UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SOBRE LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI
PARA EL PROBLEMA DE N-CUERPOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
BORIS ASDRUBAL PERCINO FIGUEROA[1]

DIRECTORES
Dr. HÉCTOR FIDENCIO SÁNCHEZ MORGADO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Dr. EZEQUIEL MADERNA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, URUGUAY

COMITÉ TUTOR
Dr. RENATO GABRIEL ITURRIAGA ACEVEDO
CIMAT

Dr. PABLO PADILLA LONGORIA
IIMAS

MÉXICO, D. F. Marzo 2016

1 Apoyado con beca CONACYT no. 303109.

A Maky, China y Esaú por todo su apoyo y comprensión.

Índice general

Agradecimientos

Quisiera dedicar unas lineas para agradecer a todos aquellos *sine qua non* este trabajo jamás habria llegado a un comienzo en unos casos o a su fín en otros. Es probable que por deficiencias memoristicas y mentales pase por alto a algunos pero no lo más probable es que les agradezca en persona cuando lleguen a la mente y prometo donar una soga para que me cuelgen por olvidarles.

Comienzo con una parte que es de todos los ciudadanos de nuestro bello país y es que hubiese sido sumamente dificil y todavia más tortuoso el hacer mis estudios de doctorado sin la beca número 303109 otorgada por el CONACYT y la cual no sería posible recibir sin el esfuerzo conjunto que día a día los mexicanos hacen y que se refleja en que muchos como yo pueden continuar con sus estudios, gracias México y gracias CONACYT por ese honor. Otra institución dignisima de este país es la UNAM que tantos frutos nos ha legado y que sin sus excelentes académicos no habrían llegado a su maduración, espero no ser una decepción y siempre poner en alto su nombre como un hijo académico de tan bella madre.

Y como no hay hijo sin madre, debe también de haber un padre académico. Pero en este caso hubo dos, en primer lugar debo agradecer al Profesor Hector Sánchez Morgado que como un buen padre me guió, me orientó, me supo reprender y apoyar, me brindo su amistad y me abrió las puertas de su casa. Gracias por haber aceptado ser mi director y dado la oportunidad de beber del nectar matemático que de su sapiencia emana. Mi segundo padre académico, el Profesor Ezequiel Maderna que desde que lo conocí mostró gran interés por mi trabajo y que posteriormente se involucró de una manera sin igual, gracias a el logramos corregir el rumbo y el cuerpo de la tesis mejoró sustancialmente. Sus conocimientos y su dirección fueron una luz cuando todo estaba oscuro, gracias Ezequiel por tu amistad y apoyo.

Otros dos actores que fueron fundamentales para esta humilde obra fueron los Profesores Renato Iturriaga y Pablo Padilla, que formaron parte del comité tutoral y que siempre estuvieron dispuestos a escuchar y dar ideas y críticas muy interesantes. Está tambien mi agradecimiento a los profesores Joaquín Delgado y Gil Bor que junto con los antes mencionados aceptaron revisar la tesis y dieron importantes observaciones y que formaron el comité sinodal de este trabajo. Para concluir esta parte acedémica quiero agradecer al Profesor Diogo Gomes que me recibió para hacer una estancia en el Intituto Superior Técnico de Lisboa.

Esta tesis jamas se hubiese completado sin el apoyo de Maky, gracias a ti por estar siempre ahí, por ser mi pilar y a veces mi muleta, por ser mi amiga, mi compañera, mi colega. Gracias por darme la fuerza para continuar cuando quise claudicar, por toda la ayuda académica que me has dado y por contagiarme cada día de tu locura y tu felicidad, por tu paciencia y tus consejos, por marchar a mi lado y por permitirme marchar al tuyo, por guiar mi camino en la penumbra, sin ti no habría llegado hasta aquí y sé que contigo llegaré más allá, gracias prinicipesita, una parte de este trabajo está dedicada a ti.

Mis padres han sido, son y serán un eje fundamental en mi vida y en particular en todos mis estudios, me han apoyado con la paciencia y diligencia que ningún otro podría tener; gracias Chinita por tu inconmensurable amor y tus desvelos, por cuidarme y guiarme en la vida; gracias Esaú por darme la fuerza, la persistencia y la disciplina necesaria, por tus conversaciones matemáticas que siempre me han mantenido en tierra. Gracias jefitos por sus incansables esfuerzos, la otra parte de esta tesis es para ustedes.

A mis amados hermanos les debo agradecer por permitirme aprender de ustedes, por estar conmigo sin importar la distancia, han mantenido un interés enorme a lo largo de mis estudios, gracias Tikalita por mantenernos juntosy por habernos dado a esa niña que ha sido una amanecer en nuestras vidas., gracias Gama por ser mis compañero de vida, por las largas conversaciones que mantuvimos y que ahora que estas lejos extraño tanto. Gracias Meri por tus lecciones de vida y que a pesar de las cosas sé que estas ahí. Mis hermanitos, Seiki y Eiro gracias por esas locas veladas que tanto me ayudaron en los momentos de más tensión. Y a sus papas Vero y Gilberto por siempre preocuparse y seguir de cerca los avances la tesis y por adoptarme con un hijo en el seno de su bella familia. Y que sería de mi sin Yaretzi, tan ocurrente y perspicaz, gracias pequeñina por darme tantas alegrías.

Agradezco a mi otra familia que me ha adoptado, gracias Hidali por aceptarme como un hijo y por siempre tenerme en tus pensamientos y tus oraciones, te agradezco también por la esposa que me has dado. Twinnies, gracias por tomarme como a un hermano y por sus ocurrencias que a menudo rompen con las tensiones del trabajo. Gracias Delfino por la hija que has tenido y por permitirme formar una familia con ella.

Debo concluir pues esto no debe extenderse más que la misma tesis, así que termino con alguien no menos importante pues es mi mejor amigo, que me apoya, me acompaña y siempre esta ahí, dispuesto a escuchar las ideas disparatadas que uno pueda tener, gracias Oswaldo por tu amistad.

Introducción

En este trabajo estudiamos el problema de N cuerpos en un espacio euclidiano d dimensional por medio del análisis de la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada a dicho problema. En particular trataremos dos cuestiones, la primera es intentar entender el comportamiento de las funciones de Busemann asociadas al problema y el comportamiento asintótico de sus calibradoras y en segundo lugar caracterizar por medio de las curvas calibradoras a las soluciones KAM débiles que son invariantes por rotaciones.

Para ser más especificos consideremos una configuración

$$x = (r_1, \ldots, r_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$$

de N masas puntuales $m_1, \ldots, m_N > 0$, la ecuación de movimiento del problema está dada por

$$\ddot{x} = \nabla U(x),$$

donde

$$U(x) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

es el potencial newtoniano y el gradiente es tomado con respecto al producto masa dado en (1). La formulación variacional equivalente está dada por el *lagrangiano* $L : (\mathbb{R}^d)^{2N} \to]0, \infty]$

$$L(x, v) = T(v) + U(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i |v_i|^2 + U(x)$$

donde el movimiento está caracterizado como los puntos críticos de la acción lagrangiana:

$$A(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{2}||\dot{\gamma}(t)||^2 + U(\gamma(t))dt.$$

Estamos interesados en puntos críticos que son mínimos, la primera cuestión natural es la de encontrar minimizantes que unen a dos configuraciones dadas en un tiempo fijo. En vista de las singularidades del potencial newtoniano, la principal dificultad es garantizar que las minimizantes no tienen colisiones; en este sentido el principal resultado es debido esencialmente a Marchal ([**Mar, Che**] y para una generalización a cualquier dimensión [**FT**]) que demuestra que una minimizante que une a dos configuraciones dadas en un tiempo fijo, no tiene colisiones en cualquier instante en el interior del intervalo de definición. Esto junto con la semicontinuidad inferior de la acción nos da la existencia de minimizantes sin colisiones que unen a dos configuraciones dadas en un tiempo fijo.

Este problema se puede extender buscando soluciones minimizantes definidas en el intervalo $[0, +\infty)$ que tienen un comportamiento asintótico determinado. En este caso los resultados más importantes son debidos a Chazy([**Ch**]) y a Maderna y Venturelli ([**MV**]). Chazy demuestra que existen siete posibles evoluciones finales en el problema de tres cuerpos, dentro de estas posibilidades se encuentran los llamados *movimientos parabólicos*, es decir soluciones tales que la velocidad de cada cuerpo tiende a cero cuando $t \to +\infty$. Maderna y Venturelli demuestran que dado un mínimo del potencial x_0, llamado *configuración central minimal* y una configuración cualquiera x_i, existe un movimiento parabólico minimizante definido en $[0, +\infty)$ que parte de x_i y que su normalización en la esfera unitaria es asintótica a x_0.

Estas minimizantes tienen energía cero, un caso particular de este tipo de movimientos son las minimizantes en tiempo libre (definición I.11). Maderna ([**M**]) demuestra la existencia de una gama de minimizantes en tiempo libre, que se deducen de la existencia de soluciones KAM débiles de la ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ):

$$\|Du(x)\|^2 = 2U(x);$$

mientras que Da Luz y Maderna ([**DM**]) demuestran que no existen minimizantes en tiempo libre completas, es decir definidas en todo $\mathbb{R}$.

Notemos también que el *potencial crítico de Mañé*

$$\phi(x,y) = \text{ínf}\{A(\gamma) | \gamma \in \mathcal{C}(x,y)\}.$$

define una distancia en $(\mathbb{R}^d)^N$ cuyos rayos geodésicos son las minimizantes en tiempo libre, por lo que un problema natural es el de estudiar las funciones de Busemann de dicha distancia asociadas a los rayos geodésicos. La primera cuestión que aparece es si estas funciones de Busemann son soluciones KAM débiles de HJ y la siguiente es cómo son sus calibradoras con respecto del rayo que define a la función. Este problema es atacado en el capítulo segundo de la tesis en el que vemos que hay una familia particular de movimientos para las que estas funciones son de hecho soluciones KAM débiles las cuales llamaremos *soluciones de Busemann*.

En el tercer capítulo relacionamos a las soluciones KAM débiles con el grupo de simetría $SO(d)$, en particular nos interesa caracterizar a las soluciones que son invariantes bajo dicho grupo. Una herramienta que resulta obligada dada su relación con $SO(d)$ es el momento angular, así pues encontramos una caracterizamos a las soluciones invariantes por rotaciones mediante el momento angular de sus curvas calibradoras.

En el mismo capítulo construimos una familia de soluciones invariantes por rotaciones que estan asociadas a las soluciones de Busemann antes mencionadas y finalmente destacamos problemas que son de interes acerca de las soluciones de Busemann y las soluciones invariantes que definen.

Capítulo I

Preliminares

En este capítulo daremos algunas definiciones que se usarán a lo largo del trabajo, así como una descripción del problema de N-cuerpos, además de algunos resultados conocidos, la mayoría de ellos obtenidos por A. Da Luz y E. Maderna [**DM, M**].

1. La acción lagrangiana y sus minimizantes

Consideremos el espacio euclidiano d dimensional $\mathbb{R}^d$, denotaremos por

$$x = (r_1, \ldots, r_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$$

al vector de configuración de N masas puntuales $m_1, \ldots, m_N > 0$. Diremos que una configuración x tiene *colisiones* si existen $i, j \in \{i, \ldots, N\}, j \neq i$ tales que $r_i = r_j$. Denotaremos por $|x|$ a la norma euclidiana en $(\mathbb{R}^d)^N$ y por $||x||$ a la norma inducida por el producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} m_i \langle r_i, s_i \rangle_{\mathbb{R}^d}, \tag{1}$$

donde $x = (r_1, \ldots, r_N), y = (s_1, \ldots, s_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ y $\langle r_i, s_i \rangle_{\mathbb{R}^d}$ es el producto escalar euclidiano en $\mathbb{R}^d$.

Como es usual, denotaremos por $I(x)$ al *momento de inercia* de la configuración x, dado por

$$I(x) = \sum_{i=1}^{N} m_i |r_i|^2.$$

También denotaremos por m al $\min\{m_1, \ldots, m_N\}$ y por M a la masa total del sistema, es decir, $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

El problema de N-cuerpos está determinado una vez que está establecida la función potencial. Consideraremos en este trabajo el *potencial newtoniano*

$$U : (\mathbb{R}^d)^N \to]0, +\infty]$$

definido como

$$U(x) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

con $r_{ij} = |r_i - r_j|$. Note que $U < \infty$ y es analítico en el conjunto de configuraciones sin colisión, Ω.

Las ecuaciones de movimiento del problema de N-cuerpos se pueden escribir como:

$$\ddot{x} = \nabla U(x) \tag{2}$$

donde el gradiente se calcula con respecto al producto (1). La formulación variacional equivalente está dada por el *lagrangiano* $L : (\mathbb{R}^d)^{2N} \to]0, +\infty]$

$$L(x, v) = T(v) + U(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i |v_i|^2 + U(x) \tag{3}$$

donde los movimientos están caracterizados como los puntos críticos de la acción lagrangiana. Nosotros estaremos interesados en los mínimos de esta acción.

Para precisar esto último consideremos una curva $\gamma : [a, b] \to (\mathbb{R}^d)^N$, diremos que γ es *absolutamente continua* si es diferenciable casi siempre y su derivada $\dot{\gamma}$ satisface el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue. Denotaremos por $\mathcal{AC}$ al conjunto de curvas absolutamente continuas.

I.1. Definición. *Para una curva absolutamente continua* $\gamma : [a,b] \to (\mathbb{R}^d)^N$ *definimos la* acción *de* γ *como*

$$A(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{2}||\dot{\gamma}(t)||^2 + U(\gamma(t))dt,$$

tomando valores en $]0,\infty]$.

Denotaremos por $\mathcal{C}(x,y,\tau)$ al conjunto de curvas en $\mathcal{AC}$ que unen a dos configuraciones dadas, $x, y \in (\mathbb{R}^d)^N$ en tiempo $\tau > 0$, es decir,

$$\mathcal{C}(x,y,\tau) = \{\gamma : [a,b] \to (\mathbb{R}^d)^N : \gamma \in \mathcal{AC}, b-a=\tau,\ \gamma(a)=x, \gamma(b)=y\}$$

y por $\mathcal{C}(x,y)$ denotaremos al conjunto de curvas uniendo dos configuraciones $x, y \in (\mathbb{R}^d)^N$ sin restricción alguna en el tiempo,

$$\mathcal{C}(x,y) = \bigcup_{\tau>0} \mathcal{C}(x,y,\tau).$$

Dada una curva $\gamma : [a,b] \to (\mathbb{R}^d)^N$ sin colisión total, podemos escribirla en coordenadas polares, es decir, $\gamma(t) = \rho(t)u(t)$, donde $\rho(t) > 0$ y $I(u(t)) = 1$, para todo $t \in [a,b]$. Con esto tenemos la siguiente expresión para la acción de γ:

$$A(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \dot{\rho}(s)^2 ds + \frac{1}{2}\int_a^b \rho(s)^2 \dot{u}(s)^2 ds + \int_a^b \rho(s)^{-1} U(u(s))ds. \tag{4}$$

I.2. Definición.

1. *Una curva* $\gamma : [a,b] \to (\mathbb{R}^d)^N, \gamma \in \mathcal{AC}$ *es una* minimizante *de la acción si para cualquier* $\sigma \in \mathcal{C}(\gamma(a), \gamma(b), b-a)$, *se tiene que*

$$A(\gamma) \le A(\sigma).$$

2. *Si* $\gamma \in \mathcal{AC}$ *es una curva definida en un intervalo no compacto, diremos que es* minimizante *si lo es en cada restricción de la curva a subintervalos compactos.*

Para demostrar la existencia de minimizantes, serán necesarios algunos resultados sobre la semicontinuidad inferior de la acción.

I.3. PROPOSICIÓN ([**M**]). *Si* $\gamma_n : [a,b] \to (\mathbb{R}^d)^N$ *tiene acción finita, entonces* γ *es* $\frac{1}{2}$*-Hölder continua.*

DEMOSTRACIÓN. Como $U(\gamma(t)) > 0$, entonces

$$\int_a^b ||\dot\gamma(t)||^2 dt \leq 2\int_a^b \frac{1}{2}||\dot\gamma(t)||^2 + U(\gamma(t))dt = 2A(\gamma).$$

Por lo tanto, para cualesquiera $a \leq s < t \leq b$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||\gamma(t) - \gamma(s)|| &\leq \int_s^t ||\dot\gamma(t)||dt \\ &\leq (t-s)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b ||\dot\gamma(t)||^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (t-s)^{\frac{1}{2}}(2A(\gamma))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

□

De (5), junto con el teorema de Ascoli se obtiene el siguiente resultado.

I.4. PROPOSICIÓN ([**DM**]). *Sea* $\gamma_n : [a,b] \to (\mathbb{R}^d)^N$ *una sucesión de curvas en* $\mathcal{AC}$ *tales que existe* $K < +\infty$ *tal que* $A(\gamma_n) \leq K$*, para todo* $n > 0$*. Si* $\gamma_n(t)$ *converge para algún* $t \in [a,b]$*, entonces existe una subsucesión* γ_{n_k} *que converge uniformemente.*

Ahora tenemos que el funcional de acción es inferiormente semicontinuo:

I.5. LEMA ([**DM**]). *Sea* $\gamma_n : [a,b] \to (\mathbb{R}^d)^N$ *una sucesión de curvas absolutamente continuas que converge uniformemente a una curva* γ *y tal que* $\sup A(\gamma_n) < +\infty$*. Entonces* γ *es también una curva absolutamente continua y*

$$A(\gamma) \leq \liminf A(\gamma_n). \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el lagrangiano L_0 en $(\mathbb{R}^d)^N$ dado por

$$L_0(x,v) = \frac{1}{2}||v||^2$$

y A_0 su acción asociada. Entonces L_0 es un lagrangiano C_2, superlineal, estrictamente convexo; por el teorema de Tonelli [**F**, Teorema 3.2.1], se tiene que

$$A_0(\gamma) \leq \liminf A_0(\gamma_n).$$

Por otro lado, por el lema de Fatou tenemos que

$$\int_a^b U(\gamma(s))ds = \int_a^b \liminf U(\gamma_n(s))ds \leq \liminf \int_a^b U(\gamma_n(s))ds$$

Con todo tenemos

$$A(\gamma) = A_0(\gamma) + \int_a^b U(\gamma(s))ds \leq \liminf A(\gamma_n).$$

$\square$

Para $c \in \mathbb{R}$, consideremos el conjunto,

$$\mathcal{C}(x, y, \tau; c) = \{\gamma : [0, \tau] \to (\mathbb{R}^d)^N : \gamma \in \mathcal{AC}, \gamma(0) = x, \gamma(\tau) = y, A(\gamma) \leq c\},$$

y observe que por la proposición I.4 y (6) $\mathcal{C}(x, y, \tau; c)$ es compacto en $C^0([0, \tau], (\mathbb{R}^d)^N)$, además como $L > 0$ y $(\mathbb{R}^d)^N$ es conexo, $\mathcal{C}(x, y, \tau; c) = \varnothing$ si $c \leq 0$ y $\mathcal{C}(x, y, \tau; c) \neq \varnothing$ si $c > 0$ es suficientemente grande, con esto tenemos el siguiente teorema.

I.6. Teorema ([**DM**]). *Dadas dos configuraciones $x, y \in (\mathbb{R}^d)^N$ y $\tau > 0$ existe al menos una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)$ tal que*

$$A(\gamma) = \inf\{A(\gamma) | \gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)\}.$$

2. Potencial de acción y minimizantes en tiempo libre

Podemos ahora introducir las funciones de potencial de acción.

I.7. Definición. *1. Definimos el* potencial de acción finito *como $\phi : (\mathbb{R}^d)^N \times (\mathbb{R}^d)^N \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,*

$$\phi(x, y; \tau) = \inf\{A(\gamma) | \gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)\},$$

2. El potencial crítico de Mañé *está dado por*

$$\phi(x,y) = \text{ínf}\{A(\gamma) | \gamma \in \mathcal{C}(x,y)\} = \text{ínf}\{\phi(x,y,\tau) | \tau > 0\}.$$

definido en $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathbb{R}^d)^N$.

Note que del teorema I.6, para cualesquiera $x, y \in (\mathbb{R}^d)^N$ existe una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x,y,\tau)$ tal que

$$A(\gamma) = \phi(x,y;\tau). \tag{7}$$

Además de la definición y dado que $L > 0$ entonces, para todo $\tau > 0$

$$0 \leq \phi(x,y) \leq \phi(x,y,\tau)$$

Por otro lado tenemos lo siguiente:

I.8. Teorema ([**DM**]). *Para cualesquiera dos configuraciones, $x, y \in (\mathbb{R}^d)^N$ tales que $x \neq y$, existen $\tau > 0$ y $\gamma \in \mathcal{C}(x,y,\tau)$ tal que*

$$A(\gamma) = \phi(x,y).$$

Demostración. Sea $\gamma_n \in \mathcal{C}(x,y,\tau_n)$ una sucesión minimizante, entonces podemos suponer sin perdida de generalidad que existe A tal que $A(\gamma_n) \leq A$. De (5) tenemos que para cada $n \geq 0$

$$\tau_n \geq \frac{||x-y||^2}{2A} = T_0.$$

Por otro lado, aplicando una vez más (5), tenemos que para n fijo y $0 \leq t \leq \tau_n$

$$||\gamma_n(t) - x|| \leq (2A\tau_n)^{\frac{1}{2}},$$

de donde

$$||\gamma_n(t)|| \leq ||x|| + (2A\tau_n)^2.$$

Además, como para $i, j = 1, \ldots, N$, $|r_i - r_j| \leq \frac{2}{m^{\frac{1}{2}}}||x||$, tenemos que para cualesquiera n y $0 \leq t \leq \tau_n$

$$U(\gamma(t)) \geq \frac{m^{\frac{5}{2}}N}{2(||x|| + (2A\tau_n)^{\frac{1}{2}})},$$

así,

$$A \geq A(\gamma_n) \geq \frac{\tau_n m^{\frac{5}{2}}N}{2(||x|| + (2A\tau_n)^{\frac{1}{2}})},$$

con esto obtenemos que τ_n debe estar acotado superiormente, es decir existe $T_1 > 0$ tal que $T_0 \leq \tau_n \leq T_1$.

Concluimos que existe $\tau > 0$ tal que se puede extraer una subsucesión $\tau_n \to \tau$. Consideremos la curva $\gamma_n^* : [0, \tau] \to (\mathbb{R}^d)^N$ dada por

$$\gamma_n^*(t) = \gamma_n(\frac{\tau_n t}{\tau}),$$

entonces

$$A(\gamma_n^*) = \frac{\tau_n}{\tau}\int_0^{\tau_n} ||\dot{\gamma}(t)||^2 dt + \frac{\tau}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} U(\gamma_n(t))dt,$$

por lo que

$$\lim A(\gamma_n^*) = \lim A(\gamma_n) = \phi(x, y).$$

Como para cada n, $\gamma_n^* \in \mathcal{C}(x, y, \tau)$ obtenemos que $\phi(x, y, \tau) \leq \phi(x, y)$, por lo tanto $\phi(x, y, \tau) = \phi(x, y)$, el teorema se sigue del teorema I.6. □

I.9. Proposición. *El potencial crítico de Mañé es una distancia.*

Demostración. Sean $x, y, z \in (\mathbb{R}^d)^N$. Como $L > 0$, se tiene que $\phi(x, y) \geq 0$

1. Claramente $\phi(x, y) = \phi(y, x)$
2. Para demostrar la desigualdad del triángulo, tomemos $\gamma_1 : [0, \sigma] \to (\mathbb{R}^d)^N$ y $\gamma_2 : [0, \tau] \in (\mathbb{R}^d)^N$ tales que $\gamma_1(0) = x, \gamma_1(\sigma) = z, \gamma_2(0) = z, \gamma_2(\tau) = y$ y sea

$\gamma : [0, \sigma + \tau] \to (\mathbb{R}^d)^N$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [0, \sigma] \\ \gamma_2(t - s) & \text{si } t \in [\sigma, \sigma + \tau]. \end{cases},$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &\leq \int_0^{\sigma+\tau} \frac{1}{2}||\dot{\gamma}(s)||^2 + U(\gamma(s))ds \\ &= \int_0^{\sigma} \frac{1}{2}||\dot{\gamma}_1(s)||^2 + U(\gamma_1(s))ds + \int_{\sigma}^{\sigma+\tau} \frac{1}{2}||\dot{\gamma}_2(s - \sigma)||^2 + U(\gamma_2(s - \sigma))ds. \end{aligned}$$

con lo que, dado que las curvas fueron tomadas de modo que minimizan la accion en cualquier subintervalo del dominio de definición,

$$\phi(x, y) \leq \phi(x, z) + \phi(z, y).$$

3. Demostremos ahora que $\phi(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Sea $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ cualquiera, consideremos un camino $\sigma : [0, 1] \to (\mathbb{R}^d)^N$ tal que $\sigma(0) = x$ y $A(\gamma) < \infty$. Sean $0 < T \leq 2$ y $\gamma_T \in \mathcal{C}(x, y, T)$ dada por

$$\gamma_T(t) = \begin{cases} \sigma(t) & \text{si } t \leq \frac{T}{2} \\ \sigma(T - t) & \text{si } t \geq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Entonces $A(\gamma_T) \to 0$ cuando $t \to 0$ de lo que $\phi(x, x) = 0$.

Por otro lado, si $x \neq y$, entonces por el teorema I.8, existen $\tau > 0$ y $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)$ tal que

$$A(\gamma) = \phi(x, y) \geq 0.$$

De (5) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 < ||x - y|| &\leq \tau(2A(\gamma))^{\frac{1}{2}} \\ &= \tau(2\phi(x, y))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de lo que

$$0 < \tau(2\phi(x,y))^{\frac{1}{2}},$$

así $\phi(x,y) > 0$. Se concluye que si $\phi(x,y) = 0$, entonces $x = y$.

□

Sea $\gamma \in \mathcal{C}(x,y,\tau)$, para dos números positivos $\lambda, \mu > 0$ definimos la curva $\gamma_{\lambda,\mu} \in \mathcal{C}(\lambda x, \lambda y, \mu)$ de la siguiente forma, si $\gamma : [a,b] \to (\mathbb{R}^d)^N$, con $a - b = \tau$, entonces

$$\begin{aligned} \gamma_{\lambda,\mu} : [\mu\tau^{-1}a, \mu\tau^{-1}b] &\to (\mathbb{R}^d)^N \\ s &\mapsto \lambda\gamma(\tau\mu^{-1}s). \end{aligned}$$

I.10. Proposición. *Para cualesquiera $x, y \in (\mathbb{R}^d)^N$ y cualesquiera $\tau, \lambda > 0$ tenemos que*

$$\phi(\lambda x, \lambda y, \lambda^{\frac{3}{2}}\tau) = \lambda^{\frac{1}{2}}\phi(x,y,\tau). \tag{8}$$

Por lo tanto el potencial de Mañé es homogéneo de grado $\frac{1}{2}$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x,y,\tau)$ de manera que $A(\gamma) \leq \phi(x,y,\tau) + \varepsilon$, tomemos $\mu = \lambda^{\frac{3}{2}}\tau$, entonces

$$\begin{aligned} A(\gamma_{\lambda,\mu}) &= \frac{\lambda^2\tau^2}{2\mu^2}\int_{\mu\tau^{-1}a}^{\mu\tau^{-1}b} \|\dot\gamma(\tau\mu^{-1}s)\|^2 ds + \frac{1}{\lambda}\int_{\mu\tau^{-1}a}^{\mu\tau^{-1}b} U(\gamma(\tau\mu^{-1}s)ds \\ &= \frac{\lambda^2\tau}{2\mu}\int_a^b \|\dot\gamma(s)\|^2 ds + \frac{\mu}{\lambda\tau}\int_a^b U(\gamma(s)ds \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}}A(\gamma) \\ &\leq \lambda^{\frac{1}{2}}\phi(x,y,\tau) + \lambda^{\frac{1}{2}}\varepsilon, \end{aligned}$$

de donde

$$\phi(\lambda x, \lambda y, \lambda^{\frac{3}{2}}\tau) \leq \lambda^{\frac{1}{2}}\phi(x,y,\tau).$$

También se tiene que

$$\begin{aligned}\phi(x,y,\tau) &= \phi(\lambda^{-1}\lambda x, \lambda^{-1}\lambda y, \lambda^{-\frac{3}{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}\tau)\\ &\leq \lambda^{-\frac{1}{2}}\phi(\lambda x, \lambda y, \lambda^{\frac{3}{2}}\tau),\end{aligned}$$

con lo que obtenemos (8). Tomando ínfimo sobre τ en (8), se obtiene la homogeneidad del potencial de Mañé. $\square$

Definamos ahora el objeto más importante de este trabajo:

I.11. Definición. *Una* minimizante en tiempo libre *definida en un intervalo* $J \subset \mathbb{R}$ *es una curva absolutamente continua* $\gamma : J \to (\mathbb{R}^d)^N$ *que satisface*

$$A(\gamma|_{[a,b]}) = \phi(\gamma(a), \gamma(b))$$

para todo subintervalo compacto $[a,b] \subset J$.

Un corolario de la proposición I.10 es el siguiente

I.12. Corolario. *Dada una minimizante en tiempo libre* $\gamma : [a,b] \to (\mathbb{R}^d)^N$ *y* $\lambda > 0$, *la curva*

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda : [\lambda^{\frac{3}{2}}a, \lambda^{\frac{3}{2}}b] &\to (\mathbb{R}^d)^N\\ t &\mapsto \lambda\gamma(\lambda^{-\frac{3}{2}}t)\end{aligned}$$

es una minimizante en tiempo libre.

Antes de dar un ejemplo de una minimizante en tiempo libre notemos que existe una familia distinguida de configuraciones y de movimientos.

3. Configuraciones centrales

I.13. Definición. *Un movimiento γ del problema de N-cuerpos es* completamente parabólico *si* $|\dot{\gamma}(t)| \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$.

En el problema de Kepler ($V(x) = \frac{1}{|x|}$) movimientos completamente parabólicos son de hecho parábolas. Por otro lado, se tiene que para un movimiento completamente parabólico, $|\gamma(t)| \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Para una configuración $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ denotemos por $\tilde{x}$ a la configuración normalizada asociada $\tilde{x} = xI(x)^{-\frac{1}{2}}$.

I.14. Definición. *Una* configuración central *(normal) es un punto crítico del potencial U restrigido al conjunto $S = \{x \in (\mathbb{R}^d)^N : I(x) = 1\}$. Una configuración x normalizada a $|x| = 1$, es una configuración* minimal *si es un mínimo de U restrigido a S,*

Una caracterización de las configuraciones centrales es la siguiente, sea $x_0 \in (\mathbb{R}^d)^N$ tal que $U(x_0) < +\infty$ y $I(x_0) = 1$, entonces x_0 es una configuración central (normal) si y sólo si existe una función real λ tal que $x(t) = \lambda(t)x_0$ es una solución de (2). Tal solución es llamada movimiento homotético. Note que esto sucede si y sólo si x_0 es un punto crítico de $x \mapsto ||x||U(x)$ y λ satisface la ecuación de Kepler:

$$\ddot{\lambda}\lambda^2 = -U(x_0). \tag{9}$$

En particular para $c^3 = \frac{9U(x_0)}{2}$, se tiene que $x(t) = ct^{\frac{2}{3}}x_0$ es un movimiento homotético completamente parabólico. Sea $t_0 = c^{-\frac{3}{2}}$,entonces $x(t_0) = x_0$.

I.15. Lema. *Sea $t_1 > t_0$, entonces si $x(t)$ es el movimiento homotético asociado a una configuración mínimal x_0, $A(\gamma) \geq A(x|_{[t_0,t_1]})$ para cualquier $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x(t_1))$, donde se da la igualdad si y sólo si $\gamma = x|_{[t_0,t_1]}$, salvo una traslación del intervalo de tiempo.*

Demostración. Sea $\gamma : [s_0, s_1] \to (\mathbb{R}^d)^N$ en $\mathcal{C}(X_0, x(t_1))$, tenemos que $\gamma(s_0) = x_0$ y $\gamma(s_1) = x(t_1)$. Sea $s' = \max\{s \in [t_0, t_1] | I(\gamma(s)) = 1\}$, entonces $I(\gamma(s)) > 1$ para $s' < s < s_1$. Si definimos $\gamma_1 = \gamma|_{[s', s_1]}$ tenemos que $A(\gamma) \geq A(\gamma_1)$, con igualdad si y sólo si $s' = s_0$.

Observe que podemos escribir a γ_1 en coordenadas polares, es decir, $\gamma_1(s) = \rho(s)u(s)$, donde $\rho(s) \geq 1$ y $I(u(s)) = 1$ para todo $s \in [s', s_1]$. Consideremos la curva $\gamma_2 \in \mathcal{C}(a, x(t_1))$ dada por $\gamma_2(s) = \rho(s)a, s \in [s', s_1]$. Note que la acción de γ_2 está dada por

$$A(\gamma_2) = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \dot{\rho}(s)^2 ds + U_0 \int_{s_1}^{s_2} \rho(s)^{-1} ds, \tag{10}$$

de (4) se sigue que $A(\gamma_2) \leq A(\gamma_1)$, con igualdad si y sólo si $\gamma_2 = \gamma_1$. Por otro lado tenemos que (10) es la acción de $\rho(s)$ para el problema de Kepler en la recta con lagrangiano

$$L_0(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{U_0}{\rho}. \tag{11}$$

Sin embargo, por lo discutido antes, $\lambda(s) = cs^{\frac{2}{3}}$ satisface (9) que corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange de (11); más aún, λ tiene energía cero, por lo que λ es minimizante de la acción correspondiente a (11).

Se concluye que $A(\gamma_2) \geq A(x|_{[t_0,t_1]})$, donde se da la igualdad si y sólo si $\rho(s) = c(t_0 + s - s')^{\frac{2}{3}}$ para todo $s \in [s', s_1]$ y $s_1 - s' = t_1 - t_0$. Por lo tanto se tiene que

$$A(\gamma) \geq A(\gamma_1) \geq A(\gamma_2) \geq A(x|_{[t_0,t_1]}),$$

con igualdad si y sólo si $\gamma(s) = \gamma_0(t_0 + (s - s_0))$. □

I.16. Teorema ([**DM**]). *Sea a una configuración minimal y $x(t) = ct^{\frac{2}{3}}a$, con $c^3 = \frac{9U(x_0)}{2}$. Entonces la extensión continua de x a $[0, +\infty)$ es una minimizante en tiempo libre con colisión total en $t = 0$.*

Demostración. Escribamos $x(t) = ct^{\frac{2}{3}}a$ donde $I(a) = 1$ es una configuración minimal y $c^3 = \frac{9U(x_0)}{2}$, por lo tanto si $t_1 > t_0$, $x|_{[t_0,t_1]}$ es una minimizante en tiempo libre.

Sea $T > 0$ y $\varepsilon \in (0,T)$. Tomemos $\lambda > 0$ tal que $\varepsilon = \lambda^{\frac{3}{2}}t_0$, de la homogeneidad del potencial, $\gamma|_{[\varepsilon,T]}$ es una minimizante en tiempo libre, es decir

$$A(\gamma|_{[\varepsilon,T]}) = \phi(\gamma(\varepsilon), \gamma(T)).$$

Como

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A(\gamma|_{[\varepsilon,T]}) = A(\gamma|_{[0,T]}),$$

de la continuidad de ϕ se sigue que $\gamma|_{[0,T]}$ es una minimizante en tiempo libre. $\square$

4. Cotas superiores para el potencial

Será de gran utilidad contar con cotas superiores para los potenciales de acción finito y de Mañé. En esta sección exponemos las obtenidas por E. Maderna en [**M**].

I.17. Lema ([**M**]). *Dados números reales $a_1 < \ldots < a_m$, existen números reales $b_1 < \ldots < b_m$ y un homeomorfismo creciente absolutamente continuo F de $[0,1]$, tal que*

$$|F(t) - a_i| \geq \frac{1}{2m}|t - b_i|^{\frac{2}{3}}$$

y

$$\int_0^1 F'(t)^2 dt \leq 3(4 + 2a)(m+1),$$

donde $a = \min |a_1|, \ldots, |a_m|$.

I.18. Proposición ([**M**]). *Sean $r \in \mathbb{R}^d, R > 0$. Dadas $x, y \in (\mathbb{R}^d)^N$ tales que $|r - x_i| \leq R, |r - y_i| \leq R$ y $T > 0$, existe una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, T)$ tal que $|r - \gamma_i(t)| \leq$*

$6NR$ para todo $t \in [0,T]$ y

$$\frac{1}{2}\int_0^T ||\dot{\gamma}(t)||^2 dt \leq \alpha T^{-1} R^2 \ \text{y} \ \int_0^T U(\gamma(t))dt \leq \beta T R^{-1},$$

donde α y β son constantes positivas que dependen únicamente de N y M.

Demostración. Observe que si el resultado es cierto para alguna $T > 0$, entonces si $S > 0$ definimos la curva $\sigma : [0,S] \to (\mathbb{R}^d)^N$ como $\sigma(s) = \gamma(sT/S)$ obteniendo

$$\int_0^S \|\dot{\sigma}(s)\|^2 ds = T^2 S^{-2} \int_0^S \|\dot{\gamma}(sT/S)\|^2 ds = S^{-1} T \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \leq 2\alpha S^{-1} R^2,$$

$$\int_0^S U(\sigma(s))ds = \int_0^S U(\gamma(sT/S))ds = ST^{-1} \int_0^T U(\gamma(t))dt \leq \beta S R^{-1}.$$

Por lo tanto, es suficiente con demostrar el resultado tomando $T = 2$. Escribamos $x = (r_1, \ldots, r_N)$ y definamos $p = (p_1, \ldots, p_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ por

$$p_i = r + (i-1)v, i = 1, \ldots, N,$$

donde $v \in \mathbb{R}^d$ es tal que $|v| = 6R$, con esto tenemos que $|r - p_i| \leq 6(N-1)R$ para todo $i = 1, \ldots, N$, además $6R \leq p_{ij} := |p_i - p_j| \leq 6(N-1)R$. Tomemos la curva $z_x : [0,1] \to (\mathbb{R}^d)^N$, definida por $z_x(t) = x + \psi_x(t)(p - x)$, donde $\psi_x : [0,1] \to [0,1]$ es una función creciente a determinar, tal que $\psi_x(0) = 0$ y $\psi(1) = 1$.

Recordemos que para dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^d, v \neq 0$ y para cualquier $\lambda > 0$ se tiene que

$$|u + \lambda v| \geq |v| \left| \lambda + \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^d}}{|v|^2} \right|, \tag{12}$$

y $|u + \lambda v|$ alcanza su mínimo cuando

$$\lambda = -\frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^d}}{|v|^2}.$$

Definamos $u_{ij} := r_i - r_j$, $v_{ij} := (p_i - p_j) - (r_i - r_j)$ y

$$t_{ij} := -\frac{\langle u_{ij}, v_{ij} \rangle_{\mathbb{R}^d}}{|v_{ij}|^2},$$

así tenemos que

$$d_{ij}(t) := |z_{xi} - z_{xj}| = |u_{ij} + \psi_x(t) v_{ij}|.$$

Por lo tanto, de (12), se sigue que

$$d_{ij} \geq |v_{ij}||\psi_x(t) - t_{ij}| \leq 4R|\psi_x(t) - t_{ij}|,$$

como $|u_{ij}| \leq 2R$ y $|v_{ij}| \geq 4R$, se obtiene que $t_{ij} < \frac{1}{2}$, en vista del lema I.17, podemos elegir a la función ψ_x de manera que

$$\int_0^1 \dot{\psi}_x(t)^2 dt \leq 15N^2,$$

además para cada $i < j$ existe s_{ij} tal que para todo $t \in [0,1]$,

$$|\psi_x(t) - t_{ij}| \geq N^{-2}|t - s_{ij}|^{\frac{2}{3}}.$$

Con esto tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 \|\dot{z}_x(t)\|^2 dt &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i |p_i - r_i|^2 \int_0^1 \dot{\psi}_x(t)^2 dt \\
&\leq 280MN^4R^2,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_0^1 U(z_x(t))dt &= \sum_{i<j}\int_0^1 m_i m_j d_{ij}(t)^{-1} dt \\
&\geq \sum_{i<j}\int_0^1 m_i m_j (4R)^{-1} N^2 |t - s_{ij}|^{-\frac{2}{3}} dt.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{|t - s_{ij}|^{\frac{2}{3}}} dt = \int_{-s}^{1-s} \frac{1}{|u|^{\frac{2}{3}}} du \leq 2\int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{2}{3}}} du = 6$$

por lo que

$$\int_0^1 U(z_x(t))dt \leq 6M^2N^4R^{-1}.$$

Definamos ahora la curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, 2)$ como

$$\gamma(t) = \begin{cases} z_x(t) & \text{if } t \leq 1 \\ \\ z_y(2-t) & \text{if } t \geq 1, \end{cases}$$

así

$$A(\gamma) = A(z_x) + A(z_y) \leq \frac{1}{2}\alpha R^2 + 2\beta R^{-1}$$

$\square$

En vista de la proposición anterior, obtenemos el siguiente teorema.

I.19. Teorema. [**M**] *Existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que para todo $T > 0$,*

$$\phi(x, y; T) \leq \alpha \frac{R^2}{T} + \beta \frac{T}{R}$$

siempre que x e y estén contenidos en una bola de radio $R > 0$ en $(\mathbb{R}^d)^N$.

I.20. Definición. *Sean $A \subset \mathbb{R}^d$ y $\lambda > 0$, un conjunto $\{r_1, \ldots r_k\} \subset \mathbb{R}^d$ define una* λ-partición por cúmulos *de tamaño $R > 0$ de A se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$|r_i - r_j| \geq 2\lambda R$ para todo $1 \geq i < j \leq k$;*
2. *A está contenido en $\cup_{i=1}^k B(r_i, R)$*

I.21. Lema. *Dados $\lambda > 1, A = \{r_1, \ldots, r_N\} \subset \mathbb{R}^d$ y $\varepsilon > 0$, existen $A' \subset A$ y $R(\varepsilon) > 0$, tales que:*

1. *$\varepsilon \leq R(\varepsilon) < (2\lambda)^N \varepsilon$;*
2. *A' define una λ-partición por cúmulos de tamaño $R(\varepsilon) > 0$ de A*

Demostración. Definamos $A_1 = A$, si esto no define una λ-partición por cúmulos de tamaño ε, entonces existen $r, s \in A_1$ tales que $|r - s| < 2\lambda\varepsilon|$, en este caso, tomamos $A_2 = A_1 \backslash \{s\}$; Si A_2 no define una λ-partición por cúmulos de tamaño $2\lambda\varepsilon > 0$, entonces existen $r', s' \in A_2$ tales que $|r' - s'| < (2\lambda)^2\varepsilon$, y fijemos $A_3 = A_2 \backslash \{s'\}$, si procedemos recursivamente el proceso debe terminar en a lo más N pasos. $\square$

Se puede ahora demostrar la siguiente proposición mediante el uso de particiones por cúmulos.

I.22. Proposición ([**M**]). *Existen constantes positivas $\alpha_1, \beta_1 > 0$ tales que, para cualesquiera $x, y \in (\mathbb{R}^d)^N$ y $T > 0$, tenemos que*

$$\phi(x, y, T) \leq \alpha_1 T^{-1} \varepsilon^2 + \beta_1 T \varepsilon^{-1},$$

siempre que $\varepsilon > |x - y|$, las constantes α_1, β_1 sólo dependen de N y las masas.

Demostración. Sean $x = (r_1, \ldots, r_N), y = (s_1, \ldots, s_n) \in (\mathbb{R}^d)^N$, denotemos por A_x al conjunto $\{r_1, \ldots, r_N\} \subset \mathbb{R}^d$. Aplicamos el lema I.21 a A_x con $\varepsilon > |y - x|$ y $\lambda = 24N$ para obtener $r_{i_1}, \ldots, r_{i_k} \in A_x$, y $R(\varepsilon)$, tales que

1. $\varepsilon \leq R(\varepsilon) < (48N)^N \varepsilon$;
2. Para cualesquiera $1 \leq j < l \leq k$, tenemos $|r_{i_j} - r_{i_l}| \geq 48NR(\varepsilon)$; y
3. $A_x \cup A_y$ está contenido en la unión disjunta $\bigcup_{j=1}^k B_j$, con $B_j = B(r_{i_j}, 2R(\varepsilon))$.

Así, $\{1, \ldots, N\} = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ tal que $i \in I_j$ si y sólo si $r_i, s_i \in B_j$. Denotemos por N_j a la cantidad de cuerpos en el cúmulo j, es decir la cardinalidad de I_j y sea M_j a la masa total del cúmulo j, $M_j = \sum_{i \in I_j} m_i$, con esto $N = \sum_{j=1}^k N_j, M = \sum_{j=1}^k M_j$.

Dado $T > 0$, aplicamos la proposición I.18 al problema de N_j cuerpos compuesto por los cuerpos en B_j con condiciones inicial y final dadas por los cuerpos de x e y contenidos en B_j. Obtenemos así una curva $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N) \in \mathcal{C}(x, y, T)$ tal que para todo $1 \leq j \leq K$

1. Si $i \in I_j$, entonces $\gamma_i(t) \in B(r_{i_j}, 12NR(\varepsilon))$;

2.

$$T_j = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i\in I_j} m_i|\dot{\gamma}_i(t)|^2 dt \leq 3(10^6)M_j N_j^6 R(\varepsilon)^2/T;$$

3.

$$\begin{aligned} W_j &= \int_0^T \sum_{i,l\in I_j}^{i<l} m_i m_l |\gamma_i(t) - \gamma_l(t)|^{-1} dt \\ &\leq \frac{1}{6} N_j^3 M_j^2 R(\varepsilon)^{-1} T. \end{aligned}$$

Por otro lado, la acción de γ está dada por

$$A(\gamma) = \sum_{j=1}^{k} T_j + \sum_{j=1}^{k} W_j + W_0,$$

con

$$W_0 = \int_0^T \sum_{1\leq j<l\leq k} \sum_{i\in I_j, h\in I_l} m_i m_h |\gamma_i(t) - \gamma_h(t)|^{-1} dt.$$

Como las B_j's son disjuntas se tiene que

$$W_0 \leq N^2 M^2 (24N){-}1 R(\varepsilon)^{-1} T.$$

Como $R(\varepsilon) < (24N)^N \varepsilon$, se tiene que

$$A(\gamma) < \alpha_1 T^{-1}\varepsilon^2 + \beta_1 T \varepsilon^{-1},$$

donde α_1 y β_1 dependen únicamente de N y M. □

Tomando $\varepsilon = T^{\frac{2}{3}}$ en la proposición anterior se obtiene el siguiente corolario.

I.23. Corolario. *Existe una constante positiva μ tal que para cualquier $x \in$ $(\mathbb{R}^d)^N$*

$$\phi(x, x, T) \leq \mu T^{\frac{1}{3}}$$

Ahora tenemos la siguiente cota concerniente al potencial de Mañé.

I.24. Teorema. [**M**] *Existe* $\eta > 0$ *tal que para cualesquiera* $y, z \in (\mathbb{R}^d)^N$

$$\phi(y,z) \leq \eta \|y-z\|^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Sabemos que $\phi(y,y) = 0$ para todo $y \in (\mathbb{R}^d)^N$. Por otro lado, si $y \neq z$, entonces por la proposición anterior tenemos que

$$\phi(x,z,T) \leq \alpha_1 T^{-1}\varepsilon^2 + \beta_1 T \varepsilon^{-1},$$

para todo $T > 0$ y $\varepsilon > |y-z|$. Como el lado derecho de la desigualdad anterior es una función continua en $\varepsilon > 0$, debemos tener

$$\phi(x,z,T) \leq \alpha_1 T^{-1}|y-z|^2 + \beta_1 T |y-z|^{-1},$$

así, tomando $T = |y-z|^{\frac{3}{2}}$ se obtiene el resultado. $\square$

Concluimos el capítulo con el siguiente lema:

I.25. Lema ([**M**]). *Para cualesquiera* $x, y \in (\mathbb{R}^d)^N$ *y* $t > 0$ *se tiene que*

$$\phi(x,y,t) \geq \frac{m}{2t}|x-y|^2.$$

Demostración. Sea $\gamma \in \mathcal{C}(x,y,t)$, entonces tenemos que

$$|x-y| \leq \int_0^t |\dot\gamma(s)|ds \leq t^{\frac{1}{2}}(\int_0^t |\dot\gamma(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}},$$

por lo tanto

$$|x-y|^2 \leq t\int_0^t |\dot\gamma(s)|^2 ds,$$

así

$$A(\gamma) \geq \frac{m}{2}\int_0^t |\dot\gamma(s)|^2 ds \geq \frac{m}{2t}|x-y|^2,$$

tomando el mínimo sobre $\gamma \in \mathcal{C}(x,y,t)$ se obtiene el resultado. $\square$

Capítulo II

Funciones de Busemann

En este capítulo, estudiaremos una propiedad importante de las configuraciones mínimales y sus movimientos homotéticos asociados, a saber que es que estas permiten definir una clase particular soluciones KAM débiles cuyas curvas calibradoras son asintóticas al movimiento homotético.

1. Introducción

Sea $H : T^*(\mathbb{R}^d)^N \to \mathbb{R}$ el hamiltoniano asociado a L dado por

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i^{-1}|p|^2 - U(x).$$

II.1. Definición. *Una solución* KAM débil *de la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$\|Du(x)\|^2 = 2U(x). \tag{13}$$

es una función $u : (\mathbb{R}^d)^N \to \mathbb{R}$ que satisface:

- *u está* dominada, *i.e. $u(y) - u(x) \leq \phi(x,y)$ para cualesquiera $x, y \in (\mathbb{R}^d)^N$.*
- *Para cualquier $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ existe una curva absolutamente continua $\alpha : [0,\infty) \to (\mathbb{R}^d)^N$ tal que $\alpha(0) = x$ y α* calibra a u, *i.e. $u(x) - u(\alpha(t)) = A(\alpha|_{[0,t]})$ para todo $t > 0$.*

$\mathcal{S}$ denotará al conjunto de todas las soluciones KAM débiles continuas u de (13) en $(\mathbb{R}^d)^N$. Además, denotaremos por $\mathcal{S}^-$ al conjunto de funciones dominadas.

Para una función continua $u : (\mathbb{R}^d)^N \to \mathbb{R}$ y $t > 0$ definimos el semigrupo de Lax-Oleinik $T_t^- u : (\mathbb{R}^d)^N \to [-\infty, \infty)$,$t > 0$, como

$$T_t^- u(x) = \text{ínf}\{u(y) + \phi(x, y, t) | y \in (\mathbb{R}^d)^N\}.$$

También definiremos $T_0^- u = u$ para toda u. De la definición tenemos la propiedad de semigrupo $T_t^-(T_s^-)u = T_{t+s}^- u$. Note además que una función es dominada si y sólo si $u \leq T_t^- u$, para todo $t > 0$. Notemos que el semigrupo de Lax-Oleinik es solución del problema de Cauchy de (13):

$$\begin{cases} v_t + \frac{\|Dv\|^2}{2} - U(x) = 0 \\ v(\cdot, 0) = u. \end{cases}$$

No es dificil ver que para cada $t \leq 0$, T_t^- es creciente en $\mathcal{S}^-$.

Dotaremos a $\mathcal{S}^-$ con la topología *compacto-abierto*, generada por

$$U_K(u, \varepsilon) = \{v \in \mathcal{S}^- : |v(x) - u(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in K\},$$

con $u \in \mathcal{S}^-, K \subset (\mathbb{R}^d)^N$ compacto y $\varepsilon > 0$.

En conjunto de soluciones KAM-débiles $\mathcal{S}$ en no vació, esto se obtiene al caracterizar los elementos de $\mathcal{S}$ como puntos fijos del semigrupo de Lax-Oleinik [**M**].

Por otro lado es importante notar que las curvas calibradoras de una solución KAM débil son minimizantes en tiempo libre, así el estudio de dichas soluciones puede producir comportamientos de curvas minimizantes. En este capítulo demostramos que dada una configuración minima, se tiene que para cada configuración existe una velocidad inicial tal que la solución del sistema con estas condiciones iniales es una curva minimizante en tiempo libre que es asintótica a la configuración minima dada. Esto lo lograremos al estudiar cierto tipo de funciones llamadas funciones de Busemann. Para esto analicemos un poco un problema de Kepler asociado a nuestro problema.

2. Problema de Kepler en la recta

En esta sección damos estimaciones para el potencial de acción de un problema de Kepler asociado al problema original. Para precisar esto, fijemos una configuración minimal, escribamos $U(x_0) = U_0$ y sea $c^3 = \frac{9U(x_0)}{2}$, denotemos por $S(a, b)$ al potencial de acción del problema de Kepler unidimensional con energía potencial U_0/r, es decir con lagrangiano

$$l(r, \dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{U_0}{r}$$

y por $S(a, b; t)$ a la acción de la única solución al problema de Kepler en la semirecta que va de a a $b \geq a$ en tiempo t. Para $0 \leq a \leq b$ y $s > 0$, denotemos por $h(a, b; s)$ a la energía de la solución uniendo a a y b en tiempo s.

II.2. Lema. *Dado $s > 0$ fijo, la función $r \mapsto h(0, r, ; s)$ es C^1 en $(0, +\infty)$ con derivada estrictamente positiva. Más aún*

$$\frac{\partial h}{\partial r}(0, cs^{\frac{2}{3}}; s) = \frac{5U_0}{c^2 s^{\frac{4}{3}}}.$$

Demostración. Notemos que $h(0, cs^{\frac{2}{3}}; s) = 0$, además la energía h satisface

$$s = \int_0^r \frac{du}{\sqrt{2(h + \frac{U_0}{u})}},$$

derivando con respecto a r se tiene que

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2(h + \frac{U_0}{r})}} - \int_0^r \frac{u^{\frac{3}{2}}}{[2(hu + U_0)]^{\frac{3}{2}}} du \frac{\partial h}{\partial r}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(0, cs^{\frac{2}{3}}; s) &= \frac{(cs^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{(2U_0)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_0^{cs^{\frac{2}{3}}} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{[2U_0]^{\frac{3}{2}}} du \right)^{-1} \\
&= \frac{5}{2} \frac{(cs^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{(2U_0)^{\frac{1}{2}}} (2U_0)^{\frac{3}{2}} (cs^{\frac{2}{3}})^{-\frac{5}{2}} \\
&= \frac{5U_0}{c^2 s^{\frac{4}{3}}}.
\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición es debida a E. Maderna y A. Venturelli [**MV**].

II.3. Proposición. *(a) La función*

$$G(r) = S(0, r; 1) - S(0, r) = S(0, r; 1) - (8U_0 r)^{\frac{1}{2}}$$

es decreciente en $]0, c[$*, creciente en* $]c, \infty[$*,* $G(c) = G'(c) = 0$*,* $G''(c) = 5/3$*. Se sigue que si* $\varepsilon > 0$ *es suficientemente pequeño, existe* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tal que* $|r - c| \leq \varepsilon$ *si* $G(r) \leq \delta(\varepsilon)$*.*

(b) Para $\bar{\varepsilon} > 0$ *tenemos que*

$$S(0, r; 1 + \varepsilon) = \frac{r^2}{2(1 + \varepsilon)} + o(r^2) \tag{14}$$

cuando $r \to \infty$ *uniformemente en* $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$*.*

Demostración. Para demostrar (a) notemos primero que la energía $h := h(0, r; 1)$ de la solución es negativa si y sólo si $0 \leq r < c$, más aún es C^1 en $(0, +\infty)$, creciente y $h(0, c; 1) = 0$. Por otro lado la acción $S(0, r; 1)$ está dada por

$$S(0, r; 1) = \begin{cases} \int_0^{-\frac{U_0}{h}} \sqrt{2(h + \frac{U_0}{h})} du + \int_r^{-\frac{U_0}{h}} \sqrt{2(h + \frac{U_0}{h})} du - h & \text{si } r < c \\ \int_0^r \sqrt{2(h + \frac{U_0}{h})} du + h & \text{si } r \geq c, \end{cases}$$

Asi las funciones $r \mapsto S(0, r; 1)$ y $r \mapsto G(r)$ son C^1 en $(0, +\infty)$, más aún

$$G'(r) = \begin{cases} -\sqrt{2(h(0, r; 1) + \frac{U_0}{r})} - \sqrt{\frac{2U_0}{r}} & \text{if } 0 < r < c \\ \sqrt{2(h(0, r; 1) + \frac{U_0}{r})} - \sqrt{\frac{2U_0}{r}} & \text{if } r \geq c, \end{cases}$$

de donde $G(r)$ es C^2 en $(0, c) \cup (c, +\infty)$, además notamos que $G(r)$ es decreciente en $(0, c)$ y creciente en $(c, +\infty)$, el mínimo absoluto se alcanza en $r = c$ y

$$G(c) = \int_0^c \sqrt{\frac{2U_0}{u}} du - \sqrt{8U_0 c} = 0.$$

Más aún $G'(c) = 0$. Del lema II.2 obtenemos que

$$G''(c) = \frac{5U_0^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}}.$$

Para demostrar (b) notemos que la solución $u \mapsto cu^{\frac{2}{3}}$ tiene energía cero., por lo que $h(0, c(i+\varepsilon)^{\frac{2}{3}}; 1+\varepsilon) = 0$. Supongamos que $r > c(1+\bar{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}$. Por el lema II.2 $h(0, r; 1+\varepsilon) > 0$ y la solución que une a 0 con r en tiempo $1+\varepsilon$ es monótona. Por otro lado, $h = h(0, r; 1+\varepsilon)$ satisface

$$1+\varepsilon = \int_0^r \frac{du}{\sqrt{2\left(h+\frac{U_0}{u}\right)}} = \frac{U_0}{2^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}} E\left(\frac{hr}{U_0}\right), \tag{15}$$

donde $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ está dada por

$$E(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{s}{1+s}} ds.$$

Note que E satisface

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}}) \text{ cuando } x \to 0^+ \\ E(x) &= x + o(x) \text{ cuando } x \to +\infty. \end{aligned} \tag{16}$$

Demostremos que

$$h(0, r; 1+\varepsilon) \to +\infty \text{ cuando } r \to +\infty \tag{17}$$

uniformemente en $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$. Supongamos que (17) no se cumple, entonces existen sucesiones $r_n \to +\infty$ y $\varepsilon_n \in [0, \bar{\varepsilon}]$ tales que $h(0, r_n; 1+\varepsilon_n)$ está acotada. Sea $h_n := h(0, r_n; 1+\varepsilon_n)$. De (15) y (16) la sucesión $h_n r_n$ también está acotada, por lo tanto $h_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como E es continua y estrictamente creciente, de (15) obtenemos que $h_n r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y junto con la primer linea de (16) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} 1+\varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \frac{U_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{r_n}{U_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{U_0}{h_n r_n}\right)^{\frac{3}{2}} E\left(\frac{h_n r_n}{U_0}\right) = +\infty,$$

que es una contradcción, por lo que se cumple (17).

Escribamos (15) como

$$1+\varepsilon = \frac{r}{\sqrt{2h}}\left(\frac{U_0}{hr}\right)E\left(\frac{hr}{U_0}\right),$$

usando la segunda linea de (16) se obtiene la siguiente estimación para h

$$h = h(0,r;1+\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^2 + o_r(r^2) \tag{18}$$

cuando $r \to +\infty$, uniformemente en $\varepsilon \in [0,\bar{\varepsilon}]$.

Consideremos ahora la solución $t \mapsto u(t)$ que une a 0 con r en tiempo $1+\varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned} S(0,r;1+\varepsilon) &= \int_0^{1+\varepsilon}\left(\frac{\dot{u}^2}{2}+\frac{U_0}{u}\right)dt = \int_0^r \frac{h+\frac{2U_0}{u}}{\sqrt{2\left(h+\frac{U_0}{u}\right)}} \\ & \sqrt{2h}\int_0^r \sqrt{1+\frac{U_0}{hu}}du - \sqrt{\frac{h}{2}}\int_0^r \frac{du}{\sqrt{1+\frac{U_0}{hu}}} \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{h}}\left(\sqrt{2}F\left(\frac{hr}{U_0}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}E\left(\frac{hr}{U_0}\right)\right), \end{aligned} \tag{19}$$

con $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_0^r \sqrt{\frac{s+1}{s}}ds$$

y satisface

$$F(x) = x + o(x), \text{ cuando } x \to +\infty.$$

sustituyendo (18) en (19) se obtiene el resultado. □

Siguiendo las ideas en [**MV**] expuestas en la proposición anterior, obtenemos las siguientes estimaciones que serán de gran utilidad en la demostración del resultado principal del trabajo.

II.4. Proposición. *Cuando* $\sigma \to 1, s \to \infty$

$$S(r,cs^{\frac{2}{3}};\sigma s) = (6U_0^2 s)^{\frac{1}{3}}(2+\frac{5}{9}(\sigma-1)^2 + o(rs^{-\frac{2}{3}}+(\sigma-1)^2)) - (8U_0 r)^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

uniformemente en $r \in [0, s^{1/3}]$. *Así*

$$S(r,u;\frac{\sigma}{3}\Big(\frac{2u^3}{U_0}\Big)^{\frac{1}{2}}) = (8U_0)^{\frac{1}{2}}(u^{\frac{1}{2}}(1+\frac{5}{18}(\sigma-1)^2 + o(\frac{r}{u}+(\sigma-1)^2)) - r^{\frac{1}{2}}) \tag{21}$$

cuando $\sigma \to 1, u \to \infty$ *uniformemente en* $r \in [0, u^{1/2}]$

Demostración. Sea $h = h(r,s;\sigma)$ la energía de la única solución que va de r a $cs^{\frac{2}{3}}$ en tiempo σs. Entonces

$$\sigma s = \int_r^{cs^{\frac{2}{3}}} \frac{du}{\sqrt{2(h+U_0/u)}} = \frac{3s}{2}\int_{rs^{-\frac{2}{3}}/c}^{1} \frac{dv}{\sqrt{cs^{\frac{2}{3}}h/U_0 + 1/v}}$$

Defina

$$F(x,y,k) = \int_{x^2}^{1}\sqrt{\frac{v}{1+kv}}dv - \frac{2}{3}(1+y)$$

entonces

$$F(\Big(\frac{r}{c}\Big)^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{3}}, \sigma-1, \frac{c}{U_0}s^{\frac{2}{3}}h(r,s;\sigma)) = 0.$$

Como $F(0,0,0) = 0$, $F_k(0,0,0) = -\frac{1}{5}$, podemos apilicar el teorema de la función implícita para resolver $F(x,y,k(x,y)) = 0$. Derivación implícita nos dá

$$k(x,y) = -\frac{10}{3}y + \frac{125}{21}y^2 + o(x^2+y^2) \tag{22}$$

$$h(r,s,\sigma) = \Big(\frac{2}{9}U_0^2\Big)^{\frac{1}{3}}s^{-\frac{2}{3}}k(\Big(\frac{r}{c}\Big)^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{3}}, \sigma-1)$$

$$= -\frac{10U_0}{3c}s^{-\frac{2}{3}}((\sigma-1) + \frac{125}{21}(\sigma-1)^2 + o(rs^{-\frac{2}{3}} + (\sigma-1)^2)) \tag{23}$$

$$\begin{aligned} S(r, cs^{\frac{2}{3}}, \sigma s) &= \int_r^{cs^{\frac{2}{3}}} \frac{h+2U_0/u}{\sqrt{2(h+U_0/u)}}du \\ &= \int_r^{cs^{\frac{2}{3}}} \sqrt{2(h+\frac{U_0}{u})}du - h\sigma s \\ &= (6U_0^2 s)^{\frac{1}{3}}a(x,k) - \Big(\frac{2}{9}U_0^2 s\Big)^{\frac{1}{3}}k\sigma \end{aligned}$$

donde k está dada por (22), con $x = (r/c)^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{3}}$, $y = \sigma - 1$, y

$$a(x,k) = \int_{x^2}^{1} \sqrt{k + \frac{1}{v}} dv = a_0(k) - b(x,k),$$
$$a_0(k) = \int_0^1 \sqrt{k + \frac{1}{v}} dv, \quad b(x,k) = \int_0^{x^2} \sqrt{k + \frac{1}{v}} dv$$

Tenemos como en [**MV**]

$$a_0(k) = 2 + \frac{k}{3} - \frac{k^2}{20} + o(k^2), b(x,k) = 2|x| + O(k|x|^3).$$

Thus

$$\begin{aligned} S(r, cs^{\frac{2}{3}}; \sigma s) &= (6U_0^2 s)^{\frac{1}{3}}(2 + \frac{k}{3}(1-\sigma) - \frac{k^2}{20} + o(k^2) + O(k|x|^3) - 2|x|) \\ &= (6U_0^2 s)^{\frac{1}{3}}(2 + \frac{5}{9}(\sigma-1)^2 + o(rs^{-\frac{2}{3}} + (\sigma-1)^2) + O(\frac{\sigma-1}{s})) - (8U_0 r)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

3. Soluciones de Busemann

En el capítulo uno vimos que el potencial de Mañé define una distancia en $(\mathbb{R}^d)^N$, en esta sección estudiamos las funciones de Busemann para dicha distancia, a saber demostramos que dada una configuración minimal, la función de Busemann asociada a ésta define una solución KAM débil más aún sus curvas calibradoras son asintóticas al movimiento homotético asociado a la configuración minimal original. Para demostrar esto hacemos uso de las estimaciones dadas en la sección anterior. Nuestro resultado dice lo siguiente.

II.5. Teorema. *Sea x_0 una configuración central minima con $\|x_0\| = 1$, $U(x_0) = U_0$, y considere el movimiento homotético $\gamma_0(t) = ct^{\frac{2}{3}} x_0$, $c = (\frac{9}{2}U_0)^{\frac{1}{3}}$. Entonces la función de Busemann*

$$u(x) = \sup_{t>0} [\phi(0, \gamma_0(t)) - \phi(x, \gamma_0(t))] = \lim_{t \to +\infty} [\phi(0, \gamma_0(t)) - \phi(x, \gamma_0(t))]$$

es una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi (13)*. Más aún, para cualquer* $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ *existe una curva* $\alpha : [0, \infty) \to (\mathbb{R}^d)^N$ *with* $\alpha(0) = x$ *que calibra a* u *y*

$$\lim_{t\to\infty} \|\alpha(t) t^{-\frac{2}{3}} - c x_0\| = 0. \tag{24}$$

La demostración del teorema requiere de una serie de lemas y proposiciones previas, comencemos considerando el problema de Kepler en $(\mathbb{R}^d)^N$ con lagrangiano

$$L_0(x, v) = \frac{\|v\|^2}{2} + \frac{U_0}{\|x\|}$$

y potential de acción

$$\phi_0(x, y) = \inf_{T>0} \phi_0(x, y; T).$$

Tenemos que

$$S(\|x\|, \|y\|; T) \leq \phi_0(x, y; T) \leq \phi(x, y; T), \tag{25}$$

$$S(0, \|x\|; T) = \phi_0(0, x; T) = \phi(0, \|x\| x_0; T). \tag{26}$$

II.6. Lema. *La función de Busemann u está bien definida y dominada.*

Demostración. Comenzamos demostrando que la función

$$\delta(t) = [\phi(0, \gamma_0(t)) - \phi(x, \gamma_0(t))]$$

es creciente. If $s < t$, then

$$\begin{aligned}\delta(s) - \delta(t) &= \phi(x, \gamma_0(t)) - \phi(x, \gamma_0(s)) + \big[\, \phi(0, \gamma_0(s)) - \phi(0, \gamma_0(t)) \,\big] \\ &= \phi(x, \gamma_0(t)) - \phi(x, \gamma_0(s)) - \phi(\gamma_0(s), \gamma_0(t)) \\ &\leq 0,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de la desigualdad del triangulo aplicada a la terna $(x, \gamma_0(s), \gamma_0(t))$. Por la desigualdad del triangulo, $\delta(t) \leq \phi(\gamma_0(0), x)$, entonces $\lim_{t\uparrow\infty} \delta(t) = \sup_{t>0} \delta(t)$ y éste límite es finito.

Como

$$\begin{aligned} u(y) &= \sup_{t>0} \phi(0,\gamma_0(t)) - \phi(y,\gamma_0(t)) \\ &\geq \sup_{t>0} \phi(0,\gamma_0(t)) - \phi(y,x) - \phi(x,\gamma_0(t)) \\ &= u(x) - \phi(y,x), \end{aligned}$$

u está dominada. □

Sea $x \in (\mathbb{R}^d)^N$. Por el teorema I.6, para $cT^{2/3} > \|x\|$ existe $y_T : [0,\tau_T] \to (\mathbb{R}^d)^N$ con $y_T(0) = x$, $y_T(\tau_T) = \gamma_0(T)$ tal que

$$A_L(y_T) = \phi(x,\gamma_0(T)). \tag{27}$$

Note que T y τ_T no tienen que ser iguales, sin embargo cuando T tiende a infinito se tiene lo siguiente.

II.7. Proposición. $\displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{T}{\tau_T} = 1.$

Demostración. De (27), para todo $0 < t < \tau_T$ tenemos que

$$A_L\big(y_T|_{[0,t]}\big) + \phi(y_T(t),\gamma_0(T)) = \phi(x,\gamma_0(T)). \tag{28}$$

Sabemos que

$$\phi(x,\gamma_0(T)) \leq \phi(x,0) + \phi(0,\gamma_0(T)) = \phi(x,0) + 2(6U_0^2T)^{1/3} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} (\tfrac{9}{2}U_0)^{1/3}T^{2/3} - \|x\| \leq \|x-\gamma_0(T)\| \leq \int_0^{\tau_T} \|\dot{y}_T\| \leq \sqrt{\tau_T}\left(\int_0^{\tau_T} \|\dot{y}_T\|^2\right)^{1/2} \\ \leq \sqrt{2\tau_T A_L(y_T)} \leq \sqrt{2\tau_T}(\phi(x,0) + 2(6U_0^2T)^{1/3})^{1/2}. \end{aligned} \tag{30}$$

Así

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{T}{\tau_T} \leq \frac{8}{3}.$$

De (25) y (29)

$$S(\|x\|, cT^{\frac{2}{3}}; \tau_T) \leq \phi(x, \gamma_0(T); \tau_T) \leq \phi(x, 0) + 2(6U_0^2 T)^{1/3}$$
$$S\Big(\frac{\|x\|}{\tau_T^{\frac{2}{3}}}, c\Big(\frac{T}{\tau_T}\Big)^{\frac{2}{3}}; 1\Big) \leq \frac{\phi(x,0)}{\tau_T^{\frac{1}{3}}} + 2\Big(\frac{6U_0^2 T}{\tau_T}\Big)^{\frac{1}{3}}$$

Considere una sucesión $T^j \to \infty$ tal que $\dfrac{T^j}{\tau_{T^j}} \to s$. Entonces

$$S(0, cs^{\frac{2}{3}}; 1) \leq 2(6U_0^2 s)^{\frac{1}{3}} = (8U_0 cs^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}.$$

Por la proposición II.3(a), $cs^{\frac{2}{3}} = c$ y así $s = 1$. □

Sea $\beta : [0,1] \to (\mathbb{R}^d)^N$ una curva que une a 0 y x con acción finita y sea $t \leq \tau_T$, entonces

$$\phi(0, y_T(t); t+1) \leq A_L(\beta) + A_L(y_T|[0,t]) \tag{31}$$
$$A_L(y_T) = \phi(x, \gamma_0(T)) \leq A_L(\beta) + \phi(0, \gamma_0(T)) \tag{32}$$
$$\phi(0, y_T(t); t+1) + A_L(y_T|[t, \tau_T]) \leq 2A_L(\beta) + \phi(0, \gamma_0(T)) \tag{33}$$
$$\phi(0, y_T(t); t+1) + \phi(y_T(t), \gamma_0(T); \tau_T - t) \leq 2A_L(\beta) + \phi(0, \gamma_0(T)) \tag{34}$$

Las desigualdades (31) y (32) dan (33), que puede ser escrita como (34).

Tomando $s = s(T,t) = T/t$, $\sigma = \sigma(T,t) = (\tau_T - t)/T$, de (34) se obtiene que

$$\phi(0, y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}; 1 + 1/t) + \phi(y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}, \gamma_0(s); \sigma s) \leq 2t^{-\frac{1}{3}} A_L(\beta) + \phi(0, \gamma_0(s)). \tag{35}$$

Definiendo $r_T(t) = \|y_T(t)\| t^{-\frac{2}{3}}$, de (25) y (26) obtenemos que

$$\phi_0(0, y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}; 1 + 1/t) + \phi_0(y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}, \gamma_0(s); \sigma s) \leq 2t^{-\frac{1}{3}} A_L(\beta) + \phi_0(0, \gamma_0(s)) \tag{36}$$
$$S(0, r_T(t); 1 + 1/t) + S(r_T(t), cs^{\frac{2}{3}}; \sigma s) \leq 2t^{-\frac{1}{3}} A_L(\beta) + S(0, cs^{\frac{2}{3}}). \tag{37}$$

II.8. Proposición. *Existen constantes $K, \bar{t} > 0$ and $\bar{s} > 1$ tales que para todo $t \geq \bar{t}$, $T \geq t\bar{s}$ tenemos que $r_T(t) \leq K$*

Demostración. Suponga que la proposición es falsa, entonces existen sucesiones $K_n \to \infty$, $t_n \to \infty$, T_n tales que $s_n = T_n/t_n \to \infty$, $r_n = r_{T_n}(t_n) \to \infty$. Note que $\sigma_n = \sigma(T_n, t_n) \to 1$.

Si $r_n \leq s_n^{\frac{1}{3}}$, la desigualdad (37) y los puntos (b) y (c) de la proposición II.3 dan

$$\frac{r_n^2 t_n}{2(1+t_n)} + o(r_n^2) + (6U_0^2 s_n)^{\frac{1}{3}}[\frac{5}{9}(\sigma_n - 1)^2 + o(r_n s_n^{-\frac{2}{3}} + (\sigma_n - 1)^2))] - (8U_0 r_n)^{\frac{1}{2}} \leq 2t_n^{-\frac{1}{3}} A_L(\beta)$$

la cual es imposible para n grande. Si $r_n > s_n^{\frac{1}{3}}$, de la parte (b) de la proposición II.3 tenemos que

$$\begin{aligned} 2t_n^{-\frac{1}{3}} A_L(\beta) &\geq S(0, r_n; 1 + \frac{1}{t_n}) - S(0, c s_n^{\frac{2}{3}}) \\ &\geq \frac{s_n^{\frac{2}{3}} t_n}{2(1+t_n)} + o(s_n^{\frac{2}{3}}) - 2(6U_0^2 s_n)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

lo cual también es imposible para n grande. □

II.9. Lema. *La función de Busemann u es una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi* (13)

Demostración. Para $x \in (\mathbb{R}^d)^N$, sea $y_T : [0, \tau_T] \to (\mathbb{R}^d)^N$ tal que (27) se cumple.

Del teorema I.19 y la proposición II.8 existen constantes $\overline{K}, \bar{t} > 0$ y $\bar{s} > 1$ tales que para todo $t \geq \bar{t}$, $T \geq t\bar{s}$ tenemos que

$$A_L(y_T|[0,t]) = \phi(x, y_T(t); t) \leq \overline{K}(t^{\frac{4}{3}} t^{-1} + t t^{-\frac{2}{3}}) = 2\overline{K} t^{\frac{1}{3}}. \tag{38}$$

Afirmamos que la familia

$$\{y_T|[0,t]\} \tag{39}$$

es equicontinuas. De hecho, por (38) tenemos que

$$\int_0^t \|\dot{y_T}\|^2 ds \leq 2A_L(y_T|[0,t]) \leq 4\overline{K} t^{\frac{1}{3}}.$$

Así, para cada $0 < s < s' \leq t$

$$\|y_T(s) - y_T(s')\| \leq \int_s^{s'} \|\dot{y}_T(\upsilon)\| d\upsilon \leq \sqrt{s'-s}\Big(\int_s^{s'} \|\dot{y}_T(\upsilon)\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2(\overline{K}t^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\sqrt{s'-s},$$

demostrando la equicontinuidad de (39). Como $y_T(0) = x$, la familia es también equiacotada. Del teorema de Ascoli, existe una sucesión $T^n \to \infty$ que satisface $T^n \geq t\bar{s}$ tal que $y_{T^n}|[0,t]$ converge uniformemente. Aplicando este argumento a una sucesión creciente $t_k \to \infty$, por un truco de diagonalidad se obtiene una sucesión $T_n \to \infty$ tal que $y_{T_n}|_{[0,t]} \to \alpha|_{[0,t]}$ uniformemente para cada $t > 0$. Po la semicontinuidad inferior

$$\liminf_{n\to\infty} A_L(y_{T_n}|_{[0,t]}) \geq A_L(\alpha|_{[0,t]}). \tag{40}$$

Del teorema I.24

$$|\phi(\alpha(t), \gamma_0(T)) - \phi(y_T(t), \gamma_0(T))| \leq \phi(\alpha(t), y_T(t)) \leq \eta\|\alpha(t) - y_T(t)\|^{\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

Usando (28), (40),(41) tenemos que para todo $t > 0$

$$\begin{aligned} u(\alpha(t)) &= \lim_n \phi(\gamma_0(0), \gamma_0(T_n)) - \phi(\alpha(t), \gamma_0(T_n)) \\ &= \lim_n \phi(\gamma(0), \gamma_0(T_n)) - \phi(x, \gamma_0(T_n)) + A_L(y_{T_n}|_{[0,t]}) \\ &\geq u(x) + A_L(\alpha|_{[0,t]}) \geq u(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Entonces α calibra a u. □

Ahora nos enfocamos a la demostración de la igualdad (24).

II.10. Proposición. *Para calquier $\varepsilon > 0$ existe $t_\varepsilon > 0$ tal que para $t \geq t_\varepsilon$, $T \geq t\bar{s}$*

$$|r_T(t) - c| < \varepsilon. \tag{42}$$

Demostración. Para $\xi : [0, 1 + \frac{1}{t}] \to \mathbb{R}^+$ con acción $A(\xi) = S(0, r_T(t); 1 + \frac{1}{t})$ considere la reparametrización $\xi^* : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ given by $\xi^*(s) = \xi(s(1 + t)/t)$. Entonces

$$S(0, r_T(t); 1) \leq A(\xi^*) = \frac{(1+t)}{t}\frac{1}{2}\int_0^{(t+1)/t} |\dot{\xi}(s)|^2 ds + \frac{t}{(1+t)}\int_0^{(t+1)/t} U(\xi(s))ds$$
$$\leq (1 + \frac{1}{t})S(0, r_T(t); 1 + \frac{1}{t}). \tag{43}$$

De (26) y (43) tenemos que

$$\phi_0(0, y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}; 1) \leq (1 + \frac{1}{t})\phi_0(0, y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}; 1 + \frac{1}{t}). \tag{44}$$

Una demostración similar a la de (43) gives

$$\phi(0, y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}; 1) \leq (1 + \frac{1}{t})\phi(0, y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}; 1 + \frac{1}{t}). \tag{45}$$

Sean $\bar{t} > 0$, $\bar{s} > 1$ dados por la proposición II.8. De las desigualdades (35), (36), (37), (43), (44) y (45) existe una constante K_1 tal que para $t \geq \bar{t}$, $T \geq t\bar{s}$ tenemos que

$$\phi(0, y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}; 1) + \phi(y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}, \gamma_0(s); \sigma s) \leq \phi(0, \gamma_0(s)) + K_1 t^{-\frac{1}{3}} \tag{46}$$

$$\phi_0(0, y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}; 1) + \phi_0(y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}, \gamma_0(s); \sigma s) \leq \phi_0(0, \gamma_0(s)) + K_1 t^{-\frac{1}{3}} \tag{47}$$

$$S(0, r_T(t); 1) + S(r_T(t), cs^{\frac{2}{3}}; \sigma s) \leq S(0, cs^{\frac{2}{3}}) + K_1 t^{-\frac{1}{3}} \tag{48}$$

La desigualdad (48) y la desigualdad del triangulo

$$S(0, u) \leq S(0, r) + S(r, u) \tag{49}$$

implican

$$S(0, r_T(t); 1) \leq S(0, r_T(t)) + K_1 t^{-\frac{1}{3}}.$$

De lo que la proposición II.10 se sigue de la proposción II.3(a). □

II.11. Proposición. *Dado* $\varepsilon > 0$ *existen* $\bar{t}_\varepsilon > 0$, $\bar{s}_\varepsilon > 1$ *tal que para* $t > \bar{t}_\varepsilon$, $T \geq t\bar{s}_\varepsilon$ *tenemos que* $|r_T(t) - c| < \varepsilon$ *y* $\angle(y_T(t)t^{-\frac{2}{3}}, cx_0) < \varepsilon$

Demostración. Considere el problema de Kepler en $(\mathbb{R}^d)^N$. Sea z una configuración que satisface $|\|z\| - c| < \varepsilon$ y $\tau > 0$. La minimizante (para L_0) $\xi : [0, \tau] \to (\mathbb{R}^d)^N$ uniendo z to $\gamma_0(s)$ en tiempo τ es un arco Kepleriano sin colisiones; entonces está contenida en el plano generado por $0, z$ y $\gamma_0(s)$. Introciendo coordenadas polares en este plano, podemos identificar z con $re^{i\theta}$ y $\gamma_0(s)$ con $cs^{2/3} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, donde $|r - c| < \varepsilon$, $|\theta| \leq \pi$.

El camino ξ puede ser escrito en coordenadas polares como

$$\xi(\upsilon) = \rho(\upsilon)e^{i\omega(\upsilon)}, \quad u \in [0, \tau]$$

donde

$$\rho(0) = r, \quad \omega(0) = \theta$$

$$\rho(\tau) = cs^{2/3}, \quad \omega(\tau) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Afirmamos que ξ es un camino directo, es decir, la variación total del angulo polar ω es menor o igual a π. Suponga por el contrario que $|\omega(\tau) - \theta| > \pi$. Cambiando la orientación del plano si es necesario, podemos asumir que $\omega(\tau) \geq 2\pi$; por lo que existe un único entero $k \geq 1$ tal que $\omega(\tau) = 2k\pi$.

El camino $\bar{\xi}(\upsilon) = \rho(\upsilon)e^{i\bar{\omega}(\upsilon)}$ con

$$\bar{\omega}(\upsilon) = \theta - \frac{\theta}{2k\pi - \theta}(\omega(\upsilon) - \theta)$$

tiene los mismos extremos que ξ y

$$A_{L_0}(\bar{\xi}) - A_{L_0}(\xi) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta}{2k\pi - \theta}\right)^2 - 1\right]\int_0^\tau (\rho^2\dot{\omega}^2)(\upsilon)d\upsilon < 0,$$

que es una contradicción. El teorema de Lambert (vea [**A**]), establece que si x_1 y x_2 son dos configuraciones y $\tau > 0$, la acción $A_{L_0}(x_1, x_2; \tau)$ del arco kepleriano directo uniendo en x_1 con x_2 en tiempo τ es una función de sólo tres parámetros: el tiempo τ, la distancia $|x_1 - x_2|$ entre los dos extremos y la suma de las distancias entre los extremos y el origen (i.e. $|x_1| + |x_2|$). Así

$$\phi_0(re^{i\theta}, \gamma_0(s); \tau) = S(d_1(r, \theta, s), d_2(r, \theta, s); \tau) \tag{50}$$

donde

$$\begin{aligned}
2d_1(r, \theta, s) &= r + cs^{\frac{2}{3}} - |re^{i\theta} - cs^{\frac{2}{3}}| = r(1 + \cos\theta) - l(r, s, \theta) \\
2d_2(r, \theta, s) &= r + cs^{\frac{2}{3}} + |re^{i\theta} - cs^{\frac{2}{3}}| = 2cs^{\frac{2}{3}} + r(1 - \cos\theta) + l(r, s, \theta) \\
l(r, s, \theta) &= O(s^{-\frac{2}{3}}), \quad s \to \infty
\end{aligned}$$

uniformemente para r acotada.

Tomando $\sigma^* = \left(\frac{c}{d_2}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma s$, de (21) tenemos que para r acotada, s grande y σ cercano a 1

$$\begin{aligned}
S(d_1, d_2; \sigma s) &= (8U_0)^{\frac{1}{2}} (d_2^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{5}{18}(\sigma^* - 1)^2 + o((\sigma^* - 1)^2 + s^{-\frac{2}{3}})) - d_1^{\frac{1}{2}}) \\
&\geq 2(6U_0^2 s)^{\frac{1}{3}} - 2(U_0 r(1 + \cos\theta))^{\frac{1}{2}} + O(s^{-\frac{1}{3}}).
\end{aligned}$$

De la ecuación (20) for $\sigma = 1$ tenemos que

$$S(r, cs^{\frac{2}{3}}) \leq S(r, cs^{\frac{2}{3}}; s) = 2(6U_0^2 s)^{\frac{1}{3}} - (8U_0 r)^{\frac{1}{2}} + O(s^{-\frac{1}{3}}).$$

Así, para r acotada, s grande y σ cercana a 1, tenemos que

$$S(d_1, d_2; \sigma s) \geq S(r, cs^{\frac{2}{3}}) + \left(\frac{U_0 r}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - \cos\theta) + O(s^{-\frac{1}{3}}). \tag{51}$$

Recordando (26), las desigualdades (47), (49) implica que para $s = T/t$, $\sigma = \sigma(T, t)$

$$\phi_0(y_T(t) t^{-\frac{2}{3}}, \gamma_0(s); \sigma s) \leq 2t^{-\frac{1}{3}} A_L(\beta) + S(r_T(t), cs^{\frac{2}{3}}) \tag{52}$$

de (42), (50), (51), (52) tenemos que

$$2t^{-\frac{1}{3}}A_L(\beta) \geq \Big(\frac{U_0 r_T(t)}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}(1-\cos\theta) + O\big((T/t)^{-\frac{1}{3}}\big)$$

se sigue que dado $\varepsilon > 0$ existen $\bar{t}_\varepsilon > 0$, $\bar{s}_\varepsilon > 1$ tales que para $t \geq \bar{t}_\varepsilon, T \geq t\bar{s}_\varepsilon$ se tiene que $|\theta_T(t)| < \varepsilon$. □

Para $\bar{t}_\varepsilon > 0$, $\bar{s}_\varepsilon > 1$ como es la proposición II.11, $t \geq \bar{t}_\varepsilon, T \geq t\bar{s}_\varepsilon$,

$$\|y_T(t)t^{-\frac{2}{3}} - cx_0\| \leq 2\varepsilon.$$

Tomando $T = T_n$, $n \to \infty$ obtenemos para $t \geq \bar{t}_\varepsilon$

$$\|\alpha(t)t^{-\frac{2}{3}} - cx_0\| \leq 2\varepsilon.$$

Capítulo III

Soluciones invariantes por rotaciones

El objetivo de este capítulo es caracterizar las soluciones KAM débiles que son invariantes bajo el grupo $SO(d)$ por medio de sus curvas calibradores, a saber, demostramos que las curvas calibradoras de tales soluciones tienen momento angular cero. Definimos también un tipo de soluciones invariantes por medio de soluciones de Busemann.

Recordemos que el Lagrangiano y el Hamiltoniano están asociado por la transformada de Legendre que en nuestro problema, dado que $\partial_v L$ no depende de x, puede ser definida como

$$\mathcal{L} : (\mathbb{R}^d)^N \to ((\mathbb{R}^d)^N)^*$$

con

$$\mathcal{L}(v) = \partial_v L(x, v).$$

Por lo tanto $p = \mathcal{L}(v)$ significa que

$$p(w) = \langle w, v \rangle. \tag{53}$$

Sea

$$\Omega = \{x \in (\mathbb{R}^d)^N | r_i = r_j \text{ entonces } i = j\},$$

Note que Ω es abierto y denso. Sea también M la masa total del sistema dada por $M = m_1 + \cdots + m_N$ y para una configuración $x = (r_1 \ldots, r_N)$ definimos su centro de masa como

$$G(x) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i r_i.$$

E. Maderna en [**M1**], demuestra lo siguiente:

III.1. Proposición ([**M1**]). *Si $\gamma : [0, +\infty[\to (\mathbb{R}^d)^N$ es una minimizante en tiempo libre entonces su centro de masa $G(\gamma(t))$ es constante.*

Además demuestra el siguiente teorema:

III.2. Teorema ([**M1**]). *Toda solución KAM débil de la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada al problema Newtoniano de N cuerpos de dimensión al menos dos, es invariante por traslaciones. Más precisamente, dada una solución KAM débil u, tenemos que*

$$u(r_1, \ldots, r_N) = u(r_1 + r, \ldots, r_N + r)$$

para toda configuración $x = (r_1, \ldots, r_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ y todo $r \in \mathbb{R}^d$.

A la luz de estos resultados podemos restringir el problema, haciendo una traslación si es necesario, al conjunto de configuraciones con centro de masa en el origen, es decir,

$$\mathbf{M} = \{x \in (\mathbb{R}^d)^N | G(x) = 0\}.$$

Consideremos un elemento $\theta \in SO(d)$. Definimos una rotación en $\mathbf{M}$ como

$$\begin{aligned} R_\theta : \mathbf{M} &\to \mathbf{M} \\ x &\mapsto (\theta r_1, \ldots \theta r_N). \end{aligned} \tag{54}$$

1. Descomposición de Saari

Una herramienta importante para en el estudio de soluciones invariantes por rotaciones será la descomposición de Saari (vea [**S**] para $d \leq 2, 3$ ó [**MHO**] para un contexto más general), la idea principal es dar una descomposición ortogonal de la velocidad en términos del momento angular.

1.1. Dimensiones 2 y 3 En esta sección consideramos $d = 3$, el caso $d = 2$ se obtiene al tomar $\mathbb{R}^2$ como el plano xy en $\mathbb{R}^3$. Definamos para $x = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbf{M}$ y $v = (v_1 \ldots, v_N) \in (\mathbb{R}^3)^N$, el momento angular como:

$$C(x, v) = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j \times v_j, \tag{55}$$

Sea e_i el i-ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es decir, el 1 está en la i-ésima componente. Tomemos $E_i = (e_i, \ldots, e_i) \in (\mathbb{R}^3)^N$. Dada una configuración $x = (r_1, \ldots, r_N) \in (\mathbb{R}^3)^N$, definimos

$$E_i \times x = (e_i \times r_1, \ldots, e_i \times r_N),$$

entonces por las propiedades del producto cruz tenemos que

$$\begin{aligned} \langle E_i \times x, v \rangle &= \sum_{j=1}^{N} m_i \langle e_i \times r_j, v_j \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \langle e_i, \sum_{j=1}^{N} m_j r_j \times v_j \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \langle e_i, C(x, v) \rangle_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned} \tag{56}$$

Por lo tanto, si $C(x, v) = 0$, entonces v es ortogonal al espacio generado por $\{E_i \times x\}_{i=1}^{3}$, $\mathrm{Gen}\{E_i \times x\}_{i=1}^{3}$ y recíprocamente. Así, cualquier vector $v \in (\mathbb{R}^3)^N$ se puede descomponer como

$$v = v_r + v_h, \tag{57}$$

donde $v_r \in \mathrm{Gen}\{E_i \times x\}_{i=1}^{N}$, $C(x, v_h) = 0$ y $\langle v_r, v_h \rangle = 0$.

Sean $\mathcal{ROT}_x = \text{Gen}\{E_i \times x\}_{i=1}^N$ y $\mathcal{HOR}_x = \{v \in (\mathbb{R}^3)^N | C(x,v) = 0\}$, entonces $\mathcal{ROT}_x \perp \mathcal{HOR}_x$ y

$$T_x\mathbf{M} = \mathcal{ROT}_x \oplus \mathcal{HOR}_x. \tag{58}$$

Para entender mejor a $\mathcal{ROT}_x$, consideremos la órbita de x bajo $SO(3)$, es decir $M_x = \{R_\theta x | \theta \in SO(3)\}$, notemos que

$$T_x M_x = \{Ax : A \in \mathfrak{so}(3)\},$$

donde

$$Ax = (Ar_1, \ldots, Ar_N). \tag{59}$$

Por otro lado, para cada $i = 1, 2, 3$, definimos la transformación $T_i : (\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ como

$$T_i(v) = e_i \times v,$$

por las propiedades del producto cruz se tiene que la matriz A_i asociada a T_i es antisimétrica, además

$$E_i \times x = A_i x$$

con $A_i x$ como en (59), con esto obtenemos que

$$\text{Gen}\{E_i \times x\} \subset T_x M_x$$

Finalmente no es dificil ver que $\dim T_x M_x = \dim \text{Gen}\{E_i \times x\}$, por lo tanto

$$T_x M_x = \text{Gen}\{E_i \times x\} = \mathcal{ROT}_x,$$

Con esto podemos concluir que v_r es la componente de la velocidad correspondiente a la acción del grupo de rotaciones. La ecuación (58) es llamada *descomposición de Saari* para la velocidad.

1.2. Dimensiones superiores Consideremos ahora $\mathbb{R}^d$ con $d \geq 4$, antes de definir el momento angular en este caso, recordemos algunos hechos conocidos sobre el álgebra exterior $\Lambda(\mathbb{R}^d)$, para más detalles vea [**W, AMR**].

En primer lugar notemos que el producto euclidiano define un isomorfismo entre $\mathbb{R}^d$ y su espacio dual $(\mathbb{R}^d)^*$ dado por

$$v \mapsto \langle v, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

en vista de esta asociación, identificaremos a un elemento $v \in \mathbb{R}^d$ con su correspondiente dual en $(\mathbb{R}^d)^*$.

Recordemos además que el producto euclidiano en $\mathbb{R}^d$ define un producto interno en el álgebra exterior $\Lambda(\mathbb{R}^d)$, de la siguiente forma:

Si $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ y $w_1 \wedge \cdots \wedge w_p$ son elementos descomponibles de $\Lambda^p(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle_\Lambda = \det \langle v_i, w_j \rangle_{\mathbb{R}^d},$$

el producto interno de elementos descomponibles de $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ de orden distinto es cero y extendemos el producto por linealidad.

Por otro lado, tenemos la contracción por un elemento $r \in \mathbb{R}^d$

$$i_r : \Lambda^p(\mathbb{R}^d) \to \Lambda^{p-1}(\mathbb{R}^d)$$

donde para cualesquiera $p-1$ vectores en $\mathbb{R}^d$ se tiene que

$$i_r\omega(v_1, \ldots v_{p-1}) = \omega(r, v_1, \ldots v_{p-1}). \tag{60}$$

Una propiedad importante del operador de contracción es que es adjunto al producto exterior "$\wedge$", es decir, si $w \in \Lambda^p(\mathbb{R}^d), \nu \in \Lambda^{p-1}(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\langle i_r\omega, \nu \rangle_\Lambda = \langle w, r \wedge \nu \rangle_\Lambda. \tag{61}$$

Estamos ahora en condiciones para estudiar la descomposicion de Saari. Para esto definimos el momento angular de una configuración $x = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbf{M}$ y un vector $v = (v_1 \ldots, v_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$, como:

$$C(x, v) = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j \wedge v_j. \tag{62}$$

Note que $C(x,v)$ es un elemento de $\Lambda^2(\mathbb{R}^d)$.

Para un elemento $W=(\omega_1,\ldots,\omega_N)\in(\Lambda^2(\mathbb{R}^d))^N$ definimos su contracción por x como

$$i_xW=(i_{r_1}(\omega_1),\ldots,i_{r_N}(\omega_N)).$$

Finalmente denotemos por $\Delta(\Lambda^2(\mathbb{R}^d))^N$ a la diagonal de $(\Lambda^2(\mathbb{R}^d))^N$. Entonces tenemos lo siguiente.

III.3. Lema. *Sean $x\in\mathbf{M}$ y $v\in(\mathbb{R}^d)^N$. Entonces $C(x,v)=0$ si y sólo si v es ortogonal a $i_x(\Delta(\Lambda^2(\mathbb{R}^d))^N)$.*

Demostración. Escribamos $x=(r_1,\ldots,r_N)$ y $v=(v_1\ldots,v_N)$. Sea $\omega\in\Lambda^2(\mathbb{R}^d)$ cualquiera, entonces de (61),

$$\begin{aligned}\langle\omega,C(x,v)\rangle_\Lambda&=\langle\omega,\sum_{j=1}^N m_jr_j\wedge v_j\rangle_\Lambda\\&=\sum_{j=1}^N m_j\langle\omega,r_j\wedge v_j\rangle_\Lambda\\&=\sum_{j=1}^N m_j\langle i_{r_j}\omega,v_j\rangle_{\mathbb{R}^d}\\&=\langle i_xW,v\rangle,\end{aligned}\tag{63}$$

donde $W:=(\omega,\omega,\ldots,\omega)\in\Delta(\Lambda^2(\mathbb{R}^d))^N$. Como $\omega\in\Lambda^2(\mathbb{R}^d)$ fué arbitrario, se sigue que si $C(x,v)=0$, entonces $v\perp i_x(\Delta(\Lambda^2(\mathbb{R}^d))^N)$ y recíprocamente. $\square$

Definamos

$$\mathcal{ROT}_x:=i_x(\Delta(\Lambda^2(\mathbb{R}^d))^N)\text{ y }\mathcal{HOR}_x:=\{v\in(\mathbb{R}^d)^N:C(x,v)=0\},$$

entonces del lema anterior se tiene la descomposición de Saari para la velocidad, es decir, $\mathcal{ROT}_x\perp\mathcal{HOR}_x$ y

$$T_xM=\mathcal{ROT}_x\oplus\mathcal{HOR}_x,$$

es decir cada $v \in T_x M$ se puede descomponer como

$$v = v_r + v_h,$$

donde $v_r \in i_x(\Delta(\Lambda^2(\mathbb{R}^d))^N)$, $C(x, v_h) = 0$ y $\langle v_r, v_h \rangle = 0$. Más aún, dada la bilinealidad del producto exterior se obtiene que

$$C(x, v) = C(x, v_r).$$

Ahora veamos que en efecto la componente v_r de la velocidad es la correspondiente a la acción del grupo rotaciones. Para esto, sean $x = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbf{M}$ y $M_x := \{R_\theta x : \theta \in SO(d)\}$ la órbita de x bajo el grupo de rotaciones, entonces

$$T_x M_x = \{Ax : A \in \mathfrak{so}(d)\}.$$

Por otro lado para cada $A \in \mathfrak{so}(d)$ definamos $\omega_A \in \Lambda^2(\mathbb{R}^d)$ como

$$\omega_A(u, v) = \langle Au, v \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

Note que $\omega_A \in \Lambda^2(\mathbb{R}^d)$ pues A es antisimétrica. Más aún, para cada $r \in \mathbb{R}^d$

$$i_r \omega_A(v) = \omega_A(r, v) = \langle Ar, v \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

Así se tiene que si $W_A = (\omega_A, \omega_A, \ldots, \omega_A) \in \Delta(\Lambda^2(\mathbb{R}^d))^N$, entonces

$$i_x W_A = (Ar_1, \ldots, Ar_N) = Ax$$

por lo tanto $T_x M_x \subset \mathcal{ROT}_x$.

Finalmente observemos que si A_ω es la matríz asociada a $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^d)$, A_ω es antisimétrica, además $i_r \omega = A_\omega r$ para cada $r \in \mathbb{R}^d$. Así, si $W = (\omega, \ldots, \omega)$, entonces $i_x W = (A_\omega r_1, \ldots, A_\omega r_N) = A_\omega x$. Hemos demostrado que

$$T_x M_x = \mathcal{ROT}_x.$$

2. Invariancia por rotaciones

En esta sección estudiaremos la invariancia por rotaciones de soluciones KAM débiles, en adelante $d \geq 2$, en primer lugar tenemos la siguente definición.

III.4. Definición. *Sea una $u : (\mathbb{R}^d)^N \to \mathbb{R}$ una función continua, diremos que u es invariante por rotaciones si para cada $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ y para cada $\theta \in SO(d)$ se tiene que*

$$u(R_\theta(x)) = u(x).$$

III.5. Observación. *Si u es una función invariate por rotaciones y $x \in (\mathbb{R}^d)^N$, entonces u es constante en la orbita de x, M_x. Así, si x es un punto de diferenciabilidad de u, entonces*

$$T_x M_x = \mathcal{ROT}_x \subset \ker d_x u.$$

Complementando el teorema III.2 de E. Maderna, tenemos el siguiente teorema referente a las soluciones KAM débiles invariantes por rotaciones:

III.6. Teorema. *Sea u una solución KAM débil de la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$\frac{1}{2}\|d_x u\| = U(x).$$

Entonces u es invariate por rotaciones si y sólo si sus curvas calibradoras tienen momento angular cero. Es decir, para cualesquiera $\theta \in SO(d)$ y $x \in (\mathbb{R}^d)^N$,

$$u(x) = u(R_\theta x)$$

si y sólo si para cualquier $\gamma : [0, +\infty[\to (\mathbb{R}^d)^N$ calibradora de u, se tiene que

$$C(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea u una solución KAM débil invariante bajo rotaciones y sea $x \in \mathbf{M}$, tomemos $\gamma : [0, +\infty[\to \in (\mathbb{R}^d)^N$ una curva calibradora de u que comenza en x. Se sabe que u es diferenciable en $\gamma(t)$ para todo $t > 0$ y que

$$d_{\gamma(t)} u(w) = \langle w, \dot{\gamma}(t) \rangle, \tag{64}$$

para todo $w \in (\mathbb{R}^d)^N$.

Por otro lado, por la observación III.5 se tiene que $\mathcal{ROT}_{\gamma(t)} \subset \ker d_{\gamma(t)} u$ y de (64) obtenemos que $\dot{\gamma}(t) \perp \mathcal{ROT}_{\gamma(t)}$, por lo tanto $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{HOR}_{\gamma(t)}$, es decir

$$C(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$$

para todo $t > 0$.

Para demostrar la suficiencia, sea u una solución KAM débil tal que todas sus curvas calibradoras tienen momento angular cero. Sea $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ y $\theta \in SO(d)$. Veamos que $u(R_\theta x) = u(x)$. Note que si $R_\theta x = x$, el resultado se obtiene trivialmente.

Supongamos que $R_\theta x \neq x$, como u es continua y Ω es denso e invariante por rotaciones podemos suponer que $x \in \Omega$.

Como $\exp : \mathfrak{so}(d) \to SO(d)$ es sobrejectiva, podemos elegir $\omega \in \mathfrak{so}(d)$ tal que $\exp(\omega) = \theta$ y definamos la curva $\alpha : [0, 1] \to (\mathbb{R}^d)^N$ dada por $\alpha(t) = R_{\exp(t\omega)}(x)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$B = \{z \in (\mathbb{R}^d)^N | \langle z, \dot{\alpha}(0) \rangle = 0, \|z - x\| < \varepsilon\}$$

está contenido en Ω.

Sea

$$C = \{R_{\exp(t\omega)}(z) | z \in B\},$$

observe que $C \subset \Omega$; denotemos por C' al conjunto de puntos en C donde u es diferenciable, como u es Lipschitz en subconjuntos compactos, u es Lipschitz en C y, por el teorema de Rademacher, C' tiene medida total en C.

Sea $y \in C'$ sea $\gamma_y : [0, +\infty[\to \in (\mathbb{R}^d)^N$ la calibradora de u tal que $\gamma_y(0) = y$, entonces $d_y u(w) = \langle w, \dot{\gamma}_y(0) \rangle$ para toda $w \in (\mathbb{R}^d)^N$. Por hipótesis $\dot{\gamma}_y(0) \in \mathcal{HOR}_q$, es decir $\dot{\gamma}_y(0) \perp \mathcal{ROT}_y$, asi $\mathcal{ROT}_y \subset \ker d_y u$ para toda $y \in C'$.

Sea $f : B \times [0,1] \to \mathbb{R}$ la función Lipschitz continua dada por

$$f(z,t) = u(R_{\exp(t\omega)}(z)) - u(z).$$

Como $\mathcal{ROT}_y \subset \ker d_y u$, entonces $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ casi donde sea y por el teorema de Fubini en $A \times [0,1]$, con A un abierto cualquiera de B

$$0 = \int_A \int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial t} dt dy = \int_A f(y,1) dy.$$

por lo tanto $f(y,1) = 0$ para todo $y \in B$, en particular tenemos que

$$u(R_\theta(x)) = u(x)$$

. $\square$

3. Soluciones de Busemann invariantes

Ahora exponemos una clase particular de soluciones invariantes, a saber las soluciones de Busemann invariantes, estas se obtendrán al rotar las soluciones de Busemann dadas en el capítulo II y posteriormente tomando el ínfimo sobre $SO(d)$.

Primero demostramos que el ínfimo de soluciones KAM débiles es a su vez una solución KAM débil, analicemos el caso finito, esto nos dá una idea de que podría pasar con las curvas calibradoras del ínfimo en el caso no finito.

III.7. Lema. *Sean u_1 y u_2 soluciones KAM débiles de la ecuación de Hamilton-Jacobi, entoces*

$$u(x) = \text{mín}\{u_1(x), u_2(x)\}$$

es una solución KAM débil.

Demostración. La dominación se sigue inmediatamente de la dominación de u_1 y u_2. Sea $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ y suponga que $u_1(x) = u(x) = \text{mín}\{u_1(x), u_2(x)$. Sea $\gamma : [0, +\infty[\to (\mathbb{R}^d)^N$ la curva calibradora de u_1 que parte de x, entonces para todo $t > 0$

$$\begin{aligned} u_1(\gamma(t)) &= u_1(x) - A(\gamma_{|[0,t]}) \\ &\leq u_2(x) - A(\gamma_{|[0,t]}). \end{aligned} \tag{65}$$

Por otro lado, como u_2 está dominada $u_2(x) - A(\gamma_{|[0,t]}) \leq u_2(\gamma(t))$, junto con (65) obtenemos que $u_1(\gamma(t)) \leq u_2(\gamma(t))$ para todo $t > 0$.

Se sigue que

$$u(\gamma(t)) = u_1(\gamma(t))$$

para todo $t > 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1(x) \\ &= u_1(\gamma(t)) + A(\gamma_{|[0,t]}) \\ &= u(\gamma(t)) + A(\gamma_{|[0,t]}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\gamma(t)$ calibra a u y así u es solución KAM débil. □

Aplicando un razonamiento inductivo se obtiene lo siguiente:

III.8. Corolario. *Sean $u_1, \ldots, u_n$ soluciones KAM débiles, entonces*

$$u(x) = min\{u_1, \ldots, u_n\}$$

es una solución KAM débil.

Analicemos ahora el caso no finito, un prímera idea para analizar este caso podría ser el tomar una sucesión minimizante y ver que las calibradoras de los elementos de las sucesión convergen a una curva que calibre al ínfimo, sin embargo esto no necesaramente es posible debido a que las velocidades podrían no estar acotadas. Sin embargo el semigrupo de Lax-Oleinik, nos dá otra alternativa. Para esto recordemos que una función es una solución KAM débil si y sólo si es un punto fijo del semigrupo de Lax-Oleinik [**M**].

III.9. PROPOSICIÓN. *Sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ una familia de soluciones KAM débiles tales que $\inf_{u\in\mathcal{U}} u(x) > -\infty$, entonces*

$$\tilde{u}(x) = \inf_{u\in\mathcal{U}} \{u(x)|\ u \in \mathcal{U}\}$$

es una solucion KAM débil.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $u \in \mathcal{U}$ y $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ se tiene $T_t^- u(x) = u(x)$, así

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} T_t^- u(x) = \inf_{u\in\mathcal{U}} u(x) = \tilde{u}(x). \tag{66}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\inf_{u\in\mathcal{U}} T_t^- u(x) &= \inf_{u\in\mathcal{U}} \big(\inf_{y\in(\mathbb{R}^d)^N} \{u(y) + \phi(x,y,t)\}\big) = \inf_{y\in(\mathbb{R}^d)^N} \big(\inf_{u\in\mathcal{U}} \{u(y) + \phi(x,y,t)\}\big) \\ &= \inf_{y\in(\mathbb{R}^d)^N} \big(\inf_{u\in\mathcal{U}} \{u(y)\} + \phi(x,y,t)\big) = \inf_{y\in(\mathbb{R}^d)^N} \{\tilde{u}(y) + \phi(x,y,t)\} \\ &= T_t^- \tilde{u}(x).\end{aligned}$$

Utilizando (66), se sigue que para toda $x \in (\mathbb{R}^d)^N$, $T_t^- \tilde{u}(x) = \tilde{u}(x)$. Por lo tanto $\tilde{u}$ es solución KAM débil. □

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de configuraciones minimales con momento de inercia uno, para cada $a \in \mathcal{M}$, consideremos u_a la solucion de Busemann definida por a. Dado

$\theta \in SO(d)$ y $a \in \mathcal{M}$, sea

$$u_{\theta,a}(x) = u_a \circ R_\theta(x),$$

no es dificil ver que $u_{\theta,a} \in \mathcal{S}$, con $\mathcal{S}$ el conjunto de soluciones KAM débiles, más aun, note que

$$u_{R_\theta a} = u_{\theta^{-1},a}.$$

Para cada $a \in \mathcal{M}$ De la proposición III.9 se tiene que la función

$$\hat{u}_a : (\mathbb{R}^d)^N \to \mathbb{R}$$

$$\hat{u}_a(x) = \inf_{\theta \in SO(d)} u_{\theta,a}(x), \tag{67}$$

es una solución KAM débil. Por construcción $\hat{u}_a$ es invariante por rotaciones.

III.10. Definición. *Para cada $a \in \mathcal{M}$, llamamos a $\hat{u}_a$ la solución de Busseman invariante asociada a a.*

Por otro lado si $A \subset \mathcal{M}$, $A \neq \varnothing$ y $k : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ es una función tal que $\inf k > -\infty$, entonces de la proposición III.9 $u_{A,k}$ dada por

$$u_{A,k} := \inf_{a \in A} \{u_a + k(a)\}$$

está en $\mathcal{S}$. Sea

$$\mathcal{S}' := \{u_{A,k} | A \subset \mathcal{M}, k : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \inf k > -\infty\}.$$

Llamaremos a los elementos de $\mathcal{S}'$ soluciones representables, así por ejemplo tenemos que las soluciones Busemann invariantes definidas por una configuración minimal son soluciones representables.

El problema que nos interesa es saber bajo qué condiciones $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$, es decir, cuándo las soluciones de Busemann representan a las soluciones KAM débiles. En vista del conocimiento limitado que se tiene acerca de las configuraciones centrales y en particular sobre configuraciones minimales, hasta ahora no hemos podido más que especular las que serian las condiciones más razonables que nos permitirían alcanzar el resultado. Así tenemos la siguiente conjetura:

1. Conjetura. *Si toda minimizante en tiempo libre es asintótica a una configuración minimal, entonces las soluciones KAM débiles son representables por soluciones de Busemann, es decir $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.*

Aquí el principal problema es el demostrar que si una minimizante en tiempo libre γ es asintótica a una configuración minimal, entonces γ calibra a la solución de Busemann definida por dicha configuración.

Por otro lado, es razonable esperar que la hipótesis de la conjetura 1 se cumpla cuando el conjunto $\mathcal{M}$ consista de un número finito (salvo rotaciones) de configuraciones no degeneradas. Más aun fijando el número de cuerpos y la dimensión del espacio en que se mueven, se puede esperar que para valores genéricos de las masas $\mathcal{M}$ consista de una única configuración (modulo rotaciones) no degenerada.

En el problema de tres cuerpos en el plano, la configuración equilateral, es decir los cuerpos se encuentran el los vertices de un triágulo equilatero, es la única configuración mínima la cual es no degenerada. A priori, una minimizante en tiempo libre podría ser asintótica a la configuración de Euler, si embargo cuando las masas son iguales esto no ocurre [**BS**, p. 549].

Consideremos $\mathcal{S}_{\text{inv}}$ al conjunto de soluciones KAM débiles invariantes por rotaciones, tomemos además, para un subconjuto $A \subset \mathcal{M}$ no vacio y $k : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una función tal que $\text{ínf}\, k > -\infty$, la función $\hat{u}_{A,k}$ dada por

$$\hat{u}_{A,k}(x) := \operatorname*{ínf}_{a \in A} \{\hat{u}_a(x) + k(a)\}$$

está en $\mathcal{S}_{\text{inv}}$. Sea

$$\mathcal{S}'_{\text{inv}} := \{u_{A,k} | A \subset \mathcal{M}, k : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \text{ínf}\, k > -\infty\},$$

Observe que $\mathcal{S}'_{\text{inv}}$ es el conjunto de soluciones KAM débiles invariantes que son representables por soluciones de Busemann invariantes.

Una consecuencia del la conjetura 1 es lo siguiente

III.11. Teorema. *Si toda función KAM débil es representable por soluciones de Busemann, entonces toda solución KAM débil invariante es representable por soluciones de Busemann invariantes. Es decir, si* $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$*, entonces* $\mathcal{S}_{inv} = \mathcal{S}'_{inv}$.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{S}_{\text{inv}}$, entonces existen $A \subset \mathcal{M}$ no vacio y $k : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una función tal que $\operatorname{ínf} k > -\infty$ tales que para todo $x \in \mathbf{M}$

$$u(x) = u_{A,k}(x) = \operatorname*{ínf}_{a \in A} \{u_a(x) + k(a)\}.$$

Sea $\theta \in SO(d)$, entonces de la invarianza de u se tiene que

$$\begin{aligned} u(x) = u(R_\theta x) &= \operatorname*{ínf}_{a \in A} \{u_a(R_\theta x) + k(a)\} \\ & \operatorname*{ínf}_{a \in A} \{u_{\theta,a}(x) + k(a)\}; \end{aligned}$$

tomando ínfimo sobre $\theta \in SO(d)$ se tiene que

$$\begin{aligned} u(x) &= \operatorname*{ínf}_{\theta \in SO(d)} (\operatorname*{ínf}_{a \in A} \{u_{\theta,a}(x) + k(a)\}) \\ &= \operatorname*{ínf}_{a \in A} \{ \operatorname*{ínf}_{\theta \in SO(d)} u_{\theta,a}(x) + k(a)\} \\ &= \operatorname*{ínf}_{a \in A} \{\hat{u}_a(x) + k(a)\} \\ &= \hat{u}_{A,k}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $u \in \mathcal{S}'_{\text{inv}}$. □

III.12. Corolario. *Si* $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ *y hay una única configuración mínima salvo rotaciones, entonces hay una única (salvo una constante aditiva) solucion KAM débil invariante por rotaciones.*

Bibliografía

[AMR] Abraham, R., Marsden, J., Ratiu, T., Manifolds, tensor analysis and applications, Addison-Wesley, 1983.

[A] A. Albouy. *Lectures on the Two-Body Problem*, Classical and Celestial Mechanics, the Recife Lectures, H. Cabral, F. Diacu editors, Princeton University Press, (2002).

[AK] A. Albouy, V. Kaloshin. *Finiteness of central configurations of five bodies in the plane*, Ann. Math. **176** (2012), 535-588.

[Ar] V. I. Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag (1988).

[BS] Barutello, V., Secchi, S., *Morse index properties of colliding solutions to the N-body problem,* Ann. I. H. Poincaré, (2008), **25**, 539-565.

[BTV] V. Barutello, S. Terracini, G. Verzini. *Entire minimal parabolic trajectories: The planar anisotropic Kepler problem*, Arch. Rational Mech. Anal. **207** (2013), 583-609.

[Ch] J. Chazy. *Sur l'allure du mouvement dans le problème de trois corps quand le temps croît indéfiniment*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **39** (1922), 29-130.

[Che] A. Chenciner. *Action minimizing solutions of the Newtonian N-body problems and symmetric periodic solutions*, Procedings of the International Congress of Mathematics, Vol. 3, 279-294, Higher Ed. Press, Beijing 2002.

[Che1] A. Chenciner. *Collisions totales, mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le probléme des n corps.* J Moser at 70. Regul. Chaotic Dyn. **3** (1998), no. 3, 93-106.

[ChM] A. Chenciner, R. Montgomery. *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses*, Ann. Math. **152**(1999), 881-901.

[C] G. Contreras. *Action potential and weak KAM solutions*, Calc. Var. **13** (2001) no. 4, 427-458,.

[DM] Da Luz, Maderna. *On free time minimizers for the newtonian N-body problem*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2014) **156**, 209-227.

[F] A. Fathi, Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics. Versión preliminar.

[FT] D. Ferrario, S. Terracini, *On the existence of colisionless equivariant minimizers of the classical n-body problem*, Invent Math. **155** (2004) no. 2, 305-362.

[HS] N. Hulkower, D. Saari. *On the manifolds of total collapse orbirs and of completely parabolic orbits for the n-body problem*, J. Differ. Equ. **41** (1981), 27-43.

[M] E. Maderna *On weak KAM theory for N-body problems*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **32** (2012) no. 3, 1019–1041.

[M1] E. Maderna. *Translation invariance of weak KAM solutions of the Newtonian N-body problem*, Proc. Amer. Math. Soc., **141**(8) (2013):2809-2816.

[MV] Maderna, Venturelli. *Globally minimizing parabolic motions in the Newtonian N-body problem*, Arch. Rational Mech. Anal., **194** (2009) no. 1, 283–313.

[Mar]

[MHO] Meyer, K., Hall, G., Ofin, D., Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem, Second edition, Springer, 1999.

[Mar] Marchal, C. *How the method of minimization of action avoids singularities*, Celestial Mech. Dynam. Astrom., **83**,(2002), 325-354.

[MarS] C. Marchal, D. Saari, *On the final evolution of the n-body problem*, J. Differ. Equ. **20** (1976) no. 1, 150-186.

[P] H. Pollard. *The behavior of gravitational systems*, J. Math. Mech. **17** (1967), 601-611.

[S] Saari, D., *Symetry in n-particle systems*, Contemporary Math., **81** 1988, 23-42.

[W] Warner, F., Fundations of differential manifolds and Lie groups, Spinger-Verlag, 1983.