UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA Y LÍMITES INVERSOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

LEONEL RITO RODRIGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO

2016

Ciudad Universitaria, CDMX

Hojas de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno
   Rito
   Rodriguez
   Leonel
   5540618215
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   409066085
2. Datos del Tutor
   Dr.
   Jorge Marcos
   Martínez
   Montejano
3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Héctor
   Méndez
   Lango
4. Datos del sinodal 2
   Dra.
   Belén
   Espinosa
   Lucio
5. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Marco Antonio
   Montes de Oca
   Balderas
6. Datos del sinodal 4
   M. en C.
   Artico
   Ramírez
   Urrutia
7. Datos del trabajo escrito
   Dinámica y Límites Inversos
   95 p
   2016

Agradecimientos

Que alegría haber terminando la tesis, para mi es un logro muy grande, me ha costado mucho llegar a este momento.

En general a muchos nos cuesta estudiar y terminar una carrera, en particular a nosotros los indígenas. La razones son muchas, empezando por la pobreza, la falta de información, la falta de motivación, la cultura en la que vivimos, etc.

Que el haber yo hecho una carrera, alguien que le ha costado bastante, sea de motivación para que otros se animen a seguir estudiando. ¡Sí se puede!

Toda mi familia sabe que nunca quise estudiar, quería tener una vida tranquila de campesino como mi padre. Gracias a Dios y a muchísima gente he estudiado una carrera y terminado una tesis.

Al primero que agradezco es a Dios

Siempre me has cuidado a donde quiera que voy, a pesar de que he andado mucho, no me ha pasado nada malo, al contrario, has puesto a mucha gente buena que me ha ayudado a seguir adelante.

Las personas más importantes en mi vida, mis padres

Que a pesar de ya haber tenido varios hijos me tuvieron, fui el último. Su ejemplo de vida ha sido la principal motivación que ha hecho que yo trate de mejorar cada día. Ustedes son las personas que más admiro.

Mi mamá, Antonia Rodriguez. Gracias mamá por hacer totopos, vender naranjas, mandarinas y flores de gardenia, nunca nos ha faltado el dinero. Tu historia de vida, tu sabiduría, las fuerzas con las que trabajas y el amor que tienes por todos nosotros me han inspirado para poder terminar esta tesis.

Mi papá, Faustino Rito. Gracias papá por sembrar maíz y traernos leña a casa, nunca nos ha faltado la tortilla. Espero que donde quiera que te encuentres estés muy contento porque he hecho una carrera. Nunca quisiste que te acompañaramos al campo, querías que nos quedáramos a estudiar. Gracias por confiar en nosotros.

A la otra parte de mi familia la tía, mis hermanas, hermanos y demás familiares.

La tía Elisa. La famosa tía, muchos la conocen como la tía. Gracias tía, pues a pesar de no ser una tía de sangre, nos quieres como una madre. Confías en nosotros, te preocupas

por nosotros y por mi mamá, nos ayudas, nos preparas ricas comidas, nos acompañas a comprar ropa, nos invitas a comer y varias cosas más.

También nos has dado la libertad de ir a estudiar donde queramos. Gracias por comprendernos. Sin tu ayuda ser nos habría sido difícil hacer una carrera.

En especial te agradezco por haberme dejado llevar a varios de mis amigos a hospedarse en tu casa, gracias a eso varios de ellos han seguido estudiando una carrera, algunos en la UNAM y otros en otras universidades. El ir a conocer la UNAM les ha servido de motivación para empezar una carrera.

Miguel y Olegario. Los hermanos mayores, quienes de muy chicos salieron a trabajar a las grandes ciudades. Gracias por sacrificarse para que nosotros siguiéramos estudiando. La valentía que tuvieron de haberse salido del pueblo, me ha animado a viajar por varios lugares.

Alberto. Tu esfuerzo y empeño que le dedicabas a la escuela me han motivado mucho para que yo también le eche ganas a la escuela.

Gracias por haber vendio a estudiar a México, nos jalaste a todos. Gracias a eso hemos estudiado una carrera.

Has tenido un trabajo muy pesado. Has sacado a la familia de muchos apuros, en especial nos ayudaste mucho cuando papá se enfermo.

Salomé. Durante el tiempo que pasaste en el D.F. simpre nos cuidaste, nos diste de comer y viste por nosotros. Has hecho todo lo posible porque nuestra familia salga adelante. Aún cuando ya no estamos viviendo juntos, nos sigues ayudando.

El que hayas ido a trabajar a CONAFE para poder estudiar tu prepa y las experiencias que tuvieste en esos pueblitos, me animaron para que yo hiciera mi servicio social en la sierra norte de Puebla, experiencia que ha sido muy enriquecedora para mi formación personal. Te agradezco enormemente que me hayas inscrito en la UNAM, ha sido lo mejor que me han dado.

Jesus. Abandonaste tus estudios en el D.F. para ir a cuidar a papá cuando estaba enfermo, te echaste la carga encima, gracias a eso nosotros seguíamos estudiando tranquilamente. Admiro que después te hayas animado a empezar una nueva carrera. Estoy muy contento que ya vas acabarla.

Me has echo ver que la vida allá afuera es muy difícil y me has enseñado a no ser tan rígido con los demás, gracias por tus consejos y por el amor que le tienes a la familia. También te agradezco el que me hayas inscrito en el CBTis No.31, fue un paso importante para que continuara la universidad.

Dalid. La hermana más cercana que tengo, no sólo por la edad, también porque igual que yo, estudias matemáticas, gracias por acercarme a este mundo maravillos de las matemáticas.

Eres la persona con la que he convivido más, eres la que une a la familia, eres el medio por el cual nos enteramos de lo que pasa con los demás. Gracias por aguantarme todo este tiempo, a pesar de que tengo unas ideas bastante raras, me respetas y hemos podido vivir juntos. Gracias por entenderme y escucharme. Especialmente te agradezco por hacerme correcciones en estos agradecimientos. En general me has ayudado bastante.

José Juan. Aunque no eres mi hermano de sangre te quiero como a un hermano. Has convivido mucho conmigo y con mi familia, hemos pasado momentos buenos y malos. Nos conocimos desde el CBTis y hasta ahora nos seguimos llevando bien.

Me has ayudado mucho para que terminara la carrera. Recuerdo que alguna vez me ayudaste a estudiar para pasar mi examen final de Conjuntos y Lógica. Me invitaste a hacer un semestre sabático aquí en Cuernavaca para que pudiera terminar de escribir mi tesis, estoy muy contento en Cuerna, se estudia bastante bien. Ahora tengo un cubículo en el IMATE de Cuerna, y estoy escribiendo mis agradecimientos. Gracias por haberme enseñado a usar latex e instalado ubuntu en mi computadora, eres un muy buen amigo.

Te admiro mucho, estoy muy contento de que hayas llegado tan lejos. El amor que le dedicas a las matématicas es admirable.

Agradezco a *mi abuelo Braulio, mi tía Oralia, mi tío Tomas, mi tío Candido y a todos mis primos.*

A los hermanos de la Tía Elisa. *El ingeniero Mario, el tío David y la tía Maria Luisa.*

Mis familiares que ahora no están con nosotros pero que han dejado huella. *Mi padre Faustino, mi abuelita Macedonia, mi abuelita Teresa, mi tía Adelina, mi abuelo Tomas y mi querido tío Froylan*.

A mis otras familias

La familia que tuve en Xaltepec, Huahuchinango Puebla. La familia de *Miguel Jiménez.* Gracias por recibirme en su casa, por dejar que un desconocido entrara a convivir con ustedes, gracias por compartirme un poco de su cultura y su lenga Nahuatl. En especial agradezco a *Faustino Jiménez,* el padre de Miguel, con quien tuve varias pláticas mientras tomabamos café alrededor de la lumbre. Agradezco también a *Arturo, Elisa, Oliverio, Abisaí, Vianey y los demás amigos con los que conviví en esos pueblitos.*

La familia que tuve en Puerto Real, Cádiz España. Al abuelo *Juan* y su esposa *Luisa*, quienes me quisieron como un nieto, me dieron casa y comida. A sus hijas *Paki, Luisita, Toñi y Angelita.* Mujeres extraordinarias que siempre se preocuparon porque no me faltara nada. En Especial agradezco a Paki, con la que conviví más, gracias por esos paseos largos por el bosque mientras platicábamos sobre la vida, gracias porque los fines de semana me invitabas a desayunar a tu casa tostadas y leche, fuiste como una madre para mi. A mi gran amigo *Miguel, esposo de Toñi,* una gran persona, gracias por hacerme reir mucho, por llevarme a pasear por varios pueblos, gracias a ti conocí muchos lugares, por esas fogatas que haciamos juntos y por los paseos en bicicleta, fuiste como un tío para mi. También agradezco a *Mario y a María* con los que alguna vez sembré patatas, gracias por llevarse tan bien conmigo cuando estaba por allá.

La familia con la que vivo acutualmente. Antonia Sánchez, José Juan, Jocesito y mi hermana Dalid, les agradezco la convivencia que hemos tenido. Especialmente agradezco a Jocesito, el niño de José y Antonia, por siempre irnos a visitar al cuarto para alegrarnos el día, es hermoso.

A MIS AMIGOS

Con algunos he corrido en varios lugares, como el jardín botánico, puerta azul, tiro de gracia, bosque de tlalpan, etc., con otros he practicado la vida espiritual, con otros he estudiado matemáticas, otros me han enseñado una parte divertida de la vida que yo no conocía ustedes saben quienes son, con otros...

Para mi es difícil escribir todo lo que hemos pasado juntos , me tardaría bastante. Cada uno de ustedes sabe los buenos momentos que hemos pasado, algunos quizá ya no los he visto, pero todavía los recuerdo y esos recuerdos hacen que me alegre. Todos han sido muy especiales par mi, los quiero mucho.

Erick Iván, Omar Jonatan, Fernando Santana, Eduardo Jacobo, Yael, Pablo, Jorge Moreno, Carlos y Lucio, Yadira de Chiapas, Esteban, Mindy y Germán, Karina Islas y Erick Javier, Jorge Vega, Rodrigo Cepeda, Rubén Jiménez, José de Jesus, Octavio, Héctor Axel, Iván Axel, Juan de Veracruz, Silvia, Leonardo de Chiapas, Jacob Orenday, Luis Huarache, Erick García y Roberto Méndez, Ilce del cubo, Itzel (Chelsee), Rangel, Diana Romero, Alejandro, Prisma, Guadalupe Farfan, Ilce, Lorena, Rolando Jiménez , Carlos López, Aurélien Bauer amigo que conocí en España. Los del IMATE de Cuernavaca Zeinab Toghani, Diana Patricia, Elena, Eliana, Maye, Aremy, Adriana, Anallely, Luis Javier y Pablo mi alumno de cálculo. Los de Alfabetización Leti, Mariana, Lupita, Tonõ, Neto, Marlen y el Efra. Mis amigos corredores Victor, Fernando, Chantal, Chayo y Gris. Los de Sinaloa Nora y Jimmy. Mis amigos del CBTis No.31 Vicky, Coral, Jovany, Cornelio, Citlaly y Viridiana. Mis primos Delfino, Tomasín y Carlos Alexander Rojas.

A MIS PROFESORES

Jorge Marcos. Mi asesor de tesis. A pesar de las muchas actividades que tienes, decidiste dirigirme la tesis, alguien que ni siquiera conocías. Gracias por escucharme cuando exponía y sugerirme algunos caminos cuando no me salían algunas cosas, no sólo eso has hecho por mi, me has dado acceso a tu cubículo, ese cubo me ha sacado de muchos apuros. En particular tu computadora y el escritorio que mandaste a pedir para que escribiera mi tesis me han ayudado mucho.

Héctor Méndez. Mi profe de Cálculo, me has ayudado bastantísimo. Tu sugeriste el tema de tesis que trabajé, un tema muy bonito. También me metiste en esto de las ayudantías, gracias a eso he tenido dinero para moverme. Las ayudantías también me han dado la experiencia de enseñar, cosa que disfruto mucho. Tu forma de dar clases y tu humildad me motivaron mucho para poder terminar la carrera.

Emily Sánchez. Gracias por considerarme ser tu ayudante, por confiar en mi y por las pláticas que hemos tenido. En especial te agradezco por insistirme en pedir la cláusula 69, gracias a esa cláusula pude irme de semestre sábatico a Cuernavaca para terminar mi tesis.

Alejandro Illanes, César Cedillo, Guillermo Grabinsky, Edith Corina y Jóse Alfredo Amor. Los profesores que me contagiaron el gusto por las matématicas.

Carlos Cabrera. Quien me ayudó a tener acceso a las instalaciones del IMATE de Cuernavaca, gracias Carlos por ser tan bueno con nosotros.

José Luis Cisneros. Por haberme dado cubículo, en estos tiempos de frío me ha caído muy bien.

Peter y Gregor. Investigadores que me parecen mágicos por hacer matemáticas.

Héctor Méndez, Ártico, Belén y Marco Antonio. Mis sinodales, que tomaron parte de su tiempo para revisar mi tesis, muchas gracias por la correcciones me han servido mucho para aprender a redactar mejor.

Matías Díaz, Carlos Armenta y Ovando. Mis profesores del CBTis No.31. que me iniciaron en el mundo de la ciencia. En especial agradezco al profesor Matías que me llevó a concursar en Física a la ciudad de Juchitán, también te agradezco por la labor que haces para que más jovenes se interesen en la ciencia.

A las Instituciones que me apoyaron económicamente

Antes que nada agradezco a mi familia, mis padres y hermanos, que siempre me han apoyado económicamente, lo poco o mucho que me ha dado cada uno, me ha sido de mucha ayuda.

Al Sistema de Becas para Estudiantes Indígenas del PUIC. Un programa de la UNAM que ofrece becas a estudiantes indígenas. Ustedes me ayudarón económicamente durante toda la carrera, también me siguieron ayudando un año de tesis. Perdón por no haberla acabado durante un año, se me complicó mucho. Agradezco a mis tutores de la becas que siempre me escucharón y entendían mi situación, en especial agradezco a Sacnité, Will y Evangelina Mendizabal. Gracias por ofrecer esas becas, estas becas ayudarán a que más indígenas, como mi primo Delfino que actualmente la recibe, puedan hacer una carrera. También agradezco especialmente a Gilberto Santos, un amigo de la facultad, que nos dijo que existía esa beca y nos llevó a las oficinas del PUIC para solicitarla, además de eso has sido un buen amigo que siempre se ha preocupado por nosotros.

A la DGECI. Un programa de la UNAM que da becas a estudiantes de licenciatura para que estudien en otros países. Gracias a ustedes pude ir a estudiar a España, tomar clases en la universidad de Cádiz, convivir con una familia española y vivir experiencias extraordinarias que nunca olvidaré. Muchísimas gracias.

Al programa de Alfabetización en Puebla de la DGOSE. Gracias por apoyarme económicamente durante mi servicio social en la sierra norte de Puebla. El ir a esos pueblos

nahuas ha sido para mi una experiencia muy padre. Gracias por haber hecho ese programa, no sólo yo fui beneficiado sino también los asesores locales que trabajaban en ese programa.

A la Clausula 69. Gracias por darme un semestre pagado de ayudante de profesor para que pudiera acabar mi tesis. Gracias a ese apoyo pude irme a Cuernavaca a escribir mi tesis.

A la Comisión de Equidad y Género de la Sociedad Matemática Mexicana en colabaración con el CONACYT. El semestre pasado esta organización me dio una beca para poder terminar la tesis. A pesar de que la beca iba dirigido a mujeres, ustedes por mi situación, me consideraron. Agradezco a Carlos Cabrera quien me dijo sobre esa beca y al equipo de Gabriela Araujo quienes abogaron por mi para que se me pudiera dar la beca.

A la Facultad de Ciencias con la ayudantías. Gracias por que en la Facultad de Ciencias dan la oportunidad a jovenes que están terminando su licenciatura a ser ayudantes. A parte de que nos dan una ayuda económica, el dar clases de ayudante nos entrena para que en el futuro podamos trabajar como profesores.

A la UNAM. Nada de todo lo que he dicho en estos agradecimientos fuese posible si no existiera la UNAM. Gracias a todos los que han luchado para que la eduación en la UNAM siga siendo totalmente gratuita. Eso ha hecho que jóvenes como yo, con escasos recursos puedan seguir estudiando. La UNAM no sólo me ha dado educación gratuita, también ya estando adentro me ha apoyado con las becas antes mencionadas.

¡MUCHÍSIMAS GRACIAS A LA UNAM!

¡QUE OTROS ESTUDIANTES QUE ESTÁN HACIENDO SU TESIS DE LICENCIATURA, MAESTRÍA O DOCTORADO PUEDAN TERMINARLO RAPIDAMENTE!

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo está basado en el artículo [**5**], *Chaos, periodicity, and snakelike continua*, cuyos autores son *Marcy Barge y Joe Martin.*

A continuación daremos algunas definiciones y motivaciones que serán necesarias para poder explicar de lo que trata esta tesis.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *continuo no degenerado* es un continuo que tiene más de un punto.

Sea $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos y para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ consideremos $f_i : X_{i+1} \to X_i$ funciones continuas. Definimos el *límite inverso de* (X_i, f_i) denotado por $\varprojlim(X_i, f_i)$, como el subespacio de $\prod_{i=0}^{\infty} X_i$ dado por

$$\varprojlim(X_i, f_i) = \left\{ \overline{x} \in \prod_{i=0}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

A las funciones $f_i : X_{i+1} \to X_i$ se les llaman *funciones de ligadura*.

No entraremos a detalle con la teoría de límites inversos, pero si están interesados en saber de ese tema, pueden leer el capítulo II del libro [**7**], ahí se da una buena introducción sobre la teoría de límites inversos. Un teorema importante que nos permite trabajar los límites inversos en la teoría de continuos es el Teorema 2.4 del libro [**7**] el cual nos dice que el límite inverso de continuos es un continuo. Este teorema lo daremos por hecho.

En esta tesis sólo hablaremos de límites inversos de arcos, es decir, cuando los espacios son intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ y las funciones de ligadura son funciones continuas de un intervalo a otro. Más específico aún, nos enfocaremos en límites inversos de arcos que tengan una única función de ligadura, la cual será una función continua $f : I \to I$, donde I es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. A este tipo de límites inversos los denotaremos como (I, f). Reescribiendo la definición de límite inverso para una única función de ligadura tenemos que (I, f) está dada por

$$(I, f) = \left\{ \overline{x} \in \prod_{i=0}^{\infty} I : f(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Esencialmente lo que el lector debe saber sobre límites inversos para entender esta tesis es la definición de límite inverso y que el límite inverso de continuos es un continuo.

Un continuo es *indescomponible* si no se puede expresar como la unión de dos subcontinuos propios.

Si uno no ha visto ejemplos de continuos indescomponibles y el profesor de topología nos pide un ejemplo de un continuo indescomponible, seguramente lo primero que empezaremos a hacer será dibujos de continuos en el plano como circulos, arcos, cuadrados rellenos, viboritas, etc. Tratando de ver si nos funcionan para el ejemplo que nos piden. Después de dos horas de intentar seguramente no se nos ocurrirá un ejemplo, entonces pensaremos que tal vez ese tipo de continuos no existe.

La verdad es que construir un ejemplo de un continuo indescomponible no es tarea fácil. En teoría de continuos los continuos indescomponibles son muy extraños y difíciles de construir. El ejemplo clásico de continuo indescomponible es el continuo de Knaster, este continuo lo veremos en la segunda sección del Capítulo 2. Una representación gráfica del continuo de Knaster se muestra en la Figura 2.6.

Varios de los continuos indescomponibles que se conocen tienen propiedades muy interesantes. Por ejemplo el continuo de Knaster, cumple que todos sus subcontinuos propios son arcos, pero él mismo no es un arco. Otro continuo indescomponible es el pseudoarco, este contino es muy estudiado en teoría de continuos pues cumple propiedades muy interesantes, por ejemplo, cumple que no sólo es indescomponible sino que todos sus subcontinuos son indescomponibles. Además de eso vive en el plano, pero no se puede dibujar, pues no contiene arcos. Es un continuo extremadamente raro.

Ahora hablaremos de sistemas dinámicos. Para hablar de la parte de sistemas dinámicos que abordaremos en esta tesis lo primero que necesitamos es una función continua $f : I \to I$, donde I es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$.

Sea $x \in I$. La órbita de x bajo f se denota como $O(x, f)$ y está dada por

$$O(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\}.$$

Es decir, la órbita de x bajo f es el conjunto de iteraciones de x bajo la función f.

Sea $x \in I$, decimos que x es un *punto periódico* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) = x$, y es de periodo n para algún $n \in \mathbb{N}$ si

$$f^n(x) = x \text{ y para toda } k \in \mathbb{N} \text{ con } k < n,\ f^k(x) \neq x.$$

Decimos que x es un *punto preperiódico* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x)$ es un punto periódico.

Parte del trabajo que se hace en sistemas dínamicos discretos es analizar las órbitas de una función. Cuando los puntos son periódicos o preperiódicos las órbitas son conjuntos finitos. Hay funciones que tienen órbitas infinitas, es decir que viajan todo el tiempo por lugares distintos. También hay funciones que tienen órbitas densas, que cumplen la propiedad impresionante de viajar todo el tiempo por todos los lugares del espacio, hasta los lugares más pequeños.

En el capítulo 9 del libro [**3**], nos explican que cuando una función continua $f : I \to I$ tiene un punto con órbita densa, entonces f es una función caótica. La definición de *caos* se da en el apartado 9.5 del libro [**3**]. Decir que f es caótica es una forma de decir que la dinámica de f es complicada.

Un Teorema importante que usaremos en la tesis será el Teorema de Sharkovskii que se encuentra enunciado en el Teorema 3.11 del libro [**3**]. Un resultado sorprendente que nos da el Teorema de Sharkovskii es que si una función continua, $f : I \to I$, tiene un punto periódico de periodo 3, entonces tiene puntos periódicos de todos los periodos.

Cuando la función tiene órbitas densas o puntos periódicos de periodo 3 la dínamica de la función se vuelve interesante. Parte de esta tesis es relacionar funciones que tienen dinámicas interesantes con continuos extraños, que en nuestro caso serán los continuos indescomponibles.

Estar familiarizado con lo anterior es suficiente para entender esta tesis. Para la parte de límites inversos sólo necesitaremos lo que acabamos de decir. Hay sólo una propiedad sobre límites inversos que no hemos mencionado y que necesitaremos en la última sección de este capítulo, pero no se preocupen en dicha sección enunciaremos y demostraremos tal propiedad.

Para estar familiarizado con lo que hemos dicho anteriormente y por lo tanto tener una mejor comprensión de esta tesis es recomendable haber llevado un curso de teoría de continuos y un curso de sistemas dinámicos que se imparten en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Ahora sí, estamos listos para poder explicar de lo que se trata esta tesis.

Sea $f : I \to I$ una función continua, el límite inverso natural que induce esta función es (I, f). Los resultados principales de esta tesis están relacionados con la función continua $f : I \to I$ y su límite inverso (I, f).

Lo que estudiaremos de f es su dinámica, particularmente estudiaremos funciones que tengan puntos periódicos que no sean potencia de 2 y funciones que tengan puntos con órbita densa. Estas propiedades dinámicas hacen que la función tenga una *dinámica interesante*. En cuanto a (I, f) estudiaremos subcontinuos indescomponibles, éstos son continuos muy extraños y difíciles de construir.

El objetivo de esta tesis es mostrar algunas relaciones que existen entre funciones, $f : I \to I$, que tienen una dinámica interesante, con subcontinuos indescomponibles de (I, f).

Veremos que cuando la dinámica de $f : I \to I$ es *interesante*, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible. Esto se encuentran dicho en los Teoremas 4.26, 5.28 y 5.31.

Analizaremos también el regreso. Es decir, si (I, f) es un continuo indescomponible, ¿será que f tiene una dinámica interesante? Veremos que bajo ciertas condiciones, lo anterior sí pasa. Este resultado está enunciado en el Teorema 5.23. Sin embargo, veremos que este regreso no siempre se cumple, pues mostraremos en la última sección del último capítulo una función $f : I \to I$ que cumple que (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible, pero f cumple que: no tiene puntos periódicos con periodo mayor que 1, los únicos puntos fijos son 0 y 1, y las órbitas de todos los demás puntos convergen al 0. Lo cual nos dice que f tiene una dinámica sencilla o predecible. Sin embargo, la función que se presenta no es nada sencilla. Esto nos muestra que las funciones que cumplen que (I, f) contienen un subcontinuo indescomponible, resultan ser funciones muy interesantes, aunque a veces desde el punto de vista dinámico no lo sean.

Lo anterior fue una explicación de la parte principal de esta tesis. A continuación explicaré sobre el contenido de los capítulos.

Empezaré con Capítulo 2. Cuando empecé a hacer la tesis, lo primero con lo que me topé fueron los límites inversos. Mi profesor me dijo que para entender límites inversos era necesario hacer varios ejemplos. Los únicos ejemplos que analizé son lo que se encuentran en el Capítulo 2. Los ejemplos que entendí relativamente rápido son los que aparecen en la primera sección del Capítulo 2.

Después empecé a analizar el límite inverso de la función que aparece en el Ejemplo 2.4. Demostrar que el límite inverso de esa función es homeomorfo al continuo seno del topólogo fue una tarea muy difícil, me llevé mucho tiempo para demostrarlo.

El segundo ejemplo, que aparece en la segunda sección del Capítulo 2, es la famosa función tienda. Estuve pensado durante mucho tiempo en cómo demostrar que el límite inverso de esa función es homeomorfo al continuo de Knaster. Después de un buen tiempo decidí dejarlo por que no me salía. Haces dos meses lo volví a retomar y me encontré con el artículo [**2**], que demuestra este hecho. La prueba que se da en esta tesis sobre ese ejemplo es parecida a la prueba que aparece en el artículo [**2**].

En el Capítulo 3 demostraremos un Teorema de Bing, el cual se encuentra enunciado en el Teorema 3.27. Este teorema será importante para demostrar el Teorema 4.26, que es uno los teoremas principales de esta tesis.

Cuando empecé a leer el artículo [**5**], con el cual me guié para hacer la tesis, me encontré en los preliminares ese Teorema de Bing. Considero que una de las partes más difíciles del artículo [**5**], fue entender la demostración que Bing hace sobre el Teorema 8 en su artículo. Gracias a la motivación de mi asesor pude entender la demostración de ese teorema. Pienso que explicar esa parte del preliminar del artículo [**5**] en esta tesis hará que la lectura de la misma no sea tan oscura. Para avanzar con los siguientes capítulos no es necesario entender la demostración del Teorema de Bing, el lector puede saltarse este capítulo y sólo leer el enunciado del Teorema de Bing que sevirá para demostrar el Teorema 4.26.

Los capítulos 4 y 5 son los principales de esta tesis.

En el capítulo 4 hay dos secciones. En la primera sección demostramos el Teorema 4.13, parte de lo que nos dice el teorema es que con sólo tener una órbita densa de f y otra condición sencilla sobre la órbita, entonces I se puede descomponer en dos subintervalos que se intersectan en un punto tal que f manda un intervalo al otro. A mi parecer esa descomposición es muy bonita.

En la segunda sección, con ayuda del teorema anterior, demostramos el Teorema 4.26, el cual nos dice que si $f : I \to I$ es una función continua que tiene una órbita densa, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible.

En el capítulo 5 hay tres secciones. En la primera sección mostramos el Teorema 5.23, este teorema nos dice que si (I, f) es un continuo indescomponible y f cumple ciertas condiciones, entonces f tiene puntos periódicos cuyo periodo no es potencia de 2. En la segunda sección probaremos los Teoremas 5.28 y 5.31, los cuales nos muestra que cuando la dinámica de f es interesante, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible. Finalmente en la última sección daremos un ejemplo de una función continua $f : I \to I$, que cumple que (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible, pero la dinámica de f es muy sencilla.

Esto ha sido todo con respecto a la explicación general de lo que trata cada capítulo de esta tesis.

Antes de empezar de lleno con los siguientes capítulos enunciaremos un teorema conocido en teoría de continuos, este teorema nos da distintas formas de ver a un continuo indescomponible. El inciso $ii)$ del próximo teorema lo pueden consultar en el Ejercicio 6.19, página 97 de libro [**7**]. El inciso $iii)$ se encuentra en el Corolario 11.20, página 205 del libro [**7**].

También daremos la definición de *función proyección* y mencionaremos una propiedad importante que cumple esta función. Estas dos herramientas serán importantes para el desarrollo de varios de los siguientes capítulos.

Sean x, y en X, decimos que X es *irreducible entre x y y* si no existe un subcontinuo propio de X que tenga a x y a y.

Teorema 1.1. *Sea X un continuo, las siguientes condiciones son equivalentes*

$i)$ *X es un continuo indescomponible.*
$ii)$ *Todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío.*
$iii)$ *Existen tres elementos distintos de X tal que X es irreducible entre cualesquiera par de ellos.*

Definición 1.2. Sea $f : I \to I$ una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea $\pi_n : (I, f) \to I$ la función dada por

$$\pi_n(\overline{x}) = x_n.$$

Esta función es conocida como la *función proyección en la enésima entrada.*

En topología se sabe que una función H que entra a un producto topológico es continua si para cada proyección, la proyección compuesta con H es una función continua. Este resultado se encuentra demostrado en el Teorema 19.6, página 117, del libro [**1**].

De lo anterior se sigue que una función H que entra a (I, f) es continua si para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\pi_n \circ H$ es una función continua. Este resultado lo daremos por hecho y lo usaremos en la tesis.

Lo que hemos dicho en la primera parte de esta introducción, y este último teorema y definición, son los preliminares generales que necesitamos para poder empezar a desarrollar los siguientes capítulos.

Las herramientas que nos ayudarán a demostrar los resultados principales de cada capítulo, serán dadas en los respectivos capítulos. Muchas de esas herramientas son definiciones y resultados conocidos en la teoría de continuos. Algunas de esas herramientas las demostraremos y otras, debido a que se escapan del objetivo de esta tesis, sólo daremos la referencia del libro donde se encuentran demostradas.

Capítulo 2

Ejemplos de Límites Inversos para Funciones en el Arco

En este capítulo analizaremos el límite inverso de algunas funciones continuas, $f : I \to I$ donde $I = [0,1]$, y en base a este análisis daremos subespacios del plano a los cuales son homeomorfos. Empezaremos con unos ejemplos sencillos e iremos dando ejemplos más complicados.

La métrica de (I, f) que usaremos para demostrar que los siguientes ejemplos de límites inversos son homeomorfos a los subespacios del plano correspondiente, está dada por

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}.$$

Donde $\overline{x}, \overline{y} \in (I, f)$ con

$$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, ...) \text{ y } \overline{y} = (y_1, y_2, y_3, ...).$$

2.1. Ejemplos sencillos de Límites Inversos

Ejemplo 2.1. Sea $f : I \to I$, dada por $f(x) = c$, donde c es una constante de I.

Este ejemplo es muy sencillo, pues si tomamos un $\overline{x} \in (I, f)$, por la definición de límite inverso se debe cumplir que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = x_n$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = c$, si denotamos a $\overline{c} = (c, c, c, ...)$, entonces pasa que $\overline{x} = \overline{c}$ y por lo tanto $(I, f) = \{\overline{c}\}$.

Ejemplo 2.2. Sea $f : I \to I$ un homeomorfismo. Entonces (I, f) es homeomorfo a I.

Para demostrar este hecho, observemos que si $\overline{x} \in (I, f)$, debe pasar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = x_n$, si llamamos g, a la función inversa de f, entonces $x_{n+1} = g(x_n)$, se sigue que $\overline{x}$ es de la forma, $\overline{x} = (x, g(x), g^2(x), g^3(x), ...)$, donde $x \in I$. Si definimos a $h : I \to (I, f)$, como

$$h(x) = (x, g(x), g^2(x), g^3(x), ...)$$

por el análisis anterior h es suprayectiva, y si $x \neq y$, entonces $(x, g(x), g^2(x), g^3(x), ...) \neq (y, g(y), g^2(y), g^3(y), ...)$, lo que nos dice que h es inyectiva. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n \circ h = g^n \circ \pi_1$, y tanto π_1 como g son continuas, entonces $\pi_n \circ h$ es continua y por lo tanto h es continua, como $I, (I, f)$ son continuos, entonces h es un homeomorfismo.

Ejemplo 2.3. Sea $f : I \to I$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

entonces (I, f) es homeomorfo a I.

La gráfica de f es la que se muestra en Figura 2.1.

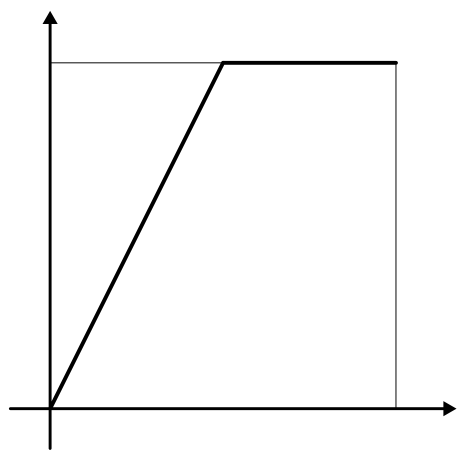

FIGURA 2.1.

Empecemos analizando a (I, f). Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a

$$\alpha_n = \{\overline{x} \in (I, f) : x_n \leq \frac{1}{2}\}$$

y sea g la función inversa de la función

$$f|_{[0,\frac{1}{2}]} : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1],$$

entonces, si definimos a $h_n : [0, \frac{1}{2}] \to \alpha_n$ como

$$h_n(x) = (f^{n-1}(x), ..., f(x), x, g(x), g^2(x), g^3(x), ...)$$

se puede probar que h_n es un homeomorfismo. Lo que nos dice que para cada $n \in \mathbb{N}$, α_n es homeomorfo a un arco. También se cumple lo siguiente.

$i)$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \subseteq \alpha_{n+1}$

$ii)$ $(I, f) = \displaystyle\bigcup_{i=n}^{\infty} \alpha_n \cup \{\overline{1}\}$, donde $\overline{1} = (1, 1, 1, ...)$.

Ahora si tomamos $n \in \mathbb{N}$, y definimos a

$$\overline{x} = (1, 1, 1, ..., \underbrace{1}_{x_n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, ...),$$

se cumple que

$$d(\overline{x}, \overline{1}) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

Esto nos dice que $\overline{1} \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i}$.

Este efecto es parecido al efecto que se produce con el 1 del intervalo $[0, 1]$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$, hay intervalos A_n anidados, de la forma $A_n = [0, a_n]$ con $a_n < 1$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Al igual que pasa con $\overline{1}$, $1 \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n}$. Este análisis nos ayuda a intuir que (I, f) podría ser homeomorfo a I, lo cual efectivame pasa y en seguida lo probaremos.

Definamos a $h : (I, f) \to I$ la función dada por

$$h(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}.$$

Observemos que $h(\overline{1}) = 1$. Para ver que h es inyectiva, tomemos $\overline{x}, \overline{y} \in (I, f)$, con $\overline{x} \neq \overline{y}$, sea n el mínimo tal que $x_n \neq y_n$, podemos suponer que $x_n < y_n$, como f es creciente se debe cumplir que $x_i \leq y_i$ para $i > n$, entonces

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i},$$

y como $x_n < y_n$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i},$$

por lo tanto $h(\overline{x}) < h(\overline{y})$. Lo que nos dice que h es inyectiva.

Para ver que h es continua, tomemos $\overline{x} \in (I, f)$ y $\epsilon > 0$. Sea $\overline{y} \in (I, f)$ tal que $d(\overline{x}, \overline{y}) < \epsilon$, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} < \epsilon,$$

luego

$$|h(\overline{x}) - h(\overline{y})| = |\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} < \epsilon.$$

Esto nos dice que h es continua.

Como $h(\overline{0}) = 0$ y $h(\overline{1}) = 1$, entonces por ser h continua y (I, f) conexo, se sigue que $h(I, f) = [0, 1]$. Lo que tenemos es que h es una función biyectiva y continua, entre continuos, por lo tanto h es un homeomorfismo.

2.2. Dos ejemplos complicados de límites inversos

En este apartado veremos dos funciones que son muy conocidas en la teoría de límites inversos, pues siempre que se empieza a estudiar límites inversos estos son los primeros ejemplos interesantes que se mencionan. La primera función es la que está definida en el ejemplo 2.4. Siempre se dice que el límite inverso de esta función es homeomorfo a la cerradura de la gráfica de la función $\sin(\frac{1}{x})$, con $x \in (0, 1]$, ó también llamada el seno del topólogo. Incluso hasta se dan argumentos geométricos para convencernos de tal hecho, pero nunca se prueba formalmente.

La segunda función, muy famosa en sistemas dinámicos, es la función tienda. Esta función, aunque parezca muy sencilla, resulta que el límite inverso es homeomorfo al continuo de Knaster. Al igual que la primera, de esta función se dice lo mismo, hay argumentos geométricos que tratan de explicar el porqué el límite inverso podría ser homeomorfo al continuo de Knaster. También hay pruebas formales que nos dicen que el límite inverso es indescomponible y que sus subcontinuos propios son arcos. Lo dicho anteriormente sobre estas funciones lo pueden consultar en las páginas 3-7 del libro [**8**].

Lo que nosotros haremos será tratar de demostrar formalmente que el límite inverso de estas funciones son homeomorfos a los subcontinuos del plano correspondientes. Empecemos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Sea $f : I \to I$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Entonces el límite inverso de f es homeomorfo al seno del topólogo.

La gráfica de f se muestra en la Figura 2.2

Una representación gráfica del seno del topólogo se muestra en la Figura 2.3.

Cuando a uno le dicen por primera vez que el límite inverso de f es homeomorfo al seno del topólogo, es difícil creerlo, pues es difícil imaginar una función continua que asigne a cada sucesión de (I, f), un elemento del seno del topólogo, y que además sea un homeomorfismo. Después de que a uno le cuentan una idea geométrica de por qué podría ser, uno se medio convence. Pero no quedas muy seguro. A continuación daremos una prueba formal de que el límite inverso de f y el seno del topólogo son homeomorfos.

Para demostrar este ejemplo empezaremos a construir algunas herramientas. Definiremos algunos subconjuntos de (I, f) que nos serán útiles para construir el homeomorfismo.

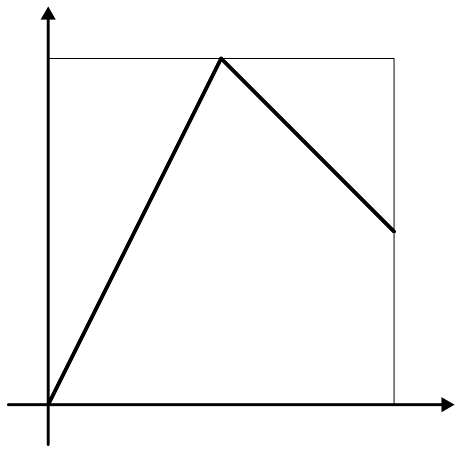

FIGURA 2.2.

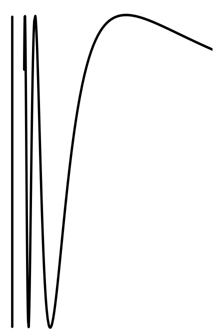

FIGURA 2.3.

Sea $\alpha_1 = \{\overline{x} \in (I, f) : 0 \leq x_1 < \frac{1}{2}\}$,
para cada $n > 1$, sea $\alpha_n = \{\overline{x} \in (I, f) : \frac{1}{4} \leq x_n < \frac{1}{2}\}$
y $K = \{\overline{x} \in (I, f) : x_i \geq \frac{1}{2}$ para toda $i \in \mathbb{N}\ \}$.

Los siguientes incisos son observaciones con respecto a estos conjuntos.

$i)$ Sean $i, j \in \mathbb{N}$, con $i \neq j$. Entonces $\alpha_i \cap \alpha_j = \varnothing$.

$ii)$ $(I, f) = K \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i)$.

Para probar $i)$, tomemos $i \neq j$ dos números distintos en $\mathbb{N}$, podemos suponer que $i < j$. Si $\overline{x} \in \alpha_j$, entonces $\frac{1}{4} \leq x_j < \frac{1}{2}$, por lo tanto $\frac{1}{2} \leq x_{j-1}$. Como $i < j$ entonces $\frac{1}{2} \leq x_i$, lo que nos dice que $\overline{x} \notin \alpha_i$, esto prueba $i)$.

Para $ii)$. $\supseteq$, es por definición de los conjuntos. Para la otra contención tomemos $\overline{x} \in (I, f)$, supongamos que $\overline{x} \notin K$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i < \frac{1}{2}$, sea $m = \text{mín}\{i \in \mathbb{N} : x_i < \frac{1}{2}\}$. Si $m = 1$, entonces $\overline{x} \in \alpha_1$. Si $m > 1$, entonces $\frac{1}{2} \leq x_{m-1}$, esto nos dice que $\frac{1}{4} \leq x_m < \frac{1}{2}$, por lo tanto $\overline{x} \in \alpha_m$. Esto prueba $ii)$.

Ahora definiremos unas funciones que van de los conjuntos $\alpha_{i's}$ al intervalo, que nos ayudarán para construir el homeomorfismo buscado.
Sean $h_1 : \alpha_1 \to \left[0, \frac{1}{2}\right)$, la función dada por

$$h_1(\overline{x}) = x_1,$$

$h_2 : \alpha_2 \to \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$, la función dada por

$$h_2(\overline{x}) = x_2 + \frac{1}{4},$$

y si $n > 2$, sean $h_n : \alpha_n \to \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\right)$, las funciones dadas por

$$h_n(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^n} + \frac{x_n}{2^{n-2}}.$$

Una cosa que debemos decir de esas funciones es que la imagen sí cae en los contradominios respectivos. Para $n = 1$ es claro, pues si $\overline{x} \in \alpha_1$, $x_1 \in [0, \frac{1}{2})$. Para $n > 1$, se sigue de que si $\overline{x} \in \alpha_n$, $\frac{1}{4} \leq x_n < \frac{1}{2}$.

Observemos que si $\overline{x} \in \alpha_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\overline{x}$ está determinado por x_n. Es decir que existe un único $\overline{x} \in \alpha_n$, que tiene a x_n, en su entrada n. Además, h_n es una función suprayectiva. De esto se sigue que para cada $n \geq 1$, h_n es una función biyectiva.

Recordando cuanto valen las sumas que hemos escrito anteriormente para definir a las funciones h_n. Para cada $n > 1$, podemos escribir a las funciones h_n de la siguiente forma.

$$h_n : \alpha_n \to \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right),$$
$$\text{y } h_n(\overline{x}) = 1 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^n} + \frac{x_n}{2^{n-2}}.$$

Con ayuda de las funciones h_n, definiremos una función, $h : \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i \to [0, 1)$, dada por

$$h(\overline{x}) = h_n(\overline{x}), \quad \text{si } \overline{x} \in \alpha_n$$

Se preguntarán en qué forma utilizaremos a la función h. La necesitaremos porque lo que vamos a hacer será ver que (I, f) es homeomeomorfo al continuo que se representa en la Figura 2.4, el cual es homeomorfo al seno del topólogo. Si analizamos con cuidado la

Figura 2.4, veremos que las imágenes de las funciones h_n corresponden con las intervalos en los que dividimos al intervalo $[0, 1]$, como se ve en la Figura 2.4.

A continuación daremos una función del intervalo en el intervalo, cuya cerradura de

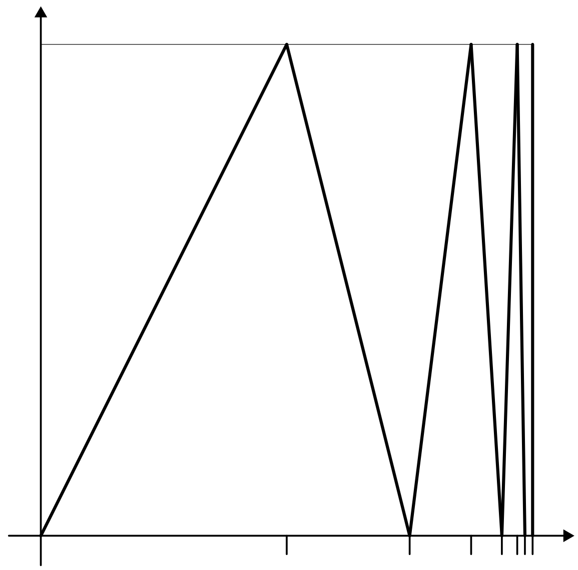

FIGURA 2.4.

su gráfica sea la que aparece en la Figura 2.4.

Después de observar un buen rato a la Figura 2.4 y hacer algunas cuentas deducimos que la función que define a la Figura 2.4, está dada a partir de las siguientes funciones que describen a los pedazos de rectas que se ven en la Figura 2.4 .

Sea $n \geq 1$. Entonces $g_n : [1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}] \to [0, 1]$ es la función dada por

$$g_n(x) = \begin{cases} 2^n x + 2 - 2^n, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ -2^n x + 2^n - 1, & \text{si } n \text{ es par .} \end{cases}$$

En base a las funciones g_n, definimos la función $g : [0, 1) \to [0, 1]$ dada por

$$g(x) = g_n(x), \text{ si } x \in \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right].$$

A la cerradura de la gráfica g le llamaremos S. En lo que sigue construiremos las herramientas necesarias para demostrar que (I, f) y S son homeomorfos.

Observemos que si $\overline{x} \in K$ entonces para cada $n \geq 1$, $f(x_{n+1}) = \frac{3}{2} - x_{n+1} = x_n$, luego $x_{n+1} = \frac{3}{2} - x_n$. Lo que nos dice esto es que $\overline{x} = (x, \frac{3}{2} - x, x, \frac{3}{2} - x, x, \frac{3}{2} - x, x, ...)$.

Ahora sí, estamos en condiciones para dar el homeomorfismo.

Definamos a $H:(I,f)\to S$, dada por:

$$H(\overline{x})=\begin{cases}(h(\overline{x}),g\circ h(\overline{x})), & \text{si } \overline{x}\in\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\alpha_n,\\ \\ (1,2-2x), & \text{si } \overline{x}\in K, \text{donde } \overline{x}=(x,\frac{3}{2}-x,x,\frac{3}{2}-x,x,...).\end{cases}$$

Algo que nos servirá para ver que H es continua, es saber quién es $g\circ h(\overline{x})$, para $\overline{x}\in(I,f)$. Veamos quién es.

Si $\overline{x}\in\alpha_1$, entonces $h(\overline{x})=x_1$, por lo tanto $g\circ h(\overline{x})=2x_1$.

Si $\overline{x}\in\alpha_n$, con $n>1$ y n par

$$g\circ(h(\overline{x}))=-2^n(1-\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^n}+\frac{x_n}{2^{n-2}})+2^n-1=-2^n+2^2-1-2^2x_n+2^n-1=2-2^2x_n.$$

Si n es impar

$$g\circ(h(\overline{x}))=2^n(1-\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^n}+\frac{x_n}{2^{n-2}})+2-2^n=2^n-2^2+1+2^2x_n+2-2^n=2^2x_n-1.$$

En conclusión

$$g(h(\overline{x}))=\begin{cases}2x_1, & \text{si } \overline{x}\in\alpha_1,\\ 2-2^2x_n, & \text{si } \overline{x}\in\alpha_n \text{ y } n \text{ par},\\ 2^2x_n-1, & \text{si } \overline{x}\in\alpha_n,\ n>1 \text{ y } n \text{ impar}.\end{cases}$$

Se puede saber más a detalle quién es $g(h(\overline{y}))$, para $\overline{y}\in\alpha_n$, con $n>1$. Vamos a analizarlo.

Recordemos que $\overline{y}$ es de la forma $\overline{y}=(y_1,y_2,...,y_{n-1},y_n,y_{n+1},...)$, donde $\frac{1}{4}\le y_n<\frac{1}{2}$, observemos que también se puede escribir como

$$\overline{y}=(y_1,\frac{3}{2}-y_1,y_1,...,y_{n-1},\underbrace{\frac{y_{n-1}}{2}}_{y_n},\frac{y_{n-1}}{2^2},\frac{y_{n-1}}{2^3},...).$$

Esto pasa porque $\frac{1}{2}\le y_{n-1}$. Entonces

$$f(y_{n-1})=\frac{3}{2}-y_{n-1} \text{ y } f^2(y_{n-1})=\frac{3}{2}-(\frac{3}{2}-y_{n-1})=y_{n-1}.$$

Si $n-1$ es impar, $y_{n-1}=y_1$, luego $y_n=\frac{y_1}{2}$, por lo tanto

$$g(h(\overline{y}))=2-2^2(\frac{y_1}{2})=2-2y_1.$$

Si $n-1$ es par, $y_{n-1}=\frac{3}{2}-y_1$, luego $y_n=\frac{\frac{3}{2}-y_1}{2}$, por lo tanto

$$g(h(\overline{y}))=2^2\left(\frac{\frac{3}{2}-y_1}{2}\right)-1=2(\frac{3}{2}-y_1)-1=2-2y_1.$$

Finalmente, con esta información podemos describir a $g \circ h$ de la siguiente manera.

$$g(h(\overline{y})) = \begin{cases} 2y_1, & \text{si } \overline{y} \in \alpha_1, \\ \\ 2 - 2y_1, & \text{si } \overline{y} \in \alpha_n, \ n > 1. \end{cases}$$

Con lo cual la función $H : (I, f) \to S$ queda definida de la siguiente manera.

$$H(\overline{x}) = \begin{cases} (x_1, 2x_1), & \text{si } \overline{x} \in \alpha_1, \\ \\ (h(\overline{x}), 2 - 2x_1), & \text{si } \overline{x} \in \alpha_n, \text{ con } n > 1, \\ \\ (1, 2 - 2x), & \text{si } \overline{x} \in K, \text{donde } \overline{x} = (x, \frac{3}{2} - x, x, \frac{3}{2} - x, x, ...). \end{cases}$$

Ahora sí, veamos que H es continua.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\overline{x} \in (I, f)$ y sea $\epsilon > 0$.
Lo haremos por casos, empezaremos con el siguiente caso.
Caso 1. Cuando $\overline{x} \in K$, entonces $\overline{x} = (x, \frac{3}{2} - x, x, \frac{3}{2} - x, x, \frac{3}{2} - x, x, ...)$.
Caso 1.1. Cuando $\overline{x} \in K$ y $x \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Sea m impar tal que $\frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $\delta > 0$, tal que $B_\delta(x) \cap [0, 1] \subseteq \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Sea $\delta_1 = \min\{\frac{1}{2^{m+2}}, \frac{\delta}{2^m}\}$. Sea $\overline{y} \in (I, f)$ tal que $d(\overline{x}, \overline{y}) < \delta_1$, luego $\frac{|x - y_1|}{2} < \frac{\delta}{2^m}$, entonces $|x - y_1| < \delta$, lo que nos dice que $y_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, luego $\overline{y} \notin \alpha_1$.

Si $\overline{y} \in \alpha_n$ para algún $n > 1$, entonces $g \circ h(\overline{y}) = 2 - 2y_1$. Como $d(\overline{x}, \overline{y}) < \frac{\delta}{2^m}$ y m es impar, entonces $\frac{|x_m - y_m|}{2^m} < \frac{\delta}{2^m}$, por lo tanto $|x - y_m| < \delta$. Lo que nos dice que $y_m \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, por lo tanto $n > m$. Como $h(\overline{y}) \in \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right)$ tenemos que $1 - \frac{1}{2^m} \leq h(\overline{y})$, luego $|h(\overline{y}) - 1| < \frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{2}$. De esto se sigue que

$$\|H(\overline{x}) - H(\overline{y})\| = \|(1, 2 - 2x) - (h(\overline{y}), 2 - 2y_1)\| \leq |1 - h(\overline{y})| + |2 - 2x - (2 - 2y_1)|$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + 2|x - y_1|.$$

Como $d(\overline{x}, \overline{y}) < \frac{1}{2^{m+2}}$, se sigue que $\frac{|x - y_1|}{2} < \frac{1}{2^{m+2}}$, por lo tanto $2|x - y_1| < \frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{2}$.
Con lo cual se sigue que

$$\|H(\overline{x}) - H(\overline{y})\| < \epsilon.$$

Si $\overline{y} \in K$, $\overline{y} = (y, \frac{3}{2} - y, y, \frac{3}{2} - y, y, ...)$ y como $d(\overline{x}, \overline{y}) < \frac{1}{2^{m+2}}$, entonces

$$\|H(\overline{x}) - H(\overline{y})\| = \|(1 - 1, 2 - 2x - (2 - 2y))\| = 2|x - y| < \frac{1}{2^m} < \epsilon.$$

Caso 1.2 Cuando $\overline{x} \in K$ y $x = \frac{1}{2}$.

Entonces $\overline{x} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, ...)$. Sea m par tal que $\frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $\overline{y} \in (I, f)$ tal que $d(\overline{y}, \overline{x}) < \frac{1}{2^{m+2}}$.

Si $\overline{y} \in \alpha_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces como $\frac{|1-y_m|}{2^m} < \frac{1}{2^{m+2}}$, $|y_m - 1| < \frac{1}{2}$, por lo tanto $y_m \in (\frac{1}{2}, 1]$. Lo cual nos dice que $m + 1 \leq n$, entonces $1 - \frac{1}{2^m} \leq h(\overline{y})$, por lo tanto

$$|1 - h(\overline{y})| < \frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{2},$$

además como $\frac{|y_1 - \frac{1}{2}|}{2} < \frac{1}{2^{m+2}}$, entonces $2|y_1 - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{2}$. Con esto tenemos que

$$\|H(\overline{x}) - H(\overline{y}\|) \leq |1 - h(\overline{y})| + |2 - 2(\frac{1}{2}) - (2 - 2y_1)| < \frac{\epsilon}{2} + 2|y_1 - \frac{1}{2}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Si $\overline{y} \in K$, entonces $H(\overline{y}) = (1, 2 - 2y_1)$, luego $\|H(\overline{x}) - H(\overline{y})\| = 2|y_1 - \frac{1}{2}| < \epsilon$.

Caso 2. Cuando $\overline{x} \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \alpha_n$.

Caso 2.1 Cuando $\overline{x} \in \alpha_1$.

Entonces $x_1 \in [0, \frac{1}{2})$. Sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_1) \cap [0, 1) \subseteq [0, \frac{1}{2})$, entonces si $\delta_1 = \min\{\frac{\epsilon}{2(3)}, \frac{\delta}{2}\}$, tenemos que si $d(\overline{x}, \overline{y}) < \delta_1$ entonces $\frac{|x_1 - y_1|}{2} < \frac{\delta}{2}$, luego $y_1 \in [0, \frac{1}{2})$, entonces $H(\overline{y}) = (y_1, 2y_1)$, por lo tanto

$$\|H(\overline{y}) - H(\overline{x})\| = \|(y_1 - x_1, 2(x_1 - y_1))\| \leq 3|x_1 - y_1|.$$

Como $\frac{|y_1 - x_1|}{2} < \frac{\epsilon}{2(3)}$, luego $3|y_1 - x_1| < \epsilon$, por lo tanto $|H(\overline{x}) - H(\overline{y})| < \epsilon$.

Caso 2.2. Cuando $\overline{x} \in \alpha_n$ para algún $n > 1$.

Sabemos que g es continua en $h(\overline{x})$. Sea $\delta_1 > 0$, con $\delta_1 < \frac{\epsilon}{2}$, tal que si $z \in B_{\delta_1}(h(\overline{x}))$ entonces $|g(z) - g(h(\overline{x}))| < \frac{\epsilon}{2}$.

Casos 2.2.1 Cuando $\overline{x} \in \alpha_2$.

Entonces $\frac{1}{4} \leq x_2 < \frac{1}{2}$. Sea $\delta_2 > 0$ tal que $B_{\delta_2}(x_2) \subseteq (\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$. Sea $\delta = \min\{\frac{\delta_1}{2^3}, \frac{\delta_2}{2^2}\}$. Si $d(\overline{y}, \overline{x}) < \delta$, entonces $\frac{|x_2 - y_2|}{2^2} < \frac{\delta_2}{2^2}$, luego $|x_2 - y_2| < \delta_2$, entonces $\overline{y} \in \alpha_1 \cup \alpha_2$.

Si $\overline{y} \in \alpha_2$, entonces

$$|h(\overline{y}) - h(\overline{x})| = |y_2 + \frac{1}{4} - (x_2 + \frac{1}{4})| = |y_2 - x_2|.$$

Como $\frac{|y_2 - x_2|}{2^2} < \frac{\delta_1}{2^2}$, entonces $|x_2 - y_2| < \delta_1 < \frac{\epsilon}{2}$, por lo tanto $|h(\overline{x}) - h(\overline{y})| < \frac{\epsilon}{2}$ y además

$$|g(h(\overline{x})) - g(h(\overline{y}))| = |2 - 2x_1 - (2 - 2y_1)| = 2|x_1 - y_1|.$$

Como $\frac{|x_1 - y_1|}{2} < \frac{\delta_1}{2^2}$, por lo tanto $|g(h(\overline{x})) - g(h(\overline{y}))| < \delta_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Con lo cual tenemos que $\|H(\overline{x}) - H(\overline{y})\| < \epsilon$.

Si $\overline{y} \in \alpha_1$, entonces

$$|h(\overline{y}) - h(\overline{x})| = |y_1 - (x_2 + \frac{1}{4})| \leq |y_1 - x_1| + |x_1 - (x_2 + \frac{1}{4})| < \frac{\delta_1}{2} + |2x_2 - (x_2 + \frac{1}{4})|$$

$$\text{y} \quad \frac{\delta_1}{2} + |x_2 - \frac{1}{4}| < \frac{\delta_1}{2} + |x_2 - y_2| < \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1.$$

Con lo cual tenemos que $|h(\overline{y}) - h(\overline{x})| < \delta_1 < \frac{\epsilon}{2}$, y usando la continuidad de g tenemos que $|g(h(\overline{y})) - g(h(\overline{x}))| < \frac{\epsilon}{2}$, por lo tanto $\|H(\overline{x}) - H(\overline{y})\| < \epsilon$.

Caso 2.2.2. Cuando $\overline{x} \in \alpha_n$, para algún $n \geq 3$.

Entonces $\frac{1}{4} \leq x_n < \frac{1}{2}$. Sea δ_2 tal que $B_{\delta_2}(x_n) \subseteq (\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$. Sea $\delta = \min\{\frac{\delta_2}{2^n}, \frac{\delta_1}{2^4}\}$, entonces si $d(\overline{x}, \overline{y}) < \delta$, $\frac{|x_n - y_n|}{2^n} < \frac{\delta_2}{2^n}$, luego $|x_n - y_n| < \delta_2$, por lo tanto $\overline{y} \in \alpha_n \cup \alpha_{n-1}$.

Si $\overline{y} \in \alpha_{n-1}$.

Entonces

$$h(\overline{y}) = \sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{y_{n-1}}{2^{n-3}}$$

$$\text{y} \qquad h(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^n} + \frac{x_n}{2^{n-2}}.$$

Recordemos que

$$h(\overline{y}) \in \left[\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{2^i}, \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right),$$

entonces

$$|h(\overline{y}) - h(\overline{x})| = \left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} - (\sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{y_{n-1}}{2^{n-3}})\right| + \left|\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^n} + \frac{x_n}{2^{n-2}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right|$$

$$= \left|\frac{y_{n-1}}{2^{n-3}} - \frac{1}{2^{n-2}}\right| + \left|\frac{1}{2^n} - \frac{x_n}{2^{n-2}}\right| = 2\left|\frac{y_{n-1}}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right| + \left|\frac{1}{2^n} - \frac{x_n}{2^{n-2}}\right|$$

$$= 2\left|\frac{y_n}{2^{n-3}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right| + \left|\frac{1}{2^n} - \frac{x_n}{2^{n-2}}\right|$$

esta última igualdad es porque $2y_n = y_{n-1}$.

Hasta ahora llevamos lo siguiente

$$|h(\overline{y}) - h(\overline{x})| = 2\left|\tfrac{y_n}{2^{n-3}} - \tfrac{1}{2^{n-1}}\right| + \left|\tfrac{1}{2^n} - \tfrac{x_n}{2^{n-2}}\right| = \tfrac{2}{2^{n-3}}\left|y_n - \tfrac{1}{2^2}\right| + \tfrac{1}{2^{n-2}}\left|x_n - \tfrac{1}{2^2}\right|$$

$$\leq \tfrac{2}{2^{n-3}}\left|y_n - \tfrac{1}{2^2}\right| + \tfrac{2^2}{2^{n-2}}\left|x_n - \tfrac{1}{2^2}\right| = \tfrac{4}{2^{n-2}}(\left|x_n - \tfrac{1}{4}\right| + \left|y_n - \tfrac{1}{4}\right|).$$

Recordemos que $\overline{x} \in \alpha_n$ y $\overline{y} \in \alpha_{n-1}$, luego $y_n < \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4} \leq x_n$, entonces

$$|x_n - y_n| = \left|x_n - \frac{1}{4}\right| + \left|y_n - \frac{1}{4}\right|.$$

Por lo tanto

$$|h(\overline{y}) - h(\overline{x})| \leq \frac{4}{2^{n-2}}\,|x_n - y_n| = 2^4\frac{|x_n - y_n|}{2^n} < 2^4\frac{\delta_1}{2^4} = \delta_1.$$

Finalmente tenemos que $|h(\overline{y}) - h(\overline{x})| < \delta_1 < \frac{\epsilon}{2}$ y por la δ_1 de la continuidad de g en $h(\overline{x})$ tenemos que $|g(h(\overline{x})) - g(h(\overline{y}))| < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto $\|H(\overline{x}) - H(\overline{y})\| < \epsilon$.

Si $\overline{y} \in \alpha_n$, entonces recordando la definición de h, tenemos que

$$|h(\overline{x}) - h(\overline{y})| = \left|\frac{x_n - y_n}{2^{n-2}}\right| = 2^2\frac{|x_n - y_n|}{2^n} < 2^2\frac{\delta_1}{2^4} < \delta_1 < \frac{\epsilon}{2}$$

y siguiendo un argumento análogo al anterior, llegamos a que $\|H(\overline{x}) - H(\overline{y})\| < \epsilon$. Esto termina todos los casos, ya podemos decir que H es continua en (I, f).

Observemos que h es una función biyectiva, al igual que $p : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [0, 1]$, donde $p(x) = 2 - 2x$. De esto se sigue que H es una función biyectiva.

Tenemos que H es una función biyectiva y continua y tanto el dominio como el contradominio son continuos, con lo cual podemos concluir que H es un homeomorfismo. □

Ejemplo 2.5. Sea f la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Veremos que (I, f) es homeomorfo al continuo de Knaster.

Este ejemplo está basado en las páginas 72-75 del Artículo [**2**].

La función f es conocida como la *función tienda*, ya que su gráfica es parecida a una tienda de acampar, como se muestra en la Figura 2.5.

El continuo de Knaster es muy conocido entre los continuólogos, pues siempre que se habla de continuos indescomponibles el primero que se menciona es el continuo de Knaster. Una representación gráfica del continuo de Knaster se muestra en la Figura 2.6. Para una descripción más detallada del continuo de Knaster, pueden ver las páginas 204 y 205 del libro [**4**].

A continuación construiremos algunas herramientas que nos servirán para probar que (I, f) y el continuo de Knaster son homeomorfos. Para empezar analizaremos cómo se comportan los puntos del límite inverso, con el fin de verlo de una forma más adecuada, que nos ayudará a poder dar el homeomorfismo.

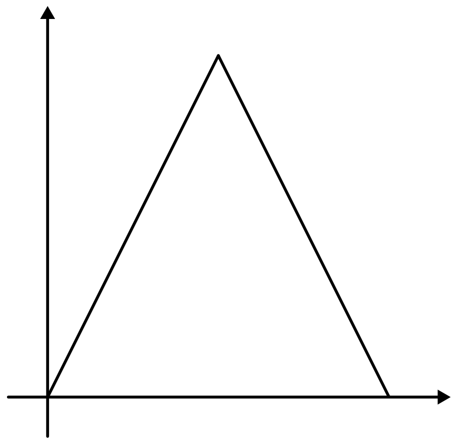

FIGURA 2.5. Gráfica de la función tienda.

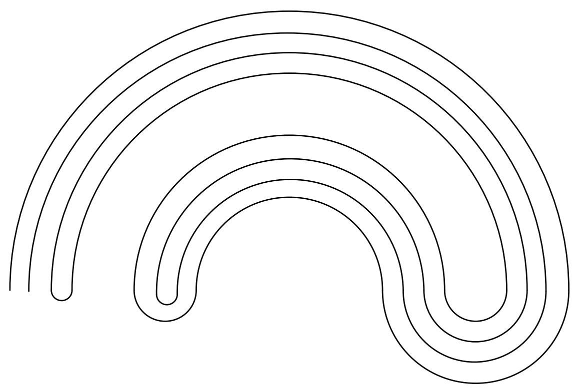

FIGURA 2.6.

Sea $\overline{x} \in (I, f)$, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, ...)$ cumple que $f(x_{i+1}) = x_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces si $x_{i+1} \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$f(x_{i+1}) = 2x_{i+1} = x_i, \text{ luego } x_{i+1} = \frac{x_i}{2}.$$

Si $x_{i+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$f(x_{i+1}) = 2 - 2x_{i+1} = x_i, \text{ entonces } x_{i+1} = 1 - \frac{x_i}{2}.$$

Si definimos a $f_0 : I \to [0, \frac{1}{2}]$ y a $f_1 : I \to [\frac{1}{2}, 1]$ las funciones dadas por

$$f_0(x) = \frac{x}{2} \quad \text{y} \quad f_1(x) = 1 - \frac{x}{2},$$

entonces $\overline{x}$ se puede ver de la siguiente forma,

$$\overline{x} = (x, f_{a_1}(x), f_{a_2} \circ f_{a_1}(x), ..., f_{a_n} \circ f_{a_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{a_1}(x), ...),$$

donde $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, ...)$ con $\overline{a} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y $x \in [0,1]$, que inductivamente la podemos definir como:
$x_1 = x$,
suponiendo definida x_n, $x_{n+1} = f_{a_n}(x_n)$.

Inversamente si $\overline{x}$ está definida de esa forma, veremos que $\overline{x} \in (I, f)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, por definición $x_{n+1} = f_{a_n}(x_n)$. Si $a_n = 0$, entonces $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$, luego $f(x_{n+1}) = x_n$. Si $a_n = 1$, entonces $x_{n+1} = 1 - \frac{x_n}{2}$, luego $f(x_{n+1}) = 2 - 2(1 - \frac{x_n}{2}) = x_n$, luego $\overline{x} \in (I, f)$.

Con este análisis, podemos escribir a (I, f) de la siguiente forma

$$(I, f) = \{\overline{x} \in [0,1]^{\mathbb{N}} : x_1 = x \text{ y } \ x_{n+1} = f_{a_n}(x_n), \text{ donde } \overline{a} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ y } x \in I\}.$$

Recordemos que el conjunto de Cantor es homeomorfo al espacio $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. En lo que sigue usaremos al conjunto de Cantor como $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

A partir de lo dicho en los dos últimos párrafos, podemos definir una función natural $h : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [0,1] \to (I, f)$, dada por

$$h(\overline{a}, t) = (t, f_{a_1}(t), f_{a_2} \circ f_{a_1}(t), ..., f_{a_n} \circ f_{a_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{a_1}(t), ...),$$

observemos que por la descripción anterior de (I, f), h resulta suprayectiva.

Observemos además que si $\overline{a}, \overline{b} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y $d(\overline{a}, \overline{b}) < \frac{1}{2^n}$, entonces $a_i = b_i$, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y como para toda $n \in \mathbb{N}$, $f_{a_n} \circ f_{a_{n-1}} \cdots \circ f_{a_1}$ es continua, se sigue que $\pi_n \circ h$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$, con lo cual concluimos que h es continua y suprayectiva.

Si definimos una relación de equivalencia en $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [0,1]$, dada por

$$(\overline{a}, t) \sim (\overline{b}, r) \text{ si y sólo si } h(\overline{a}, t) = h(\overline{b}, r),$$

por el Teorema 3.21 en **[7]** pág. 44, se tiene que

$$\mathcal{A} = \{[(\overline{a}, t)] : (\overline{a}, t) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [0,1]\}$$

con la topología cociente, es homeomorfo a (I, f).

Observemos que si $(\overline{b}, r) \in [(\overline{a}, t)]$, entonces por la definición de h, debe pasar que $t = r$. Así que que cada vez que tomemos un elemento de $[(\overline{a}, t)]$, será de la forma $(\overline{b}, t)$.

Las siguientes dos observaciones nos ayudarán a ver cómo es el espacio cociente.

Observación 2.6. Supongamos que $h(\overline{a}, t) = h(\overline{b}, t) = (z_1, z_2, z_3, ...)$, y sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \neq b_i$. Entonces $z_i = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Si $a_i \neq b_i$, como $h(\overline{a}, t) = h(\overline{b}, t)$, entonces $z_{i+1} = f_{a_i}(z_i) = f_{b_i}(z_i)$, luego $\frac{z_i}{2} = 1 - \frac{z_i}{2}$, por lo tanto $z_i = 1$. □

Observación 2.7. Sean $\overline{a}, \overline{b} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y supongamos que $(\overline{b}, t) \in [(\overline{a}, t)]$ con $\overline{a} \neq \overline{b}$. Entonces existe un único $i \in \mathbb{N}$, tal que $a_i \neq b_i$, que cumple lo siguiente:

$i)$ Si $i = 1$, entonces $t = 1$.
$ii)$ Si $i = 2$, entonces $t = 0$ y $a_1 = b_1 = 1$.
$iii)$ Si $i > 2$, entonces $t = 0$, $a_{i-1} = b_{i-1} = 1$ y si $j < i - 1$, $a_j = b_j = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Como $(\bar{b}, t) \in [(\overline{a}, t)]$, entonces $h(\overline{a}, t) = h(\bar{b}, t) = (z_1, z_2, z_3, ...)$. Si existieran $j, i \in \mathbb{N}$, con $j < i$, tal que $a_i \neq b_i$ y $a_j \neq b_j$, entonces por la observación anterior $z_i = z_j = 1$, pero como $\overline{z} \in (I, f)$, entonces $f(z_i) = z_{i-1} = 0$ y por lo tanto $z_j = 0$, contradiciendo que $z_j = 1$. Por lo tanto sólo existe un $i \in \mathbb{N}$, tal que $a_i \neq b_i$.

Si $i = 1$, entonces $z_1 = 1$ y por la definición de h, $z_1 = t = 1$.

Si $i = 2$, entonces $z_2 = 1$ y por lo tanto $z_1 = t = 0$. Como $f_0 : I \to [0, \frac{1}{2}]$, $f_1 : I \to [\frac{1}{2}, 1]$, y $f_{b_1}(z_1) = f_{a_1}(z_1) = f_{b_1}(0) = f_{a_1}(0) = 1$, luego $b_1 = a_1 = 1$.

Si $i > 2$, entonces $z_i = 1$, luego $z_{i-1} = 0 = z_1 = t$. Como

$$f_{b_i-1}(z_{i-1}) = f_{a_{i-1}}(z_{i-1}) = f_{b_{i-1}}(0) = f_{a_{i-1}}(0) = 1,$$

entonces $b_{i-1} = a_{i-1} = 1$. Si $j < i - 1$, $f_{b_j}(z_j) = f_{a_j}(z_j) = 0$, luego $b_j = a_j = 0$. $\square$

La siguiente proposición nos dice cómo son las clases de equivalencia, lo cual nos ayuda a entender al espacio cociente.

Proposición 2.8. *Sea* $\overline{a} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ *y* $t \in [0, 1]$. *Entonces las clases de equivalencia son de la siguiente forma.*

$i)$ $[(\overline{a}, 1)] = \{(\overline{a}, 1), ((1 - a_1, a_2, a_3, ...), 1)\}$
$ii)$ $[(\overline{a}, t)] = \{(\overline{a}, t)\}$ *para* $0 < t < 1$
$iii)$ $[(\overline{0}, 0)] = \{(\overline{0}, 0)\}$
$iv)$ $[((1, a_1, a_2, a_3, ...), 0)] = \{((1, a_1, a_2, a_3, ...), 0), ((1, 1 - a_1, a_2, a_3, ...), 0)\}$
$v)$ $[((0, 1, a_1, a_2, a_3, ...), 0)] = \{((0, 1, a_1, a_2, a_3, ...), 0), ((0, 1, 1 - a_1, a_2, a_3, ...), 0)\}$
$vi)$ $[((0, 0, 1, a_1, a_2, a_3, ...), 0)] = \{((0, 0, 1, a_1, a_2, ...), 0), ((0, 0, 1, 1 - a_1, a_2, ...), 0)\}$

$$\vdots$$

$vii)$ $[((\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n\ ceros}, 1, a_1, a_2, a_3, ...), 0)] = \{((\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n\ ceros}, 1, a_1, a_2, a_3, ...), 0),$
$((\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n\ ceros}, 1, 1 - a_1, a_2, a_3, ...), 0)\}$

DEMOSTRACIÓN. Para el insicio $i)$, observemos que

$$f_1(1) = f_0(1) = \frac{1}{2} \tag{1}$$

lo cual nos da la contención $\supseteq$. La contención $\subseteq$ se sigue de la Observación 2.7.

Para el inciso $ii)$. Si suponemos que existe un $(\bar{b}, t) \in [(\overline{a}, t)]$ con $\bar{b} \neq \overline{a}$, entonces por la Observación 2.6, se tiene que si $h(\overline{a}, t) = \overline{z}$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$, tal que $z_i = 1$, luego $z_1 = 0$ ó $z_1 = 1$, lo cual no pasa pues por definición de h, $z_1 = t$, por lo tanto

$[(\overline{a}, t)] = \{(\overline{a}, t)\}$.

El iniciso $iii)$ se sigue de la Observación 2.6 y de que $h(\overline{0}, 0) = \overline{0}$.

La contención $\subseteq$ de los siguientes incisos se sigue de la Observación 2.7 y la contención $\supseteq$ se sigue de la ecuación (1) y de que se cumple que $f_1(0) = 1$.

$\square$

La Figura 2.7 nos da una idea de como se ven estas relaciones.

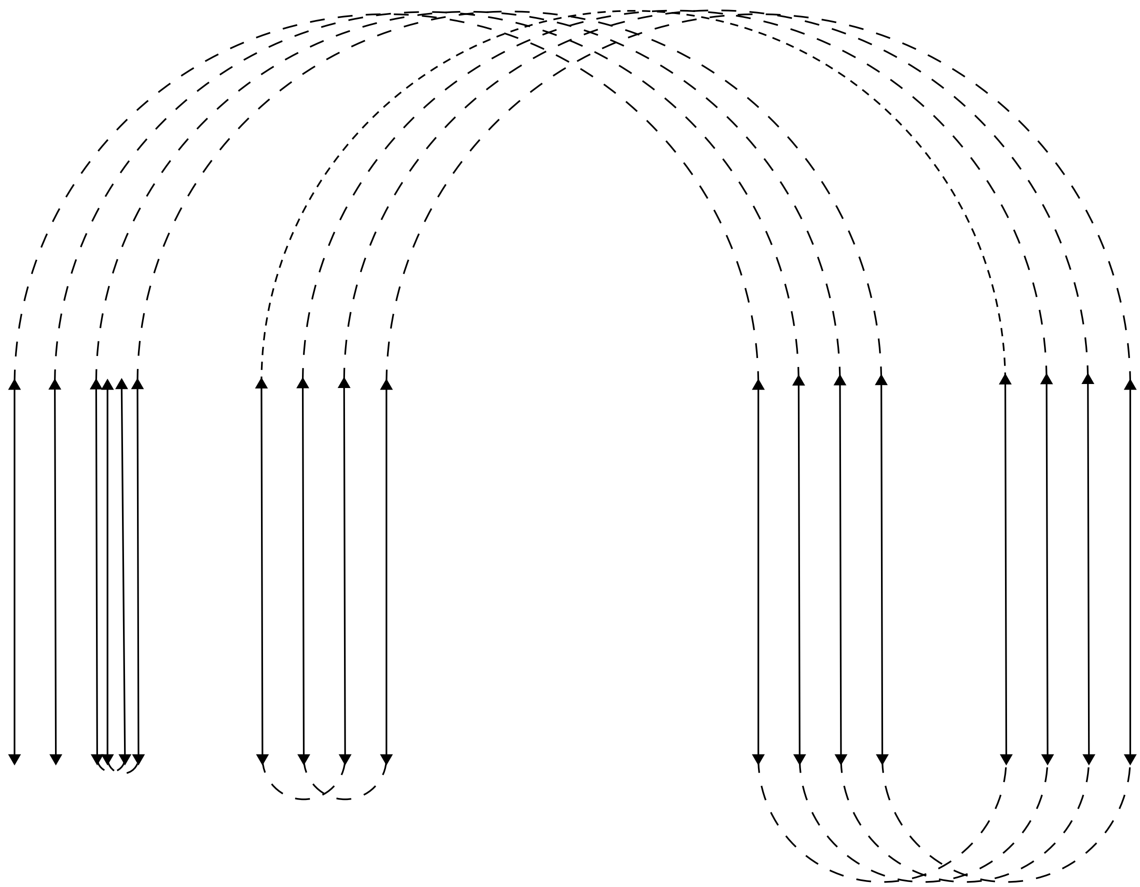

FIGURA 2.7. Representación del espacio cociente $\{0,1\}^{\mathbb{N}}/\sim$

El espacio que se ve en el dibujo representa al conjunto de Cantor producto con el intervalo $[0, 1]$, la capa de arriba son los puntos de la forma $(\overline{a}, 1)$, los de la capa de abajo son de la forma $(\overline{a}, 0)$, los arcos que unen a ciertos pares de puntos indican que esos puntos están relacionados o que se pueden pegar.

Con ayuda del Teorema 3.21 del libro [**7**] pág. 44 se puede probar que ese espacio cociente es homeomorfo al continuo de Knaster. Ya no probaré este último resultado, pero espero que los argumentos que he dado hayan sido suficientes para que el el lector quede convencido de que el límite inverso de la función tienda y el continuo de Knaster son homemorfos.

Capítulo 3

Un Teorema de Bing

Este capítulo tiene como objetivo demostrar el Teorema 3.27, el cual se encuentra desarrollado en las páginas 657-659 del artículo [**6**], cuyo autor es $R.H.Bing$. Este teorema lo necesitaremos para demostrar el resultado principal del capítulo 4.

Empezaremos enunciando algunas definiciones y resultados sobre continuos encadenables, los cuales nos serán útiles para demostrar los lemas necesarios para el teorema principal.

3.1. Definiciones y algunos resultados sobre continuos encadenables

En esta sección enunciaremos algunas definiciones y resultados sobre continuos encadenables, los cuales se pueden encontrar en los capítulo XII del libro [**7**]. También enunciaremos otras definiciones y resultados sobre teoría de continuos que nos serán útiles para demostrar los lemas de la próxima sección. Los resultados de esta sección los usaremos sin demostrarlos, esperando que el lector pueda consultarlos en la bibliografía correspondiente.

Definición 3.1. Sea X un continuo y sean P, Q subconjuntos de X. Decimos que P, Q están *mutuamente separados* en X, si.

$i)$ P, Q son subconjuntos no vacíos,

$ii)$ $\overline{P} \cap Q = \varnothing$ y $\overline{Q} \cap P = \varnothing$.

Si además se cumple que $P \cup Q = X$ decimos que *P y Q separan a X* y lo denotamos como $X = P|Q$.

Definición 3.2. Un continuo X es llamado *triodo*, si hay un subcontinuo Z de X tal que $X \setminus Z$ es la unión de tres conjuntos no vacíos, tal que cada par de ellos están mutuamente separados en X.

Definición 3.3. Un continuo X se dice que es la suma esencial de subcontinuos X_i con $1 \leq i \leq n$, y lo escribimos como $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus \cdots \oplus X_n$, si pasa que

$i)$ $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ y

$ii)$ $X_k \nsubseteq \displaystyle\bigcup_{i \neq k} X_i$ para $k = 1, 2, ..., n$.

Definición 3.4. Un continuo X es llamado *triodo débil*, si existen X_1, X_2 y X_3 subcontinuos de X tales que

$i)$ $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ y

$ii)$ $\bigcap_{i=1}^{3} X_i \neq \varnothing$.

Definición 3.5. Un continuo X es *unicoherente*, si para todo A, B subcontinuos de X tal que $X = A \cup B$, entonces $A \cap B$ es conexo.

El siguiente teorema, que se encuentra en la página 209 de [**7**], nos dice cómo se relaciona un triodo débil con un triodo.

Teorema 3.6. *Supongamos que X es un continuo unicoherente, entonces X es un triodo si y sólo si X es un triodo débil.*

A continuación daremos la definición de continuo encadenable y algunos propiedades sobre ellos.

Definición 3.7. Un *cadena* de un continuo X, es una familia finita de conjuntos abiertos de X, $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, U_3, ..., U_n\}$, tal que

$$U_i \cap U_j \neq \varnothing \text{ si y sólo si} |i - j| \leq 1.$$

Sea $med(\mathcal{C}) = \textit{máx}\{\text{diámetro}(U_i) : 1 \leq i \leq n\}$.

Si $\mathcal{C}$ es una cadena de X y $med(\mathcal{C}) < \epsilon$, decimos que $\mathcal{C}$ es una ϵ-*cadena*.

Si para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ-cadena de X que cubre a X, diremos que X es un *continuo encadenable*.

A principios del capítulo XII del libro [**7**], se habla de continuos *Arc-like*, más adelante después de desarollar un poco de teoría, se demuestra que los continuos *Arc-like* y los continuos encadenables son lo mismo. Este resultado se encuentra en el Teorema 12.11, página 235 del libro [**7**]. Yo daré por hecho este resultado, con base en ello, utilizaré las siguientes propiedades que cumplen los continuos encadenables, las cuales se pueden consultar en las páginas 230-232 del libro [**7**].

Teorema 3.8. *Algunas propiedades de los continuos encadenables.*

$i)$ *Todo subcontinuo no degenerado de un continuo encadenable es un continuo encadenable.*

$ii)$ *Todo continuo encadenable es hereditariamente unicoherente.*

$iii)$ *Todo continuo encadenable no contiene triodos y, por el Teorema 3.6, no contiene triodos débiles.*

A continuación enunciaremos los tres teoremas de *golpes en la frontera*, y un corolario que se deduce apartir de estos teoremas. Estos resultados los pueden consultar en la páginas 73-75 de [**7**].

Para hablar de los teoremas de golpes en la frontera, necesitamos recordar la definición de componente.

Definición 3.9. Sea X un espacio topológico. Una *componente* de X es un subconjunto conexo maximal de X. Si $p \in X$, entonces C_p está definida como

$$C_p = \bigcup \{A \subseteq X : p \in A \text{ y } A \text{ es conexo}\}.$$

C_p es la componente de X que contiene a p.

Observemos que como la cerradura de un conexo es un conexo, entonces las componentes son subconjuntos cerrados de X. También podemos observar que todo conjunto conexo de X está contenido en una componente y que las componentes forman una partición en X.

Ahora sí, podemos empezar a enunciar los teoremas de golpes en la frontera.

Teorema 3.10 (Primer Teorema de Golpes en la Frontera). *Sea X un continuo, sea $U \neq \varnothing$ un subconjunto abierto y propio de X. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces*

$$K \cap Fr(U) \neq \varnothing$$

o equivalentemente, como $K \subseteq \overline{U}$ y U es abierto, entonces

$$K \cap (X \setminus U) \neq \varnothing.$$

Teorema 3.11 (Segundo Teorema de Golpes en la Frontera). *Sea X un continuo, sea $E \neq \varnothing$ un subconjunto propio de X. Si K es una componente de E, entonces*

$$\overline{K} \cap Fr(E) \neq \varnothing$$

o equivalentemente, como $\overline{K} \subseteq \overline{E}$, entonces

$$\overline{K} \cap \overline{X \setminus E} \neq \varnothing.$$

Teorema 3.12 (Tercer Teorema de Golpes en la Frontera). *Sea X un continuo, sea $E \neq \varnothing$ un subconjunto propio de X. Si K es una componente de E, entonces se cumple lo siguiente.*

Si E es abierto, entonces

$$\overline{K} \cap (X \setminus E) \neq \varnothing, \textit{ es decir } \overline{K} \setminus E \neq \varnothing.$$

Si E es cerrado, entonces

$$K \cap \overline{(X \setminus E)} \neq \varnothing.$$

Corolario 3.13. *Sea X un continuo, sea A un subcontinuo propio de X. Si K es una componente de $X \setminus A$, entonces $K \cup A$ es un continuo.*

3.2. Algunos Lemas y Teoremas previos al Teorema Principal

En esta sección demostraremos algunos lemas y teoremas que nos ayudarán a demostrar el teorema principal. Los resultados de esta sección están motivados por los lemas que aparecen en la página 657 del artículo [**6**]. Empezamos con el siguiente lema.

Lema 3.14. Sea X un continuo encadenable, sea $\{X_\alpha \colon \alpha \in R\}$ una familia arbitraria de subcontinuos de X. Supongamos que $\bigcap\limits_{\alpha\in R} X_\alpha \neq \varnothing$, entonces $\bigcap\limits_{\alpha\in R} X_\alpha$ es un continuo.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $Y = \bigcap\limits_{\alpha\in R} X_\alpha$ es un espacio compacto y métrico, pues es una intersección de cerrados y es un subespacio de un métrico. Sólo falta ver que es conexo. Veamos que Y es un conexo, supongamos que no, como Y es cerrado, entonces existen A, B subconjuntos cerrados de X tales que

$i)$ $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$,
$ii)$ $A \cup B = \bigcap\limits_{\alpha\in R} X_\alpha$ y
$iii)$ $A \cap B = \varnothing$.

Como A y B son cerrados y X es métrico, existen U, V abiertos de X tales que

$i)$ $A \subseteq U, B \subseteq V$ y
$ii)$ $U \cap V = \varnothing$.

Entonces

$$A \cup B = \bigcap_{\alpha\in R} X_\alpha \subseteq U \cup V,$$

por lo tanto

$$(X \setminus U) \cap (X \setminus V) \subseteq \bigcup_{\alpha\in R} X \setminus X_\alpha.$$

Como $(X \setminus U) \cap (X \setminus V)$ es cerrado, entonces es compacto, luego existe una cantidad finita de elementos de R, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n\} \subseteq R$, tal que

$$(X \setminus U) \cap (X \setminus V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus X_{\alpha_i},$$

se sigue que

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_{\alpha_i} \subseteq U \cup V,$$

de donde se sigue que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}$ es disconexo, lo cual es una contradicción pues como X es encadenable, X es herditariamente unicoherente.

Por lo tanto Y es conexo y entonces es un continuo. $\square$

El siguiente lema nos dice cuál es el máximo de componentes que puede tener un continuo encadenable cuando le quitan un subcontinuo.

Lema 3.15. Sea X un continuo encadenable y sea H un subcontinuo de X. Entonces $X \setminus H$ tiene a lo más 2 componentes.

DEMOSTRACIÓN. Si $X \setminus H$ tiene al menos 3 componentes, digamos C_1, C_2 y C_3, por el Corolario 3.13, $H \cup C_1$, $H \cup C_2$ y $H \cup C_3$ son subcontinuos, si definimos a Y como $Y = H \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$, entonces por ser las componentes una partición de $X \setminus H$, se tiene que

$$Y = (H \cup C_1) \oplus (H \cup C_2) \oplus (H \cup C_3),$$

que es un triodo débil de X, lo cual es una contradicción al Teorema 3.8, pues X es un continuo encadenable. Por lo tanto X tiene a lo más 2 componentes. $\square$

La siguiente observación nos ayudará a demostrar el próximo lema.

Observación 3.16. Sea X un continuo y H un subconjunto cerrado de X. Si C es componente de $X \setminus H$, entonces $\overline{C} \subseteq C \cup H$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \overline{C}$. Si $x \in X \setminus H$, entonces para todo abierto U de X tal que $x \in U$, se tiene que $U \cap (X \setminus H) \cap C \neq \varnothing$, luego $x \in \overline{C}^{X \setminus H}$ y por ser C un cerrado en $X \setminus H$, tenemos que $C = \overline{C}^{X \setminus H}$. Por lo tanto $x \in C$. $\square$

El siguiente lema nos dice cuál es el máximo de componentes que puede tener un continuo encadenable cuando le quitamos dos subcontinuos ajenos.

Lema 3.17. Sean X un continuo encadenable y H, K subcontinuos ajenos de X. Entonces $X \setminus (H \cup K)$ tiene a lo más 3 componentes.

DEMOSTRACIÓN. Si $X \setminus (H \cup K)$ tiene 4 componentes C_1, C_2, C_3 y C_4, por el Teorema 3.12, la cerradura de las componentes intersectan a $H \cup K$.

Si la cerradura de tres de esas componentes intersectan a un subcontinuo, digamos $\overline{C_1}, \overline{C_2}, \overline{C_3}$ intersectan a H, entonces por la observación anterior y por cumplir que las componentes son una partición, se tendría que $H \cup \overline{C_1} \cup \overline{C_2} \cup \overline{C_3}$ es un triodo débil de X, lo cual contradice que X sea encadenable. Debe pasar que la cerradura de dos componentes sólo intersectan a H y la cerradura de las otras dos sólo intersecten a K, de esto obtendríamos una disconexión para X, que es una contradicción, pues X es un continuo. Entonces $X \setminus (H \cup K)$ no tiene 4 componentes.

Si tuviese por lo menos 5 componentes, debe pasar que la cerradura de 3 componentes intersecten a H o a K, de lo cual obtendríamos otra vez un triodo débil, por lo tanto $X \setminus (H \cup K)$ tiene a lo más 3 componentes. $\square$

El siguiente lema nos dice que un continuo encadenable no puede tener curvas cerradas simples.

Lema 3.18. Sean X un continuo encadenable, sean H_1, H_2 y H_3 subcontinuos de X, tales que cada par de ellos se intersectan. Entonces uno de ellos es subconjunto de la unión de los otros dos.

DEMOSTRACIÓN. Observemos que $H_1 \cup H_2$ es un continuo, pues $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$ y también $H_3 \cap (H_1 \cup H_2)$ es un continuo, por ser X hereditariamente unicoherente. Entonces debe pasar que

$$(H_3 \cap H_1) \cap (H_3 \cap H_2) \neq \varnothing.$$

Si no pasara, $H_3 \cap (H_1 \cup H_2)$ sería disconexo. Por lo tanto $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \neq \varnothing$.

Si la conclusión del lema no pasara, como $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \neq \varnothing$ tendríamos que $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ sería un triodo débil, que es una contradicción pues X es un continuo encadenable. $\square$

Antes de seguir con el siguiente lema, será necesario mencionar la siguiente definición.

Definición 3.19. Sea X un continuo, sean A, B y C, subconjuntos ajenos de X, decimos que A *separa a* B *y* C *en* X, si existen P y Q, subconjuntos de X tales que

$i)$ $B \subseteq P, C \subseteq Q$ y
$ii)$ $X \setminus A = P|Q$. Donde $P|Q$ es una separación de $X \setminus A$.

El siguiente lema nos dice que en los continuos encadenables se cumple que, siempre que tengamos 3 subcontinuos ajenos con interior no vacío, uno de ellos separa a los otros dos.

Lema 3.20. Sea X un continuo encadenable, sean H_1, H_2 y H_3 subcontinuos de X que tienen interior no vacío y ajenos por pares. Entonces existe $i \in \{1, 2, 3\}$, tal que H_i separa a los otros dos en X, por medio de dos componentes conexas de $X \setminus H_i$.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 3.15, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, $X \setminus H_i$ tiene a lo más dos componentes. Si la conclusión del lema no pasa, entonces se cumple lo siguiente.

$i)$ $H_2 \cup H_3$ está contenido en una componente de $X \setminus H_1$ que llamaremos $C_{2,3}$,
$ii)$ $H_2 \cup H_1$ está contenido en una componente de $X \setminus H_3$ que llamaremos $C_{1,2}$ y
$iii)$ $H_3 \cup H_1$ está contenido en una componente de $X \setminus H_2$ que llamaremos $C_{1,3}$.

Sea $A = \overline{C_{2,3}} \cap \overline{C_{1,2}} \cap \overline{C_{1,2}}$, como $H_1 \subseteq \overline{C_{1,3}} \cap \overline{C_{1,2}}$ y por el Teorema 3.12, $H_1 \cap \overline{C_{2,3}} \neq \varnothing$. Entonces $H_1 \cap A \neq \varnothing$. Por lo tanto $A \cup H_1$ es un continuo.

Análogamente $H_2 \cap \overline{C_{1,3}} \neq \varnothing$ y $H_3 \cap \overline{C_{1,2}} \neq \varnothing$, entonces $A \cap H_2 \neq \varnothing$ y $A \cap H_3 \neq \varnothing$, por lo tanto $A \cup H_2$ y $A \cup H_3$ son continuos.

Observemos también que $A \cap H_i \subseteq Fr(H_i)$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Probemos está observación. Para $i = 1$, sea $x \in A \cap H_1$, si $x \in int(H_1)$ como $x \in A$, $x \in \overline{C_{3,2}}$, entonces $int(H_1) \cap C_{3,2} \neq \varnothing$, lo cual no pasa pues $C_{3,2} \subseteq C \setminus H_1$, por lo tanto $x \in Fr(H_1)$. Los demás casos son análogos.

Recordemos que los conjuntos $H_{i's}$ son ajenos y tienen interior no vacío, entonces usando la Observación 3.16, tenemos que:

$i)$ $A \cup H_1 \nsubseteq A \cup H_2 \cup H_3$
$ii)$ $A \cup H_2 \nsubseteq A \cup H_1 \cup H_3$
$iii)$ $A \cup H_3 \nsubseteq A \cup H_2 \cup H_1$

y como $A \neq \varnothing$, entonces $A \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3$ es un triodo débil en X, lo cual no puede pasar, pues X es un continuo encadenable. Por lo tanto existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal queH_i separa a los otros dos, H_j y H_k, por medio de las dos componentes de $X \setminus H_i$. □

Gracias a la siguiente observación, podemos decir que las componentes del lema anterior que separan a H_j y a H_k, son abiertas.

Observación 3.21. Sea X un continuo y H un subconjunto cerrado de X. Si $X \setminus H$ tiene una cantidad finita de componentes, esas componentes son abiertas en X.

DEMOSTRACIÓN. Sean $C_1, C_2, ..., C_n$ las componentes de $X \setminus H$, sea $x \in C_i$ con $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Como las componentes son cerradas en $X \setminus H$, existe un U abierto de X, con $x \in U$, tal que $U \cap (X \setminus H) \cap C_j = \varnothing$ para $j \neq i$, entonces $U \cap (X \setminus H) \subseteq C_i$, $U \cap (X \setminus H)$ es abierto y $x \in U \cap (X \setminus H)$. Por lo tanto C_i es abierto en X. □

La siguiente observación y el siguiente lema nos ayudarán a probar el próximo teorema, el cual será importante para probar el teorema principal.

Observación 3.22. Sea X un continuo encadenable, sean H_1 y H_2 subcontinuos ajenos de X. Entonces existe una componente C de $X \setminus (H_1 \cup H_2)$ tal que $\overline{C} \cap H_1 \neq \varnothing$ y $\overline{C} \cap H_2 \neq \varnothing$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 3.17, $X \setminus (H_1 \cup H_2)$ tiene a lo más 3 componentes, por el Teorema 3.12, la cerradura de cada componente intersecta a $H_1 \cup H_2$.

Si la cerradura de cada componente sólo intersecta a H_1, ó sólo intersecta a H_2, entonces por haber una cantidad finita de componentes X sería disconexo, que es una contradicción pues X es un continuo. Por lo tanto la cerradura de una componente de $X \setminus (H_1 \cup H_2)$ intersecta a H_1 y a H_2. □

Lema 3.23. Supongamos que X es un continuo encadenable que no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacío, sea C un conexo y abierto de X. Entonces existen K_1, K_2 y K_3 subcontinuos de X tales que

$i)$ $\overline{C} = K_1 \cup K_2 \cup K_3$.
$ii)$ Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ existen $x_i \in int(K_i)$ tal que $x_i \notin (K_j \cup K_s)$ con i, j y s distintos.

DEMOSTRACIÓN. Observemos que $\overline{C}$ es un subcontinuo de X que tiene interior no vacío, se sigue $\overline{C}$ es un continuo descomponible, luego existen K_1 y B subcontinuos propios de $\overline{C}$ tales que

$$\overline{C} = K_1 \cup B,$$

entonces existe $y_1 \in K_1 \setminus B$, como B es cerrado, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y_1) \cap B = \varnothing$, se sigue que $B_\delta(y_1) \cap C \subseteq K_1$. Además como $y_1 \in \overline{C}$, $B_\delta(y_1) \cap C \neq \varnothing$, tenemos que existe $x_1 \in int(K_1)$.

Como $\overline{C}$ es un subcontinuo de X y X es un continuo encadenable, entonces $\overline{C}$ es un continuo encadenable y le podemos aplicar el Lema 3.15, por lo tanto $\overline{C} \setminus K_1$ tiene a lo más 2 componentes.

Si $\overline{C} \setminus K_1$ tiene dos componentes K_2 y K_3, por la Observación 3.21, K_2 y K_3 son abiertos en $\overline{C}$. Como $K_2 \neq \varnothing$, existe $y_2 \in K_2$, por ser K_2 abierto en $\overline{C}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(y_2) \cap \overline{C} \subseteq K_2.$$

Como $y_2 \in \overline{C}$, $B_\delta(y_2) \cap C \neq \varnothing$. Además $B_\delta(y_2) \cap C \subseteq K_2$, entonces existe $x_2 \in int(K_2)$ y por la Observación 3.16, $x_2 \notin K_1 \cup \overline{K_3}$. Análogamente existe $x_3 \in int(K_3)$ tal que $x_3 \notin K_1 \cup \overline{K_2}$. Además se cumple que $\overline{C} = K_1 \cup \overline{K_2} \cup \overline{K_3}$ y como $x_1 \in int(K_1)$, se sigue que $x_1 \notin \overline{\overline{C} \setminus K_1}$, luego $x_1 \notin \overline{K_2} \cup \overline{K_3}$ que es lo que nos pide el lema.

Si $\overline{C} \setminus K_1$ tiene una sola componente, entonces $\overline{C} \setminus K_1$ es conexo. Recordemos que $\overline{C} = K_1 \cup B$, ambos subcontinuos propios de $\overline{C}$, con lo cual tenemos que existe un $x \in B \setminus K_1$, por ser K_1 cerrado, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \cap K_1 = \varnothing$, pero $x \in \overline{C}$, entonces $B_\delta(x) \cap C \neq \varnothing$ y $B_\delta(x) \cap C \subseteq \overline{C} \setminus K_1$, esto nos dice que $\overline{C} \setminus K_1$ tiene interior no vacío.

Como $\overline{C} \setminus K_1$ tiene interior no vacío, $\overline{\overline{C} \setminus K_1}$ es un continuo descomponible, luego existen K_2, K_3 subcontinuos propios de $\overline{\overline{C} \setminus K_1}$ tales que

$$\overline{\overline{C} \setminus K_1} = K_2 \cup K_3.$$

Entonces existe $y_2 \in K_2 \setminus K_3$, por ser K_3 cerrado, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y_2) \cap K_3 = \varnothing$. Como $y_2 \in \overline{\overline{C} \setminus K_1}$, $B_\delta(y_2) \cap (\overline{C} \setminus K_1) \neq \varnothing$. Sea $x_2 \in B_\delta(y_2) \cap (\overline{C} \setminus K_1)$, sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_2) \subseteq B_\delta(y_2)$ y $B_\epsilon(x_2) \cap K_1 = \varnothing$, tenemos que

$$B_\epsilon(x_2) \cap C \subseteq C \setminus K_1.$$

Como $B_\epsilon(x_2) \subseteq B_\delta(y_2)$ y $B_\delta(y_2) \cap K_3 = \varnothing$ se sigue que

$$B_\epsilon(x_2) \cap C \subseteq K_2.$$

Como $x_2 \in \overline{C}$, tenemos que $B_\epsilon(x_2) \cap C \neq \varnothing$. Sea $z_2 \in B_\epsilon(x_2) \cap C$. Entonces $z_2 \in int(K_2)$ y $z_2 \notin K_1 \cup K_3$. Análogamente existe $z_3 \in int(K_3)$ tal que $z_3 \notin K_1 \cup K_2$. Además se cumple que $\overline{C} = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ y como $x_1 \in int(K_1)$ tenemos que $x_1 \notin \overline{\overline{C} \setminus K_1}$, por lo tanto $x_1 \notin K_2 \cup K_3$, y esto termina el lema. $\square$

El siguiente Teorema nos da algunas condiciones para determinar cuando dos continuos ajenos pueden ser separados en X.

Teorema 3.24. *Sea X un continuo encadenable que no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacío y sean H_1, H_2 subcontinuos ajenos de X con interior no vacío. Entonces hay un subcontinuo de X con interior no vacío que separa a H_1 y a H_2 en X.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Observación 3.22, existe una componente C de $X \setminus (H_1 \cup H_2)$ tal que $\overline{C} \cap H_1 \neq \varnothing$ y $\overline{C} \cap H_2 \neq \varnothing$. Como C es un abierto conexo, entonces por el Lema 3.23, existen K_1, K_2, K_3 subcontinuos de X tales que

i) $\overline{C} = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ y
ii) para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ existen $x_i \in int(K_i)$ tal que $x_i \notin (K_j \cup K_s)$ con i, j, s distintos.

Si existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que K_i no intersecta a $H_1 \cup H_2$, supongamos que es K_2. Como $C \subseteq \overline{C} \setminus H_1 \subseteq \overline{C}$, entonces $\overline{C} \setminus H_1$ es conexo. Además $K_2 \subseteq \overline{C} \setminus H_1$ y $(\overline{C} \setminus H_1) \cap H_2 \neq \varnothing$, entonces $(\overline{C} \setminus H_1) \cup H_2$ es un conexo y $K_2 \cup H_2 \subseteq (\overline{C} \setminus H_1) \cup H_2$. Por lo tanto H_1 no puede separar a K_2 de H_2. Siguiendo un argumento similar obtenemos que H_2 no puede separar a K_2 de H_1. Como los tres continuos son ajenos y tienen interior no vacío, por el Lema 3.20, uno de ellos debe separar a los otros dos, por lo tanto K_2 separa a H_1 de H_2 en X, que es lo que buscábamos.

Si para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, $K_i \cap (H_1 \cup H_2) \neq \varnothing$. Como son 3 subcontinuos, dos de ellos debe intersectar a alguno, podemos suponer que K_1 y K_2 intersectan a H_1. Observemos que K_3 no puede intersectar a H_1, ya que como fueron tomados los conjuntos $K's$ se formaría un triodo débil, por lo tanto K_3 sólo intersecta a H_2. Además K_3 debe intersectar a K_1 o a K_2, de lo contrario habría una disconexión. Supongamos entonces que K_3 intersecta a K_2.

Lo dicho anteriormente se puede representar en la Figura 3.1.

De este análisis obtenemos los siguientes continuos:

i) $A_1 = H_1 \cup K_2 \cup K_3$,
ii) $B_2 = H_2 \cup K_2 \cup K_3$ y
iii) $\overline{C} = K_1 \cup K_2 \cup K_3$.

Observemos que $K_2 \cup K_3 \subseteq A_1 \cap B_2 \cap \overline{C}$, entonces $A_1 \cap B_2 \cap \overline{C} \neq \varnothing$. Como H_1 tiene interior no vacío y $H_2 \cap H_1 = \varnothing$, entonces $H_1 \nsubseteq \overline{C} \cup B_2$, por lo tanto $A_1 \nsubseteq \overline{C} \cup B_2$. También H_2 tiene interior no vacío y $H_2 \cap H_1 = \varnothing$, entonces $B_2 \nsubseteq A_1 \cup \overline{C}$. Finalmente como existe $x_1 \in int(K_1) \setminus (K_2 \cup K_3)$, entonces $\overline{C} \nsubseteq A_1 \cup B_2$. De todo esto obtenemos que

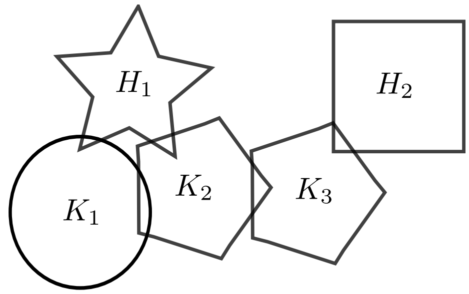

FIGURA 3.1.

$\overline{C} \cup A_1 \cup B_2$, es un triodo débil en X, lo cual contradice que X es un continuo encadenable. Por lo tanto se da el caso anterior y tenemos el teorema. □

Para el siguiente teorema necesitaremos dar la siguiente definición, la cual será muy utilizada en la próxima sección.

Definición 3.25. Sean A y B subconjuntos de X. Diremos que A está contenido interiormente en B, si $A \subseteq int(B)$ y lo denotaremos como $A \subseteq^0 B$.

El siguiente teorema nos dice que los subcontinuos con interior no vacío de un continuo encadenable que no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacío, es denso bajo el el orden $\subseteq^0$. Es decir, si A, B son subcontinuos de X con interior no vacío tal que $A \subseteq^0 B$, entonces existe un subcontinuo C de X tal que $A \subseteq^0 C \subseteq^0 B$. Este teorema será muy importante para la próxima sección, ya que nos ayudará a demostrar varios lemas y teoremas. Con este teorema finalizamos esta sección.

Teorema 3.26. *Sea X un continuo encadenable que no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacío. Sean H_1 y H_2 subcontinuos de X con interior no vacío tal que $H_2 \subseteq^0 H_1$. Entonces existe H_3 subcontinuo de X, tal que $H_2 \subseteq^0 H_3 \subseteq^0 H_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 3.15, $X \setminus H_1$ tiene a los más dos componentes.

Si $X \setminus H_1$ tiene una sola componente, entonces $C = X \setminus H_1$ es un conexo. Como $H_2 \subseteq^0 H_1$, entonces $\overline{C} \cap H_2 = \varnothing$. Por el Teorema 3.24 y el Lema 3.20, existe un subcontinuo K de X con interior no vacío, tal que

$i)$ $X \setminus K = U \cup V$, donde U, V son conexos, abiertos y ajenos.
$ii)$ $H_2 \subseteq U$ y $\overline{C} \subseteq V$.

Por el lema de las orejas (Proposición 6.3, pág 88 de [**7**]), $K \cup U$ es un continuo, entonces

$$H_2 \subseteq^0 K \cup U.$$

Por otra parte sabemos que $X \setminus \overline{C} \subseteq H_1$, pues $X \setminus H_1 \subseteq \overline{C}$. Como $K \cap \overline{C} = \varnothing$, entonces

$$K \subseteq X \setminus \overline{C}.$$

Además como $U \cap V = \varnothing$, entonces $U \cap \overline{C} = \varnothing$, por lo tanto $U \subseteq X \setminus \overline{C}$, entonces $K \cup U \subseteq X \setminus \overline{C} \subseteq int(H_1)$, por lo tanto

$$H_2 \subseteq^0 K \cup U \subseteq^0 H_1,$$

que es lo que nos pide el Teorema.

Si $X \setminus H_1$ tiene dos componentes. Digamos C_1 y C_2, las cuales sabemos que son abiertas. Como $H_2 \subseteq^0 H_1$, entonces $\overline{C_1} \cap H_2 = \varnothing$. Por el Teorema 3.24, existe K_1 subcontinuo de X con interior no vacío que separa a $\overline{C_1}$ de H_2. También $\overline{C_2} \cap H_2 = \varnothing$, sea K_2 el subcontinuo de X con interior no vacío que separa a $\overline{C_2}$ de H_2. Tenemos lo siguiente:

$i)$ Existen U_1, V_1 abiertos conexos y ajenos de X tales que $X \setminus K_1 = U_1 \cup V_1$ y $H_2 \subseteq U_1$, $\overline{C_1} \subseteq V_1$.

$ii)$ Existen U_2, V_2 abiertos conexos y ajenos de X tales que $X \setminus K_2 = U_2 \cup V_2$ y $H_2 \subseteq U_2$, $\overline{C_2} \subseteq V_2$.

Lo dicho en los incisos $i)$ y $ii)$ lo podemos representar en la Figura 3.2.

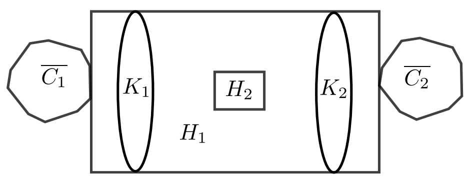

FIGURA 3.2.

Observemos que $H_2 \subseteq^0 K_1 \cup U_1$ y $H_2 \subseteq^0 K_2 \cup U_2$, por lo tanto

$$H_2 \subseteq^0 (K_1 \cup U_1) \cap (K_2 \cup U_2),$$

y este último es un continuo, ya que por el lema de las orejas $K_1 \cup U_1$ y $K_2 \cup U_2$ son continuos y además X es hereditariamente unicoherente.

Veamos que $(K_1 \cup U_1) \cap (K_2 \cup U_2) \subseteq X \setminus (\overline{C_1} \cup \overline{C_2})$. Como $U_1 \cap \overline{C_1} = \varnothing$ y $K_1 \cap \overline{C_1} = \varnothing$, entonces $U_1 \cup K_1 \subseteq X \setminus \overline{C_1}$, similarmente $K_2 \cup U_2 \subseteq X \setminus \overline{C_2}$. Por lo tanto

$$(K_1 \cup U_1) \cap (K_2 \cup U_2) \subseteq X \setminus (\overline{C_1} \cup \overline{C_2}).$$

Como $X \setminus H_1 \subseteq \overline{C_1} \cup \overline{C_2}$, entonces $X \setminus (\overline{C_1} \cup \overline{C_2}) \subseteq H_1$. Por lo tanto

$$H_2 \subseteq^0 (K_1 \cup U_1) \cap (K_2 \cup U_2) \subseteq^0 H_1.$$

$\square$

3.3. Un teorema de Bing

En esta sección demostraremos un teorema de Bing, que se encuentra enunciado en la página 658 del artículo [**6**], este teorema será muy importante para los siguientes capítulos.

Empezaremos enunciado el teorema y en el camino daremos algunas definiciones y algunas herramientas, los cuales nos ayudarán para ir demostrando los diferentes incisos del teorema.

Teorema 3.27 (de Bing). *Sea X un continuo encadenable que no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacío, entonces existe una partición G de X que cumple:*

$i)$ *G es un partición semicontinua superior de subcontinuos de X.*
$ii)$ *G con la topología cociente es un arco.*
$iii)$ *Los elementos de G tienen interior vacío.*
$iv)$ *Si g_0 y g_1 son los extremos de G, entonces X es irreducible con respecto a g_0 y g_1.*

En el inciso $iv)$ se utiliza la definición de que un continuo sea irreducible con respecto a dos conjuntos, esta defincíón se encuentra enunciada más adelante en la Definición 3.46.

A continuación daremos la definición de que lo que es una partición semicontinua superior, también daremos la definición de límite superior y finalmente enunciaremos una proposición, la cual relaciona estos dos conceptos.

Definición 3.28. Sea (X, T) un espacio topológico. Una partición G de X se dice que es *semicontinua superior*, si para toda $D \in G$ y $U \in T$, tal que $D \subseteq U$, existe $V \in T$ que cumple

$i)$ $D \subseteq V$.
$ii)$ Si $F \in G$ y $F \cap V \neq \varnothing$, entonces $F \subseteq U$.

Definición 3.29. Sea $\{D_n\}_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos el límite superior de $\{D_n\}_1^\infty$, $lim\ sup\ D_n$, como el conjunto de los $x \in X$ que cumplen que cualquier abierto U que tenga a x, U intersecta a una infinidad de conjuntos $D_{n's}$.

Proposición 3.30. *Sea X un continuo y G una partición de X, tal que los elementos de G son conjuntos cerrados de X. Entonces G es semicontinua superior si y sólo si para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ de X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, $lim\ sup\ D_{a_n} \subseteq D_x$. Donde D_{a_n} denota al único elemento de G que tiene a a_n. Análogamente D_x denota al único elemento de G que tiene a x.*

DEMOSTRACIÓN. Empezaremos con la ida. Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. Supongamos que $y \in lim\ sup\ D_{a_n}$. Si $y \notin D_x$, entonces

$$D_y \subseteq X \setminus D_x,$$

por ser D_y cerrado y X normal, existe U abierto tal que

$$D_y \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus D_x.$$

Por hipótesis existe V abierto tal que $D_y \subseteq V$ y para toda $F \in G$ tal que $F \cap V \neq \varnothing$, $F \subseteq U$. Como $y \in lim\ sup\ D_{a_n}$, hay una infinidad de $D_{a'_n s}$ tal que $D_{a'_n s} \cap V \neq \varnothing$, entonces $D_{a'_n s} \subseteq U$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, entonces $x \in \overline{U}$, por lo tanto $x \in X \setminus D_x$, que es una contradicción. Por lo tanto $y \in D_x$, y esto termina la ida.

Para el regreso, supongamos que G no es semicontinua superior. Entonces existen $D \in G$ y U un conjunto abierto, con $D \subseteq U$, que no cumplen la definición de semicontinua superior.

Para cada $n \in N$ sea $U_n = \{x \in X$, tal que existe $y \in D$, con $x \in B_{\frac{1}{n}}(y)\}$. Al conjunto U_n se le llama la *nube de radio $\frac{1}{n}$ alrededor de D,* observemos que $D \subseteq U_n$.

Como $D \subseteq U$ y U no cumplen la definición de semicontinua superior. Entonces existe $x_n \in U_n$ tal que $D_{x_n} \nsubseteq U$. Sea $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión convergente de $\{x_n\}$, tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, como $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0$ y D es cerrado, entonces $x_0 \in D$.

Por hipótesis $lim\ sup\ D_{x_{n_k}} \subseteq D_{x_0} = D$, esta última igualdad es porque $x_0 \in D$.

Como $D_{x_{n_k}} \nsubseteq U$, existe $y_{n_k} \in D_{x_{n_k}} \setminus U$. Sea $\{y_{n_{k_j}}\}$ una subsucesión convergente de $\{y_{n_k}\}$, tal que $\lim\limits_{j\to\infty} y_{n_{k_j}} = y_0$, entonces $y_0 \notin U$, pero $y_0 \in lim\ sup\ D_{x_{n_k}}$, entonces $y_0 \in D$, que es una contradicción pues $D \subseteq U$. Por lo tanto G es semicontinua superior. □

Ahora definiremos adecuadamente un conjunto G para que sea una partición semicontinua superior, con ayuda de la Proposición 3.30.

Definición 3.31. Sea X un continuo. Para cada $x \in X$, sea

$$g_x = \bigcap\{A \in C(X) :\ \text{existe } B \in C(X),\ \text{con } B \subseteq^0 A \text{ y } x \in int(B)\}.$$

$C(X)$ denota al conjunto de subcontinuos de X. Definimos a G como

$$G = \{g_x : x \in X\}.$$

Las siguientes dos observaciones nos ayudarán a demostrar que G es un partición cuando X cumple las hipótesis del Teorema 3.27.

Observación 3.32. Sean $p, q \in X$, X con las hipótesis del Teorema 3.27 y G como en la Definición 4.18. Si $p \in g_q$, entonces $g_p \subseteq g_q$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $p' \in g_p$. Si $p' \notin g_q$, entonces existen H_1 y H_2 subcontinuos de X, tales que $q \in int(H_2)$, $H_2 \subseteq^0 H_1$ y $p' \notin H_1$. Por el Teorema 3.26, existen H_3 y H_4 subcontinuos de X tales que $H_2 \subseteq^0 H_4 \subseteq^0 H_3 \subseteq^0 H_1$. Como $q \in int(H_2)$, $H_2 \subseteq^0 H_4$ y $p \in g_q$, entonces $p \in H_4$. Por otra parte como $H_4 \subseteq^0 H_3$, entonces $p \in int(H_3)$. Además $H_3 \subseteq^0 H_1$ y $p' \in g_p$, entonces $p' \in H_1$, contradiciendo que $p' \notin H_1$. Por lo tanto $p' \in g_1$ y entonces $g_p \subseteq g_q$. □

Observación 3.33. Sea X como en la observación anterior y sean $p, q \in X$. Si $g_p \subseteq g_q$ entonces $g_q \subseteq g_p$.

DEMOSTRACIÓN. Por la observación anterior, basta probar que $q \in g_p$. Si $q \notin g_p$, usando el Teorema 3.26, existen H_1, H_2, H_3 y H_4 subcontinuos de X tales que $p \in int(H_2)$, $H_2 \subseteq^0 H_4 \subseteq^0 H_3 \subseteq^0 H_1$ y $q \notin H_1$.

Sea C_q la componente de q en $X \setminus H_1$, observemos que C_q es abierto y también que $q \in int(\overline{C_q})$. Como $\overline{C_q} \cap H_1 \subseteq fr(H_1)$ y $H_3 \subseteq^0 H_1$ entonces $H_3 \cap \overline{C_q} = \varnothing$. Sea L_q la componente en $X \setminus H_3$ que tiene a $\overline{C_q}$, entonces $\overline{C_q} \subseteq L_q$ y como L_q es abierto, entonces $q \in int(\overline{C_q})$ y $\overline{C_q} \subseteq^0 \overline{L_q}$, luego $g_q \subseteq \overline{L_q}$. Como $\overline{L_q} \cap H_3 \subseteq fr(H_3)$, entonces $\overline{L_q} \cap H_4 = \varnothing$. Por lo tanto $g_q \cap H_4 = \varnothing$.

Por otra parte como $p \in int(H_2)$ y $H_2 \subseteq^0 H_4$, entonces $g_p \subseteq H_4$. De aquí tendríamos que $g_p \cap g_q = \varnothing$, lo cual no pasa, pues $p \in g_q$. Por lo tanto $q \in g_p$ y por la observación anterior $g_q \subseteq g_p$. $\square$

El siguiente corolario nos dice que G es una partición de X.

Corolario 3.34. *Sea X un continuo con las hipótesis del Teorema 3.27. Sean p y q en X, tal que $g_p \cap g_q \neq \varnothing$. Entonces $g_p = g_q$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in g_p \cap g_q$. Por la Observación 3.32, $g_x \subseteq g_p$ y $g_x \subseteq g_q$. Por la Observación 3.33, $g_p = g_x = g_q$, por lo tanto $g_p = g_q$. $\square$

En la siguiente proposición demostraremos el inciso $i)$ del Teorema 3.27.

Proposición 3.35 (Inciso $i)$ del Teorema 3.27). *Sea X un continuo que cumple las hipótesis del Teorema 3.27 y G como en la Definición 4.18. Entonces G es una partición semicontinua superior de subcontinuos de X.*

DEMOSTRACIÓN DEL INCISO $i)$ DEL TEOREMA 3.27. Como X es un continuo encadenable, entonces por el Lema 3.14, tenemos que para cada $x \in X$, g_x es un continuo, lo cual nos dice que los elementos de G son subcontinuos de X.

Acabamos de ver G es una partición de X.

Sólo falta ver que G es semicontinua superior. Por la Proposición 3.30, sólo necesitamos ver que para toda sucesión $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ en X y para toda $p \in X$ tal que $\lim\limits_{i \to \infty} p_i = p$, entonces $lim\ sup\ g_{p_i} \subseteq g_p$.

Sea una sucesión y un elemento de X, como en el párrafo anterior. Sea $y \in lim\ sup\ g_{p_i}$. Si $y \notin g_p$, entonces existen H_1 y H_2 en $C(X)$, tales que $H_2 \subseteq^0 H_1$, $p \in int(H_2)$ y $y \notin H_1$. Como $p \in int(H_2)$ y $\lim\limits_{i \to \infty} p_i = p$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$, $p_n \in int(H_2)$. Entonces si $n \geq N$, $g_{p_n} \subseteq H_1$. Como $y \in lim\ sup\ g_{p_i}$, entonces $y \in H_1$, contradiciendo que $y \notin H_1$. Por lo tanto $lim\ sup\ g_{p_i} \subseteq g_p$. $\square$

En lo que sigue desarrollaremos algunas herramientas para demostrar el inciso $ii)$ del Teorema 3.27. Empecemos con el siguiente lema, que nos dice que dados 3 subcontinuos ajenos de un continuo encadenable, a lo más, sólo uno de ellos puede separar a los otros dos. La definición de que un continuo separe a otros dos se encuentra en la Definición 3.19.

Lema 3.36. Sea X un continuo encadenable, sean H_1, H_2 y H_3 subcontinuos de X ajenos por pares. Supongamos que H_1 separa a H_2 de H_3, entonces H_2 no puede separar a H_1 de H_3 y H_3 no puede separar a H_1 de H_2.

DEMOSTRACIÓN. Como H_1 separa a H_2 de H_3 y X es encadenable, entonces por el Lema 3.15, existen C_1 y C_2 componentes abiertas de $X \setminus H_1$, tales que

$i)$ $X \setminus H_1 = C_2 \cup C_3$,
$ii)$ $H_2 \subseteq C_2$ y $H_3 \subseteq C_3$.

Si H_2 separa a H_1 de H_3, entonces existen L_1 y L_3 componentes abiertas de $X \setminus H_2$, tales que

$i)$ $X \setminus H_2 = L_1 \cup L_3$,
$ii)$ $H_1 \subseteq L_1$ y $H_3 \subseteq L_3$.

Por otra parte,

$$X \setminus (H_1 \cup H_2) = (X \setminus H_1) \cap (X \setminus H_2) = (C_2 \cup C_3) \cap (L_1 \cup L_3) = \\ (C_2 \cap L_1) \cup (C_3 \cap L_1) \cup (C_2 \cap L_3) \cup (C_3 \cap L_3).$$

Observemos que cada uniendo es un conjunto abierto y son ajenos por pares. Veamos que cada uno de los uniendos es no vacío,

- Por el Teorema 3.12, $\overline{C_2} \cap H_1 \neq \varnothing$, entonces existe $y \in H_1 \cap \overline{C_2}$ y como $H_1 \subseteq L_1$, entonces $y \in L_1$, pero L_1 es abierto, por lo tanto $L_1 \cap C_2 \neq \varnothing$.
- Por el Teorema 3.12, $\overline{C_3} \cap H_1 \neq \varnothing$, entonces existe $z \in \overline{C_3} \cap H_1$ y como $H_1 \subseteq L_1$ y L_1 es abierto, entonces $L_1 \cap C_3 \neq \varnothing$.
- Como $\overline{L_3} \cap H_2 \neq \varnothing$, entonces hay un $w \in \overline{L_3} \cap H_2$, como $H_2 \subseteq C_2$, $w \in C_2$ y como C_2 es abierto, entonces $C_2 \cap L_3 \neq \varnothing$
- $L_3 \cap C_3 \neq \varnothing$, pues $H_3 \subseteq L_3 \cap C_3$.

Lo anterior nos dice que $X \setminus (H_1 \cup H_2)$ tiene al menos 4 componentes, lo cual nos contradice el Lema 3.17, pues X es un continuo encadenable. Por lo tanto H_2 no puede separar a H_1 de H_3. Análogamente H_3 no puede separar a H_1 de H_2. $\square$

El siguiente corolario nos dice que si un subcontinuo H, con interior no vacío de un continuo encadenable, separa a otros dos subcontinuos con interior no vacío, entonces todos los subcontinuos con interior no vacío de H, también separan a esos dos subcontinuos.

Corolario 3.37. *Sea X un continuo encadenable, sean H_1, H_2 y H_3 subcontinuos de X con interior no vacío y ajenos por pares. Supongamos que H_2 separa a H_1 de H_3. Si H_2' es un subcontinuo de H_2 con interior no vacío, entonces H_2' también separa a H_1 de H_3.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 3.36, H_1 no separa a H_2 de H_3, entonces $H_2 \cup H_3 \subseteq C$, donde C es una componente de $X \setminus H_1$, entonces $H_2' \cup H_3 \subseteq C$. Lo que nos dice que H_1 no separa a H_2' de H_3. También por el Lema 3.36 tenemos que H_3 no separa a H_1 de H_2, entonces $H_1 \cup H_2 \subseteq K$, donde K es una componente de $X \setminus H_3$, luego $H_1 \cup H_2' \subseteq K$, lo que nos dice que H_3 no separa a H_1 de H_2'. Usando el Lema 3.20, uno de ellos debe separar a los otros dos. Por lo tanto H_2' separa a H_1 de H_3. □

A continuación definimos al conjunto de los intersectandos de g_p. Enseguida veremos que ese conjunto es cerrado bajo intersecciones finitas. En lo que sigue supondremos que X es un continuo que cumple las hipótesis del Teorema 3.27.

Definición 3.38. Sea $p \in X$. Definimos a G_p como

$$G_p = \{H \in C(X) : \text{ existe } B \in C(X) \text{ tal que } p \in int(B) \text{ y } B \subseteq^0 H\}.$$

Observación 3.39. Sea $p \in X$, sean H y K en G_p. Entonces $H \cap K \in G_p$.

DEMOSTRACIÓN. Como $H \in G_p$ y $K \in G_p$, existen $H_1, K_1 \in C(X)$ tales que

$$H_1 \cap K_1 \subseteq int(H) \cap int(K) \text{ y } p \in int(H_1) \cap int(K_1).$$

Como la intersección de los interiores es igual al interior de la intersección, entonces

$$H_1 \cap K_1 \subseteq int(H \cap K) \text{ y } p \in int(H_1 \cap K_1).$$

Por ser X encadenable $K_1 \cap H_1$ es un continuo. Por lo tanto $H \cap K \in G_p$. □

Las siguientes dos observaciones nos ayudarán a probar el Lema 3.42, el cual será importante para probar el inciso $ii)$ del Teorema 3.27.

Observación 3.40. Sean $g_p, g_q \in G$ distintos. Entonces existen $H_p \in G_p$ y $H_q \in G_q$ subcontinuos ajenos de X.

DEMOSTRACIÓN. Como $p \notin g_q$, por el Teorema 3.26, existen H_1, H_2, H_3 y H_4 subcontinuos de X, tales que

$$H_1 \subseteq^0 H_2 \subseteq^0 H_3 \subseteq^0 H_4,\ p \notin H_4 \text{ y } q \in int(H_1),$$

entonces $H_2 \in G_q$.

Por otra parte, como $p \notin H_4$, sea C_p la componente en $X \setminus H_4$ que tiene a p, como $\overline{C_p} \cap H_4 \subseteq fr(H_4)$ entonces $\overline{C_p} \cap H_3 = \varnothing$. Sea L_p la componente en $X \setminus H_3$ tal que $\overline{C_p} \subseteq L_p$, entonces $p \in int(\overline{C_p})$ y $\overline{C_p} \subseteq^0 \overline{L_p}$. Por lo tanto $\overline{L_p} \in G_p$. De nuevo como $\overline{L_p} \cap H_3 \subseteq fr(H_3)$, entonces $\overline{L_p} \cap H_2 = \varnothing$. Con lo cual tenemos que

$$\overline{L_p} \in G_p,\ H_2 \in G_q \text{ y } \overline{L_p} \cap H_2 = \varnothing.$$

□

Observación 3.41. Sean g_p, g_q y g_r elementos distintos de G. Entonces existen H_p, H_q y H_r subcontinuos de X, ajenos por pares, tales que

$$H_p \in G_p, H_q \in G_q \text{ y } H_r \in G_r.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la observación anterior, existen $K_r \in G_r$ y $K_p \in G_p$ ajenos, $B_r \in G_r$ y $B_q \in G_q$ ajenos, $H_p \in G_p$ y $H_q \in G_q$ ajenos. Por la Observación 3.39, $K_r \cap B_r$, $B_q \cap H_q$ y $K_p \cap H_p$ son elementos de G_r, G_q y G_p respectivamente. Además son ajenos por pares. $\square$

Lema 3.42. Sean g_p, g_r y g_q en G, distintos. Entonces uno de ellos separa a los otros dos en X.

DEMOSTRACIÓN. Por la Observación anterior, existen $H_p \in G_p$, $H_q \in G_q$ y $H_r \in G_r$ ajenos por pares, que además tienen interior no vacío. Por el Lema 3.20, uno de esos subcontinuos separa a los otros dos, podemos suponer que H_q separa a H_r de H_p. Sea

$$G'_q = \{H \in C(X) : H \in G_q \; y \; H \subseteq H_q\}.$$

Recordemos que $g_q = \bigcap G_q$. Veamos que $g_q = \bigcap G'_q$. Como $G'_q \subseteq G_q$, entonces $g_q \subseteq \bigcap G'_q$. Para la otra contención tomamos $y \in \bigcap G'_q$ y $H \in G_q$. Como $H_q \in G_q$, por la Observación 3.39, $H \cap H_q \in G_q$, entonces $H \cap H_q \in G'_q$, luego $y \in H$. Por lo tanto $y \in g_q$.

Por el Corolario 3.37, cada elemento H de G'_q separa a H_r de H_p. Como $g_r \subseteq H_r$ y $g_p \subseteq H_p$, entonces cada H de G'_q separa a g_r de g_p.

Entonces para cada $H \in G'_q$ existen R_H y P_H componentes abiertas de $X \setminus H$, tales que

$$X \setminus H = R_H \cup P_H, \quad g_r \subseteq R_H \quad \text{y} \quad g_q \subseteq P_H.$$

Se sigue que

$$X \setminus g_q = X \setminus \bigcap G'_q = \bigcup_{H \in G'_q} X \setminus H = \bigcup_{H \in G'_q} (R_H \cup P_H) = (\bigcup_{H \in G'_q} R_H) \cup (\bigcup_{H \in G'_q} P_H).$$

Cada uno de estos dos últimos uniendos es abierto, conexo y contienen a g_r y g_p respectivamente. Veamos que no se intersectan. Supongamos que se intersectan, entonces existen H_1 y H_2 en G'_q, tales que $x \in R_{H_1} \cap P_{H_2}$. Por la Observación 3.39, $H_1 \cap H_2 \in G'_q$, entonces existen $R_{H_1 \cap H_2}$ y $P_{H_1 \cap H_2}$ componentes abiertas de $X \setminus (H_1 \cap H_2)$, tales que

$$g_r \subseteq R_{H_1 \cap H_2} \text{ y } g_p \subseteq P_{H_1 \cap H_2}.$$

Como $X \setminus H_1 \subseteq X \setminus (H_1 \cap H_2)$, entonces $R_{H_1} \subseteq R_{H_1 \cap H_2}$ y $P_{H_2} \subseteq P_{H_1 \cap H_2}$. Por lo tanto $R_{H_1} \cap P_{H_2} \subseteq R_{H_1 \cap H_2} \cap P_{H_1 \cap H_2}$. Esto nos diría que $R_{H_1 \cap H_2} \cap P_{H_1 \cap H_2} \neq \varnothing$, lo cual no pasa, por ser componentes. Por lo tanto

$$(\bigcup_{H \in G'_q} R_H) \cap (\bigcup_{H \in G'_q} P_H) = \varnothing.$$

Lo que nos dice que efectivamente g_q separa a g_r de g_p. $\square$

El siguiente lema será el último que necesitaremos para probar el inciso $ii)$ del Teorema 3.27. Antes de empezar con el siguiente lema, necesitamos recordar que G tiene la topología cociente y que U es un abierto en G, si y sólo si $q^{-1}(U)$ es un abierto en X. Donde $q : X \to G$ es la función proyección dada por $q(x) = g_x$.

Lema 3.43. Sea X un continuo que cumple las hipótesis del Teorema 3.27 y G como en la Definición 4.18, G con la topología cociente. Sean g_p, g_q y g_r elementos distintos de G. Supongamos que g_p separa a g_q de g_r en X, entonces g_p es un punto de corte en G, que separa a g_q de g_r en G. Es decir existen conjuntos abiertos ajenos U, V de G tal que $G \setminus \{g_p\} = U \cup V$, con $g_q \in U$ y $g_r \in V$.

DEMOSTRACIÓN. Como g_p separa a g_q de g_r, existen conjuntos abiertos, U_r y U_q, ajenos de X, tales que $X \setminus g_p = U_r \cup U_q$, donde $g_r \subseteq U_r$ y $g_q \subseteq U_q$. Veamos que

$i)$ $g_r \in q(U_r)$, $g_q \in q(U_q)$.
$ii)$ $G \setminus \{g_p\} = q(U_r) \cup q(U_q)$.
$iii)$ $q(U_r)$ y $q(U_q)$ son conjuntos abiertos y ajenos de G.

Como $g_r \subseteq U_r$, entonces $r \in U_r$. Por lo tanto $q(r) \in q(U_r)$, es decir $g_r \in q(U_r)$. De la misma forma $g_q \in q(U_q)$. Esto prueba $i)$.

Para $ii)$. Sea $g \in G \setminus \{g_p\}$, por ser G una partición de X, $g \cap g_p = \emptyset$. Por lo tanto $g \subseteq U_r \cup U_q$. Como g es un continuo, entonces $g \subseteq U_r$ ó $g \subseteq U_q$, luego $g \in q(U_r) \cup q(U_q)$. Para la otra contención. Sea $x \in U_r \cup U_q$. Entonces $x \notin g_p$, por lo tanto $q(x) \neq g_p$, entonces $q(x) \in G \setminus \{g_p\}$.

Para ver que $q(U_r)$ es abierto en G, veremos que $U_r = q^{-1}(q(U_r))$. Sea $x \in U_r$. Entonces $q(x) \in q(U_r)$, por lo tanto $x \in q^{-1}(q(U_r))$. Ahora sea $x \in q^{-1}(q(U_r))$, entonces $q(x) \in q(U_r)$, luego $q(x) = q(s)$, para algún $s \in U_r$. Como g_s es un continuo y G es una partición, entonces $g_s \subseteq U_r$, por lo tanto $q(x) \subseteq U_r$, entonces $x \in U_r$. Esto prueba la otra contención. Como U_r es un abierto de X y se tiene la igualdad anterior, entonces $q(U_r)$ es abierto. Análogamente se prueba que $q(U_q)$ es un abierto.

Sea $x \in U_r$. Entonces $q(x) \subseteq U_r$. Como $U_r \cap U_q = \emptyset$, entonces $q(x) \cap U_q = \emptyset$, por lo tanto $q(x) \notin q(U_q)$, lo cual nos dice que $q(U_r) \cap q(U_q) = \emptyset$. Esto termina la prueba de $iii)$. □

Finalmente demostraremos el inciso $ii)$ del Teorema 3.27, el cual se encuentra enunciado y demostrado en el siguiente corolario. Para este corolario usaremos el Teorema 6.17 del libro [**7**], pág. 96. El cual nos dice que un continuo es un arco si y sólo si tiene exactamente dos puntos que no son de corte. También usaremos el Teorema 3.10 del libro [**7**], pág. 40. El cual nos dice que una partición semicontinua superior, con la topología cociente, de un continuo es un continuo.

Corolario 3.44 (Inciso $ii)$ del Teorema 3.27). *Sea X un continuo que cumple las hipótesis del Teorema 3.27 y G como en la Definición 4.18. Entonces G con la topologia cociente es un arco.*

DEMOSTRACIÓN DEL INCISO $ii)$ DEL TEOREMA 3.27. Por la Proposición 3.35, G es un partición semicontinua superior. Entonces por el Teorema 3.10 en [**7**] pág. 40, G es un continuo. Como G es un continuo, por el Teorema 6.6 de [**7**], página 89, G tiene al menos dos puntos g_r, g_q que no son de corte. Si existiera otro g_p que no es punto de corte, por el Lema 3.42, uno de ellos separa a los otros dos en X. Por el Lema, 3.43 uno de ellos debe ser de corte, lo cual contradice que niguno es un punto de corte. Por lo tanto G tiene exactamente dos puntos que no son de corte, entonces por el Teorema 6.17 del libro [**7**], página 96, G es un arco. $\square$

En la siguiente proposición enunciamos y probamos el inciso $iii)$ del Teorema 3.27.

Proposición 3.45. *[**Inciso** $iii)$ **del Teorema 3.27**] Sea X un continuo que cumple las hipótesis del Teorema 3.27 y G como en la Definición 4.18. Entonces para todo $g \in G$, $int(g) = \varnothing$.*

DEMOSTRACIÓN DEL INCISO $iii)$ DEL TEOREMA 3.27. Supongamos que existe $g \in G$, tal que $int(g) \neq \varnothing$. Por el Lema 3.15, $X \setminus g = C_1 \cup C_2$, donde C_1 y C_2 son componentes abiertas de $X \setminus g$, que pueden ser iguales.

Como $int(g) \neq \varnothing$, existe $x \in int(g)$. Entonces $x \in X \setminus (\overline{C_1} \cup \overline{C_2})$. Sea C la componente de x en $X \setminus (\overline{C_1} \cup \overline{C_2})$. Observemos que C es abierto y $C \subseteq g$, entonces $\overline{C} \subseteq g$. Por el Lema 3.23, existen H_1, H_2 y H_3 subcontinuos de X, tales que

$i)$ $\overline{C} = H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

$ii)$ Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, existen $x_i \in int(H_i)$ tal que $x_i \notin H_j \cup H_k$, con i, k y j distintos.

Veamos que algún par de ellos no se intersecta. Si pasara que cualesquiera dos de ellos se intersectan, entonces $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, $H_2 \cap H_3 \neq \varnothing$ y $H_1 \cap H_3 \neq \varnothing$. Como X es encadenable, $H_1 \cap (H_2 \cup H_3) = (H_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap H_3)$ es un continuo. Por lo tanto $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \neq \varnothing$. Lo que nos diría que $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ es un triodo simple, que es una contradicción. Por lo tanto podemos suponer que $H_1 \cap H_3 = \varnothing$. Por el Teorema 3.24, existe K subcontinuo de X con interior no vacío, tal que K separa a H_1 de H_3 en X. Entonces existen C_{H_1} y C_{H_3} conexos abiertos y ajenos tales que $X \setminus K = C_{H_1} \cup C_{H_3}$, $H_1 \subseteq C_{H_1}$ y $H_3 \subseteq C_{H_3}$.

Entonces $H_1 \subseteq^0 \overline{C_{H_1}}$ y $H_3 \subseteq^0 \overline{C_{H_3}}$. Además $x_1 \in int(H_1)$ y $x_3 \in int(H_3)$. Por lo tanto $g_{x_1} \subseteq \overline{C_{H_1}}$ y $g_{x_2} \subseteq \overline{C_{H_3}}$. Por la Observación 3.16, $\overline{C_{H_3}} \subseteq C_{H_3} \cup K$, entonces $x_1 \notin \overline{C_{H_3}}$. Por lo tanto $g_{x_1} \neq g_{x_2}$, que es una contradicción, pues x_1 y x_2 están en g. Por lo tanto $int(g) = \varnothing$. $\square$

La siguiente proposición es la última de este capítulo. En ella enunciaremos y demostraremos el último inciso del Teorem 3.27. Para la siguiente proposición necesitamos recordar qué significa que un continuo sea irreducible entre dos conjuntos. Esto lo haremos en la siguiente definición.

Definición 3.46. Sea X un continuo y sean A, B subconjuntos de X. Decimos que X *es irreducible con respecto a* A *y* B, si no hay subcontinuos propios de X que contengan a $A \cup B$.

Proposición 3.47 (Inciso $iv)$ del Teorema 3.27). *Sea X un continuo que cumple las hipótesis del Teorema 3.27 y G como en la Definición 4.18. G con la topología cociente. Si g_0 y g_1 son los extremos de G, entonces X es irreducible con respecto a g_0 y g_1.*

DEMOSTRACIÓN DEL INCISO $iv)$ DEL TEOREMA 3.27. Supongamos que existe M subcontinuo propio de X tal que $g_0 \cup g_1 \subseteq M$, entonces $g_0, g_1 \in q(M)$ y como G es un arco y g_0, g_1 son los extremos de G, entonces $q(M) = G$.

Sea $x_1 \in X \setminus M$. Como $q(M) = G$, entonces $g_{x_1} \cap M \neq \varnothing$. Si $g_{x_1} \cup M = X$, entonces $X \setminus M \subseteq g_{x_1}$, lo cual nos diría que g_{x_1} tiene interior no vacío, que por la Proposición 3.45 no es cierto. Por lo tanto $g_{x_1} \cup M \subsetneq X$.

Sea $x_2 \in X \setminus (g_{x_1} \cup M)$. Entonces $g_{x_2} \neq g_{x_1}$. Como $q(M) = G$, entonces $g_{x_2} \cap M \neq \varnothing$. Observemos que $M \cup g_{x_1} \cup g_{x_2} \neq X$, si fuese X, entonces $X \setminus (M \cup g_{x_1}) \subseteq g_{x_2}$, que otra vez nos diría que g_{x_2} tiene interior no vacío. Por lo tanto $M \cup g_{x_1} \cup g_{x_2} \subsetneq X$.

Análogamente existe $x_3 \in X \setminus (M \cup g_{x_1} \cup g_{x_2})$ tal que $g_{x_3} \cap M \neq \varnothing$. De lo anterior obtendríamos que $M \cup g_{x_1} \cup g_{x_2} \cup g_{x_3}$ es un triodo débil, que no es cierto porque X es un continuo encadenable. Por lo tanto X es irreducible con respecto a g_0 y g_1. $\square$

Capítulo 4

Órbita Densa Implica Indescomponibilidad

Al hablar de la órbita densa de un punto en el intervalo, podemos imaginar que ese punto pasa por todos los lugares del intervalo, hasta los rincones más chiquitos, y nunca se detiene, todo el tiempo está rondando por el intervalo. Lo cual es señal de que la dinámica de la función puede resultar ser muy complicada. Tal hecho es verdad, pues es conocido que si existe una órbita densa en el intervalo, entonces la función es caótica. Donde caótica es una forma de decir que la dinámica de la función es muy complicada. Para ver este resultado pueden consultar el capítulo 9 del libro [**3**].

Podemos decir que el límite inverso de una función nos da una forma de interpretar a la dinámica de la función, pues el límite inverso contiene mucha información sobre las órbitas de la función. No es de extrañar que si la dinámica de la función es complicada, resulte que el límite inverso también sea un continuo complicado. Por ejemplo en nuestro caso, que tenemos una función definida en el intervalo, que tiene una órbita densa, podría ser que el límite inverso fuese un continuo muy complicado.

Algunos ejemplos de continuos complicados son el continuo de Knaster, el pseudoarco y el solenoide diádico. Resulta que estos continuos son indescomponibles. Durante mucho tiempo resultó difícil encontrar este tipo de continuos. Uno de los primeros que apareció fue el contino de Knaster, el cual estudiamos en el capítulo 2. Uno de los continuos indescomponibles muy importantes, que de hecho es hereditariamente indescomponible es el pseudoarco. Este continuo ha sido muy estudiado por los continuólogos, al parecer tiene propiedades muy interesantes.

El objetivo de este capítulo es estudiar el límite inverso de una función continua de un intervalo en sí mismo, $f : I \to I$, cuando f posee una órbita densa. Veremos que el límite inverso siempre contiene un subcontinuo indescomponible. De hecho daremos las condiciones dinámicas que debe cumplir f para que el límite inverso sea exactamente un continuo indescomponible. Veremos también que si el límite inverso no resulta ser indescomponible, entonces se puede ver como la unión de dos subcontinuos indescomponibles que se intersectan en un punto. Para poder probar estos resultados tan interesantes, necesitaremos ayuda del teorema que se desarrolla en la siguiente sección.

4.1. Órbitas densas en intervalos

En esta sección trabajaremos con un intervalo cerrado I de $\mathbb{R}$ y con una función continua $f : I \to I$. El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema 4.13. Para demostrar este teorema necesitaremos ayuda de algunos lemas previos, que acontinuación se desarrollan.

El siguiente lema nos dice que si un intervalo es unión finita de conjuntos cerrados, entonces es también unión finita de la cerradura de los interiores de los conjuntos cerrados respectivos.

Lema 4.1. Sea I un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Supongamos que existen $B_1, B_2, ..., B_n$ subconjuntos cerrados de I tales que

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} B_i,$$

entonces

$$I = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} int(B_i)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar esta igualdad, observemos que basta demostrar que

$$int(I) \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} int(B_i)}.$$

Demostremos esta última contención.

Supongamos que existe $x \in int(I)$ tal que $x \notin \overline{\bigcup_{i=1}^{n} int(B_i)}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(x) \subseteq I \quad \text{y} \quad B_\delta(x) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} int(B_i)) = \varnothing.$$

Suponiendo lo anterior veamos por inducción que para toda $k \in \{1, ..., n\}$, existe $y \in B_\delta(x)$ y existen $B_{n_1}, B_{n_2}, ..., B_{n_k}$ distintos tales que

$$y \notin \bigcup_{i=1}^{k} B_{n_i}. \tag{2}$$

Veamos que $k = 1$ lo cumple. Como $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = I$, entonces $x \in B_r$ para algún $r \in \{1, 2, ..., n\}$, pero $x \notin int(B_r)$, entonces $B_\delta(x) \cap (\mathbb{R} \setminus B_r) \neq \varnothing$. Como $B_\delta(x) \subseteq I$, entonces $B_\delta(x) \cap (I \setminus B_r) \neq \varnothing$. Sea $y \in B_\delta(x) \cap (I \setminus B_r)$. Entonces $y \in B_\delta(x)$ y existe un B_r tal que $y \notin B_r$, esto demuestra la base de inducción.

Ahora supongamos que (2) se cumple para r, con $1 \leq r < n$. Entonces se tiene que existe $y \in B_\delta(x)$ y existen $B_{n_1}, B_{n_2}, ..., B_{n_r}$ distintos tales que $y \notin \bigcup_{i=1}^{r} B_{n_i}$. Como $\bigcup_{i=1}^{r} B_{n_i}$ es cerrado y $y \in B_\delta(x)$, podemos tomar un $\delta_1 > 0$ tal que $B_{\delta_1}(y) \subseteq B_\delta(x)$

y $B_{\delta_1}(y) \cap (\bigcup_{i=1}^{r} B_{n_i}) = \varnothing$. Como $y \in I$, existe j tal que $y \in B_j$. Como $B_\delta(x) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} int(B_i)) = \varnothing$, entonces $y \notin int(B_j)$, luego $B_{\delta_1}(y) \cap (I \setminus B_j) \neq \varnothing$, entonces existe $z \in B_{\delta_1}(y) \subseteq B_\delta(x)$ y $z \notin B_j$. Además $z \notin \bigcup_{i=1}^{r} B_{n_i}$. Como $y \in B_j$, entonces $B_j \neq B_{n_i}$ para toda $i \in \{1, 2, 3, ..., r\}$. Con lo cual tenemos que $z \in B_\delta(x)$, $z \notin \bigcup_{i=1}^{r} B_{n_i} \cup B_j$ y los $B_{'s}$ son distintos. Esto prueba el caso $k = r + 1$.

Sigamos con la demostración del lema. Usando (2) para el caso $k = n$, tenemos que existe $z \in B_\delta(x)$ tal que $z \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_{n_i}$ y los $B_{n's}$ distintos, pero esto no puede pasar, pues $I = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Por lo tanto $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} int(B_i)}$. Lo cual nos dice que $int(I) \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} intB_i}$. Por lo tanto $I \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} intB_i}$. $\square$

El siguiente teorema es parecido a un caso particular del teorema de la categoria de Baire. Nosotros lo hemos probado sólo con la ayuda del lema anterior.

Teorema 4.2. *Sea I un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Supongamos que existen $B_1, B_2, ..., B_n$, subconjuntos cerrados de I, tales que*

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} B_i,$$

entonces existe $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ tal que $int(B_k) \neq \varnothing$.

DEMOSTRACIÓN. Si para toda $k \in \{1, 2, ..., n\}$ el $int(B_k) = \varnothing$, por el Lema 4.1, se tendría que

$$I = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} int(B_i)} = \varnothing,$$

entonces $I = \varnothing$, lo cual no puede pasar. Por lo tanto existe un k tal que $int(B_k) \neq \varnothing$. $\square$

Ahora sí, empezaremos con dinámica. La siguiente observación, que será muy utilizada en las próximas pruebas, nos dice que si una función tiene una órbita densa, entonces la función manda intervalos cerrados no degenerados en intervalos cerrados no degenerados.

Observación 4.3. Sea $f : I \to I$ una función continua y sea $x \in I$ tal que

$$O(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\},$$

es densa en I. Si $J \subseteq I$ es un intervalo cerrado no degenerado, entonces $f(J)$ es un intervalo cerrrado no degenerado.

DEMOSTRACIÓN. Como f es continua, entonces $f(J)$ es un intervalo cerrado.

Supongamos que $f(J) = \{y\}$, para algún $y \in I$. Como $O(x, f)$ es denso en I y J es no degenerado, podemos tomar $n, m \in \mathbb{N}$, con $n > m$ tal que $\{f^n(x), f^m(x)\} \subseteq J$. Con lo cual $f^{m+1}(x) = y = f^{n+1}(x)$ y $f^{n-m}(f^{m+1}(x)) = f^{m+1}(x)$, esto nos diría que $f^{m+1}(x) = y$ es un punto periódico, lo cual implicaría que que $O(x, f)$ no es denso en I.

Por lo tanto $f(J)$ es un intervalo cerrado no degenerado. $\square$

La siguiente observación, que no la demostraremos, será útil para demostrar el próximo lema.

Observación 4.4. Sea A un subconjunto cerrado de I y sean $y_1, y_2, ..., y_n \in I \backslash A$. Entonces $int(A \cup \{y_1, y_2, ..., y_n\}) \subseteq int(A)$.

La siguiente conjunto será muy importante para el resto del capítulo, ya que la mayor parte de los resultados de este capítulo están relacionados con este conjunto.

Definición 4.5. Sea $f : I \to I$ una función continua, sea $x \in I$ y sean s y k números enteros, con $s \geq 1$ y $k \geq 0$. Definimos a $A_{s,k}(x)$ como un subconjunto de $O(x, f)$ dado por

$$A_{s,k}(x) = \{f^{sn+k}(x) : n \geq 0\}.$$

Cuando se entienda que estamos trabajando con un $x \in I$ en particular, escribiremos $A_{s,k}$ en vez de $A_{s,k}(x)$.

De aquí en adelante, hasta el final de esta sección, estaremos trabajando con un intervalo cerrado I de $\mathbb{R}$, una función continua $f : I \to I$ y un punto $x \in I$, cuya órbita es densa en I. Algunas veces no mencionaremos estas hipótesis, pero se entenderá que las estamos suponiendo.

En el siguiente lema enunciaremos algunas propiedades del conjunto $A_{s,k}$, que acabamos de definir. Tales propiedades serán básicas para los siguientes resultados.

Lema 4.6. Sea $x \in I$, tal que $O(x, f)$ es un conjunto denso en I. Sea $s \geq 1$, denotamos a $B_r = \overline{A_{s,r}}$. Entonces se cumple lo siguiente.

i) $\displaystyle\bigcup_{r=0}^{s-1} B_r = I$.

ii) $int(B_r) \neq \varnothing$ para toda $r \in \{0, 1, ..., s-1\}$.

iii) Sean $j, r \in \{0, 1, ..., s-1\}$. Si $int(B_r) \cap int(B_j) \neq \varnothing$, entonces $int(B_r) = int(B_j)$.

DEMOSTRACIÓN. Empecemos con $i)$. Recordemos que si $n \in \mathbb{N}$, por el algoritmo de la división, $n = sk + r$, con $0 \leq r \leq s-1$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\} = \{f^{sk+r}(x) : 0 \leq r \leq s-1 \text{ y } k \in \mathbb{N}\}$, con lo cual $\bigcup_{r=0}^{s-1} A_{s,r} = A_{1,0}$. Como $O(x, f)$ es denso en I y $O(x, f) = A_{1,0}$, entonces

$$\bigcup_{r=0}^{s-1} B_r = \bigcup_{r=0}^{s-1} \overline{A_{s,r}} = \overline{A_{1,0}} = I.$$

Ahora demostremos $ii)$. Veamos primero que para $0 \leq r$, $f(B_r) \subseteq B_{r+1}$. Sea $y \in B_r$. Entonces existe $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} f^{sn_i+r}(x) = y.$$

Como f es continua, entonces

$$\lim_{i\to\infty} f^{sn_i+(r+1)}(x) = f(y),$$

luego $f(y) \in B_{r+1}$, por lo tanto $f(B_r) \subseteq B_{r+1}$. Además observemos que $A_{s,s} \subseteq A_{s,0}$, pues $f^{sn+s}(x) = f^{s(n+1)}(x)$. Por lo tanto $B_s \subseteq B_0$.

Por el Teorema 4.2, existe un $k \in \{0, 1, ..., s-1\}$ tal que $int(B_k) \neq \varnothing$. Por la Observación 4.3, tenemos que $f(B_k)$ contiene un intervalo no degenerado. Acabamos de ver que $f(B_k) \subseteq B_{k+1}$, entonces B_{k+1} contiene un intervalo cerrado no degenerado. Por el párrafo anterior, tenemos que $f(B_0) \subseteq B_1$, $f(B_1) \subseteq B_2$,..., $f(B_{s-2}) \subseteq B_{s-1}$ y $f(B_{s-1}) \subseteq B_s \subseteq B_0$. De esto y de la Observación 4.3, se sigue que para toda $k \in \{0, 1, ..., s-1\}$, $int(B_k) \neq \varnothing$.

Finalmente demostraremos $iii)$. Sea $r, j \in \{0, 1, ..., s-1\}$ y supongamos que $int(B_r) \cap int(B_j) \neq \varnothing$. Sea $y \in int(B_r) \cap int(B_j)$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y) \subseteq B_r \cap B_j$. Como $y \in B_r$, entonces y es límite de una sucesión de elementos de B_r, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{sn+r}(x) \in B_\delta(y)$. Como $f^{sn+r}(x)$ también está en B_j, existe una sucesión $\{f^{sn_i+j}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ de B_j tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{sni+j}(x) = f^{sn+r}(x).$$

Como f es continua, para $l \geq 0$ se cumple

$$f^{sn+r+sl}(x) = f^{s(n+l)+r}(x) = f^{sl}(\lim_{i\to\infty} f^{sn_i+j}(x)) = \lim_{i\to\infty} f^{s(n_i+l)+j}(x).$$

Entonces para toda $l \geq 0$,

$$f^{s(n+l)+r}(x) = \lim_{i\to\infty} f^{s(n_i+l)+j}.$$

De esto se se sigue que $\{f^{sk+r}(x) : k \geq n\} \subseteq B_j$, entonces

$$B_r \subseteq B_j \cup \{f^r(x), f^{s+r}(x), f^{2s+r}(x), ..., f^{s(n-1)+r}(x)\}.$$

Por la Observación 4.4, tenemos que $int(B_r) \subseteq int(B_j)$. Para demostrar que $int(B_j) \subseteq int(B_r)$, hacemos un argumento similar. Por lo tanto tenemos que $int(B_j) = int(B_r)$. $\square$

En la siguiente observación definiremos un conjunto G, el cual será importante para demostrar el Teorema 4.13. Empezaremos a descubrir quién es en verdad ese conjunto G. Cuando lleguemos a descubrir quién es, estaremos más cerca de demostrar el Teorema 4.13.

Observación 4.7. Supongamos las hipótesis del Lema 4.6. Sea $s \geq 1$ fija.

Sea $G = \{g \subseteq I : g$ es componente de $int(B_r),$ para algún r con $0 \leq r \leq s-1\}$. Entonces se cumple lo siguiente.

$i)$ G es un conjunto a lo más numerable de intervalos abiertos de I, ajenos por pares. Con lo cual G se puede escribir como $G = \{g_1, g_2, ..., g_n, ...\}$.

$ii)$ Para cada $i \geq 1$, sea $C_i = \overline{g_i}$. Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $f(C_i) \subseteq C_b$.

$iii)$ Para cada $i, j \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(C_i) \subseteq C_j$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si $g, h \in G$ y $g \cap h \neq \varnothing$, por el insicio $iii)$ del Lema 4.6, se tiene que $g = h$. Como para cada $r \in \{0, 1, 2, ..., s-1\}$, $int(B_r)$ es abierto y localmente conexo, por el Ejercicio 5.22 inciso $a)$, pág. 83 de [**7**], cada componente g es un intervalo abierto. Entonces G es una colección de intervalos abiertos disjuntos. Como I es un espacio métrico, sólo puede tener a lo más una cantidad numerable de esos. Luego G se puede ver como $G = \{g_1, g_2, ..., g_n, ...\}$.

Para el inciso $ii)$, tomemos $i \in \mathbb{N}$. Como $g_i \subseteq B_r$ para algún $r \in \{0, 1, 2, ..., s-1\}$, entonces $C_i \subseteq B_r$, luego $f(C_i) \subseteq f(B_r) \subseteq B_{r+1}$ (por la prueba del inciso $ii)$ del Lema 4.6). Con lo cual $int(f(C_i)) \subseteq int(B_{r+1})$ y como $int(f(C_i))$ es un intervalo conexo y abierto que está contenido en $int(B_{r+1})$, entonces existe una componente g_b del $int(B_{r+1})$, con $b \in \mathbb{N}$, tal que $int(f(C_i)) \subseteq g_b$. Luego $\overline{int(f(C_i))} \subseteq \overline{g_b}$. Por lo tanto $f(C_i) \subseteq C_b$.

Para el inciso $iii)$ tomemos $i, j \in \mathbb{N}$. Recordemos que como $O(x, f)$ es densa en I, entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$ tal que $f^m(x) \in int(C_j)$ y $f^n(x) \in C_i$. Sea $k = m - n$. Entonces $f^k(f^n(x)) \in f^k(C_i)$ y $f^k(f^n(x)) \in int(C_j)$, luego

$$int(f^k(C_i)) \cap int(C_j) \neq \varnothing,$$

pues por la Observacion 4.3, $f^k(C_i)$ es un intervalo no degenerado.

Por el inciso $ii)$ tenemos que existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $f(C_i) \subseteq C_b$, luego $f^k(C_i) \subseteq f^{k-1}(C_b)$. Usando el inciso $ii)$ varias veces tenemos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k-1}(C_b) \subseteq C_r$, entonces $f^k(C_i) \subseteq C_r$. Con lo cual tenemos que $int(f^k(C_i)) \subseteq int(C_r)$. Luego

$$\varnothing \neq int(f^k(C_i)) \cap int(C_j) \subseteq int(C_r) \cap int(C_j).$$

Por lo tanto $int(C_r) \cap int(C_j) \neq \varnothing$ y por ser g_r, g_j componentes, $g_r = g_j$, entonces $C_r = C_j$ y por lo tanto $f^k(C_i) \subseteq C_j$, esto prueba la observación. □

Seguimos en la búsqueda de quién es ese conjunto G, en el próximo lema demostraremos que G es un conjunto finito.

Lema 4.8. Supongamos las hipótesis del Lema 4.6. Sea G como en la Observación 4.7, entonces G es finito.

DEMOSTRACIÓN. Para facilitar la demostración vamos a empezar a numerar a los conjuntos $C_{i's}$, desde el C_0. Por el inciso $i)$ de la Observación 4.7, G es a lo más numerable. Por el inciso $iii)$, existe $k \in \mathbb{N}$ el mínimo que cumple que $f^k(C_0) \subseteq C_0$. Por el inciso $ii)$ de la Observación 4.7, para cada $j \geq 0$ existe $i \geq 0$ tal que $f(C_j) \subseteq C_i$.

Supongamos primero que $k > 1$, entonces renumerando los conjuntos $C_{i's}$ podemos suponer que.

$$\begin{gathered} f(C_0) \subseteq C_1 \\ f^2(C_0) \subseteq C_2 \\ f^3(C_0) \subseteq C_3 \\ \vdots \\ f^{k-1}(C_0) \subseteq C_{k-1}. \end{gathered}$$

De aquí tenemos que $f^r(C_0) \subseteq C_r$, si $0 \leq r \leq k-1$.

Veamos que $\{C_j : j \geq 0\} = \{C_0, C_1, C_2, ..., C_{k-1}\}$. Sea $j \geq 0$, por la Observación 4.7, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(C_0) \subseteq C_j$.

Por el algoritmo de la división $m = nk + r$, con $0 \leq r \leq k-1$ y $n \geq 0$. Como $f^k(C_0) \subseteq C_0$, entonces

$$f^m(C_0) = f^r(f^{nk}(C_0)) \subseteq f^r(C_0) \subseteq C_r, \text{ con } 0 \leq r \leq k-1.$$

De esto se sique que $C_j \cap C_r \neq \varnothing$. Como G es una colección de conjuntos ajenos por parejas, entonces $C_r = C_j$. Por lo tanto $\{C_j : j \geq 0\} = \{C_0, C_1, ..., C_{k-1}\}$ y entonces G es finito.

Si $k = 1$, entonces $f^1(C_0) \subseteq C_0$. Siguiendo un argumento similiar para cuando $k > 1$, se tiene que $\{C_j : j \geq 0\} = \{C_0\}$.

□

Por ser G finito, podemos escribir a $G = \{g_0, g_1, g_2, ..., g_{k-1}\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Denotaremos a $\overline{G} = \{\overline{g_0}, \overline{g_1}, \overline{g_2}, ..., \overline{g_{k-1}}\} = \{C_0, C_1, C_2, ..., C_{k-1}\}$. Del Lema 4.6 y el Lema 4.1, se sigue que

$$I = \overline{\bigcup_{r=0}^{s-1} int(B_r)} = \overline{\bigcup_{i=0}^{k-1} g_i} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \overline{g_i} = \bigcup_{i=0}^{k-1} C_i.$$

El siguiente lema nos dice que G no sólo es finita, ¡tiene a lo más 2 elementos!

Lema 4.9. Supongamos las hipótesis del Lema 4.6 y G como en el Lema 4.8. Sea $\overline{G} = \{C_0, C_1, C_2, ..., C_{k-1}\}$. Entonces $\overline{G}$ tiene a lo más 2 elementos.

DEMOSTRACIÓN. Como f es continua en I, existe un $y \in I$ tal que $f(y) = y$.

Si $y \in int(C_j)$ para alguna $j \in \{0, 1, ..., k-1\}$, entonces $f(y) \in f(C_j)$, luego $int(C_j) \cap f(C_j) \neq \varnothing$. Por ser ambos intervalos no degenerados, tenemos que $int(f(C_j)) \cap int(C_j) \neq \varnothing$. Por el inciso $ii)$ de la Observación 4.7 y por ser G una colección de conjuntos ajenos por pares, se sigue que $f(C_j) \subseteq C_j$. Por la demostración del Lema 4.8, se sigue que $\{C_0, C_1, ..., C_{k-1}\} = \{C_j\}$.

Si y es uno de los extremos del intervalo I. Sea $r \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$ tal que $y \in C_r$. Como $f(y) = y$, entonces $y \in f(C_r) \cap C_r$. Por ser y un punto extremo de I, y $f(C_r), C_r$ intervalos cerrados no degenerados, entonces $int(C_r) \cap int(f(C_r)) \neq \varnothing$. Por lo tanto $f(C_r) \subseteq C_r$. Se sigue de la demostración del Lema 4.8 que $\{C_0, C_1, ..., C_{k-1}\} = \{C_r\}$.

Por último si y no es extremo de I y $y \notin int(C_j)$ para toda $j \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$, entonces existen C_i, C_j distintos tales que $y \in C_j \cap C_i$. Como $y \in f(C_j) \cap C_j$ y $f(C_j) \nsubseteq C_j$, pues al menos hay dos distintos, C_j y C_i. Entonces $f(C_j) \cap C_j = \{y\}$. También se cumple que $C_i \cap C_j = \{y\}$, entonces $f(C_j) \subseteq C_i$. Análogamente se prueba $f(C_i) \subseteq C_j$. Por lo tanto $f^2(C_j) \subseteq C_j$. Se sigue de la demostración del Lema 4.8 que $\{C_0, C_1, ..., C_k\} = \{C_i, C_j\}$. $\square$

La siguiente observación nos dice que una función que tiene una órbita densa, es suprayectiva. Así que cada vez que pensemos en una función que tiene una órbita densa daremos por hecho que es suprayectiva. Esta observación será de ayuda para el siguiente lema, aunque también la utilizaremos más adelante para otros resultados.

Observación 4.10. Sea $f : I \to I$ una función continua y sea $x \in I$ tal que $O(x, f)$ es densa en I, entonces f es suprayectiva

DEMOSTRACIÓN. Como $O(x, f) \setminus \{x\} \subseteq f(I)$, entonces $\overline{O(x, f) \setminus \{x\}} \subseteq \overline{f(I)}$. Como $O(x, f)$ es densa en I, entonces $\overline{O(x, f) \setminus \{x\}} = I$. Además, f es una función continua, entonces $\overline{f(I)} = f(I)$. Por lo tanto $f(I) = I$. $\square$

El próximo lema es el último que se presenta antes de empezar a enunciar y demostrar el teorema principal de esta sección. El lema nos dice, finalmente, cómo se comporta el conjunto G definido en la Observacion 4.7. Más aún, nos dice que f manda un elemento de G en el otro.

Lema 4.11. Supongamos las hipótesis del Lema 4.9. Sea $\overline{G}$ como en el Lema 4.9. Supongamos que $\overline{G} = \{C_0, C_1\}$, con $C_0 \neq C_1$, entonces

- $i)$ $I = C_0 \cup C_1$, donde C_0, C_1 son intervalos cerrados no degenerados tal que $C_0 \cap C_1 = \{p\}$.
- $ii)$ $f(C_0) = C_1$, $f(C_1) = C_0$ y p es un punto fijo de f.

DEMOSTRACIÓN. El inciso $i)$ se sigue de los Lemas 4.6, 4.1 y de que $G = \{g_0, g_1\}$, donde g_0, g_1 son intervalos ajenos de I.

Para el inciso $ii)$. Como $C_0 \neq C_1$, entonces por el inciso $ii)$ de la Observación 4.7, se sigue que

$$f(C_0) \subseteq C_1 \quad \text{y} \quad f(C_1) \subseteq C_0.$$

Por la Observación 4.10, f es suprayectiva, entonces $f(C_0 \cup C_1) = f(C_0) \cup f(C_1) = I = C_1 \cup C_1$. Por lo tanto $f(C_0) = C_1$ y $f(C_1) = C_1$.

De lo que acabamos de probar se sigue que $f(p) \in C_0 \cap C_1$ y como $C_0 \cap C_1 = \{p\}$, entonces $f(p) = p$. $\square$

La siguiente observación algo técnica es para demostrar la segunda parte del inciso $1)$ del Teorema 4.13.

Observación 4.12. Sea $s \geq 1$ y $k \geq s$ tal que $k = sn + r$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r \leq s - 1$. Entonces

$$A_{s,k} \cup \{f^r(x), f^{s+r}(x), f^{2s+r}(x), ..., f^{s(n-1)+r}(x)\} = A_{s,r}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f^{sm+k}(x) \in A_{s,k}$, con $m \geq 0$, entonces

$$f^{sm+k}(x) = f^{sm+sn+r}(x) = f^{s(m+n)+r}(x).$$

Por lo tanto $f^{sm+k}(x) \in A_{s,r}$, con lo cual probamos $\subseteq$.

Ahora sea $f^{sm+r}(x) \in A_{s,r}$. Si $m \leq n-1$, entonces $f^{sm+r}(x)$ está en la segunda parte de la unión. Si $n \leq m$, entonces $m = n + t$ con $t \geq 0$. Luego

$$f^{sm+r}(x) = f^{s(n+t)+r}(x) = f^{st+sn+r}(x) = f^{st+k}(x)$$

y por definición, $f^{st+k}(x) \in A_{s,k}$, con lo cual tenemos la otra contención. $\square$

Finalmente enunciaremos y probaremos el Teorema principal de esta sección. En este Teorema nos fijaremos en el subconjunto $A_{2,0}$ de la órbita densa de f. Parte de lo que dice el teorema es que si $A_{2,0}$ es denso en I, entonces para toda $s \geq 1$ y $k \geq 0$, $A_{s,k}$ es denso en I. Y si $A_{2,0}$ no es denso en I, entonces I se puede descomponer en dos subintervalos cerrrados no degenerados que sólo se intersectan en un punto y que f manda uno en el otro. A mi parecer esta descomposición es muy bella, y me sorprende que podemos obtener todo esto con sólo tener un punto cuya órbita es densa.

Teorema 4.13. *Sea $f : I \to I$ una función continua. Supongamos que existe $x \in I$ tal que $O(x, f)$ es densa en I, es decir $A_{1,0}$ es denso en I, entonces*

1) *Si $A_{2,0}$ es denso en I, entonces $A_{s,k}$ es denso en I para toda $s \geq 1$ y $k \geq 0$.*
2) *Si $A_{2,0}$ no es denso en I entonces*
   2.1) *$I = \overline{A_{2,0}} \cup \overline{A_{2,1}}$, donde $\overline{A_{2,0}}$ y $\overline{A_{2,1}}$ son intervalos cerrados no degenerados.*
   2,2) *$\overline{A_{2,0}} \cap \overline{A_{2,1}} = \{p\}$, donde p es un punto fijo de f.*
   2,3) *$f(\overline{A_{2,0}}) = \overline{A_{2,1}}$ y $f(\overline{A_{2,1}}) = \overline{A_{2,0}}$.*
   2,4) *Para toda $k \geq 1$, $\overline{A_{2k,0}} = \overline{A_{2,0}}$ y $\overline{A_{2k,1}} = \overline{A_{2,1}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Empecemos con el inciso 1). Supongamos que $\overline{A_{2,0}} = I$. Sea $s \geq 1$, denotamos a $n(s)$ la cantidad de elementos de $\overline{G}$. Por el Lema 4.9, $n(s) = 1$ ó $n(s) = 2$.

Si $n(s) = 2$, por el Lema 4.11, existen dos intervalos cerrados no degenerados de I, C_0, C_1, tales que $C_0 \cap C_1 = \{p\}$, $f(C_0) = C_1$, $f(C_1) = C_0$ y $C_0 \cup C_1 = I$. Sea $x \in I$ el que cumple que $O(x, f)$ es densa en I. Supongamos que $x \in C_0$, entonces para toda $j \in \mathbb{N}$, $f^{2j}(x) \in C_0$, con lo cual $A_{2,0} \subseteq C_0$. Por lo tanto $A_{2,0} \cap int(C_1) = \varnothing$, lo cual contradice que $\overline{A_{2,0}} = I$. Por lo tanto $n(s) = 1$.

Tenemos que $n(s) = 1$, con lo cual $C_0 = I$. Sea $k \in \{0, 1, 2, ..., s-1\}$, entonces existe $j \geq 0$ tal que $g_j \subseteq int(\overline{A_{s,k}}) \subseteq \overline{A_{s,k}}$. Como $n(s) = 1$, entonces $\overline{g_j} = C_j = C_0 = I$. Por lo tanto $\overline{A_{s,k}} = I$.

Si $k \geq s$, entonces por el algoritmo de la división, $k = sn + r$, con $r \in \{0, 1, 2, ..., s - 1\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Por la Observación 4.12, tenemos que

$$A_{s,k} \cup \{f^r(x), f^{s+r}(x), f^{2s+r}(x), ..., f^{s(n-1)+r}(x)\} = A_{s,r},$$

entonces $\overline{A_{s,k} \cup \{f^r(x), ..., f^{s(n-1)+r}(x)\}} = \overline{A_{s,r}} = I$. Por lo tanto $\overline{A_{s,k}} = I$. Con esto termina la primera parte del teorema.

Ahora veamos el caso cuando $\overline{A_{2,0}} \neq I$. Para $s = 2$, $n(s) = 2$, pues si $n(s) = 1$, entonces $C_0 = I$ y como $C_0 \subseteq \overline{A_{2,0}}$, entonces $\overline{A_{2,0}} = I$, contradiciendo que $\overline{A_{2,0}} \neq I$, por lo tanto $n(2) = 2$. Entonces por el Lema 4.11, existen C_0, C_1 intervalos cerrados no degenerados de I y p un punto fijo de f, tales que

$$I = C_0 \cup C_1, \quad C_0 \cap C_1 = \{p\}, \quad f(C_0) = C_1 \quad \text{y} \quad f(C_1) = C_0.$$

Recordemos que $O(x, f)$ es densa en I. Supongamos que $x \in C_0$, entonces para toda $j \geq 0$, $f^{2j}(x) \in C_0$ y $f^{2j+1}(x) \in C_1$. Por lo tanto $\overline{A_{2,0}} \subseteq C_0$ y $\overline{A_{2,1}} \subseteq C_1$. Ahora como $int(C_0) \cap C_1 = \varnothing$, entonces $int(C_0) \cap \overline{A_{2,1}} = \varnothing$. Por el Lema 4.6, $I = \overline{A_{2,0}} \cup \overline{A_{2,1}}$, entonces $int(C_0) \subseteq \overline{A_{2,0}}$, por lo tanto $C_0 \subseteq \overline{A_{2,0}}$. Con lo cual $\overline{A_{2,0}} = C_0$. Similarmente $\overline{A_{2,1}} = C_1$. Entonces

- $I = \overline{A_{2,0}} \cup \overline{A_{2,1}}$, con $\overline{A_{2,0}}$ y $\overline{A_{2,1}}$ intervalos cerrados no degenerados.
- $\overline{A_{2,0}} \cap \overline{A_{2,1}} = \{p\}$, donde p es un punto fijo de f.
- $f(\overline{A_{2,0}}) = \overline{A_{2,1}}$ y $f(\overline{A_{2,1}}) = \overline{A_{2,0}}$

Para el inciso $2.4)$. Si $j \in \mathbb{N}$, entonces $\overline{A_{2j,0}} \subseteq \overline{A_{2,0}}$ y $\overline{A_{2j,1}} \subseteq \overline{A_{2,1}}$. Como $\overline{A_{2,0}} \neq I$, entonces $\overline{A_{2j,0}} \neq I$, luego $n(2j) = 2$. Por el Lema 4.11, para $s = 2j$, existen D_0, D_1 subconjuntos cerrados de I, tales que

$$I = D_0 \cup D_1,\ f(D_0) = D_1,\ f(D_1) = D_0 \text{ y } D_0 \cap D_1 = \{z\}, \text{ donde } z \text{ es un punto fijo de } f.$$

Por el párrafo anterior, $z = p$. Entonces podemos suponer que $D_0 = \overline{A_{2,0}}$ y $D_1 = \overline{A_{2,1}}$. Por la construcción de D_0 y D_1, debe pasar que $D_0 \subseteq \overline{A_{2j,0}}$ y $D_1 \subseteq \overline{A_{2j,1}}$. Por lo tanto $\overline{A_{2j,0}} = \overline{A_{2,0}}$ y $\overline{A_{2j,1}} = \overline{A_{2,1}}$. Lo cual concluye la demostración del teorema. $\square$

4.2. Órbita Densa Implica Indescomponibilidad

En la sección anterior descubrimos algunas propiedades que tiene el intervalo I, en relación con la dinámica de la función $f : I \to I$, cuando $f : I \to I$ tiene una órbita densa. En esta sección usaremos tales propiedades para demostrar que el límite inverso de $f : I \to I$, contiene un subcontinuo indescomponible.

En esta sección también será el momento de usar el poderoso Teorema de Bing (Teorema 3.27), el cual nos llevó todo el capítulo anterior. El Teorema de Bing nos ayudará a probar que si $A_{2,0}$ es denso en I, entonces (I, f) es exactamente un continuo indescomponible. Este resultado será la base para demostrar los siguientes incisos del Teorema 4.26.

Pero antes de demostrar tal hecho, necesitaremos desarrollar un poco más de teoría sobre límites inversos.

Un punto $\overline{y} \in (I, f)$ es de la forma $\overline{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3, ...)$. Si $\overline{z}, \overline{y} \in (I, f)$, entonces

$$d(\overline{y}, \overline{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|y_i - z_i|}{2^i}.$$

Definición 4.14. Sea $f : I \to I$ una función continua. Definimos a $\hat{f} : (I, f) \to (I, f)$, como

$$\hat{f}(\overline{x}) = (f(x_0), x_0, x_1, x_2, ...)$$

La función $\hat{f} : (I, f) \to (I, f)$, es conocida en sistemas dinámicos como la *función corrimiento*. Observemos que $\hat{f} : (I, f) \to (I, f)$ es una función continua, pues es continua entrada a entrada. Además es inyectiva y suprayectiva. Por lo tanto, como (I, f) es un continuo, entonces $\hat{f} : (I, f) \to (I, f)$ es un homeomorfismo.

En lo que sigue supondremos que existe $x \in I$ tal que $O(x, f)$ es densa en I. Por la Observación 4.10, $f : I \to I$ es suprayectiva, entonces a x le podemos asociar un $\overline{x} \in (I, f)$, que cumple que $x_0 = x$.

El siguiente lema nos dice que si $O(x, f)$ es denso en I, entonces $O(\overline{x}, \hat{f})$ es denso en (I, f), donde $\overline{x}$ es el punto que le asociamos a x en el párrafo anterior.

Lema 4.15. Sea $f : I \to I$ una función continua y sea $x \in I$ tal que la $O(x, f)$ es densa en I. Si $\overline{x} \in (I, f)$ tal que $x_0 = x$, entonces $A = \{\hat{f}^n(\overline{x}) : n \geq 0\}$ es denso en (I, f).

DEMOSTRACIÓN. Sea $\overline{y} \in (I, f)$ y sea $\epsilon > 0$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$. Sabemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, f^i es uniformente continua, luego existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f^i(x) - f^i(y)| < \frac{\epsilon}{4}$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Ahora nos fijamos en y_n. Como $O(x, f)$ es densa en I, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f^N(x) - y_n| < \delta$ y $|f^N(x) - y_n| < \frac{\epsilon}{4}$. Sea $\overline{z} = \hat{f}^{N+n}(\overline{x})$, entonces

$$d(\overline{y}, \overline{z}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|f^{N+i}(x) - y_{n-i}|}{2^{n-i}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|z_i - y_i|}{2^i} < \sum_{i=0}^{n} \frac{\epsilon}{4(2^{n-i})} + \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto $d(\overline{y}, f^{N+n}(\overline{x})) < \epsilon$ y entonces A es denso en (I, f). $\square$

Sabemos que si existe $x \in I$ tal que $O(x, f)$ es densa en I, entonces $f : I \to I$ es suprayectiva. El siguiente lema nos dice que el regreso no siempre se cumple.

Lema 4.16. Sea $f : I \to I$ una función continua. Si f es un homeomorfismo, entonces no existe $x \in I$ tal que $O(x, f)$ sea densa en I.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $x \in I$ tal que $O(x, f)$ es densa en I. Como $f : I \to I$ es un homeomorfismo, entonces es creciente o decreciente.

Si f es creciente y $x < f(x)$, entonces

$$x < f(x) < f^2(x) < f^3(x) < \cdots < \cdots .$$

Por lo tanto $O(x, f) \cap (x, f(x)) = \varnothing$.

Si f es creciente y $f(x) < x$, entonces

$$\cdots < \cdots < f^3(x) < f^2(x) < f(x) < x.$$

Por lo tanto $O(x, f) \cap (f(x), x) = \varnothing$.

Si f es decreciente y $x < f^2(x)$, entonces $f^3(x) < f(x)$. Como f^2 es creciente se tiene que

$$\cdots < \cdots < f^7(x) < f^5(x) < f^3(x) < f(x) \text{ y } f^2(x) < f^4(x) < f^6(x) < \cdots < \cdots .$$

Como $O(x, f)$ es densa, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{2k+1}(x) < f^2(x) < f^4(x) < \cdots < \cdots$$

Con lo cual tendríamos que

$$\cdots < \cdots < f^{2(k+2)+1}(x) < f^{2(k+1)+1}(x) < f^{2k+1}(x) < f^{2k}(x) < f^{2(k+1)}(x) < \cdots < \cdots$$

De esta ordenación se sigue que $O(f^{2k}(x), f)$ no es densa en I. Lo cual es una contradicción, pues $O(f^{2k}(x), f)$ es denso en I, ya que sólo le quitamos una cantidad finita de puntos a $O(x, f)$.

Si $f^2(x) < x$, entonces $f(x) < f^3(x)$. Usamos un argumento parecido para llegar a una contradicción.

En todos los casos hemos llegado a una contradicción. Por lo tanto no hay órbitas densas de homeomorfismos en el intervalo. □

El siguiente lema será útil para demostrar la primera parte del inciso $a)$ del Teorema 4.26.

Lema 4.17. Si G es homeomorfo al intervalo I y $g : G \to G$ es un homeomorfismo, entonces no existe $x \in G$ tal que $O(x, g)$ es denso en G.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $x \in G$ tal que $O(x, g)$ es denso en G y sea $f : G \to I$ el homeomorfismo de G en I. Definamos a $h : I \to I$ como

$$h(x) = f \circ g \circ f^{-1}(x).$$

Observemos que h es un homeomorfismo.

Veamos que $O(f(x), h)$ es denso en I. Observemos primero que

$$h^n(f(x)) = \underbrace{f \circ g \circ f^{-1} \circ f \circ g \circ f^{-1} ... f \circ g \circ f^{-1}}_{n\ veces}(f(x)) = f \circ g^n(x).$$

Si U es un abierto de I, entonces $f^{-1}(U)$ es un abierto de G, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(x) \in f^{-1}(U)$, entonces $f(g^n(x)) \in U$. Como $h^n(f(x)) = f \circ g^n(x)$, entonces $h^n(f(x)) \in U$. Lo cual nos dice $O(f(x), h)$ es denso en I, contradiciendo el lema anterior. Por lo tanto no existen órbitas densas en G. □

A continuación empezaremos a descubrir algunas propiedades de las particiones de un espacio, con el fin de ir preparando el terreno para demostrar el Teorema 4.26.

En la siguiente definición introducimos una función $\hat{\hat{f}} : G \to G$, donde G es una partición de (I, f). Inmediatamente después veremos en la siguiente observación que esta función tiene una propiedad muy importante, que será la base para demostrar el próximo lema.

Si G es una partición de (I, f). Podemos escribir a G como $G = \{g_{\overline{x}} : \overline{x} \in (I, f)\}$, donde $g_{\overline{x}}$ es el único elmento de G que tiene a $\overline{x}$.

Definición 4.18. Sea $\hat{f} : (I, f) \to (I, f)$, la función dada en la Definición 4.14. Sea G, $G = \{g_{\overline{x}} : \overline{x} \in (I, f)\}$, una partición de (I, f) con la topología cociente que cumple que para toda $\overline{x} \in (I, f)$

$$\hat{f}(g_{\overline{x}}) = g_{\hat{f}(\overline{x})}.$$

Definimos a $\hat{\hat{f}} : G \to G$ la función dada por

$$\hat{\hat{f}}(g_{\overline{x}}) = g_{\hat{f}(\overline{x})}.$$

Más adelante veremos que la partición G de (I, f) que obtenemos del Teorema de Bing, cumple la definición anterior.

Observación 4.19. Sea G como en la definición anterior y sea $\overline{x} \in (I, f)$. Entonces

$$\hat{\hat{f}}^n(g_{\overline{x}}) = g_{\hat{f}^n(\overline{x})}.$$

DEMOSTRACIÓN. Esta observación lo demostraremos por inducción.

Si $n = 1$, entonces $\hat{\hat{f}}(g_{\overline{x}}) = g_{\hat{f}(x)}$, que es la definición de $\hat{\hat{f}}$.

Ahora supongamos que la observación se cumple para n. Veamos que se cumple para $n + 1$, entonces

$$\hat{\hat{f}}^{n+1}(g_{\overline{x}}) = \hat{\hat{f}}(\hat{\hat{f}}^n(g_{\overline{x}})) = \hat{\hat{f}}(g_{\hat{f}^n(\overline{x})}) = g_{\hat{f}(\hat{f}^n(\overline{x}))} = g_{\hat{f}^{n+1}(\overline{x})}.$$

Por lo tanto $\hat{\hat{f}}^{n+1}(g_{\hat{x}}) = g_{\hat{f}^{n+1}(\overline{x})}$. □

Recordemos que al principio de esta sección empezamos con un punto x, cuya órbita es densa en I. A ese punto le asociamos un punto $\overline{x} \in (I, f)$. Al punto $\overline{x}$ le podemos asociar el punto natural, $g_{\overline{x}} \in G$, donde G es una partición de (I, f). En el siguiente lema veremos que la órbita de $g_{\overline{x}}$ bajo la función $\hat{\hat{f}}$, es densa en G.

Para el siguiente lema usaremos la topología cociente, recordemos que U es un abierto en G si y sólo si $q^{-1}(U)$ es abierto en (I,f), donde $q:(I,f)\to G$ es la función proyección dada por $q(\overline{x})=g_{\overline{x}}$.

Lema 4.20. Sea G una partición de (I,f) con la topología cociente, G como en la Definición 4.18. Sea $\overline{x}\in(I,f)$. Supongamos que $\{\hat{f}^n(\overline{x})\mid n\geq 0\}$ es denso en (I,f), entonces $\{\hat{\hat{f}}^n(g_{\overline{x}})\mid\geq 0\}$ es denso en G.

Demostración. Sea $\hat{A}$ un abierto en G, entonces $q^{-1}(\hat{A})$ es abierto en (I,f), luego existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\hat{f}^n(\overline{x})\in q^{-1}(\hat{A})$, entonces $g_{\hat{f}^n(\overline{x})}\in\hat{A}$. Por la Observación 4.19, $\hat{\hat{f}}^n(g_{\overline{x}})=g_{\hat{f}^n(\overline{x})}$, entonces $\hat{\hat{f}}^n(g_{\overline{x}})\in\hat{A}$. □

En este momento es hora de recordar un poco acerca del capítulo anterior. En el capítulo anterior vimos que si X es un continuo encadenable que no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacío, entonces el Teorema de Bing (Teorema 3.27), afirma que existe una partición G de X tal que sus elementos son de la forma

$$g_x=\bigcap\{A\in C(X)|\text{ existe } B\in C(X)\text{ con } B\subseteq int(A)\text{ y } x\in int(B)\}.$$

Que cumple que G con la topología cociente es un arco.

El Teorema de Bing nos pide para empezar, un continuo encadenable. Como nosotros vamos a usar este teorema para probar los resultados principales este capítulo, los cuales tienen que ver con (I,f), será necesario ver que (I,f) es un continuo encadenable.

Gracias al siguiente lema podemos usar la fuerza del Teorema de Bing.

Lema 4.21. Sea $f:I\to I$ una función continua y suprayectiva, entonces (I,f) es un continuo encadenable.

Demostración. Recordemos de la Sección 3.1, que para ver que un continuo es encadenable basta ver que es un continuo *Arc-like*. Es decir, que para toda $\epsilon>0$, existe una función $f_\epsilon:(I,f)\to I$, continua y suprayectiva tal que $\operatorname{diam}(f_\epsilon^{-1}(x))<\epsilon$, para toda $x\in I$.

Veamos que (I,f) es un continuo *Arc-like*. Sea $\epsilon>0$, sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n}<\epsilon$. Consideremos la función proyección en la entrada n, $\pi_n:(I,f)\to I$. Sabemos que π_n es una función continua y como f es una suprayectiva, entonces π_n también es suprayectiva.

Sea $x\in I$, y sean $\overline{z},\overline{y}\in\pi_n^{-1}(x)$. Como $\overline{z},\overline{y}\in(I,f)\cap\pi_n^{-1}(x)$, entonces $z_i=y_j$ para toda $0\leq j\leq n$. Por lo tanto

$$d(\overline{z},\overline{y})=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i}\leq\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^n}<\epsilon.$$

Por lo tanto $\operatorname{diam}(\pi_n^{-1}(x))<\epsilon$. □

En lo que sigue, cuando se hable de G, estaremos hablando del conjunto G que nos regala el Teorema de Bing. Supondremos que (I, f) no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacio.

La siguiente proposición nos será importante para demostrar el siguiente lema.

Proposición 4.22. *Supongamos que X es un continuo encadenable que no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacío y sea G la partición que nos da el Teorema 3.27. Si $f : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces para toda $x \in X$, $g_{f(x)} = f(g_x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in X$. Sea $y \in g_{f(x)}$, veamos que $f^{-1}(y) \in g_x$. Sea $H \in C(X)$ tal que existe $B \in C(X)$ con $B \subseteq int(H)$ y $x \in int(B)$. Por ser f homeomorfismo se tiene que $f(B) \subseteq int(f(H))$ y $f(x) \in int(f(B))$. Como $y \in g_{f(x)}$, entonces $y \in f(H)$, luego $f^{-1}(y) \in H$. Por lo tanto $f^{-1}(y) \in g_x$.

Veamos ahora la otra contención. Sea $y \in f(g_x)$. Entonces $y = f(w)$, con $w \in g_x$. Veamos que $y \in g_{f(x)}$. Sea $H \in C(X)$ tal que existe $B \in C(X)$ con $B \subseteq int(H)$ y $f(x) \in int(B)$. Por ser f^{-1} homeomorfismo se tiene que $f^{-1}(B) \subseteq int(f^{-1}(H))$ y $x \in int(f^{-1}(B))$, entonces $w \in f^{-1}(H)$, luego $y \in H$. Por lo tanto $y \in g_{f(x)}$, esto prueba la proposición. $\square$

Saber que $\hat{\hat{f}} : G \to G$ es un homeomorfismo, será la herramienta principal que nos ayudará a probar la primera parte del inciso $a)$ del Teorema 4.26.

A continuación probaremos que $\hat{\hat{f}} : G \to G$ es un homeomorfismo.

Lema 4.23. Supongamos que X es un continuo encadenable que no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacío. Sea G la partición que nos da el Teorema 3.27. Si $f : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces $\hat{f} : G \to G$, la función dada por $\hat{f}(g_x) = g_{f(x)}$, es un homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero la inyectividad. Sean $g_x, g_y \in G$ tal que $\hat{f}(g_x) = \hat{f}(g_y)$. Entonces $g_{f(x)} = g_{f(y)}$. Por la Proposición 4.22, $f(g_x) = f(g_y)$ y por ser f homeomorfismo, $g_x = g_y$.

Sea $g_x \in G$, entonces $\hat{f}(g_{f^{-1}(x)}) = g_{f(f^{-1}(x))} = g_x$. Por lo tanto $\hat{f}$ es suprayectiva.

Veamos ahora que $\hat{f}$ es un homeomorfismo. Sea $\hat{A}$ un abierto en G, entonces $\hat{A}$ se puede ver de la forma $\hat{A} = \{g_x | x \in A\}$, donde $A \subseteq X$. Como $\hat{f}$ es biyectiva, $\hat{f}^{-1}(\hat{A}) = \{\hat{f}^{-1}(g_x) | x \in A\}$.

Como $\hat{f}(g_{f^{-1}(x)}) = g_x$, entonces $\hat{f}^{-1}(\hat{f}(g_{f^{-1}(x)})) = \hat{f}^{-1}(g_x)$, por lo tanto $\hat{f}^{-1}(g_x) = g_{f^{-1}(x)}$.

Entonces $\hat{f}^{-1}(\hat{A}) = \{g_{f^{-1}(x)} | x \in A\}$. Por ser $\hat{A}$ un abierto de G, $\bigcup_{x \in A} g_x$ es un abierto de X, entonces $f^{-1}(\bigcup_{x \in A} g_x)$ es un abierto de X. Como $g_{f(x)} = f(g_x)$, entonces $f(g_{f^{-1}(x)}) =$

g_x y $g_{f^{-1}(x)} = f^{-1}(g_x)$, luego

$$f^{-1}(\bigcup_{x\in A} g_x) = \bigcup_{x\in A} f^{-1}(g_x) = \bigcup_{x\in A} g_{f^{-1}(x)} = q^{-1}(\hat{f}^{-1}(\hat{A})),$$

donde $q : X \to G$ es la función proyección. Entonces $q^{-1}(\hat{f}^{-1}(\hat{A}))$ es un abierto de X, por lo tanto $\hat{f}$ es continua. Como G es un arco y $\hat{f} : G \to G$ es una función continua y biyectiva, entonces $\hat{f}$ es un homeomorfismo. □

La siguiente observación es muy conocida en teoría de continuos, de hecho la mencionamos en el primer capítulo. Ahora la demostraremos, cosa que no es tan difícil. Esta observación será la que utilizaremos para ver que ciertos continuos son indescomponibles.

Observación 4.24. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entre continuos y $S \subseteq X$ es un subcontinuo indescomponible de X, entonces $f(S)$ es un subcontinuo indescomponible de Y.

DEMOSTRACIÓN. Sea S un subcontinuo indescomponible de X, veamos que $f(S)$ es un subcontinuo indescomponible de Y. Supongamos que existe $Y \subsetneq f(S)$ un subcontinuo propio con interior no vacío, entonces $f^{-1}(Y) \subsetneq S$. Por ser f un homeomorfismo, tendríamos que S contiene un subcontinuo propio con interior no vacío, lo cual contradice al hecho de que S es un continuo indescomponible. Por lo tanto $f(S)$ es un subcontinuo indescomponible de Y. □

El próximo lema será el último que mencionaremos en este capítulo, este lema es consecuencia del Lema 4.15, el cual enunciamos al principio de esta sección.

El próximo lema lo necesitaremos para probar la última parte del inciso $a)$ del próximo teorema.

Lema 4.25. Sea $f : I \to I$ una función continua y suprayectiva, sean $k \geq 1$, $l \geq 0$ y $x \in I$, tal que $\{f^{nk+l}(x) : n \geq 0\}$ es denso en I, entonces $\{\hat{f}^{nk+l}(\overline{x}) : n \geq 0\}$ es denso en (I, f), donde $\overline{x} = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)$ tal que $x_0 = x$ y $\overline{x} \in (I, f)$.

DEMOSTRACIÓN. Como el conjunto $\{f^{nk+l}(x) : n \geq 0\}$ es denso en I, entonces el conjunto $\{f^{nk}(f^l(x)) : n \geq 0\}$ es denso en I.

Sea $g = f^k$. Entonces $\{g^n(f^l(x)) : n \geq 0\}$ es denso en I. Luego $O(f^l(x), g)$ es densa en I. Usando el Lema 4.15, tenemos que $\{g^n(\overline{z}) : n \geq 0\}$ es denso en (I, g). Donde $\overline{z} \in (I, g)$, $\overline{z} = (f^l(x), ...)$.

Se sigue que $\{(\hat{f}^k)^n(\hat{f}^l(\overline{x})) : n \geq 0\}$ es denso en (I, f), luego $\{(\hat{f})^{kn}(\hat{f}^l(\overline{x})) : n \geq 0\}$ es denso en (I, f). Por lo tanto $\{\hat{f}^{nk+l}(\overline{x}) : n \geq 0\}$ es denso en (I, f). □

El siguiente teorema es el teorema principal de este capítulo y también uno de los teoremas más importantes de la tesis.

El enunciado de este teorema es un formalización de lo que dijimos en el último párrafo de la introducción de este capítulo.

A primera vista la demostración se ve muy larga, lo cual hace pensar que puede llegar a ser tediosa y difícil de entender. Aunque se vea larga, esperemos que, gracias a los lemas anteriores, pueda ser un poco menos difícil de entender. Invitamos al lector a que le eche un vistazo. Con este teorema concluimos este capítulo.

Teorema 4.26. *Sea $f : I \to I$ una función continua. Supongamos que existe $x \in I$ tal que la órbita de x es densa en I, entonces pasa lo siguiente.*

(a) *Si el conjunto $\{f^{2n}(x) : n \geq 0\}$ es denso en I, entonces (I, f) es un continuo indescomponible.*

(b) *Si el conjunto $\{f^{2n}(x) : n \geq 0\}$ no es denso en I, entonces existen subcontinuos propios H y K de (I, f) tales que*

- (i) *H y K son subcontinuos indescomponibles de (I, f).*
- (ii) *$H \cup K = (I, f)$.*
- (iii) *$H \cap K$ es un punto fijo bajo $\hat{f}$.*
- (iv) *$\hat{f}(H) = K$ y $\hat{f}(K) = H$.*

DEMOSTRACIÓN. Empezaremos a demostrar el inciso $a)$. Supongamos entonces que $\{f^{2n}(x) | n \geq 0\}$ es denso en I.

Veamos primero que (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible con interior no vacío.

Supongamos que (I, f) no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacío. Como (I, f) es un continuo encadenable, entonces por el Teorema 3.27, hay una partición G de (I, f), tal que G con la topología cociente es un arco.

Como $\hat{f} : (I, f) \to (I, f)$ es un homeomorfismo, entonces por el Lema 4.23, la función $\hat{\hat{f}} : G \to G$ dada por

$$\hat{\hat{f}}(g_{\overline{x}}) = g_{\hat{f}(\overline{x})}$$

es un homeomorfismo. Como $O(x, f)$ es densa, entonces por la Observación 4.10, f es suprayectiva. Con lo cual podemos definir a

$$\overline{x} = (x_0, x_1, ..., x_n, ...) \text{ tal que } x_0 = x \text{ y } \overline{x} \in (I, f).$$

Por el Lema 4.15, $\{\hat{f}^n(\overline{x}) : n \geq 0\}$ es denso en (I, f), y por el Lema 4.20, $\{\hat{\hat{f}}^n(g_{\overline{x}}) : n \geq 0\} = O(g_{\overline{x}}, \hat{\hat{f}})$ es denso en G. Tenemos que $\hat{\hat{f}} : G \to G$ es un homeomorfismo que tiene una órbita densa. Además G es homeomorfo a un intervalo. Esto contradice el Lema 4.17, esta contradicción vino de suponer que (I, f) no contiene subcontinuos indescomponibles con interior no vacío. Por lo tanto hay un subcontinuo indescomponible S de (I, f) que tiene interior no vacío.

El siguiente paso es probar que $(I,f) = S$. Para esto primero veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $int(\hat{f}^k(S) \cap S) \neq \varnothing$.

Como S tiene interior no vacío y $\{\hat{f}^n(\overline{x}) : n \geq 0\}$ es denso en (I,f), entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$, con $m > n$, tal que $\hat{f}^n(\overline{x}) \in int(S)$ y $\hat{f}^m(\overline{x}) \in int(S)$. Sea $k = m - n$. Entonces $\hat{f}^k(\hat{f}^n(\overline{x})) \in \hat{f}^k(int(S))$. Como $\hat{f}$ es un homeomorfismo, entonces $\hat{f}^k(int(S))$ es un abierto, luego

$$\hat{f}^k(\hat{f}^n(\overline{x})) = \hat{f}^m(\overline{x}) \in int(\hat{f}^k(S)) \cap int(S).$$

Por lo tanto $int(\hat{f}^k(S) \cap S) \neq \varnothing$.

Como S es un continuo indescomponible y por la Observación 4.24, $\hat{f}^k(S)$ también es un continuo indescomponible, entonces S y $\hat{f}^k(S)$ no pueden tener subcontinuos propios con interior no vacío. Como $int(\hat{f}^k(S) \cap S) \neq \varnothing$, $\hat{f}^k(S) \cap S \subseteq S$ y $\hat{f}^k \cap S \subseteq \hat{f}^k(S)$, entonces $\hat{f}^k(S) \cap S = S$ y $\hat{f}^k \cap S = \hat{f}^k(S)$. Por lo tanto $\hat{f}^k(S) = S$.

Ahora, sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{f}^l(\overline{x}) \in S$, entonces $\hat{f}^{l+k}(\overline{x}) \in S$, $\hat{f}^{l+2k}(\overline{x}) \in S$ y así para toda $n \in \mathbb{N}$, $\hat{f}^{l+nk}(\overline{x}) \in S$. Como $\{f^{2n}(x) : n \geq 0\}$ es denso en I, entonces por el inciso $1)$ del Teorema 4.13, $\{f^{nk+l}(x) : n \geq 0\}$ es denso en I y por el Lema 4.25, $\{\hat{f}^{nk+l}(\overline{x}) : n \geq 0\}$ es denso en (I,f), entonces

$$(I,f) = \overline{\{\hat{f}^{nk+l}(\overline{x}) : n \geq 0\}} \subseteq \overline{S} \subseteq (I,f).$$

Por lo tanto $(I,f) = S$ y entonces (I,f) es un continuo indescomponible.

Ahora pasemos al inciso $b)$. Supongamos que $\overline{\{f^{2n}(x) | n \geq 0\}}$ no es denso en I. Entonces por el Teorema 4.13, se tiene que $\overline{A_{2,0}}$ y $\overline{A_{2,1}}$ [1] son intervalos cerrrados no degenerados que cumplen

$i)$ $\overline{A_{2,0}} \cup \overline{A_{2,1}} = I$,
$ii)$ $f(\overline{A_{2,0}}) = \overline{A_{2,1}}$, $f(\overline{A_{2,1}}) = \overline{A_{2,0}}$,
$iii)$ $\overline{A_{2,0}} \cap \overline{A_{2,1}} = \{p\}$ tal que $f(p) = p$.

Llamemos a $\overline{A_{2,0}} = C_1$ y a $\overline{A_{2,1}} = C_2$

A partir de esta información definimos los siguientes conjuntos H y K.

$$H = \{\overline{y} \in (I,f) : \text{ para toda } n \geq 0,\ \ y_{2n} \in C_1 \text{ y } y_{2n+1} \in C_2\} \quad \text{y}$$

$$K = \{\overline{y} \in (I,f) : \text{ para toda } n \geq 0,\ \ y_{2n} \in C_2 \text{ y } y_{2n+1} \in C_1\}.$$

Veamos que H y K son los que nos pide el teorema.

Primero veremos que $\hat{f}(H) = K$ y $\hat{f}(K) = H$.

Empecemos con $\hat{f}(H) = K$.

Sea $\overline{x} \in K$, $\overline{x} = (x_0, x_1, x_2, ...)$. Si nombramos a $(x_1, x_2, x_3, ...) = (y_0, y_1, y_2, ...)$, entonces $y_i = x_{i+1}$ para toda $i \geq 0$. Como $\overline{x} \in K$, se tiene que para toda $n \geq 0$, $x_{2n} \in C_2$

[1] Recordemos que $A_{s,k} = \{f^{sn+k}(x) | n \geq 0\}$

y $x_{2n+1} \in C_1$, entonces $y_{2n} \in C_1$ y $y_{2n+1} \in C_2$. Por lo tanto $(y_0, y_1, y_2, ...) \in H$ y como $\hat{f}(y_0, y_1, y_2, ...) = (x_0, x_1, x_2, ...)$, entonces $\overline{x} \in \hat{f}(H)$.

Sea $\overline{x} \in H$. Entonces para toda $n \geq 0$, $x_{2n} \in C_1$ y $x_{2n+1} \in C_2$. Sea $(y_0, y_1, y_2, ...) = (f(x_0), x_0, x_1, ...)$. Entonces $y_0 \in C_2$, $y_{2i} = x_{2i-1}$, si $i \geq 1$ y $y_{2i+1} = x_{2i}$, si $i \geq 0$. Por lo tanto para toda $i \geq 0$, $y_{2i} \in C_2$ y $y_{2i+1} \in C_1$, lo cual nos dice que que $(y_0, y_1, ...) \in K$ y entonces $\hat{f}(\overline{x}) \in K$. Esto nos prueba la otra contención. Por lo tanto $\hat{f}(H) = K$. La prueba de que $\hat{f}(K) = H$ es similar.

Ahora veremos que H y K son subcontinuos propios de (I, f), empecemos con H.

Primero definamos una función $h : C_1 \to C_1$ como $h(x) = f^2(x)$. Observemos que h esta bien definida, entonces (C_1, h) es un continuo. Veamos que (C_1, h) es homeomorfo a H.

Sea $F : (C_1, h) \to H$, definida como

$$F(y_0, y_1, y_2, y_3, ...) = (y_0, f(y_1), y_1, f(y_2), y_2, f(y_3), y_3, ..., f(y_n), y_n, ...).$$

Observemos que las entradas pares de esta sucesión son de la forma $y_n \in C_1$ y que las entradas impares son de la forma $f(y_n) \in C_2$, entonces $F(y_0, y_1, y_2, ...) \in H$. Por lo tanto F está bien definida.

Veamos ahora que F es inyectiva. Sean $\overline{z}, \overline{y} \in (C_1, h)$, supongamos que $F(y_0, y_1, y_2, ...) = F(z_0, z_1, z_2, ...)$, entonces las entradas pares de las dos sucesiones son iguales y por lo tanto $(y_0, y_1, y_2, ...) = (z_0, z_1, z_2, ...)$. Esto prueba la inyectividad.

Sea $(y_0, y_1, y_2, ...) \in H$. Entonces para toda $n \geq 0$, $y_{2n} \in C_1$ y $y_{2n+1} \in C_2$, luego $(y_0, y_2, y_4, ...) \in (C_1, h)$. Además $F(y_0, y_2, y_4, ...) = (y_0, y_1, y_2, y_3, ...)$. Lo cual prueba la suprayectividad.

Finalmente para ver que F es continua observemos que $\pi_{2i} \circ F = \pi_i$ para toda $i \geq 0$ y $\pi_{2i-1} \circ F = f \circ \pi_i$ para toda $i \geq 1$, las cuales son funciones continuas. Lo cual nos dice que F es continua. Como (C_1, h) es compacto y H es T_2, entonces (C_1, h) es homeomorfo a H. Por lo tanto H es un continuo.

Sea $x_0 \in C_2 \setminus \{p\}$. Entonces por ser f suprayectiva, existe $\overline{x} \in (I, f)$ tal que $x_0 = \pi_0(\overline{x})$. Como $x_0 \in C_2 \setminus \{p\}$, entonces $\overline{x} \notin H$ y por lo tanto H es un subcontinuo propio.

Ya vimos que $\hat{f}(H) = K$ y como $\hat{f}$ es un homeomorfismo y H es un subcontinuo propio, entonces K es un subcontinuo propio.

Ahora veamos que $H \cup K = (I, f)$. De la definición de H y K se sigue que $H \cup K \subseteq (I, f)$. Para la otra contención, tomamos $x \in (I, f)$.

Si $\overline{x}$ es de la forma $\overline{x} = (p, p, p, ...) = \overline{p}$, entonces $x_n \in C_1 \cap C_2$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\overline{x} \in H \cup K$.

Si $\overline{x} \neq \overline{p}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq p$. Sea $N = \text{mín}\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq p\}$. Observemos que si $n \geq N$, $x_n \neq p$, pues $f(p) = p$. Sea $n \geq N$. Entonces $x_n \in C_i$, para algún $i \in \{1, 2\}$, luego $x_{n+1} \in C_j$ con $j \neq i$. Pues si $x_{n+1} \in C_i$, entonces $x_n \in C_j$, luego $x_n \in C_i \cap C_j$, entonces $x_n = p$. Esto es una contradicción, pues $n \geq N$. Entonces los

$x_{n's}$ son alternados, si $n \geq N$. Como $f(C_i) = C_j$, entonces los $x_{n's}$ se alternan para toda $n \geq 0$. Por lo tanto $\overline{x}$ está en H o en K, dependiendo en donde está x_0, en C_1 ó en C_2.

Ahora veremos que $H \cap K = \{\overline{p}\}$. Ya vimos que $\overline{p} \in H \cap K$. Si $\overline{x} \in H \cap K$, entonces $x_n \in C_1 \cap C_2$ para toda $n \geq 0$. Como $C_1 \cap C_2 = \{p\}$, entonces $\overline{x} = \overline{p}$. Esto prueba que $H \cap K = \{\overline{p}\}$.

Finalmente veremos que H y K son continuos indescomponibles. Para esto recordemos que estamos en el caso en donde $O(x, f)$ es denso en I y $A_{2,0}$ no es denso en I. Por el Teorema 4.13, $A_{2(2),0}$ es denso en $\overline{A_{2,0}} = C_1$, es decir $\{f^{4n}(x) : n \geq 0\}$ es denso en C_1. Como $h(x) = f^2(x)$, entonces $\{h^{2n}(x) : n \geq 0\}$ es denso en C_1. Por el inciso $a)$ del Teorema 4.26, (C_1, h) es un continuo indescomponible y como (C_1, h) es homeomorfo a H, entonces H es un continuo indescomponible. Como $\hat{f}(H) = K$ y $\hat{f}$ es un homeomorfismo, entonces K es un continuo indescomponible. Esto concluye la demostración del Teorema 4.26. $\square$

Capítulo 5

Indescomponibilidad y periodo 3

El objetivo de este capítulo es estudiar algunas relaciones que hay entre subcontinuos indescomponibles de (I, f) y puntos periódicos de f cuyos periodos no son potencia de 2.

El Teorema de Sharkovskii nos dice que si $f : I \to I$ tiene un punto periódico que no es potencia de 2, entonces f tiene una infinidad de puntos periódicos. En particular f tiene puntos periódicos de periodo 2^k para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Recordemos que en el capítulo anterior vimos que si f tiene una órbita densa, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible. En este capítulo volverán a aparecer subcontinuos indescomponibles en (I, f), pero ahora será gracias a puntos periódicos de f cuyos periodos no son potencia de 2. Parece ser que cuando la dinámica de f es interesante, aperecen subcontinuos indescomponibles en (I, f).

Para desarrollar la teoría que hay entre indescomponibilidad y puntos periódicos, hemos dividido este capítulo en tres secciones. En la primera sección supondremos que (I, f) es un continuo indescomponible y en base a esta suposición veremos que bajo ciertas condiciones f tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2.

En la segunda sección veremos que si f tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible. También demostraremos un corolario que nos relaciona, puntos periódicos cuyos periodos no son potencia de 2, con subcontinuos indescomponibles de (I, f).

En la última sección mostraremos un ejemplo de una función $f : I \to I$ que cumple que (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible, pero f no tiene puntos periódicos de periodo mayor a 1. Lo cual nos dice que el regreso del Teorema 5.31 no siempre se cumple.

5.1. Indescomponibilidad y Puntos Esquina Implican Periodo 3

Sabemos que los continuos indescomponibles son algo complicados, pues si tan sólo pensamos en el continuo de Knaster y el pseudoarco, ya es suficiente para imaginarnos que este tipo de continuos son difíciles. Además de que guardan algunas propiedades interesantes que escapan de la intuición. Como por ejemplo el pseudoarco, el cual no se puede dibujar por no contener arcos, o el continuo de Knaster que cumple que sus subcontinuos propios son arcos, pero el mismo no es un arco.

Lo anterior nos lanza una pregunta natural relacionado con f e (I, f), la pregunta es: ¿Cómo será f cuando (I, f) sea un continuo indescomponible? Es natural intuir que la función f tiene que ser muy interesante, ya sea con respecto a la dinámica o quizá dinámicamente no sea intersante, pero tal vez sea difícil de construir.

Hablando de dinámica, por ejemplo en el primer capítulo vimos que el límite inverso de la función tienda es el continuo de Knaster. Sabemos que la dinámica de la función tienda es muy interesante ya que tiene puntos periódicos de cualquier periodo, tiene órbitas densas y además es una función caótica.

El objetivo de esta sección es argumentar, que si (I, f) es un continuo indescomponible y f es de cierta forma, entonces f es una función dinámicamente interesante como la tienda.

Nos enfocaremos en funciones que son uniones finitas de funciones monótonas, a este tipo de funciones les diremos que tienen una cantidad finita de puntos esquina (ver Definición 5.13). Observemos que estas funciones son fáciles de construir y podríamos decir que son una clase muy importante de funciones, $f : I \to I$, continuas. Aunque sencillas que parezcan, muchas veces la dinámica de este tipo de funciones resulta muy interesante, como es el caso de la función tienda.

El Teorema 5.23, el cual es el teorema principal de esta sección, nos dice que si $f : I \to I$ es una función continua y suprayectiva que tiene una cantidad finita de puntos esquina y que además cumple que (I, f) es un continuo indescomponible, entonces f tiene puntos periódicos cuyos periodos no son potencia de 2. A continuación desarrollaremos algunas herramientas que nos ayudarán a demostrar este teorema. Algunos de los lemas que se muestran a continuación nos dan información importante, por ejemplo el Lema 5.22 nos da algunas condiciones sobre f, para que f tenga exactamente puntos de periodo 3. Se le invita al lector a que lea detenidamente los resultados previos al Teorema principal, varios de ellos son interesantes.

Primero desarrollaremos algunas herramientas que nos ayudarán a probar el Teorema 5.9, este teorema será importante para probar el Teorema 5.23.

La siguiente definición es muy conocida en teoría de continuos, la recordamos porque será muy utilizada en gran parte del capítulo.

Definición 5.1. Sea X un continuo, sean $x, y \in I$. Decimos que X es irruducible entre x y y si no existe un subcontinuo propio de X que tenga a x y a y.

En la siguiente observación denotaremos a $[x_n, y_n] \subseteq I$, como el intervalo cerrado más chico que tiene a x_n, y_n. Para demostrar el próximo lema, necesitaremos ayuda de la siguiente observación, el cual nos describe una forma de como están ordenados los intervalos $[x_n, y_n]$ cuando $\overline{x}, \overline{y} \in (I, f)$.

Observación 5.2. Sea $f : I \to I$, una función continua. Sean $\overline{x}, \overline{y} \in (I, f)$, con $\overline{x} = (x_0, x_1, x_2, ...)$ y $\overline{y} = (y_0, y_1, y_2, ...)$. Entonces para toda $n \geq 0$ y $k \geq 0$ se tiene que

$i)$ $[x_{k+n}, y_{k+n}] \subseteq f([x_{k+n+1}, y_{k+n+1}])$ y
$ii)$ $f^n[x_{k+n}, y_{k+n}] \subseteq f^{n+1}[x_{k+n+1}, y_{k+n+1}]$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $n \geq 0$ y $k \geq 0$. Como $f(x_{k+n+1}) = x_{k+n}$ y $f(y_{k+n+1}) = y_{k+n}$, entonces por el teorema del valor intermedio

$$[x_{k+n}, y_{k+n}] \subseteq f([x_{k+n+1}, y_{k+n+1}]).$$

Si aplicamos f^n de ambos lados tenemos

$$f^n([x_{k+n}, y_{k+n}]) \subseteq f^{n+1}([x_{k+n+1}, y_{k+n+1}]).$$

Lo cual nos prueba la observación. $\square$

En el siguiente lema empezaremos a utilizar la Definición 5.1. Este lema nos da una propiedad interesante sobre el intervalo cuando existen $\overline{x}, \overline{y} \in (I, f)$ tal que (I, f) es irreducible entre ellos. Las construcciones que haremos en la demostración de este lema nos servirán para probar el Lema 5.5.

Lema 5.3. Sea $I = [a, b]$, sea $f : I \to I$ una función continua y suprayectiva. Supongamos que (I, f) es irreducible entre $\overline{x}$ y $\overline{y}$, entonces para todo $c, d \in I$, con $a < c < d < b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $[c, d] \subseteq f^n([x_n, y_n])$.

DEMOSTRACIÓN. Por la observación anterior, dado $k \geq 0$ tenemos que

$$[x_k, y_k] \subseteq f([x_{k+1}, y_{k+1}]) \subseteq f^2([x_{k+2}, y_{k+2}]) \subseteq \cdots \subseteq f^n[x_{k+n}, y_{k+n}] \subseteq \cdots.$$

Sea

$$L_k = [x_k, y_k] \cup f([x_{k+1}, y_{k+1}]) \cup f^2([x_{k+2}, y_{k+2}]) \cup \cdots f^n([x_{k+n}, y_{k+n}]) \cup \cdots = \bigcup_{n \geq k} f^{n-k}[x_n, y_n].$$

Como $\{f^{n-k}[x_n, y_n]\}_{n \geq k}$ es una sucesión creciente de intervalos, entonces L_k es un intervalo.

Para cada $k \geq 0$, sea

$$J_k = \overline{L_k}.$$

Entonces J_k es un intervalo cerrado.

Veamos que

$$f(J_{k+1}) = J_k.$$

Recordemos que $L_{k+1} = [x_{k+1}, y_{k+1}] \cup f([x_{k+2}, y_{k+2}]) \cup f^2([x_{k+3}, y_{k+3}]) \cup \cdots$, entonces $L_k = [x_k, y_k] \cup f(L_{k+1})$. Como $L_{k+1} \subseteq J_{k+1}$, entonces $f(L_{k+1}) \subseteq f(J_{k+1})$. Además como $[x_k, y_k] \subseteq f([x_{k+1}, y_{k+1}])$ y $f([x_{k+1}, y_{k+1}]) \subseteq f(J_{k+1})$, entonces $[x_k, y_k] \subseteq f(J_{k+1})$. Por lo tanto $[x_k, y_k] \cup f(L_{k+1}) = L_k \subseteq f(J_{k+1})$, entonces $\overline{L_k} \subseteq \overline{f(J_{k+1})}$, luego $J_k \subseteq f(J_{k+1})$.

Para la otra contención, recordemos que como f es continua, se cumple que $f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)}$, entonces $f(\overline{L_{k+1}}) \subseteq \overline{f(L_{k+1})} \subseteq \overline{L_k}$. Por lo tanto $f(J_{k+1}) \subseteq J_k$. Esta contención termina la prueba de que que $f(J_{k+1}) = J_k$.

Como ya vimos que para toda $k \geq 0$, $f(J_{k+1}) = J_k$, entonces podemos hablar de

$$J = \varprojlim(J_k, f).$$

Observemos que J es un subcontinuo de (I, f) que tiene a $\overline{x}$ y a $\overline{y}$, pues para toda $k \geq 0$, $x_k, y_k \in J_k$. Y como (I, f) es irreducible entre $\overline{x}$ y $\overline{y}$, entonces $J = (I, f)$.

Como f es suprayectiva, entonces $J_0 = I$, luego

$$I = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n([x_n, y_n])}.$$

Como L_0 es un intervalo y $\overline{L_0} = I = [a, b]$, entonces

$$\overline{L_0} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n([x_n, y_n]) \cup \{a, b\} = I.$$

De la hipótesis de que $a < c < d < b$ y de la propiedad $f^n([x_n, y_n]) \subseteq f^{n+1}([x_{n+1}, y_{n+1}])$ para toda $n \geq 0$, se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{c, d\} \subseteq f^N([x_N, y_N])$. Por el teorema del valor intermedio $[c, d] \subseteq f^N([x_N, y_N])$. Entonces por la Observación 5.2, si $n \geq N$, $[c, d] \subseteq f^n([x_n, y_n])$. Esto termina la prueba del lema. $\square$

En lo siguiente introducimos la definición de función orgánica. Este tipo de funciones será muy importante, pues en el Teorema 5.9, probaremos que si (I, f) es un continuo indescomponible y f es orgánica, entonces f tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2.

Definición 5.4. Sea $f : I \to I$ una función continua. Decimos que $f : I \to I$ es una *función orgánica* si para todo $\overline{x}, \overline{y}$ en (I, f) tal que (I, f) es irreducible entre $\overline{x}$ y $\overline{y}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n([x_n, y_n]) = I$. Donde $[x_n, y_n]$ denota al intervalo más pequeño que tiene a x_n y a y_n.

Diremos que $f : I \to I$ es *inorgánica* si no es orgánica

Quizá por el difícil manejo de los límites inversos sea complicado encontrar funciones $f : I \to I$ que sean orgánicas. Lo cual nos puede hacer pensar que tal vez ese tipo de funciones no existan. El siguiente lema nos viene a rescatar, ya que gracias a este lema podemos dar una infinidad de ejemplos de funciones orgánicas.

El ejemplo de la función que se da en la última sección de este capítulo es un ejemplo de función inorgánica.

Lema 5.5. Sea $I = [a, b]$ y $f : I \to I$ continua. Supongamos que existen p, q en (a, b) y $r, s \geq 1$ tal que $f^r(p) = a$ y $f^s(q) = b$, entonces $f : I \to I$ es orgánica.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\overline{x}, \overline{y}$ en (I, f) tales que (I, f) es irreducible entre ellos. Veamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n([x_n, y_n]) = I$.

Como $f(f^{r-1}(p)) = a$, $f(f^{s-1}(q)) = b$ y f es continua, entonces, por el teorema del valor intermedio, f es suprayectiva.

Como f es suprayectiva, entonces este lema cumple las hipótesis del lema anterior. Usando el hecho de que, $\varprojlim(J_k, f) = (I, f)$, de la demostración del lema anterior y que f es suprayectiva, se sigue que $J_r = I$. Es decir

$$J_r = \overline{L_r} = \overline{\bigcup_{n \geq r} f^{n-r}([x_n, y_n])} = I.$$

Como $p \in (a, b)$ y L_r es un intervalo, entonces $p \in \bigcup_{n \geq r} f^{n-r}([x_n, y_n])$, luego existe N_1 tal que $p \in f^{N_1 - r}([x_{N_1}, y_{N_1}])$. Como $f^r(p) = a$, entonces $a \in f^{N_1}([x_{N_1}, y_{N_1}])$. Análogamente tenemos que $J_s = I$, entonces existe N_2 tal que $q \in f^{N_2 - s}([x_{N_2}, y_{N_2}])$. Como $f^s(q) = b$, entonces $b \in f^{N_2}([x_{N_2}, y_{N_2}])$. De la Observación 5.2, se sigue que si $N = max\{N_1, N_2\}$, entonces $\{a, b\} \subseteq f^N([x_N, y_N])$, luego por el teorema del valor intermedio $I = f^N([x_N, y_N])$. $\square$

Los siguientes dos lemas nos hablan de algunas propiedades conocidas de funciones continuas, $f : I \to I$. Estos lemas serán importantes para probar el próximo Teorema. El próximo lema se podría pensar como una forma del teorema del valor intermedio, pues nos dice que si $K \subseteq f(J)$, donde K, J son intervalos, entonces existe un subintervalo $R \subseteq J$ tal que $f(R) = K$.

Lema 5.6. Sea I un intervalo, $f : I \to I$ una función continua y $[a, b], [c, d]$ subintervalos de I. Si $[a, b] \subseteq f([c, d])$, entonces existe $[e, m] \subseteq [c, d]$ tal que $f([e, m]) = [a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Como $a, b \in f([c, d])$, entonces existen $t, q \in [c, d]$ tales que $f(t) = a$ y $f(q) = b$. Puede pasar que $t \leq q$ ó $q < t$.

Caso 1. Si $t \leq q$, sea $e = sup\{x \in I : x \leq q \text{ y } f(x) = a\}$, como $f(t) = a$, entonces e existe. Ahora sea $m = inf\{r \in I : e \leq r \leq q \text{ y } f(r) = b\}$, como $f(q) = b$ y $e \leq q$, entonces m existe. Veamos que $f([e, m]) = [a, b]$.

Por la continuidad de la función f y por la definición de ínfimo y supremo tenemos que $f(e) = a$ y $f(m) = b$. Entonces por el teorema del valor intermedio $[a, b] \subseteq f([e, m])$.

Veamos ahora que $f([e, m]) \subseteq [a, b]$. Sea $x \in (e, m)$, si $f(x) < a$, entonces $f(x) < a < f(m)$, por el T.V.I. existe $z \in (x, m)$ tal que $f(z) = a$. Como $z < m \leq q$, entonces $z \leq q$, luego $z \leq e$, pero $e < x < z$, esto es una contradicción, por lo tanto $a \leq f(x)$.

Si $b < f(x)$, entonces $f(e) < b < f(x)$, luego existe $z \in (e, x)$ tal que $f(z) = b$. Como $e < z < x < m \leq q$, entonces $e < z \leq q$, luego $m \leq z$, pero $z < m$, esto es una contradicción, por lo tanto $f(x) \geq b$.

De las dos desigualdades se sigue que $a \leq f(x) \leq b$. Por lo tanto $f([e, m]) \subseteq [a, b]$.

Caso 2. Si $q < t$, sea $e = sup\{r \in I : r < t \text{ y } f(r) = b\}$ y $m = inf\{r \in I : e \leq r \leq t \text{ y } f(r) = a\}$. Como $f(q) = b$ y $q < t$, entonces e existe, también pasa que $e \leq t$ y $f(t) = a$, entonces m existe. Al igual que en el caso anterior $f(e) = b$ y $f(m) = a$ entonces $[a, b] \subseteq f([e, m])$.

Ahora sea $x \in (e, m)$ si $f(x) < a$, entonces $f(x) < a < f(e)$, luego existe $z \in (e, x)$ tal que $f(z) = a$. Como $e < z < m \leq t$, entonces $e < z < t$, luego $m \leq z$, pero $z < m$, esto es una contradicción. Por lo tanto $a \leq f(x)$.

Si $b < f(x)$, entonces $f(m) < b < f(x)$, luego existe $z \in (x, m)$ tal que $f(z) = b$ y $z < t$, entonces $z \leq e$, pero $e < z$, esto es un contradicción. Por lo tanto $f(x) \in [a, b]$. Esto prueba que $f([e, m]) \subseteq [a, b]$ y así terminamos el lema. $\square$

El Lema 5.7 nos regala un punto fijo cuando $J \subseteq f(J)$ para un intervalo J. El punto fijo que nos regala este lema, será importante para demostrar el Lema 5.8

Lema 5.7. Sea $f : I \to I$ una función continua y $[a, b] \subseteq I$ tal que $[a, b] \subseteq f([a, b])$, entonces existe $z \in [a, b]$ tal que $f(z) = z$

DEMOSTRACIÓN. Como $a \in f([a, b])$, entonces existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = a$, luego $f(x) \leq x$. Como $b \in f([a, b])$, existe $y \in [a, b]$ tal que $f(y) = b$, luego $y \leq f(y)$. Si consideramos a la función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(w) = f(w) - w$, entonces h es continua, $h(x) \leq 0$ y $0 \leq h(y)$. Luego por el Teorema del valor intermedio existe $z \in [a, b]$ tal que $h(z) = 0$, entonces $f(z) = z$. $\square$

El Lema 5.8 de cierta forma nos dice que cuando una función, $f : I \to I$, contiene una función tipo la función tienda, entonces f tiene un punto periódico de periodo 3.

El Lema 5.8 será en esencia lo que necesitaremos para demostrar el Teorema 5.9. También nos servirá para demostrar los Lemas 5.21 y 5.22. Los cuales serán importantes para probar el Teorema 5.23.

Lema 5.8. Sea $f : I \to I$ una función continua. Supongamos que existen c_0, c_1 y q en I, con $c_0 < q < c_1$, tal que $[c_0, c_1] \subseteq f([c_0, q])$ y $[c_0, c_1] \subseteq f([q, c_1])$, entonces $f : I \to I$ tiene un punto periódico de periodo 3.

DEMOSTRACIÓN. Como $[c_0, q] \subseteq f([q, c_1])$, entonces por el Lema 5.6, existe J_1 subintervalo de $[q, c_1]$ tal que $f(J_1) = [c_0, q]$. Como $J_1 \subseteq f([q, c_1])$, existe $J_2 \subseteq [q, c_1]$ tal que $f(J_2) = J_1$. Finalmente como $J_2 \subseteq f([c_0, q])$, existe $J_3 \subseteq [c_0, q]$ tal que $f(J_3) = J_2$.

Del párrafo anterior tenemos que $f(J_3) = J_2$, $f^2(J_3) = J_1$, $f^3(J_3) = [c_0, q]$ y $J_3 \subseteq [c_0, q]$. Por lo tanto $J_3 \subseteq f^3(J_3)$. Por el Lema 5.7, existe $x \in J_3$ tal que $f^3(x) = x$. Veamos que x tiene periodo 3.

Observemos primero que $q \notin J_1 \cap J_2$. Si $q \in J_1 \cap J_2$, como $J_1, J_2 \subseteq [q, c_1]$, entonces $J_1 \subseteq J_2$ ó $J_2 \subseteq J_1$. Si $J_1 \subseteq J_2$, entonces $f(J_1) \subseteq f(J_2)$, luego $[c_0, q] \subseteq J_1$ y $J_1 \subseteq [q, c_1]$, por lo tanto $[c_0, q] \subseteq [q, c_1]$, que es una contradicción. Si $J_2 \subseteq J_1$, entonces $f(J_2) \subseteq f(J_1)$, luego $J_1 \subseteq [c_0, q]$. Esto es una contradición, pues $J_1 \subseteq [q, c_1]$. Por lo tanto $q \notin J_1 \cap J_2$.

Ahora sí, veamos que x es de periodo 3. Si $f(x) = x$, entonces $x \in J_2$ y $f(x) \in J_1$, luego $x \in J_1 \cap J_2 \cap J_3$, por lo tanto $x = q$ y $q \in J_1 \cap J_2$. Lo cual es una contradicción, pues acabamos de ver que $q \notin J_1 \cap J_2$. Si $f^2(x) = x$, entonces $f^3(x) = f(x) = x$, luego $f(x) = x$ y regresamos al caso anterior. Por lo tanto x sí tiene periodo 3. $\square$

Finalmente hemos llegado a uno de lo teoremas principales de esta sección. Como vimos en el Lema 5.5, las funciones orgánicas son una familia bastante grande. Para esta familia de funciones, el siguiente teorema nos dice que f tiene puntos periódicos, cuyos periodos no son potencia de 2, cuando (I, f) es un continuo indescomponible.

Teorema 5.9. *Si $f : I \to I$ es una función orgánica y (I, f) es indescomponible, entonces $f : I \to I$ tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2.*

DEMOSTRACIÓN. Como (I, f) es indescomponible, hay tres puntos $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in (I, f)$ tal que (I, f) es irreducible entre cualesquiera par de ellos. Recordando de la Observación 5.2, que si $n < m$, entonces $f^n([x_n, y_n]) \subseteq f^m([x_m, y_m])$ y usando que f es orgánica, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n([x_n, y_n]) = f^n([y_n, z_n]) = f^n([x_n, z_n]) = I$. Podemos suponer que $x_n < y_n < z_n$.

Como $f^n([x_n, y_n]) = f^n([y_n, z_n]) = I$, entonces $[x_n, z_n] \subseteq f^n([x_n, y_n])$ y $[x_n, z_n] \subseteq f^n([y_n, z_n])$. Usando el Lema 5.8, para la función $f^n : I \to I$, se sigue que existe $x \in I$ tal que x es un punto periódico de periodo 3 para la función f^n. Es decir

$$f^n(x) \neq (x), \quad f^{2n}(x) \neq x \quad \text{y} \quad f^{3n}(x) = x.$$

Sea $s \in \mathbb{N}$ el periodo de x, entonces s es de la forma $s = 3k$ ó $s = 3k + 1$ ó $s = 3k + 2$ para algún $k \geq 0$. Si $s = 3k + 1$, entonces $f^{ns}(x) = x$, luego

$$x = f^{n(3k+1)}(x) = f^n(f^{3nk}(x)) = f^n(x),$$

por lo tanto $f^n(x) = x$ y ya vimos que esto no puede pasar. Si $s = 3k + 2$, entonces $f^{n(3k+2)}(x) = x$, luego $x = f^{2n}(f^{3nk}(x) = f^{2n}(x)$, por lo tanto $f^{2n}(x) = x$ y ya vimos que esto no puede pasar. Por lo tanto $s = 3k$ que no es potencia de dos. $\square$

En el teorema anterior vimos que si (I, f) es un continuo indescomponible y f es una función orgánica, entonces f tiene un punto períodico de periodo no potencia de 2. En el Teorema 5.23, básicamente se analizará el caso cuando f es inorgánica y tiene una cantidad finita de puntos esquina (ver Definición 5.13). La teoría que se desarrolla a continuación será para demostrar esa parte del Teorema 5.23.

El siguiente lema nos da una condición sobre f para que (I, f) sea un continuo descomponible. Este lema nos ayudará a probar los Lemas 5.17 y 5.18, los cuales serán importantes para probar la existencia de puntos fijos. Pero antes de demostrar el siguiente lema, será necesario hacer la siguiente observación, la cual nos da una condición para que un conjunto cerrado H de (I, f) sea un continuo.

Observación 5.10. Se $H \subseteq (I, f)$ un conjunto cerrado de (I, f). Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ $\pi_n(H)$ es un intervalo, entonces H es un continuo.

DEMOSTRACIÓN. Como H es cerrado, entonces H es compacto y métrico. Sólo falta ver que es conexo.

Supongamos que H no es conexo, entonces $H = A \cup B$, tal que A y B son cerrados ajenos no vacíos de (I, f). Obsérvese que A, B se pueden tomar cerrados, pues H es cerrado.

Como para toda $n \geq 0$, $\pi_n(H) = \pi_n(A) \cup \pi_n(B)$ y $\pi_n(H)$ es un intervalo, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ $\pi_n(A) \cap \pi_n(B) \neq \varnothing$, luego existen $\overline{y_n}^A \in A$ y $\overline{y_n}^B \in B$ tales que $\pi_n(\overline{y_n}^A) = y_n = \pi_n(\overline{y_n}^B)$. Si definimos a $\overline{y}$ como $\overline{y} = (y_0, y_1, y_2, ...)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \overline{y_n}^A = \overline{y} = \lim_{n\to\infty} \overline{y_n}^B,$$

pero A y B son cerrados, luego $\overline{y} \in A \cap B$, lo cual contradice que son ajenos.

Por lo tanto H es un continuo. □

Lema 5.11. Supongamos que $f : I \to I$ es una función continua y suprayectiva, y sea $J \subseteq I$ un subintervalo cerrado propio de I tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(J)$ es un intervalo, entonces (I, f) es un continuo descomponible.

DEMOSTRACIÓN. Sea $H = \{\overline{x} \in (I, f) : x_0 \in J\}$. Observemos que $H = \pi_0^{-1}(J)$. Como J es un intervalo cerrado y propio de I, f es sobre y π_0 es continua, entonces H es un subconjunto cerrado propio de (I, f).

Sea $n \geq 0$. Veamos que $\pi_n(H) = f^{-n}(J)$. Sea $x \in \pi_n(H)$. Entonces existe $\overline{x} \in H$ tal que $\overline{x} = (x_0, .., x_{n-1}, x, x_{n+1}, ...)$ y $\pi_n(\overline{x}) = x$, luego $x_0 = f^n(x) \in J$, entonces $x \in f^{-n}(J)$. Por lo tanto $\pi_n(H) \subseteq f^{-n}(J)$.

Ahora sea $x \in f^{-n}(J)$, entonces $f^n(x) \in J$. Si consideramos el punto

$$\overline{x} = (f^n(x), f^{n-1}(x), ..., x, x_{n+1}, ...)$$

donde x_i, con $i \geq n + 1$, cumplen que $f(x_{i+1}) = x_i$ y $f(x_{n+1}) = x$, esto se puede por ser f suprayectiva. Entonces $\overline{x} \in H$ y $x \in \pi_n(H)$. Lo cual prueba que $f^{-n}(J) \subseteq \pi_n(H)$. Con las dos contenciones tenemos que $\pi_n(H) = f^{-n}(J)$.

Por hipótesis tenemos que $f^{-n}(J)$ es un intervalo cerrado, entonces por la Observación 5.10, H es un subcontinuo propio de (I, f). Por último tenemos que $\pi_0^{-1}(int(J)) \subseteq \pi_0^{-1}(J) \subseteq H$, entonces H es un subcontinuo propio de (I, f) con interior no vacío. Lo cual nos dice que (I, f) es un continuo descomponible. □

El siguiente lema será muy importante para probar los incisos $i)$ y $ii)$ de la demostración del Teorema 5.23. La función f_1 que se introduce en el siguiente lema, en sistemas dinámicos se le llama función conjugada de f. Se sabe que la dinámica de dos funciones conjugadas es esencialmente la misma. Si se cumple esta propiedad entre funciones conjugadas, es de esperarse que los límites inversos respectivos sean homeomorfos. Tal hecho se prueba en el siguiente lema.

Lema 5.12. Sea $f : I \to I$ una función continua y $h : I \to I$ un homeomorfismo. Si $f_1 = h \circ f \circ h^{-1}$, entonces (I, f) y (I, f_1) son homeomorfos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $H : (I, f) \to (I, f_1)$ una función dada por

$$H(x_0, x_1, x_2, ...) = (h(x_0), h(x_1), h(x_2), ...).$$

Obsérvese que H está bien definida, pues

$$f_1(h(x_{n+1})) = h(f(x_{n+1})) = h(x_n),$$

para $n \geq 0$.

Como $\pi_n \circ H(x_0, x_1, x_2, ...) = h(x_n) = h \circ \pi_n(\overline{x})$ y $h \circ \pi_n$ es continua para toda $n \geq 0$, entonces H es continua.

Sean $\overline{x}, \overline{y} \in (I, f)$. Si $H(x_0, x_1, x_2, ...) = H(y_0, y_1, y_2, ...)$. Entonces $h(x_n) = h(y_n)$ y por ser h un homeomorfismo, $x_n = y_n$ para toda $n \geq 0$, esto prueba que H es inyectiva.

Ahora, sea $(x_0, x_1, x_2, ...) \in (I, f_1)$. Entonces para cada $n \geq 0$,
$h \circ f \circ h^{-1}(x_{n+1}) = f_1(x_{n+1}) = x_n$, luego $f \circ h^{-1}(x_{n+1}) = h^{-1}(x_n)$, por lo tanto

$$(h^{-1}(x_0), h^{-1}(x_1), h^{-2}(x_2), ...) \in (I, f) \text{ y}$$

$$H(h^{-1}(x_0), h^{-1}(x_1), h^{-2}(x_2), ...) = (x_0, x_1, x_2, ...),$$

esto prueba que H es suprayectiva. Por lo tanto H es un homeomorfismo. $\square$

Antes de seguir con la siguiente definición es importante que aclaremos lo que entenderé por función creciente y decreciente.

Sea $f : I \to I$. Diremos que f es *creciente* si para todo $x, y \in I$, tal que $x < y$, $f(x) < f(y)$. f será *decreciente* si para toda $x, y \in I$, tal que $x < y$, $f(y) < f(x)$.

Decimos que una función, $f : I \to I$, es *monónota* si es creciente o decreciente. Cuando $f : I \to I$ es una función continua decir que f es monótona es equivalente a decir que f es inyectiva. Esta ultima equivalencia será utilizada para probar alguno de los siguientes lemas.

Finalmente definiremos formalmente lo que quiere decir que una función $f : I \to I$, tenga una cantidad finita de puntos esquina.

Definición 5.13. Sea $I = [a, b]$ y $f : I \to I$ una función continua. Decimos que $f : I \to I$ *tiene una cantidad finita de puntos esquina* si existe una cantidad finita de puntos de I, $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, tal que $a_0 = a$, $a_n = b$ y para cada $i \in \{0, 1, 2, , .., n-1\}$, f es monótona en $[a_i, a_{i+1}]$.

El siguiente lema nos dice que la composición de funciones que tienen una cantidad finita de puntos esquina, también tiene una cantidad finita de puntos esquina. Este lema será utilizado en la parte $ii)$ y $iii)$ de la demostración del Teorema 5.23, para ver que f^2 y f_1 un conjugado de f, tienen una cantidad finita de puntos esquina. La siguiente observación será la herramienta principal que nos ayudará a demostrar el siguiente lema.

Observación 5.14. Sea $g : I \to I$ una función continua y sea $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ una partición de I, con $a_0 = a$ y $a_n = b$. Supongamos que g es inyectiva en $[c, d] \subseteq I$, entonces existe una partición $w_0 < w_1 < w_2 < \cdots < w_m$ de $[c, d]$, con $w_0 = c$ y $w_m = d$ que cumple que para toda $i \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ existe $j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ tal que $g[w_i, w_{i+1}] \subseteq [a_j, a_{j+1}]$.

DEMOSTRACIÓN. Como $g : I \to I$ es continua e inyectiva en $[c, d]$, entonces g es creciente ó decreciente en $[c, d]$.

Caso 1. Si g es creciente, entonces $g([c, d]) = [g(c), g(d)]$, sea a_n el más cercano por la izquierda al intervalo $[g(c), g(d)]$ y a_m es más cercano por la derecha, entonces

$$[g(c), g(d)] \subseteq [a_n, a_m] \text{ y para cada } i \in \{n+1, n+2, ..., m-1\} \text{ existe } w_i \in [c, d] \text{ tal que } g(w_i) = a_i.$$

Observemos que por ser g creciente en $[c, d]$, se cumple que para cada $i \in \{n+1, n+2, ..., m-1\}$, $w_i < w_{i+1}$. Por la continuidad de g y el Teorema del valor intermedio se sigue que

$$g([c, w_{n+1}]) \subseteq [a_n, a_{n+1}], g([w_i, w_{i+1}]) = [a_i, a_{i+1}] \text{ si } i \in \{n+1, n+2, ..., m-1\}$$

y $g([w_{m-1}, d] \subseteq [a_{m-1}, a_m])$.

Entonces la partición de $[c, d]$ dada por $\{c, w_{n+1}, w_{n+2}, ..., w_{m-1}, d\}$ cumple lo que queremos.

Caso 2. Si g es decreciente entonces $g([c, d]) = [g(d), g(c)]$, sea a_n el más cercano por la izquierda a $g(d)$ y a_m el más cercano por la derecha a $g(c)$, entonces

$$[g(d), g(c)] \subseteq [a_n, a_m] \text{ y para cada } i \in \{n+1, n+2, ..., m-1\} \text{ existe } w_i \in (c, d) \text{ tal que } g(w_i) = a_i.$$

Por ser g decreciente se cumple que

$$c < w_{m-1} < w_{m-2} < w_{m-3} < \cdots < w_{n+1} < d.$$

Por la continuidad de g y el teorema del valor intermedio se sigue que

$$g([w_{n+1}, d]) \subseteq [a_n, a_{n+1}], g([w_i, w_{i-1}]) = [a_{i-1}, a_i] \text{ si } i \in \{n+2, ..., m-1\}$$

y $g([c, w_{m-1}]) \subseteq [a_{m-1}, a_m]$.

Entonces la partición dada por $\{c, w_{m-1}, w_{m-2}, ..., w_{n+1}, d\}$ cumple lo que queremos. $\square$

Lema 5.15. Sean $f, g : I \to I$ funciones continuas. Supongamos que $f, g : I \to I$ tienen una cantidad finita de puntos esquina, entonces $f \circ g : I \to I$ tiene una cantidad finita de puntos esquina.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$ la partición de I, tal que f es inyectiva en $[a_i, a_{i+1}]$ para cada $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ y sea $P_b = \{b_0, b_1, ..., b_m\}$ la partición de I tal que g es inyectiva en $[b_i, b_{i+1}]$ para cada $i \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$.

Por la observación anterior, existe una partición $P_w = \{w_0, w_1, w_2, ..., w_s\}$ de I, que es un refinamineto de P_b, tal que para cada $i \in \{0, 1, 2, ..., s-1\}$ existe $j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ tal que $g([w_i, w_{i+1}]) \subseteq [a_j, a_{j+1}]$.

Como P_w refina a P_b se tiene que para toda $i \in \{0, 1, 2, ..., s-1\}$ g es inyectiva en $[w_i, w_{i+1}]$ y como $g([w_i, w_{i+1}]) \subseteq [a_j, a_{j+1}]$ para alguna $j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ y f es inyectiva en $[a_j, a_{j+1}]$, entonces $f \circ g$ es inyectiva en $[w_i, w_{i+1}]$. Esto prueba que $f \circ g$ es monótona en $[w_i, w_{i+1}]$ para toda $i \in \{0, 1, 2, ..., s-1\}$ y entonces $f \circ g$ tiene una cantidad finita de puntos esquina. $\square$

En el Teorema 5.9, utizamos que $f : I \to I$ era una función orgánica. A partir de ahora, con ayuda de los lemas anteriores, empezaremos a analizar el caso cuando $f : I \to I$ es un función inorgánica. El siguiente lema nos dice que si $f : I \to I$ es una función inorgánica y suprayectiva, entonces puede pasar que $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$. Este último lema es importante, ya que aparecerá en las hipótesis del Lema 5.22.

Analizando el próximo lema y el Lema 5.22, podemos ir imaginando como será la demostración del Teorema 5.23.

Lema 5.16. Sea $I = [a, b]$, $f : I \to I$ una función continua, inorgánica y suprayectiva. Entonces pasa alguno de los siguientes:

- $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$
- $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$
- $f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$ y $f(a) = b$, $f(b) = a$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f^{-1}(\{a\}) \neq \{a\}$ y $f^{-1}(\{b\}) \neq \{b\}$. Veamos primero que $f(a) = b$ y que $f(b) = a$.

Como $f^{-1}(\{a\}) \neq \{a\}$, $f^{-1}(\{b\}) \neq \{b\}$ y f es suprayectiva, entonces existen $p, q \in I$ tal que $a < p \leq b$, con $f(p) = a$ y $a \leq q < b$, con $f(q) = b$.

Si $a < p < b$, entonces por ser f inorgánica y por el Lema 5.5, se sigue que $q = a$, luego $f(a) = b$ y como $f(p) = a$, entonces $f^2(p) = b$, luego por Lema 5.5, f es orgánica. Lo cual contradice las hipótesis. Por lo tanto $p = b$, similarmente se demuestra que $q = a$. Esto prueba que $f(a) = b$, $f(b) = a$ y $\{a, b\} \subseteq f^{-1}(\{a, b\})$.

Ahora si $x \in f^{-1}(\{a, b\})$, entonces $f(x) = a$ ó $f(x) = b$. Si $f(x) = a$ y $a < x < b$. Como $f(a) = b$, entonces $f^2(x) = b$, luego por el Lema 5.5, f es orgánica. Lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto $x \in \{a, b\}$. Similarmente se prueba que si $f(x) = b$, entonces $x \in \{a, b\}$. Por lo tanto $f^{-1}(\{a, b\}) \subseteq \{a, b\}$, lo cual termina el lema. $\square$

Los siguientes dos lemas nos servirán para asegurar la existencia de puntos fijos en la demostración del Lema 5.21.

Al principio sólo había hecho el Lema 5.18, pero luego me di cuenta que era necesario hacer el Lema 5.17 por separado, pues este lema tiene menos hipótesis y éstas son las únicas hipótesis que me dan para demostrar la segunda parte del Lema 5.21. La demostración de los dos lemas es muy parecida. El volver a hacerla me ayudó a comprender mejor la demostración.

De aquí en adelante I será un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ de la forma $I = [a, b]$.

Lema 5.17. Si $f : I \to I$ es una función continua y suprayectiva que cumple

$i)$ $f : I \to I$ tiene una cantidad finita de puntos esquina,

$ii)$ (I, f) es indescomponible y

$iii)$ $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$.

Entonces para toda $c \in (a, b)$ existe $x \in (a, c]$ tal que $f(x) \leq x$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $I = [a, b]$ y $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ la cantidad finita de puntos esquina de f en I.

Supongamos que existe $c \in (a, b)$ tal que para toda $y \in (a, c]$, $y < f(y)$.

Como $a \notin f([c, b])$ y f es continua, entonces existe $r \in I$, con $a < r < a_1$ y $r < c$, tal que $[a, r] \cap f([c, b]) = \varnothing$. Veamos que $[a, r] \cap f([r, b]) = \varnothing$.

Como $[a, r] \cap f([r, b]) = [a, r] \cap (f([r, c]) \cup f([c, b])) = [a, r] \cap f([r, c])$. Si $z \in [a, r] \cap f([r, c])$, entonces hay $w \in [r, c]$ tal que $f(w) = z$, luego $f(w) \leq w$, esto contradice que $f(w) > w$ para toda $w \in (a, c]$. Por lo tanto $[a, r] \cap f([r, b]) = \varnothing$.

De lo anterior y de que f es suprayectiva se sigue que

$$[a, r] \subseteq f([a, r]). \tag{3}$$

Si $x \in f^{-1}([a, r])$, $f(x) \in [a, r]$. Como $[a, r] \cap f([r, b]) = \varnothing$, entonces $x \in [a, r]$, por lo tanto

$$f^{-1}([a, r]) \subseteq [a, r]. \tag{4}$$

De la Ecuaciones (3) y (4) se sigue que $f^{-1}([a, r]) = f|_{[a,r]}^{-1}([a, r])$ y este último es un intervalo, pues $r < a_1$ y $f|_{[a,r]} : [a, r] \to I$ es monótona, por lo tanto $f^{-1}([a, r])$ es un intervalo.

Como $f^{-1}([a, r]) \subseteq f([a, r])$ y $f^{-2}([a, r]) \subseteq [a, r]$, entonces

$$f^{-2}([a, r]) = f|_{[a,r]}^{-1}(f^{-1}([a, r]))$$

y este último es un intervalo pues $f|_{[a,r]}$ es monótona, entonces $f^{-2}([a, r])$ es un intervalo.

Inductivamente podemos ver que para toda $n \geq 2$,

$$f^{-n}([a,r]) \subseteq [a,r],\ f^{-(n-1)}([a,r]) \subseteq f([a,r]) \text{ y } f^{-(n-1)}([a,r]) \text{ es un intervalo,}$$

entonces $f^{-n}([a,r]) = f|_{[a,r]}^{-1}(f^{-(n-1)}([a,r]))$ y este último es un intervalo, pues $f|_{[a,r]}$ es monótona. Por lo tanto tenemos que $f^{-n}([a,r])$ es un intervalo para toda $n \in \mathbb{N}$, luego por el Lema 5.11, (I,f) es descomponible, lo cual contradice la hipótesis de este lema. Por lo tanto para todo $c \in (a,b)$ existe $x \in (a,c]$ tal que $f(x) \leq x$. $\square$

Lema 5.18. Si $f : I \to I$ es una función continua tal que:

$i)$ $f : I \to I$ tiene una cantidad finita de puntos esquina,
$ii)$ (I,f) es un continuo indescomponible,
$iii)$ $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$ y $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$.

Entonces para toda $c \in (a,b)$ existe $x \in (a,c]$ y $y \in [c,b)$ tal que $f(x) \leq x$ y $y \leq f(y)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $c \in (a,b)$, por $iii)$ f es suprayectiva. Entonces podemos aplicar el Lema 5.17, con lo cual tenemos que existe $x \in (a,c]$ tal que $f(x) \leq x$.

Para probar la segunda parte usaremos que $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$.

La demostración es muy parecida. Supongamos que para toda $x \in [c,b)$, $f(x) < x$.

Como $b \notin f([a,c])$, entonces existe $r \in I$, con $a_{n-1} < r$ y $c < r$, tal que $[r,b] \cap f([a,c]) = \varnothing$. Veamos que $[r,b] \cap f([a,r]) = \varnothing$.

Como $f([a,r]) = f([a,c]) \cup f([c,r])$, entonces $[r,b] \cap f([a,r]) = [r,b] \cap (f([a,c]) \cup f([c,r])) = [r,b] \cap f([c,r])$. Si $z \in [r,b] \cap f([c,r])$, entonces $z = f(w)$, con $w \in [c,r]$ y $w \leq f(w)$, esto contradice que $w \in [c,b]$. Por lo tanto $[r,b] \cap f([a,r]) = \varnothing$

Del párrafo anterior se sigue que $[r,b] \subseteq f([r,b])$ y $f^{-1}([r,b]) \subseteq [r,b]$. Como $f|_{[r,b]} : [r,b] \to f([r,b])$ es un homeomorfismo y $f^{-1}([r,b]) = f|_{[r,b]}^{-1}([r,b])$, entonces $f^{-1}([r,b])$ es un intervalo. Nuevamente tenemos que $f^{-2}([r,b]) \subseteq [r,b]$ y $f^{-1}([r,b]) \subseteq f([r,b])$, entonces $f^{-1}(f^{-1}([r,b])) = f|_{[b,r]}^{-1}(f^{-1}([r,b]))$, luego $f^{-2}([r,b])$ es un intervalo.

Inductivamente como en la demostración del Lema 5.17 se tiene que $f^{-n}([r,b])$ es un intervalo para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces por el Lema 5.11, tendríamos que (I,f) es descomponible, lo cual es una contradicción pues (I,f) es un continuo indescomponible. Por lo tanto existe $y \in [c,b)$ tal que $y \leq f(y)$. $\square$

El siguiente lema nos asegura la existencia de un intervalo invariante bajo la condiciones dadas. Ese intervalo invariante será utilizado en la demostración del Lema 5.21. La condición, $r \leq q$, con $r \in (a,b)$, será importante para demostrar el Lema 5.22.

Lema 5.19. Si $f : I \to I$ es una función continua tal que:

$i)$ $f(a) = a$.
$ii)$ $f : I \to I$ tiene una cantidad finita de puntos esquina.
$iii)$ Para toda $c \in (a,b)$ existe $x \in (a,c]$ tal que $f(x) \leq x$.
$iv)$ Existe $q \in (a,b)$ tal que $f(q) = q$.

Entonces existe $r \leq q$, con $r \in (a,b)$, tal que $f(r) = r$ y $f([a,r]) = [a,r]$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $a_0, a_1, ..., a_m$ en I, tal que f es monótona en $[a_i, a_{i+1}]$ para cada $i \in \{0, 1, 2, 3, ..., m-1\}$.

En el inciso $iv)$ nos dan un $q \in (a, b)$ tal que $f(q) = q$. Como $f(a) = a$, entonces por el T.V.I. $[a, q] \subseteq f([a, q])$.

Si $[a, q] \subseteq [a, a_1]$, como f es creciente en ese intervalo, $f(q) = q$ y $f(a) = a$, entonces $f([a, q]) \subseteq [a, q]$, luego $f([a, q]) = [a, q]$ y es lo que queremos.

Si $[a, q] \nsubseteq [a, a_1]$, entonces $a_1 < q$. Si suponemos que $f([a, q]) \nsubseteq [a, q]$, entonces existe $y \in (a, q)$ tal que $q < f(y)$, por lo tanto $y < f(y)$. Sea a_n tal que $q \in [a_n, a_{n+1}]$.

Si $a_n \leq y$, como $y < q$, $f(q) = q$ y $f(y) > q$, entonces f tiene que ser decreciente en $[a_n, a_{n+1}]$. Como $a_n \leq y$ y $f(y) \leq f(a_n)$, entonces $a_n < f(a_n)$.

Si $y < a_n$, sea a_j tal que $a_j \leq q$ y $y \in [a_{j-1}, a_j]$. Si f es creciente en $[a_{j-1}, a_j]$, entonces $f(y) \leq f(a_j)$ y $q < f(y)$, entonces $a_j < f(a_j)$. Si f es decreciente en $[a_{j-1}, a_j]$, entonces $f(y) \leq f(a_{j-1})$, luego $a_{j-1} < f(a_{j-1})$.

Podemos concluir que existe un a_j, con $a < a_j < q$, tal que $a_j < f(a_j)$.

Sea $a_m = \text{mín}\{a_j : a < a_j < q, a_j < f(a_j)\}$. Entonces $a_m < f(a_m)$, por el inciso $iii)$, existe $x \in (a, a_m)$ tal que $f(x) \leq x$. Por el T.V.I. existe $q_m \in (a, a_m)$ tal que $f(q_m) = q_m$. Nuevamente por el T.V.I. $[a, q_m] \subseteq f([a, q_m])$.

Si no pasara que $f([a, q_m]) \subseteq [a, q_m]$, igual que como hicimos cuando supusimos que $f([a, q]) \nsubseteq [a, q]$, podemos encontrar un a_j, con $a < a_j < q_m$, tal que $a_j < f(a_j)$. Pero como $q_m < a_m$, entonces $a_j < a_m$. Lo cual contradice la elección de a_m. Por lo tanto $f([a, q_m]) = [a, q_m]$ y $f(q_m) = q_m$. $\square$

Como se habrán dado cuenta varios de los lemas anteriores que hemos desarrollado los utilizaremos para demostrar los Lemas 5.21 y 5.22, los cuales serán los lemas importantes para demostrar el Teorema 5.23. En el artículo principal, artículo [**5**], esencialmente sólo venían los Lemas 5.21 y 5.22, enseguida los demostraba en una página. A mí me pareció difícil enteder la demostración de esos lemas en una sola página, por eso lo he dividido en varios lemas.

El próximo lema será el último que necesitaremos para demostrar los Lemas 5.21 y 5.22. Los cuales son los principales de esta sección. Parte de lo que nos dice el siguiente lema es que bajo ciertas condiciones existe un intervalo, $[a_j, a_{j+1}]$, donde la función f es decreciente.

Lema 5.20. Sea $f : I \to I$ una función continua y suprayectiva. Supongamos que existe $q \in (a, b)$ tal que:

$i)$ $f(q) = q$ y $f([a, q]) = [a, q]$.
$ii)$ (I, f) es un continuo indescomponible.
$iii)$ $f : I \to I$ tiene una cantidad finita de puntos esquina, $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_k\}$.

Entonces existe a_n tal que $f(a_n) < q < a_n$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que existe $x \in I$ tal que $q < x$ y $f(x) < q$.

Supongamos que para todo x con $q < x$, $q \leq f(x)$.

Si consideramos a $T = [q, b]$, entonces la función $f|_T : T \to T$ está bien definida. Si $J = [a, q]$, por el inciso i), la función $f|_J : J \to J$ está bien definida.

Si $\overline{x} \in (I, f)$ y $\overline{x} = (q, q, q, ..., q, ...)$, entonces $\overline{x} \in (T, f|_T)$. Si $\overline{x} \neq \overline{q}$, sea $i = \text{mín}\{j \geq 0 : x_j \neq q\}$. Si $x_i \in [a, q)$, entonces $\overline{x} \in (J, f|_J)$. Si $x_i \in (q, b]$, entonces $\overline{x} \in (T, f|_T)$. Por lo tanto $(I, f) = (J, f|_J) \cup (I, f|_I)$. Como f es suprayectiva y J, I son subintervalos propios de I, entonces $(T, f|_T)$ y $(J, f|_J)$ son subcontinuos propios de (I, f). Por lo tanto (I, f) es un continuo descomponible. Esto es una contradicción, pues estamos suponiendo que (I, f) es un continuo indescomponible. Por lo tanto existe $x \in I$ tal que $q < x$ y $f(x) < q$.

Si no existe a_j tal que $q < a_j < x$, sea a_n el más próximo a q por la izquierda, entonces $a_n \leq q < x \leq a_{n+1}$. Como $f(x) < q$, entonces f es decreciente en $[a_n, a_{n+1}]$. Por lo tanto $f(a_{n+1}) \leq f(x)$, $f(a_{n+1}) < q$ y $q < a_{n+1}$.

Si existe a_j tal que $q < a_j < x$, sea a_m el más próximo por la izquierda a x, entonces $q < a_m \leq x \leq a_{m+1}$. Si f es creciente $[a_m, a_{m+1}]$, entonces $f(a_m) \leq f(x)$ y $f(x) < q$, luego $f(a_m) < q$ y $q < a_m$. Si f es decreciente en $[a_m, a_{m+1}]$, entonces $f(a_{m+1}) \leq f(x)$ y $f(x) < q$. Por lo tanto $f(a_{m+1}) < q$ y $q < a_{m+1}$, esto termina la prueba. $\square$

Hemos llegado a los últimos dos lemas de esta sección, los cuales serán demostrados gracias a la ayuda de los lemas anteriores. El primer lema nos pide más condiciones para mostrar el mismo resultado del segundo lema. Parte de la demostración del segundo lema es parecida a la demostración del primer lema. El segundo lema es importante porque nos da exactamente las condiciones sobre f para que f tenga puntos periódicos de periodo 3, cosa que no nos dice el Teorema 5.23, en ese teorema sólo nos dice que f tiene puntos periódicos de periodo no potencia de 2.

Lema 5.21. Si $f : I \to I$ es una función continua y suprayectiva tal que:

$i)$ $f : I \to I$ tiene una cantidad finita de puntos esquina, $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$.

$ii)$ (I, f) es un continuo indescomponible.

$iii)$ $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$ y $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$.

Entonces $f : I \to I$ tiene un punto periódico de periodo 3.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 5.18, tenemos que para todo $c \in (a, b)$ existen $x, y \in I$, con $x \in (a, c]$, $y \in [c, b)$, tal que $f(x) \leq x$ y $y \leq f(y)$, entonces existe $q \in (a, b)$ tal que $f(q) = q$. Por el Lema 5.19, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = c$ y $f([a, c]) = [a, c]$. Por el Lema 5.20, existe $a_i \in \{a_0, ..., a_n\}$ talque $f(a_i) < c < a_i$.

Sea $\mathscr{C} = \{a_i \in \{a_0, a_1, ..., a_n\}$: existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = c$, $f([a, c]) = [a, c]$ y $f(a_i) < c < a_i\}$. El conjunto $\mathscr{C}$ es no vacío por lo dicho anteriormente.

Sea a_m el máximo del conjunto $\mathscr{C}$ y sea c_0 el que cumple que $f(c_0) = c_0$, $f([a, c_0]) = [a, c_0]$ y $f(a_m) < c_0 < a_m$.

Como $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$, entonces $a_m \neq b$, luego $a_m < b$. Por el Lema 5.18, existe $y \in (a_m, b)$ tal que $y \leq f(y)$. Como $f(a_m) < a_m$, entonces existe $r \in (a_m, b)$ tal que $f(r) = r$.

Sea $h(x) = f(x) - x$, con $h : [a_m, b] \to \mathbb{R}$, entonces $h^{-1}(\{0\})$ tiene un mínimo. Sea c_1 ese mínimo, entonces $a_m < c_1 < b$. Puede pasar que $f([a, c_1]) = [a, c_1]$ ó $f([a, c_1]) \neq [a, c_1]$. Siempre pasa que $[a, c_1] \subseteq f([a, c_1])$.

Caso 1. Si $f[a, c_1] \neq [a, c_1]$, entonces existe $x \in (a, c_1)$ tal que $c_1 < f(x)$. Si $a_m < x$, como $f(a_m) < a_m$ y $x < f(x)$, entonces existe $r \in (a_m, x)$ tal que $f(r) = r$ y esto contradice la elección de c_1. Por lo tanto $x < a_m$.

De lo anterior tenemos que $c_0 < x < a_m < c_1$ y $x < f(x)$, pero $f(a_m) < a_m$, entonces existe $q \in (x, a_m)$ tal que $f(q) = q$. Ahora tenemos que $c_0 < x < q < a_m < c_1$.

Como $f(c_0) < c_1 < f(x)$, entonces hay $w \in [c_0, x]$ tal que $f(w) = c_1$. Por lo tanto $[c_0, c_1] \subseteq f([c_0, x]) \subseteq f([c_0, q])$. Como $f(a_m) < c_0 < f(c_1)$, hay $z \in [a_m, c_1]$ tal que $f(z) = c_0$. Por lo tanto $[c_0, c_1] \subseteq f([z, c_1]) \subseteq f([a_m, c_1]) \subseteq f([q, c_1])$.

Del párrafo anterior tenemos lo siguiente:

i) $[c_0, c_1] \subseteq f([c_0, q])$ y
ii) $[c_0, c_1] \subseteq f([q, c_1])$.

Por el lema 5.8, f tiene un punto periódico de periodo 3.

Caso 2. Si $f([a, c_1]) = [a, c_1]$, por el Lema 5.20, existe a_r tal que $f(a_r) < c_1 < a_r$. Entonces $a_r \in \mathscr{C}$, pero $a_m < c_1 < a_r$ y esto contradice la elección de a_m como máximo de $\mathscr{C}$. Por lo tanto no pasa este caso. El caso anterior nos da la conclusión del lema. □

Lema 5.22. Si $f : I \to I$ es una función continua y suprayectiva, tal que

i) $f : I \to I$ tiene una cantidad finita de puntos esquina.
ii) (I, f) es un continuo indescomponible.
iii) $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$.

Entonces $f : I \to I$ tiene un punto periódico de periodo 3.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{a_0, a_1, ..., a_k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$, los puntos esquina de f.

Si pasara que $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$, entonces por el Lema 5.21, f tiene un punto periódico de periodo 3.

Si $f^{-1}(\{b\}) \neq \{b\}$, como f es suprayectiva, existe $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = b$.

Observemos que para toda $c < p$ existe $y \in (c, p)$ tal que $f(y) \geq y$. Si no pasara lo anterior, entonces existiría $c < p$ tal que para toda $y \in (c, p)$, $f(y) < y$, luego

$$\lim_{y \to p} f(y) \leq p.$$

Por ser f continua $f(p) \leq p$, contradiciendo que $f(p) = b$, esto prueba la observación.

Por el Lema 5.17, tenemos que para toda $c \in (a, b)$ existe $x \in (a, c]$ tal que $f(x) \leq x$. De esto y del párrafo anterior se sigue que, existe $q \in (a, p)$ tal que $f(q) = q$. Por el Lema 5.19, existe $c \in (a, q] \subseteq (a, p)$ tal que $f(c) = c$ y $f[a, c] = [a, c]$. Por el Lema 5.20, existe a_n con $f(a_n) < c < a_n$. Observemos que $a_n \neq p$, pues $f(p) = b$, entonces $p < a_n$ ó $a_n < p$.

Caso 1. Si $p < a_n$. Como $f(c) < a_n < f(p)$, entonces, por el teorema del valor intermedio, $[c, a_n] \subseteq f([c, p])$. Como $f(a_n) < a_n < f(p)$ y $f(a_n) < c < f(p)$, entonces, por el teorema del valor intermedio, $[c, a_n] \subseteq f([p, a_n])$. Por el Lema 5.8, f tiene un punto de periodo 3.

La demostración del siguiente caso es parecido a la demostración del Lema 5.21.

Caso 2. Si $a_n < p$. Sea $\mathcal{C} = \{a_i \in \{a_0, a_1, ..., a_k\} :$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = c,\ f([a, c]) = [a, c],\ a_i < p$ y $f(a_i) < c < a_i\}$. Por lo dicho en el antepenúltimo párrafo, $\mathcal{C} \neq \varnothing$. Sea a_m el máximo de $\mathcal{C}$ y sea c_0 el respectivo número que cumple que $f([a, c_0]) = [a, c_0]$ y $f(a_m) < c_0 < a_m$. Como $f(a_m) < a_m$ y $p < f(p)$, entonces existe $q \in (a_m, p)$ tal que $f(q) = q$. Sea $c_1 = \text{mín}\{q \in (a_m, p) : f(q) = q\}$. Observemos que ese mínimo existe por ser f continua. Por el teorema del valor intemedio $[a, c_1] \subseteq f[a, c_1]$, pero puede pasar que $[a, c_1] \neq f([a, c_1])$ ó $[a, c_1] = f([a, c_1])$.

Si $f([a, c_1]) \neq [a, c_1]$, entonces existe $x \in (a, c_1)$ tal que $c_1 < f(x)$. Si $a_m < x$, como $f(a_m) < a_m$ y $x < f(x)$, entonces existe $r \in (a_m, x)$ tal que $f(r) = r$ y $r < c_1$, esto contradice la elección de c_1. Por lo tanto $x < a_m$. Entonces tenemos el siguiente orden $c_0 < x < a_m < c_1$. Sea $q \in (x, a_m)$ tal que $f(q) = q$, ahora el orden es así

$$c_0 < x < q < a_m < c_1.$$

Como $f(c_0) < c_1 < f(x)$, entonces $[c_0, c_1] \subseteq f([c_0, x]) \subseteq f([c_0, q])$, luego

$$[c_0, c_1] \subseteq f([c_0, q]). \tag{5}$$

También $f(a_m) < c_0 < f(c_1)$, entonces $[c_0, c_1] \subseteq f([a_m, c_1]) \subseteq f([q, c_1])$, luego

$$[c_0, c_1] \subseteq f([q, c_1]). \tag{6}$$

De la ecuaciones (5) y (6), y del Lema 5.8, se sigue que f tiene un punto periódico de periodo 3.

Si $f([a, c_1]) = [a, c_1]$, entonces por el Lema 5.20, existe un a_n tal que $f(a_n) < c_1 < a_n$. Si $p < a_n$, por el Caso 1, f tiene un punto de periodo 3. Si $a_n < p$, entonces $a_n \in \mathcal{C}$, luego $a_n \leq a_m$. Lo cual es una contradicción, pues $a_m < c_1 < a_n$. Por lo tanto no se da este caso, se debe cumplir que $f([a, c_1]) \neq [a, c_1]$. Lo cual nos dice que f tiene un punto periódico de periodo 3. □

Finalmente enunciaremos y demostraremos el Teorema 5.23. De cierta forma este teorema une en un solo enunciado el Teorema 5.9 y el Lema 5.22.

Algo que no escribiremos formalmente pero que se observa en la demostración del siguiente teorema es que si $f : I \to I$ es una función como en el teorema que además es inorgánica, entonces f tiene puntos periódicos de periodo 3 ó 6.

El siguiente Teorema nos responde parcialmente a la pregunta que nos hicimos en la introducción de esta sección, la pregunta era. ¿Cómo es f cuando (I, f) es un continuo indescomponible? El Teorema nos responde diciendo que si $f : I \to I$ es una función continua, suprayectiva y tiene una cantidad finita de puntos esquina, entonces f tiene puntos periódicos de periodo no potencia 2. Lo cual nos dice, por el Teorema de Sharkovskii, que la dinámica de f es interesante.

Teorema 5.23. *Sea $I = [a, b]$. Supongamos que $f : I \to I$ es una función continua y suprayectiva que tiene una cantidad finita de puntos esquina.*

Si (I, f) es un continuo indescomponible, entonces $f : I \to I$ tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de dos.

DEMOSTRACIÓN. Si f es orgánica, por el Teorema 5.9, f tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de dos.

Si f es inorgánica, por el Lema 5.16, pasa alguno de los siguientes:

$i)$ $f^{-1}\{a\} = \{a\}$
$ii)$ $f^{-1}\{b\} = \{b\}$
$iii)$ $f^{-1}\{a, b\} = \{a, b\}$ *y* $f(a) = b,\ f(b) = a.$

Si $f^{-1}\{a\} = \{a\}$, por el Lema 5.22, f tiene un punto periódico de periodo 3.

Si $f^{-1}\{b\} = \{b\}$. Sea $h : I \to I$ la función dada por $h(x) = a + b - x$ y sea $f_1 : I \to I$ la función dada por $f_1 = h \circ f \circ h^{-1}$. Como $f^{-1}(\{b\}) = b$, entonces $f_1^{-1}(\{a\}) = \{a\}$. Por el Lema 5.15, f_1 tiene una cantidad finita de puntos esquina, y por el Lema 5.12, (I, f) es homeomorfo a (I, f_1). Entonces (I, f_1) es un continuo indescomponible que cumple las hipótesis del caso anterior. Por lo tanto f_1 tiene un punto periódico de periodo 3.

Sea $x \in I$ el punto cuyo periodo es 3 bajo f_1, entonces $h \circ f^3(h^{-1}(x)) = f_1^3(x) = x$, luego $f^3(h^{-1}(x)) = h^{-1}(x)$. Si $f^2(h^{-1}(x)) = h^{-1}(x)$, entonces $f_1^2(x) = x$, que es una contradicción. Por lo tanto $f^2(h^{-1}(x)) \neq h^{-1}(x)$. Si $f(h^{-1}(x)) = h^{-1}(x)$, entonces $f_1(x) = x$, que es una contradicción. Por lo tanto $f(h^{-1}(x)) \neq h^{-1}(x)$. Podemos concluir que $h^{-1}(x)$ es un punto de periodo 3 bajo f.

Para el tercer caso nos fijaremos en f^2, que por el Lema 5.15, tiene una cantidad finita de puntos esquina. Observemos que (I, f) es homeomorfo a (I, f^2). Por lo tanto (I, f^2) es un continuo indescomponible. Además $(f^2)^{-1}(\{a\}) = \{a\}$, entonces por el primer caso f^2 tiene un punto periódico de periodo 3, luego f tiene un punto periódico de periodo 3 ó 6. Con lo cual concluimos que f tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de dos y esto termina la demostración del teorema. $\square$

5.2. Periodo 3 Implica Indescomponibilidad

En sistemas dinámicos es muy conocida la expresión *Periodo* 3 *Implica Caos*. Parte del propósito de esta sección es hacer que la expresión *Periodo* 3 *Implica Indescomponiblidad* también sea conocida.

En el capítulo anterior vimos que si $f : I \to I$ es una función continua que tiene una órbita densa, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible. En esta sección veremos un ejemplo más de que cuando la dinámica de la función es interesante, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible, pero ahora lo veremos desde el punto de vista de los puntos periódicos.

Demostraremos que cuando una función continua, $f : I \to I$, tiene un punto periódico de periodo 3, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible. Generalizando este resultado, demostraremos el Teorema 5.31, que nos dice que si $f : I \to I$ es una función continua que tiene un punto períodico de periodo no potencia de 2, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible.

En la última parte de esta sección enunciaremos y demostraremos el Corolario 5.32, el cual nos relaciona puntos periódicos que no son potencia de 2, con subcontinuos indescomponibles de (I, f).

Como siempre para poder demostrar estos resultados interesantes, necesitaremos ayuda de algunas herramientas que a continuación se desarrollan.

Una herramienta que necesitaremos será la Observación 4.24. El cual nos dice que subcontinuos indescomponibles se preservan bajo homeomorfismos.

El lema que mencionamos a continuación nos ayudará a demostrar la última parte del Corolario 5.32, pues ahí nos darán un punto cuyo periodo no es potencia de dos bajo la función f^{2^n} y por el lema que mencionamos a continuación podemos estar seguros de que tenemos un punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2 bajo la función f.

Lema 5.24. Sea $f : I \to I$ una función continua. Sea $n \in \mathbb{N}$, tal que f^{2^n} tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2. Entonces $f : I \to I$ tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in I$ y $q \in \mathbb{N}$, que no es potencia de dos, el periodo de x bajo f^{2^n}, es decir $(f^{2^n})^q(x) = x$ y si $1 \leq m < q$, entonces $(f^{2^n})^m(x) \neq x$.

Sea $b \in \mathbb{N}$ el periodo de x bajo f. Si b es potencia de 2, digamos $b = 2^r$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Entonces b divide a $2^n q$ y $f^{2^r}(x) = x$.

Si $r \leq n$, entonces $f^{2^r 2^{n-r}}(x) = x$, luego $f^{2^n}(x) = x$, lo cual contradice que x es de periodo q bajo f^{2^n},

Si $n < r$. Como b divide a $2^n q$, entonces $2^r \leq 2^n q$, luego $2^n 2^{r-n} \leq 2^n q$, por lo tanto $2^{r-n} \leq q$ y como q no es potencia de dos, entonces $2^{r-n} < q$. Tenemos que

$$f^b(x) = f^{2^r}(x) = f^{2^n 2^{r-n}}(x) = x \text{ y } 2^{r-n} < q.$$

Esto contradice que x es de periodo q bajo f^{2^n}. Por lo tanto x es un punto periódico de f que no es potencia de 2. $\square$

Para el Lema 5.25 será necesario recordar que la función $\hat{f} : (I, f) \to (I, f)$ está dada por $\hat{f}(x_0, x_1, x_2, ...,) = (f(x_0), x_0, x_1, x_2, ...)$.

El Lema 5.25 nos da algunas condiciones para que un subcontinuo S de (I, f) se pueda ver como límite inverso de una función. Este Lema será utilizado en la última parte de la demostración del Corolario 5.32. Ahí se demostrará, con ayuda del siguiente lema, que cierto subcontinuo S de (I, f) se puede ver como límite inverso de una función.

Lema 5.25. Sean $f : I \to I$ una función continua, S un subcontinuo de (I, f) y J un subintervalo de I tal que $J = \pi_0(S)$. Si $f(J) = J$ y $\hat{f}(S) = S$, entonces $(J, f|_J) = S$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\overline{x} \in (J, f|_J)$, entonces $x_i \in \pi_0(S)$ para toda $i \geq 0$, luego existe $\overline{x}^i \in S$ tal que $\pi_0(\overline{x}^i) = x_i$. Como $\hat{f}(S) = S$, entonces para toda $i \geq 0$, $\hat{f}^i(\overline{x}^i) \in S$. Observemos que las primeras i entradas de $\overline{x}$ y $\hat{f}^i(\overline{x}^i)$ son iguales. Por lo tanto

$$\lim_{i\to\infty} \hat{f}^i(\overline{x}^i) = \overline{x}$$

Como S es cerrado, entonces $\overline{x} \in S$. Por lo tanto $(J, f|_J) \subseteq S$.

Ahora sea $\overline{x} \in S$, entonces $x_0 \in \pi_0(S)$ y como $\hat{f}(S) = S$, $\overline{x} = \hat{f}(x_1, x_2, x_3, ...)$ y $\hat{f}$ es un homeomorfismo, entonces $x_1 \in \pi_0(S)$. Aplicando esto una y otra vez obtenemos que $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, ...) \in S$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $x_i \in \pi_0(S)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\overline{x} \in (J, f|_J)$ y esto prueba la otra contención. $\square$

Las siguientes dos observaciones nos ayudarán a demostrar el Teorema 5.28. En lo personal la siguiente observación se me hace interesante. Nos dice que si un punto $\overline{x}$ no está en H, donde H es un subcontinuo de (I, f), entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \notin \pi_n(H)$ si $n \geq N$. Esta observación se sigue de que H es cerrado, como se demuestra a continuación.

Observación 5.26. Sea H un subcontinuo de (I, f). Supongamos que existe $\overline{x} \in (I, f)$ tal que $\overline{x} \notin H$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $\pi_n(\overline{x}) \notin \pi_n(H)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\overline{x} \in (I, f)$ tal que $\overline{x} \notin H$. Supongamos que la conclusión no es cierta, entonces existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, con $n_1 < n_2 < n_3 < ... < ...$, tal que $\pi_{n_i}(\overline{x}) \in \pi_{n_i}(H)$. Luego existe $\overline{x}^{n_i}$, con $\overline{x}^{n_i} \in H$, tal que $\pi_{n_i}(\overline{x}^{n_i}) = x_{n_i}$. Observemos que las primeras n_i coordenadas de $\overline{x}^{n_i}$ y $\overline{x}$ son iguales, entonces

$$\lim_{i\to\infty} \overline{x}^{n_i} = \overline{x},$$

Como H es cerrado $\overline{x} \in H$, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto se da la conclusión. $\square$

Observación 5.27. Sean $f : I \to I$ una función continua, $x \in I$ un punto periódico de periodo 3 y $\overline{x} = (x, f^2(x), f(x), x, f^2(x), f(x), x, f^2(x), ...)$. Entonces existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que

$$\pi_i(\overline{x}) \in [\pi_i(\hat{f}(\overline{x})), \pi_i(\hat{f}^2(\overline{x}))],$$

donde $[c, d]$ es el intervalo más chico que contiene a $\{c, d\}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $f(x) < x < f^2(x)$ ó $f^2(x) < x < f(x)$, entonces $\pi_0(\overline{x}) \in [\pi_0(\hat{f}(\overline{x})), \pi_0(\hat{f}^2(\overline{x}))]$.
Si $x < f^2(x) < f(x)$ ó $f(x) < f^2(x) < x$, entonces $\pi_1(\overline{x}) \in [\pi_1(\hat{f}(\overline{x})), \pi_1(\hat{f}^2(\overline{x}))]$.
Si $x < f(x) < f^2(x)$ ó $f^2(x) < f(x) < x$, entonces $\pi_2(\overline{x}) \in [\pi_2(\hat{f}(\overline{x})), \pi_2(\hat{f}^2(\overline{x}))]$. □

El Teorema de Sharkovskii nos sorprendió cuando nos dijo que si una función continua, $f : I \to I$, tiene un punto periódico de periodo 3, entonces tiene puntos periódicos de todos los periodos.

El siguiente teorema, el cual es el responsable del título de esta sección, hará que el número 3 nos vuelva a sorprender. Pues mostraremos que si $f : I \to I$ es una función continua que tiene un punto periódico de periodo 3, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible. ¿Qué tiene el 3 para que haga cosas tan sorprendentes?

Teorema 5.28. *Sea $f : I \to I$ una función continua. Si $f : I \to I$ tiene un punto periódico de periodo 3, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible que es invariante bajo $\hat{f} : (I, f) \to (I, f)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean x el punto que es de periodo 3 bajo f,

$$\overline{x} = (x, f^2(x), f(x), x, f^2(x), f(x), x, f^2(x), f(x), ...),$$

$$B = \{\overline{x}, \hat{f}(\overline{x}), \hat{f}^2(\overline{x})\} \quad \text{y}$$

$$S' = \{A \subseteq (I, f) : A \text{ es un subcontinuo de } (I, f) \text{ y } B \subseteq A\}.$$

Observemos que $S' \neq \varnothing$, pues $(I, f) \in S'$. Como (I, f) es un continuo encadenable, entonces $\bigcap S' = S$ es un continuo. Veamos que S nos sirve para el Teorema.

Observemos que $\hat{f}(B) = B$ y $\hat{f}^{-1}(B) = B$. Como $B \subseteq S$, entonces $\hat{f}(B) \subseteq \hat{f}(S)$. Además $\hat{f}$ es un homeomorfismo, entonces $\hat{f}(S)$ es un continuo que contiene a B, por lo tanto $S \subseteq \hat{f}(S)$. Similarmente $S \subseteq \hat{f}^{-1}(S)$, luego $\hat{f}(S) \subseteq S$. Por lo tanto de las dos contenciones tenemos que $\hat{f}(S) = S$.

Ahora veremos que S es un continuo indescomponible, para ver esto basta ver que S es irreducible entre cualesquiera dos elementos de B.

Demostraré primero que S es irreducible entre $\hat{f}(\overline{x})$ y $\hat{f}^2(\overline{x})$. Supongamos que existe H un subcontinuo propio de S tal que $\{\hat{f}(\overline{x}), \hat{f}^2(\overline{x})\} \subseteq H$. De esto se sigue que $\overline{x} \notin H$, pues si $\overline{x} \in H$, por definición de S, tendríamos que $S \subseteq H$ lo cual contradice la elección de H. Como $\overline{x} \notin H$, por la Observación 5.26, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $\pi_n(\overline{x}) \notin \pi_n(H)$. Por la Observación 5.27, existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $\pi_i(\overline{x}) \in [\pi_i(\hat{f}(\overline{x})), \pi_i(\hat{f}^2(\overline{x}))]$. Como x es de periodo 3,

$$\pi_{i+3k}(\overline{x}) \in [\pi_{i+3k}(\hat{f}(\overline{x})), \pi_{i+3k}(\hat{f}^2(\overline{x}))] \text{ para toda } k \geq 0.$$

Como $\{\hat{f}(\overline{x}), \hat{f}^2(\overline{x})\} \subseteq H$ y $\pi_n(H)$ es conexo para toda $n \geq 0$, entonces

$$[\pi_{i+3k}(\hat{f}(\overline{x})), \pi_{i+3k}(\hat{f}^2(\overline{x}))] \subseteq \pi_{i+3k}(H) \text{ para toda } k \geq 0,$$

luego $\pi_{i+3k}(\overline{x}) \in \pi_{i+3k}(H)$ para toda $k \geq 0$. Esto contradice que $\pi_n(\overline{x}) \notin \pi_n(H)$ para toda $n \geq N$. Por lo tanto S es irreducible entre $\hat{f}(\overline{x})$ y $\hat{f}^2(\overline{x})$.

Como $\hat{f}$ y $\hat{f}^{-1}$ son homeomorfismos, entonces mandan parejas de puntos irreducibles en parejas de puntos irreducibles. Por lo tanto $\hat{f}(\{\hat{f}(\overline{x}), \hat{f}^2(\overline{x})\})$ y $\hat{f}^{-1}(\{\hat{f}(\overline{x}), \hat{f}^2(\overline{x})\})$ son parejas de puntos irreducibles en $\hat{f}(S) = S$ y $\hat{f}^{-1}(S) = S$ respectivamente.

Por lo tanto S es irreducible entre $\overline{x}$ y $\hat{f}^2(\overline{x})$ y S es irreducible entre $\overline{x}$ y $\hat{f}(\overline{x})$. Con lo cual concluimos que S es un continuo indescomponible. $\square$

La próxima observación y el próximo lema son herramientas que nos ayudarán a demostrar una generalización del teorema anterior.

La próxima observación es una consecuencia inmediata del Teorema de Sharkovskii, el cual mencionaremos enseguida.

Observación 5.29. Sean $f : I \to I$ una función continua, $k \geq 0$ y $n \geq 1$. Supongamos que $f : I \to I$ tiene un punto periódico de periodo $2^k(2n+1)$, entonces $f : I \to I$ tiene un punto periódico de periodo $2^{k+1} \cdot 3$. Por lo tanto $f^{2^{k+1}} : I \to I$ tiene un punto periódico de periodo 3.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar esta observación necesitamos recordar el Teorema de Sharkovskii, el cual se encuentra enunciado en el Teorema 3.7, páginas 29 y 30 del libro [**3**]. Este teorema nos da un orden sobre los periodos, el cual se representa de la siguiente forma.

$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 11 \rhd 13 \rhd 15 \rhd \cdots$
$2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd 2 \cdot 7 \rhd 2 \cdot 11 \rhd 2 \cdot 13 \rhd 2 \cdot 15 \cdots$
$2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd 2^2 \cdot 7 \rhd 2^2 \cdot 11 \rhd 2^2 \cdot 13 \rhd 2^2 \cdot 15 \cdots$
$2^3 \cdot 3 \rhd 2^3 \cdot 5 \rhd 2^3 \cdot 7 \rhd 2^3 \cdot 11 \rhd 2^3 \cdot 13 \rhd 2^3 \cdot 15 \cdots$
$\cdots$
$\cdots \rhd 2^5 \rhd 2^4 \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$

Donde $n \rhd m$ significa que m está en el mismo renglón pero a la derecha, o m está abajo del renglón de n.

El Teorema de Sharkovskii nos dice que si $f : I \to I$ es una función continua que tiene un punto periódico de periodo n y $n \rhd m$, entonces f tiene un punto periódico de periodo m.

Como f tiene un punto periódico de periodo $2^k(2n+1)$ y la ordenación del Teorema de Sharkovskii nos dice que $2^k(2n+1) \rhd 2^{k+1} \cdot 3$, entonces f tiene un punto periódico de periodo $2^{k+1} \cdot 3$. Por lo tanto $f^{2^{k+1}}$ tiene un punto periódico de periodo 3. $\square$

La función que se menciona en el próximo lema es un homeomorfismo, pues es continua entrada a entrada y además se ve que es biyectiva. Usaremos este hecho para demostrar este lema.

Lema 5.30. Sean $f : I \to I$ una función continua, $n \in \mathbb{N}$ y $H : (I, f) \to (I, f^n)$ el homeomorfismo dado por

$$H(x_0, x_1, x_2, ...) = (x_0, x_n, x_{2n}, x_{3n}, ...).$$

Supongamos que S es un subcontinuo de (I, f) tal que $\widehat{f^n}(H(S)) = H(S)$, entonces

$$\hat{f}^n(S) = S.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\overline{x} \in S$, entonces $H(\overline{x}) \in H(S)$. Como $\widehat{f^n}(H(S)) = H(S)$ y $\widehat{f^n}(x_n, x_{2n}, x_{3n}, ...) = (x_0, x_n, x_{2n}, x_{3n}, ...)$, entonces $(x_n, x_{2n}, x_{3n}, ...) \in H(S)$, luego $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...) \in S$. Como $\hat{f}^n(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...) = (x_0, x_1, x_2, ...)$, entonces $\overline{x} \in \hat{f}^n(S)$.

Ahora sea $\overline{y} \in \hat{f}^n(S)$, entonces $\overline{y} = (f^n(x_0), f^{n-1}(x_0), ..., x_0, x_1, x_2, ...)$, donde $\overline{x} = (x_0, x_1, x_2, ...)$ y $\overline{x} \in S$, entonces $\widehat{f^n}(x_0, x_n, x_{2n}, x_{3n}, ...) \in H(S)$. Luego $(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0), ..., x_0, x_1, x_2, ...) \in S$. Por lo tanto $\overline{y} \in S$, que es lo que queríamos probar. $\square$

El Teorema 5.31 esencialmente será demostrado gracias al teorema anterior y al Teorema de Sharkovskii. Este teorema nos dice que no sólo las funciones que tienen puntos periódicos de periodo 3 implican indescomponibilidad, sino también las funciones que tienen puntos periódicos cuyos periodos no son potencia de 2. Aún más, nos dice que ese subcontinuo indescomponible S de (I, f), es invariante bajo $\hat{f}^{2^k}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Esto se puede interpretar como que el continuo S es un conjunto periódico con periodo alguna potencia de 2 bajo la función $\hat{f}$.

Teorema 5.31. *Sea $f : I \to I$ una función continua, $k \geq 0$ y $n \geq 1$. Supongamos que $f : I \to I$ tiene un punto periódico de periodo $2^k(2n+1)$, es decir que no es potencia de 2, entonces (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible que es invariante bajo $\hat{f}^{2^{k+1}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea k, n enteros, con $k \geq 0$, $n \geq 1$. Supongamos que f tiene un punto periódico de periodo $2^k(2n+1)$. Por la Observación 5.29, $f^{2^{k+1}}$ tiene un punto periódico de periodo 3. Por el Teorema 5.28, $(I, f^{2^{k+1}})$ contiene un subcontinuo indescomponible S tal que $\widehat{f^{2^{k+1}}}(S) = S$.

Recordando la notación del Lema 5.30, se cumple que

$$\widehat{f^{2^{k+1}}}(H(H^{-1}(S))) = H(H^{-1}(S)).$$

Como H es homeomorfismo, $H^{-1}(S)$ es un subcontinuo indescomponible de (I, f) y por el Lema 5.30, se cumple que $\hat{f}^{2^{k+1}}(H^{-1}(S)) = H^{-1}(S)$, que es lo que se quería probar. $\square$

Concluimos esta sección con el Corolario 5.32, el cual es una consecuencia de los Teoremas 5.23 y 5.31. Este corolario nos dice que si $f : I \to I$ es una función continua que tiene una cantidad finita de puntos esquinas, entonces es equivalente que (I, f) contenga un subcontinuo indescomponible invariante bajo alguna potencia de 2 de la función corrimiento, con que f tenga puntos periódicos cuyos periodos no son potencia de 2. Algo curioso que ocurre en el regreso del siguiente corolario es que cuando f tiene un punto periódico de periodo no potencia de 2, entonces el subcontinuo indescomponible de (I, f), que nos da el corolario, es un conjunto periódico que tiene periodo alguna potencia de 2, bajo la función $\hat{f}$.

Corolario 5.32. *Sea $f : I \to I$ una función continua que tiene una cantidad finita de puntos esquina. Hay un entero $n \geq 0$ y un subcontinuo indescomponible de (I, f) invariante bajo $\hat{f}^{2^n}$ si y sólo si f tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2.*

DEMOSTRACIÓN. El regreso lo acabamos de demostrar en el Teorema 5.31.

Vamos a demostrar la ida. Supongamos que existe $n \geq 0$ y un subcontinuo indescomponible S de (I, f) que es invariante bajo $\hat{f}^{2^n}$. Sea $g = f^{2^n}$. Entonces (I, f) es homeomorfo a (I, g) bajo el homeomorfismo $H : (I, f) \to (I, g)$ dado por

$$H(x_0, x_1, x_2, ...) = (x_0, x_{2^n}, x_{2(2^n)}, x_{3(2^n)}, x_{4(2^n)}, ...).$$

Sea $S_1 = H(S)$, veamos que $\hat{g}(S_1) = S_1$, es decir $\hat{g}(H(S)) = H(S)$.

Sea $\overline{x}_H = (x_0, x_{2^n}, x_{2(2^n)}, x_{3(2^n)}, ...) \in H(S)$, con $(x_0, x_1, x_2, ...) \in S$. Como $\hat{f}^{2^n}(S) = S$, entonces $(f^{2^n}(x_0), f^{2n-1}(x_0), ...) \in S$, luego $H(f^{2^n}(x_0), f^{2^n-1}(x_0), ..., x_0, x_1, ...) \in H(S)$, entonces

$$(f^{2^n}(x_0), x_0, x_{2^n}, x_{2(2^n)}, ...) \in H(S).$$

Como

$$\hat{g}(\overline{x}_H) = (f^{2^n}(x_0), x_0, x_{2^n}, x_{2(2^n)}, ...),$$

entonces $\hat{g}(\overline{x}_H) \in H(S)$. Ahora sea $\overline{x}_H \in H(S)$, es decir $\overline{x}_H = (x_0, x_{2^n}, x_{2(2^n)}, x_{3(2^n)}, ...)$, con $(x_0, x_1, x_2, ...) \in S$. Como $\hat{f}^{2^n}(S) = S$, entonces

$$(x_0, x_1, x_2, ...) = \hat{f}^{2^n}(x_{2^n}, x_{2^n+1}, x_{2^n+2}, ...) \text{ y } (x_{2^n}, x_{2^n+1}, x_{2^n+2}, ...) \in S.$$

Como $H(x_{2^n}, x_{2^n+1}, x_{2^n+2}, ...) = (x_{2^n}, x_{2(2^n)}, x_{3(2^n)}, ...)$, entonces

$$(x_{2^n}, x_{2(2^n)}, x_{3(2^n)}, ...) \in H(S),$$

luego $\overline{x}_H \in \hat{g}(H(S))$. Por lo tanto $\hat{g}(H(S)) = H(S)$.

Ahora veamos que $g(\pi_0(S_1)) = \pi_0(S_1)$. Sea $x \in \pi_0(S_1)$. Entonces existe $\overline{x}_H \in S_1$ tal que $\pi_0(\overline{x}_H) = x$, $\overline{x}_H$ es de la forma $\overline{x}_H = (x_0, x_{2^n}, x_{2(2^n)}, ...)$, con $(x_0, x_1, x_2, ...) \in S$. Como $\hat{g}(H(S)) = H(S)$, entonces $(x_{2^n}, x_{2(2^n)}, x_{3(2^n)}, ...) \in H(S)$. Por lo tanto $x_{2^n} \in \pi_0(S_1)$ y $g(x_{2^n}) = x_0 = x$, entonces $x \in g(\pi_0(S_1))$. Ahora sea $g(x)$, con $x \in \pi_0(S_1)$. Como $\hat{g}(H(S)) = H(S)$, entonces $g(x) \in \pi_0(S_1)$. Esto prueba la otra contención y por lo tanto la igualdad.

Sea $J = \pi_0(S_1)$. Como $g(\pi_0(S_1)) = \pi_0(S_1)$, $g : J \to J$ está bien definida, además $\hat{g}(S_1) = S_1$. Entonces por el Lema 5.25, $(J, g) = S_1$. Con lo cual (J, g) es un continuo indescomponible. Como $g = f^{2^n}$, por el Lema 5.15, g tiene una cantidad finita de puntos esquina, además g es suprayectiva, entonces por el Teorema 5.23, g tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2 y por el Lema 5.24, f tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de 2. Esto termina el corolario. $\square$

5.3. Indescomponibilidad no Implica Periodo 3

En esta sección mostraremos un ejemplo de una función continua del intervalo en el intervalo que cumple que (I, f) contiene un subcontinuo indescomponible, pero f no tiene puntos periódicos de periodo impar, de hecho f no tiene puntos periódicos de periodo que no sea potencia de dos. Este ejemplo nos servirá para argumentar que en el Teorema 5.23 la hipótesis de que f tenga una cantidad finita de puntos esquina es necesaria. También nos servirá para argumentar de cierta forma que el regreso del Teorema 5.31, no siempre se cumple. Para este ejemplo usaremos el ejercicio 2.22 del libro [**7**] pág. 26 y 27, que a continuación enunciamos y demostramos.

Proposición 5.33. *Sean $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{Y_i\}_{i=0}^{\infty}$ dos sucesiones de continuos, y sean*

$$X = \varprojlim(X_i, h_i) \quad y \quad Y = \varprojlim(Y_i, g_i),$$

tal que para toda $i \geq 0$ existe $\varphi_i : X_i \to Y_i$ tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[d, "\varphi_0"'] & X_1 \arrow[l, "h_1"'] \arrow[d, "\varphi_1"'] & X_2 \arrow[l, "h_2"'] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \cdots \arrow[l] \\ Y_0 & Y_1 \arrow[l, "g_1"] & Y_2 \arrow[l, "g_2"] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

conmutan y φ_i es un homeomorfismo. Entonces la función $\varphi : X \to Y$ dada por

$$\varphi(x_0, x_1, x_2, ...) = (\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), ...)$$

es un homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Empecemos por ver que φ está bien definida. Sea $\overline{x} \in X$ y $n \geq 0$, como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[d, "\varphi_n"'] & X_{n+1} \arrow[l, "h_{n+1}"'] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] \\ Y_n & Y_{n+1} \arrow[l, "g_{n+1}"] \end{tikzcd}$$

se cumple que

$$g_{n+1}(\varphi_{n+1}(x_{n+1})) = \varphi_n(h_{n+1}(x_{n+1}))$$

y como $\overline{x} \in X$, $h_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$. Por lo tanto $g_{n+1}(\varphi_{n+1}(x_{n+1})) = \varphi_n(x_n)$, lo que nos dice que $(\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), ...) \in Y$.

Como cada φ_i es inyectiva, entonces φ es inyectiva.

Ahora veremos que φ es suprayectiva.

Sea $\overline{y} \in Y$, sea $\overline{x} = (\varphi_0^{-1}(y_0), \varphi_1^{-1}(y_1), \varphi_2^{-1}(y_2), ...)$. Como el diagrama anterior conmuta y $\overline{y} \in Y$, se cumple que

$$h_{n+1}(\varphi_{n+1}^{-1}(y_{n+1})) = \varphi_n^{-1}(g_{n+1}(y_{n+1})) = \varphi_n^{-1}(y_n)$$

lo que nos dice que $\overline{x} \in X$. Además $\varphi(\overline{x}) = \overline{y}$. Esto prueba que φ es suprayectiva.

Para ver que φ es continua, observemos que para toda $n \geq 0$,

$$\pi_n \circ \varphi = \varphi_n \circ \pi_n$$

y tanto π_n como φ_n son continuas entonces $\pi_n \circ \varphi$ es continua, por lo tanto φ es continua. Tenemos que φ es continua, biyectiva y X, Y son continuos, por lo tanto φ es un homeomorfismo. $\square$

Ahora sí empecemos a construir la función f que mencionamos anteriormente. La función f se construirá con ayuda de las funciones g y h que definimos a continuación. Sea $g : I \to I$, dada por $g(x) = x^2$, cuya gráfica es la que se muestra en la figura 5.1

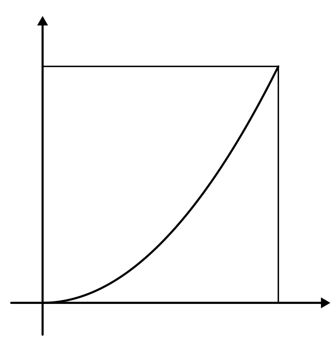

FIGURA 5.1.

y sea $h : I \to I$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \\ 2 - 3x, & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \\ 3x - 2, & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Cuya gráfica es la que se muestra en la figura 5.2.

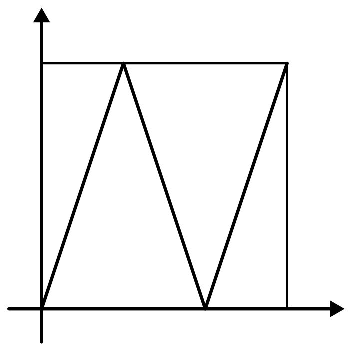

FIGURA 5.2.

Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones en I definidas de la siguiente manera. $a_0 = \frac{1}{2}$ y para cada $n \geq 1$, $a_n = g^{-n}(a_0)$. Sea b_0 así $a_0 < b_0 < a_1$, y para cada $n \geq 1$, $b_n = g^{-n}(b_0)$.

Observemos que la inversa de g es la función raíz cuadrada, es decir para toda $x \in I$, $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$, entonces g^{-1} es creciente y si $x \in (0, 1)$, $x < \sqrt{x}$. Por esta última propiedad se tiene que,

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \cdots ,$$

y como $a_0 < b_0 < a_1$ y g^{-1} es creciente, entonces las sucesiones están ordenadas de las siguiente forma.

$$a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \cdots a_n < b_n < a_{n+1} < b_{n+1} \cdots .$$

Si para cada $i \geq 0$ definimos a $A_i = [a_i, b_i]$, entonces por el orden de los puntos $a_{i's}, b_{i's}$, se cumple que si $i \neq j$, entonces $A_i \cap A_j = \varnothing$ y por la definición de los puntos $a_{i's}, b_{i's}$, $g(a_i) = a_{i-1}$ y $g(b_i) = b_{i-1}$. Además como g es continua y creciente, se cumple que $g(A_{i+1}) = A_i$ para toda $i \geq 0$.

Para cada $i \geq 0$, sea φ_i la función, cuya gráfica es la recta que une al punto $(0, a_i)$ con el punto$(1, b_i)$. Es decir $\varphi_i : I \to [a_i, b_i]$ es la función dada por

$$\varphi_i(x) = (b_i - a_i)x + a_i.$$

Ahora para cada $i \geq 1$, sea $g_i : [a_i, b_i] \to [a_{i-1}, b_{i-1}]$ dada por

$$g_i(x) = \varphi_{i-1} \circ h \circ \varphi_i^{-1}(x)$$

con lo cual g_i, hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
[0,1] \arrow[d, "\varphi_{i-1}"'] & {[0,1]} \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "\varphi_i"'] \\
{[a_{i-1}, b_{i-1}]} & {[a_i, b_i]} \arrow[l, "g_i"']
\end{tikzcd}$$

como para cada $i \geq 0$, las $\varphi_{i's}$ son funciones crecientes que trasladan y expanden entonces las gráficas de las $g_{i's}$ se ven como en la Figura 5.3.

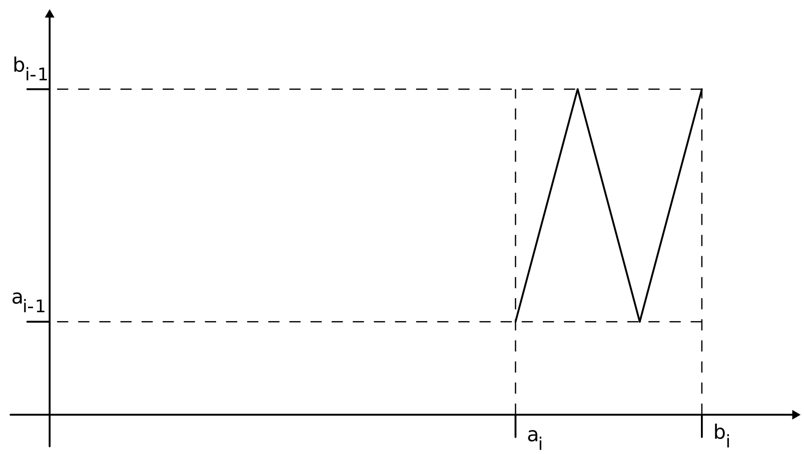

FIGURA 5.3. Representación de la gráfica de g_i

.

Otra cosa que observamos es que para cada $i \geq 1$, g_i es una composición de funciones suprayectivas y por lo tanto $g_i(A_i) = A_{i-1}$.

Finalmente definamos la función $f : I \to I$ como sigue.

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \\ \\ g_i(x), & \text{si } x \in A_i \text{ para algún } i \geq 1. \end{cases}$$

Una representación de cómo podría ser la gráfica de f, se muestra en la Figura 5.4. Lo que dijimos en el primer párrafo sobre la función f, lo formalizaremos en la siguiente proposición.

Proposición 5.34. *La función $f : I \to I$ que acabamos de definir cumple las siguientes propiedades.*

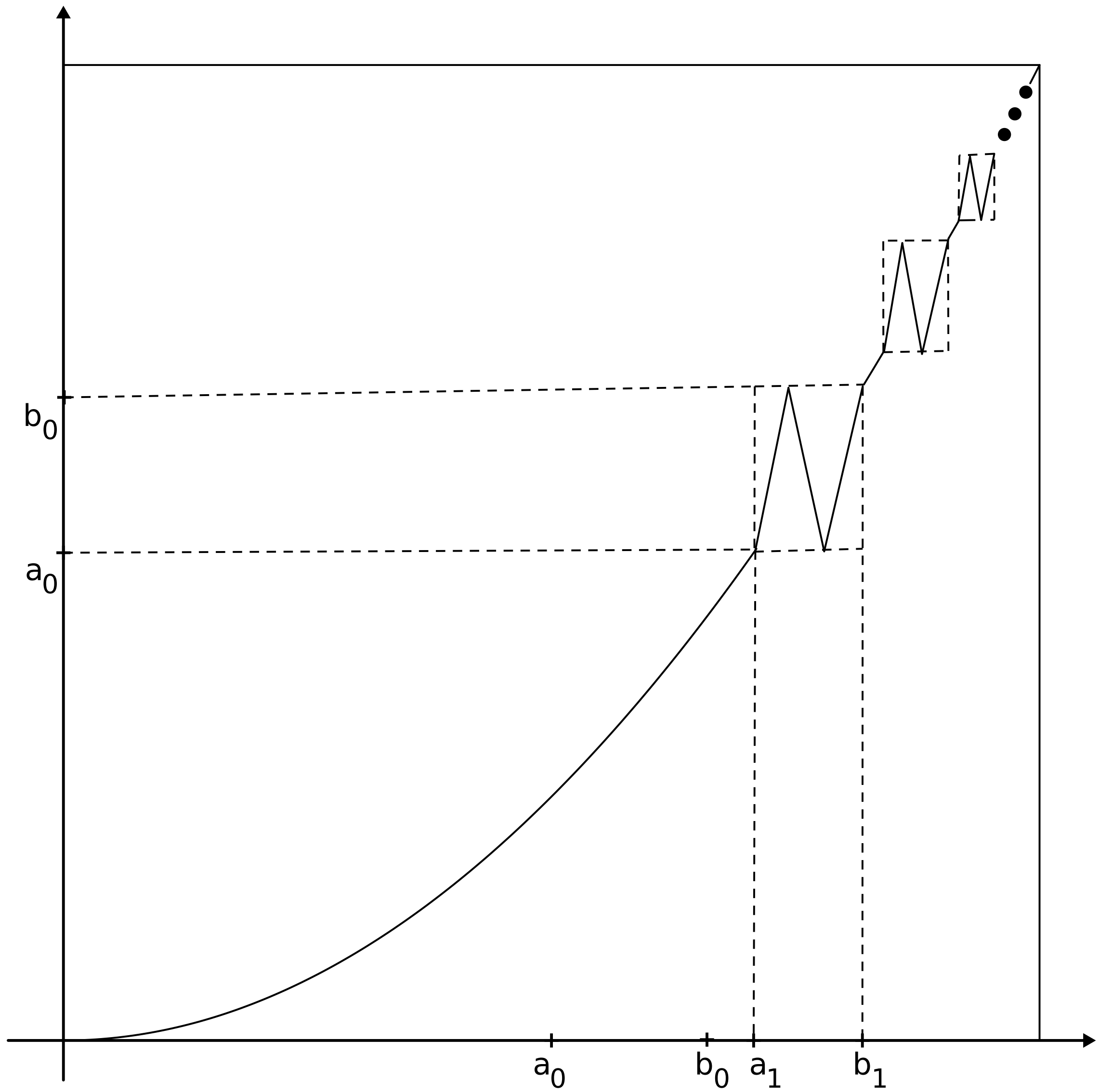

FIGURA 5.4. Representación de la gráfica de $f : I \to I$

$i)$ *$f : I \to I$ es una función continua.*
$ii)$ *(I, f) contiene un continuo indescomponible.*
$ii)$ *Los únicos puntos periódicos de f son 0 y 1, los cuales son puntos fijos.*

DEMOSTRACIÓN. Para ver que f es continua, observemos que para cada $i \geq 1$, $g_i(a_i) = a_{i-1} = g(a_i)$ y tanto g_i como g son funciones continuas, de lo cual se sigue que, por el lema del pegado, f es continua en $[0, 1)$.

Que f sea continua en 1, se sigue de los siguientes incisos.

$i)$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

$ii)$ Para toda $i \geq 1$, $g_i([a_i, b_i]) = [a_{i-1}, b_{i-1}]$.

$iii)$ g es creciente.

Ahora fijémonos en (I, f). Observemos que como para cada $i \geq 0$, $g_{i+1}(A_{i+1}) = A_i$, entonces tiene sentido definir $\varprojlim(A_i, g_i)$ y por como definimos a f, se cumple que $\varprojlim(A_i, g_i) \subseteq (I, f)$.

Por otra parte, notemos que nuestras funciones g_i, h y φ_i cumplen la hipótesis de la Proposición 5.33, y por lo tanto $\varprojlim(A_i, g_i)$ y (I, h) son homeomeomorfos.

Observemos que el espacio I y la función h cumplen las hipotesis del Teorema 2.7, pág. 21 del libro [**7**]. Entonces (I, h) es un continuo indescomponible. Por lo tanto $\varprojlim(A_i, g_i)$ es un continuo indescomponible.

Lo que nos dice que (I, f) contiene un continuo indescomponible.

Ahora enfoquémonos en la dinámica de f, veamos si f tiene puntos periódicos, para esto analizemos los puntos que están en I.

Si $x \in (0, a_1)$, entonces por la definición de f, $f(x) = g(x)$ y como $g(x)$ cumple que $g(x) < x$, entonces $f^n(x) = g^n(x)$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$.

Si $x \in [a_i, b_i]$ para algún $i \geq 1$, entonces $f(x) = g_i(x)$, y como $g_i(A_i) = A_{i-1}$, existe $N \geq 1$ tal que $f^N(x) \in [a_0, b_0]$, de lo cual se sigue que para toda $n \geq 1$,

$$f^{N+n}(x) = g^n(f^N(x))$$

y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$.

Si $x \in [a_1, 1]$ y $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, como $g[a_i, b_i] = [a_{i-1}, b_{i-1}]$ y g es inyectiva, entonces para toda $n \geq 1$, $f^n(x) \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ luego $f^n(x) = g^n(x)$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$.

Del análisis anterior resumimos que si $x \in (0, 1)$ entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$. Lo cual nos dice que si $x \in (0, 1)$, x no es un punto periódico. Por lo tanto los únicos puntos periódicos son el 0 y el 1, los cuales son puntos fijos. □

El ejemplo dado en esta última sección fue propuesto por el Dr. Héctor Méndez Lango en un seminario de Sistemas Dinámicos que él dirige en el departamento de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Bibliografía

[1] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2000. 537 p. ISBN 0131816292.

[2] Javier Camargo y Rafael Isaacs. *Continuos tipo Knaster y sus modelos geométricos.* Revista Colombiana de Matemáticas 47.1 (2013): 67-81.

[3] Jefferson King Davalos y Héctor Méndez Lango. *Sistemas Dinámicos Discretos*, Las Prensas de Ciencias, México D.F. 2014.

[4] Kazimierz Kuratowski. *Topology*, Vol.II, Academic Press, New York, USA,1968.

[5] Marcy Barge y Joe Martin. *Chaos, periodicity, and snakelike continua.* Transactions of the American Mathematical Society 289.1 (1985): 355-365.

[6] R. H. Bing. *Snake-like continua.* Duke Mathematical Journal 18.3 (1951): 653-663.

[7] Sam B. Nadler, Jr. *Continuum Theory, An Introduction*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, USA, 1992.

[8] W. Tom Ingram *Inverse limits*, volume 15 of Aportaciones Matemáticas: Investigación [Mathematical Contributions: Research]. Sociedad Matemática Mexicana, México (2000).