UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

CR-SUBVARIEDADES DE LA SEIS ESFERA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
RODRIGO AGUILAR SUÁREZ

DIRECTOR DE LA TESIS
GABRIEL RUIZ HERNÁNDEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MÉXICO., D.F. AGOSTO, 2015

Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM PAPIITIN100414 Geometría Diferencial de Subvariedades II ». Agradezco a DGAPA-UNAM la beca recibida.

Resumen

La terna (M, g, ∇) la llamaremos una variedad de Riemann M con métrica g y conexión de Levi-Civita ∇. A la pareja (M, J) donde M representa a (M, g, ∇) y J es un (1,1)-tensor que satisface $J^2 = -Id$ (donde Id es la identidad), se llama una variedad casi compleja y a J estructura casi compleja. Si para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, J satisface

$$g(JX, JY) = g(X, Y),$$

entonces a la terna (M, J, g) la nombraremos variedad casi hermitiana, además a una variedad casi hermitiana (M, J, g) con la propiedad de que $(\nabla_X J)X \equiv 0$ diremos que (M, J, g) es una variedad nearly Kaehler y se llamará de Kaehler si J es integrable, en otras palabras $(\nabla_X J) \equiv 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

La esfera S^6 tiene una estructura casi compleja J inducida por los números de Cayley. Si consideramos la métrica usual g de S^6 como subvariedad de Riemann de R^7, (S^6, J, g) es una variedad nearly Kaehler. En el año 1978 Aurel Benjacu [1] introduce el concepto de CR-subvariedad definido como una subvariedad M de una variedad de Kaehler (N, J, g) junto a una pareja de distribuciones diferenciables de M, $(D, D^\perp)$ tales que,

1. La distribución D sea consistente con la estructura casi compleja de N, es decir, $J(D_x) = D_x$ para cada $x \in M$.

2. La distribución ortogonal complementaria $x \mapsto D_x^\perp \subset T_xM$ es totalmente real, esto es $J(D_x^\perp) \subset T_xM^\perp$ para cada $x \in M$.

Aunque la definición como se puede ver tiene sentido para variedades nearly Kaehler, en esta tesis estudiamos a las CR-subvariedades de S^6 en los casos extremos en los que coinciden con las subvariedades casi complejas y las subvariedades totalmente reales. Para lo que durante

el Capítulo 1 se introduce todos los conceptos necesarios para los capítulos posteriores. En el Capítulo 2 se expone el artículo de A. Benjacu [1]. Durante el Capítulo 3 se le induce la estructura casi compleja a la seis esfera por medio de los números de Cayley. Por último en el Capítulo 4 probaremos que S^6 no tiene subvariedades casi complejas de dimensión cuatro. También que si M es una subvariedad totalmente real de dimensión tres M debe ser mínima y orientable. Más aún, si M tiene curvatura constante c, entonces M es totalmente geodésica ($c = 1$) ó tiene curvatura $c = \frac{1}{16}$.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a variedades Kaehler

En este capítulo repasaremos las definiciones y resultados necesarios para los consecuentes capítulos. Daremos la notación que llevaremos así como la definición de una estructura casi compleja J en una variedad de Riemann M (en el caso de existir a la pareja (M, J) la llamaremos variedad casi compleja), la clasificación de las variedades con estructura casi compleja incluyendo las variedades casi Hermíticas, nearly Kaehler y Kaehler.

1.1. Estructura casi compleja y variedades casi Hermíticas

Sea M una variedad diferenciable, denotamos por $C^\infty(M)$ el anillo de funciones diferenciables $f : M \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{X}(M)$ el módulo sobre $C^\infty(M)$ el cual consta de los campos vectoriales diferenciables sobre M y $\wedge(M)$ el módulo dual de $\mathfrak{X}(M)$ formado por 1-formas.
Un tensor de tipo (r, s) o (r, s)-tensor es una función $C^\infty(M)$-multilineal $T : (\wedge(M))^r \times (\mathfrak{X}(M))^s \to C^\infty(M)$.

Ejemplo 1. Dada una variedad M siempre es posible construir una métrica de Riemann sobre M [2, Proposición 2.10, p. 43], es decir, $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ el cual resulta ser un (0,2)-tensor.

Ejemplo 2. La torsión de una conexión afin ∇ en una variedad M se define como

$$\overline{T}(\theta, X, Y) = \theta(T(X, Y)) = \theta(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])$$

donde T es una función multilineal definida de $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ a $\mathfrak{X}(M)$ y θ es una 1-forma, por lo que $\overline{T}$ es un (1,2)-tensor.

Esto da pie a que cualquier función multilineal $A : (\mathfrak{X}(M))^s \to \mathfrak{X}(M)$ defina un (1,s)-tensor dado por

$$\overline{A}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta(A(X_1, \ldots, X_s)),$$

por lo que al referirnos a un (1,s)-tensor solo mencionaremos la función multilineal $A : (\mathfrak{X}(M))^s \to \mathfrak{X}(M)$.

Definición 1. Sea ∇ una conexión afin en M. Dada un tensor A de tipo (r, s), definimos la derivada covariante de A como el $(r, s+1)$-tensor ∇A dado por:

1. Si $A \in C^\infty(M)$, entonces $\nabla A = dA$
2. Si $A \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $(\nabla A)V = \nabla_V A$
3. Si $A \in \wedge(M)$, entonces $(\nabla A)(V, X) = (\nabla_V A)X = VA(X) - A(\nabla_V X)$
4. En general si A es un (r, s) tensor

$$(\nabla A)(\theta_1, \ldots, \theta_r, V, X_1, \ldots X_s) = (\nabla_V A)(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots X_s)$$

$$= VA(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots X_s) - \sum_i A(\theta_1, \ldots, \nabla_V \theta_i, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s)$$

$$-\sum_j A(\theta_1, \ldots, , \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, \nabla_V X_j, \ldots X_s).$$

Definición 2. Una estructura casi compleja es un (1,1)-tensor J en M tal que $J^2 = -Id$, a la pareja (M, J) le llamaremos una variedad casi compleja.

Observación. Toda variedad casi compleja (M, J) es de dimensión par.

Demostración. Sea n la dimensión de una variedad casi compleja (M, J) entonces

$$0 \leq (detJ)^2 = detJ^2 = det(-Id) = (-1)^n$$

por lo que n es un número par. □

Ejemplo 3. Sea $\mathbb{C}$ los números complejos, definimos a la estructura casi compleja en los números complejos $i : \mathfrak{X}(\mathbb{C}) \to \mathfrak{X}(\mathbb{C})$ definida como multiplicar por i, entonces la pareja $(\mathbb{C}, i)$ es una variedad casi compleja.

Ejemplo 4. Como un ejemplo importante de una variedad casi compleja veremos que $\mathbb{S}^6$ tiene estructura casi compleja, (véase Capítulo 3).

Definición 3. Una variedad casi compleja (M, J) con métrica de Riemann g es una variedad casi Hermítica si

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A la variedad casi Hermítica la denotamos por la terna (M, J, g).

Podemos decir entonces que $(\mathbb{C}, i)$ y $(\mathbb{S}^6, J)$ además de ser variedades casi complejas son variedades casi Hermíticas con la métrica ususal en $\mathbb{C}$ y la métrica usual de $\mathbb{S}^6$ como subvariedad de $\mathbb{R}^7$ respectivamente.

Definición 4. Una variedad casi Hermítica (M, J, g) con conexión de Levi-Civita ∇, es una variedad nearly Kaehler si

$$(\nabla_X J)X = \nabla_X JX - J\nabla_X X = 0$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 1.1.1. *Una variedad casi Hermítica (M, J, g) es nearly Kaehler si y sólo si*

$$(\nabla_X J)Y = -(\nabla_Y J)X$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Supongamos que M es nearly Kaehler, es decir,

$$0 = (\nabla_{X+Y} J)(X + Y).$$

Por bilinealidad y dado que M es naerly Kaehler

$$0 = (\nabla_{X+Y} J)(X + Y) = (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X.$$

Por otro lado si $(\nabla_X J)Y = -(\nabla_Y J)X$ para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces hacemos $X = Y$ lo que garantiza que M es nearly Kaehler. $\square$

Definición 5. Sea (M, J) una variedad casi compleja, entonces definimos el (1,2)-tensor

$$G(X, Y) = (\nabla_X J)Y$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Entonces lo anterior se puede reescribir como.

Definición 6. Una variedad casi Hermítica (M, J, g) con conexión de Levi-Civita ∇, es una variedad nearly Kaehler si

$$G(X, X) = 0$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 1.1.2. *Una variedad casi Hermítica (M, J, g) es nearly Kaehler si y sólo si el (1,2)-tensor G es antisimétrico.*

Este (1,2)-tensor tiene las propiedades enunciadas en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.3. *Sea (M, J, g) una variedad casi Hermítica, entonces:*

1. $g(G(X, Y), Z) = -g(Y, G(X, Z))$
2. $G(X, JY) = -JG(X, Y)$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Para demostrar la primer parte tenemos para toda $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned}
g(G(X,Y),Z) &= g((\nabla_X J)Y, Z) \\
&= g(\nabla_X JY - J\nabla_X Y, Z) \\
&= g(\nabla_X JY, Z) - g(J\nabla_X Y, Z) \\
&= Xg(JY, Z) - g(JY, \nabla_X Z) + g(\nabla_X Y, JZ) \\
&= Xg(JY, Z) - g(JY, \nabla_X Z) + Xg(Y, JZ) - g(Y, \nabla_X JZ) \\
&= g(Y, J\nabla_X Z) - g(Y, \nabla_X JZ) \\
&= -g(Y, (\nabla_X J)Z) \\
&= -g(Y, G(X, Z)).
\end{aligned}$$

Para la segunda parte partimos de

$$-JG(X,Y) = -J(\nabla_X JY - J\nabla_X Y) = -J\nabla_X JY + J^2\nabla_X Y = -J\nabla_X JY + \nabla_X J^2 Y = G(X,JY)$$

□

Dos tensores importantes en la teoría de variedades casi complejas los enunciamos en las siguientes definiciones.

Definición 7. Sea (M,J) una variedad casi compleja con métrica de Riemann g definimos la forma de Kaehler como el $(0,2)$-tensor

$$\Omega(X,Y) = g(JX,Y).$$

Definición 8. Sea (M,J) una variedad casi compleja con métrica de Riemann g definimos el tensor de Niejenhuis como el (1,2)-tensor denotado por N_J y definido como

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - [X,Y] - J([JX,Y] + [X,JY]).$$

Proposición 1.1.4. *Sea (M,J,g) una variedad casi Hermítica con conexión de Levi-Civita ∇, entonces*

$$N_J(X,Y) = G(JX,Y) - G(JY,X) + G(X,JY) - G(Y,JX).$$

Demostración. Sean $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= [JX,JY] - [X,Y] - J([JX,Y] + [X,JY]) \\ &= \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - \nabla_X Y + \nabla_Y X - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y JX + \nabla_X JY - \nabla_{JY}X) \\ &= G(JX,Y) - G(JY,X) + G(X,JY) - G(Y,JX). \end{aligned}$$

□

Recordemos que una variedad nearly Kaehler es una variedad casi Hermítica (M,J,g), tal que $G(X,X) = 0$, con esto presente tenemos la siguiente definición.

Definición 9. Una variedad casi Hermítica (M,J,g) es llamada de Kaehler si

$$G \equiv 0.$$

Es inmediato entonces que una variedad de Kaehler es una variedad nearly Kaehler. A continuación veremos que cualquier variedad nearly Kaehler de dimensión 4 es una variedad de Kaehler. Para ello tenemos los siguientes resultados.

Lema 1.1.5. *Si (M, J, g) es una variedad nearly Kaehler entonces para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*

$$G(X,Y) + G(JX, JY) = 0.$$

Demostración. Por la Proposición 1.1.3 para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} g(G(X,Y) + G(JX, JY), Z) &= g(G(X,Y), Z) + g(G(JX, JY), Z) \\ &= -g(Y, G(X,Z)) - g(JY, G(JX, Z)) \end{aligned}$$

y como G es antisimétrico por Lema 1.1.1

$$\begin{aligned} -g(JY, G(JX, Z)) &= g(JY, G(Z, JX)) \\ &= -g(JY, JG(Z, X)) \\ &= -g(Y, G(Z, X)) \\ &= g(Y, G(X, Z)). \end{aligned}$$

Con lo que concluimos $G(X,Y) + G(JX, JY) = 0$. □

Proposición 1.1.6. *Si (M, J, g) es una variedad nearly Kaehler con conexión de Levi-Civita ∇, entonces para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*

$$N_J(X,Y) = -4G(Y, JX).$$

Demostración. Por la Proposición 1.1.4

$$N_J(X,Y) = G(JX, Y) - G(JY, X) + G(X, JY) - G(Y, JX)$$

luego como G es antisimétrico y el Lema 1.1.5

$$N_J(X,Y) = 2(G(JX,Y) - G(JY,X)) = 2(-G(Y,JX) + G(J^2Y, JX)) = -4G(Y,JX).$$

□

Corolario 1.1.7. *Una variedad nearly Kaehler (M, J, g) es de Kaehler si y sólo si $N_J \equiv 0$.*

Demostración. Si M es de Kaehler

$$0 = G(Y, JX) = \frac{N_J(X, Y)}{-4}$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y por lo tanto $N_J \equiv 0$. Recíprocamente si $N_J \equiv 0$ de la Proposición 1.1.6

$$0 = N_J(X, Y) = -4G(Y, JX)$$

por lo tanto M es de Kaehler. □

Estamos listos para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.1.8. *Si (M, J, g) es una variedad nearly Kaehler de dimensión 4, entonces M es una variedad Kaehler.*

Demostración. Probaremos que el tensor de Niejenhuis es idénticamente cero de forma local, y es decir cero de forma global. Sean U un abierto de un punto $p \in M$ y $\{X, Y, JX, JY\}$ una base de $\mathfrak{X}(U)$, notemos que

$$g(N_J(X, Y), X) = -4g(G(JY, X), X) = 4g(G(X, JY), X) = 4g(JY, G(X, X)) = 0$$

$$g(N_J(X, Y), JX) = 4g(G(X, JY), JX) = 4g(JY, G(X, JX)) = -4g(JY, JG(X, X)) = 0$$

$$g(N_J(X, Y), JY) = -4g(G(JY, X), JY) = 4g(X, G(JY, JY)) = 0$$

$$g(N_J(X, Y), Y) = -4g(G(JY, X), Y) = 4g(X, G(JY, Y)) = g(X, N_J(Y, JY)) = 0.$$

De manera similar se prueba que $N_J(V, W) = 0$ para cualquier $V, W \in \{X, Y, JX, JY\}$, es decir, $N_J \equiv 0$ por lo tanto M es de Kaehler. □

1.1.1. Curvatura en variedades nearly Kaehler

Como sabemos en una variedad diferenciable existen muchas conexiones y para cada una de ellas podemos definir su curvatura como sigue.

Definición 10. Sea (M, g) una variedad de Riemann y ∇ su conexión de Levi-Civita. La curvatura de ∇ es el (1,3)-tensor R definido como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Proposición 1.1.9. *El tensor de curvatura para la conexión de Levi-Civita cumple la primera identidad de Bianchi, es decir,*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Denotamos por R_{XYZW} al tensor de curvatura definido como

$$R_{XYZW} = g(R(X,Y)Z, W).$$

Supondremos que (N, J, g) es una variedad casi Hermítica. Veremos que el tensor de curvatura tiene una relación con el tensor G. Para ello, observemos la primera y segunda derivada covariante de la forma de Kaeheler Ω (Definición 7), calculamos con todo detalle la primera derivada covariante de Ω. Y para la segunda derivada covariante de Ω sólo mostraremos el resultado.
Entonces la primera derivada covariante de Ω en la dirección de $X \in \mathfrak{X}(N)$ viene dada por

$$\begin{aligned}
\nabla_X \Omega(Y,Z) &= X\Omega(Y,Z) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z) \\
&= Xg(JY,Z) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z) \\
&= g(\nabla_X JY, Z) + g(JY, \nabla_X Z) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z) \\
&= g(\nabla_X JY, Z) - g(J\nabla_X Y, Z) \\
&= g(G(X,Y), Z).
\end{aligned}$$

De manera similar $\nabla^2\Omega(W,X,Y,Z)$

$$\nabla^2\Omega(W,X,Y,Z) = Wg(G(X,Y),Z) - g(G(\nabla_W X, Y), Z) - g(G(X, \nabla_W Y), Z) - g(G(X,Y), \nabla_W Z).$$

Ya que $R(W,X)Y$ es una función $C^\infty(M)$ trilineal y Ω es un tensor definimos el tensor

$$R_{WX}(\Omega)(Y,Z) = \Omega(R(W,X)Y, Z) + \Omega(Y, R(W,X)Z).$$

En el siguiente lema se dará una relación de este tensor con la segunda derivada covariante de Ω.

Lema 1.1.10. *Para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(N)$ se satisface:*

1. $R_{WX}\Omega(Y,Z) = -\nabla^2\Omega(W,X,Y,Z) + \nabla^2\Omega(X,W,Y,Z)$

2. $\nabla^2\Omega(W,X,Y,Z) = -\nabla^2\Omega(W,Y,X,Z)$

3. $\nabla^2\Omega(Y,X,X,JY) = 0.$

Demostración. Calculemos $\nabla^2\Omega(W,X,Y,Z)$, por los anteriores cálculos

$$\begin{aligned}
\nabla^2\Omega(W,X,Y,Z) &= Wg(G(X,Y),Z) - g(G(\nabla_W X,Y),Z) - g(G(X,\nabla_W Y),Z) \\
&- g(G(X,Y),\nabla_W Z) \\
&= g(\nabla_W G(X,Y) - G(\nabla_W X,Y) - G(X,\nabla_W Y),Z) \\
&= g(\nabla_W\nabla_X JY - \nabla_W J\nabla_X Y - \nabla_{\nabla_W X} JY + J\nabla_{\nabla_W X} Y \\
&- \nabla_X J\nabla_W Y + J\nabla_X\nabla_W Y, Z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\nabla^2\Omega(X,W,Y,Z) = g(\nabla_X\nabla_W JY - \nabla_X J\nabla_W Y - \nabla_{\nabla_X W} JY + J\nabla_{\nabla_X W} Y - \nabla_W J\nabla_X Y + J\nabla_W\nabla_X Y, Z)$$

por lo hacer la diferencia, $-\nabla^2\Omega(W,X,Y,Z) + \nabla^2\Omega(X,W,Y,Z) = R_{WX}\Omega(Y,Z)$ se obtiene el resulatdo. La segunda parte se sigue directamente de la Proposición 1.1.3 y la parte tres es consecuencia inmediata de la segunda. □

Corolario 1.1.11. *Para todo* $X,Y \in \mathfrak{X}(N)$

$$-R_{XYXY} + R_{XYJXJY} = ||G(X,Y)||^2.$$

Demostración. Como N es nearly Kaehler y
$\nabla^2\Omega(X,X,Y,JY)$=

$$\begin{aligned}
&= Xg(G(X,Y),JY) - g(G(\nabla_X X,Y),JY) - g(G(X,\nabla_X Y),JY) - g(G(X,Y),\nabla_X JY) \\
&= -Xg(G(Y,X),JY) + g(G(Y,\nabla_X X),JY) + g(\nabla_X Y, G(X,JY)) - g(G(X,Y),\nabla_X JY) \\
&= Xg(X,G(Y,JY)) - g(\nabla_X X, G(Y,JY)) + g(\nabla_X Y, G(X,JY)) - g(G(X,Y),\nabla_X JY) \\
&= -g(\nabla_X Y, JG(X,Y)) - g(G(X,Y),\nabla_X JY) \\
&= g(J\nabla_X Y, G(X,Y)) - g(G(X,Y),\nabla_X JY) \\
&= -||G(X,Y)||^2.
\end{aligned}$$

Entonces por el Lema 1.1.10

$$\begin{aligned}
||G(X,Y)||^2 &= -\nabla^2\Omega(X,X,Y,JY) \\
&= \nabla^2\Omega(X,Y,X,JY) - 0 \\
&= \nabla^2\Omega(X,Y,X,JY) - \nabla^2\Omega(Y,X,X,JY) \\
&= -R_{XY}\Omega(X,JY) \\
&= -\Omega(R(X,Y)X,JY) - \Omega(X,R(X,Y)JY) \\
&= -g(JR(X,Y)X,JY) - g(JX,R(X,Y)JY) \\
&= -g(R(X,Y)X,Y) + g(R(X,Y)JX,JY) \\
&= -R_{XYXY} + R_{XYJXJY}.
\end{aligned}$$

□

1.2. Subvariedades casi complejas

Consideramos ahora una variedad casi Hermítica (N, J, g) y una variedad M encajada en N. Denotamos a la restricción del álgebra $\mathfrak{X}(N)$ sobre M por $\overline{\mathfrak{X}}(M)$, entonces

$$\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

donde $\mathfrak{X}(M)$ es el álgebra de campos vectoriales de M y $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ es el módulo de campos vectoriales perpendiculares a M.

Definición 11. Sea M una subvariedad de una variedad casi compleja (N, J); decimos que M es una subvariedad casi compleja de N si

$$J_m(T_mM) \subset T_mM$$

para cada $m \in M$, o equivalentemente para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$J(X) \in \mathfrak{X}(M).$$

En este caso escribiremos que (M, J) es una subvariedad casi compleja de (N, J), observemos que evitamos poner la restricción a J que formalmente debería ir, pero para no complicar la notación acordamos utilizar la misma estructura casi compleja.

En general si (M, g) es una subvariedad de Riemann con conexión de Levi-Civita ∇ en una variedad de Riemann (N, g) con conexión de Levi-Civita $\overline{\nabla}$, la relación entre estas conexiones viene dada por $P(\overline{\nabla}) = \nabla$, donde $P : \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ es la proyección ortogonal canónica. De manera más general tenemos las siguientes igualdades llamadas fórmula de Gauss y fórmula de Weingarten respectivamente

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \tag{1.1}$$

$$\overline{\nabla}_X Z = -A_Z X + \nabla^{\perp}_X Z \tag{1.2}$$

donde $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ es la segunda forma fundamental, $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)$ es el operador de forma y $\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ es la conexión normal.

Existen tres ecuaciones relevantes como consecuencia de la fórmula de Gauss y de Weingarten, la ecuación de Gauss, ecuación de Ricci y la ecuación de Codazzi respectivamente [2, Capítulo 6, Sección 3, pp. 134–138]

$$g(R(X, Y)Z, W) = g(\overline{R}(X, Y)Z, W) + g(\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)) - g(\alpha(X, Z), \alpha(Y, W)) \tag{1.3}$$

$$g(R^{\perp}(X, Y)\xi, \eta) = g([A_{\xi}, A_{\eta}]X, Y) \tag{1.4}$$

$$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y \alpha)(X, Z) \tag{1.5}$$

para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}M$ y $\eta, \xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$. La siguiente definición aparece en [5].

Definición 12. Sean (M, J), (N, J, g), $\overline{\nabla}$ y P como antes, definimos el tensor de configuración $T : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M)$ como la segunda forma fundamental y el operador de forma, respectivamente

$$T_X Y = \alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}, \;\; T_X Z = -A_Z X = P(\overline{\nabla}_X Z) \in \mathfrak{X}(M)$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $Z \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$.

Proposición 1.2.1. *Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $Z, W \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ entonces el tensor de configuración satisface*

1. *T es $C^{\infty}(M)$ bilineal.*

2. *$g(T_X Z, W) = -g(Z, T_X W)$.*

3. *$T_X(\mathfrak{X}(M)) \subset \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ y $T_X(\mathfrak{X}(M)^{\perp}) \subset \mathfrak{X}(M)$.*

Demostración. La primer parte de la proposición se sigue del hecho que T está definido en términos de suma y composición de funciones C^∞. La tercera parte es consecuencia de la definición. Ahora para la segunda parte, consideramos la proyección natural $Q : \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$

$$\begin{aligned} g(T_X Z, W) &= g(T_X(P(Z) + Q(Z)), P(W) + Q(W)) \\ &= g(T_X(Q(Z)), P(W)) + g(T_X(P(Z)), Q(W)). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} g(T_X(P(Z)), Q(W)) &= g(\overline{\nabla}_X P(Z) - \nabla_X P(Z), Q(W)) \\ &= g(\overline{\nabla}_X P(Z), Q(W)) - g(\nabla_X P(Z), Q(W)) \\ &= Xg(P(Z), Q(W)) - g(P(Z), \overline{\nabla}_X Q(W)) \\ &= -g(P(Z), \nabla_X Q(W)) \\ &= -g(P(Z), T_X Q(W)). \end{aligned}$$

De manera similar $g(T_X(P(Z)), Q(W)) = -g(P(Z), T_X Q(W))$ así obtenemos

$$\begin{aligned} g(T_X Z, W) &= g(T_X(P(Z) + Q(Z)), P(W) + Q(W)) \\ &= g(T_X(Q(Z)), P(W)) + g(T_X(P(Z)), Q(W)) \\ &= -g(Q(Z), T_X P(W)) - g(P(Z), T_X Q(W)) \\ &= -g(Z, T_X W). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.2. *Sean (N, J, g) una variedad nearly Kaehler y (M, J) una subvariedad casi compleja de N, entonces (M, J, g) es una variedad nearly Kaehler.*

Demostración. Veamos que tanto difiere $T_X JX$ de $JT_X X$, es decir,

$$T_X JX - JT_X X = \overline{\nabla}_X JX - \nabla_X JX - J(\overline{\nabla}_X X - \nabla_X X) = (\overline{\nabla}_X J)X - (\nabla_X J)X.$$

Como (N, J, g) es una variedad nearly Kaehler $(\overline{\nabla}_X J)X = 0$, esto quiere decir que la parte izquierda normal a M es igual a la parte derecha tangente a M, y esto es posible si y sólo si ambos extremos de la igualdad son cero, por lo tanto

$$(\nabla_X J)X = 0 \quad \text{y} \quad T_X JX - JT_X X = 0$$

y se sigue que M es nearly Kaehler. □

Corolario 1.2.3. *Sean (N, J, g) una variedad nearly Kaehler y (M, J) una subvariedad casi compleja de N, entonces*

$$T_X JX = JT_X X.$$

1.3. Subvariedades totalmente reales

En la sección anterior se uso que $\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^\perp$, ahora de manera opuesta a la Definición 11 tenemos la siguiente definición.

Definición 13. Sea M una subvariedad de una variedad casi compleja (N, J); decimos que M es una subvariedad totalmente real de N si

$$J_m(T_m M) \subset T_m M^\perp$$

para cada $m \in M$, o equivalentemente para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$J(X) \in \mathfrak{X}(M)^\perp.$$

Si M es una subvariedad totalmente real de una variedad casi Hermítica (N, J, g) con conexión de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ y como antes $\nabla = P \circ \overline{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de M y de la Definición 12 se sigue que

$$\overline{\nabla}_X Z = -T_X Z + \nabla^\perp_X Z.$$

Como consecuencia tenemos la proposición siguiente.

Proposición 1.3.1. *Si M es una subvariedad totalmente real de una variedad nearly Kaehler (N, J, g), entonces $G(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.*

Demostración. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\begin{aligned} g(G(X,Y), Z) &= g(\overline{\nabla}_X JY, Z) - g(J\overline{\nabla}_X Y, Z) \\ &= g(T_X JY, Z) + g(\overline{\nabla}_X Y, JZ) \\ &= -g(JY, T_X Z) + g(T_X Y, JZ) \\ &= g(Y, JT_X Z) - g(JT_X Y, Z). \end{aligned}$$

De manera análoga

$$g(G(Z,X),Y) = g(JT_ZY,X) - g(JT_ZX,Y)$$

$$g(G(Y,Z),X) = g(JT_YX,Z) - g(JT_YZ,X).$$

Por la Proposición 1.1.3 y el Lema 1.1.1

$$g(G(X,Y),Z) = -g(Y,G(X,Z)) = g(G(Z,X),Y) = g(G(Y,X),Z),$$

al sumar las primeras tres igualdades obtenemos

$$3g(G(X,Y),Z) = 0,$$

en otras palabras $G(X,Y)$ es ortogonal a M. □

Proposición 1.3.2. *Sea (N,J,g) una variedad nearly Kaehler, entonces*

$$(\nabla_X G)(JY,JZ) = -(\nabla_X G)(Y,Z) + JG(G(X,Y),Z) + JG(Y,G(X,Z)).$$

Demostración. Sean $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$(\nabla_X G)(JY,JZ) \;\; = \;\; \overline{\nabla}_X G(JY,JZ) - G(\overline{\nabla}_X JY,JZ) - G(JY,\overline{\nabla}_X JZ).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X G(JY,JZ) &= -\overline{\nabla}_X JG(JY,Z) \\ &= \overline{\nabla}_X JG(Z,JY) \\ &= \overline{\nabla}_X - J^2G(Z,Y) \\ &= -\overline{\nabla}_X G(Y,Z). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_X G)(JY,JZ) &= -\overline{\nabla}_X G(Y,Z) - G(G(X,Y),JZ) - G(J\overline{\nabla}_X Y,JZ) - G(JY,G(X,Z)) \\ &\quad -G(JY,J\overline{\nabla}_X Z) \\ &= -\overline{\nabla}_X G(Y,Z) + JG(G(X,Y),Z) + G(\overline{\nabla}_X Y,Z) + JG(Y,G(X,Z)) \\ &\quad +G(Y,\overline{\nabla}_X Z) \\ &= -(\overline{\nabla}_X G)(Y,Z) + JG(G(X,Y),Z) + JG(Y,G(X,Z)). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Subvariedades CR

En el año 1978 A. Benjacu introduce en [1] a las CR-subvariedades este capítulo abordaremos los resultados más destacados que se relacionan con esta tesis.

2.1. Subvariedades CR en una variedad nearly Kaehler

Sean (N, J, g) una variedad Kaehler de dimension n (n par) y (M, g_0) una subvariedad de Riemann inmersa isométricamente en N. Sea D una distribución en M, es decir, una función tal que a cada $x \in M$ le asocia el subespacio $D_x \subset T_xM$ de dimension m, de manera diferenciable. Donde diferenciable se entenderá que existen $X_1, X_2, \ldots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$ tal que el conjunto $\{X_1(x), X_2(x), \ldots, X_m(x)\}$ es una base de D_x para toda $x \in M$.

Definición 14. Una subvariedad (M, g_0) de una variedad Kaehler (N, J, g) con distribuciones $(D, D^{\perp})$ es una CR subvariedad de N si se satisface

1. La distribución D es consistente con la estructura casi compleja de N, es decir, $J(D_x) = D_x$ para cada $x \in M$.

2. La distribución ortogonal complementaria $x \mapsto D_x^{\perp} \subset T_xM$ es totalmente real, esto es $J(D_x^{\perp}) \subset T_xM^{\perp}$ para cada $x \in M$.

Observación. Una CR subvariedad M con distribuciones $(D, D^{\perp})$ de una variedad Kaehler es una subvariedad M de N junto con una descomposición de su espacio tangente $TM = D(M) \oplus D^{\perp}(M)$. Con lo que podemos escribir de manera única a cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ como

$$X = P(X) + Q(X).$$

Donde $P : TM \to D(M)$ (la parte horizontal) y $Q : TM \to D^{\perp}(M)$ (la parte vertical) son las proyecciones naturales, además de que

$$J \circ P : TM \to D(M) \quad \text{y} \quad J \circ Q : TM \to TM^{\perp}.$$

Ejemplo 5. Una curva inmersa $\alpha : I \to N$ con las distribuciones $D_x = 0$ y $D_x^{\perp} = T_x(\alpha(I))$ es una CR subvariedad de N.

Ejemplo 6. Cualquier subvariedad casi compleja (M, J) de una variedad Kaehler (N, J, g) con las distribuciones $D_x = T_x(M)$ y $D_x^{\perp} = 0$ es una CR subvariedad de N. De manera opuesta, cualquier subvariedad totalmente real M_0 de N con las distribuciones $D_x = 0$ y $D_x^{\perp} = T_x M_0$ es una CR subvariedad de N.

En el ejemplo anterior tenemos entonces que las subvariedades casi complejas y las subvariedades totalmente reales son casos particulares de las CR subvariedades.

Sea ξ un campo vectorial normal a M, podemos descomponer a

$$J\xi = A\xi + B\xi + C\xi,$$

donde $A\xi$ es la parte horizontal, $B\xi$ es la parte vertical y $C\xi$ es la parte normal.

Lema 2.1.1. *Sean M una CR subvariedad de una variedad de Kaehler N y $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces las siguientes ecuaciones son válidas*

$$C^2\xi + JB\xi + \xi = 0 \tag{2.1}$$

$$JA\xi + AC\xi = 0 \tag{2.2}$$

$$BC\xi = 0. \tag{2.3}$$

Demostración. Aplicando J a la ecuación $J\xi = A\xi + B\xi + C\xi$ tenemos

$$\begin{aligned} -\xi &= J^2\xi \\ &= JA\xi + JB\xi + JC\xi \\ &= JA\xi + JB\xi + AC\xi + BC\xi + C^2\xi. \end{aligned}$$

Si comparamos partes verticales, horizontales y normales

$$C^2\xi + JB\xi + \xi = 0$$

$$JA\xi + AC\xi = 0$$

$$BC\xi = 0.$$

□

Al aplicar C a la ecuación 2.1 por la ecuación 2.5, se sigue que

$$(C^3 + C)\xi = C^3\xi + C\xi = 0.$$

Este operador en el espacio normal es el introducido por K. Yano [12].

Como caso particular si $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces JQX es un campo normal a M, y por tanto

$$-QX = JJQX = AJQX + BJQX + CJQX,$$

al comparar partes horizontales, verticales y normales se siguen

$$BJQX + QX = 0, \tag{2.4}$$

$$AJQX = CJQX = 0. \tag{2.5}$$

Lema 2.1.2. *Sean M una CR subvariedad de una variedad Kaehler N y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces las siguientes ecuaciones son válidas.*

$$\alpha(X,Y) - P(A_{JQY}X) = JP\nabla_X Y + A\alpha(X,Y) \tag{2.6}$$

$$Q(\nabla_X JPY) - Q(A_{JQY}X) = B\alpha(X,Y) \tag{2.7}$$

$$\alpha(X, JPY) + \nabla_X^{\perp} JQY = JQ\nabla_X Y + C\alpha(X,Y). \tag{2.8}$$

Demostración. De las fórmulas de Gauss 1.1 y Weingarten 1.2

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X JY &= \overline{\nabla}_X JPY + \overline{\nabla}_X JQY \\
&= \nabla_X JPY + \alpha(X, JPY) - A_{JQY}X + \nabla_X^{\perp} JQY \\
&= P(\nabla_X JPY) + Q(\nabla_X JPY) + \alpha(X, JPY) - P(A_{JQY}X) - Q(A_{JQY}X) + \nabla_X^{\perp} JQY.
\end{aligned}$$

Por otro lado como N es de Kaehler se sigue

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X JY &= J\overline{\nabla}_X Y \\
&= J\nabla_X Y + J\alpha(X,Y) \\
&= JP\nabla_X Y + JQ\nabla_X Y + A\alpha(X,Y) + B\alpha(X,Y) + C\alpha(X,Y).
\end{aligned}$$

Comparando las partes horizontales verticales y normales se tienen las tres siguientes ecuaciones

$$\alpha(X,Y) - P(A_{JQY}X) = JP\nabla_X Y + A\alpha(X,Y)$$

$$Q(\nabla_X JPY) - Q(A_{JQY}X) = B\alpha(X,Y)$$

$$\alpha(X,JPY) + \nabla_X^{\perp} JQY = JQ\nabla_X Y + C\alpha(X,Y).$$

□

2.2. Curvatura seccional de una CR subvariedad

A partir de ahora supondremos que la variedad Kaehler $(N, J, \overline{g})$ es una variedad de curvatura holomorfa constante c, entonces la curvatura de N está dada por

$$\overline{R}(X,Y)Z = \frac{c}{4}\left[\overline{g}(Y,Z)X - \overline{g}(X,Z)Y + \overline{g}(JY,Z)JX - \overline{g}(JX,Z)JY + 2\overline{g}(X,JY)JZ\right] \quad (2.9)$$

para cualquier $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(N)$. Más aún, si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} \overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W) &= \overline{g}(Y,Z)\overline{g}(X,W) - \overline{g}(X,Z)\overline{g}(Y,W) + \overline{g}(JY,Z)\overline{g}(JX,W) \\ &- \overline{g}(JX,Z)\overline{g}(JY,W) + 2\overline{g}(X,JY)\overline{g}(JZ,W) \\ &= \overline{g}(Y,Z)\overline{g}(X,W) - \overline{g}(X,Z)\overline{g}(Y,W) + \overline{g}(JPY,Z)\overline{g}(JPX,W) \\ &- \overline{g}(JPX,Z)\overline{g}(JPY,W) + 2\overline{g}(X,JPY)\overline{g}(JPZ,W). \end{aligned}$$

Sabemos que con las propiedades del tensor de curvatura, es posible a partir de la curvatura seccional recuperar el tensor de curvatura. Por lo cual es importante conocer la forma de la curvatura seccional en la variedad N. Para ello hacemos en la ecuación anterior $X = W$ y $Y = Z$ con lo cual obtenemos

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Y,X) = 1 + 3\overline{g}(JY,X)^2 = 1 + 3g(JPY,PX)^2.$$

Proposición 2.2.1. *Sea M una CR subvariedad de una variedad Kaehler $(N, J, \overline{g})$. Entonces la curvatura seccional de M es*

$$g(R(X,Y)Y,X) = \frac{c}{4}\left[1 + 3g(JPY,PX)^2\right] + \overline{g}(\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)) - \overline{g}(\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)). \quad (2.10)$$

Demostración. Al sustituir $\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Y,X) = 1 + 3\overline{g}(JY,X)^2 = 1 + 3g(JPY,PX)^2$ en la ecuación de Gauss 1.3 tenemos que la curvatura seccional de M viene dada por

$$g(R(X,Y)Y,X) = \frac{c}{4}\left[1 + 3g(JPY,PX)^2\right] + \overline{g}(\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)) - \overline{g}(\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)).$$

Tal como se quería probar. □

Definición 15. La curvatura seccional holomorfa H de una CR subvariedad M determinada por el campo horizontal unitario $X \in \mathfrak{X}(M)$ es la curvatura seccional que determina el plano generado por $\{X, JX\}$

$$H(X) = c + \overline{g}(\alpha(X,X),\alpha(JX,JX)) - \overline{g}(\alpha(X,JX),\alpha(JX,X)). \tag{2.11}$$

Proposición 2.2.2. *La curvatura seccional de una CR subvariedad M de una variedad Kaehler $(N, J, \overline{g})$ viene dada por*

$$\begin{aligned} H(X) &= c + ||B\alpha(X,X)||^2 - ||\alpha(X,X)||^2 - ||C\alpha(X,X)||^2 - ||Q\nabla_X X||^2 && (2.12)\\ &+ \overline{g}(\alpha(X,X), JQ\nabla_{JX}Y) - 2\overline{g}(JQ\nabla_X X, C\alpha(X,X)). && (2.13)\end{aligned}$$

Demostración. Recordemos que $\alpha(X,JPY) + \nabla^{\perp}_X JQY = JQ\nabla_X Y + C\alpha(X,Y)$, pero para nuestro caso $QY = 0$ por lo que esta ecuación se reduce a

$$\alpha(X,JY) = JQ\nabla_X Y + C\alpha(X,Y) \tag{2.14}$$

se sigue que

$$\alpha(JX,JY) = JQ\nabla_{JX}Y + C\alpha(JX,Y) = JQ\nabla_{JX}Y + C(JQ\nabla_Y X + C\alpha(X,Y)).$$

Como $CJQZ = 0$ para cualquier $Z \in \mathfrak{X}(M)$ (véase la ecuación 2.5)

$$\alpha(JX,JY) = JQ\nabla_{JX}Y + C^2\alpha(X,X). \tag{2.15}$$

Al sustituir las ecuaciones 2.15 y 2.14 en $H(X)$

$$\begin{aligned} H(X) &= c + \overline{g}(\alpha(X,X),\alpha(JX,JX)) - \overline{g}(\alpha(X,JX),\alpha(JX,X))\\ &= c + \overline{g}(\alpha(X,X), JQ\nabla_{JX}Y + C^2\alpha(X,X))\\ &- \overline{g}(JQ\nabla_X X + C\alpha(X,X), JQ\nabla_X X + C\alpha(X,X))\\ &= \overline{g}(\alpha(X,X), C^2\alpha(X,X)) + \overline{g}(\alpha(X,X), JQ\nabla_{JX}Y)\\ &- \overline{g}(JQ\nabla_X X, JQ\nabla_X X) - \overline{g}(C\alpha(X,X), C\alpha(X,X)) - 2\overline{g}(JQ\nabla_X X, C\alpha(X,X)).\end{aligned}$$

Por la ecuación 2.1, lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} H(X) &= c + ||B\alpha(X,X)||^2 - ||\alpha(X,X)||^2 - ||C\alpha(X,X)||^2 - ||Q\nabla_X X||^2 \\ &+ \overline{g}(\alpha(X,X), JQ\nabla_{JX}Y) - 2\overline{g}(JQ\nabla_X X, C\alpha(X,X)). \end{aligned}$$

Justo lo que se quería probar. □

Definición 16. La distribución horizontal D es llamada paralela con respecto a la conexión de Riemann ∇ en M, si $\nabla_X Y \in D$ para cualesquiera campos vectoriales $X, Y \in D$.

Lema 2.2.3. *Si M es una CR subvariedad de una forma espacial compleja $N(c)$ entonces la distribución D es involutiva, es decir para cualesquiera campos $X, Y \in D$, $[X, Y] \in D$, si y sólo si $\alpha(JX, Y) = \alpha(X, JY)$.*

Demostración. Sea $X, Y \in D$ se sigue de la ecuación 2.14

$$\alpha(X, JY) - \alpha(Y, JX) = JQ(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = JQ([X, Y]).$$

El lema se sigue de inmediato. En particular

$$-\alpha(X, X) = \alpha(X, J^2X) = \alpha(JX, JX).$$

□

Teorema 2.2.4. *Si M es una CR subvariedad de una forma espacial compleja $N(c)$ y D es una distribución involutiva entonces la curvatura seccional holomorfa es menor o igual a c, en otras palabras para cada $X \in D$*

$$H(X) \leq c.$$

Demostración. De la Definición 2.11 y del Lema 2.2.3

$$\begin{aligned} H(X) &= c + \overline{g}(\alpha(X,X), \alpha(JX,JX)) - \overline{g}(\alpha(X,JX), \alpha(JX,X)) \\ &= c - (||\alpha(X,X)||^2 + ||\alpha(X,JX)||^2) \leq c. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.5. *Si D es paralela entonces $H(X) \leq c$ para todo $X \in D$.*

Definición 17. La CR subvariedad M es llamada D-totalmente geodésica (respectivamente $D^\perp$ totalmente geodesica) si $\alpha(X, Y) = 0$ para cada $X, Y \in D$ $(X, Y \in D^\perp)$.

Teorema 2.2.6. *Una CR subvariedad M de una forma espacial compleja $N(c)$ es D totalmente geodésica si y sólo si D es involutiva y $H(X) = c$ para cada $X \in D$.*

Demostración. Si D es totalmente geodésica por el Lema 2.2.3, D es involutiva. De la Definición 2.11, para cada $X \in D$ $H(X) = c$.
Por otro lado, como $H(X) = c$ entonces

$$\overline{g}(\alpha(X, X), \alpha(X, X)) = 0$$

$$\overline{g}(\alpha(X, JX), \alpha(X, JX)) = 0$$

para cada $X \in D$. En otras palabras $\alpha(X, X) = 0$, en particular

$$0 = \alpha(X + Y, X + Y) \quad = \quad 2\alpha(X, Y),$$

es decir, D es totalmente geodésica. □

Sea $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ una base local en M, con la condición de que $\{X_1, X_2, \ldots, X_s, JX_1 = X_{s+1}, JX_2 = X_{s+2}, \ldots, JX_s = X_{2s}\}$ es una base para D y $\{X_{2s+1}, X_{2s+2}, \ldots, X_{2s+r} = X_m\}$ es una base para $D^{\perp}$.

Definición 18. La CR subvariedad M es llamada D mínima (respectivamente $D^{\perp}$ mínima) si

$$\sum_{i=1}^{2s} \alpha(X_i, X_i) = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha(X_{2s+i}, X_{2s+i}) = 0 \right).$$

Como en geometría de subvariedades una CR subvariedad D totalmente geodésica es D mínima.

Teorema 2.2.7. *Si M es una CR subvariedad $D^{\perp}$ mínima de una forma espacial compleja $N(c)$ entonces M es $D^{\perp}$ totalmente geodésica si y sólo si*

$$g(R(X, Y)Y, X) = \frac{c}{4}$$

para todo $X, Y \in D^{\perp}$.

Demostración. Al hacer la sustitución de X y Y por X_{2s+i} y X_{2s+j} con $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ en la ecuación 2.10 esta se reduce a

$$\begin{aligned} g(R(X_{2s+i}, X_{2s+j})X_{2s+j}, X_{2s+i}) = \frac{c}{4} &+ \overline{g}(\alpha(X_{2s+i}, X_{2s+i}), \alpha(X_{2s+j}, X_{2s+j})) \\ &- \overline{g}(\alpha(X_{2s+i}, X_{2s+j}), \alpha(X_{2s+i}, X_{2s+j})). \end{aligned}$$

Supongamos entonces que $g(R(X_{2s+i}, X_{2s+j})X_{2s+j}, X_{2s+i}) = \frac{c}{4}$, al sustituir en la ecuación anterior y sumando sobre todo i

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} \overline{g}(\alpha(X_{2s+i}, X_{2s+j}), \alpha(X_{2s+i}, X_{2s+j})) &= \sum_{i=1}^{r} ||\alpha(X_{2s+i}, X_{2s+j})||^2 \\ &= \sum_{i=1}^{r} \overline{g}(\alpha(X_{2s+i}, X_{2s+i}), \alpha(X_{2s+j}, X_{2s+j})) \\ &= \overline{g}(\sum_{i=1}^{r} \alpha(X_{2s+i}, X_{2s+i}), \alpha(X_{2s+j}, X_{2s+j})) = 0. \end{aligned}$$

Por lo que $\alpha(X_{2s+i}, X_{2s+j}) = 0$ para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, y como consecuencia $\alpha(X, Y) = 0$ para cada $X, Y \in D^{\perp}$, es decir, M es $D^{\perp}$ totalmente geodésica. El recíproco es claro. □

Definición 19. Sean M una CR subvariedad en una variedad Kaehler $(N, J, \overline{g})$, $X \in D$ y $Y \in D^{\perp}$. A la curvatura seccional de X y Y la llamaremos CR curvatura seccional.

Definición 20. Una CR subvariedad M es llamada CR totalmente geodésica si para cada $X \in D$ y $Y \in D^{\perp}$ su segunda forma fundamental se anula, es decir, $\alpha(X, Y) = 0$.

Teorema 2.2.8. *Sea M una CR subvariedad en una variedad Kaehler $(N, J, \overline{g})$. Si la CR curvatura seccional de M es $\frac{c}{4}$ y alguna de las condiciones siguientes es satisfecha*

1. *M es D mínima*

2. *M es $D^{\perp}$ mínima.*

Entonces M es CR totalmente geodésica.

Capítulo 3

Estructura casi compleja de S^6

En este capítulo definimos a los números de Cayley, con los que le induciremos la estructura casi compleja a S^6. Además calculamos la conexión de Levi-Civita de S^6. En el Lema 3.2.2 se relacionan las conexiones de Levi-Civita entre de S^6 y C.

3.1. Números de Cayley

Sea C el espacio vectorial real generado por el conjunto $\{I, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, vamos a definir en C una estructura de álgebra. Definimos el producto en C dado por la Tabla 3.1.

$*$	I	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
I	I	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_0	e_0	I	e_2	-e_1	e_4	-e_3	e_6	-e_5
e_1	e_1	-e_2	I	e_0	e_5	-e_6	-e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	-e_0	I	-e_6	-e_5	e_4	e_3
e_3	e_3	-e_4	-e_5	e_6	I	e_0	e_1	-e_2
e_4	e_4	e_3	e_6	e_5	-e_0	I	-e_2	-e_1
e_5	e_5	-e_6	e_3	-e_4	-e_1	e_2	I	e_0
e_6	e_6	e_5	-e_4	-e_3	e_2	e_1	-e_0	I

Cuadro 3.1: Producto en C.

Si $\xi \in C$ entonces existen escalares $X, X_i \in \mathbb{R}$ con $i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ tales que

$$\xi = XI + X_0e_0 + X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3 + X_4e_4 + X_5e_5 + X_6e_6 = XI + x.$$

El elemento ξ es llamado imaginario puro si $X = 0$. Todos los números imaginarios puros de Cayley forman un subespacio 7-dimensional E^7 de C. Si elegimos a

$$\eta = YI + Y_0e_0 + Y_1e_1 + Y_2e_2 + Y_3e_3 + Y_4e_4 + Y_5e_5 + Y_6e_6 = YI + y$$

entonces el producto de ξ con η está definido por:

$$\xi * \eta = XYI - \sum_{i}^{6} X_iY_iI + Xy + Yx + \sum_{i\neq k}^{6} X_iY_ke_i * e_k.$$

De manera que si $X = Y = 0$ entonces

$$\xi * \eta = x * y = -\sum_{i}^{6} X_iY_iI + \sum_{i\neq k}^{6} X_iY_ke_i * e_k$$

donde

$$\sum_{i}^{6} X_iY_iI$$

es el producto escalar de x con y denotado por $\langle x, y\rangle$. El número imaginario puro

$$\sum_{i\neq k}^{6} X_iY_ke_i * e_k$$

es llamado el vector producto de x con y denotado por $x \times y$. Para una fórmula explícita vea la prueba del Teorema 3.2.1. Por tanto podemos escribir

$$x * y = -\langle x, y\rangle I + x \times y.$$

Observemos que

$$< x, y >= -\frac{1}{2}(x * y + y * x) \tag{3.1}$$

$$x \times y = \frac{1}{2}(x * y - y * x). \tag{3.2}$$

Algunas propiedades relevantes del producto $*$ son:

- es bilineal antisimétrico,
- $x \times y$ es ortogonal tanto a x como a y,
- $\langle x \times y, w\rangle = \langle x, y \times w\rangle$,
- $(x \times y) \times w + x \times (y \times w) = 2\langle x, w\rangle y - \langle y, w\rangle x - \langle x, y\rangle w$,

para cualesquiera $x, y, c \in C$.

3.2. Estructura casi compleja de S^6

Ahora estamos listos para definir la estructura casi compleja en S^6 como sigue:
Sea $\mathbb{S}^6$ como el conjunto de elementos unitarios en E^7, en otras palabras,

$$\mathbb{S}^6 = \{N \in E^7 :< N, N >= 1\}.$$

Notemos que E^7 coincide con $\mathbb{R}^7$, con lo que al espacio tangente $T_N S^6$ lo podemos identificar con el subespacio de E^7 ortogonal a N es decir $T_N \mathbb{S}^6 = N^\perp$.

En $S^6 \subset C$ definimos la $(1,1) - tensor$ $J : \mathfrak{X}(\mathbb{S}^6) \to \mathfrak{X}(\mathbb{S}^6)$ como

$$J_N(x) = N \times x_N$$

para $x \in \mathfrak{X}(S^6)$. Para evitar acumulación de notación pondremos en lugar de $J_N(x) = N \times x_N$ simplemente

$$J(x) = N \times x.$$

Ahora, veamos que J es una estructura casi compleja para $\mathbb{S}^6$. Primero hagamos notar que J está bien definido, es decir, para cada $x \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^6)$ $J(x) \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^6)$. Sea $x \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^6)$ entonces

$$\langle J(x), N\rangle = \langle N \times x, N\rangle = \langle N, x \times N\rangle = -\langle N \times x, N\rangle = -\langle J(x), N\rangle$$

se sigue que $\langle J(x), N\rangle = 0$ y es decir $J(x) \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^6)$. Luego como

$$(x \times y) \times w + x \times (y \times w) = 2\langle x, w\rangle y - \langle y, w\rangle x - \langle x, y\rangle w$$

sustituyendo $x = y = N$ y $w = x$ obtenemos

$$J^2(x) = N \times (N \times x) = 2\langle N, x\rangle N - \langle N, x\rangle N - \langle N, N\rangle x = -x.$$

En otras palabras $(\mathbb{S}^6, J)$ es una variedad casi compleja. Como observación extra tenemos que J es una isometría pues

$$\begin{aligned}\langle Jx, Jy\rangle = \langle N \times x, N \times y\rangle &= -\langle x \times N, N \times y\rangle \\ &= -\langle x, N \times (N \times y)\rangle = \langle x, y\rangle .\end{aligned}$$

Ahora estudiaremos la estructura diferenciable de la seis esfera apoyándonos de la segunda forma fundamental y el operador de forma.

Consideremos ahora la conexión de Levi-Civita D para el espacio E^7 que afortunadamente es la conexión usual en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^7$ así tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. *Para cualesquiera $x, y, z \in \mathfrak{X}(E^7)$ tenemos*

$$D_z(x \times y) = D_z x \times y + x \times D_z y.$$

Demostración. Existen funciones $x_i, y_i : E^7 \to \mathbb{R}$ con $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ tales que, $x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i$ $y = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i$ donde $e_i \in \mathfrak{X}(E^7)$ son campos constantes. Entonces damos la fórmula explícita para

$$\begin{aligned}
x \times y &= (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_5y_6 - x_6y_5)e_0 \\
&+ (x_2y_0 - x_0y_2 + x_5y_3 - x_3y_5 + x_4y_6 - x_6y_4)e_1 \\
&+ (x_0y_1 - x1y_0 + x_4y_5 - x_5y_4 + x_3y_6 - x_6y_3)e_2 \\
&+ (x_4y_0 - x_0y_4 + x_1y_5 - x_5y_1 + x_6y_2 - x_2y_6)e_3 \\
&+ (x_5y_2 - x_2y_5 + x_6y_1 - x_1y_6 + x_0y_3 - x_3y_0)e_4 \\
&+ (x_2y_4 - x_4y_2 + x_6y_0 - x_0y_6 + x_3y_1 - x_1y_3)e_5 \\
&+ (x_1y_4 - x_4y_1 + x_0y_6 - x_6y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)e_6.
\end{aligned}$$

Para evitar una gran cantidad de cuentas análogas solo veremos que el teorema es válido para la primer coordenada, es decir queremos comparar $< D_z(x \times y), e_0 >$ con $< D_z x \times y + x \times D_z y, e_0 >$ que por definición es

$$\begin{aligned}
< D_z(x \times y), e_0 > &= D_z(x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_5y_6 - x_6y_5) \\
&= D_z x_1 y_2 + x_1 D_z y_2 - D_z x_2 y_1 - x_2 D_z y_1 + D_z x_3 y_4 + x_3 D_z y_4 \\
&- D_z x_4 y_3 - x_4 D_z y_3 + D_z x_5 y_6 + x_5 D_z y_6 - D_z x_6 y_5 - x_6 D_z y_5 \\
&= D_z x_1 y_2 - D_z x_2 y_1 + D_z x_3 y_4 - D_z x_4 y_3 + D_z x_5 y_6 - D_z x_6 y_5 \\
&+ x_1 D_z y_2 - x_2 D_z y_1 + x_3 D_z y_4 - x_4 D_z y_3 + x_5 D_z y_6 - x_6 D_z y_5 \\
&= < D_z x \times y + x \times D_z y, e_0 > .
\end{aligned}$$

Justo lo que se quería probar. □

Al concentrarnos en S^6 tenemos que su conexión de Levi-Civita viene dada por $\overline{\nabla} = P \circ D$ donde $P : E^7 \to N^{\perp}$ es la proyección ortogonal lo cual es equivalente a

$$P(x) = x - < x, N > N.$$

Para cada $x \in \mathfrak{X}(E^7)$. Por lo que tenemos la siguiente lema.

Lema 3.2.2. *Para cualesquiera $x, y, z \in \mathfrak{X}(S^6)$ se tiene que*

$$\overline{\nabla}_z x \times y = D_z x \times y + g(x,z)J(y)$$

donde g es la métrica en S^6.

Demostración. Utilizando la observación anterior tenemos

$$\overline{\nabla}_z x \times y = (D_z x - < D_x, N > N) \times y = D_z x \times y - < D_z x, N > N \times y$$

y dado que $< x, N >= 0$ se tiene

$$< D_z x, N >= - < x, D_z N >= - < x, z >= -g(x,z)$$

de donde se sigue el Lema. □

Con este Lema es sencillo prbar el corolario siguiente.

Corolario 3.2.3. *La igualdad*

$$\overline{\nabla}_z(x \times y) = \overline{\nabla}_z x \times y + x \times \overline{\nabla}_z y$$

no nescesariamente es satisfecha.

Demostración. Por el Lema 3.2.2

$$\overline{\nabla}_z x \times y + x \times \overline{\nabla}_z y = D_z x \times y - D_z y \times x + g(x,z)J(y) - g(y,z)J(x)$$

mientras que el lado izquierdo es

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_z(x \times y) &= P(D_z(x \times y)) \\
&= P(D_z x \times y) + P(x \times D_z y) \\
&= D_z x \times y - < D_z x \times y, N > N - P(D_z y \times x) \\
&= D_z x \times y - < D_z x, y \times N > N - D_z y \times x + < D_z y, x \times N > N \\
&= D_z x \times y + < D_z x, J(y) > N - D_z y \times x - < D_z y, J(x) > N.
\end{aligned}$$

Concluyendo la prueba del corolario. □

Capítulo 4

Subvariedades totalmente reales de S^6

En este capítulo abordaremos las subvariedades casi complejas y totalmente reales de S^6. Mostraremos que no existen subvariedades casi complejas de dimensión cuatro (Teorema 4.1.2). Mientras que en el caso de que M sea una subvariedad totalmente real de dimensión tres, entonces M es mínima y orientable (Teorema 4.2.4), si además M tiene curvatura constante c entonces $c = 1$ y por lo tanto totalmente geodésica (Lema 4.2.6) o $c = \frac{1}{16}$ (Teorema 4.2.7). Denotamos a (S^6, J, g) a la variedad nearly Kaehler donde g es la métrica de Riemann inducida en S^6 como subvariedad del espacio de los números imaginarios puros del álgebra de Cayley C que denotamos por E^7 en el Capítulo 3.

4.1. Subvariedad casi compleja de dimensión cuatro

El propósito de esta sección es demostrar que la seis esfera no contiene subvariedades casi complejas de dimensión cuatro.

Lema 4.1.1. *Sean M una subvariedad casi compleja de (S^6, J, g), $f : T_p^1(M) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = ||\alpha(x,x)||^2$ donde $T_p^1(M) = \{x \in T_pM : ||x|| = 1\}$. Si $x \in T_p^1(M)$ es un máximo de f, $y \in T_p^1(M)$ es ortogonal a x y $J(x)$ entonces, $\alpha(x,y)$ y $\alpha(x,J(y))$ son ortogonales a $\alpha(x,x)$ y $\alpha(x,J(x))$.*

Demostración. Consideremos la función $g : \mathbb{R} \to T_p^1(M)$ definido como $g(t) = cos(t)x + sen(t)y$

entonces la composición

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= f \circ g(t) \\
&= ||\alpha(cos(t)x + sen(t)y, cos(t)x + sen(t)y||^2 \\
&= ||cos^2(t)\alpha(x,x) + sen(2t)\alpha(x,y) + sen^2(t)\alpha(y,y)||^2.
\end{aligned}$$

Por regla de la cadena y de la suposición que $df(g(0)) = df(x) = 0$ tenemos que

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = df(g(0))dg(0) = 0.$$

Calculando directamente y usando el hecho de que $T_x x = \alpha(x,x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(||cos^2(t)T_x x + sen(2t)T_x y + sen^2(t)T_y y||^2) \\
&= 2g(\frac{d}{dt}\left(cos^2(t)\alpha(x,x) + sen(2t)\alpha(x,y) + sen^2(t)\alpha(y,y)\right), cos^2(t)\alpha(x,x) \\
&+ sen(2t)\alpha(x,y) + sen^2(t)\alpha(y,y)) \\
&= 2g(2cos(t)sen(t)(T_y y - T_x x) + 2cos(2t)T_x y, cos^2(t)T_x x + sen(2t)T_x y + sen^2(t)T_y y).
\end{aligned}$$

Al evaluar en $t = 0$ tenemos que

$$0 = \frac{d\alpha}{dt}(0) = 2g(T_x y, T_x x)$$

que prueba una parte del lema. Además si $u = \dfrac{x + Jx}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}
f(u) &= \left|\left|\alpha\left(\frac{x+Jx}{\sqrt{2}}, \frac{x+Jx}{\sqrt{2}}\right)\right|\right|^2 \\
&= g\left(\alpha\left(\frac{x+Jx}{\sqrt{2}}, \frac{x+Jx}{\sqrt{2}}\right), \alpha\left(\frac{x+Jx}{\sqrt{2}}, \frac{x+Jx}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto f alcanza su máximo en u además $g(u,y) = g(Ju,y) = 0$ por lo que con procedimiento análogo tenemos que

$$\begin{aligned}
0 = g(\alpha(u,u), \alpha(u,y)) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g(\alpha(x,Jx), \alpha(x,y)) + g(\alpha(x,Jx), \alpha(Jx,y))\right) && (4.1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g(\alpha(x,Jx), \alpha(x,y)) + g(J\alpha(x,x), J\alpha(x,y))\right) && (4.2) \\
&= g(\alpha(x,Jx), \alpha(x,y)), && (4.3)
\end{aligned}$$

es decir, $\alpha(x,y)$ es ortogonal a $\alpha(x,x)$ y $\alpha(x,Jx)$. De forma similar $\alpha(x,Jy)$ es ortogonal a $\alpha(x,x)$ y $\alpha(x,Jx)$. □

Teorema 4.1.2. *La variedad casi Hermítica* (S^6, J, g) *no contiene subvariedades casi complejas de dimensión cuatro.*

Demostración. Supongamos que M es una subvariedad casi compleja de dimensión 4 en S^6. Si existen $p \in M$, $x \in T_p^1(M)$ tal que $\alpha(x,x) \neq 0$ y x sea un máximo de la función $f(x) = ||\alpha(x,x)||^2$, entonces del Corolario 1.2.3 $\alpha(x, Jx) = J\alpha(x,x) \neq 0$ por lo que $\alpha(x,x)$ y $\alpha(x, Jx)$ forman una base ortogonal para $T_pM^{\perp}$. Para cada $y \in T_p^1(M)$ tal que $g(x,y) = 0$ y $g(Jx, y) = 0$ por el Lema 4.1.1 $\alpha(x,y)$ y $\alpha(x, Jy)$ son ortogonales a $\alpha(x,x)$ y $\alpha(x, Jx)$ por lo que la única opción para $T_xy, T_xJy \in T_pM^{\perp}$ es que sean el vector cero.

Sea $\overline{K}$ la curvatura seccional constante del operador $\overline{R}$ de S^6. Entonces si $||y|| = 1$ observamos del Corolario 1.1.11 y de la Proposición 1.1.8 que

$$\begin{aligned}
\overline{K} = g(R_{xy}x, y) - 0 &= g(R_{xy}x, y) - g(R_{xy}Jx, Jy) \\
&= \left|\left|(\overline{\nabla}_x J)y\right|\right|^2 \\
&= \left|\left|(\nabla_x J)y + T_xJy - JT_xy\right|\right|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, para todo $p \in M$ y cada $x \in T_pM$, $\alpha(x,x) = 0$. En otras palabras M es totalmente geodésica en S^6, por lo que debe ser una subvariedad abierta de la 4-esfera con curvatura constante $\overline{K}$. Por tanto de nuevo del Corolario 1.1.11

$$0 = ||(\bigtriangledown_x J)y||^2 = \langle R_{xy}x, y\rangle - \langle R_{xy}J(x), J(y)\rangle = \overline{K}.$$

Lo que es otra contradicción. Por lo tanto dicha subvariedad no existe. $\square$

4.2. Subvariedad totalmente reales de S^6

Las posibles subvariedades totalmente reales de S^6 son de dimensión uno, dos o tres. Como vimos en el Capítulo 1 toda curva, es decir, toda subvariedad de dimensión uno es totalmente real. En ésta sección nos encargamos de estudiar a las subvariedades totalmente reales de dimensión tres. Recordemos que en el Capítulo 1 se definió el tensor G (Definición 5). En el siguiente lema se da de manera explicita la forma de su derivada covariante.

Lema 4.2.1. *Para cada* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S^6, J, g)$

$$(\overline{\nabla}_X G)(Y,Z) = g(Y,JZ)X + g(X,Z)JY - g(X,Y)JZ.$$

Demostración. Calculemos primero $G(X,Y)$, entonces al considerar $\overline{\nabla} = P(D)$ donde D es la conexión de Levi-Civita de E^7

$$\begin{aligned} G(X,Y) = \overline{\nabla}_X JY - J\overline{\nabla}_X Y &= P(D_X JY) - J\overline{\nabla}_X Y \\ &= P(D_X(N \times Y)) - J\overline{\nabla}_X Y \\ &= P(D_X N \times Y + N \times D_X Y) - J\overline{\nabla}_X Y \\ &= P(X \times Y) + P(N \times (\overline{\nabla}_X Y + \alpha(X,Y))) - J\overline{\nabla}_X Y \\ &= P(X \times Y) + P(N \times g(D_X Y, N)N) \\ &= P(X \times Y) \\ &= X \times Y - g(X \times Y, N)N. \end{aligned}$$

Calculamos ahora cada término de $(\overline{\nabla}_X G)(Y,Z) = \overline{\nabla}_X G(Y,Z) - G(\overline{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \overline{\nabla}_X Z)$ por separado

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X G(Y,Z) &= \overline{\nabla}_X (Y \times Z - g(Y \times Z, N)N) \\ &= PD_X(Y \times Z) - PD_X(g(Y \times Z, N)N) \\ &= P(D_X Y \times Z) + P(Y \times D_X Z) - PD_X(g(Y \times Z, N)N) \\ &= D_X Y \times Z - g(D_X Y \times Z, N)N + Y \times D_X Z - g(Y \times D_X Z, N)N \\ &- D_X(g(Y \times Z, N)N) + g(D_X(g(Y \times Z, N)N), N)N. \end{aligned}$$

Ahora calculamos los últimos dos términos de la igualdad anterior

$$\begin{aligned} -D_X(g(Y \times Z, N)N) &= -g(Y \times Z, N)D_X N - Xg(Y \times Z, N)N \\ &= -g(Y \times Z, N)X - g(D_X Y \times Z, N)N - g(Y \times D_X Z, N)N \\ &- g(Y \times Z, D_X N)N \\ &= -g(Y \times Z, N)X - g(D_X Y \times Z, N)N - g(Y \times D_X Z, N)N \\ &- g(Y \times Z, X)N. \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
g(D_X(g(Y\times Z,N)N),N)N &= g(g(Y\times Z,N)X,N)N + g(g(D_XY\times Z,N)N,N)N\\
&+ g(g(Y\times D_XZ,N)N,N)N + g(g(Y\times Z,X)N,N)N\\
&= g(D_XY\times Z,N)N + g(Y\times D_XZ,N)N + g(Y\times Z,X)N.
\end{aligned}$$

por lo que al sustituir tenemos y ya que $-g(Y\times Z,N)=g(Y,JZ)$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_XG(Y,Z) &= D_XY\times Z - g(D_XY\times Z,N)N + Y\times D_XZ - g(Y\times D_XZ,N)N\\
&- g(Y\times Z,N)X\\
&= D_XY\times Z - g(D_XY\times Z,N)N + Y\times D_XZ - g(Y\times D_XZ,N)N\\
&+ g(Y,JZ)X.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
-G(\overline{\nabla}_XY,Z) &= \overline{\nabla}_XY\times Z - g(\overline{\nabla}_XY\times Z,N)N\\
&= PD_XY\times Z - g(PD_XY\times Z,N)N.
\end{aligned}$$

En donde

$$\begin{aligned}
PD_XY\times Z &= D_XY\times Z - g(D_XY,N)N\times Z\\
&= D_XY\times Z - Xg(Y,N)N\times Z + g(Y,D_XN)N\times Z\\
&= D_XY\times Z + g(Y,X)JZ
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
g(PD_XY\times Z,N)N &= g(D_XY\times Z,N)N + g(g(Y,X)JZ,N)N\\
&= g(D_XY\times Z,N)N.
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que

$$G(\overline{\nabla}_XY,Z) = D_XY\times Z + g(Y,X)JZ - g(D_XY\times Z,N)N$$

y análogamente

$$G(Y,\overline{\nabla}_XZ) = Y\times D_XZ - g(Z,X)JY - g(Y\times D_XZ,N)N.$$

Finalmente al realizar las sumas correspondientes obtenemos el resultado. $\square$

Lema 4.2.2. *Sean M una subvariedad totalmente real de (S^6, J, g) y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces*

$$\nabla^{\perp}_X JY = G(X,Y) + J(\nabla_X Y)$$

$$A_{JX}Y = -J\alpha(X,Y).$$

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$\begin{aligned} G(X,Y) &= \overline{\nabla}_X JY - J\overline{\nabla}_X Y \\ &= -A_{JY} + \nabla^{\perp}_X JY - J\nabla_X Y - J\alpha(X,Y). \end{aligned}$$

Comparando partes normales y tangentes se sigue el Lema. □

Lema 4.2.3. *Sean M una subvariedad totalmente real de (S^6, J, g) y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos ortonormales entonces*

$$g(X,Y) = X \times Y.$$

Demostración. En el Lema 4.2.1 calculamos

$$G(X,Y) = X \times Y - g(X \times Y, N)N.$$

Con lo cual es suficiente probar $g(X \times Y, N) = 0$. De las ecuaciones 3.1 y 3.2

$$\begin{aligned} g(X \times Y, N) &= -\frac{1}{2}\left((X \times Y) * N + N * (X \times Y)\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left((X * Y - Y * X) * N\right) - \frac{1}{4}\left(N * (X * Y - Y * X)\right). \end{aligned}$$

Luego como $-\frac{1}{2}(X * Y + Y * X) = g(X,Y) = 0$, entonces, $X * Y = -Y * X$ y

$$g(X \times Y, N) = -\frac{1}{4}\left((X * Y + X * Y) * N\right) - \frac{1}{4}\left(N * (X * Y + X * Y)\right) = 0.$$

□

Estamos listos para probar uno de los resultados principales de ésta sección.

Teorema 4.2.4. *Una subvariedad M totalmente real en (S^6, J, g) de dimensión tres es orientable y mínima.*

Demostración. En el Lema 4.2.3 se calculó

$$G(X,Y) = X \times Y.$$

Además en la Proposición 1.3.1 se probó que $G(X,Y)$ es normal a M. Ahora probaremos que $JG(X,Y)$ es normal a X y Y.

$$\begin{aligned} g(JG(X,Y),X) &= g(G(X,JY),X) \\ &= g(JY,G(X,X)) = 0. \end{aligned}$$

De manera análoga $g(JG(X,Y),Y) = 0$. Así podemos definir un producto cruz en TM como $JG(X,Y)$ para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ por lo tanto M es orientable.

Para probar que M es una subvariedad mínima probaremos que $tr(\alpha) = 0$. Como consecuencia del Lema 4.2.2 tenemos que para cada $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_X G)(Y,Z) &= \overline{\nabla}_X G(Y,Z) - G(\overline{\nabla}_X Y,Z) - G(Y,\overline{\nabla}_X Z) \\ &= -A_{G(Y,Z)}X - \nabla^{\perp}_X J(JG(Y,Z)) - G(\overline{\nabla}_X Y,Z) - G(Y,\overline{\nabla}_X Z) \\ &= J\alpha(JG(Y,Z),X) - G(X,JG(Y,Z)) - J\nabla_X JG(X,Y) \\ &- G(\overline{\nabla}_X Y,Z) - G(Y,\overline{\nabla}_X Z) \\ &= J\alpha(JG(Y,Z),X) + JG(X,G(Y,Z)) - J(\nabla_X JG)(Y,Z) \\ &\quad +G(\alpha(X,Y),Z) + G(Y,\alpha(X,Z)). \end{aligned}$$

Despejando a $(\nabla_X JG)(Y,Z)$ y utilizando el Lema 4.2.1 tenemos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X JG)(Y,Z) &= g(X,Y)Z - g(X,Z)Y + G(X,G(Y,Z)) + \alpha(JG(Y,Z),X) \\ &\quad +JG(\alpha(X,Y),Z) + JG(Y,\alpha(X,Z)) \end{aligned}$$

y la parte normal de esta expresión es

$$\alpha(JG(Y,Z),X) + JG(\alpha(X,Y),Z) + JG(Y,\alpha(X,Z)) = 0.$$

Al tener ya definido un producto vectorial podemos elegir una base e_1, e_2, e_3 de $\mathfrak{X}(M)$ tal que $JG(e_1,e_2) = e_3$, $JG(e_2,e_3) = e_1$ y $JG(e_3,e_1) = e_2$. Para terminar la demostración sustituimos estos valores en la igualdad anterior,

$$\alpha(e_1, JG(e_2,e_3)) + JG(\alpha(e_1,e_2),e_3) + JG(e_2,\alpha(e_1,e_3)) = 0$$

$$\alpha(e_2, JG(e_3, e_1)) + JG(\alpha(e_2, e_3), e_1) + JG(e_3, \alpha(e_2, e_1)) = 0$$

$$\alpha(e_3, JG(e_1, e_2)) + JG(\alpha(e_3, e_1), e_2) + JG(e_1, \alpha(e_3, e_2)) = 0.$$

Al sumar las tres igualdades tenemos, en efecto

$$0 = \alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_2) + \alpha(e_3, e_3).$$

□

Lema 4.2.5. *Sean M una subvariedad totalmente real de (S^6, J, g) de dimensión tres, $T_p^1(M) = \{x \in T_pM : ||x|| = 1\}$ y $f : T_p^1(M) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = g(T_x x, J(x))$. Si $x \in T_p^1(M)$ es un máximo de f, entonces $\alpha(x, x)$ es un múltiplo de $J(x)$.*

Demostración. Sean $y \in T_p^1(M)$ ortogonal a x y $g : \mathbb{R} \to T_p^1$ definida como

$$g(t) = cos(t)x + sen(t)y$$

entonces

$$\frac{d(f \circ g)}{dt}(0) = 0$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ g)}{dt}(0) &= g(T_x y, J(x)) + g(T_x x, J(y)) \\ &= -g(y, T_x J(x)) + g(T_x x, J(y)) \\ &= -g(y, JT_x x) + g(T_x x, J(y)) \\ &= 2g(T_x x, J(y)) = 0. \end{aligned}$$

En otras palabras $T_x x$ es ortogonal a $J(y)$ para cada $y \in T_p^1$ ortogonal a x, de donde $T_x x$ es un múltiplo de $J(x)$. □

Lema 4.2.6. *Sea M una subvariedad en un espacio forma (N, g) con curvatura constante c. Si M es mínima, orientada y tiene curvatura constante c, entonces M es una variedad totalmente geodésica.*

Demostración. Del hecho de que M tiene curvatura constante la ecuación de Gauss 1.3 se reduce a

$$g(\alpha(X, Z), \alpha(Y, W)) = g(\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)).$$

Elegimos una base ortonormal $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ para $X_i = X = W$ y para cualquier $X_j = Z = Y$; la ecuación de Gauss toma la forma

$$||\alpha(X_i, X_j)||^2 = g(\alpha(X_i, X_j), \alpha(X_j, X_i)) = g(\alpha(X_i, X_i), \alpha(X_j, X_j)).$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{n} ||\alpha(X_i, X_j)||^2 = \sum_{j=1}^{n} g(\alpha(X_i, X_i), \alpha(X_j, X_j)) = g(\alpha(X_i, X_i), \sum_{j=1}^{n} \alpha(X_j, X_j)) = 0.$$

Se sigue entonces que $\alpha(X_i, X_j) = 0$ para cualesquiera campos en la base, por lo tanto M es totalmente geodésica. $\square$

Teorema 4.2.7. *Si M es una subvariedad totalmente real de (S^6, J, g) de dimensión tres, métrica g y curvatura constante c, entonces $c = 1$, es decir, M es totalmente geodésica o $c = \frac{1}{16}$.*

Demostración. Si $c = 1$ entonces por el Lema 4.2.6 M es totalmente geodésica, por lo que podemos suponer que $c < 1$. Consideramos la función $f(x) = g(\alpha(x, x), J(x))$ en $T_p^1 M = \{x \in T_p M : ||x|| = 1\}$ y $x \in T_p^1 M$ un máximo de la función, entonces por el Lema 4.2.5 $\alpha(x, x)$ es un múltiplo de $J(x)$. Supongamos por el momento que f es constante; como M es mínima en S^6 entonces para cualquier base ortonormal $x, y, z \in T_p^1 M$ $\alpha(x, x) + \alpha(y, y) + \alpha(z, z) = 0$ o equivalentemente

$$\begin{aligned}
0 &= g(\alpha(x,x) + \alpha(y,y) + \alpha(z,z), J(x) + J(y) + J(z)) \\
&= g(\alpha(x,x), J(x)) + g(\alpha(y,y), J(y)) + g(\alpha(z,z), J(z)) \\
&+ g(\alpha(x,x), J(y)) + g(\alpha(x,x), J(z)) + g(\alpha(y,y), J(x)) \\
&+ g(\alpha(y,y), J(z)) + g(\alpha(z,z), J(x)) + g(\alpha(z,z), J(y)) \\
&= g(\alpha(x,x), J(x)) + g(\alpha(y,y), J(y)) + g(\alpha(z,z), J(z)) \\
&= 3g(\alpha(x,x), J(x)).
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad es válida ya que $x, y, z \in T_p^1 M$ son máximos de la función, entonces $f \equiv 0$, es decir, $\alpha(x, x) = 0$ para todo $x \in T_p^1 M$ lo cual quiere decir que M es totalmente geodésica lo que no es posible ya que $c < 1$, f no es constante.

Sea $e_1 \in \mathfrak{X}(M)$ definido como el máximo de la función f en cada punto $p \in M$, elegimos dos campos vectoriales $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que el conjunto $\{e_1, X, Y\}$ forma una base ortonormal en cada punto. Utilizando el Lema 4.2.5 obtenemos

$$\alpha(e_1, e_1) = \lambda_1 J(e_1)$$

$$\alpha(Y, e_1) = \lambda_2 JY + \lambda JZ$$

$$\alpha(Z, e_1) = \lambda JY + \lambda_3 JZ$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= g(\alpha(Y, e_1), JY) \\ &= g(A_{JY} Y, e_1) \\ &= -g(J\alpha(Y, Y), e_1) \\ &= g(\alpha(Y, Y), J(e_1)). \end{aligned}$$

De manera similar $\lambda_3 = g(\alpha(Z, Z), J(e_1))$. Así $\lambda_1 = g(\alpha(e_1, e_1), J(e_1))$.
Por último tenemos

$$\begin{aligned} \lambda &= g(\alpha(Y, e_1), JZ) \\ &= g(e_1, A_{JZ} Y) \\ &= -g(e_1, J\alpha(Z, Y)) \\ &= g(e_1, A_{JY} Z) \\ &= g(\alpha(Z, e_1), JY). \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación de Gauss $X = Z = e_1$ y $Y = W$ obtenemos

$$(1 - c) - \lambda^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2 = 0.$$

Y con la sustitución $X = Z = e_1$ y $Y = W = Z$

$$(1 - c) - \lambda^2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_3^2 = 0.$$

Al igualar las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3) = \lambda_3^2 - \lambda_2^2 = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3).$$

Si suponemos que $\lambda_2 \neq \lambda_3$ se sigue que

$$\lambda_1 = \lambda_3 + \lambda_2$$

y además como M es mínima $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ o equivalentemente $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3)$, es decir, $\lambda_1 = 0$ lo cual es una contradicción ya que $\lambda_1 = f(e_1) > 0$. Entonces $\lambda_2 = \lambda_3$, en otras palabras

$$g(Y, A_{J(e_1)}Y) = \lambda_2 = \lambda_3 = g(Z, A_{J(e_1)}Z).$$

Como esto es válido para cualquier Y, Z normal al campo e_1, cualquier vector normal a e_1 es un eigenvector del operador $A_{J(e_1)}$.

Elijamos ahora una base para la obtención de la curvatura de M. Consideremos $e_1^{\perp} \cap T_p^1 M$. Sea e_2 el máximo de la función f restringida a $e_1^{\perp} \cap T_p^1 M$. De manera análoga a como se hizo anteriormente obtenemos que $f(e_2) \neq 0$ y $\alpha(e_2, e_2)$ es un multiplo de $J(e_2)$.
Por último elegimos $e_3 \in T_p^1 M$ de manera que se completa una base ortonormal con la condición de que $e_1 \times e_2 = Je_3$ (esto tomará un papel importante al final de la demostración).
Como e_1, e_2 y e_3 son eigenvectores de $A_{J(e_1)}$ se tiene

$$\alpha(e_1, e_1) = \lambda_1 J(e_1)$$

$$\alpha(e_2, e_1) = \lambda_2 J(e_2)$$

$$\alpha(e_3, e_1) = \lambda_3 J(e_3).$$

De la elección de e_2 y por el Lema 4.2.5

$$g(\alpha(e_2, e_2), J(e_3)) = g(\alpha(e_3, e_2), J(e_2)) = 0.$$

Una observación pertinente en este momento es que calculamos que

$$\alpha(e_1, e_1) = \lambda_1 J(e_1)$$

$$\alpha(e_2, e_2) = \lambda_2 J(e_1) + g(\alpha(e_2, e_2), J(e_2))J(e_2)$$

y

$$\alpha(e_3, e_3) = \lambda_3 J(e_1) + g(\alpha(e_3, e_3), J(e_2))J(e_2) + g(\alpha(e_3, e_3), J(e_3))J(e_3).$$

Del hecho que M es mínima y por las tres igualdades encontradas arriba tenemos

$$g(\alpha(e_2, e_2), J(e_2)) = -g(\alpha(e_3, e_3), J(e_2)) = \beta$$

$$g(\alpha(e_3, e_3), J(e_3)) = 0$$

y también

$$g(\alpha(e_2, e_3), J(e_3)) = \beta$$

teniendo las siguientes igualdades

$$\alpha(e_1, e_1) = \lambda_1 J(e_1)$$

$$\alpha(e_1, e_2) = \lambda_2 J(e_2)$$

$$\alpha(e_1, e_3) = \lambda_3 J(e_3)$$

$$\alpha(e_2, e_2) = \lambda_2 J(e_1) + \beta J(e_2)$$

$$\alpha(e_2, e_3) = \beta J(e_3)$$

$$\alpha(e_3, e_3) = \lambda_3 J(e_1) - \beta J(e_2).$$

Así que solo basta determinar los coeficientes λ_1, $\lambda_2 = \lambda_3$ y β. Para encontrar los primeros tres coeficientes resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones ya encontradas anteriormente y que pondremos a continuación

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$1 - c + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 = 0$$

$$1 - c + \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2^3 = 0$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 2\sqrt{\dfrac{1-c}{3}}$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -\sqrt{\dfrac{1-c}{3}}$. Ahora para encontrar β sustituimos en la ecuación de Gauss a $X = W = e_2$ y $Y = Z = e_3$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= -(1-c) + g(\alpha(e_2, e_3), \alpha(e_3, e_2)) - g(\alpha(e_2, e_2), \alpha(e_3, e_3)) \\ &= -(1-c) + \beta^2 - \lambda_2^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

es decir, $\beta = \sqrt{\frac{2(1-c)}{3}}$.

Resumiendo, la segunda forma fundamental está dada por

$$\alpha(e_1, e_1) = 2\sqrt{\frac{1-c}{3}}J(e_1)$$

$$\alpha(e_1, e_2) = -\sqrt{\frac{1-c}{3}}J(e_2)$$

$$\alpha(e_1, e_3) = -\sqrt{\frac{1-c}{3}}J(e_3)$$
$$\alpha(e_2, e_2) = -\sqrt{\frac{1-c}{3}}J(e_1) + \sqrt{\frac{2(1-c)}{3}}J(e_2)$$
$$\alpha(e_2, e_3) = \sqrt{\frac{2(1-c)}{3}}J(e_3)$$
$$\alpha(e_3, e_3) = -\sqrt{\frac{1-c}{3}}J(e_1) - \sqrt{\frac{2(1-c)}{3}}J(e_2).$$

El propósito es conocer la conexión ∇ de M. Introducimos una nueva notación para reducir las operaciones que se elaborarán. Hacemos

$$a_{ij}^k = g(\nabla_{e_i}e_j, e_k)$$

con lo cual

$$\nabla_{e_i}e_j = a_{ij}^1 e_1 + a_{ij}^2 e_2 + a_{ij}^3 e_3.$$

Como $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal en M y por la compatibilidad de la métrica de ∇

$$a_{ij}^k = -a_{ik}^j$$

y como consecuencia, $a_{ij}^j = 0$.

Por otro lado del Lema 4.2.2 y ya que S^6 es nearly Kaehler

$$\nabla_X^\perp JX = J\nabla_X X.$$

Como antes hacemos

$$b_{ij}^k = g(\nabla_{e_i}^\perp Je_j, Je_k)$$

y por lo tanto

$$b_{ij}^i = -a_{ii}^j.$$

Con ésta notación podemos escribir la conexión de Levi-Civita de M como se muestra en el Cuadro 4.2.

Luego al desarrollar $(\nabla_{e_i}\alpha)(e_j, e_k) = \nabla_{e_i}^\perp \alpha(e_j, e_k) - \alpha(\nabla_{e_i}e_j, e_k) - \alpha(e_j, \nabla_{e_i}e_k)$ tenemos la siguiente forma general

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i}\alpha)(e_j, e_k) &= \nabla_{e_i}^\perp \alpha(e_j, e_k) - a_{ij}^1\alpha(e_1, e_k) - a_{ij}^2\alpha(e_2, e_k) - a_{ij}^3\alpha(e_3, e_k) \\ &\quad - a_{ik}^1\alpha(e_1, e_j) - a_{ik}^2\alpha(e_2, e_j) - a_{ik}^3\alpha(e_3, e_j).\end{aligned}$$

$\nabla_{e_1}e_1 = a_{11}^2 e_2 + a_{11}^3 e_3$	$\nabla_{e_2}e_2 = a_{22}^1 e_1 + a_{22}^3 e_3$	$\nabla_{e_3}e_3 = a_{33}^1 e_1 + a_{33}^2 e_2$
$\nabla_{e_1}e_2 = a_{12}^1 e_1 + a_{12}^3 e_3$	$\nabla_{e_2}e_1 = a_{21}^2 e_2 + a_{21}^3 e_3$	$\nabla_{e_3}e_1 = a_{31}^2 e_2 + a_{31}^3 e_3$
$\nabla_{e_1}e_3 = a_{13}^1 e_1 + a_{13}^2 e_2$	$\nabla_{e_2}e_3 = a_{23}^1 e_1 + a_{23}^2 e_2$	$\nabla_{e_3}e_2 = a_{32}^1 e_1 + a_{32}^3 e_3$

Cuadro 4.1: $\nabla_{e_i}e_j$ descompuesta en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

$\nabla_{e_1}^{\perp}Je_1 = a_{11}^2 Je_2 + a_{11}^3 Je_3$	$\nabla_{e_2}^{\perp}Je_2 = a_{22}^1 Je_1 + a_{22}^3 Je_3$	$\nabla_{e_3}^{\perp}Je_3 = a_{33}^1 Je_1 + a_{33}^2 Je_2$
$\nabla_{e_1}^{\perp}Je_2 = -a_{11}^2 Je_1 + b_{12}^3 Je_3$	$\nabla_{e_2}^{\perp}Je_1 = -a_{22}^1 Je_2 + b_{21}^3 Je_3$	$\nabla_{e_3}^{\perp}Je_1 = b_{31}^2 Je_2 - a_{33}^1 Je_3$
$\nabla_{e_1}^{\perp}Je_3 = -a_{11}^3 Je_1 + b_{13}^2 Je_2$	$\nabla_{e_2}^{\perp}Je_3 = b_{23}^1 Je_1 - a_{22}^3 Je_2$	$\nabla_{e_3}^{\perp}Je_2 = b_{32}^1 Je_1 - a_{33}^2 Je_3$

Cuadro 4.2: $\nabla_{e_i}e_j$ descompuesta en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

De la ecuación de Codazzi 1.5 tenemos un sistema de ecuaciones que a continuación se recopilan en el Cuadro 4.3.

Al resolver este sistema de ecuaciones obtenemos que $b_{12}^3 = -3a_{12}^3$ y

$$a_{12}^3 = -a_{13}^2 = a_{31}^2 = -a_{32}^1 = a_{23}^1 = -a_{21}^3$$

$$b_{12}^3 = -b_{13}^2 = b_{31}^2 = -b_{32}^1 = b_{23}^1 = -b_{21}^3$$

mientras que todas las variables restantes son cero. Luego otra vez por el Lema 4.2.2 y por el Lema 4.2.3

$$\nabla_{e_1}^{\perp}Je_2 = G(e_1, e_2) + J\nabla_{e_1}e_2$$

es equivalente a la ecuación

$$b_{12}^3 Je_3 = e_1 \times e_2 + a_{12}^3 Je_3.$$

Por lo tanto

$$-4a_{12}^3 Je_3 = e_1 \times e_2,$$

y como $Je_3 = e_1 \times e_2$ pues así fue elegido, $a_{12}^3 = -\dfrac{1}{4}$. Por último al sustituir en el tensor de curvatura seccional

$$\begin{aligned} R(e_2,e_1)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{[e_2,e_1]}e_1 \\ &= -\nabla_{e_1}\left(\frac{1}{4}e_3\right) - \nabla_{\left(\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{e_1}e_2\right)}e_1 \\ &= -\nabla_{e_1}\left(\frac{1}{4}e_3\right) - \nabla_{\left(\frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3\right)}e_1 \\ &= -\frac{1}{16}e_2 - \frac{1}{2}\nabla_{e_3}e_1 \\ &= -\frac{1}{16}e_2 + \frac{1}{8}e_2 \\ &= \frac{1}{16}e_2. \end{aligned}$$

Es decir, M tiene curvatura seccional constante $c = \dfrac{1}{16}$. $\square$

$(\nabla_{e_1}\alpha)(e_1,e_2)=(\nabla_{e_2}\alpha)(e_1,e_1)$	$-a^2_{11}\lambda_2-a^2_{11}\lambda_2-a^1_{12}\lambda_1=0$
	$a^2_{11}\beta=-a^1_{22}\lambda_1-2a^2_{21}\lambda_2$
	$b^3_{12}\lambda_2-a^3_{11}\beta-a^3_{12}\lambda_2=b^3_{21}\lambda_1-2a^3_{21}\lambda_2$
$(\nabla_{e_1}\alpha)(e_1,e_3)=(\nabla_{e_3}\alpha)(e_1,e_1)$	$-a^3_{11}\lambda_2-a^3_{11}\lambda_2-a^1_{13}\lambda_1=0$
	$b^2_{13}\lambda_2-a^3_{11}\beta-a^2_{13}\lambda_2=b^2_{31}\lambda_1-2a^2_{31}\lambda_2$
	$-a^2_{11}\beta=-a^1_{33}\lambda_1-2a^3_{31}\lambda_2$
$(\nabla_{e_2}\alpha)(e_2,e_1)=(\nabla_{e_1}\alpha)(e_2,e_2)$	$a^1_{22}\lambda_2-a^1_{22}\lambda_1-a^2_{21}\lambda_2=a^2_{11}\beta$
	$a^2_{21}\beta=a^2_{11}\lambda_2-2a^1_{12}\lambda_2$
	$a^3_{22}\lambda_2-a^3_{22}\lambda_2-a^3_{21}\beta=a^3_{11}\lambda_2-b^3_{12}\beta-2a^3_{12}\beta$
$(\nabla_{e_2}\alpha)(e_2,e_3)=(\nabla_{e_3}\alpha)(e_2,e_2)$	$b^1_{23}\beta-a^3_{22}\lambda_2-a^2_{23}\lambda_2=-b^1_{32}\beta$
	$-a^3_{22}\beta-a^3_{22}\beta-a^1_{23}\lambda_2+a^2_{23}\beta=b^2_{31}\lambda_2-2a^1_{32}\lambda_2$
	$-a^1_{22}\lambda_2=-a^1_{33}\lambda_2-a^2_{33}\beta-2a^3_{32}\beta$
$(\nabla_{e_3}\alpha)(e_3,e_1)=(\nabla_{e_1}\alpha)(e_3,e_3)$	$a^1_{33}\lambda_2-a^1_{33}\lambda_1-a^3_{32}\lambda_2=-a^2_{11}\beta$
	$a^2_{33}\lambda_2-a^2_{33}\lambda_2-a^3_{32}\beta=a^2_{11}\lambda_2$
	$-a^2_{31}\beta=a^3_{11}\lambda_2+b^3_{12}\beta-2a^1_{13}\lambda_2-2a^2_{13}\beta$
$(\nabla_{e_3}\alpha)(e_3,e_2)=(\nabla_{e_2}\alpha)(e_3,e_3)$	$a^1_{33}\beta-a^1_{33}\lambda_2-a^2_{33}\lambda_2-a^3_{32}\lambda_2=-a^1_{22}\beta$
	$a^2_{33}\beta-a^2_{33}\beta-a^3_{32}\beta=-a^1_{22}\lambda_2$
	$-a^2_{13}\lambda_2=b^3_{21}\lambda_2+a^3_{22}\beta-2a^1_{23}\lambda_2-2a^2_{23}\beta$
$(\nabla_{e_1}\alpha)(e_2,e_3)=(\nabla_{e_2}\alpha)(e_1,e_3)$	$-a^3_{11}\beta-a^3_{12}\lambda_2-a^2_{13}\lambda_2=b^1_{23}\lambda_2-a^1_{23}\lambda_1-a^3_{21}\lambda_2$
	$b^2_{13}\beta-a^3_{12}\beta-a^1_{13}\lambda_2+a^2_{13}\beta=-a^3_{22}\lambda_2-a^2_{23}\lambda_2-a^3_{21}\beta$
	$a^1_{12}\lambda_2=a^2_{21}\lambda_2$
$(\nabla_{e_2}\alpha)(e_1,e_3)=(\nabla_{e_3}\alpha)(e_2,e_1)$	$b^1_{23}\lambda_2-a^1_{23}\lambda_1-a^3_{21}\lambda_2=b^1_{32}\lambda_2-a^1_{32}\lambda_1-a^2_{31}\lambda_2$
	$-a^3_{22}\lambda_2-a^2_{23}\lambda_2-a^3_{21}\beta=a^2_{31}\beta$
	$a^2_{21}\lambda_2=-a^2_{33}\lambda_2-a^3_{32}\lambda_2-a^3_{31}\beta$

Cuadro 4.3: Sistema de ecuaciones.

Bibliografía

[1] A. Benjacu, *CR submanifolds of a Kaehler manifold. I*, Proc. Amer. Math. Soc., 69 (1978), no. 1, 135-142.

[2] M. doCarmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, 1992.

[3] N. Ejiri, *Totally real submanifolds in a 6-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc., 83 (1981), no 4, 759-763.

[4] T. Fukami, S. Ishihara, *Almost Hermitian structure on* S^6, Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 7(3),(1955), 151-156.

[5] A. Gray, *Almost complex submanifolds of the six sphere*, Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1969), 277-279.

[6] S. R. Simanca,*Canonical Metrics on Compact almost Complex Manifolds*, IMPA, (2004).

[7] A. Moroianu, *Lectures on Kaehler geometry*, London Mathematical Society Student Texts, 69. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[8] C. Rey, *Variedades aproximadamente Kaehler*, Tesis, Cordoba, 2013.

[9] B. Y. Chen, F. Dillen, L. Vranken, *Characterizing a class of totally real submanifolds of* S^6 *(1) by their sectional curvatures*, Tohoku Math. J., 47 (1995) 185-198.

[10] . Y. Chen, *CR-submanifolds of a Kaehler manifod. I*, J. Differential Geometry, 16 (1981), 305-322.

[11] C. Rey, *Variedades aproximadamente Kaehler*, Tesis, Córdoba, 2013.

[12] K. Yano, *On a structure defined by a tensor field f of type (1 ,1) satisfying* $f^3 + f = 0$, Tensor 14 (1963), 9-109.M R 28 No. 2513.