solvente y del polímero. Un tiempo que tiende a valores cercanos a uno significa que la viscosidad del solvente es muy parecida a la del polímero por el contrario, un tiempo muy pequeño nos presenta un mayor

7.2.3 Análisis dinámico con inercia

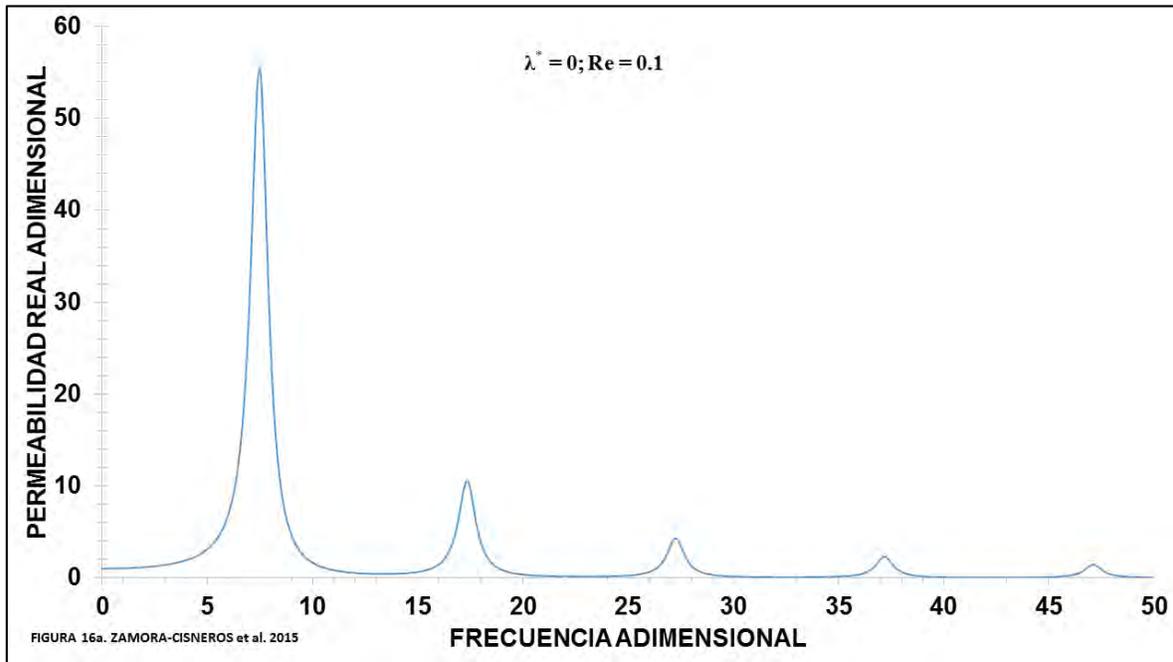


Figura 7.2-11a Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para valor del número de Reynolds pequeño ($Re=0.1$), y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).

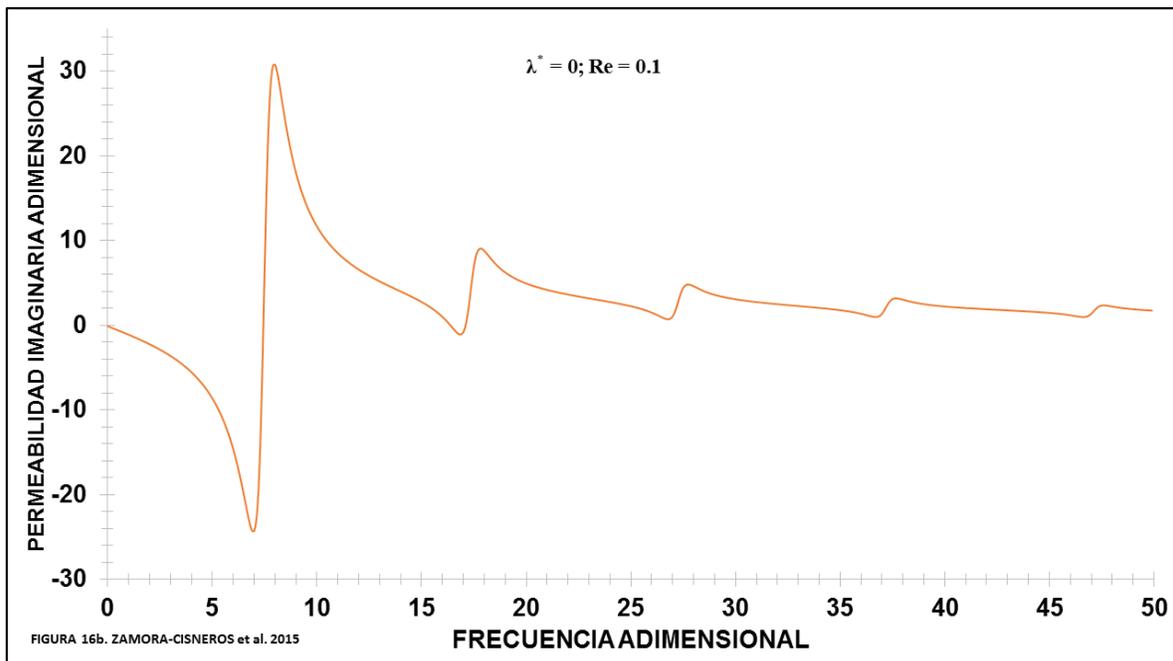


Figura 7.2-11b Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para valor del número de Reynolds pequeño ($Re=0.1$), y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).

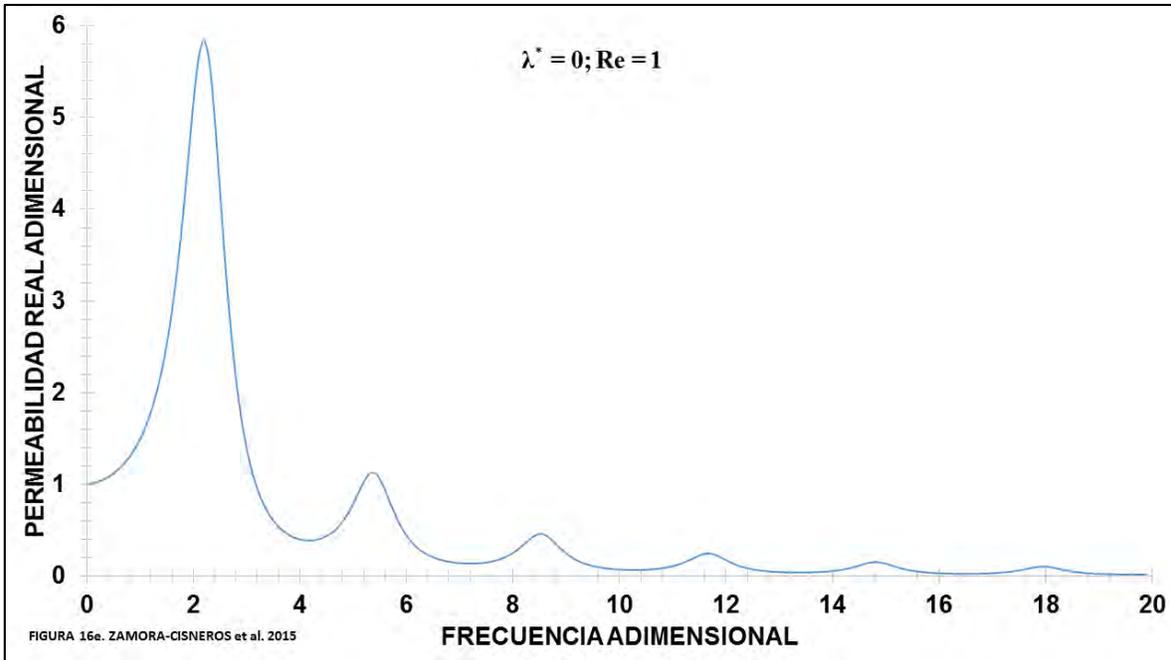


Figura 7.2-11c Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para valor del número de Reynolds ($Re=1$), y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).

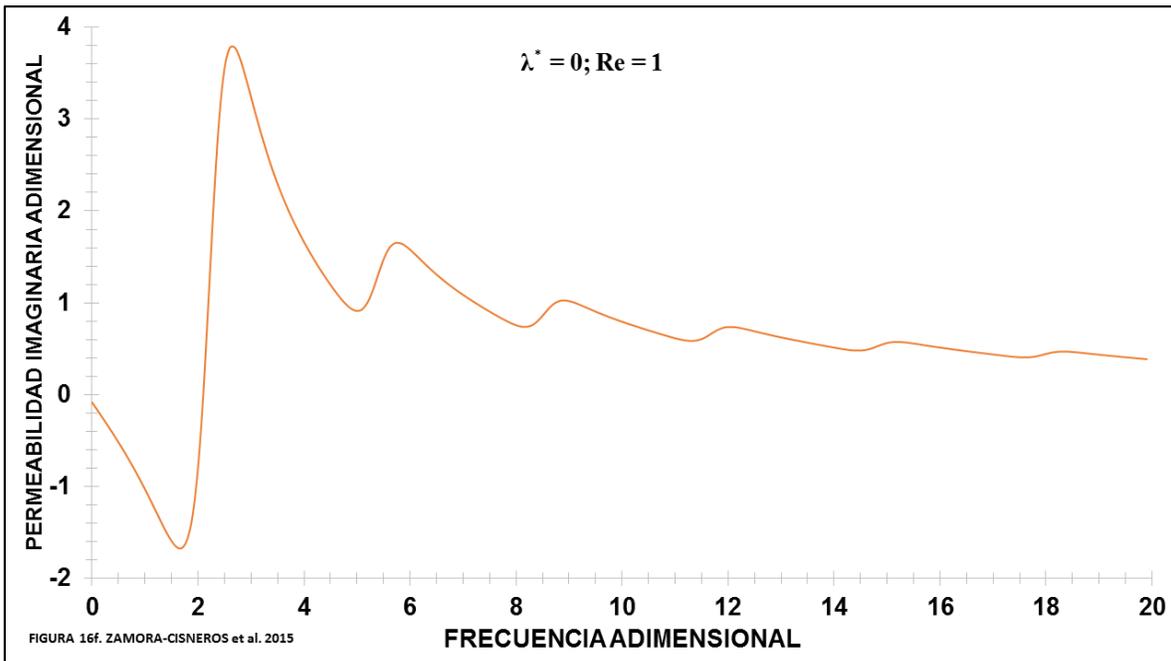


Figura 7.2-11d Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para valor del número de Reynolds ($Re=1$), y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).

Matemáticamente, la parte real del sistema presenta una sucesión de curvas resonantes para el conjunto de graficas anteriormente ilustradas, siendo la mayor, para los tres casos mostrados, a valores bajos de la frecuencia adimensional. Nótese, que el máximo valor alcanzado por las curvas resonantes es dado en la Fig. 7.2-11a, en donde la permeabilidad alcanza un valor aproximado a $K^*=56$, y en la Fig. 7.2-11c de $K^*=6$. Para así, en cada una de las Figuras antes mencionadas, conforme el sistema va evolucionando, las curvas resonantes van atenuándose hasta llegar al momento en que se vuelven lineales e independientes del sistema. En la parte imaginaria, para las Fig. 7.2-11b, y 7.2-11d, se puede observar un comportamiento monótono decreciente para encontrar un punto mínimo y después ser sucedido por un punto máximo; la transición existente, sólo entre estos dos puntos, es lineal, además, conforme el sistema va evolucionando, existe una sucesión de puntos que se asemejan al comportamiento antes mencionado dando lugar a un comportamiento tipo diente de sierra. Nótese, el comportamiento entre las figuras antes mencionadas es semejante con la diferencia, misma encontrada en la parte real antes mencionada que, conforme el número de Reynolds aumenta, los valores máximos y mínimos disminuyen y el comportamiento irregular se va atenuando, conforme el sistema evoluciona, para volverse constante e independiente.

Es importante resaltar que la contribución de las curvas resonantes se da a frecuencias bajas y a frecuencias moderadas y altas tienden a atenuarse e incluso a desaparecer.

Físicamente, la máxima respuesta entre el flujo y el gradiente de presión, la permeabilidad, se ve inducida con respecto al valor del número de Reynolds y la relación entre el solvente y el polímero, que es el tiempo reducido adimensional. Esto es inferido por el hecho de que al tener un valor pequeño del número de Reynolds refleja que los mecanismos viscosos dominan sobre los inerciales y al tener un número de Reynolds grande, los mecanismos inerciales dominan sobre los viscosos. Con esto, como consecuencia, es posible notar que a valores pequeños de la frecuencia adimensional se tiene el máximo valor obtenido para la permeabilidad, i.e., el flujo máximo posible se da a en este punto. Conforme el sistema va evolucionando se puede observar una mitigación en el aspecto antes mencionado.

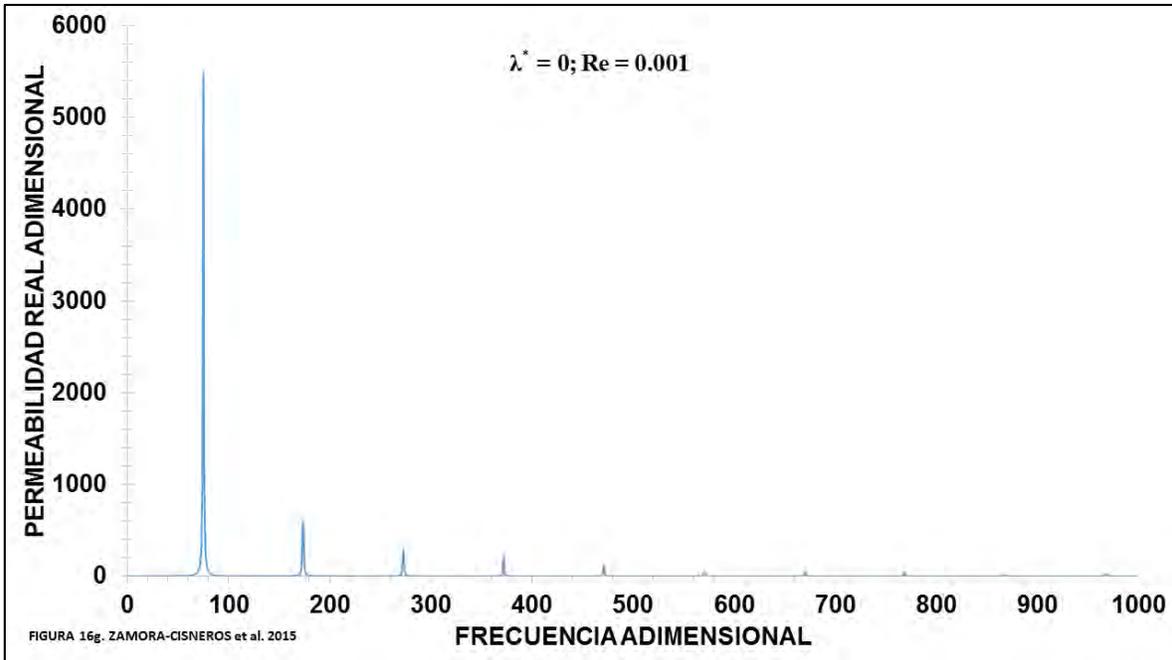


Figura 7.2-11e Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para un valor pequeño del número de Reynolds ($Re = 0.001$) y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).

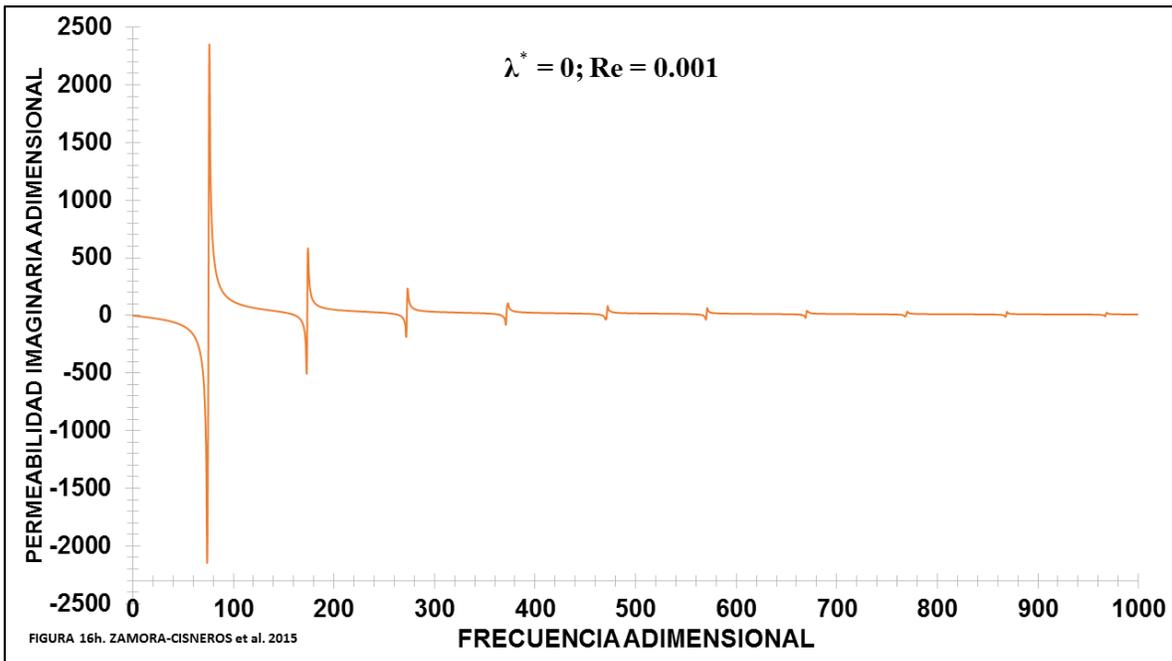


Figura 7.2-11f Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para un valor pequeño del número de Reynolds ($Re = 0.001$) y un tiempo reducido adimensional relacionado a un fluido de Maxwell ($\lambda^* = 0$).

Matemáticamente, la parte real del sistema presenta una sucesión de curvas resonantes, siendo la mayor a valores bajos de la frecuencia adimensional. Para así, conforme el sistema va evolucionando, las curvas resonantes van atenuándose hasta llegar al momento en que se vuelven lineales e independientes del sistema. En la parte imaginaria, se puede observar un comportamiento monótono decreciente para encontrar un punto mínimo y después ser sucedido por un punto máximo; la transición existente, a diferencia de las Fig. 7.2-11b, 7.2-1d, entre estos dos puntos y sus sucesiones, es lineal, además, los cuales asemejan al comportamiento tipo diente de sierra.

Es importante resaltar que la contribución de las curvas resonantes se da a frecuencias bajas y que, a diferencia de las Fig. 7.2-11a, 7.2-11c el área bajo la curva es significativamente menor, a diferencia del valor máximo obtenido por la curva resonante dominante, que es el mayor observado hasta el momento.

Físicamente, la máxima respuesta entre el flujo y el gradiente de presión, la permeabilidad, se ve inducida con respecto al valor del número de Reynolds y la relación entre el solvente y el polímero, que es el tiempo reducido adimensional. Esto es inferido por el hecho de que al tener un valor pequeño del número de Reynolds refleja que los mecanismos viscosos dominan sobre los inerciales. Con esto, como consecuencia, es posible notar que a valores pequeños de la frecuencia adimensional se tiene el máximo valor obtenido para la permeabilidad, i.e., el flujo máximo posible se da a en este punto. Conforme el sistema va evolucionando se puede observar una mitigación en el aspecto antes mencionado.

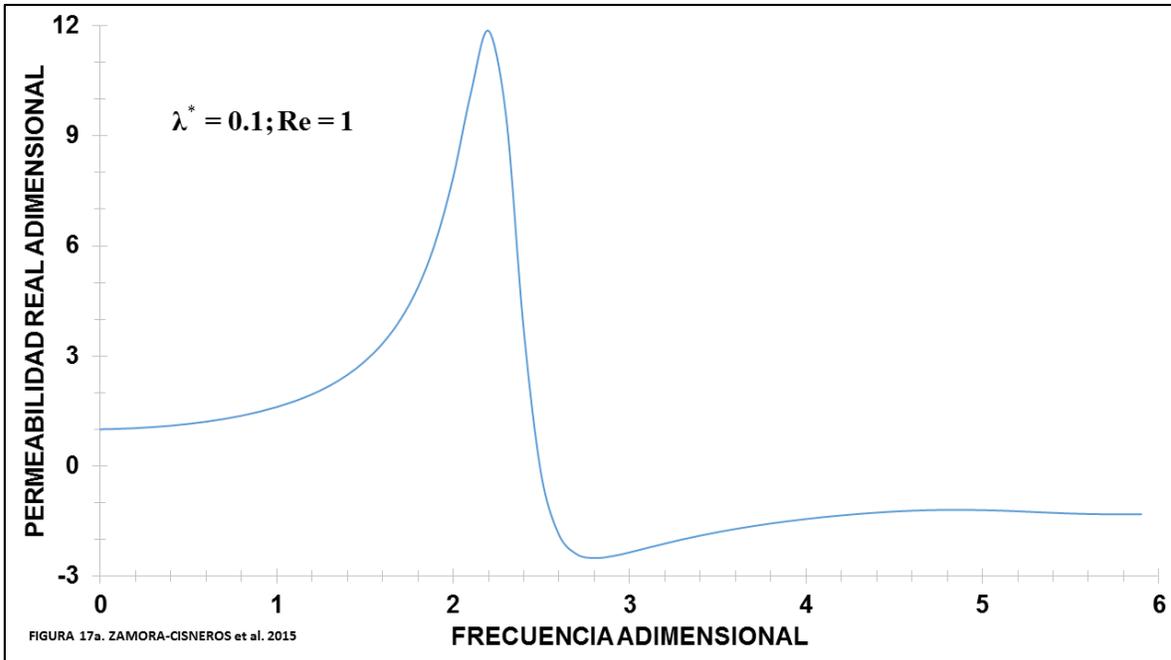


Figura 7.2-12a Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional en una corta ventana de observación, un número de Reynolds ($Re=1$) y un valor del tiempo reducido adimensional para un fluido de Jeffreys.

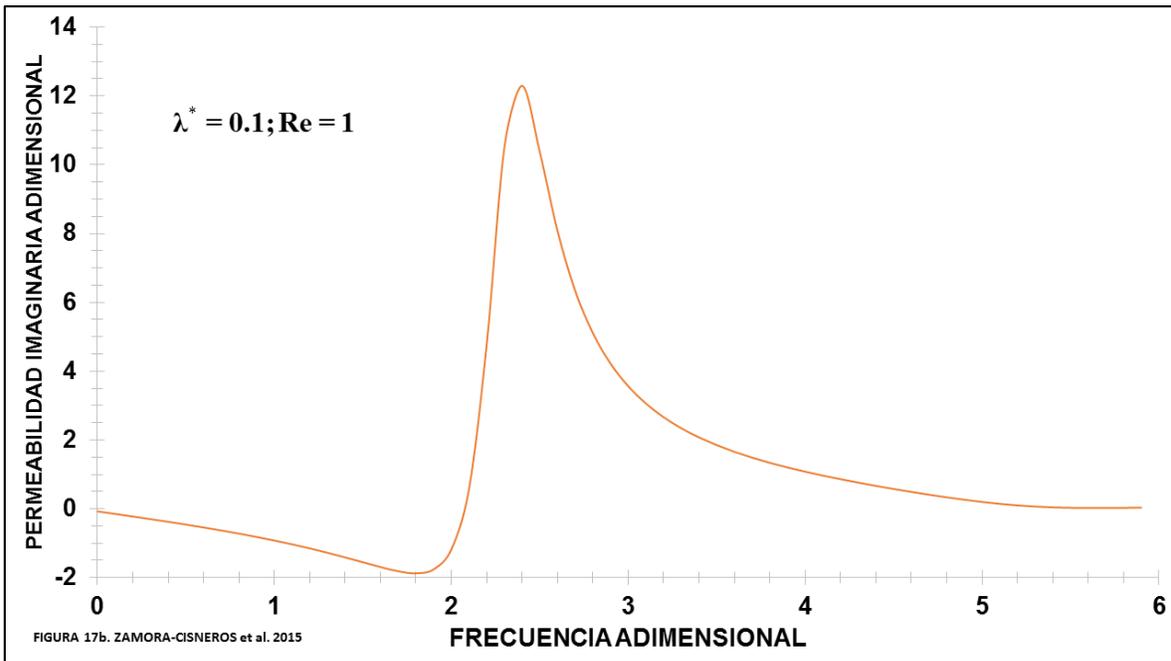


Figura 7.2-12b Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional en una corta ventana de observación, un número de Reynolds ($Re=1$) y un valor del tiempo reducido adimensional para un fluido de Jeffreys.

Matemáticamente, la parte real del sistema, mostrada por la Fig. 7.2-12a tiene un comportamiento monótono creciente antes de encontrarse con el máximo

global del sistema. La Fig. 7.2-12a es la única que muestra un mínimo, observado a valores moderados de la frecuencia adimensional, para después volverse constante e independiente del sistema. La parte imaginaria, mostrada por la Fig. 7.2-12b, tienen un comportamiento diferente y único entre sí. La Fig. 7.2-12b muestra un valor mínimo antes de encontrarse con su máximo, asemejando a una curva resonante que puede observarse a valores moderados de la frecuencia adimensional. Físicamente, la permeabilidad real muestra curvas resonantes, las cuales se van atenuando y son afectadas por el valor del tiempo reducido adimensional. Como el tiempo reducido adimensional es la relación que se tiene entre las contribuciones dadas por el polímero y el solvente, al tener un valor bajo, el comportamiento se ve regido por las contribuciones del polímero, y cuando se tiene un valor grande las contribuciones dadas por el solvente son las regentes. De esto se infiere que, cuando se tiene un valor bajo del tiempo reducido adimensional y las contribuciones dadas por el polímero son grandes, se tiene una acentuación en las curvas resonantes y el valor más grande para la permeabilidad. Conforme este valor del tiempo reducido aumenta, la permeabilidad disminuye, y esta al ser una relación entre el flujo y el gradiente de presión se tiene el valor más pequeño para el flujo. A diferencia cuando el tiempo es reducido es pequeño y se tiene el máximo aprovechamiento del flujo.

Físicamente, el comportamiento creciente mostrado a pequeños valores de la frecuencia adimensional en la parte real de la permeabilidad hace muestra del comportamiento elástico, inferido por la parte disipativa. Como se puede apreciar, el valor para el tiempo reducido adimensional aumenta para cada caso en las Fig. Se puede notar que a valores bajos del tiempo reducido adimensional, en el cual, la parte contribuida por el polímero es la dominante en el sistema, se tiene un comportamiento con ligeras perturbaciones y conforme el valor del tiempo reducido aumenta, estas “perturbaciones” se van atenuando. Aunado a esto, el número de Reynolds, relativamente elevado, muestra que los mecanismos inerciales inciden más que los aportados por los viscosos. De todo esto se puede inferir, como la permeabilidad es una relación entre el flujo y el gradiente de presión, que el máximo flujo posible se da a valores bajos de la frecuencia adimensional, y conforme el sistema va evolucionando, esta relación se va atenuando hasta ser constante e independiente.

7.3 Aplicaciones en datos de sangre con bajo contenido de colesterol

7.3.1 Análisis sin efectos inerciales

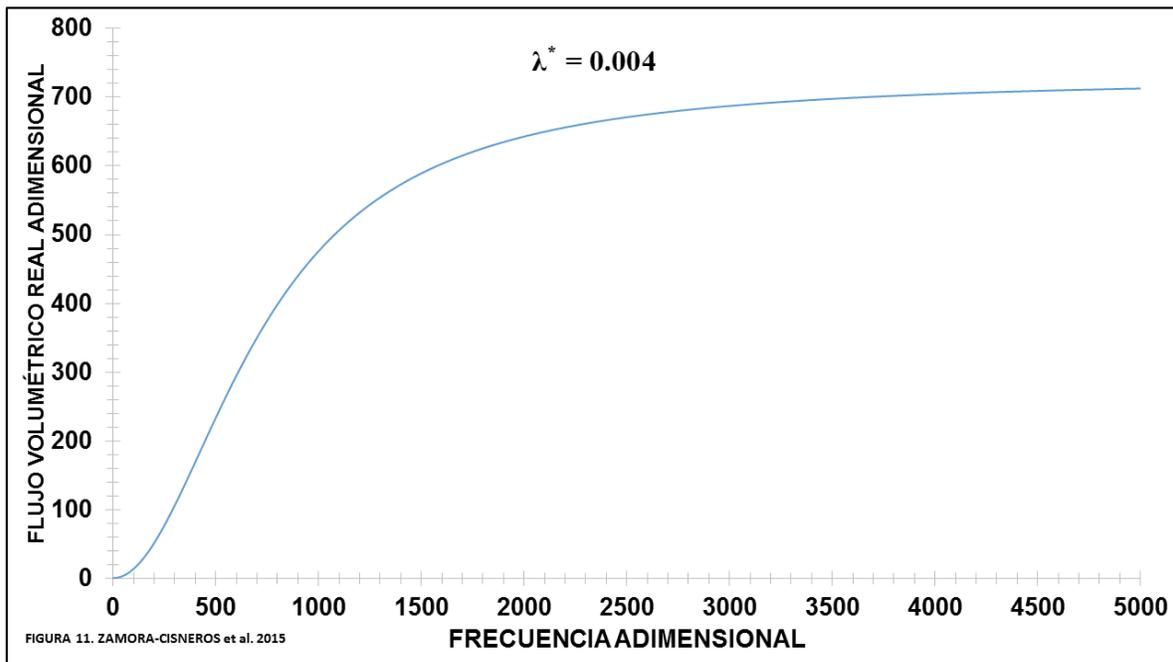


Figura 7.3-1. Se ilustra la flujo volumétrico real adimensional como función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.

La Fig. 7.3-1 muestra los resultados de la simulación para el flujo real adimensional en función de la frecuencia adimensional con datos de sangre con bajo contenido de colesterol para el tiempo reducido adimensional, el cual relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

Matemáticamente, la función muestra un comportamiento monótono creciente en el intervalo de frecuencias cortas. Es importante resaltar que el comportamiento es similar al mostrado en la Fig. 7.2-3, en donde, el tiempo reducido adimensional es el menor. En este, el comportamiento, a frecuencias moderadas, muestra un límite asintótico, buscando ser constante, lineal, y por lo tanto, independiente del sistema. Es importante resaltar que la Fig. 7.2-3 muestra la fluidez y en este caso el flujo volumétrico es el obtenido.

Físicamente, el tiempo reducido adimensional está relacionado con los mecanismos asociados a las viscosidades del solvente y la del polímero. A valores bajos del tiempo reducido adimensional la fluidez describe un comportamiento monótono creciente en donde se observan cambios a bajas, moderadas y altas frecuencias adimensionales asociadas a la pendiente (derivada del flujo con respecto a la frecuencia). Si el tiempo reducido es pequeño se infiere que el solvente es despreciable con respecto a la contribución del polímero, i.e., que los glóbulos rojos o eritrocitos dominan sobre la parte del plasma y esto se infiere a través de este tiempo adimensional reducido.

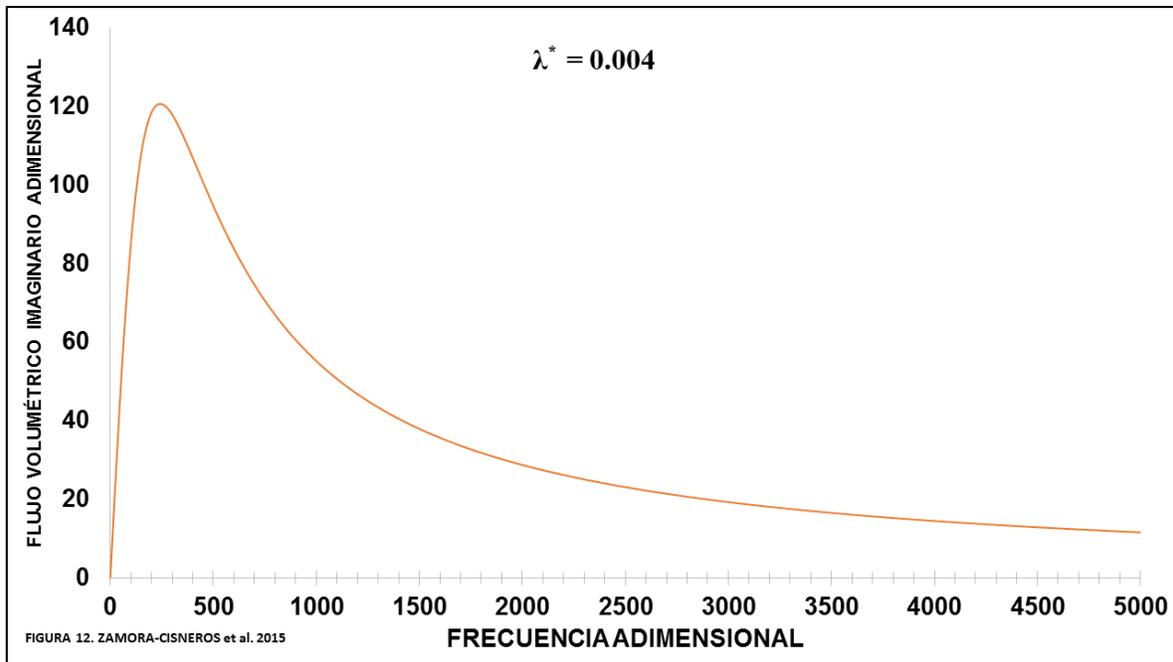


Figura 7.3-2. Se ilustra la flujo volumétrico real adimensional como función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre para el tiempo reducido adimensional.

La Fig. 7.3-2 muestra la respuesta dinámica del flujo como función de la frecuencia adimensional con datos de sangre con contenido de colesterol bajo para el tiempo reducido adimensional, el cual relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

Matemáticamente, a valores cortos de la frecuencia adimensional se observa un comportamiento lineal en el intervalo de $[0,100]$, seguido de un comportamiento monótono creciente en donde se presenta una frecuencia crítica con un punto de inflexión en donde la función presenta un comportamiento asintótico e independiente de la frecuencia. Nótese que existe una similitud con el comportamiento reportado en la Fig. 7, en donde se observa la fluidez imaginaria, a diferencia en este caso de ser el flujo volumétrico el que está siendo analizado. Es importante resaltar que los tiempos de relajación determinan completamente la respuesta dinámica de los flujos imaginarios y reales, y estos a su vez se ven afectados por el estado de la sangre (alto/bajo contenido de colesterol, hábitos alimenticios, diabetes, etc.).

Físicamente, para un intervalo de frecuencias dado y un tiempo reducido adimensional bajo, el flujo se comporta de manera creciente y lineal en $[0,200]$. Acto seguido se muestra un comportamiento monótono creciente en donde se presenta un máximo local a valores bajos de la frecuencia adimensional. Inmediatamente del máximo antes mencionado, se observa que el flujo presenta un comportamiento monótono decreciente para acercarse al dado por un límite asintótico, en donde el flujo busca un estado en el que se vuelva constante e independiente de la

frecuencia. Esto quiere decir que en los momentos donde la viscosidad del polímero se sobrepone a la viscosidad del solvente el flujo tiende a crecer, pero solo en el intervalo de las frecuencias adimensionales cortas, por lo tanto la viscosidad disminuye. Por otra parte cuando el sistema evoluciona trata de igualar su viscosidad con la del polímero, el flujo tiende a ser menor y su viscosidad mayor como se muestra en la ventana de observación.

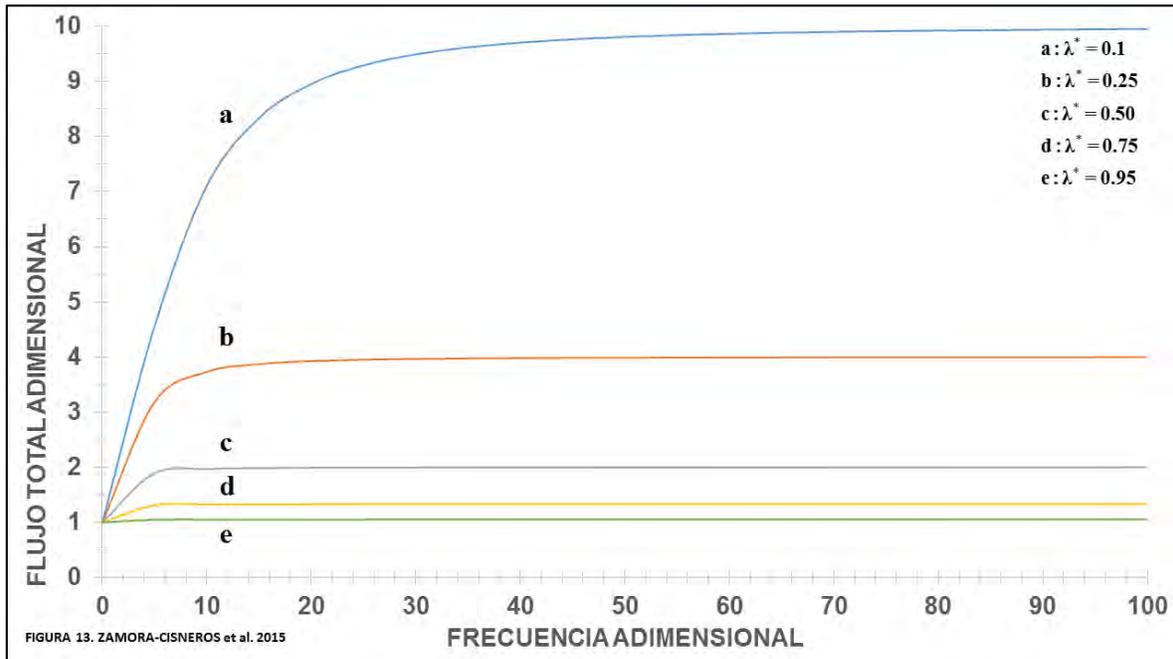


Figura 7.3-3. Se ilustra la flujo total adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del tiempo reducido, que relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

La Fig. 7.3-3 muestra los resultados de la flujo volumétrico total adimensional en función de la frecuencia adimensional en el sistema como función del tiempo reducido.

Matemáticamente, a frecuencias cortas, el flujo muestra un comportamiento monótono creciente lineal en un intervalo de $[0, 10]$.

A una frecuencia adimensional crítica el sistema muestra un comportamiento asintótico en donde el sistema es independiente de la frecuencia adimensional, es decir, su comportamiento es constante. Notece que el comportamiento del flujo total en las simulaciones es el mismo, excepto que se ve desplazado hacia valores mayores debido al tiempo reducido el cual relaciona los mecanismos asociados a Maxwell y Jeffreys.

Físicamente, el tiempo adimensional está relacionado con los mecanismos asociados a la viscosidad del solvente y del polímero. Un tiempo que tiende a valores cercanos a uno significa que la viscosidad del solvente es muy parecida a la del polímero por el contrario, un tiempo muy pequeño nos presenta un mayor flujo

total asociado a una viscosidad del solvente menor que la del polímero como se observa en la Fig. 7.3-3.

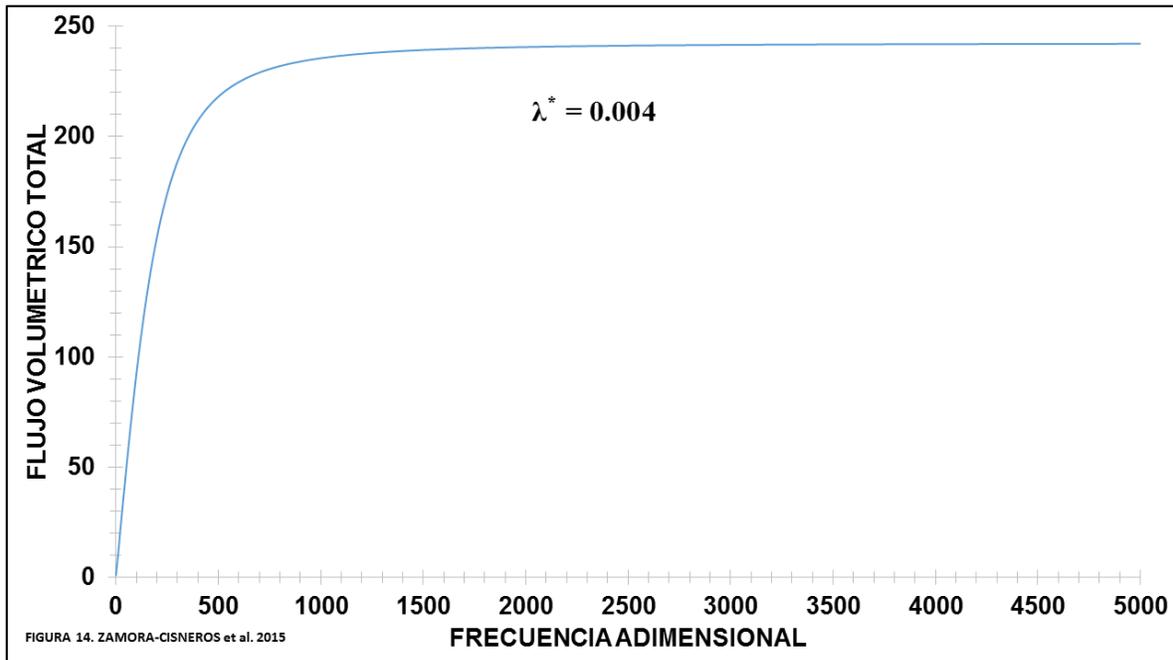


Figura 7.3-4. Se ilustra el flujo total adimensional como función de la frecuencia adimensional para diferentes valores de tiempos de relajación.

La Fig. 7.3-4 muestra el comportamiento del flujo volumétrico total como función de la frecuencia adimensional con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol bajo para el tiempo reducido adimensional, el cual relaciona los tiempos de relajación de Maxwell y Jeffreys.

Matemáticamente, a frecuencias bajas se observa un comportamiento lineal en el intervalo de $[0,200]$, seguido de un comportamiento monótono creciente en donde se presenta una frecuencia crítica con un punto de inflexión en donde la función presenta un comportamiento asintótico e independiente de la frecuencia. Es importante resaltar que los tiempos de relajación determinan completamente la respuesta dinámica del flujo, y estos a su vez se ven afectados por el estado de la sangre (alto/bajo contenido de colesterol, hábitos alimenticios, diabetes, etc.).

Físicamente, para valores de la frecuencia adimensional cortos y el tiempo reducido adimensional bajo, el flujo total se comporta de manera creciente y lineal. Por el contrario, para valores moderados y grandes de la frecuencia adimensional el flujo llega a tener un comportamiento asintótico. Esto quiere decir que en los momentos donde la viscosidad del polímero se sobrepone a la viscosidad del solvente el flujo tiende a crecer, por lo tanto la viscosidad disminuye. Por otra parte cuando el solvente trata de igualar su viscosidad con la del polímero, el flujo tiende a ser menor y su viscosidad mayor como se muestra en la ventana de observación de la Fig. 7.3-4.

7.3.2 Análisis con efectos inerciales

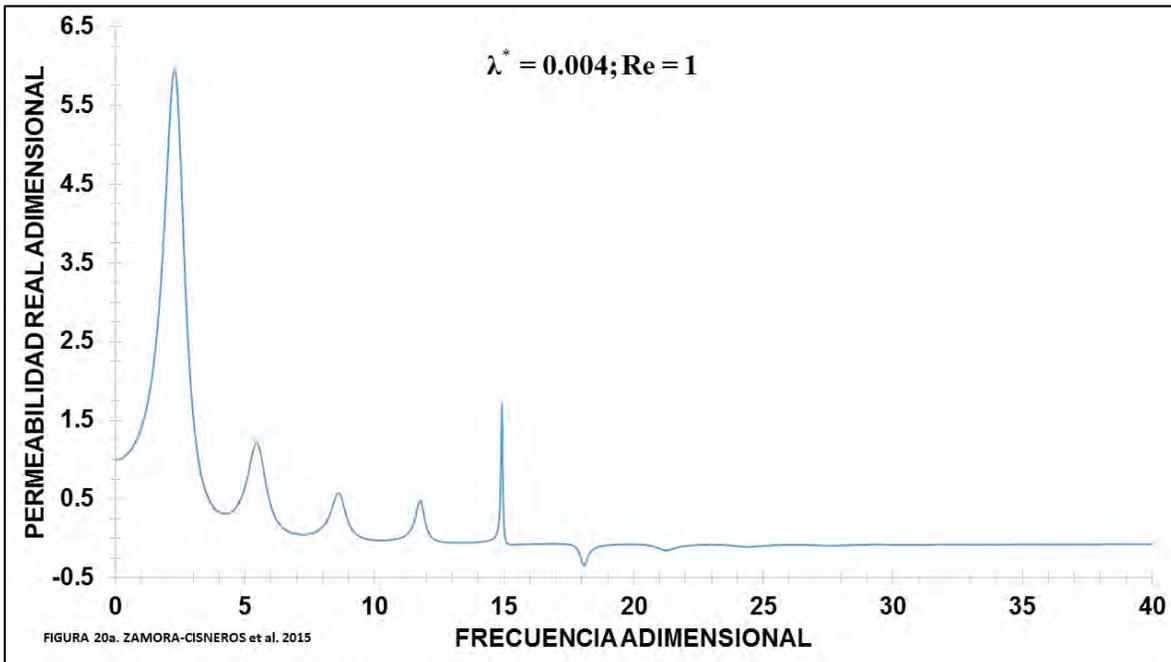


Figura 7.3-5a Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor fijo para el número de Reynolds ($Re = 1$).

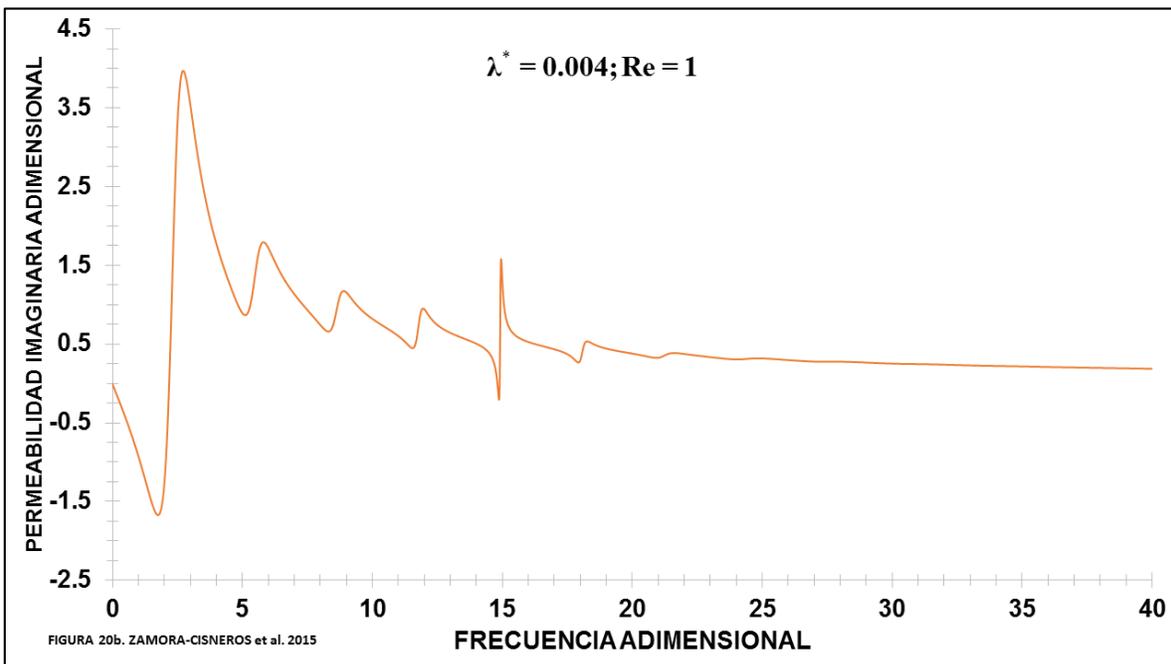


Figura 7.3-5b Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor fijo para el número de Reynolds ($Re = 1$).

Es claro, que la parte real del sistema presenta una sucesión de curvas resonantes, siendo la mayor a valores bajos de la frecuencia adimensional. Nótese que existe un segundo pico resonante máximo dominante en el sistema que se encuentra a moderadas frecuencias adimensionales, $\omega = 15$, así como también existe un pico resonante mínimo ubicado en una frecuencia adimensional $\omega = 18$. En la parte imaginaria se puede observar un comportamiento monótono decreciente para encontrar un punto mínimo y después ser sucedido por un punto máximo; la transición existente entre estos dos puntos es lineal, además de existir una sucesión de puntos que se asemejan al comportamiento antes mencionado dando lugar a un comportamiento tipo diente de sierra presente a partir del punto máximo en $\omega = 3$. Nótese, tanto un segundo punto máximo como también un punto mínimo asemejándose al comportamiento exhibido en la parte real.

Es importante resaltar que la contribución de las curvas resonantes se da a frecuencias bajas y a frecuencias moderadas y altas tienden a atenuarse e incluso a desaparecer.

Físicamente, la máxima respuesta entre el flujo y el gradiente de presión, la permeabilidad, se ve inducida con respecto al valor del número de Reynolds y la relación entre el solvente y el polímero, que es el tiempo reducido adimensional. Esto es inferido a partir de la ventana de observación en ambas gráficas, en las cuales es posible notar que a valores pequeños de la frecuencia adimensional se tiene el máximo valor obtenido para la permeabilidad, i.e., el flujo máximo posible se da a en este punto. Conforme el sistema va evolucionando se puede observar una mitigación en el aspecto antes mencionado.

El máximo y mínimo local podría tener importancia desde el punto de vista biológico, lo cual es motivo de investigación para otra ocasión.

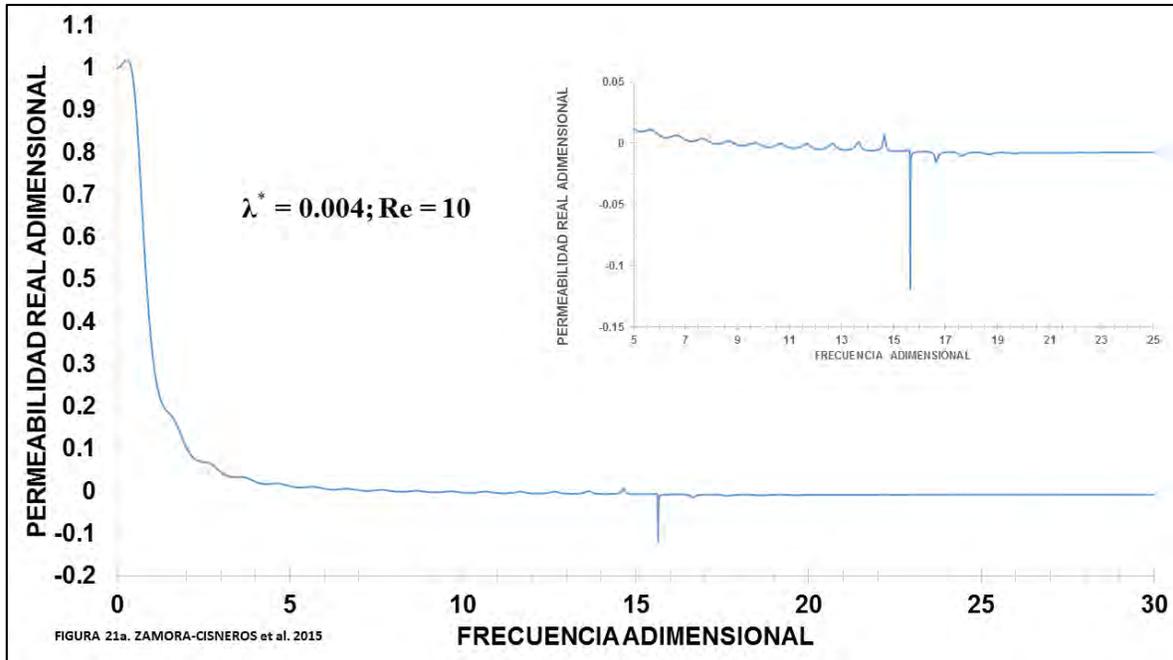


Figura 7.3-6a Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor para el número de Reynolds ($Re = 10$).

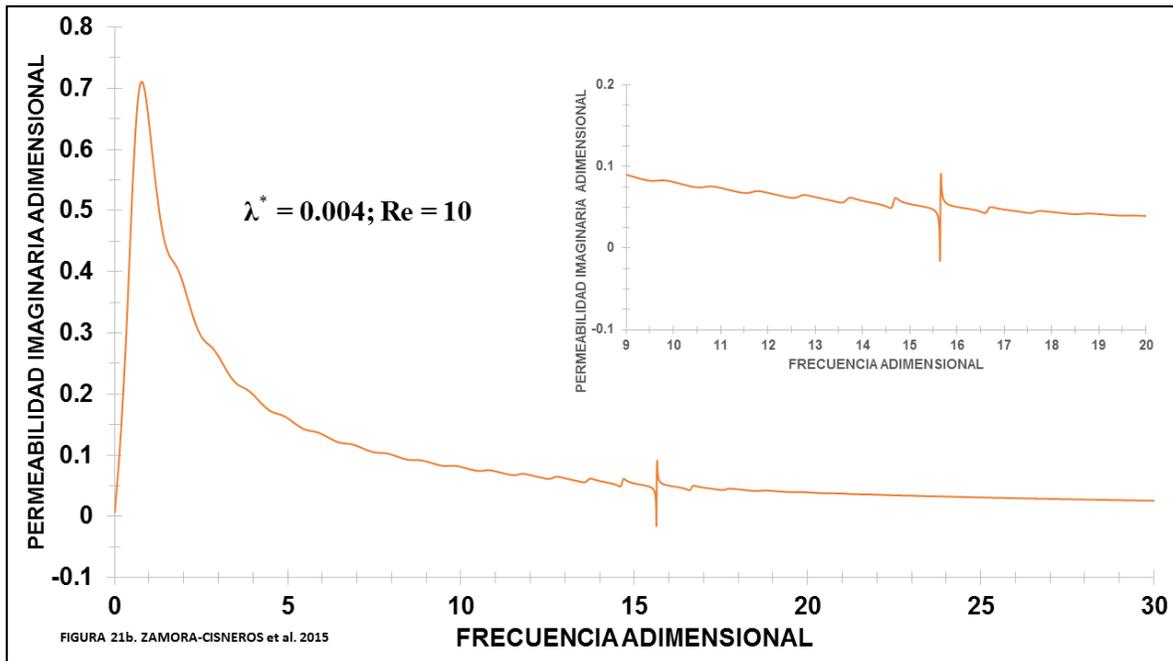


Figura 7.3-6b Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor para el número de Reynolds ($Re = 10$).

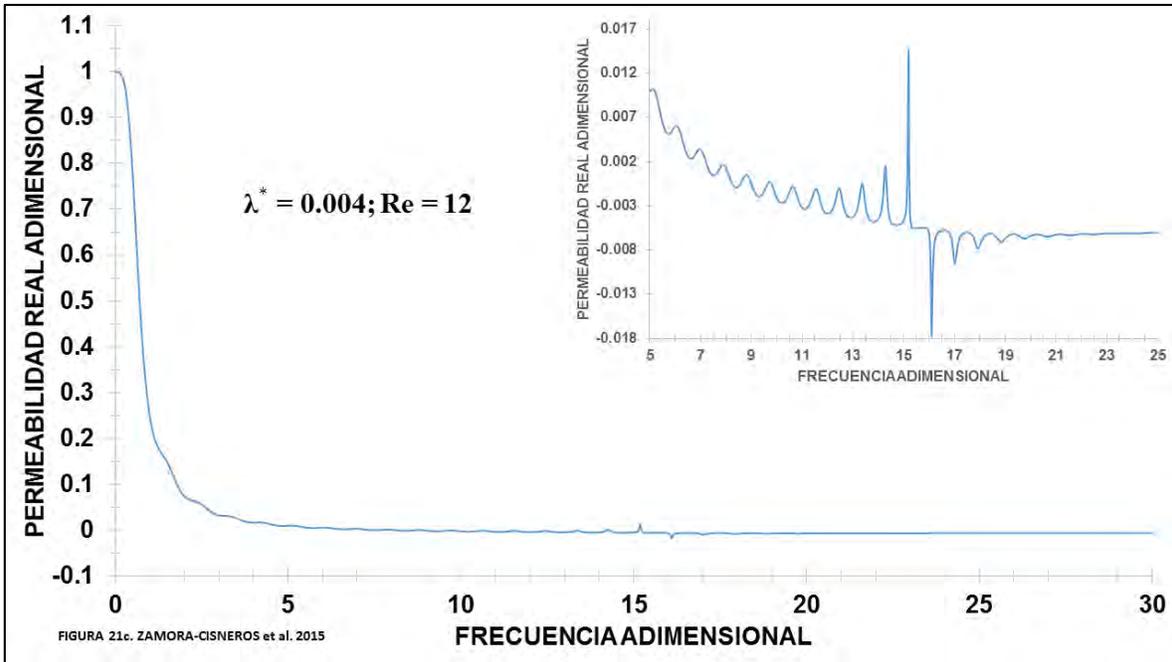


Figura 7.3-6c Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor para el número de Reynolds ($Re = 12$).

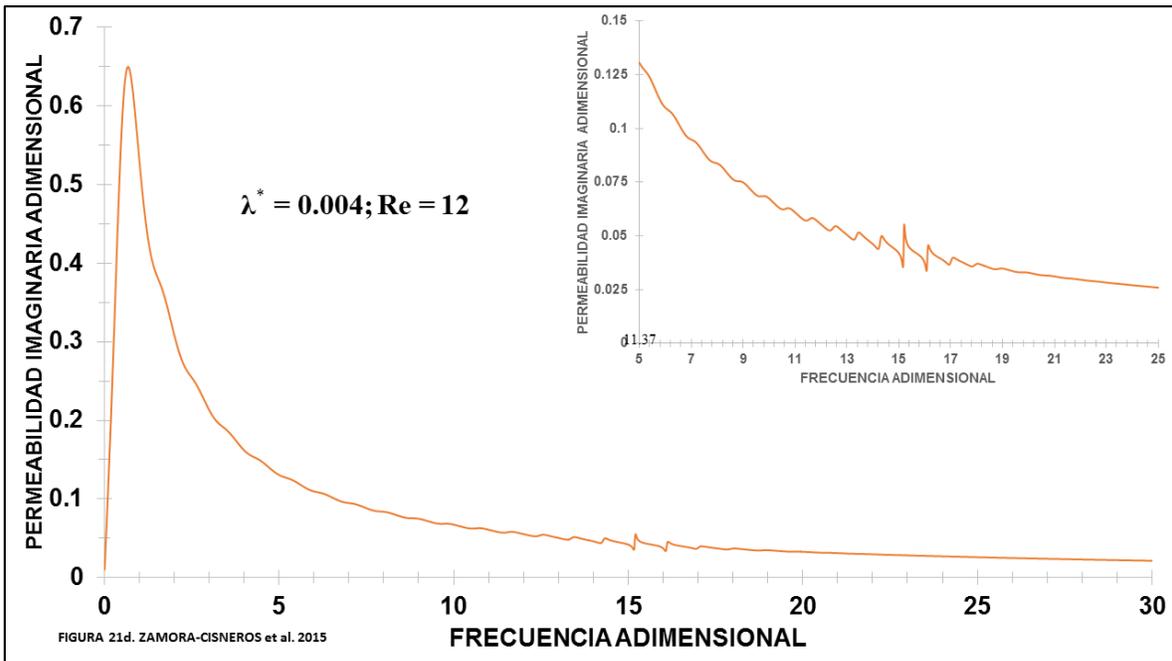


Figura 7.3-6d Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor para el número de Reynolds ($Re = 12$).

La Fig. 7.3-6a muestra la parte real de la permeabilidad dinámica para datos reométricos de sangre, la cual cuenta con un máximo a valores bajos en la frecuencia adimensional y para un valor crítico de la frecuencia el comportamiento es monótono decreciente, en la cual, a lo largo de ella se presentan diminutas resonancias llegando a un segundo máximo presente a valores moderados de la frecuencia adimensional, como se puede apreciar con más facilidad en la ventana de observación que cuenta con un acercamiento en la misma figura. Seguido de este segundo máximo local antes mencionado se puede identificar un mínimo apreciado en forma de resonancias que se van atenuando hasta llegar a un límite en donde la permeabilidad se vuelve constante y por lo tanto independiente del sistema.

En la Fig. 7.3-6b se ilustran las simulaciones de la parte imaginaria de la permeabilidad adimensional, en la cual se presenta un comportamiento resonante. Obsérvese que a valores bajos de la frecuencia adimensional el sistema tiene un comportamiento lineal entre la permeabilidad y la frecuencia adimensional hasta un valor crítico de la frecuencia en donde se presenta un máximo global. Para valores moderados de la frecuencia adimensional la permeabilidad imaginaria muestra un comportamiento monótono decreciente con diferentes cambios en la pendiente asemejando el comportamiento tipo diente de sierra descrito anteriormente en la Fig. 7.3-5b, todo esto para llegar a un segundo máximo seguido de un mínimo describiendo una pequeña resonancia presente para así, al igual que en la figura anterior, llegar a un límite asintótico. Esto puede ser mejor apreciado en la ventana de observación de la Fig. 7.3-6b en donde se hace un acercamiento.

Físicamente se observa que la resonancia se presenta con más intensidad en la permeabilidad imaginaria que en la permeabilidad real, asociada a la parte disipativa. En la parte real se pueden notar con más facilidad el comportamiento resonante en un intervalo determinado de la frecuencia adimensional ($5 > \omega^* > 20$), la cual, conforme el sistema va evolucionando estas resonancias, las cuales son muy pequeñas, llegan a atenuarse hasta desaparecer.

Nótese que la Fig. 7.3-6c presenta el mismo comportamiento matemático que el dado en la Fig. 7.3-6a sin embargo, no se presenta el máximo a valores bajos de la frecuencia adimensional debido a un comportamiento menos elástico dado por la diferencia del número de Reynolds que se tiene entre estas dos figuras. De esto se puede inferir que la propiedad elástica de la sangre se ve afectada e incluso mitigada por el valor del número de Reynolds.

Nótese que la Fig. 7.3-6d presenta el mismo comportamiento matemático que el mostrado en la Fig. 7.3-6b con la diferencia que el máximo presente en la primera mencionada está desplazado hacia un valor menor que el dado por la simulación que muestra la Fig. 7.3-6b, todo esto relacionado por la diferencia del número de Reynolds computado en las simulaciones de ambas gráficas.

Es importante resaltar que el comportamiento resonante, aunque muy pequeño, en especial el dado en la parte real de la permeabilidad, se ve incrementado en las Fig. 7.3-6c y 7.3-6d, en las cuales se puede notar con facilidad en la ventana de observación, además de disminuir el valor de los máximos y mínimos obtenidos en ellos. De esto se puede inferir que el efecto resonante producido es, a diferencia de la propiedad elástica, la cual se ve afectada por el número de Reynolds a tal grado de casi mitigarla por completo, beneficiado.

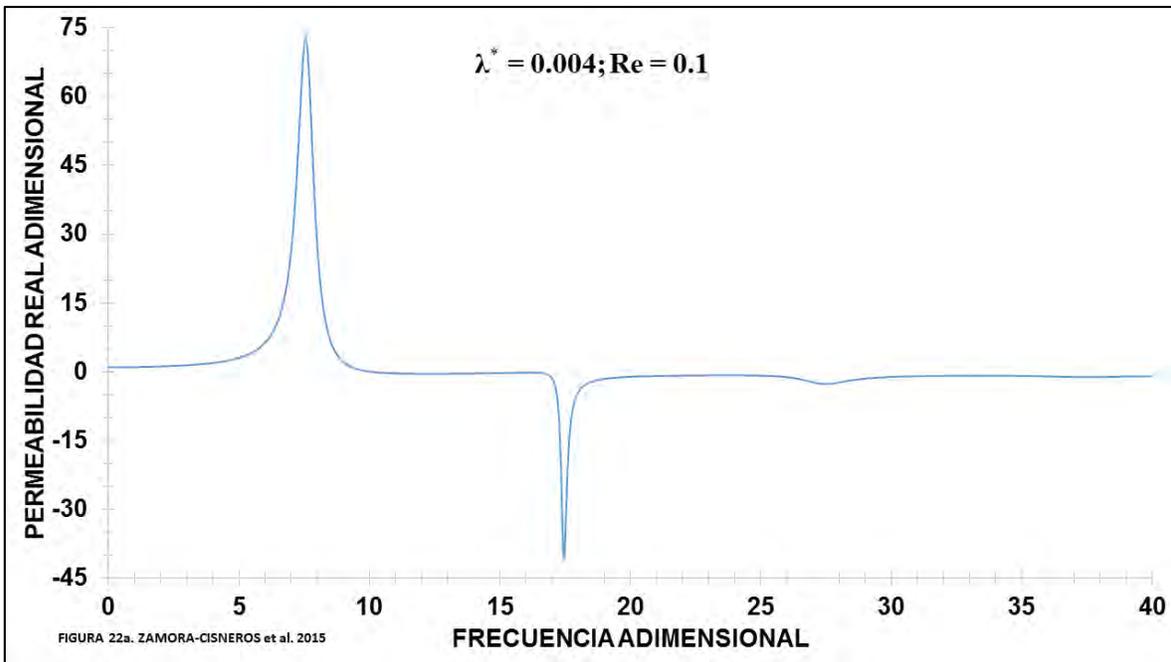


Figura 7.3-7a Ilustra la permeabilidad real como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor fijo para el número de Reynolds ($Re = 0.1$).

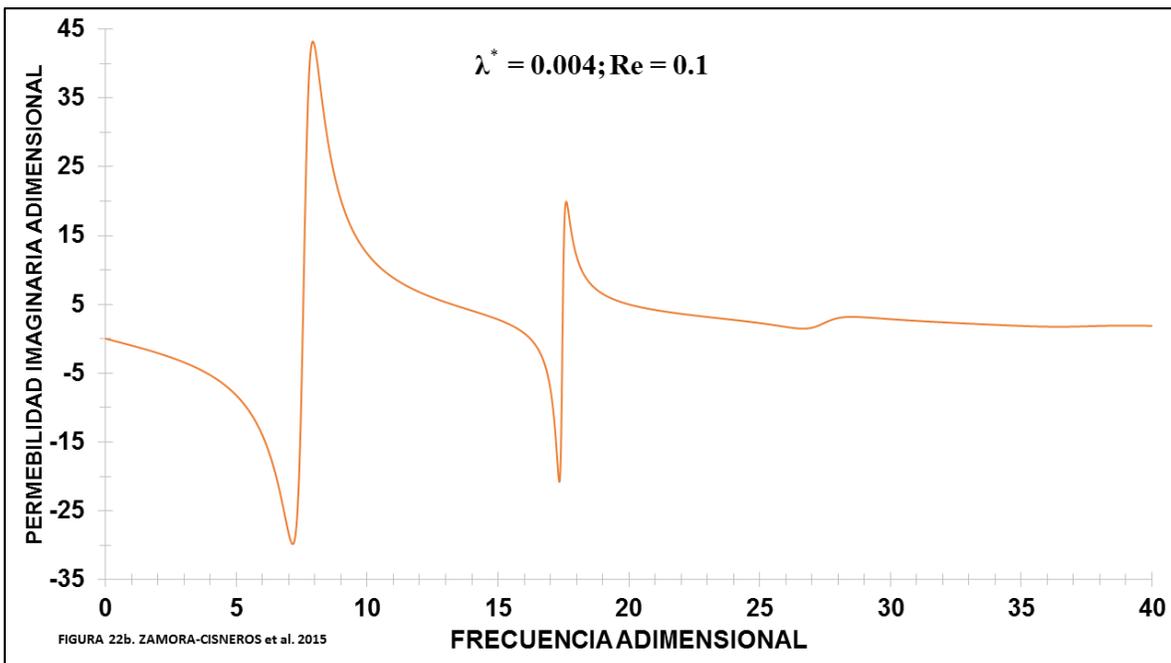


Figura 7.3-7b Ilustra la permeabilidad imaginaria como función de la frecuencia adimensional para datos reométricos de sangre y un valor fijo para el número de Reynolds ($Re = 0.1$).

La Fig. 7.3-7a muestra la parte real de la permeabilidad dinámica para datos reométricos de sangre, la cual muestra un comportamiento resonante con un máximo a valores bajos en la frecuencia adimensional. Seguido de este único máximo local antes mencionado se puede identificar dos picos representando los mínimos compartiendo la forma resonante, estas se van atenuando hasta llegar a un momento en donde la permeabilidad se vuelve constante y por lo tanto independiente del sistema.

En la Fig. 7.3-7b se ilustran las simulaciones de la parte imaginaria de la permeabilidad adimensional, en la cual se presenta un comportamiento resonante, el cual, va desde un mínimo a un máximo. Obsérvese que en cada transición entre un punto mínimo y uno máximo el sistema tiene un comportamiento lineal entre la permeabilidad y la frecuencia. A valores pequeños de la frecuencia adimensional es donde el comportamiento antes mencionado se ve más fuertemente contrastado. Para valores moderados de la frecuencia adimensional es donde el comportamiento resonante se ve muy fuertemente atenuado para después ser lineal, y por ende, independiente del sistema.

Físicamente se observa que las resonancias presentadas, en comparación con las Fig. 7.3-5a, 7.3-5b, 7.3-6a y 7.3-6b, tienen una mayor intensidad en ambas partes de la permeabilidad compleja con la única diferencia que el número de resonancias presentes, antes de llegar a desaparecer y convertirse en parte independiente del sistema, son mucho menores. Esto puede deberse al valor del número de Reynolds pequeño referido a un comportamiento de flujo muy "estable" y por ende, una mínima perturbación es presentada hacia el fluido, en donde los mecanismos viscosos dominan sobre los mecanismos inerciales lo que induce a que las curvas

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la permeabilidad dinámica de un fluido biológico viscoelástico (Sangre Humana) en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. Para describir la transferencia de momento y reología se suponen las siguientes condiciones: (i) proceso isotérmico, (ii) fluido incompresible, (iii) estado no estacionario, (iv) fluido viscoelástico, (v) los efectos gravitacionales son despreciables, (vi) el sistema (fluido) es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión en la dirección z y (vii) la reología y la dinámica de flujo es descrita por la ecuación constitutiva del modelo viscoelástico de Jeffreys el cual acopla al solvente y el polímero a través de una ecuación constitutiva Maxwelliana. Al combinar la ecuación de momento con la ecuación constitutiva reologica se obtuvo una ecuación diferencial parcial lineal que describe los cambios de la velocidad debido a la inercia y la viscoelasticidad, inducidos por el gradiente de presión. Suponiendo, que la función velocidad es continua, el espacio temporal es transformado al espacio de frecuencias utilizando el operador de Fourier (transformada de Fourier). Suponiendo la condición de no deslizamiento se obtuvieron expresiones analíticas para el perfil de velocidad, el flujo volumétrico y la permeabilidad dinámica en función de los número de Reynolds, y de un tiempo reducido adimensional. El número de Reynolds relaciona los mecanismos inerciales y viscosos, mientras que el tiempo reducido adimensional, es un cociente entre los tiempos de Retardo y de Relajación de Jeffreys y Maxwell respectivamente.

Físicamente, el tiempo reducido se puede interpretar como un cociente entre las viscosidades del solvente y del polímero. A partir del cálculo de la permeabilidad compleja se obtuvieron las componentes real e imaginaria, las cuales describen la mecánica lineal entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico.

La permeabilidad real muestra curvas resonantes en función de la frecuencia adimensional, las cuales se ven afectadas por los mecanismos de retardo y de relajación a través de las propiedades materiales del sistema, en concordancia con lo investigado por otros autores (Del Rio et al. 1999).

Por otra parte, la permeabilidad imaginaria muestra una serie de curvas periódicas discontinuas que se desvanecen conforme el sistema evoluciona, las cuales se ven afectadas por los números adimensionales como los son: (i) número de Reynolds, (ii) tiempo de retardo, en concordancia con lo investigado por otros autores (Del Rio et al. 1999).

Finalmente, las bondades de nuestro modelo son examinadas con datos reométricos de sangre con bajo contenido de colesterol y se demuestra la concordancia entre las proyecciones teóricas y los datos experimentales, todo esto en el ámbito del régimen de viscoelasticidad lineal.

Modelado

- Para describir la dinámica de flujo en un fluido viscoelástico que sigue el modelo de Jeffreys se obtuvieron expresiones cerradas para la velocidad y

el flujo volumétrico, las cuales dependen de la frecuencia de oscilación y de los mecanismos inerciales y viscosos, a través del número de Reynolds.

- Utilizando el formalismo de Fourier se obtuvo una expresión analítica para la permeabilidad dinámica en el sistema, la cual, es una relación entre la variable de entrada (gradiente de presión) y la de salida (flujo volumétrico).
- La función de transferencia compleja que se obtuvo es un cociente de series de Bessel, las cuales inducen a un comportamiento resonante, el cual, es regulado a través del número de Reynolds y la función de fluidez compleja que depende de la ecuación constitutiva que se esté analizando.
- Expandiendo las series de Bessel se obtiene una expresión analítica para la permeabilidad dinámica compleja, la cual depende de una suma infinita compleja de potencias de la fluidez y del número de Reynolds característico del sistema.
- En particular, cuando se desarrolló la suma infinita hasta $n=5$ se obtuvieron expresiones, en las que la parte real, al igual que la parte imaginaria, tiene un comportamiento monótono creciente lineal. Es importante resaltar que en este desarrollo, no se observan las curvas resonantes deducidas en la literatura especializada en el tema, por lo que se necesitan tomar más términos de la serie infinita.
- Las curvas generadas mediante las simulaciones, son características de otros sistemas dinámicos que involucran una variable de entrada y salida y mecanismos de tipo inercial modificados por los efectos elásticos. Por citar algunos: (i) Medios porosos, (ii) Fluidos electrorreológicos, (iii) Sistemas biológicos (Células ciliadas externas, Flujo sanguíneo).
- Nótese que la manera de modificar el número de Reynolds es a través de la geometría (radio del capilar) y las propiedades materiales del sistema, las cuales se ven modificadas por efecto de: (i) pH, (ii) Concentración, (iii) Peso molecular.

Simulaciones computacionales

Maxwell

- Para un fluido Maxwelliano ($\lambda^*=0$) y a valores del número de Reynolds pequeños, i.e. $Re \ll 1$ (Efectos inerciales menores que los viscosos), se observó el comportamiento resonante en la curva descrita por la parte real de la permeabilidad dinámica compleja, en la cual se encuentra el mayor pico alcanzado a valores pequeños de la frecuencia adimensional, aproximadamente en $\omega^*=7$. Por otra lado, la parte imaginaria de la permeabilidad compleja cuenta con un pico máximo y un mínimo globales que incluyen una parte positiva y negativa, respectivamente. Estos puntos, al igual que en la parte real, se encuentran aproximadamente en $\omega^*=7$.
- Conforme el valor del número del Reynolds va en aumento y se acerca a $Re=1$ el número de curvas resonantes presentes en la ventana de observación aumenta conforme al antes mencionado. Así mismo, el mayor pico alcanzado por la permeabilidad real tiene dos casos importantes para ser mencionados: (i) Disminuye en cuestión del valor para la permeabilidad real y (ii) Disminuye en posición con respecto a la frecuencia adimensional,

pues, se encuentra a una menor frecuencia adimensional que en el caso antes mencionado, aproximadamente en $\omega^* = 3$. Por otro lado, la permeabilidad imaginaria compleja cuenta con un pico máximo y un mínimo globales que incluyen una parte positiva y negativa, respectivamente. Estos puntos, al igual que en la parte real, se encuentran aproximadamente en $\omega^* = 3$. Todo esto en el campo del fluido Maxwelliano.

Jeffreys

Tiempo reducido

- Para un fluido de Jeffreys ($0 < \lambda^* < 1$) y a valores del número de Reynolds igual a 1, en donde los mecanismos inerciales y viscosos ejercen una misma influencia, se observó un comportamiento similar a una curva resonante, en donde se tienen presentes un pico máximo y un mínimo ubicados en la región positiva y negativa, respectivamente y a valores de la frecuencia adimensional pequeños ($\omega^* = 2.2$). Todo esto presente en ambas partes de la permeabilidad dinámica compleja. Conforme el tiempo reducido adimensional (λ^*) va acercándose al valor unitario, los picos máximo y mínimo se ven desplazados, tanto en valor alcanzado por la permeabilidad compleja como en el valor de la frecuencia adimensional en el que se ubican, hacia valores menores.
- Se encuentran casos límite, en donde el tiempo reducido adimensional tiende al valor unitario, i.e. ($\lambda^* \approx 1$) el comportamiento expuesto por el fluido se asemeja a un fluido newtoniano, donde el comportamiento aportado por el solvente se asemeja al aportado por el polímero. En estos casos se observó que, mientras se tenga un valor para el número de Reynolds bajo, el valor máximo alcanzado por la permeabilidad es bajo y su comportamiento tiende a ser decreciente y lineal, esto presente en la parte real e imaginaria, siendo positiva para la parte real y negativa para la imaginaria. Sin embargo, mientras el valor del número de Reynolds aumenta, i.e. las fuerzas inerciales dominan sobre las fuerzas viscosas, empieza a existir el comportamiento asintótico e incluso presentar una curva resonante, pero con menor magnitud en comparación por las exhibidas por el fluido de Jeffreys. Así también, el valor máximo alcanzado por la permeabilidad aumenta conforme el número de Reynolds.

Datos reométricos de sangre

Reynolds

- Para los casos en donde datos reométricos de sangre con bajo contenido de colesterol son usados en la simulación junto con un valor del número de Reynolds bajo ($Re=1$), la parte real de la permeabilidad dinámica presenta una serie de curvas resonantes que se van atenuando mientras el sistema evoluciona. En estas curvas, el mayor pico es localizado a un valor de frecuencia adimensional bajo ($\omega^* = 2.2$), en donde la permeabilidad dinámica alcanza el máximo valor. Es importante mencionar que existe un segundo pico dominante ubicado a frecuencias adimensionales moderadas ($\omega^* = 15$), y a partir de este punto se encuentra un cambio de signo en donde las curvas

se vuelven negativas y existe un punto mínimo global. Por otro lado, la parte imaginaria presenta un pico negativo global a bajas frecuencias seguido del pico máximo global presente, este comportamiento sigue conforme el sistema evoluciona con la diferencia de que son menores en cuanto a su valor pues tienden a atenuarse a frecuencias altas.

- De los casos con datos sanguíneos donde el sistema se evalúa con valores del número de Reynolds ($Re=10, 12$) se infiere que existe un valor del número de Reynolds crítico, en donde las curvas resonantes se presentan un máximo, como puede ser visto en la ventana de observación para dichos sistemas, a valores moderados de la frecuencia adimensionales.
- Para los casos con datos reométricos de sangre en donde el valor del número de Reynolds es el menor analizado ($Re=0.1$) se encuentran presentes las curvas resonantes antes descritas. Es importante resaltar que las curvas obtenidas en estas simulaciones son menores que las obtenidas en anteriores, en donde los efectos inerciales son menores que los efectos viscosos, atenuando y disminuyendo la cantidad de resonancias presentes.

CAPÍTULO IX

TRABAJO FUTURO

Se presentan algunas de las aplicaciones de flujo pulsátil y puedan ser viables a diferentes ramas de las ciencias:

- **Una continuación de este trabajo, sería en la extensión de fluidos viscoelástico no lineales, es decir, que se aplique a altas rapidezces de deformación. Un ejemplo de este tipo de ecuaciones constitutivas que describen este régimen es la ecuación reológica de Tanner.**
- **Comprobar las predicciones teóricas de este modelo utilizando datos provenientes de experimentos reologicos en estado estacionario y no estacionario. (Pruebas de corte en donde se destruye el material, pruebas de flujo oscilatorio en donde se analiza la respuesta mecánica)**
- **Aplicar estos conocimientos a otro tipo de sistemas complejos como son: Sistemas biológicos que presente las propiedades visco-elásticas del material.**
- **Emplear este modelo en la industria alimenticia para saber el comportamiento los componentes viscosos y elásticos de este tipo de fluidos.**
- **Este trabajo se puede aplicar a fluidos micelares utilizados en la extracción terciaria de petróleo. Este tipo de fluidos se inyectan en los yacimientos de petróleo y debido a los gradientes de presión elevados, la roca se fractura y se puede recuperar mayores cantidades de crudo. La solución micelar consiste en una mezcla de tensoactivo, alcohol, salmuera y crudo. Los reactivos químicos empleados, sus concentraciones en los procesos de inyección y los tamaños de los mismos, dependerán de las propiedades de los fluidos y del medio poroso de la formación, así como de las consideraciones económicas correspondientes. Dada la situación actual en el mercado de precio del petróleo, la recuperación mejorada por métodos químicos se constituye una de las principales vías para aumentar el factor de recobro en los yacimientos.**
- **Implementando esta investigación en la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza en asignaturas como Fenómenos de Transporte, Transferencia de Masa, Flujo de Fluidos, Matemáticas, Laboratorio y Taller de Proyectos entre otras. Ampliando estos conocimientos y llevarlos a la parte computacional y experimental.**

APÉNDICE A

En este apéndice se desarrolla las ecuaciones principales mediante una forma matemática equivalente a la desarrollada mediante el formalismo de Fourier.

$$Q^0 = \frac{\pi R^2 P^0}{i\omega\rho} \left[1 - \frac{2J_1(\alpha R)}{(\alpha R)J_0(\alpha R)} \right] \quad (A-1)$$

Evaluando los términos dentro del corchete:

$$Q^0 = \frac{\pi R^2 P^0}{i\omega\rho} \left[-\frac{(\alpha R)^2}{8} - \frac{(\alpha R)^4}{48} - \frac{11(\alpha R)^6}{3072} - \dots \right] \quad (A.2)$$

Factorizando el término cuadrado se tiene:

$$Q^0 = -\frac{\pi R^2 P^0 (\alpha R)^2}{8i\omega\rho} \left[1 + \frac{(\alpha R)^2}{6} + \frac{11(\alpha R)^4}{384} \right] \quad (A-3)$$

Donde:

$$\alpha^2 = -\frac{i\omega\rho}{\eta^*} \quad (A-4)$$

Sustituyendo el valor de alpha:

$$Q^0 = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta^*} \left[1 - \frac{i\omega\rho R^2}{6\eta^*} + \frac{11(\omega\rho)^2 R^4}{384(\eta^*)^2} \right] \quad (A-5)$$

Adimensionando los valores de viscosidad y frecuencia:

$$Q^0 = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta^* \left(\frac{\eta_0}{\eta_0}\right)} \left[1 - \frac{i\omega\rho R^2}{6\mu^* \left(\frac{\eta_0}{\eta_0}\right)} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0}\right) \right] \quad (A-6a)$$

$$Q^0 = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \frac{1}{\bar{\eta}^*} \left[1 - \frac{i\rho R^2}{6\eta_0 \lambda_0} (\omega\lambda_0) \frac{1}{\bar{\eta}^*} \right] \quad (A-6b)$$

Donde:

$$\frac{1}{\bar{\eta}^*} = \bar{\phi}^* \quad (A-7)$$

Para obtener la expresión de flujo en término de la fluidez compleja adimensional:

$$Q^0 = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \bar{\varphi}^* \left[1 - \frac{i\rho R^2}{6\eta_0 \lambda_0} (\omega \lambda_0) \bar{\varphi}^* \right] \quad (A-8)$$

Donde:

$$\bar{\varphi}^* = \bar{\varphi}_R + i\bar{\varphi}_I \quad (A-9)$$

Sustituyendo la expresión de la fluidez compleja:

$$Q^0 = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} (\bar{\varphi}_R + i\bar{\varphi}_I) \left[1 - \frac{i\rho R^2 (\omega \lambda_0)}{6\eta_0 \lambda_0} (\bar{\varphi}_R + i\bar{\varphi}_I) \right] \quad (A-10)$$

Y operando:

$$Q^0 = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \left[(\bar{\varphi}_R + i\bar{\varphi}_I) - \frac{i\rho R^2 (\omega \lambda_0)}{6\eta_0 \lambda_0} (\bar{\varphi}_R^2 + 2i\bar{\varphi}_I \bar{\varphi}_R - \bar{\varphi}_I^2) \right] \quad (A-11)$$

$$Q^0 = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \left[\bar{\varphi}_R + i\bar{\varphi}_I - \frac{i\rho R^2 (\omega \lambda_0) \bar{\varphi}_R^2}{6\eta_0 \lambda_0} + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0) \bar{\varphi}_I \bar{\varphi}_R}{3\eta_0 \lambda_0} + \frac{i\rho R^2 (\omega \lambda_0) \bar{\varphi}_I^2}{6\eta_0 \lambda_0} \right] \quad (A-12)$$

Factorizando los términos reales e imaginarios

$$Q^0 = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \left[\bar{\varphi}_R \left(1 + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0) \bar{\varphi}_I}{3\eta_0 \lambda_0} \right) + i \left(-\frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0) \bar{\varphi}_R^2}{6\eta_0 \lambda_0} + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0) \bar{\varphi}_I^2}{6\eta_0 \lambda_0} + \bar{\varphi}_I \right) \right] \quad (A-13)$$

Para un fluido de Maxwell se tienen las siguientes consideraciones:

$$\bar{\varphi}_R = 1 \quad (A-14a)$$

$$\bar{\varphi}_I = (\omega \lambda_0) \quad (A-14b)$$

Y sustituyéndolas en la ecuación de flujo

$$Q^0 = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \left[\left(1 + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0)^2}{3\eta_0 \lambda_0} \right) + i \left(-\frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0)}{6\eta_0 \lambda_0} + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0)^3}{6\eta_0 \lambda_0} + (\omega \lambda_0) \right) \right] \quad (A-15)$$

Factorizando para obtener la expresión final de flujo:

$$Q^0 = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \left\{ \left[1 + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0)^2}{3\eta_0 \lambda_0} \right] + i (\omega \lambda_0) \left[1 - \frac{\rho R^2}{6\eta_0 \lambda_0} (1 - (\omega \lambda_0)^2) \right] \right\} \quad (A-16)$$

Para así sustituir en la siguiente ecuación:

$$Q = \text{Re} \left\{ Q^0 e^{i\omega t} \right\} \quad (\text{A-17})$$

Queda:

$$Q = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \left\{ \left[1 + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0)^2}{3\eta_0 \lambda_0} \right] + i(\omega \lambda_0) \left[1 - \frac{\rho R^2}{6\eta_0 \lambda_0} (1 - (\omega \lambda_0)^2) \right] \right\} e^{i\omega t} \quad (\text{A-18})$$

Donde se sabe que:

$$e^{i\omega t} = \text{Cos}(\omega t) + i\text{Sen}(\omega t) \quad (\text{A-19})$$

Sustituyendo:

$$Q = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \left\{ \left[1 + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0)^2}{3\eta_0 \lambda_0} \right] + i(\omega \lambda_0) \left[1 - \frac{\rho R^2}{6\eta_0 \lambda_0} (1 - (\omega \lambda_0)^2) \right] \right\} \text{Cos}(\omega t) + i\text{Sen}(\omega t) \quad (\text{A-20})$$

Para así aplicar la propiedad distributiva:

$$Q = \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \left\{ \left[1 + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0)^2}{3\eta_0 \lambda_0} \right] \text{Cos}(\omega t) + i \left[1 + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0)^2}{3\eta_0 \lambda_0} \right] \text{Sen}(\omega t) + \right. \\ \left. i \left[1 - \frac{\rho R^2}{6\eta_0 \lambda_0} (1 - (\omega \lambda_0)^2) \right] (\omega \lambda_0) \text{Cos}(\omega t) + i^2 \left[1 - \frac{\rho R^2}{6\eta_0 \lambda_0} (1 - (\omega \lambda_0)^2) \right] (\omega \lambda_0) \text{Sen}(\omega t) \right\} \quad (\text{A-21})$$

Finalmente, sustituyendo $i^2 = -1$ y separando la parte real de la imaginaria:

$$\boxed{ \begin{aligned} Q_R &= \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \left\{ \left[1 + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0)^2}{3\eta_0 \lambda_0} \right] \text{Cos}(\omega t) - \left[1 - \frac{\rho R^2}{6\eta_0 \lambda_0} (1 - (\omega \lambda_0)^2) \right] (\omega \lambda_0) \text{Sen}(\omega t) \right\} \\ Q_I &= \frac{\pi R^4 P^0}{8\eta_0} \left\{ \left[1 + \frac{\rho R^2 (\omega \lambda_0)^2}{3\eta_0 \lambda_0} \right] \text{Sen}(\omega t) + \left[1 - \frac{\rho R^2}{6\eta_0 \lambda_0} (1 - (\omega \lambda_0)^2) \right] (\omega \lambda_0) \text{Cos}(\omega t) \right\} \end{aligned} } \quad (\text{A-22})$$

Para así obtener el flujo complejo en los términos reales e imaginarios.



APÉNDICE B

Este trabajo será presentado en el XXXVII Encuentro Nacional de la Academia Mexicana de Investigación y Docencia en Ingeniería Química A. C. (AMIDIQ) en la sesión de Fenómenos de Transporte. A continuación se muestran la carta de aceptación y el extenso.

AMIDIQ

Academia Mexicana de Investigación y Docencia en Ingeniería Química A.C.

Ciudad de México, México, 12 de febrero de 2016

CONSEJO DIRECTIVO 2015-
2017

Dr. Alfonso Mauricio Sales
Cruz
PRESIDENTE
msales@correo.cua.uam.mx

Dr. Miguel Ángel Morales
Cabrera
VICE-PRESIDENTE
migmorales@uv.mx

Dra. María del Rosario
Enriquez Rosado
SECRETARIO
r.enriquez4@gmail.com

Dr. Jorge E. Robledo Oríz
TESORERO
jorge.robledo@cucsi.udg.mx

Dra. Nelly Ramírez Corona
VOCAL DE INVESTIGACION
nelly.ramirez@ndlap.mx

Dr. Adrian Bonilla Petriciolet
VOCAL DE DOCENCIA
petriciolet@hotmail.com

AMIDIQ

contacto@amidiq.com
WWW.AMIDIQ.COM
Casarías #704, Col. Portales
Delegación Benito Juárez
Distrito Federal
CP 03300

Estimado Colega,

Agradecemos sinceramente el interés por participar en el XXXVII Encuentro Nacional de la Academia Mexicana de Investigación y Docencia en Ingeniería Química A.C. (AMIDIQ) y por este conducto nos complace informarle que su trabajo:

619 TRANSFORMADA DE FOURIER APLICADA A LA PERMEABILIDAD DINÁMICA DE UN FLUIDO BIOLÓGICO VISCOELÁSTICO: SANGRE HUMANA.

ha sido aceptado para su presentación en la sesión de FENÓMENOS DE TRANSPORTE en la modalidad ORAL.

A partir del 14 de marzo de 2016 consulte el programa completo en nuestra página web www.amidiq.com para conocer el día y hora precisa de su presentación. Recuerde que tiene hasta el viernes 11 de marzo de 2016 para sustituir el resumen de dos páginas por su trabajo en extenso en la plataforma OpenConf.

A nombre de la AMIDIQ le agradecemos su participación y esperamos tener la oportunidad de saludarlo personalmente en Puerto Vallarta, Jalisco.

Atentamente

COMITÉ TÉCNICO AMIDIQ 2016

TRANSFORMADA DE FOURIER APLICADA A LA PERMEABILIDAD DINÁMICA DE UN FLUIDO BIOLÓGICO VISCOELÁSTICO: SANGRE HUMANA.

David Uriel Zamora-Cisneros^a, Edtson Emilio Herrera-Valencia^b

^aDepartamento de Ingeniería Química, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Batalla 5 de Mayo SN, Ejercito Oriente, Iztapalapa, D.F, 09230, MÉXICO.

iq_davidzamora@yahoo.com.mx

^bDepartamento de Ingeniería Química, Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria Coyoacán, D.F, 04510, MÉXICO. edtson_ed@hotmail.com

Resumen

En este trabajo se estudia la permeabilidad dinámica de un fluido biológico viscoelástico (Sangre Humana) en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. A partir del cálculo de la permeabilidad compleja se obtienen la parte real e imaginaria, las cuales describen la mecánica lineal entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico. La parte real muestra curvas de relajación, las cuales se ven afectadas por las propiedades materiales del medio así como la parte disipativa que corresponde a esta componente de la permeabilidad. La parte imaginaria muestra una serie de curvas resonantes y comportamiento tipo diente de sierra aludiendo a la parte elástica del sistema. En casos específicos, en donde se tiene datos con un número de Reynolds bajo y un tiempo reducido muy pequeño i. e., los efectos viscosos se superponen a los efectos inerciales que tienen relación en el número de Reynolds y el comportamiento aportado por la parte del polímero domina sobre el aportado por el solvente, se tiene que la sucesión de curvas resonantes se presentan en la parte real de la permeabilidad y el comportamiento tipo diente de sierra en la parte compleja de la permeabilidad. Finalmente, las bondades de nuestro modelo son probadas con datos reométricos de sangre con bajo contenido de colesterol y se demuestra la concordancia entre las proyecciones teóricas y los datos experimentales, todo esto en el ámbito del régimen de viscoelasticidad lineal [1]

Introducción

El estudio de la sangre presenta un reto mundialmente, ya que el primer paso se concentra en la caracterización de la misma y el segundo al efecto de diferentes patologías, entre las cuales se pueden citar: (i) la hiperglucemia asociada con la diabetes tipo I y II, que se han declarado como epidemia nacional, (ii) hipercolesterolemia asociada con el colesterol alto que afecta las arterias y que provocan los infartos al miocardio, (iii) el cáncer que es un desequilibrio en la producción de glóbulos blancos y (iv) todo tipo de enfermedades de transmisión sexual. De los múltiples trastornos metabólicos presentes en un ser humano, la hipercolesterolemia (altas concentraciones de colesterol en sangre > 200 mg/ dL) tiene grandes repercusiones en la fisiología cardiovascular. La sangre es un fluido con dos fases perfectamente diferenciadas: una suspensión de células (eritrocitos y leucocitos) que llamaremos fase dispersa en un medio líquido, como el plasma (agua, sales, proteínas y metabolitos), que llamaremos fase continúa [1].

Metodología

Para describir la transferencia de momento y reología se suponen las siguientes condiciones: (i) proceso isotérmico, (ii) fluido incompresible, (iii) estado no estacionario, (iv) fluido viscoelástico, (v) los efectos gravitacionales son despreciables, (vi) el sistema (fluido) es

deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión en la dirección z y (vii) la reología y la dinámica de flujo es descrita por la ecuación constitutiva del modelo viscoelástico de Jeffreys. Una representación del problema físico se presenta en la Fig. (1) y el problema se resuelve en coordenadas cilíndricas.

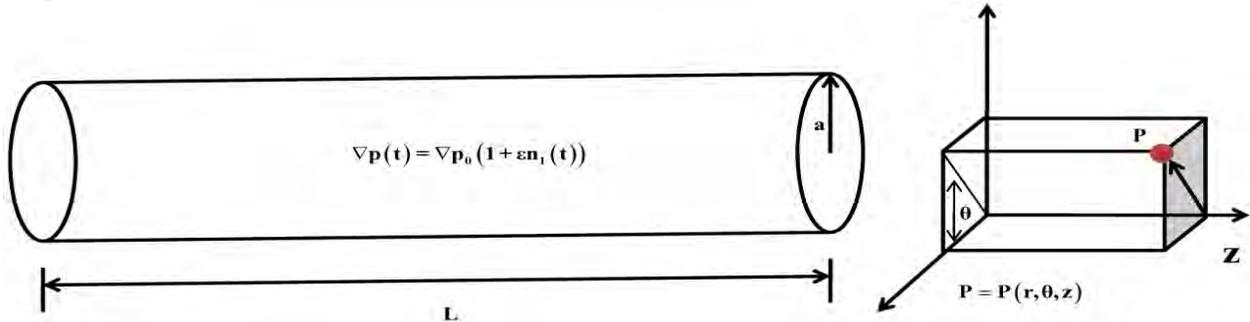


Figura 1. Ilustra el Sistema de estudio. Un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. A la derecha del capilar un punto material que puede ser expresado en coordenadas cilíndricas.

Modelado Matemático

La ecuación de momento se puede expresar en términos del formalismo de Cauchy

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{V} \mathbf{V}] = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2a,b)$$

En la Ec. (1) \mathbf{V} es el campo de velocidades del sistema, ρ es la densidad del fluido, $\rho \mathbf{V} \mathbf{V}$ es el flux de transferencia de cantidad de movimiento, \mathbf{T} es el tensor total de Esfuerzos, el cual depende contiene dos contribuciones asociadas con la presión multiplicada por el tensor unitario, y el tensor de esfuerzos viscoelásticos respectivamente y finalmente \mathbf{g} es el vector aceleración en el campo terrestre, el cual es contante. Para caracterizar nuestro fluido viscoelástico se supone que el fluido puede ser evaluado con la ecuación constitutiva de Jeffrey. Este modelo describe que el esfuerzo se descompone en dos contribuciones: (i) La primera de ellas asociada al solvente y la segunda al polímero o fluido complejo. La Ecuación constitutiva en forma tensorial se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_p \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = 2\eta_s \mathbf{D} \quad (4)$$

$$\left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma}_p = 2\eta_p \mathbf{D} \quad (5)$$

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T \quad (6)$$

Al combinar las Ec, de (3-6) obtenemos el modelo de Jeffreys

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D} \quad (7)$$

En la Ec. (7) $\{\lambda_0, \eta_0, \lambda_J\}$ son las propiedades materiales del sistema asociadas al tiempo de relajación de Maxwell, viscosidad cortante y tiempo de Jeffreys respectivamente. El tensor de esfuerzos viscoelástico, tensor gradiente especial de la velocidad y su transpuesta, están dados por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}; \nabla \mathbf{V} = \dot{\gamma}_{rz} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \nabla \mathbf{V}^T = \dot{\gamma}_{rz} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8a-c)$$

Modelo de Jeffreys con efectos inerciales

La componente z de la ecuación de movimiento tomando en cuenta los mecanismos inerciales, toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (9)$$

El término $\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_z$ es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración instantánea en el sistema.

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_{rz} = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma}_{rz} \quad (10)$$

Al combinar las Ecs. (9,10) y simplificando, se tiene lo siguiente:

$$\rho \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial t} = \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \dot{\gamma}_{rz}\right) \quad (11)$$

La rapidez de deformación $\dot{\gamma}_{rz} = d\mathbf{V}_z/dr$ se puede expresar de la siguiente:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_M \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{V}_z(r,t) = \left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial r}\right) \quad (12)$$

La Ec. (12) se puede es diferencial lineal y describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y tiempo. Aplicando el formalismo de Fourier, en la ecuación antes mencionada se tiene lo siguiente:

$$\rho \left(-i\omega + \lambda_M (-i\omega)^2\right) \mathbf{V}_z(r,\omega) = \left(1 + \lambda_M (-i\omega)\right) \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) + \eta_0 \left(1 + \lambda_J (-i\omega)\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{V}_z(r,\omega)}{\partial r}\right) \quad (13)$$

Dividiendo la Ec. (13) por $\eta_0 (1 + \lambda_J (-i\omega))$, se tiene la siguiente relación matemática:

$$\rho (-i\omega) \frac{1 + \lambda_M (-i\omega)}{\eta_0 (1 + \lambda_J (-i\omega))} \mathbf{V}_z(r,\omega) = \frac{1 + \lambda_M (-i\omega)}{\eta_0 (1 + \lambda_J (-i\omega))} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{V}_z(r,\omega)}{\partial r}\right) \quad (14)$$

Simplificando la Ec. (14) y definiendo la fluidez compleja como el inverso de la viscosidad compleja, se tiene lo siguiente:

$$\varphi^*(\omega) = \varphi_R(\omega) - i\varphi_I(\omega) = \varphi_0 \frac{1 + \lambda_M \lambda_J \omega^2}{1 + \lambda_J^2 \omega^2} - i \varphi_0 \frac{(\lambda_M - \lambda_J) \omega}{1 + \lambda_J^2 \omega^2} \quad (15)$$

La Ec. (6.1-54) puede ser escrita en término de la fluidez compleja por lo que,

$$\rho(-i\omega)\varphi^*(\omega)V_z(r,\omega) = \varphi^*(\omega)\left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z(r,\omega)}{\partial r}\right) \quad (16)$$

Para resolver la Ecuación diferencial de Bessel se propone el siguiente cambio de variable:

$$\alpha^2 = \rho(i\omega)\varphi(\omega) \quad (17)$$

Nótese que α tiene unidades de longitud. Sustituyendo en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \alpha^2\right\}V_z(r,\omega) = \varphi(\omega)\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \quad (18)$$

La solución general contiene dos constantes de integración C_1 y C_2 las cuales deben de determinarse a partir de las condiciones de frontera, las cuales se pueden describir como:

$$\text{C.F.1: } r = 0; V_z(0,\omega) = 0; |V_z(0,\omega)| \leq M; \text{ C.F.2: } r = a; V_z(a,\omega) = 0 \quad (19)$$

La primera de estas condiciones obedece a que la solución particular debe de permanecer acotada, i.e. que para ningún valor que tome la coordenada radial debe ser infinita. Por otra parte, la segunda condición de frontera se relaciona con la condición de no deslizamiento en la frontera (pared del tubo capilar). Del análisis de la primera condición de frontera se deduce que la constante C_2 es cero por consistencia física, por lo que al despejar C_1 se tiene lo siguiente:

$$C_1 = -\frac{1}{J_0(\alpha a)\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \quad (20)$$

Factorizando la velocidad axial en el espacio de Fourier, se tiene:

$$V_z(\alpha r,\omega) = \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right)\left(1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)}\right) \quad (21)$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del sistema $\{\rho, \eta_0, \lambda_0, \lambda_1\}$, la fuerza motriz que deforma continuamente e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial. Nótese, que el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir a efectos resonantes en el sistema.

Flujo volumétrico pulsátil

La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, esta dada a por la doble integral sobre una sección transversal en donde pasa el campo de velocidades:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta = 2\pi \int_0^a V_z(r,t) r dr \quad (22)$$

Al sustituir el perfil de velocidades complejos Ec. (21) en la Ec.(22), se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a V_z(\alpha r,\omega) r dr \quad (23)$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el espacio de Fourier Ec. (21) en la Ec. (23) y utilizando la siguiente propiedad de la transformada de Fourier $d/dz[zJ_1(z)] = zJ_0(z)$. En la Ec. (24) $\{J_0, J_1\}$ son las funciones de Bessel de primera especie de orden 0 y 1 respectivamente.

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right\} = \frac{\pi a^2}{\rho\omega} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cdot i \left\{ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right\} \quad (24)$$

La Ec. (24) es el resultado más importante del presente análisis y es punto de partida en los cálculos posteriores. Un hecho importante de la Ec. (25) es la dependencia con el parámetro β el cual, nos aporta información acerca de los mecanismos inerciales y de flujo a través de la función fluidez compleja. La Ec. (25) puede ser simplificada utilizando la expansión de las series de Bessel

$$1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} = -\frac{(\beta)^2}{8} - \frac{(\beta)^4}{48} - \frac{11}{3072}(\beta)^6 - \frac{11}{3072}(\beta)^8 + O((\beta)^{10}) \quad (25)$$

Sustituyendo la Ec. (25) en la Ec. (24) se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho\omega} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cdot i \left(-\frac{1}{8}(\beta^2)^1 - \frac{1}{48}(\beta^2)^2 - \frac{11}{3072}(\beta^2)^3 - \frac{11}{3072}(\beta^2)^3 + O((\beta^2)^{10}) \right)$$

(26)

El parámetro β se puede expresar en término de las fluideces real y compleja respectivamente:

$$\beta^2 = (\alpha a)^2 = a^2 \rho(i\omega) \varphi^*(\omega) = a^2 \rho(i\omega) (\varphi_R(\omega) - i\varphi_I(\omega)) = a^2 \rho\omega (\varphi_I(\omega) + i\varphi_R(\omega)) \quad (27)$$

Combinando las últimas dos expresiones, el flujo volumétrico puede ser descrito como:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho\omega} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) i^3 \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \left(De \omega^* \bar{\varphi}^* \right)^j \quad (28)$$

En término de las fluideces real e imaginaria se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{(\rho/\lambda_0)} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) i^3 \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \omega^{*j-1} De^j (\varphi_I^*(\omega) + i\varphi_R^*(\omega))^j \quad (29)$$

En donde:

$$De = \frac{a^2 \rho \varphi_0}{\lambda_0} = \frac{\text{Inercia}}{\text{Viscoelasticidad}} = \begin{cases} De \gg 1 : \text{Inercia} \\ De = 1 : \text{Inercia} = \text{Viscoelasticidad} \\ De \ll 1 : \text{Viscoelasticidad} \end{cases} \quad (30a-d)$$

$$\omega^* = \omega \lambda_0, \bar{\varphi}_I(\omega^*) = \frac{(1 - \lambda^*) \omega^*}{1 + (\lambda^*)^2 \omega^{*2}}, \bar{\varphi}_R(\omega^*) = \frac{\lambda^* \omega^2}{1 + (\lambda^*)^2 \omega^2}$$

Las Ecs. (30 a-d) son las expresiones de la frecuencia, las fluideces reales e imaginaria respectivamente.

Resultados

- **Utilizando el formalismo de Fourier se obtuvo una expresión cerrada para la permeabilidad dinámica en el sistema, la cual, es una relación entre la variable de entrada (gradiente de presión) y la de salida (flujo volumétrico).**
- **La función de transferencia compleja que se obtuvo es un cociente de series de Bessel, las cuales inducen a un comportamiento resonante, el cual, es regulado a través del número de Reynolds y la función fluidez compleja que depende de la ecuación constitutiva que se esté analizando.**



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA



Figura 1. Permeabilidad dinámica real para datos reométricos de sangre con contenido de colesterol bajo.

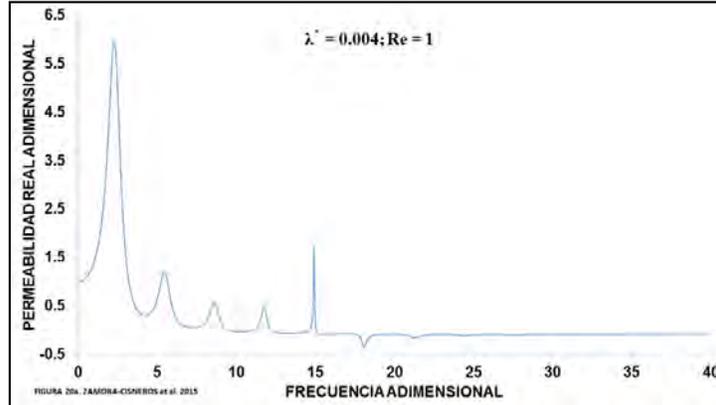
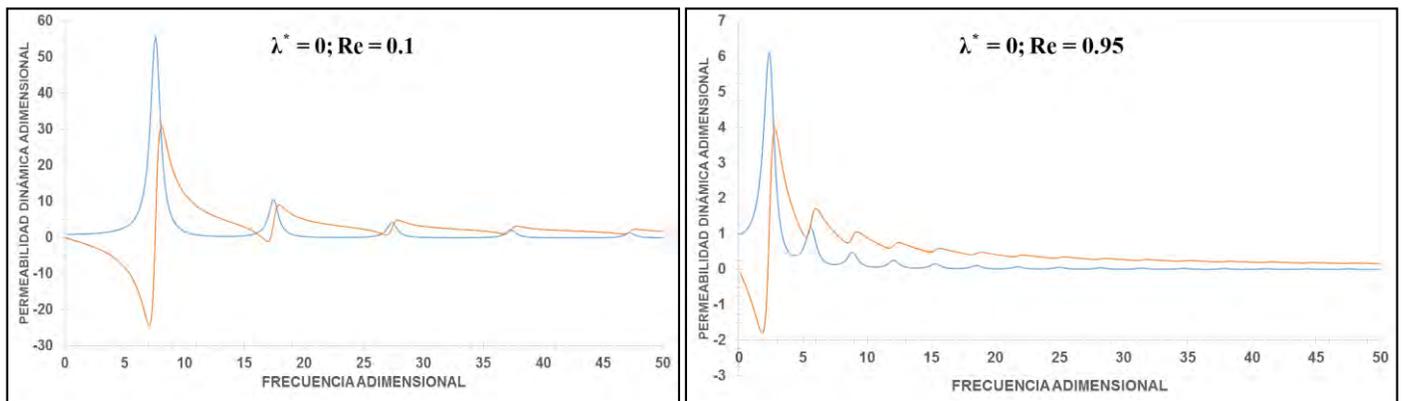


Figura 2. Permeabilidad dinámica real e imaginaria para diferentes valores del número de Reynolds.

Figura 3. Permeabilidad dinámica real e imaginaria para diferentes valores del número de Reynolds.



Conclusiones

Conforme el valor del número del Reynolds va en aumento y se acerca a $Re=1$ el número de curvas resonantes presentes en la ventana de observación aumenta conforme al antes mencionado. Así mismo, el mayor pico alcanzado por la permeabilidad real tiene dos casos importantes para ser mencionados: (i) Disminuye en cuestión del valor para la permeabilidad real y (ii) Disminuye en posición con respecto a la frecuencia adimensional, pues, se encuentra a una menor frecuencia adimensional que en el caso antes mencionado, aproximadamente en $\omega^*=3$. Por otro lado, la parte imaginaria de la permeabilidad compleja cuenta con un pico máximo y un mínimo globales que incluyen una parte positiva y negativa, respectivamente. Para un fluido de Jeffreys ($0 < \lambda^* < 1$) y a valores del número de Reynolds igual a 1, en donde los mecanismos inerciales y viscosos ejercen una misma influencia, se observó un comportamiento similar a una curva resonante, en donde se tienen presentes un pico máximo y un mínimo ubicados en la región positiva y negativa, respectivamente y a valores de la frecuencia adimensional pequeños ($\omega^*=2.2$). Todo esto presente en ambas partes de la

permeabilidad dinámica compleja. Conforme el tiempo reducido adimensional (λ^*) va acercándose al valor unitario, los picos máximo y mínimo se ven desplazados, tanto en valor alcanzado por la permeabilidad compleja como en el valor de la frecuencia adimensional en el que se ubican, hacia valores menores (Figs. 2,3)

Agradecimientos:

(EEHV) Investigación realizada gracias a los Programas de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica **(PAPIIT) de la UNAM << IN115615 >> << Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos aplicados a sistemas biológicos >>** y, **PAPIME PE112716** Material didáctico Teórico, protocolos experimentales y aula virtual de las materias de Fenómenos de Transporte (Cuarto semestre) y Transferencia de Masa (Séptimo semestre) correspondientes a los ciclos intermedio y terminal de la carrera de Ingeniería Química.

(DUZC) Trabajo realizado gracias al apoyo del Programa de Vinculación con Egresados de la UNAM y de su Programa de Becas para Titulación Exalumnos de Alto Rendimiento. Agradezco la beca recibida.

Bibliografía

1. Moreno L. Calderas, F. Sánchez-Olivares, G, Medina-Torres, L., Sánchez-Solis, A & Manero, O. 2015 Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behaviour of the human blood. Korea-Australia Rheology Journal

BIBLIOGRAFÍA

- Barnes, H.A., Hutton, J.F., & Walters, K. 1989 An introduction to rheology, Amsterdam: Elsevier.
- Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.
- Bird, R.B., Stewart E. & Lightfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.
- Brinkman, H.C. 1947 On the permeability of media consisting of closely packed porous particles, Appl. Sci. Research, A1. 27-334, 81-86
- Calderas, F., Sánchez-Solis, A., Maciel, A. & Manero, O. 2009 The transient flow of the PETPEN-Montmorillonite clay Nanocomposite, Macromol Symp. MACROMEX 283-284 354-360.
- Cuevas, S & Del Rio, J.A. 2001 Dynamical permeability of electrically conducting fluids under magnetic fields in a annular ducts. Phys. Rev. E. 64, 016313/1-7.
- Currie, I.G, 1974 Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw-Hill Press.
- Del Rio J.A 1993 Contribuciones teóricas al estudio de los fenómenos de transporte en medios porosos. Ciencia 44, 527-544.
- Del Rio J.A & Castrejón-Pita J.R. 1987 Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. Revista Mexicana de Física. 49 (1) 74-85.
- Del Rio J.A., De Haro, M.L. & Castrejón-Pita J.R. 1998 Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. Phys. Rev. E. 58 (5) 6323.



García-Colín, L.S. & Rodríguez, R.F. 1991 Fluidos exóticos, Trillas.

Greenkorn R.A. 1984 Flow Phenomena in Porous Media: Fundamental and Applications in Petroleum, Water and Food Production. Marcel Dekker, New-York

Haberman, R. 2003 Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno, Tercera Edición, Pearson Educación, S. A., Madrid

Herrera-Valencia E.E. & Rey, A.D. 2014 Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. Phil. Trans. R. Soc. A. 372: 20130369/1-28.

Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E., Manero, O. & Mena, B. 2009 Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. Rheol. Acta 48 779-800.

Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O. 2010 Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 165 174-183.

Lopez de Haro, M., Del Rio J.A. & Whitaker, S. 1996 Flow of Maxwell fluids in Porous Media. Transp. Porous Media 25, 167-192.

Kim J.H., Ochoa J.A., Whitaker, S. 1987 Diffusion in anisotropic porous media. Transport in porous media 2 (4), 327-356.

Middleman, S. Fundamentals of polymer Processing, McGraw-Hill.

Moreno L. Calderas, F. Sánchez-Olivares, G, Medina-Torres, L., Sánchez-Solis, A & Manero, O. 2013 La sangre humana desde el punto de vista de la reología. Materiales Avanzados. 20, 33-37.

Moreno L. Calderas, F. Sánchez-Olivares, G, Medina-Torres, L., Sánchez-Solis, A
& Manero, O. 2015 Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological
behaviour of the human blood. Korea-Australia rheology journal

Ochoa-Tapia, J.A, Del Rio J.A. & Whitaker S (1993). Bulk and surface diffusion in
porous media: An application on the surface-averaging theorem. Chem. Eng,
Sci, 48, 11, 2061-2082.

Ochoa-Tapia, J.A, 1995. El método del promedio volumétrico para el estudio de
difusión en sistemas de varias componentes. Rev. Mex. Fis. 41 451-470.

Quintard, M. & Whitaker, S. 1997, Transport In ordered and disordered porous
media: volume-averaged equations, closure problems, and comparison with
experiment. Transport in porous media 14(2), 179-206.

Quintard, M. & Whitaker, S. 1997, Two-medium treatment of heat transfer in porous
media: numerical results for effective properties. Advances in Water resources 20
(2), 77-94.

Quintard, M. & Whitaker, S. 1997 Convection, dispersion, and interfacial transport of
contaminants: Homogeneous porous media. Advances in Water Resources 17(4),
221-239.

Wood BD, Quintard M & Withaker S. 2002 Calculation of effective difussivities for
biofilms and tissues. Biotechnology and bioengineering 77 (5), 495-516.

Quintanilla, R & Rajagopal, K.R. 2006 On Burgers fluids.Math.Meth. Appl. Sci.29
2133-2147.

Rey, A.D. 2007 Capillary models for liquid crystal fibers, membranes, films, and drops. *Soft Matter* 2 1349-1368.

Rey, A.D. 2010 Liquid crystals models of biological materials and processes. *Soft Matter* 6 3402-3429.

Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012a Rheological theory and simulations of surfactant nematic liquid crystals, in *Self-Assembled Supramolecular Architectures: Lyotropic Liquid Crystals*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons Inc. Hoboken. (eds N. Garti, P. Somasundaran and R. Mezzenga).

Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012b Liquid crystal models of biological materials and silk spinning. *Biopolymers* 97 374-396.

Rey, A.D. Mojdeh Golmohammadi & Herrera-Valencia, E.E. 2011 A model for mesophase wetting thresholds of sheets, fibers and fiber bundles. *Soft Matter* 5002-5009.

M. Nimomiya, F. Fujii, M. Niwa, K. Sakamoto, and H. Kanai, *Biorheology* 25 (1988) 319.

Kozicki W, Tiu C. A unified model for non-Newtonian flow in packed beds and porous media. *Rheol Acta* 1988; 27 (1): 31-38

Chhabra RP, Comiti J, Machac I. Flow of non-Newtonian flow in packed beds and porous media. *Rheol. Acta* 1988; 27 (1): 31-8.

Schowalter WR. *Mechanics of non-Newtonian fluids*. Pergamon Press Inc.; 1978.

Shenoy AV. Darcy-Forcheimer natural, forced and mixed convection heat transfer in non-newtonian power-law fluid-saturated porous media. *Transport Porous Media* 1993; 11 (3): 219-241.

Thruston, S. 1976 The effects of frequency of oscillatory flow the impedance of rigid, blood filled tubes, *Biorheology* 13, 191-199.

Whitaker, S. 1966 The equations of motion in porous media. *Chemical Engineering Science* 21 (3), 291-300

Whitaker, S. 1966 Simultaneous heat, mass and momentum transport in porous media: a theory of drying. *Advances in heat transfer* 13, 119-203.

Whitaker, S. 1967 Diffusion and dispersion in porous media. *AIChE* 13 (3), 420-427.

Whitaker, S. 1987 Flow in porous media I: a theoretical derivation of the Darcy's Law. *Transp. Porous Media.* 1, 3-55.