



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIOS DE ALEXANDROV DE
CURVATURA ACOTADA INFERIORMENTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

SERGIO ZAMORA BARRERA

TUTORA

DRA. ADRIANA ORTIZ RODRÍGUEZ

2015



Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Zamora

Barrera

Sergio

52 72 56 20

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

310709280

2. Datos del tutor

Dra.

Adriana

Ortiz

Rodríguez

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Sergey

Antonyan

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Raquel del Carmen

Perales

Aguilar

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Jimmy

Petean

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Max

Neumann

Coto

7. Datos del trabajo escrito

Espacios de Alexandrov de curvatura acotada inferiormente

122 p

2015

Agradecimientos

Muchas gracias a todas las personas que me acompañaron, apoyaron o confiaron en mí en algún momento de la carrera. Sé que lo seguirán haciendo y que podré confiar en cada uno de ustedes el resto de mi vida.

Gracias a toda mi familia, que ha estado siempre atrás de mí. Impulsándome cuando se los pido, y sosteniéndome cuando los necesito.

Gracias a mi mamá y a mi papá por cuidar de mí en cada instante y darme todos los días un ejemplo a seguir. Ambos me han llenado de sueños, y más importante, de cariño y amor.

Gracias a mi abue por escucharme, quererme y acompañarme en cada etapa de mi vida.

Gracias a mis tíos y a mis primos, por haber contribuido a que yo llegara a ser lo que soy ahora, una persona orgullosa de estar en esta familia.

Gracias a todas las personas que hicieron de mi estancia en la Facultad de Ciencias algo más que sólo un lugar de estudio. Todas las personas que me ayudaron cuando había problemas y que disfrutaron conmigo cuando no los había, convirtiendo esta experiencia en unos de los mejores años de mi vida.

Michelle, gracias por apoyarme, desde casi el comienzo de la carrera, incondicionalmente en cada idea que tuviera. Me hiciste darme cuenta de qué tan hermosa y genial puede ser una cosa simple si sabes disfrutarla.

Alejandro, Nicholas y Looke, simplemente no podría olvidar todas las veces que reímos juntos. Gracias por recordarme que siempre vale la pena tomarse un momento de relajación.

David, gracias por mantener siempre viva mi curiosidad matemática. Después de una plática contigo siempre me dejabas con algo en qué pensar, ya sea referente a matemáticas o a cualquier aspecto de la vida. Gracias por entenderme, o al menos siempre intentarlo.

Gracias a todo el Ninja Crew y las personas con las que tuve la fortuna de compartir clases, mesas de estudio, desayunos, o simplemente una mañana en la facultad.

Adriana Ortiz, gracias por hacerme darme cuenta que siempre puedo hacer las cosas mejor, y claro, guiarme a hacerlas.

Javier Páez, gracias por enseñarme a esforzarme aunque crea ya no poder y a preguntarme siempre ¿Por qué?

Gracias a Antonio Lascurain, por infundir en mí el amor y la pasión por las matemáticas, que hace todo este esfuerzo valer la pena.

Gracias a Max, Gabriel, Leo, Laura, y muchos, muchos profesores y ayudantes que tuve la fortuna de encontrar a lo largo de mi vida escolar, por esforzarse siempre por dejar todas las matemáticas claras, y por dejarme aprender de ustedes dentro y fuera del salón de clases.

Gracias de nuevo a Adriana, por dirigir esta tesis (incluyendo aguantarme a lo largo de todo el proceso de elaboración) y estar siempre al pendiente de mí. También a Max, Jimmy, Raquel y Sergey por apoyarme de igual manera.

También gracias al programa CB-219722 de CONACyT (Geometría de Foliaciones Holomorfas y Singularidades) por su financiamiento.

Índice general

1. Espacios de Longitud y Espacios Geodésicos	1
1.1. Métricas inducidas y Espacios de Longitud	2
1.2. Funcionales de Longitud	9
1.3. Espacios Geodésicos y Líneas Punteadas	13
1.4. Espacios Geodésicos y Completitud	20
2. Curvatura	27
2.1. Geometría Riemanniana, Variaciones	28
2.2. Geometría Riemanniana, campos de Jacobi	35
2.3. Curvatura y Campos de Jacobi, Teorema de Bonnet	38
2.4. Campos de Jacobi y Métrica	49
3. Espacios de Alexandrov	55
3.1. Ángulos	55
3.2. Espacios de Alexandrov	63
3.3. Medida y Dimensión de Hausdorff	70
3.4. Distancia Entre Espacios Métricos	73
3.5. El Teorema de Toponogov	80
3.6. Resultados y Problemas	88
A. Funciones, Sucesiones, Completez	93
B. Topología	99
C. Semi-Espacios de Longitud, Parametrizaciones	105
D. Leyes de Cosenos	107

Introducción

El objetivo de este texto, *Espacios de Alexandrov de curvatura acotada inferiormente*, es exponer resultados notables acerca de tales espacios, como el Teorema de Topogonov para espacios de Alexandrov localmente compactos o la generalización del teorema de Bonnet-Myers de geometría diferencial.

Para llegar a esto, en el primer capítulo se define Espacio de Longitud y Espacio Geodésico. En este mismo capítulo se dan algunas propiedades de ellos, así como condiciones de suficiencia y necesidad para que un espacio métrico sea uno de estos. También se incluye un apéndice con teoría básica de espacios métricos que se usa en este capítulo.

En el segundo capítulo se asume teoría básica de Geometría Diferencial y las definiciones que se dan acerca de ella sólo aparecen debido a la falta de convención al momento de definir el tensor de curvatura. En este capítulo y en lo que sigue del texto se usará la notación de sumación de Einstein, es decir, si dos índices se repiten, entonces estamos sumando con respecto a ellos: $x^i \partial_i := \sum_{i=1}^n x^i \partial_i$. El objetivo de este capítulo es definir el concepto de curvatura acotada, primero analíticamente en variedades Riemannianas, y después, sintéticamente en espacios de longitud.

En el tercer capítulo se dan varias definiciones de espacio de Alexandrov de curvatura acotada inferiormente, probando las equivalencias entre ellas. Después se estudian propiedades básicas de estos, como la semicontinuidad de los ángulos y el teorema de Toponogov. También se definen la dimensión de Hausdorff y la distancia de Gromov-Hausdorff para estudiar propiedades de conjuntos particulares de espacios métricos.

Capítulo 1

Espacios de Longitud y Espacios Geodésicos

Todo este texto girará alrededor de la siguiente definición:

Definición 1.0.1 Sea X un conjunto y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función. Decimos que la pareja (X, d) , es un *espacio métrico* si $\forall x, y, z \in X$ se cumplen las siguientes condiciones:

- Positividad: $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$.
- Desigualdad del Triángulo: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

A d le llamaremos la *métrica* de X y a los elementos de X los llamaremos *puntos*. La cantidad $d(x, y)$ es llamada la *distancia* de x a y . Si no se presta a confusión, denotaremos al espacio métrico sólomente como X .

Para $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}$, definimos la *bola* $B_r(a)$ y la *bola cerrada* $\overline{B}_r(a)$ ambas con centro en a y radio r , como los conjuntos $\{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ y $\{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$, respectivamente. A X lo dotamos con la topología

$$\{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists r > 0 \text{ tal que } B_r(x) \subset U\}.$$

Notemos que $\overline{B}_r(a)$ no siempre coincide con $\overline{B_r(a)}$. Por ejemplo si $X = \{0, 1\}$ y $d : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ está definida como $d(0, 0) = d(1, 1) = 0$, $d(0, 1) = d(1, 0) = 1$, tenemos que (X, d) es un espacio métrico y $\overline{B}_1(0) = B_1(0) = \{0\}$, pero $\overline{B}_1(0) = \{0, 1\}$.

Con esta topología se tiene que una función $f : X \rightarrow Y$ entre los espacios métricos (X, d) y (Y, \hat{d}) es continua en un punto $x \in X$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Esto sucede ya que, las bolas $B_r(a)$, $r \in \mathbb{R}$, $a \in X$ forman una base para la topología de X así como las bolas $B_s(b)$, $s \in \mathbb{R}$, $b \in Y$ para la topología de Y .

Ejemplos:

1. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, entonces por las propiedades de la norma, se tiene que la función $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida como $d(v, w) = \|w - v\|$ hace de la pareja (V, d) un espacio métrico.
2. Sea U un subconjunto de un espacio normado, la restricción de d del ejemplo anterior a $U \times U$ hace de $(U, d|_{U \times U})$ un espacio métrico. En particular, cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n con la métrica dada por la norma usual es un espacio métrico.
3. Sea X un conjunto y $r \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$. Si definimos $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ r & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

se tiene que (X, d) es un espacio métrico. Cuando $r = 1$, a d le llamaremos la métrica discreta sobre X .

4. Sea G un grupo finitamente generado y $S \subset G$ un conjunto finito de generadores tal que si $g \in S$, entonces $g^{-1} \in S$. Definimos $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $d(g_1, g_2)$ es la longitud de la palabra más corta con letras en S que sea igual a $g_1 g_2^{-1}$. De las propiedades básicas de los grupos es fácil ver que (G, d) es un espacio métrico.
5. Análogo al ejemplo 2, cualquier subconjunto D de un espacio métrico (X, d) es un espacio métrico con la métrica $d|_{D \times D}$ (ver definición A.6).

1.1. Métricas inducidas y Espacios de Longitud

Ahora generalizaremos la noción de longitud de una curva en \mathbb{R}^n como en [11] (pp. 146, 147). En esta sección llamaremos *intervalo* a cualquier

subconjunto convexo compacto de \mathbb{R} y *curva* a una función continua de un intervalo a nuestro espacio métrico.

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva. Decimos que γ va de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. A los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ les llamaremos los *extremos* de γ .

Dada una partición $\wp = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ de $[a, b]$, definimos la *longitud de γ inducida por d con respecto a \wp* (Figura 1.1) como:

$$\ell_d^\wp(\gamma) = \sum_{i=1}^k d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i-1})).$$

Con esto podemos definir la longitud de γ inducida por d como el supremo (posiblemente infinito) de estas sumas.

Definición 1.1.1 Sea (X, d) un espacio métrico, $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva. Definimos la longitud de γ inducida por d como:

$$\ell_d(\gamma) = \sup_\wp \{\ell_d^\wp(\gamma)\}.$$

Tomando el supremo a lo largo de todas las particiones del intervalo $[a, b]$.

A ℓ_d le llamaremos el *funcional de longitud asociado a d* . Si la curva es de longitud finita, decimos que es *rectificable*.

Inspirados en lo hecho para el caso de variedades Riemannianas ([10] p.94), definimos una nueva métrica \hat{d} en X como:

$$\hat{d}(x, y) = \inf\{\ell_d(\gamma) \mid \gamma \text{ es una curva en } X \text{ que une } x \text{ con } y\}.$$

Si no existe una curva que una x con y , definimos $\hat{d}(x, y)$ como ∞ . Es importante recalcar que estamos tomando el ínfimo y que no necesariamente existe una curva de longitud mínima que una dos puntos dados. Por ejemplo si tomamos \mathbb{R}^2 con la métrica dada por la norma usual $d(u, v) = \|u - v\|$ y le quitamos el origen, no existe una curva de longitud 2 que una -1 con 1 . Pero para cualquier $\varepsilon > 0$, es fácil encontrar una curva de longitud $2 + \varepsilon$ que una dichos puntos.

Proposición 1.1.2 Sea (X, d) un espacio métrico, entonces (X, \hat{d}) también es un espacio métrico. A \hat{d} le llamaremos la métrica inducida por d .

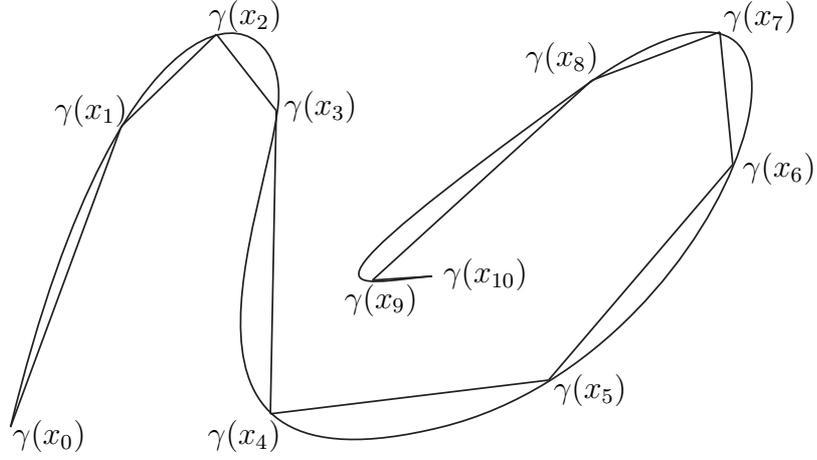


Figura 1.1: Longitud inducida por una partición $\{x_i\}_{i=0}^{10}$.

Demostración : La positividad de \hat{d} se cumple por definición, ya que la longitud de cualquier curva es mayor o igual que 0. Para verificar la simetría, observamos que para cualquier curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ de x a y y cualquier partición $\varphi = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ podemos considerar la curva de y a x $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow X$ dada por $\hat{\gamma}(s) = \gamma(b + a - s)$ y la partición $\hat{\varphi} = \{a = y_0 < y_1 < \dots < y_k = b\}$ con $y_i = b + a - x_{k-i}$. Así

$$\begin{aligned}
 \ell_d^{\hat{\varphi}}(\hat{\gamma}) &= \sum_{i=1}^k d(\hat{\gamma}(y_i), \hat{\gamma}(y_{i-1})) \\
 &= \sum_{i=1}^k d(\gamma(b + a - (b + a - x_{k-i})), \gamma(b + a - (b + a - x_{k-i+1}))) \\
 &= \sum_{i=1}^k d(\gamma(x_{k-i}), \gamma(x_{k-i+1})) \\
 &= \sum_{j=1}^k d(\gamma(x_j), \gamma(x_{j-1})) \\
 &= \ell_d^{\varphi}(\gamma).
 \end{aligned}$$

Y entonces $\ell_d(\gamma) = \ell_d(\hat{\gamma})$ para toda curva γ . Por lo tanto $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x, y \in X$.

Para probar la desigualdad del triángulo observamos que para cualesquiera curvas $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ de x a y y $\beta : [c, d] \rightarrow X$ de y a z , podemos construir $\alpha * \beta : [0, b + d - a - c] \rightarrow X$ con

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(a + s) & \text{si } s \leq b - a \\ \beta(c + a - b + s) & \text{si } s \geq b - a \end{cases}$$

Esta nueva curva va de x a z y su longitud es igual a $\ell_d(\alpha) + \ell_d(\beta)$. Por lo que $\hat{d}(x, z) \leq \ell_d(\alpha * \beta) = \ell_d(\alpha) + \ell_d(\beta)$ para todas las curvas α y β de x a y y de y a z respectivamente. Así que $\hat{d}(x, z) \leq \hat{d}(x, y) + \hat{d}(y, z)$. \square

Ciertamente, esta nueva métrica \hat{d} será mayor o igual que la original d , ya que la longitud de cada curva es mayor o igual a la distancia original, pues esta última es la longitud con respecto a la partición trivial ($\ell_d(\gamma) \geq \ell_d^{\{a,b\}}(\gamma) = d(x, y)$). Y con esto, la topología dada por \hat{d} es más fina que la dada por d .

Una definición igual de importante para nosotros que la primera es la siguiente:

Definición 1.1.3 Sea (X, d) un espacio métrico, decimos que d es una *métrica intrínseca* si $d = \hat{d}$. En tal caso decimos que (X, d) es un *espacio de longitud*.

Observación 1.1.4 Se sigue directo de la definición que un espacio métrico (X, d) es un espacio de longitud si y sólo si, $\forall x, y \in X$ y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \gamma : [a, b] \rightarrow X$ curva de x a y tal que $\ell_d(\gamma) < d(x, y) + \varepsilon$.

Con la siguiente proposición, obtendremos muchos ejemplos de espacios de longitud.

Proposición 1.1.5 Para cualquier espacio métrico (X, d) se tiene que (X, \hat{d}) es un espacio de longitud, es decir $\hat{d} = \hat{\hat{d}}$.

Esta proposición se obtiene como un corolario del siguiente teorema:

Teorema 1.1.6 En un espacio métrico (X, d) se tiene lo siguiente para toda curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$:

- $\ell_d(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$.

- $\forall c \in [a, b], \ell_d(\gamma|_{[a,c]}) + \ell_d(\gamma|_{[c,b]}) = \ell_d(\gamma|_{[a,b]})$.
- Si γ es rectificable, la función $\lambda(c) = \ell_d(\gamma|_{[a,c]})$ es continua.
- Si γ es rectificable, entonces es continua con la topología dada por \hat{d} .
- Si $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una función continua suprayectiva no creciente o no decreciente, entonces $\ell_d(\gamma \circ \phi) = \ell_d(\gamma)$.
- Si una sucesión de curvas rectificables $\gamma_i : [a, b] \rightarrow X$ converge puntualmente a $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, entonces

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \ell_d(\gamma_n) \geq \ell_d(\gamma).$$

En otras palabras, ℓ_d es un funcional inferiormente semicontinuo.

Observación 1.1.7 Es importante notar que ℓ_d en general no es continuo. Por ejemplo si tomamos la sucesión de curvas $\gamma_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma_n(s) = \begin{cases} s - \frac{\lfloor sn \rfloor}{2n}, \frac{\lfloor sn \rfloor}{2n} & \text{si } \lfloor sn \rfloor \text{ es par} \\ (\frac{\lfloor sn \rfloor + 1}{2n}, s - \frac{\lfloor sn \rfloor + 1}{2n}) & \text{si } \lfloor sn \rfloor \text{ es impar} \end{cases}$$

Cada una tendrá longitud 2, pero su límite (el segmento $[(0,0),(1,1)]$) será de longitud $\sqrt{2}$. (Figura 1.2)

Demostración (del teorema): El primer punto es consecuencia de la definición.

Para verificar el segundo, observamos que cada partición \wp de $[a, b]$ nos da particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$ ($\wp_1 = (\wp \cap [a, c]) \cup \{c\}$ y $\wp_2 = (\wp \cap [c, b]) \cup \{c\}$ respectivamente) tales que $\ell_d^\wp(\gamma) \leq \ell_d^{\wp_1}(\gamma|_{[a,c]}) + \ell_d^{\wp_2}(\gamma|_{[c,b]})$. Con esto, $\ell_d(\gamma) \leq \ell_d(\gamma|_{[a,c]}) + \ell_d(\gamma|_{[c,b]})$. De la misma manera, para cualesquiera particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$, su unión nos da una partición de $[a, b]$ con la misma longitud asociada, probando la otra desigualdad.

La continuidad del tercero sólo la probaremos por el lado derecho, pues por el lado izquierdo la prueba es análoga. Sea $c \in [a, b]$ y $\varepsilon > 0$. Tomamos una partición $\wp = \{x_0 < x_1 < \dots < x_k\}$ de $[a, b]$ tal que $\ell_d(\gamma) - \ell_d^\wp(\gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$, $c = x_j$ para algún $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ y $d(\gamma(c), \gamma(x_{j+1})) < \frac{\varepsilon}{2}$. Con esto, para

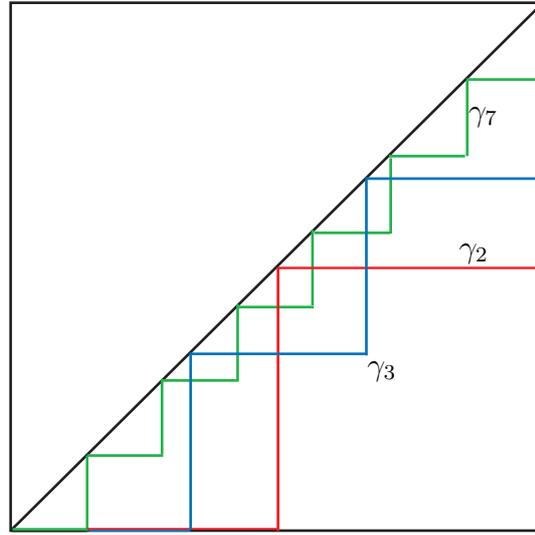


Figura 1.2: No continuidad del funcional ℓ .

cualquier partición \aleph de $[c, x_{j+1}]$:

$$\begin{aligned}
 \ell_d^{\aleph}(\gamma |_{[c, x_{j+1}]}) &= \ell_d^{\aleph}(\gamma |_{[c, x_{j+1}]}) + \ell_d^{\wp}(\gamma) - \ell_d^{\wp}(\gamma) \\
 &= \ell_d^{\wp \cup \aleph}(\gamma) + d(\gamma(c), \gamma(x_{j+1})) - \ell_d^{\wp}(\gamma) \\
 &< \ell_d(\gamma) + \frac{\varepsilon}{2} - \ell_d^{\wp}(\gamma) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

De donde, tomando $x \in [c, x_{j+1}]$ tenemos el tercer punto:

$$0 \leq \lambda(x) - \lambda(c) \leq \lambda(x_{j+1}) - \lambda(c) = \ell_d(\gamma |_{[c, x_{j+1}]}) \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, si $x \in [c, x_{j+1}]$, $\hat{d}(\gamma(x), \gamma(c)) \leq \ell_d(\gamma |_{[c, x_{j+1}]}) \leq \varepsilon$. De donde se obtiene el cuarto punto.

El quinto punto lo tenemos gracias a que cada partición de $[a, b]$ nos da una partición en $[c, d]$ con la misma longitud (la imagen inversa bajo ϕ), y dada una partición de $[c, d]$, obtenemos una en $[a, b]$ (donde posiblemente $x_i = x_{i+1}$ para algunos i) con la misma longitud (la imagen bajo ϕ).

El sexto punto es más complicado; dada una partición $\wp = \{x_0 < x_1 < \dots < x_k\}$ de $[a, b]$ y un $\varepsilon > 0$, consideramos un $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande

tal que $d(\gamma(x_i), \gamma_n(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2k} \forall n > N, \forall i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Entonces usando los primeros puntos y la desigualdad del triángulo obtenemos $\forall n > N$:

$$\begin{aligned}
\ell_d^\varphi(\gamma) &= \sum_{i=1}^k d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i-1})) \\
&\leq \sum_{i=1}^k (d(\gamma(x_i), \gamma_n(x_i)) + d(\gamma_n(x_i), \gamma_n(x_{i-1})) + d(\gamma_n(x_{i-1}), \gamma(x_{i-1}))) \\
&< \sum_{i=1}^k \left(\frac{\varepsilon}{2k} + d(\gamma_n(x_i), \gamma_n(x_{i-1})) + \frac{\varepsilon}{2k} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^k \ell_d(\gamma_n |_{[x_{i-1}, x_i]}) + \varepsilon \\
&= \ell_d(\gamma_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como ε fue arbitrario, $\ell_d^\varphi(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \ell_d(\gamma_n)$. Así que $\ell_d(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \ell_d(\gamma_n)$.
□

Demostración (de la proposición): Sólo resta verificar que $\hat{d}(x, y) \leq \hat{d}(x, y) \forall x, y \in X$. Para ver esto tomemos una curva rectificable $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ con $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$ (usando la topología dada por d). Por el cuarto punto del teorema, γ es continua con la topología dada por \hat{d} y dada una partición $\varphi = \{x_0 < x_1 < \dots < x_k\}$ de $[a, b]$, tenemos que:

$$\ell_{\hat{d}}^\varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^k \hat{d}(\gamma(x_i), \gamma(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^k \ell_d(\gamma |_{[x_{i-1}, x_i]}) = \ell_d(\gamma).$$

Como φ fue arbitraria, $\ell_{\hat{d}}(\gamma) \leq \ell_d(\gamma)$, y directamente se tiene que $\hat{d} \leq d$. □

Hay que notar que \hat{d} generalmente casi no está relacionada con d . Por ejemplo, si d es la métrica discreta sobre los racionales, ésta induce la misma métrica que la métrica usual. ($\hat{d}(x, y) = \infty \forall x \neq y$).

Otra diferencia importante es que (X, \hat{d}) siempre es localmente conectable por trayectorias: para cualquier $\varepsilon > 0$ definimos $U_\varepsilon(x)$ como la unión de las imágenes de todas las curvas de longitud menor que ε que salen de x , así

definido, tenemos que $U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \hat{d}(y, x) < \varepsilon\}$ y $U_\varepsilon(x)$ es conectable por trayectorias, pues cada punto de $U_\varepsilon(x)$ es conectable con x .

Otra propiedad que caracteriza a las métricas intrínsecas es que si coinciden localmente, entonces coinciden globalmente. Esto se precisa en el siguiente teorema:

Teorema 1.1.8 Sea (X, d) un espacio de longitud y sea g otra métrica intrínseca en X que induce la misma topología y que $\forall x \in X, \exists U_x$ abierto con $x \in U_x$ tal que $d|_{U_x \times U_x} = g|_{U_x \times U_x}$. Entonces se satisface $d = g$.

Demostración : Tomemos una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$. Como su imagen es compacta (ver apéndice B) existe una partición $\{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $d|_{\gamma([x_{i-1}, x_i]) \times \gamma([x_{i-1}, x_i])} = g|_{\gamma([x_{i-1}, x_i]) \times \gamma([x_{i-1}, x_i])} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por lo tanto $\ell_d(\gamma|_{[x_{i-1}, x_i]}) = \ell_g(\gamma|_{[x_{i-1}, x_i]}) \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sumando con respecto a i se tiene que $\ell_d = \ell_g$. Como d y g son intrínsecas, $d = \hat{d} = \hat{g} = g$. \square

1.2. Funcionales de Longitud

En esta sección seguiremos estudiando longitudes de curvas, pero ahora con otro enfoque, ligeramente más abstracto y menos geométrico. Tomaremos una clase de curvas y a cada una le asignaremos su longitud. Necesitamos que nuestra clase sea cerrada ante ciertas acciones (análogo a pedir que una medida esté definida sobre una σ -álgebra). También necesitamos que tenga cierta coherencia geométrica (de nuevo análogo a las propiedades de una medida ($\mu(\emptyset) = 0$, etc.)).

En esta sección, llamaremos intervalo a cualquier subconjunto convexo de \mathbb{R} y curva a una función continua de un intervalo a un espacio topológico X . A una relación de equivalencia en la clase de curvas continuas cuya traza está en un espacio topológico X le llamaremos *relación de reparametrizaciones en X* si contiene a la relación de equivalencia dada por $\gamma : [a, b] \rightarrow X \sim \sigma : [c, d] \rightarrow X \Leftrightarrow \exists \phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ homeomorfismo lineal tal que $\gamma \circ \phi = \sigma$.

Ejemplos de relaciones de reparametrizaciones son las relaciones dadas por reparametrizaciones por difeomorfismos, o reparametrizaciones por homeomorfismos. Ahora definimos la siguiente pieza de una estructura de longitud.

Definición 1.2.1 Sea A una clase de curvas continuas en un espacio topológico X . Dada una relación de reparametrizaciones R en X , decimos que A es una *clase de admisibles asociada a R* si satisface las siguientes propiedades:

- Si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es una curva con $\gamma \in A$ y $c, d \in [a, b]$ tales que $c \leq d$, entonces $\gamma|_{[c,d]} \in A$.
- Si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ y $c \in [a, b]$ son tales que $\gamma|_{[a,c]}, \gamma|_{[c,b]} \in A$. Entonces $\gamma \in A$. Decimos que γ es la concatenación de $\gamma|_{[a,c]}$ y $\gamma|_{[c,b]}$.
- Si $\gamma \in A$, entonces toda la clase de γ bajo la relación R está en A .

Ejemplos de clases de admisibles son las curvas diferenciables, las curvas continuas, las curvas constantes, las curvas de longitud (como la definimos en la sección anterior) finita, etc.

Definición 1.2.2 Sean X un espacio topológico de Hausdorff, R una relación de reparametrizaciones en X y A una clase de admisibles asociada a R . Un funcional $\ell : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es un *funcional de longitud* si satisface las siguientes propiedades para toda curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ en A . En este caso decimos que X tiene una *estructura de longitud*.

- $\ell(\gamma) \geq 0$.
- $\forall c \in [a, b], \ell(\gamma|_{[a,c]}) + \ell(\gamma|_{[c,b]}) = \ell(\gamma|_{[a,b]})$.
- La función $\lambda(c) = \ell(\gamma|_{[a,c]})$ es continua.
- Si γ está R -relacionado con σ , entonces $\ell(\gamma) = \ell(\sigma)$.
- Respeto la topología de X . Esto es, $\forall U \subset X$ abierto, tal que $x \in U$, se tiene que

$$\inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma(a) = x, \gamma(b) \in X \setminus U\} > 0.$$

Esta definición está motivada por la construcción de la sección anterior, aunque aquí los ejemplos son más ricos. Es claro del Teorema 1.1.6, que a todo espacio métrico (X, d) le podemos asignar un funcional de longitud ℓ_d (restringiéndolo a curvas rectificables), pero hay ejemplos de funcionales de

longitud que no son inducidos por una métrica, en particular, los que no cumplan el sexto punto del Teorema 1.1.6.

Un ejemplo de un funcional de longitud que no cumpla ese punto es el siguiente:

Tomamos $X = \mathbb{R}^2$, R la relación obtenida con las reparametrizaciones por homeomorfismos suaves por pedazos, A las curvas suaves por pedazos y ℓ definida como sigue: ℓ coincide con la longitud euclidiana si la curva es concatenación de líneas rectas pero ℓ es idénticamente ∞ en otro caso. Este ejemplo claramente no cumple el sexto punto del Teorema 1.1.6, pues cualquier curva suave la podemos aproximar por concatenaciones de líneas rectas.

La razón por la que pedimos que X sea un espacio de Hausdorff, es para poder definir una métrica inducida por un funcional de longitud ℓ . Definimos tal métrica d_ℓ como

$$d_\ell(x, y) = \inf_\gamma \{ \ell(\gamma : [a, b] \rightarrow X) \mid \gamma(a) = x, \gamma(b) = y \}.$$

Esta métrica induce una nueva topología en X , que por el quinto punto de la definición 1.2.2, será más fina que la original.

En forma análoga a la sección anterior tenemos el siguiente Teorema:

Teorema 1.2.3 En un espacio topológico X con un funcional de longitud, se tiene lo siguiente para toda curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ en A :

- $\ell(\gamma) \geq d_\ell(\gamma(a), \gamma(b))$.
- $\forall c \in [a, b], \ell(\gamma|_{[a,c]}) + \ell(\gamma|_{[c,b]}) = \ell(\gamma|_{[a,b]})$.
- La función $\lambda(c) = \ell(\gamma|_{[a,c]})$ es continua.
- Si $\ell(\gamma) < \infty$, γ es continua con la topología dada por d_ℓ .
- Si $\gamma \sim_R \sigma$, entonces $\ell(\gamma) = \ell(\sigma)$.

Demostración : Todos los incisos se obtienen por definición, con excepción del cuarto, que se obtiene como consecuencia del tercero. Sean $c \in [a, b]$ y $\varepsilon > 0$. Tomamos $\delta > 0$ tal que para toda $x \in [a, b]$ que satisfaga $|x - c| < \delta$ entonces $\ell(\gamma|_{[c,x]}) < \varepsilon$. Así, si $|x - c| < \delta$, se tiene que $d_\ell(\gamma(x), \gamma(c)) \leq \ell(\gamma|_{[c,x]}) < \varepsilon$ y por lo tanto γ es continua con la topología dada por d_ℓ . \square

De la misma forma que al final de la primera sección, se puede ver que d_ℓ induce una topología localmente conectable por trayectorias en X . La siguiente proposición nos dice por qué son tan importantes los funcionales de longitud.

Proposición 1.2.4 Toda métrica inducida por un funcional de longitud es intrínseca.

Demostración : La prueba es casi la misma que la de la proposición 1.1.5. Sólo falta ver que $\hat{d}_\ell(x, y) \leq d_\ell(x, y) \forall x, y \in X$. Para esto, tomemos una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ en A de longitud finita con $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$. Por el cuarto punto del teorema, γ es continua con la topología dada por d_ℓ y dada una partición $\wp = \{x_0 < x_1 < \dots < x_k\}$ de $[a, b]$, tenemos que:

$$\ell_{d_\ell}^\wp(\gamma) = \sum_{i=1}^k d_\ell(\gamma(x_i), \gamma(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^k \ell(\gamma|_{[x_{i-1}, x_i]}) = \ell(\gamma).$$

Como \wp fue arbitraria, $\ell_{d_\ell}(\gamma) \leq \ell(\gamma)$, y directamente se tiene que $\hat{d}_\ell \leq d_\ell$. \square

Uno puede ver que cada proposición demostrada para espacios de longitud y longitudes inducidas tiene un análogo para funcionales de longitud y métricas inducidas por éstos, con excepción del sexto punto del Teorema 1.1.6. El siguiente Teorema prueba que un funcional de longitud viene de una métrica si y sólo si se cumple ese punto.

Teorema 1.2.5 Sea X un espacio topológico con un funcional de longitud ℓ tal que es inferiormente semicontinuo (i.e., si $\{\gamma_n : [a, b] \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de curvas que converge puntualmente a $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ entonces $\ell(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \ell(\gamma_n)$). Entonces ℓ coincide con la longitud inducida por d_ℓ para las curvas γ donde ℓ está definida.

Demostración : Llamemos $\hat{\ell}$ a la longitud inducida por d_ℓ . La desigualdad $\hat{\ell}(\gamma) \leq \ell(\gamma)$ la tenemos de la prueba de la proposición anterior. Para ver la desigualdad opuesta, tomemos una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ para la cual ℓ está definida y es finita. Por el cuarto punto del Teorema 1.2.3, la curva es continua con la topología dada por d_ℓ y por lo tanto uniformemente continua (ver Apéndice B). Así que para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ podemos tomar una partición $\{x_0 < x_1 < \dots < x_r\}$ de $[a, b]$ tal que $r > 2$ y si $x, y \in [x_i, x_{i+1}]$

entonces $d_\ell(\gamma(x), \gamma(y)) < \frac{1}{3n}$. Ahora, para cada $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ tomamos una curva $\sigma_i^n : [x_i, x_{i+1}] \rightarrow X$ tal que $\sigma_i^n(x_i) = \gamma(x_i)$, $\sigma_i^n(x_{i+1}) = \gamma(x_{i+1})$ y $\ell(\sigma_i^n) < d_\ell(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) + \frac{1}{nr} < \frac{1}{3n} + \frac{1}{nr}$ (existe por definición de d_ℓ). Llamemos γ_n a la concatenación de $\sigma_0^n, \sigma_1^n, \dots, \sigma_{r-1}^n$. Entonces por el segundo punto de la definición de funcional de longitud tenemos:

$$\ell(\gamma_n) = \sum_{i=0}^{r-1} \ell(\sigma_i^n) < \sum_{i=0}^{r-1} \left(d_\ell(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) + \frac{1}{nr} \right) \leq \hat{\ell}(\gamma) + \frac{1}{n}.$$

Ahora, para $x \in [a, b]$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$, así que:

$$\begin{aligned} d_\ell(\gamma(x), \gamma_n(x)) &< d_\ell(\gamma(x), \gamma(x_i)) + d_\ell(\gamma(x_i), \gamma_n(x_i)) + d_\ell(\gamma_n(x_i), \gamma_n(x)) \\ &\leq \frac{1}{3n} + 0 + \ell(\sigma_i^n) \\ &< \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{nr} \\ &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en la topología dada por d_ℓ , y como la original de X es más gruesa, también se da la convergencia en ésta. De donde

$$\ell(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \ell(\gamma_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\hat{\ell}(\gamma) + \frac{1}{n} \right) = \hat{\ell}(\gamma).$$

Para ver el caso donde $\ell(\gamma) = \infty$, veamos que por la continuidad de la función $\lambda(c) = \ell(\gamma|_{[a,c]})$, tenemos que existe un $z = \min\{c \in [a, b] \mid \lambda(c) = \infty\}$. Aproximando por intervalos $[a, z_n]$ donde $z_n \neq z \forall n \in \mathbb{N}$ y $z_n \nearrow z$, tenemos que $\hat{\ell}(\gamma|_{[a, z_n]}) = \infty \Rightarrow \hat{\ell}(\gamma) = \infty$. \square

1.3. Espacios Geodésicos y Líneas Punteadas

En general, los espacios de longitud pueden ser muy salvajes, y poco se sabe de ellos. Por ejemplo, la métrica intrínseca inducida en un subconjunto arbitrario de \mathbb{R}^n puede no parecerse nada a la métrica original.

Pero una propiedad que le podemos pedir a un espacio de longitud es que

existan curvas que minimizen la distancia. Es decir, que el ínfimo de la definición 1.1.1 sea realizable por una curva.

Definición 1.3.1 Decimos que una curva γ en un espacio métrico es *minimizante* si para toda curva σ con los mismos extremos que γ , se tiene que $\ell_d(\gamma) \leq \ell_d(\sigma)$.

Decimos que una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es una *geodésica* si $\forall c \in [a, b], \exists \delta > 0$ tal que $\gamma|_{[c-\delta, c+\delta] \cap [a, b]}$ es una curva minimizante.

La propiedad más importante de las curvas minimizantes es que satisfacen la fórmula $d(\gamma(c_1), \gamma(c_2)) = \ell_d(\gamma|_{[c_1, c_2]})$.

Otra propiedad básica es que el límite de curvas minimizantes es minimizante, pues si $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de curvas minimizantes y converge a γ , entonces por la semicontinuidad inferior de ℓ_d , la fórmula anterior y la convergencia se tiene que:

$$\ell_d(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \ell_d(\gamma_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} d(\gamma_n(b), \gamma_n(a)) = d(\gamma(b), \gamma(a)).$$

Definición 1.3.2 Un *espacio geodésico* es un espacio de longitud X con la propiedad de que $\forall x, y \in X$, con $d(x, y) < \infty$, $\exists \gamma$ curva de x a y tal que $\ell_d(\gamma) = d(x, y)$.

Al momento de trabajar con espacios de longitud, esta propiedad resulta ser extremadamente útil, pues las curvas minimizantes se comportan de manera similar a las rectas en \mathbb{R}^n . Y en tal caso, podemos hablar de *una curva minimizante de x a y* , lo que simplifica considerablemente muchas demostraciones (por ejemplo, el Teorema 3.5.2).

Con la teoría que hemos desarrollado hasta ahora, demostrar que un espacio de longitud es un espacio geodésico es bastante complicado, de hecho, tendríamos que dar una curva explícita minimizante para cada par de puntos en nuestro espacio. Lo cual lo podemos hacer en \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n o en \mathbb{H}^n , pero en general suena a una tarea imposible. Para ello asumiremos que nuestro espacio es completo, esto es un paso muy largo en dirección a que nuestro espacio sea geodésico, pues la ausencia de un sólo punto puede evitar que un espacio sea geodésico. Por ejemplo, si a \mathbb{R}^2 con la métrica dada por la norma usual le quitamos el origen, no existe curva minimizante entre cualquier pareja de puntos $(x, \lambda x)$ con $\lambda < 0$.

Una vez asumiendo que el espacio es completo, podremos usar el lema A.10 para construir nuestras deseadas curvas minimizantes. Bastará definir las

de una buena manera en un subconjunto denso de un intervalo. Para ello necesitamos lo siguiente:

Definición 1.3.3 Dados x, y puntos en un espacio métrico X y $\varepsilon \geq 0$, decimos que z es un ε -punto medio de x y y si $|d(x, z) - d(x, y)/2| \leq \varepsilon$ y $|d(z, y) - d(x, y)/2| \leq \varepsilon$. A un 0-punto medio simplemente le llamaremos punto medio de x y y .

Observación 1.3.4 Notemos que el punto medio no tiene por qué ser único. Por ejemplo, si tomamos a $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ con la métrica inducida por la usual, tanto el 1 como el -1 son puntos medios de i y $-i$.

Definición 1.3.5 Dados $\varepsilon, \delta \geq 0$, decimos que una colección finita ordenada de puntos $\{x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y\}$ en X es una (δ, ε) -línea punteada de x a y si $d(x_{i-1}, x_i) \leq \varepsilon, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $\sum_{i=1}^n d(x_{i-1}, x_i) \leq d(x, y) + \delta$. A una $(0, \varepsilon)$ -línea punteada le llamaremos simplemente ε -línea punteada (Figura 1.3).

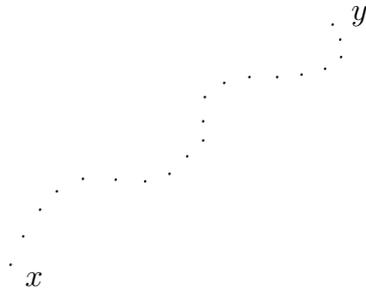


Figura 1.3: (δ, ε) -línea punteada de x a y .

Las últimas dos definiciones están relacionadas por las siguientes proposiciones:

Proposición 1.3.6 Si en un espacio métrico toda pareja de puntos x, y tiene un punto medio, entonces para cada $\varepsilon > 0$ y cada pareja de puntos x, y , existe una ε -línea punteada de x a y .

Demostración : Sean $x, y \in X$. Construiremos por inducción sobre n una $\frac{d(x,y)}{2^n}$ -línea punteada para cada entero positivo n .

Tomando un punto medio m de x y y , la colección $\{x, m, y\}$ es una $\frac{d(x,y)}{2}$ -línea punteada.

Tomemos una $\frac{d(x,y)}{2^n}$ -línea punteada $\{x = x_0, x_1, \dots, x_r = y\}$.

Construimos $\{x = y_0, y_1, y_1, \dots, y_{2r} = y\}$ donde $y_{2i} = x_i \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ y y_{2i+1} es un punto medio de y_{2i} y y_{2i+2} . Así definida, tenemos que $d(y_{2i-2}, y_{2i-1}) = d(y_{2i-1}, y_{2i}) = \frac{d(x_{i-1}, x_i)}{2} \leq \frac{d(x,y)}{2^{n+1}}$ y también que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2r} d(y_{i-1}, y_i) &= \sum_{i=1}^r (d(y_{2i-2}, y_{2i-1}) + d(y_{2i-1}, y_{2i})) \\ &= \sum_{i=1}^r d(x_{i-1}, x_i) \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Por lo que $\{x = y_0, y_1, y_1, \dots, y_{2r} = y\}$ es una $\frac{d(x,y)}{2^{n+1}}$ -línea punteada. \square

La implicación inversa no es verdadera. Por ejemplo si tomamos $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ no existe punto medio entre 1 y -1, pero existe una ε -línea punteada de 1 a -1 para cada $\varepsilon > 0$.

Proposición 1.3.7 Sea X un espacio métrico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Para cada par de puntos x, y y cada $\varepsilon > 0$, existe un ε -punto medio de x y y .
- Para cada par de puntos x, y y cada $\varepsilon > 0$, existe una $(\varepsilon, \varepsilon)$ -línea punteada de x a y .

Demostración : \Leftarrow) Para $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, tomamos una $(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$ -línea punteada $\{x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y\}$. Como $\sum_{i=1}^j d(x_{i-1}, x_i)$ es una función creciente de j y no da saltos de más de $\frac{\varepsilon}{2}$, existe k tal que $\sum_{i=1}^k d(x_{i-1}, x_i) \in (\frac{d(x,y)-\varepsilon}{2}, \frac{d(x,y)+\varepsilon}{2})$.

Para este k , tenemos que $d(x, x_k) \leq \sum_{i=1}^k d(x_{i-1}, x_i) \leq \frac{d(x,y)}{2} + \varepsilon$ y $d(y, x_k) \leq \sum_{i=k+1}^n d(x_{i-1}, x_i) = \sum_{i=1}^n d(x_{i-1}, x_i) - \sum_{i=1}^k d(x_{i-1}, x_i) \leq \frac{d(x,y)}{2} + \varepsilon$. Por lo que x_k es un ε -punto medio de x y y .

\Rightarrow) Para hacer esto, veamos que es suficiente la existencia de un método para construir una $(s + \delta, \frac{t}{2} + \delta)$ –línea punteada a partir de una (s, t) –línea punteada para todo $s \in [0, \infty)$, $t, \delta > 0$. Aplicando iteradamente este método k veces, comenzando con la $(0, d(x, y))$ –línea punteada $\{x, y\}$, y $\delta = \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \dots, \frac{\varepsilon}{2^k}$ obtenemos una $(\sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{d(x,y)}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2})$ –línea punteada de x a y . Que a su vez es una $(\varepsilon, \varepsilon)$ –línea punteada.

Para construir la $(s + \delta, \frac{t}{2} + \delta)$ –línea punteada a partir de una (s, t) –línea punteada $\{x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_r = y\}$, construimos $\{x = y_0, y_1, y_1, \dots, y_{2r} = y\}$ donde $y_{2i} = x_i \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ y y_{2i+1} es un $\frac{\delta}{2^r}$ –punto medio de y_{2i} y y_{2i+2} . En este caso, $d(y_{2i-1}, y_{2i}), d(y_{2i-1}, y_{2i-1}) \leq d(x_{i-1}, x_i)/2 + \delta \leq \frac{t}{2} + \delta$ y también

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2r} d(y_{i-1}, y_i) &= \sum_{i=1}^r (d(y_{2i-2}, y_{2i-1}) + d(y_{2i-1}, y_{2i})) \\ &\leq \sum_{i=1}^r \left(d(x_{i-1}, x_i) + \frac{\delta}{r} \right) \\ &= d(x, y) + s + \delta. \end{aligned}$$

Por lo que $\{x = y_0, y_1, y_1, \dots, y_{2r} = y\}$ es una $(s + \delta, \frac{t}{2} + \delta)$ –línea punteada. \square

Tenemos que en un espacio geodésico X siempre hay puntos medios para cualquier par de puntos x, y . Para ver esto tomamos una curva minimizante unitaria (ver apéndice C) $\sigma : [0, d(x, y)] \rightarrow X$ de x a y y entonces la imagen de $\frac{d(x,y)}{2}$ será un punto medio de x y y . De manera similar, podemos ver que si X es un espacio de longitud, para cualesquiera $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un ε –punto medio de x y y (tomando una curva γ de x a y de longitud $d(x, y) + \varepsilon$ unitaria y tomando $\gamma\left(\frac{d(x,y)+\varepsilon}{2}\right)$).

Con la misma idea, se puede probar que en un espacio geodésico siempre existen ε –líneas punteadas y en un espacio de longitud $(\varepsilon, \varepsilon)$ –líneas punteadas para todo $\varepsilon > 0$.

El converso de las observaciones del párrafo anterior no siempre es cierto para espacios métricos arbitrarios. Por ejemplo los números racionales. Pero una vez asumiendo que el espacio es completo, todas las implicaciones en la otra dirección son verdaderas:

Teorema 1.3.8 Sea X un espacio métrico completo, se tienen entonces las

siguientes afirmaciones:

- Si para cada par de puntos, existe un punto medio, entonces el espacio es geodésico.
- Si para cada par de puntos y cada $\varepsilon > 0$, existe un ε -punto medio, entonces el espacio es de longitud.
- Si para cada par de puntos y cada $\varepsilon > 0$, existe una ε -línea punteada, entonces el espacio es geodésico.
- Si para cada par de puntos y cada $\varepsilon > 0$, existe una $(\varepsilon, \varepsilon)$ -línea punteada, entonces el espacio es de longitud.

Demostración : En virtud de las proposiciones 1.3.6 y 1.3.7, basta probar el segundo y el tercer puntos.

Para probar el segundo punto, dados $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, usaremos el lema A.10 para construir una curva de x a y cuya longitud no exceda $d(x, y) + \varepsilon$. Primero, construiremos una función f de los racionales diádicos (los de la forma $\frac{k}{2^n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cap [0, 2^n]$) a nuestro espacio X .

Definimos f como $f(0) = x$, $f(1) = y$. Inductivamente sobre n : siempre que k sea impar, $f\left(\frac{k}{2^n}\right)$ será un $\frac{\varepsilon}{4^n}$ -punto medio de $f\left(\frac{k-1}{2^n}\right)$ y $f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$, los cuales ya están definidos, ya que tanto $k-1$ como $k+1$ son pares.

Observemos que se cumple la desigualdad

$$d\left(f\left(\frac{k}{2^n}\right), f\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right) \leq \frac{d(x, y)}{2^n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cap [0, 2^n]$.

La probaremos por inducción. La base de inducción se tiene trivialmente, ya que $f\left(\frac{1}{2}\right)$ es un $\frac{\varepsilon}{4}$ -punto medio de x y y . Para el paso inductivo, supondremos que k es impar (si k es par, el procedimiento es análogo):

$$\begin{aligned} d\left(f\left(\frac{k}{2^n}\right), f\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right) &\leq \frac{1}{2}d\left(f\left(\frac{k-1}{2^n}\right), f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2^{2n}} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{d(x, y)}{2^{n-1}} + \sum_{i=n}^{2n-2} \frac{\varepsilon}{2^i}\right) + \frac{\varepsilon}{2^{2n}} \\ &= \frac{d(x, y)}{2^n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\varepsilon}{2^i}. \end{aligned}$$

Habiendo demostrado la desigualdad, veamos que si s y t son racionales diádicos, entonces para m suficientemente grande, son de la forma $\frac{k_1}{2^m}$ y $\frac{k_2}{2^m}$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} d(f(s), f(t)) &= d\left(f\left(\frac{k_1}{2^m}\right), f\left(\frac{k_2}{2^m}\right)\right) \\ &\leq |k_2 - k_1| \left(\frac{d(x, y)}{2^m} + \sum_{i=m+1}^{2m} \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \\ &< |k_2 - k_1| \frac{d(x, y) + \varepsilon}{2^m} \\ &= |t - s|(d(x, y) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Por lo que f es una función con constante de Lipschitz $d(x, y) + \varepsilon$.

Como los racionales diádicos son densos en el intervalo $[0, 1]$, por el lema A.10 podemos extender f a una curva γ de x a y con constante de Lipschitz $d(x, y) + \varepsilon$.

Calculemos su longitud con respecto a una partición $\wp = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$:

$$\ell_d^\wp(\gamma) = \sum_{i=1}^n d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^n (d(x, y) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) = d(x, y) + \varepsilon.$$

Por lo que $\ell_d(\gamma) \leq d(x, y) + \varepsilon$, de donde tenemos el segundo punto.

Para probar el tercer punto, tomemos $x, y \in X$. Sea $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\varepsilon_n \searrow 0$. Construiremos inductivamente una ε_n -línea punteada de x a y de la siguiente manera:

Sea $\{x = x_0, x_1, \dots, x_n = y\}$ la ε_n -línea punteada construida. Tomamos una ε_{n+1} -línea punteada de x_i a x_{i-1} para cada i . Su unión claramente es una ε_{n+1} -línea punteada de x a y .

Sea S la unión de las líneas punteadas construidas. Definimos $g : S \rightarrow [0, d(x, y)]$ como $g(z) = d(z, x)$.

Como $\varepsilon_n \searrow 0$, la imagen de g es un conjunto denso en $[0, d(x, y)]$. Y como tomamos $(0, \varepsilon_n)$ -líneas punteadas, g preserva distancias. Así que por el lema A.10, g^{-1} se puede extender a una curva $\gamma : [0, d(x, y)] \rightarrow X$ que preserve distancias.

Calculando la longitud de γ con respecto a una partición $\wp = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = d(x, y)\}$ tenemos que:

$$\ell_d^\wp(\gamma) = \sum_{i=1}^n d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = d(x, y).$$

Así que $\ell_d(\gamma) = d(x, y)$ y tenemos el tercer punto. \square

Para espacios métricos no completos no se puede decir mucho, pues como se mencionó antes, la ausencia de un sólo punto puede imposibilitar la existencia de muchas curvas. Por ejemplo, en las gráficas, la métrica difiere mucho con la métrica inducida después de quitar un vértice de corte. Pero no es difícil ver que las propiedades del segundo y del cuarto punto del teorema anterior se heredan a la completación, es decir, si para cada par de puntos y cada $\varepsilon > 0$, existe un ε -punto medio, entonces para cada par de puntos en la completación también. Y por lo tanto, la completación es un espacio de longitud.

Si un espacio cumple las propiedades del primer o del tercer punto del teorema, es claro que entonces cumple las propiedades del segundo y del cuarto y por lo tanto su completación será un espacio de longitud. Mas no se puede asegurar que la completación sea un espacio geodésico, pues tales propiedades no se heredan a la completación.

Un ejemplo de esto es el subconjunto de \mathbb{R}^2 , $((0, 0), (0, 1]) \cup ((1, 0), (1, 1]) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [(0, \frac{1}{i}), (1, \frac{1}{i})]$. Con la métrica inducida por la usual, este es un espacio geodésico, pero su completación $[(0, 0), (0, 1]) \cup [(1, 0), (1, 1)] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [(0, \frac{1}{i}), (1, \frac{1}{i})]$ no lo es.

Una consecuencia muy importante de la existencia de $(\varepsilon, \varepsilon)$ -líneas punteadas es que para cualquier punto p en un espacio de longitud y para cualquier $r > 0$, se tiene que $\overline{B_r(p)} = \overline{B_r(p)}$. Pues para $x \in \overline{B_r(p)}$, $\varepsilon > 0$, existe un punto x_k en la ε -línea punteada de p a x tal que $d(p, x_k) < r$ y $d(x, x_k) < 2\varepsilon$ (el último k tal que $\sum_{i=1}^k d(x_{i-1}, x_i) < r$).

1.4. Espacios Geodésicos y Completitud

En geometría diferencial, existe un teorema muy importante que nos da la existencia de curvas minimizantes entre cualesquiera par de puntos bajo la condición de completitud.

Teorema 1.4.1 (Hopf-Rinow) Sea M una variedad Riemanniana conexa y completa como espacio métrico. Entonces para cada par de puntos en M , existe una curva minimizante que los une y toda geodésica parametrizada a velocidad constante se puede extender a todos los reales.

Una prueba detallada de este teorema se puede encontrar en [10] (pp. 108-111).

En espacios de longitud, la completitud no es suficiente para garantizar la existencia de caminos minimizantes. Por ejemplo, tomemos en \mathbb{R}^2 los puntos de la forma $(\frac{1}{n}, \frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{N}$ y los unimos mediante líneas rectas a los puntos $(0, 1)$ y $(0, 0)$. Al obtener su métrica inducida obtenemos un espacio de longitud completo en el cual no existen curvas minimizantes de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

Aún así, en espacios de longitud existe un teorema análogo. Para probarlo, lo primero que necesitamos es una definición.

Definición 1.4.2 Decimos que un subespacio U de un espacio métrico X es *precompacto* si toda sucesión en U tiene un punto de acumulación (no necesariamente en U). Decimos que un espacio métrico es *localmente compacto* si para todo $x \in X$, existe U_x vecindad de x precompacta.

No es difícil ver que un subespacio es precompacto si y sólo si su cerradura es compacta.

Continuemos con un teorema bastante fuerte y útil para encontrar curvas (aún más que el lema A.10).

Teorema 1.4.3 (Arzelá-Ascoli) Sea X un espacio métrico compacto y $\{\gamma_n : [0, 1] \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de curvas tales que $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $d(\gamma_n(s), \gamma_n(t)) \leq M|s - t| \forall s, t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una subsucesión $\{\gamma_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que converge uniformemente a una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$.

Demostración : Tomando un subconjunto denso numerable $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ de $[0, 1]$ y usando que $\{\gamma_n(x_j)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación para cada $j \in \mathbb{N}$. Con la técnica de la diagonal de Cantor (ver [1] pp. 214, 215) podemos construir una subsucesión $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{\sigma_n(x_j)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para cada $j \in \mathbb{N}$. Definimos γ como $\gamma(x_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x_j)$. Observemos que

$$\begin{aligned}
d(\gamma(x_i), \gamma(x_j)) &= d(\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x_i), \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x_j)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} d(\sigma_n(x_i), \sigma_n(x_j)) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} M|x_i - x_j| \\
&= M|x_i - x_j|.
\end{aligned}$$

Por lo que γ es de Lipschitz con constante de Lipschitz M . Así que por el lema A.10 la podemos extender a todo el intervalo $[0, 1]$ a una curva de Lipschitz con constante de Lipschitz M . Veamos que $\sigma_n \rightarrow \gamma$ uniformemente. Para $\varepsilon > 0$, tomamos una $\frac{\varepsilon}{3M}$ -red finita $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ contenida en $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ (encontrando una subcubierta finita de $\{B_{\frac{\varepsilon}{3M}}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$). Para $x \in X$ escogiendo $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(\gamma(y_m), \sigma_n(y_m)) < \frac{\varepsilon}{3} \forall n > N, \forall m \in \{1, 2, \dots, r\}$ y y_s tal que $|x - y_s| < \frac{\varepsilon}{3M}$, tenemos que si $n > N$:

$$\begin{aligned}
d(\gamma(x), \sigma_n(x)) &\leq d(\gamma(x), \gamma(y_s)) + d(\gamma(y_s), \sigma_n(y_s)) + d(\sigma_n(y_s), \sigma_n(x)) \\
&< M|x - y_s| + \frac{\varepsilon}{3} + M|x - y_s| \\
&< M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como N no dependió de x , $\sigma_n \rightarrow \gamma$ uniformemente. \square

Con esto podemos demostrar fácilmente que la métrica inducida en un espacio compacto es la de un espacio geodésico.

Lema 1.4.4 Sea (X, d) un espacio métrico compacto, entonces (X, \hat{d}) es un espacio geodésico.

Demostración : Sean $x, y \in X$ tal que $\exists \alpha : [a, b] \rightarrow X$ curva rectificable de x a y . Tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow X$ curva de x a y con $\ell_d(\gamma_n) < \hat{d}(x, y) + \frac{1}{n}$ parametrizada de forma que $\ell_d(\gamma|_{[s, t]}) = \ell_d(\gamma_n)|s - t|$. Tomando $M = \hat{d}(x, y) + 1$, por el teorema anterior, existe una subsucesión $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a una curva γ . Por la semicontinuidad inferior del teorema 1.1.6, $\ell(\gamma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \ell_d(\sigma_k) = \hat{d}(x, y)$. \square

Veamos que la hipótesis de compacidad se puede reducir.

Corolario 1.4.5 Sea (X, d) acotadamente compacto, entonces (X, \hat{d}) es un espacio geodésico.

Demostración : Sean $x, y \in X$ tal que $\exists \alpha : [a, b] \rightarrow X$ curva rectificable de x a y . Tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$, γ_n como en el lema anterior. Como $\gamma_n([0, 1]) \subset \overline{B}_{\hat{d}(x,y)+1}(x)$, por el lema anterior, $\exists \gamma$ curva minimizante de x a y . \square

Y aquí tenemos la generalización del teorema de Hopf-Rinow. Como consecuencia de este teorema y del corolario anterior, tenemos que si un espacio de longitud localmente compacto con métrica finita ($d(x, y) \neq \infty \forall x, y \in X$) cumple con alguno de los cuatro puntos del teorema, entonces es un espacio geodésico.

Teorema 1.4.6 (Hopf-Rinow-Cohn-Vossen) En un espacio de longitud localmente compacto X y con métrica finita, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. X es acotadamente compacto.
2. X es completo.
3. Toda geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ de Lipschitz se puede extender continuamente a una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$.
4. $\exists p \in X$ tal que toda geodésica $\gamma : [0, b] \rightarrow X$ de Lipschitz con $\gamma(0) = p$ se puede extender continuamente a una curva $\gamma : [0, b] \rightarrow X$.

Demostración : $1 \Rightarrow 2$) Esto sucede porque toda sucesión de Cauchy tiene una cola contenida en una bola cerrada (y por lo tanto compacta). Así que tiene un punto de acumulación y por el lema A.5 converge.

$2 \Rightarrow 3$) Como $[a, b]$ es denso en $[a, b]$ la implicación se sigue de A.10.

$3 \Rightarrow 4$) Obvio.

$4 \Rightarrow 1$) Como cualquier conjunto acotado está contenido en $B_N(p)$ para N suficientemente grande y un subconjunto cerrado de un compacto es compacto, bastará demostrar que $\overline{B}_N(p) = \overline{B_N(p)}$ es compacto $\forall N \in \mathbb{R}$.

Por eso mismo, si $\overline{B}_r(p)$ es compacto, entonces $\overline{B}_s(p)$ es compacto $\forall s \leq r$. Supongamos que la implicación $4 \Rightarrow 1$ no es verdadera. Entonces $\overline{B}_N(p)$ no es compacto para alguna $N \in \mathbb{R}$. En otras palabras, $r = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \overline{B}_x(p)$

es compacto $\} < \infty$. Como X es localmente compacto $r > 0$. Veamos que $B_r(p)$ es precompacto.

Tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $B_r(p)$. Si $d(p, x_n) \not\rightarrow r$, existe una subsucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en $\overline{B}_s(p)$ para algún $s < r$ y por lo tanto tiene un punto de acumulación. Si $d(p, x_n) \rightarrow r$, tomamos una subsucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $d(p, y_n) \nearrow r$ y una curva minimizante $\gamma_n : [0, d(p, y_n)] \rightarrow X$ unitaria de p a y_n para cada $n \in \mathbb{N}$ (lo podemos hacer por el lema anterior y porque $\overline{B}_{d(p, y_n)}(p)$ es compacto $\forall n \in \mathbb{N}$).

Por el teorema de Arzelá-Ascoli, existe una subsucesión $\{\gamma_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{\gamma_n^1|_{[0, d(p, y_{n_1})]}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente. Inductivamente construimos $\{\gamma_n^{k+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ como una subsucesión de $\{\gamma_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{\gamma_n^{k+1}|_{[0, d(p, y_{n_{k+1}})]}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente (esto tiene sentido, pues para n suficientemente grande, γ_n^k está definida en $[0, d(p, y_{n_{k+1}})]$).

Así definidas, la sucesión $\{\gamma_k^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[0, d(p, y_n)]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así que podemos tomar el límite $\gamma : [0, r) \rightarrow X$ definida en $[0, d(p, y_n)]$ como el límite de $\{\gamma_k^k|_{[0, d(p, y_n)]}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Como es límite de curvas minimizantes, $\gamma|_{[0, d(p, y_n)]}$ es minimizante $\forall n \in \mathbb{N}$, así que γ es una geodésica.

Para $u, v \in [0, r)$, $d(\gamma(v), \gamma(u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\gamma_n^n(v), \gamma_n^n(u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} |v - u| = |v - u|$. Por lo que γ es de Lipschitz y se puede extender continuamente a $[0, r]$.

Como $\{\gamma_k^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene que $\gamma_k^k = \gamma_{f(k)}$ para alguna función creciente $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Para $\varepsilon > 0$, tomamos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, y_n) > r - \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n > N_1$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(\gamma(t), \gamma_n^n(t)) < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall t \in [0, d(p, y_{N_1})]$.

Así que, si $n > N = N_1 + N_2$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(\gamma(r), y_{f(n)}) &\leq d(\gamma(r), \gamma(d(p, y_{N_1}))) + d(\gamma(d(p, y_{N_1})), \gamma_n^n(d(p, y_{N_1}))) \\ &\quad + d(\gamma_n^n(d(p, y_{N_1})), y_{f(n)}) \\ &\leq (r - d(p, y_{N_1})) + \frac{\varepsilon}{3} + d(\gamma_{f(n)}(d(p, y_{N_1})), \gamma_{f(n)}(d(p, y_{f(n)}))) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo que $y_{f(k)} \rightarrow \gamma(r)$. Así que $\overline{B_r(p)} = \overline{B_r(p)}$ es compacto.

Como X es localmente compacto, cada $x \in \overline{B_r(p)}$ tiene una vecindad abierta U_x precompacta. Tomamos una subcobertura finita $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\}$ de $\{U_x\}_{x \in \overline{B_r(p)}}$ y definimos $\phi : \overline{B_r(p)} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(x) = \inf\{d(x, y) \mid y \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}\}.$$

Por la desigualdad del triángulo ϕ es continua y por la compacidad de $\overline{B}_r(p)$, ϕ alcanza su mínimo m en algún punto x_0 ($m = \phi(x_0) > 0$ ya que $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ es abierto).

Así que $\overline{B}_{r+\frac{m}{2}}(p)$ es un cerrado dentro del compacto $\bigcup_{i=1}^n \overline{U_{x_i}}$ y por lo tanto, compacto, contradiciendo la definición de r . Por lo tanto, X es acotadamente compacto. \square

Capítulo 2

Curvatura

La curvatura a lo largo de la historia, a pesar de ser un concepto bastante intuitivo, ha causado mucho conflicto. Pues a pesar de que un niño pequeño puede ver si un alambre está curvado o no, definir curvatura para objetos de dimensión dos no es cosa de niños. Visualizarla en dimensión tres es algo complicado y para dimensiones más altas la intuición geométrica no ayuda mucho.

En el siglo XIX, K.F. Gauss definió y describió el concepto de curvatura para superficies, además de demostrar que tal concepto no depende de la forma en la que éstas están encajadas en el espacio [7]. Por ejemplo, una hoja de papel tiene la misma curvatura que un cilindro obtenido de haber enrollado la hoja. De la misma forma no se puede cubrir una esfera (ó parte de ella) con una hoja de papel sin hacer dobleces, esto se debe a que la esfera y la hoja de papel tienen distintas curvaturas. Haciendo uso de esto, B. Riemann definió la curvatura para objetos de mayor dimensión (variedades diferenciables de dimensión arbitraria) en términos de la curvatura *Gaussiana* de sus subespacios de dimensión dos [16].

Intuitivamente, para nosotros curvatura será lo siguiente:

Tomemos un punto p en un espacio geodésico X y dos geodésicas unitarias $\alpha, \beta : [0, L] \rightarrow X$ que inicien en p . También tomamos dos rectas parametrizadas por longitud de arco $\alpha, \beta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o líneas rectas en una hoja de papel) que inicien en 0 y que formen el mismo ángulo que α y β (lo que sea que eso signifique). Si X tiene curvatura negativa alrededor de p , entonces $d(\alpha(s), \beta(t)) > |\alpha(s), \beta(t)|$ para s y t suficientemente pequeños. Respectivamente $d(\alpha(s), \beta(t)) < |\alpha(s), \beta(t)|$ para s y t suficientemente pequeños si X tiene curvatura positiva alrededor de p y $d(\alpha(s), \beta(t)) = |\alpha(s), \beta(t)|$ para s y

t suficientemente pequeños si X tiene curvatura 0 alrededor de p . Y mientras más holgada sea la desigualdad, la curvatura será más pequeña o más grande.

Así, la curvatura negativa hace que las geodésicas se separen y la curvatura positiva que se junten. Un ejemplo de curvatura positiva es la esfera \mathbb{S}^2 . Su curvatura 1, y después de un cierto tiempo, cualquier par de geodésicas unitarias que salen de un punto chocan. Y un ejemplo de curvatura negativa es el espacio hiperbólico \mathbb{H}^2 . La separación entre dos geodésicas aquí es tal que $d(\alpha(s), \beta(t)) = s + t + o(s + t)$ cuando $s + t \rightarrow \infty$ para cualesquiera geodésicas unitarias α, β que salen de un punto con direcciones linealmente independientes (casi como si apuntaran en direcciones opuestas).

Antes de definir correcta y formalmente qué es una cota en la curvatura, echemos un vistazo a lo que sucede en la geometría diferencial.

2.1. Geometría Riemanniana, Variaciones

En las siguientes secciones de este capítulo, asumiremos que todas las variedades tratadas son Riemannianas y completas como espacios métricos. Por el teorema de Hopf-Rinow, todas las geodésicas parametrizadas por velocidad constante estarán definidas en todos los reales y serán espacios geodésicos.

En geometría Riemanniana, definimos el *tensor de curvatura* R de una variedad Riemanniana (M, g) como el $(1, 3)$ -tensor

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Para facilitar la notación, escribimos $\langle R(X, Y)Z, W \rangle_g = Rm(X, Y, Z, W) = (X, Y, Z, W)$. Usando las propiedades de la conexión ∇ no es difícil ver que efectivamente R y Rm son $(1, 3)$ y $(0, 4)$ tensores, respectivamente ([10] p. 118).

También, dada una parametrización, obtenemos los coeficientes de Rm como $(X, Y, Z, W) = R_{ijkl}x^i y^j z^k w^l$ y de nuevo es fácil probar que:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -R_{ijlk} \\ R_{ijkl} &= -R_{jikl} \\ R_{ijkl} &= R_{klij} \\ R_{ijkl} + R_{kijl} + R_{jkil} &= 0 \end{aligned}$$

(ver [10] pp. 121-123).

Así definido el tensor de curvatura, dado $p \in M$ y σ un subespacio de

dimensión dos de $T_p M$ se define la *curvatura seccional* de σ como

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{\langle X, Y, Y, X \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

donde $\{X, Y\}$ es una base de σ . Tampoco es muy difícil probar que $K(\sigma)$ no depende de la elección de X y Y . Algo igualmente elemental pero no tan trivial es que el tensor de curvatura está totalmente determinado por los valores de la curvatura seccional:

Teorema 2.1.1 Sea V un espacio vectorial de $\dim \geq 2$ con un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dos $(1, 3)$ tensores $R, R' \in V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V$ tales que

$$\frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{\langle R'(X, Y)Y, X \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

para cualquier par de vectores linealmente independientes X y Y . Si además los coeficientes de los $(0, 4)$ tensores $(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$,

$(X, Y, Z, W)' = \langle R'(X, Y)Z, W \rangle$ cumplen con las simetrías

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}, R_{ijkl} = -R_{jikl}, R_{ijkl} = R_{klij}, R_{ijkl} + R_{kijl} + R_{jkil} = 0$$

Entonces $R = R'$.

Una prueba puramente algebraica se puede encontrar en [6] (pp. 94, 95).

Cabe mencionar que $K(\sigma)$ es justamente la curvatura gaussiana de la imagen de σ bajo la aplicación exponencial evaluada en p . La curvatura seccional K es justamente la generalización propuesta por Riemann de la curvatura gaussiana a mayores dimensiones.

Para analizar qué tanto se separan las geodésicas aquí, estudiaremos familias diferenciables de curvas en lugar de simplemente dos geodésicas.

Definición 2.1.2 Definimos una *variación de una curva suave por pedazos* $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ como una función continua $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L] \rightarrow M$ tal que existe una partición $\{s_0 < s_1 < \dots < s_n\}$ de $[0, L]$ que cumple que ϕ es suave en los pedazos de la forma $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [s_i, s_{i+1}]$ y $\phi(0, s) = \gamma(s)$, $\forall s \in [0, L]$. Se llama variación porque para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ obtenemos una curva $\phi_t(s) = \phi(t, s)$.

Para facilitar la notación escribimos $T(t, s) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, s)$ y $S(t, s) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(t, s)$.
 Definimos el *campo variacional de ϕ* como $T(s) = T(0, s)$.

Observación 2.1.3 Para cualquier campo diferenciable T definido sobre una curva suave por pedazos γ , existe una variación $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L] \rightarrow M$ tal que $\phi_0 = \gamma$ y T el campo variacional de ϕ . Explícitamente

$$\phi(t, s) = \exp_{\gamma(s)} tT(s)$$

cumple con las propiedades mencionadas.

Antes de continuar, probaremos un lema que facilitará los cálculos más tarde.

Lema 2.1.4 (Simetría) Sea $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L] \rightarrow M$ una variación, entonces en los puntos donde ϕ es suave, se tiene que

$$\frac{DT}{\partial s} = \frac{DS}{\partial t}.$$

Demostración : Dada una parametrización de M alrededor de un punto de la imagen de ϕ , tenemos los coeficientes $S = \frac{\partial x_i}{\partial s} \partial_i$ y $T = \frac{\partial x_i}{\partial t} \partial_i$. Calculando obtenemos (usando la simetría de la conexión):

$$\begin{aligned} \frac{DT}{\partial s} &= \frac{D}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial t} \partial_i = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial t} \partial_i + \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \partial_i \\ &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial t} \partial_i + \frac{\partial x_i}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial x_j}{\partial s} \partial_j} \partial_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s} \partial_i + \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{\partial_j} \partial_i \\ &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s} \partial_i + \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial t} \nabla_{\partial_i} \partial_j = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s} \partial_i + \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial x_i}{\partial t} \partial_i} \partial_j \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial s} \partial_j + \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \partial_j = \frac{DS}{\partial t}. \end{aligned}$$

□

Diremos que una variación es *semiprovia* si $\phi(t, 0)$ no depende de t , y *propia* si $\phi(t, 0)$ y $\phi(t, L)$ no dependen de t . De igual forma, diremos que un campo T a lo largo de una curva $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ es *semipropio* si $T(0) = 0$ y *propio* si $T(0) = T(L) = 0$.

La longitud de ϕ_t será $\ell(t) := \int_0^L |S(t, s)| ds$. Queremos observar cómo varía tal longitud al variar t si ϕ es semiprovia. Calculemos la derivada de ℓ .

$$\begin{aligned}
 \ell'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L |S(t, s)| ds \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\langle S(t, s), S(t, s) \rangle} ds \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\langle \frac{D}{\partial t} S(t, s), S(t, s) \rangle}{\sqrt{\langle S(t, s), S(t, s) \rangle}} ds \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\langle \frac{D}{\partial s} T(t, s), S(t, s) \rangle}{\sqrt{\langle S(t, s), S(t, s) \rangle}} ds.
 \end{aligned}$$

Al momento de evaluar en $t = 0$, podemos asumir que ϕ_0 está parametrizada por longitud de arco, pues esto no cambia la longitud. Por lo tanto $\langle S(0, s), S(0, s) \rangle = 1$ y tenemos:

$$\begin{aligned}
 \ell'(0) &= \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\langle \frac{D}{\partial s} T(0, s), S(0, s) \right\rangle ds \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\frac{d}{ds} \langle S, T \rangle(0, s) - \left\langle T(0, s), \frac{D}{\partial s} S(0, s) \right\rangle \right) ds \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} (\langle T, \Delta S \rangle(0, s_i)) + \langle T, S \rangle(0, L) - \int_0^L \left\langle T(0, s), \frac{D}{\partial s} S(0, s) \right\rangle ds.
 \end{aligned}$$

Donde ΔS es el salto de γ' en los puntos donde no es suave.

Definición 2.1.5 A la fórmula anterior le llamaremos *primera fórmula de variación de arco*.

Observación 2.1.6 Si la variación es propia, y la curva ϕ_0 es una curva minimizante en el sentido de la definición 1.3.1 (cualquier otra curva con los mismos extremos tiene igual o mayor longitud), entonces $\ell(0)$ es un mínimo de ℓ , y por lo tanto $\ell'(0) = 0$ para cualquier variación. No es difícil ver, usando funciones pastel, que si γ es una curva unitaria minimizante, entonces $\frac{D}{\partial s} S(0, s) = \frac{D}{\partial s} \gamma'(s)$ es idénticamente 0. En general se tiene lo siguiente:

Proposición 2.1.7 Una curva suave $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ parametrizada a velocidad constante es una geodésica en el sentido de la definición 1.3.1 si y sólo si $\frac{D}{\partial s}\gamma'(s)$ es idénticamente 0.

Una demostración completa y detallada de esta proposición se puede encontrar en [10] pp. 100-106.

Otra consecuencia es que si γ es una geodésica parametrizada a velocidad constante, entonces $\frac{D}{\partial s}\gamma'(s)$ es idénticamente 0 y $\ell'(0) = \langle T, S \rangle(0, L)$.

Volvamos a derivar, ahora asumiendo que $\frac{D}{\partial s}\gamma'(s) = \frac{D}{\partial s}S(s) \equiv 0$:

$$\ell''(t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\langle \frac{D}{\partial s}T(t, s), S(t, s) \rangle}{\sqrt{\langle S(t, s), S(t, s) \rangle}} ds.$$

Calculemos sumando a sumando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\langle \frac{D}{\partial s}T, S \rangle}{\sqrt{\langle S, S \rangle}} ds &= \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\langle \frac{D}{\partial s}T, S \rangle}{\sqrt{\langle S, S \rangle}} ds \\ &= \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\frac{\langle \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s}T, S \rangle + \langle \frac{D}{\partial s}T, \frac{D}{\partial t}S \rangle}{\sqrt{\langle S, S \rangle}} - \frac{\langle \frac{D}{\partial s}T, S \rangle^2}{\sqrt{\langle S, S \rangle}^3} \right) ds \\ &= \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\frac{\langle R(T, S)T - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t}T, S \rangle + \langle \frac{D}{\partial s}T, \frac{D}{\partial t}S \rangle}{\sqrt{\langle S, S \rangle}} \right) ds \\ &\quad - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\frac{\langle \frac{D}{\partial s}T, S \rangle^2}{\sqrt{\langle S, S \rangle}^3} \right) ds \\ &= \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\frac{-\langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t}T, S \rangle + \langle T, S, T, S \rangle + \langle \frac{D}{\partial s}T, \frac{D}{\partial t}S \rangle}{\sqrt{\langle S, S \rangle}} \right) ds \\ &\quad - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\frac{\langle \frac{D}{\partial s}T, S \rangle^2}{\sqrt{\langle S, S \rangle}^3} \right) ds. \end{aligned}$$

De nuevo podemos suponer que ϕ_0 está parametrizada por longitud de arco y así, calculando el primer sumando:

$$\begin{aligned}
 - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} T, S \right\rangle ds &= - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{D}{\partial t} T, S \right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial t} T, \frac{D}{\partial s} S \right\rangle \right) ds \\
 &= - \left\langle \frac{D}{\partial t} T, S \right\rangle(0, s_{i+1}) + \left\langle \frac{D}{\partial t} T, S \right\rangle(0, s_i).
 \end{aligned}$$

Sumando con respecto a i se cancelan tales sumandos, pues $\frac{D}{\partial t} T(0, 0) = \frac{D}{\partial t} T(0, L) = 0$. Así que sumando con respecto a i obtenemos la siguiente fórmula:

$$\ell''(t) = \int_0^L \left(\left| \frac{D}{\partial s} T \right|^2 - (T, S, S, T) - \left\langle \frac{D}{\partial s} T, S \right\rangle^2 \right) ds.$$

Definición 2.1.8 A la fórmula anterior se le llama la *segunda fórmula de variación de arco*.

Ahora, a cada vector V en $T_{\gamma(s)}M$ lo podemos descomponer en dos componentes, una paralela y otra perpendicular a γ' , denotándolas por V^\top y V^\perp respectivamente. Usando el hecho de que γ es una geodésica, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{\partial s}(V^\top) &= \frac{D}{\partial s} \langle V, S \rangle S \\
 &= \left\langle \frac{D}{\partial s} V, S \right\rangle S + \left\langle V, \frac{D}{\partial s} S \right\rangle S + \langle V, S \rangle \frac{D}{\partial s} S \\
 &= \left(\frac{D}{\partial s} V \right)^\top.
 \end{aligned}$$

También, por el teorema de Pitágoras, $|V|^2 = |V^\top|^2 + |V^\perp|^2$.

Por otro lado, tenemos que $(V^\top, S, V, S) = 0$, así que la fórmula de la segunda variación de arco se vuelve:

$$\begin{aligned}
 \ell''(t) &= \int_0^L \left(\left| \frac{D}{\partial s} T \right|^2 - (T, S, S, T) - \left\langle \frac{D}{\partial s} T, S \right\rangle^2 \right) ds \\
 &= \int_0^L \left(\left| \frac{D}{\partial s} T \right|^2 - (T^\top + T^\perp, S, S, T^\top + T^\perp) - \left| \frac{D}{\partial s} T^\top \right|^2 \right) ds \\
 &= \int_0^L \left(\left| \frac{D}{\partial s} T^\perp \right|^2 - (T^\perp, S, S, T^\perp) \right) ds.
 \end{aligned}$$

Denotaremos al espacio de campos semipropios suaves por pedazos a lo largo de una geodésica unitaria $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ como $\Upsilon(\gamma)$.

Definición 2.1.9 Sean M una variedad Riemanniana y $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ una geodésica unitaria. Definimos la *forma índice de $a \in [0, L]$* en el espacio $\Upsilon(\gamma)$ como la forma bilineal simétrica definida como sigue para $T, V \in \Upsilon$:

$$I_a(T, V) = \int_0^a \left(\left\langle \frac{D}{ds}T, \frac{D}{ds}V \right\rangle - (T, \gamma', \gamma', V) \right) ds.$$

De la segunda fórmula de variación de arco, se sigue que la forma cuadrática asociada a esta forma bilineal, aplicada a un campo V , es igual a $\ell''(t)$ para una variación con V como su campo variacional. Esta propiedad será fundamental en la demostración del teorema de comparación de Rauch.

Calculemos $I_a(T, V)$ de otra forma. Sea $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[0, a]$ en la que tanto T como V son suaves a lo largo de $[x_{i-1}, x_i] \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left\langle \frac{D}{ds}T, \frac{D}{ds}V \right\rangle - (T, \gamma', \gamma', V) \right) ds \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{ds}T, V \right\rangle - \left\langle \frac{D^2}{ds^2}T, V \right\rangle - (T, \gamma', \gamma', V) \right) ds \\ &= \left\langle \frac{D}{ds}T, V \right\rangle \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\langle \frac{D^2}{ds^2}T - R(\gamma', T)\gamma', V \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Sumando con respecto a i se tiene

$$I_a(T, V) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \Delta \frac{D}{ds}T, V \right\rangle(x_i) + \left\langle \frac{D}{ds}T, V \right\rangle(a) - \int_0^a \left\langle \frac{D^2}{ds^2}T - R(\gamma', T)\gamma', V \right\rangle ds.$$

Donde $\Delta \frac{D}{ds}T(x_i)$ es el salto de $\frac{D}{ds}T$ en los puntos donde T no es suave.

2.2. Geometría Riemanniana, campos de Jacobi

Ahora nos concentraremos en variaciones por geodésicas, es decir aquellas en las que ϕ_t sea una geodésica parametrizada a velocidad constante para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. En este caso $\frac{D}{\partial s}S \equiv 0$, y así $\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}S \equiv 0$. De donde

$$\begin{aligned} R(S, T)S &= \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}S - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}S \\ &= \frac{D^2}{\partial s^2}T. \end{aligned}$$

Definición 2.2.1 A la ecuación anterior le llamaremos la *ecuación de Jacobi*. A un campo J a lo largo de una geodésica que cumple la ecuación anterior se le llama un *campo de Jacobi*.

Pongamos esta ecuación en términos más elementales. Tomando una base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $T_{\gamma(0)}M$ y su transporte paralelo a lo largo de γ , podemos expresar a J en sus coordenadas $J = j^i e_i$ y tenemos:

$$\begin{aligned} R(S, J)S &= \langle R(S, J)S, e_i \rangle e_i \\ &= (S, J, S, e_i) e_i \\ &= j^k (S, e_k, S, e_i) e_i \\ &= h_{ik} j^k e_i. \end{aligned}$$

donde $h_{ik} = (S, e_k, S, e_i)$. Y también:

$$\frac{D^2}{\partial s^2}J = \frac{\partial^2 j^i}{\partial s^2} e_i.$$

Así que la ecuación se vuelve un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$h_{ik} j^k = \frac{d^2 j^i}{ds^2}.$$

Este sistema lo podemos transformar en un sistema de primer orden de $2n$ variables. Dadas las condiciones iniciales $J(0)$ y $\frac{D}{ds}J(0)$ la solución de este sistema es única (ver [2] p.131).

Nos interesarán sólo los campos de Jacobi con $J(0) = 0$. Pues éstos son los correspondientes a las variaciones semipropias. Veamos que dado un

campo de Jacobi con $J(0) = 0$, existe una variación por geodésicas tal que J es su campo variacional.

Proposición 2.2.2 Sea $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ una geodésica unitaria en una variedad Riemanniana completa y $J : [0, L] \rightarrow TM$ un campo de Jacobi sobre γ con $J(0) = 0$. Entonces existe una variación por geodésicas tal que J es su campo variacional.

Demostración : Tomamos $\frac{D}{\partial s}J(0) = W$ y $\gamma'(0) = V$. Por las propiedades de la aplicación exponencial, $s \rightarrow \exp_{\gamma(0)}sV$ coincide con γ . Además, para cada $t \in \mathbb{R}$, $s \rightarrow \exp_{\gamma(0)}s(V + tW)$ es una geodésica parametrizada por velocidad constante. También, si definimos $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L] \rightarrow M$ como $\phi(t, s) = \exp_{\gamma(0)}s(V + tW)$, ésta es una variación semiprovia por geodésicas con $\frac{D}{\partial s}\frac{\partial \phi}{\partial t}(0, 0) = \frac{D}{\partial s}J = W$. Y por la unicidad de las soluciones dadas las condiciones iniciales, $J(s) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, s)$. \square

Observación 2.2.3 Una consecuencia importante de la demostración anterior es que si tomamos coordenadas normales alrededor de $\gamma(0)$ y W tiene coordenadas (W^i) , el campo J está dado por

$$J(s) = s(W^i \partial_i).$$

Observación 2.2.4 Se puede probar que para cualquier campo de Jacobi J , existe una variación por geodésicas tal que J es su campo variacional. Aunque ese hecho no lo utilizaremos en este texto.

Otra característica importante de los campos de Jacobi es la siguiente:

Proposición 2.2.5 Sea $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ una geodésica unitaria en una variedad Riemanniana y $J : [0, L] \rightarrow TM$ un campo de Jacobi sobre γ . Entonces $\langle J, S \rangle(s)$ es una función lineal de s .

Demostración : Derivando dos veces con respecto a s tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \langle J, S \rangle &= \frac{d}{ds} \left(\left\langle \frac{D}{\partial s} J, S \right\rangle + \left\langle J, \frac{D}{\partial s} S \right\rangle \right) \\ &= \left\langle \frac{D^2}{\partial s^2} J, S \right\rangle + \left\langle \frac{D}{\partial s} J, \frac{D}{\partial s} S \right\rangle \\ &= \langle R(S, J)S, S \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Como consecuencia de este cálculo, también tenemos que $\frac{d}{ds} \langle J, S \rangle = \langle \frac{D}{\partial s} J, S \rangle$. De aquí que J es ortogonal a S a lo largo de γ si y sólo si $\langle J, S \rangle(0) = 0$ y $\langle \frac{D}{\partial s} J, S \rangle(0) = 0$.

Observación 2.2.6 El campo de Jacobi con $J(0) = \gamma'(0)$ y $\frac{D}{\partial s} J(0) = 0$ es el obtenido por la variación

$$\phi(t, s) = \gamma(t + s)$$

y el campo dado por $J(0) = 0$ y $\frac{D}{\partial s} J(0) = \gamma'(0)$ viene de la variación

$$\phi(t, s) = \gamma(e^t s).$$

Por lo tanto, nunca se anulan fuera del 0 y no nos dicen mucho acerca de las geodésicas cercanas a γ , sólo de reparametrizaciones de γ . Así que nos enfocaremos en los campos de Jacobi ortogonales. Es decir, los que $\langle J, S \rangle(0) = 0$ y $\langle \frac{D}{\partial s} J, S \rangle(0) = 0$.

Observación 2.2.7 Sabemos que los campos de Jacobi son los campos variacionales de variaciones por geodésicas. Entonces el tamaño $|J|$ de un campo de Jacobi significa qué tanto se separan las geodésicas cercanas a γ . Así que si un campo de Jacobi con $J(0) = 0$ se vuelve a anular, podríamos adivinar que ciertas geodésicas chocarán.

Definición 2.2.8 Consideremos una geodésica $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ parametrizada a velocidad constante en una variedad Riemanniana. Para $a \in (0, L]$, decimos que $\gamma(a)$ es un *punto conjugado* de $\gamma(0)$ a lo largo de γ si existe un campo de Jacobi no idénticamente 0, a lo largo de γ , que se anule en $\gamma(0)$ y en $\gamma(a)$.

Veamos que efectivamente, un punto conjugado significa que hay dos puntos tales que existe más de una geodésica que los une. En particular, si para $a \in (0, L)$ se tiene que $\gamma(a)$ es un punto conjugado de $\gamma(0)$ a lo largo de γ , entonces γ no es una curva minimizante.

Teorema 2.2.9 Sea $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ una geodésica parametrizada a velocidad constante en una variedad Riemanniana. Si $a \in (0, L)$ es tal que $\gamma(a)$ es conjugado de $\gamma(0)$ a lo largo de γ . Entonces γ no es una curva minimizante.

Demostración : Por el criterio de la segunda derivada y que para cada campo a lo largo de γ le corresponde una variación, bastará demostrar que $I_L(X, X) < 0$ para algún campo propio X a lo largo de γ .

Primero, consideremos J como un campo de Jacobi no trivial que se anula en 0 y en a , y lo extendemos continuamente a $[a, L]$ como idénticamente 0. Así definido tenemos que

$$I_L(J, J) = \left\langle \Delta \frac{D}{ds} J, J \right\rangle(a) - \int_0^L \left\langle \frac{D^2}{ds^2} J - R(\gamma', J)\gamma', J \right\rangle ds = 0.$$

Por otro lado consideramos Z un campo propio con $Z(a) = \Delta \frac{D}{ds} J(a)$ (con funciones pastel no es difícil construirlo). Así tenemos que

$$\begin{aligned} I_L(J, Z) &= \left\langle \Delta \frac{D}{ds} J, Z \right\rangle(a) - \int_0^L \left\langle \frac{D^2}{ds^2} J - R(\gamma', J)\gamma', Z \right\rangle ds \\ &= \left| \frac{D}{ds} J \right|^2(a) \\ &> 0. \end{aligned}$$

La última desigualdad se tiene ya que si $J(a) = \frac{D}{ds} J(a) = 0$, entonces $J \equiv 0$, lo cual por construcción no es cierto.

De nuevo calculando,

$$\begin{aligned} I_L(J - \varepsilon Z, J - \varepsilon Z) &= I_L(J, J) - 2\varepsilon I_L(J, Z) + \varepsilon^2 I_L(Z, Z) \\ &= -2\varepsilon I_L(J, Z) + \varepsilon^2 I_L(Z, Z). \end{aligned}$$

Lo cual es negativo para ε suficientemente pequeño. □

2.3. Curvatura y Campos de Jacobi, Teorema de Bonnet

Ahora analizaremos la influencia de la curvatura seccional en los campos de Jacobi. Comencemos calculando los campos de Jacobi ortogonales a una geodésica γ con $J(0) = 0$ cuando la curvatura seccional es constante. Para eso necesitaremos una fórmula para la expresión del tensor de curvatura.

Lema 2.3.1 Sea M una variedad Riemanniana con curvatura seccional constante K , entonces el tensor de curvatura está dado por la fórmula

$$R(X, Y)Z = K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Demostración : Consideremos el $(1, 3)$ tensor

$$R'(X, Y)Z = K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Así que para cualesquiera vectores X y Y linealmente independientes se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\langle R'(X, Y)Y, X \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} &= \frac{K(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= K \\ &= \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}. \end{aligned}$$

Como $(X, Y, Z, W)' = \langle R'(X, Y)Z, W \rangle$ cumple las simetrías del teorema 2.1.1, se tiene por ese mismo teorema que $R = R'$. \square

Teorema 2.3.2 Los campos de Jacobi ortogonales con $J(0) = 0$ a lo largo de una geodésica γ en una variedad riemanniana M con curvatura seccional constante K están dados por:

$$J(s) = u_K(s)N(s)$$

donde N es un campo normal paralelo y

- $u_K(s) = s$ si $K = 0$.
- $u_K(s) = \frac{\sin(rs)}{r}$ si $K = \frac{1}{r^2}$.
- $u_K(s) = \frac{\sinh(rs)}{r}$ si $K = -\frac{1}{r^2}$.

Demostración : Usando el lema 2.3.1, la ecuación de Jacobi toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{ds^2}J &= R(\gamma', J)\gamma' \\ &= K(\langle J, \gamma' \rangle \gamma' - \langle \gamma', \gamma' \rangle J) \\ &= K(-\langle \gamma', \gamma' \rangle J) \\ &= -KJ. \end{aligned}$$

Es claro que $J(s) = u_K(s)N(s)$ cumple tal ecuación y que $J(0) = 0$, $\frac{D}{ds}J(0) = N(0)$. Como para cualquier $v \in T_{\gamma(0)}M$ con $\langle v, \gamma'(0) \rangle = 0$ existe su transporte paralelo a lo largo de γ , los campos de la forma $u_K(s)N(s)$ son todos los campos de Jacobi normales semipropios a lo largo de γ . \square

Con este teorema, podemos observar, al menos en el caso de curvatura seccional constante, que la curvatura positiva hace que las geodésicas se junten y la curvatura negativa que se separen.

Inspirados en estas fórmulas, podemos demostrar el teorema de Bonnet;

Teorema 2.3.3 (Bonnet) Sea M una variedad riemanniana completa y conexa con curvatura seccional acotada inferiormente por $R^2 > 0$, entonces $diam(M) \leq \frac{\pi}{R}$, M es compacta y tiene grupo fundamental finito.

Demostración : Supongamos que hay dos puntos a distancia mayor que $\frac{\pi}{R}$. Entonces existe una curva minimizante de longitud $L > \frac{\pi}{R}$. Tomamos la variación $T(s) = \sin \frac{\pi s}{L}N(s)$ donde $N(s)$ es un campo normal paralelo. Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{D}{ds}T(s) &= \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi s}{L}N(s), \\ \frac{D^2}{ds^2}T(s) &= -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi s}{L}N(s).\end{aligned}$$

Calculando la forma índice, tenemos que:

$$\begin{aligned}I_L(T, T) &= -\int_0^L \left\langle \frac{D^2}{ds^2}T - R(\gamma', T)\gamma', T \right\rangle ds \\ &= \int_0^L \left\langle \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi s}{L}N(s) + R(\gamma', \sin \frac{\pi s}{L}N(s))\gamma', \sin \frac{\pi s}{L}N(s) \right\rangle ds \\ &= \int_0^L \left(\sin^2 \frac{\pi s}{L} \right) \left(\frac{\pi^2}{L^2} - (\gamma', N(s), N(s), \gamma') \right) ds \\ &= \int_0^L \left(\sin^2 \frac{\pi s}{L} \right) \left(\frac{\pi^2}{L^2} - K(\gamma', N(s)) \right) ds \\ &\leq \int_0^L \left(\sin^2 \frac{\pi s}{L} \right) \left(\frac{\pi^2}{L^2} - R^2 \right) ds \\ &= \int_0^L \left(\sin^2 \frac{\pi s}{L} \right) \left(\frac{\pi^2 - R^2 L^2}{L^2} \right) ds \\ &< 0.\end{aligned}$$

Lo que es una contradicción. Así que $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{R}$. Por lo que para cualquier punto $p \in M$, se tiene que $M = \text{exp}_p(\overline{B_{\pi/R}}(0))$. Por el teorema B.2, M es compacta. Para ver la última afirmación, consideremos la cubriente universal \overline{M} de M . Como es localmente isométrica a M , su curvatura seccional está acotada inferiormente por R^2 , y por lo tanto es compacta. Como M es el cociente $\overline{M}/\pi_1(M, p)$, las órbitas de cada clase no se pueden acumular, y por lo tanto son finitas. \square

Ahora analicemos qué sucede con $|J|$ cerca del 0 para un campo de Jacobi en una variedad arbitraria.

Proposición 2.3.4 La expansión de Taylor de $|J|$ alrededor del 0 para un campo de Jacobi normal con $J(0) = 0$, $|\frac{D}{ds}J(0)| = 1$ a lo largo de una geodésica γ unitaria está dada por

$$|J(s)| = s - \frac{K}{6}s^3 + o(s^3).$$

Donde K es la curvatura seccional del plano generado por $\gamma'(0)$ y $\frac{D}{ds}J(0)$.

Demostración : Primero calculemos la expansión de Taylor de $f(s) = \langle J, J \rangle(s)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 2\langle \frac{D}{ds}J, J \rangle(0) = 0, \\ f''(0) &= 2\langle \frac{D^2}{ds^2}J, J \rangle(0) + 2\langle \frac{D}{ds}J, \frac{D}{ds}J \rangle(0) = 2, \\ f'''(0) &= 2\langle \frac{D^3}{ds^3}J, J \rangle(0) + 6\langle \frac{D^2}{ds^2}J, \frac{D}{ds}J \rangle(0) \\ &= 6\langle R(\gamma', J)\gamma', \frac{D}{ds}J \rangle(0) = 0, \\ f''''(0) &= 2\langle \frac{D^4}{ds^4}J, J \rangle(0) + 8\langle \frac{D^3}{ds^3}J, \frac{D}{ds}J \rangle(0) + 6\langle \frac{D^2}{ds^2}J, \frac{D^2}{ds^2}J \rangle(0) \\ &= 8\langle \frac{D^3}{ds^3}J, \frac{D}{ds}J \rangle(0) + 6\langle R(\gamma', J)\gamma', \frac{D^2}{ds^2}J \rangle(0) \\ &= 8\langle \frac{D^3}{ds^3}J, \frac{D}{ds}J \rangle(0). \end{aligned}$$

Sólo falta calcular $\left(\frac{D^3}{ds^3}J\right)(0) = \frac{D}{ds}R(\gamma', J)\gamma'(0)$. Veamos que $\frac{D}{ds}R(\gamma', J)\gamma'(0) = (\gamma', \frac{D}{ds}J)\gamma'(0)$. Para cualquier vector $V \in T_{\gamma(0)}M$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{D}{ds}R(\gamma', J)\gamma', V \right\rangle(0) &= \frac{d}{ds} \langle R(\gamma', J)\gamma', V \rangle(0) - \left\langle R(\gamma', J)\gamma', \frac{D}{ds}V \right\rangle(0) \\
&= \frac{d}{ds}(\gamma', J, \gamma', V)(0) \\
&= \frac{d}{ds}(\gamma', V, \gamma', J)(0) \\
&= \frac{d}{ds} \langle R(\gamma', V)\gamma', J \rangle(0) \\
&= \left\langle \frac{D}{ds}R(\gamma', V)\gamma', J \right\rangle(0) + \left\langle R(\gamma', V)\gamma', \frac{D}{ds}J \right\rangle(0) \\
&= \left(\gamma', V, \gamma', \frac{D}{ds}J \right)(0) \\
&= \left(\gamma', \frac{D}{ds}J, \gamma', V \right)(0).
\end{aligned}$$

Sustituyendo tenemos que:

$$f''''(0) = 8 \left(\gamma', \frac{D}{ds}J, \gamma', \frac{D}{ds}J \right)(0) = -8K.$$

De donde

$$\begin{aligned}
f(s) &= f(0) + sf'(0) + \frac{s^2 f''(0)}{2} + \frac{s^3 f'''(0)}{6} + \frac{s^4 f''''(0)}{24} + o(s^4) \\
&= s^2 - \frac{K}{3}s^4 + o(s^4).
\end{aligned}$$

Así, si la expansión de Taylor de $|J|$ es $a+bs+cs^2+ds^3+o(s^3)$, expandiendo obtenemos:

$$\begin{aligned}
&(a + bs + cs^2 + ds^3 + o(s^3))^2 \\
&= a^2 + 2abs + (b^2 + 2ac)s^2 + 2(ad + bc)s^3 + (c^2 + 2bd)s^4 + ao(s^3) + o(s^4) \\
&= s^2 - \frac{K}{3}s^4 + o(s^4).
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes concluimos que

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ b &= 1, \\ c &= 0, \\ d &= -\frac{K}{6}. \end{aligned}$$

□

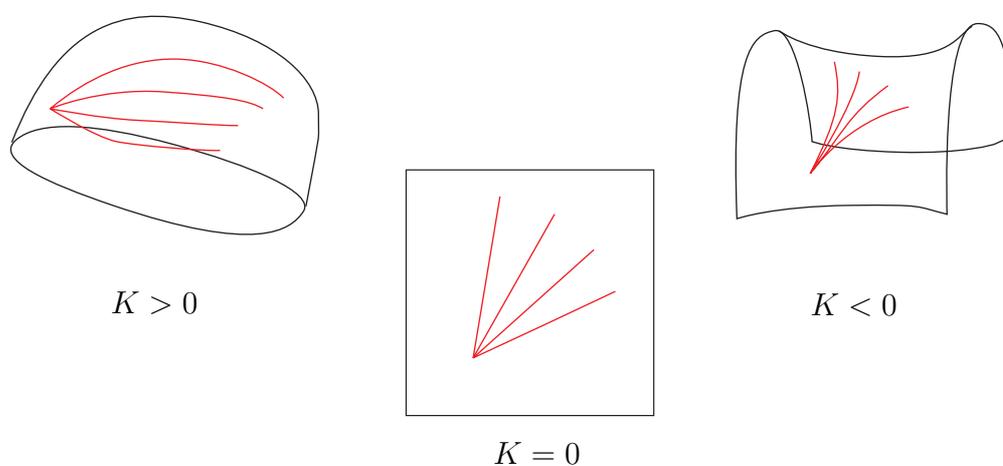


Figura 2.1: La curvatura seccional es una medida cuantitativa de la dispersión de las geodésicas que salen de un punto.

De nuevo el resultado nos dice que la curvatura positiva hace que las geodésicas se junten y la negativa que se separen (Figura 2.1). Pero este resultado sólo nos sirve para estudiar el comportamiento de $|J|$ cerca del 0. Para estudiar $|J|$ a lo largo de un segmento de geodésica más amplio, tenemos el siguiente importante teorema:

Teorema 2.3.5 (Comparación de Rauch) Sean M, \bar{M} dos variedades riemannianas con $\dim(\bar{M}) = m \geq \dim(M) = n$, $\gamma : [0, L] \rightarrow M$, $\bar{\gamma} : [0, L] \rightarrow \bar{M}$ dos geodésicas parametrizadas por longitud de arco tales que $\bar{\gamma}$ no tiene puntos conjugados a $\bar{\gamma}(0)$. Sean J, \bar{J} dos campos de Jacobi a lo largo de γ y $\bar{\gamma}$, respectivamente, tales que $J(0) = \bar{J}(0) = 0$, $\langle \frac{D}{ds} J, \gamma' \rangle(0) = \langle \frac{D}{ds} \bar{J}, \bar{\gamma}' \rangle(0) = 0$, $|\frac{D}{ds} J(0)| = |\frac{D}{ds} \bar{J}(0)|$. Asumamos que para toda $s \in [0, L]$, $\forall x \in T_{\gamma(s)}M$,

$\bar{x} \in T_{\bar{\gamma}(s)}\bar{M}$ tales que $\{x, \gamma'(s)\}, \{\bar{x}, \bar{\gamma}'(s)\}$ son conjuntos linealmente independientes se tiene que

$$\frac{(\gamma', x, x, \gamma')}{|\gamma'|^2|x|^2 - \langle \gamma', x \rangle^2} \leq \frac{(\bar{\gamma}', \bar{x}, \bar{x}, \bar{\gamma}')}{|\bar{\gamma}'|^2|\bar{x}|^2 - \langle \bar{\gamma}', \bar{x} \rangle^2}.$$

Bajo estas condiciones, $|J(s)| \geq |\bar{J}(s)| \forall s \in [0, L]$.

En la parte final de la prueba del teorema, ocuparemos el siguiente lema:

Lema 2.3.6 (Índice) Sean M una variedad Riemanniana, $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ una geodésica parametrizada por longitud de arco sin puntos conjugados a $p = \gamma(0)$, $a \in [0, L]$ y J un campo de Jacobi normal a lo largo de γ con $J(0) = 0$. Sea T otro campo normal continuo y suave por pedazos con $T(0) = J(0)$, $T(a) = J(a)$. Entonces

$$I_a(J, J) \leq I_a(T, T).$$

Y para probar el lema, necesitaremos la siguiente proposición:

Proposición 2.3.7 Sea $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ suave por pedazos con $f(0) = 0$, entonces existe $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ suave por pedazos con $f(s) = sg(s) \forall s \in [0, L]$.

Demostración (de la proposición): Definamos g en $[0, b]$ como $g(s) = \int_0^1 \frac{df}{d(st)}(st)dt$, donde f es suave en $[0, b]$. Por el teorema de Cambio de Variable, $\forall s \in [0, b]$, $sg(s) = \int_0^1 s \frac{df}{d(st)}(st)dt = \int_0^s \frac{df}{d(st)}(st)d(st) = f(s)$. Extendemos g continuamente a $[b, L]$ como $g(s) = \frac{f(s)}{s}$. \square

Demostración (del lema): Consideremos coordenadas normales alrededor de p , con $\phi(p) = 0$, $\partial_1 = \gamma'(0)$. Y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tomamos J_i como el campo de Jacobi con $J_i(0) = 0$, $\frac{D}{ds}J_i(0) = \partial_i$. $\{J_2, J_3, \dots, J_n\}$ forman una base del espacio de campos de Jacobi normales a γ . Así que $J = c^i J_i$ con c^i constante $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $c^1 = 0$. Como γ no tiene puntos conjugados a p , $\{J_2(s), J_3(s), \dots, J_n(s)\}$ es una base del complemento ortogonal de $\gamma'(s)$, $\forall s \in (0, L]$. Así que $T(s) = t^i(s)J_i(s)$ para algunas funciones suaves por pedazos $t_i : (0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Extenderemos t_i a $[0, L]$. Primero, cada $J_i = j_i^k \partial_k$ con $j_i^k(0) = 0$, $\forall i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por la proposición anterior, $j_i^k(s) = sh_i^k(s)$ para funciones suaves por pedazos $h_i^k : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{aligned}
\partial_i(0) &= \frac{D}{ds} J_i(0) \\
&= \frac{dsh_i^k}{ds} \partial_k(0) + sh_i^k \frac{D}{ds} \partial_k(0) \\
&= \left(\frac{ds}{ds} h_i^k + s \frac{dh_i^k}{ds} \right) \partial_k(0) \\
&= h_i^k(0) \partial_k(0).
\end{aligned}$$

De donde $h_i^k(0) = \delta_{ik}$ y así $\{h_1^k(s)\partial_k(s), h_2^k(s)\partial_k(s), \dots, h_n^k(s)\partial_k(s)\}$ forma una base de $T_{\gamma(s)}M \forall s \in [0, L]$. Por lo que $T(s) = g^i(s)(h_i^k(s)\partial_k(s))$ para funciones suaves por pedazos $g^i : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ con $g^i(0) = 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. De nuevo por el lema anterior, $g^i(s) = s\lambda^i(s)$ para funciones suaves por pedazos $\lambda^i : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. De donde

$$\begin{aligned}
T(s) &= s\lambda^i(s)h_i^k(s)\partial_k(s) \\
&= \lambda^i(s)(sh_i^k(s))\partial_k(s) \\
&= \lambda^i(s)(j_i^k(s)\partial_k(s)) \\
&= \lambda^i(s)J_i(s).
\end{aligned}$$

Ahora notemos que el integrando lo podemos expresar de una manera más cómoda:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{D}{ds} T, \frac{D}{ds} T \right\rangle - (T, \gamma', \gamma', T) \\
&= \left\langle \frac{D}{ds} T, \frac{D}{ds} T \right\rangle + \left\langle R(\gamma', T)\gamma', T \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{D}{ds}(\lambda^i J_i), \frac{D}{ds}(\lambda^k J_k) \right\rangle + \left\langle R(\gamma', \lambda^i J_i)\gamma', \lambda^k J_k \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \frac{d}{ds} \lambda^k J_k \right\rangle + 2 \left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \lambda^i \frac{D}{ds} J_i, \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle + \left\langle \lambda^i R(\gamma', J_i)\gamma', \lambda^k J_k \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \frac{d}{ds} \lambda^k J_k \right\rangle + 2 \left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \lambda^i \frac{D}{ds} J_i, \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle + \left\langle \lambda^i \frac{D^2}{ds^2} J_i, \lambda^k J_k \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \frac{d}{ds} \lambda^k J_k \right\rangle + \frac{d}{ds} \left\langle \lambda^i J_i, \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle - \left\langle \lambda^i J_i, \frac{d}{ds} \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle.
\end{aligned}$$

Veamos que $\left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle - \left\langle \lambda^i J_i, \frac{d}{ds} \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle = 0$, pues

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle - \left\langle \lambda^i J_i, \frac{d}{ds} \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle \\
&= \left(\frac{d}{ds} \lambda^i \right) \lambda^k \left\langle J_i, \frac{D}{ds} J_k \right\rangle - \lambda^i \frac{d}{ds} \lambda^k \left\langle J_i, \frac{D}{ds} J_k \right\rangle \\
&= \left(\frac{d}{ds} \lambda^i \right) \lambda^k \left(\left\langle J_i, \frac{D}{ds} J_k \right\rangle - \left\langle \frac{D}{ds} J_i, J_k \right\rangle \right).
\end{aligned}$$

Así que basta probar que $\left\langle J_i, \frac{D}{ds} J_k \right\rangle - \left\langle \frac{D}{ds} J_i, J_k \right\rangle = 0$. Lo cual es cierto, pues si definimos $d(s) = (\left\langle J_i, \frac{D}{ds} J_k \right\rangle - \left\langle \frac{D}{ds} J_i, J_k \right\rangle)(s)$ tenemos que $d(0) = 0$ y derivando:

$$\begin{aligned}
d'(s) &= \left(\left\langle \frac{D}{ds} J_i, \frac{D}{ds} J_k \right\rangle + \left\langle J_i, \frac{D^2}{ds^2} J_k \right\rangle - \left\langle \frac{D^2}{ds^2} J_i, J_k \right\rangle - \left\langle \frac{D}{ds} J_i, \frac{D}{ds} J_k \right\rangle \right) (s) \\
&= \left\langle J_i, R(\gamma', J_k) \gamma' \right\rangle - \left\langle R(\gamma', J_i) \gamma', J_k \right\rangle (s) \\
&= (\gamma', J_k, \gamma', J_i) - (\gamma', J_i, \gamma', J_k) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Calculando las integrales:

$$\begin{aligned}
I_a(T, T) &= \int_0^a \left(\left\langle \frac{D}{ds} T, \frac{D}{ds} T \right\rangle - (T, \gamma', \gamma', T) \right) ds \\
&= \int_0^a \left(\frac{d}{ds} \left\langle \lambda^i J_i, \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle + \left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \frac{d}{ds} \lambda^k J_k \right\rangle \right) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \lambda^i J_i, \lambda^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle(a) + \int_0^a \left(\left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \frac{d}{ds} \lambda^k J_k \right\rangle \right) ds \\
&= \left\langle c^i J_i, c^k \frac{D}{ds} J_k \right\rangle + \int_0^a \left(\left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \frac{d}{ds} \lambda^k J_k \right\rangle \right) ds \\
&= I_a(J, J) + \int_0^a \left(\left\langle \frac{d}{ds} \lambda^i J_i, \frac{d}{ds} \lambda^k J_k \right\rangle \right) ds.
\end{aligned}$$

De donde se obtiene la desigualdad y el hecho de que la igualdad se da si y sólo si $J(s) = T(s) \forall s \in [0, a]$. \square

Demostración (del teorema): Si $|\frac{D}{ds} J(0)| = 0$, entonces los campos J y \bar{J} son triviales y el teorema se cumple trivialmente. En caso contrario, ya que $\bar{\gamma}$ no contiene puntos conjugados a $\bar{\gamma}(0)$, \bar{J} no se anula y podemos definir $u(s) = |J(s)|^2$, $v(s) = |\bar{J}(s)|^2$, $f(s) = \frac{u(s)}{v(s)}$. Entonces por la regla de L'Hôpital y usando los cálculos de la proposición 2.3.4 tenemos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u'}{v'} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u''}{v''} = \frac{|\left(\frac{D}{ds} J\right)(0)|^2}{|\left(\frac{D}{ds} \bar{J}\right)(0)|^2} = 1.$$

Por lo tanto bastará probar que $f'(s) \geq 0, \forall s \in [0, L]$. Es decir, $\frac{vu' - uv'}{v^2} \geq 0$, o equivalentemente $vu' - uv' \geq 0$ ó $\frac{u'}{u} \geq \frac{v'}{v}$ cuando $u \neq 0$. Tomemos $a \in [0, L]$.

Si $u(a) = 0$, se tiene que $u'(a) = 2\langle \frac{D}{ds} J, J \rangle(a) = 0$ y se cumple que $vu' - uv' = 0$. En caso contrario, definimos $T(s) = \frac{J(s)}{\sqrt{u(s)}}$ y $\bar{T}(s) = \frac{\bar{J}(s)}{\sqrt{v(s)}}$. Con esto,

$$\frac{D}{ds} T(a) = \frac{\frac{D}{ds} J(a)}{\sqrt{\langle J(a), J(a) \rangle}}.$$

Y así:

$$\begin{aligned}
\frac{v'(a)}{v(a)} &= \frac{2\left\langle \frac{D}{ds}J(a), J(a) \right\rangle}{\langle J(a), J(a) \rangle} \\
&= 2\left\langle \frac{D}{ds}T, T \right\rangle \\
&= \langle T, T \rangle'(a) \\
&= \int_0^a \langle T, T \rangle'' ds \\
&= 2 \int_0^a \left(\left\langle \frac{D}{ds}T, \frac{D}{ds}T \right\rangle - (\gamma', T, T, \gamma') \right) ds \\
&= 2I_a(T, T).
\end{aligned}$$

Así que basta probar que $I_a(T, T) \geq I_a(\bar{T}, \bar{T})$.

Para eso, tomemos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ transportes paralelos de bases ortonormales con $e_1(a) = \gamma'(a)$, $f_1(a) = \bar{\gamma}'(a)$, $e_2(a) = T(a)$, $f_2(a) = \bar{T}(a)$.

Definimos una aplicación ψ de los campos normales $V(s) = v^i(s)e_i(s)$ a lo largo de γ a los campos normales a lo largo de $\bar{\gamma}$ como:

$$\psi(V)(s) = v^i(s)f_i(s).$$

Si $V = v^i e_i$, $W = w^k e_k$, tenemos que

$$\langle \psi(V), \psi(W) \rangle = \langle v^i f_i, w^k f_k \rangle = v^i w^i = \langle V, W \rangle.$$

$$\frac{D}{ds}\psi(V) = \frac{D}{ds}v^i f_i = \frac{d}{ds}v^i f_i = \psi\left(\frac{D}{ds}V\right).$$

Por lo que $\langle \psi(V), \psi(W) \rangle = \langle V, W \rangle$ y $\frac{D}{ds}\psi(V) = \psi\left(\frac{D}{ds}V\right)$. Así que

$$I_a(\psi(T), \psi(T)) = \int_0^a \left(\left\langle \frac{D}{ds}\psi(T), \frac{D}{ds}\psi(T) \right\rangle - (\bar{\gamma}', \psi(T), \psi(T), \bar{\gamma}') \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a \left(\left\langle \psi \left(\frac{D}{ds} T \right), \psi \left(\frac{D}{ds} T \right) \right\rangle - K(\bar{\gamma}', \psi(T)) (|\psi(T)|^2) \right) ds \\
&\leq \int_0^a \left(\left\langle \frac{D}{ds} T, \frac{D}{ds} T \right\rangle - K(\gamma', T) (|T|^2) \right) ds \\
&= \int_0^a \left(\left\langle \frac{D}{ds} T, \frac{D}{ds} T \right\rangle - (\gamma', T, T, \gamma') \right) ds \\
&= I_a(T, T).
\end{aligned}$$

Como \bar{T} es un campo de Jacobi, por el lema del índice se tiene que

$$I_a(\bar{T}, \bar{T}) \leq I_a(\psi(T), \psi(T)) \leq I_a(T, T).$$

□

2.4. Campos de Jacobi y Métrica

En esta sección estudiaremos la relación que hay entre la curvatura y la separación entre dos geodésicas que salen del mismo punto. Para ello, antes discutiremos algunas propiedades de los espacios métricos y las variedades Riemannianas de curvatura seccional constante.

Sea $\mathbb{M}^n(k)$ la n -variedad Riemanniana simplemente conexa de curvatura seccional constante k . Denotaremos por D_k al diámetro de $\mathbb{M}^n(k)$. Es decir $D_k = \infty$ si $k \leq 0$ y $D_k = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ si $k > 0$.

Definición 2.4.1 Sea $k \in \mathbb{R}$. Un *triángulo en $\mathbb{M}^2(k)$* es una colección de tres puntos distintos en $\mathbb{M}^2(k)$ con tres curvas minimizantes que los unen por parejas.

Definición 2.4.2 Sea (X, d) un espacio métrico. $x, y, z \in X$ distintos y $k \in \mathbb{R}$. Definimos el *perímetro* de x, y, z como la cantidad $P(xyz) = d(x, y) + d(x, z) + d(y, z)$. Decimos que un triángulo \bar{xyz} en $\mathbb{M}^2(k)$ es un *k -triángulo de comparación de xyz* si $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y)$, $d(\bar{x}, \bar{z}) = d(x, z)$, $d(\bar{y}, \bar{z}) = d(y, z)$. A un 0 -triángulo de comparación le llamaremos simplemente triángulo de comparación.

Dos preguntas que surgen naturalmente de la definición son: ¿Para cualesquiera tres puntos distintos x, y, z en un espacio métrico y cualquier $k \in \mathbb{R}$, existe un k -triángulo de comparación de xyz ? Y si existe, ¿Es único?

La respuesta a ambas preguntas es no, pero afortunadamente tenemos la siguiente proposición que responde más profundamente las preguntas anteriores.

Proposición 2.4.3 Sean x, y, z puntos distintos de un espacio métrico (X, d) tales que $P(xyz) < \infty$. Entonces para $k \in \mathbb{R}$

- Si $k \leq 0$, existe un k -triángulo de comparación de xyz y es único salvo isometrías de $\mathbb{M}^2(k)$.
- Si $k > 0$, existe un k -triángulo de comparación de xyz si y sólo si $P(xyz) \leq 2D_k$. Además en este caso es único salvo isometrías de $\mathbb{M}^2(k)$ si y sólo si $\max\{d(x, y), d(x, z), d(y, z)\} < D_k$.

Demostración : Si $k \leq 0$, tomamos \bar{x} arbitrario, \bar{y} un punto a distancia $d(x, y)$ de \bar{x} y todos los puntos $u \in \mathbb{M}^2(k)$ tales que $d(u, \bar{x}) = d(x, z)$. Si $\theta \in [0, 2\pi]$ es el ángulo entre las geodésicas $\bar{x}\bar{y}$ y $\bar{x}u$, por las leyes de cosenos (lemas D.2 y D.5), $d(u, \bar{y})$ es una función continua y estrictamente creciente de θ con imagen

$$[|d(x, y) - d(x, z)|, d(x, y) + d(x, z)].$$

Dado que por la desigualdad del triángulo, $d(y, z)$ está en ese intervalo, existe un único θ_0 tal que para todo triángulo con dos lados de longitudes $d(x, y)$ y $d(x, z)$ y ángulo θ_0 entre tales lados, se tiene el tercer lado tiene longitud $d(y, z)$. De aquí obtenemos el primer inciso.

Si $k > 0$, consideremos tres casos:

Caso 1. Cuando $\max\{d(x, y), d(x, z), d(y, z)\} > D_k$. En este caso no existe un k -triángulo de comparación de xyz , pues no hay puntos $a, b \in \mathbb{M}^2(k)$ tales que $d(a, b) > D_k$.

Caso 2. Cuando $\max\{d(x, y), d(x, z), d(y, z)\} = D_k$ (s.p.g. supongamos que $d(x, y) = D_k$). En este caso, para que exista un k -triángulo de comparación $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, de xyz , se necesita que \bar{x} y \bar{y} sean puntos antipodales. De esta forma, para cualquier punto $u \in \mathbb{M}^2(k)$ se tiene que $d(\bar{x}, u) + d(u, \bar{y}) = D_k$, por lo que para que exista un k -triángulo de comparación de xyz se necesita que $d(x, z) + d(z, y) = D_k$, de donde $P(xyz) = 2D_k$. Esta condición es también suficiente, pues tomando $\bar{z} \in \mathbb{M}^2(k)$ tal que $d(\bar{x}, \bar{z}) = d(x, z)$, tenemos automáticamente que $d(\bar{z}, \bar{y}) = d(z, y)$. Pero este triángulo no es único, pues

la elección de la geodésica \overline{xy} puede variar el ángulo entre las geodésicas \overline{xz} y \overline{xy} todo a lo largo del intervalo $[0, \pi]$.

Caso 3. Cuando $\max\{d(x, y), d(x, z), d(y, z)\} < D_k$. Consideremos todos los triángulos \overline{xyz} en $\mathbb{M}^2(k)$ con $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(x, y)$, $d(\overline{x}, \overline{z}) = d(x, z)$. Como $\max\{d(x, y), d(x, z), d(y, z)\} < D_k$ podemos usar la ley de cosenos para $k > 0$ (lema D.3) y tenemos que $d(\overline{x}, \overline{z})$ es una función continua y estrictamente creciente del ángulo θ entre las geodésicas \overline{xy} y \overline{xz} , con imagen

$$[|d(x, y) - d(x, z)|, \min\{d(x, y) + d(x, z), 2D_k - (d(x, y) + d(x, z))\}].$$

$d(y, z)$ está en el intervalo si y sólo si $P(xyz) \leq 2D_k$, de donde se sigue el segundo punto. \square

Observación 2.4.4 Ambos incisos de la proposición 2.4.3 se pueden unificar como: Existe un k -triángulo de comparación de xyz si y sólo si $P(xyz) \leq 2D_k$ y en este caso es único salvo isometrías de $\mathbb{M}^2(k)$ si y sólo si

$$\max\{d(x, y), d(x, z), d(y, z)\} < D_k.$$

Vale la pena recalcar que si $k \leq 0$, entonces el k -triángulo de comparación siempre existe y es único salvo isometrías de $\mathbb{M}^2(k)$, mientras que si $k > 0$, necesitamos condiciones adicionales para que esto suceda.

Definición 2.4.5 Para cada $k \in \mathbb{R}$, decimos que tres puntos distintos x, y, z de un espacio métrico (X, d) son k -comparables si $P(xyz) \leq 2D_k$ y $\max\{d(x, y), d(x, z), d(y, z)\} < D_k$.

Definición 2.4.6 Sean x, y, z tres puntos distintos de un espacio métrico (X, d) y $k \in \mathbb{R}$. Si x, y, z son k -comparables, definimos el k -ángulo de comparación, $\overline{\angle}_k xyz$, como el ángulo entre las geodésicas \overline{yx} y \overline{yz} de un k -triángulo de comparación \overline{xyz} , de xyz .

Observación 2.4.7 De las leyes de cosenos, se sigue inmediatamente que si fijamos $d(x, y), d(y, z)$, entonces $\overline{\angle}_k xyz$ es una función continua estrictamente creciente de $d(x, z)$. A esta propiedad se le conoce como la *segunda monotonía del ángulo*.

Observación 2.4.8 Las leyes de cosenos también son válidas en $\mathbb{M}^n(k)$ y las demostraciones son análogas. Esto también se tiene ya que todo triángulo en $\mathbb{M}^n(k)$ está contenido en una subvariedad totalmente geodésica (con segunda forma fundamental nula) isométrica a $\mathbb{M}^2(k)$. Con esto, podemos extender las definiciones 2.4.1, 2.4.2 y la proposición 2.4.3 a triángulos de comparación en $\mathbb{M}^n(k)$. Esto es, reemplazando en cada una $\mathbb{M}^2(k)$ por $\mathbb{M}^n(k)$.

Volvamos al estudio de las variedades Riemannianas. Para $k \in \mathbb{R}$ fijo, consideremos la siguiente aplicación: Sea $U \subset M$ una vecindad uniformemente normal (vecindad normal de todos sus puntos) y convexa (entre cualesquiera dos puntos de U , existe una curva minimizante que los une contenida en U) de un punto p en una variedad Riemanniana. Tomamos la imagen inversa de U bajo la aplicación exponencial en p . Escogemos una isometría lineal $\phi : T_p M \rightarrow T_q \mathbb{M}^n(k)$ donde q es un punto en $\mathbb{M}^n(k)$. Luego, tomamos la aplicación exponencial en q y tenemos la composición

$$\psi_k = \exp_q \circ \phi \circ \exp_p^{-1} : U \rightarrow \mathbb{M}^n(k)$$

(Aquí suponemos que U es suficientemente pequeña para que $\psi_k(U)$ sea una vecindad uniformemente normal y convexa de q y por lo tanto la aplicación será un difeomorfismo con su imagen).

Habiendo tomado coordenadas normales alrededor de p y de q , pudimos haber escogido ϕ tal que preserve las coordenadas. De esta forma, ψ_k también lo hace. De aquí en adelante asumiremos que escogimos ϕ de esta forma.

Veremos que si la curvatura seccional de M está acotada inferiormente por k , la aplicación anterior no disminuirá las distancias (y análogamente si está acotada superiormente por k , no incrementará las distancias).

Tomemos un punto $x \in U$ con $x \neq p$ y $\gamma : [0, L] \rightarrow U$ una curva minimizante unitaria con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(L) = x$. Sea $W \in T_x M$ con $\langle W, \gamma'(L) \rangle = 0$ y coordenadas $W = w^i \partial_i$. Por las observaciones 2.2.3, el campo de Jacobi J a lo largo de γ con $J(0) = 0$ y $\frac{D}{ds} J(0) = \frac{w^i}{L} \partial_i$, cumple con $J(L) = L \frac{w^i}{L} \partial_i = W$.

Como ψ_k manda γ en una curva minimizante $\bar{\gamma}$ y preserva las coordenadas, $\psi_{k*}(W)$ tiene coordenadas $w^i \partial_i$ en $T_{\psi_k(x)} \mathbb{M}^n(k)$ y $\psi_{k*}(W) = \bar{J}(L)$, donde \bar{J} es el campo de Jacobi a lo largo de $\bar{\gamma}$ con $\bar{J}(0) = 0$ y $\frac{D}{ds} \bar{J}(0) = \frac{w^i}{L} \partial_i$.

Como

$$\left| \frac{D}{ds} \bar{J}(0) \right| = \left| \frac{D}{ds} J(0) \right| = \frac{1}{L} \sqrt{\sum_{i=1}^n (w^i)^2},$$

si la curvatura seccional de M está acotada inferiormente por k , por el teorema de comparación de Rauch, tendríamos que $|W| \leq |\psi_{k*}(W)|$. Como $|\gamma'(L)| = |\psi_{k*}(\gamma'(L))|$, ψ_{k*} no disminuye la norma (análogamente si la curvatura seccional está acotada superiormente por k , ψ_{k*} no aumenta la norma).

Supongamos que la curvatura seccional de M está acotada inferiormente por k . Sean $y, z \in U$ y $\sigma : [0, 1] \rightarrow \psi(U)$ una curva minimizante de $\psi_k(y)$ a $\psi_k(z)$. Usando lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} d(\psi_k(y), \psi_k(z)) &= \ell(\sigma) \\ &= \int_0^1 |\sigma'(s)| ds \\ &\geq \int_0^1 |\psi_{k*}^{-1}(\sigma'(s))| ds \\ &= \ell(\psi_k \circ \sigma) \\ &\geq d(y, z). \end{aligned}$$

(de manera análoga, si la curvatura seccional está acotada superiormente por k , $d(y, z) \geq d(\psi_k(y), \psi_k(z))$, $\forall y, z \in U$).

Definición 2.4.9 (Provisional) Sea $k \in \mathbb{R}$. Decimos que una variedad Riemanniana M es un *espacio RA de curvatura $\geq k$* (o $\leq k$) si todo punto de M tiene una vecindad convexa U con la siguiente propiedad:

Para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in U$ distintos y cualesquiera geodésicas minimizantes γ_1 de x_3 a x_1 y γ_2 de x_3 a x_2 en U , se tiene que el ángulo entre γ_1 y γ_2 es mayor o igual (menor o igual, respectivamente) que el ángulo $\overline{\angle}_k x_1 x_3 x_2$. A una vecindad con esta propiedad le llamaremos k -normal.

Justificando la definición anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.4.10 Sea M una variedad Riemanniana. La curvatura seccional de M está acotada inferiormente (o superiormente) por k si y sólo si M es un espacio RA de curvatura $\geq k$ ($\leq k$, respectivamente).

Demostración : Probaremos la afirmación para curvatura $\geq k$. La otra es análoga.

Supongamos que la curvatura seccional de M está acotada inferiormente por k . Sea U como al inicio de esta sección y $x_1, x_2, x_3 \in U$ distintos. Construyamos $\psi_k : U \rightarrow \mathbb{M}^n(k)$ como antes, pero ahora con $p = x_3$.

Tal aplicación preservará las distancias a x_3 y el ángulo entre las geodésicas x_3x_1 y x_3x_2 , pero $d(x_1, x_2) \leq d(\psi_k(x_1), \psi_k(x_2))$. Por la discusión después de la observación 2.4.8, tenemos que el ángulo entre las geodésicas x_3x_1 y x_3x_2 es mayor o igual al ángulo $\overline{\angle}_k x_1x_3x_2$. Por lo tanto M es un espacio RA de curvatura $\geq k$.

Ahora supongamos que existe $x \in M$ y σ subespacio de dimensión dos de T_xM tal que $K(\sigma) < k$. Sea $\{V, W\}$ una base ortonormal de σ . Tomemos coordenadas normales alrededor de x con $V = (1, 0, \dots, 0)$ y $W = (0, 1, \dots, 0)$.

La variación por geodésicas $\alpha : [0, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ dada por $\alpha(s, t) = \exp(s(V + tW)) = \exp(s, st, \dots, 0)$ está definida para δ y ε suficientemente pequeños. Por cómo construimos ψ_k , la imagen de $\psi_k \circ \alpha$ es una superficie totalmente geodésica en $\mathbb{M}^n(k)$.

Ahora, tenemos que $T(s) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s, 0)$ es un campo de Jacobi con $T(0) = 0$ y $\left| \frac{D}{ds} T(0) \right| = |W| = 1$. Ahora usamos el hecho de que $K(V, W) < k$, la proposición 2.3.4 y el teorema 2.3.2 para obtener que siempre que δ y ε sean suficientemente pequeños, ψ_k disminuye la distancia entre los puntos de la forma $(\frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0)$ y $(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}, \dots, 0)$.

Como ψ_k preserva la distancia a x y los ángulos entre geodésicas que salen de x , entonces para

$x_1 = (\frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0)$, $x_2 = (0, 0, \dots, 0)$, $x_3 = (\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}, \dots, 0)$, tenemos que el ángulo entre las geodésicas x_3x_1 y x_3x_2 es menor al ángulo $\overline{\angle}_k x_1x_3x_2$. Por lo que M no es un espacio RA de curvatura $\geq k$. \square

Observación 2.4.11 Construyendo ψ_k como después de la observación 2.4.8, y considerando $M = \mathbb{M}^n(k_1)$, con $k_1 \geq k$, tenemos que ψ_k preserva la distancia a p y los ángulos entre geodésicas que salen de p . Pero en general no disminuye las distancias. Por lo tanto, para toda terna de puntos x, y, z , k_1 -comparables, tenemos que $\overline{\angle}_{k_1} xyz \geq \overline{\angle}_k xyz$. A esta propiedad se le llama *primera monotonía del ángulo*.

De lo anterior se sigue que todo espacio RA de curvatura $\geq k$ es un espacio RA de curvatura $\geq \hat{k}$, $\forall \hat{k} \leq k$ (respectivamente, todo espacio RA de curvatura $\leq k$ es un espacio RA de curvatura $\leq \hat{k}$, $\forall \hat{k} \geq k$).

Capítulo 3

Espacios de Alexandrov

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades básicas de los espacios de Alexandrov de curvatura acotada inferiormente por algún $k \in \mathbb{R}$, como la semicontinuidad de los ángulos, que tiene su contraparte en los espacios de Alexandrov de curvatura $\leq k$. También presentaremos los teoremas de Toponogov y de diámetro acotado, que para curvatura $\leq k$ no existen análogos. Antes de comenzar con este análisis, estudiaremos una noción mucho más simple, que es la de ángulo entre curvas.

3.1. Ángulos

En la geometría Riemanniana el tensor métrico nos da inmediatamente el concepto de ángulo entre vectores tangentes, el cual nos permite tener el concepto de ángulo entre curvas. Este concepto es sumamente útil y nos gustaría tenerlo en espacios métricos en general.

Para ello formularemos una definición de ángulo entre dos curvas que coincida con la definición usual en geometría Riemanniana y que se pueda generalizar a espacios métricos arbitrarios.

Definición 3.1.1 Sean (X, d) un espacio métrico y $k \in \mathbb{R}$. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, L] \rightarrow X$ dos curvas con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ tales que $\exists \varepsilon > 0$ para el cual $p \notin \gamma_1((0, \varepsilon]) \cup \gamma_2((0, \varepsilon])$ y los triángulos $\gamma_1(s)p\gamma_2(t)$ son k -comparables si $s, t \in [0, \varepsilon]$. Definimos la k -función de ángulo de γ_1 y γ_2 $\theta_k : (0, \varepsilon] \times (0, \varepsilon] \rightarrow [0, \pi]$ como

$$\theta_k(s, t) = \overline{\angle}_k \gamma_1(s)p\gamma_2(t).$$

Si $\lim_{s,t \rightarrow 0} \theta_0(s, t)$ existe, lo llamaremos el *ángulo* entre γ_1 y γ_2 y lo denotaremos por $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$.

También, dados $x, y, z \in X$ y curvas minimizantes γ_1 y γ_2 , de y a x y de y a z respectivamente, denotamos el ángulo $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$ como $\angle xyz$.

Proposición 3.1.2 Sean X un espacio métrico, $k \in \mathbb{R}$, y $\gamma_1, \gamma_2 : [0, L] \rightarrow X$ dos curvas con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ tales que $\exists \alpha > 0$ para el cual $p \notin \gamma_1((0, \alpha]) \cup \gamma_2((0, \alpha])$ y los triángulos $\gamma_1(s)p\gamma_2(t)$ son k -comparables si $s, t \in [0, \alpha]$. Si $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$ existe, entonces $\lim_{s,t \rightarrow 0} \overline{\Delta}_k \gamma_1(s)\gamma_1(0)\gamma_2(t)$ existe, y es igual a $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$.

Demostración : El caso $k = 0$ es trivial. Probaremos la proposición para el caso $k > 0$. El caso $k < 0$ se prueba igual que el caso $k > 0$, pero usando \cosh y \sinh en lugar de \cos y \sin .

Definimos las siguientes funciones de s y t .

$$\begin{aligned} a(s, t) &= \sqrt{k}d(\gamma_1(0), \gamma_1(s)) & b(s, t) &= \sqrt{k}d(\gamma_2(0), \gamma_2(t)) \\ c(s, t) &= \sqrt{k}d(\gamma_1(s), \gamma_2(t)) & \theta(s, t) &= \overline{\Delta}_k \gamma_1(s)\gamma_1(0)\gamma_2(t). \end{aligned}$$

Entonces, por el lema D.3 se tiene que

$$\cos \theta = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Como $a, b \rightarrow 0$ cuando $s, t \rightarrow 0$, se tiene que $\lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{\sin a \sin b}{ab} = 1$. Y por lo tanto, basta probar que

$$\lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{\cos c - \cos a \cos b}{ab} = \cos \angle(\gamma_1, \gamma_2).$$

Para ello, usaremos la serie de Taylor de la función \cos .

$$\lim_{s,t \rightarrow 0} \cos \overline{\Delta}_k \gamma_1(s)\gamma_1(0)\gamma_2(t) = \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{\cos c - \cos a \cos b}{ab}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{c^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i a^{2i}}{(2i)!}\right) \left(1 - \frac{b^2}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j b^{2j}}{(2j)!}\right)}{ab} \\
&= \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{c^2}{2} - 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i a^{2i}}{(2i)!} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j b^{2j}}{(2j)!}}{ab} \\
&\quad - \frac{\frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i a^{2i}}{(2i)!} + \frac{a^2}{2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j b^{2j}}{(2j)!} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i a^{2i}}{(2i)!} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j b^{2j}}{(2j)!}}{ab} \\
&= \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i a^{2i}}{(2i)!} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j b^{2j}}{(2j)!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!}}{ab} \\
&= \cos \angle(\gamma_1, \gamma_2) - \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i a^{2i}}{(2i)!} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j b^{2j}}{(2j)!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!}}{ab}.
\end{aligned}$$

Así que sólo falta probar que

$$\lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i a^{2i}}{(2i)!} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j b^{2j}}{(2j)!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k c^{2k}}{(2k)!}}{ab} = 0.$$

Para ello, consideremos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la función analítica dada por $g(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$. De esta forma, $g(0) = g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$ y $g''''(0) = 1$. Así que, por la continuidad de g'''' , existe $\eta > 0$ tal que

$0.6 \leq g''''(t) \leq 2$, para todo $t \in [0, \eta]$. Luego

$0.6t \leq g'''(t) \leq 2t$, para todo $t \in [0, \eta]$.

$0.3t^2 \leq g''(t) \leq t^2$, para todo $t \in [0, \eta]$.

$0.1t^3 \leq g'(t) \leq \frac{t^3}{3}$, para todo $t \in [0, \eta]$.

Sea $\varepsilon > 0$. Veamos que si $a, b \leq \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4}\}$, entonces

$$\left| \frac{g(a) + g(b) - g(c)}{ab} \right| \leq \varepsilon.$$

Consideremos dos casos:

Caso 1. Cuando $g(a), g(b) \leq \frac{\varepsilon}{4}ab$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $b \leq a$. Usando la monotonía de g en $[0, \eta]$ y el teorema del valor medio, tenemos, para algún $\xi \in [a, a+b]$, que

$$\begin{aligned}
|g(c)| &\leq |g(a+b)| \\
&\leq g(a) + bg'(\xi) \\
&\leq g(a) + b\frac{\xi^3}{3} \\
&\leq g(a) + \frac{b(2a)^3}{3} \\
&= g(a) + \frac{8ba^3}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left| \frac{g(a) + g(b) - g(c)}{ab} \right| &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{g(a) + \frac{8ba^3}{3}}{ab} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{8}{3}a^2 \\
&\leq \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Caso 2. Cuando $\min\{g(a), g(b)\} > \frac{\varepsilon}{4}ab$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $g(a) \geq \frac{\varepsilon}{4}ab$. Como $g(a) \leq \frac{a^4}{12}$, tenemos que $b \leq \frac{a^3}{3\varepsilon}$. De donde $b^3 \leq \frac{a^9}{27\varepsilon^3}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{g(b)}{ab} &\leq \frac{b^4}{12ab} \\
&\leq \frac{a^9}{(12a)(27\varepsilon^3)} \\
&\leq \frac{a^8}{324\varepsilon^3} \\
&< \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

También, debido a que $b \leq \frac{a^3}{3\varepsilon}$, tenemos que $b \leq a$. Y así, para algún $\xi \in [a-b, a+b]$, se tiene que

$$\begin{aligned} |g(c) - g(a)| &\leq bg'(\xi) \\ &\leq \frac{8ba^3}{3}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(a) + g(b) - g(c)}{ab} \right| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{|g(c) - g(a)|}{ab} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{8ba^3}{3ab} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{8a^2}{3} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

De la proposición anterior se tiene que la elección de $k = 0$ al momento de definir el ángulo entre dos curvas fue arbitraria. Es decir, si el ángulo $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$ existe, entonces el límite $\lim_{s,t \rightarrow 0} \theta_k(s, t)$ existe para toda $k \in \mathbb{R}$ y es igual al ángulo. De la prueba de la proposición también es posible concluir que si $\lim_{s,t \rightarrow 0} \theta_\lambda(s, t)$ existe para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{s,t \rightarrow 0} \theta_k(s, t)$ existe para toda $k \in \mathbb{R}$ y $\lim_{s,t \rightarrow 0} \theta_\lambda(s, t) = \angle(\gamma_1, \gamma_2)$.

Cuando el límite $\lim_{s,t \rightarrow 0} \theta_0(s, t)$ no existe, es usual considerar el límite superior. Se le llama *ángulo superior* y se le denota por $\angle_U(\gamma_1, \gamma_2)$. De la proposición 3.1.2, de nuevo tenemos que $\angle_U(\gamma_1, \gamma_2)$ no depende de la elección de $k = 0$.

La siguiente proposición garantiza que para ángulos superiores (y por lo tanto, para ángulos) tenemos la desigualdad del triángulo.

Proposición 3.1.3 Sea (X, d) un espacio métrico y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, L] \rightarrow X$ tres curvas con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_3(0) = p$ y tales que $\exists \varepsilon > 0$ para el cual $p \notin \gamma_1((0, \varepsilon]) \cup \gamma_2((0, \varepsilon]) \cup \gamma_3((0, \varepsilon])$. Entonces

$$\angle_U(\gamma_1, \gamma_2) + \angle_U(\gamma_2, \gamma_3) \geq \angle_U(\gamma_1, \gamma_3).$$

Demostración : Para evitar confusión denotaremos como θ_0^{ij} a la 0-función de ángulo de γ_i y γ_j con $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Si $\angle_U(\gamma_1, \gamma_2) + \angle_U(\gamma_2, \gamma_3) \geq \pi$ no hay nada que probar, por lo que asumiremos lo contrario.

Para $r, s, t \in (0, \varepsilon]$, construimos triángulos de comparación \overline{apb} y \overline{bpc} de $\gamma_1(r)p\gamma_2(s)$ y $\gamma_2(s)p\gamma_3(t)$, respectivamente, tales que \bar{a} y \bar{c} estén en lados opuestos de la recta \overline{pb} .

Dejando s fijo, por continuidad de γ_1 y γ_3 sabemos que para r y t suficientemente pequeños se tiene que \bar{p} y \bar{b} están de lados opuestos de la recta \overline{ac} . Por continuidad de γ_2 , dejando estos r y t fijos, para s suficientemente pequeña, \bar{b} está del mismo lado que \bar{p} con respecto a la recta \overline{ac} .

Ahora, como los puntos $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ se mueven continuamente con respecto a r, s, t tenemos que para cualesquiera r y t suficientemente pequeños, existe s tal que \bar{b} está sobre el segmento \overline{ac} . En este caso, $\theta_0^{12}(r, s) = \angle_{apb}$ y $\theta_0^{23}(s, t) = \angle_{bpc}$.

Construyendo $a' \in \mathbb{R}^2$ tal que $a'\overline{pc}$ sea un triángulo de comparación de $\gamma_1(r)p\gamma_3(t)$, tenemos por la desigualdad del triángulo en X , que $d(a', \bar{c}) \leq d(\bar{a}, \bar{b}) + d(\bar{b}, \bar{c}) = d(\bar{a}, \bar{c})$. Y por la ley de cosenos para $k = 0$, podemos concluir que

$$\theta_0^{13}(r, t) = \angle_{a'pc} \leq \angle_{apc} = \theta_0^{12}(r, s) + \theta_0^{23}(s, t).$$

De donde $\angle_U(\gamma_1, \gamma_2) + \angle_U(\gamma_2, \gamma_3) \geq \angle_U(\gamma_1, \gamma_3)$. □

Corolario 3.1.4 Sea (X, d) un espacio métrico y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, L] \rightarrow X$ tres curvas con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_3(0) = p$ tales que $\exists \varepsilon > 0$ con $p \notin \gamma_1((0, \varepsilon]) \cup \gamma_2((0, \varepsilon]) \cup \gamma_3((0, \varepsilon])$. Asumiendo que $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$, $\angle(\gamma_2, \gamma_3)$ y $\angle(\gamma_1, \gamma_3)$ existen, tenemos que

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) + \angle(\gamma_2, \gamma_3) \geq \angle(\gamma_1, \gamma_3).$$

A partir de ahora en esta sección, enfocaremos nuestro estudio únicamente a los espacios de longitud.

Los ángulos no siempre se comportan amablemente. Por ejemplo, si tomamos la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(0) = (0, 0)$ y $\gamma(s) = (s, s \sin(\frac{1}{s}))$ para $s \in (0, 1]$, es fácil ver que $\angle(\gamma, \gamma)$ no existe. Aún así los ángulos y los ángulos de comparación serán fundamentales al momento de definir los espacios de Alexandrov.

Definición 3.1.5 Fijando un punto p en un espacio de longitud X , podemos considerar el conjunto de curvas $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow X$ con $\gamma^{-1}(p) = 0$ y $\angle(\gamma_1, \gamma_1) = 0$ módulo la relación de equivalencia $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \angle(\gamma_1, \gamma_2) = 0$. Dotándolo con la métrica dada por el ángulo tenemos un espacio métrico. A la completación de ese espacio le llamaremos el *espacio de direcciones en p* .

El espacio de direcciones asume el papel que toma el espacio tangente en topología diferencial, aunque no resulta ser tan útil como éste. También es una herramienta básica en el estudio de los espacios de Alexandrov de curvatura $\geq k$.

Los ángulos cumplen ciertas propiedades intuitivas con respecto a las geodésicas. Tales propiedades son simples al igual que sus pruebas, y además resultan ser muy útiles.

Proposición 3.1.6 Sea (X, d) un espacio de longitud y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, L] \rightarrow X$ dos geodésicas unitarias no constantes con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Supongamos que la curva $\gamma : [0, 2L] \rightarrow X$ dada por

$$\gamma(r) = \begin{cases} \gamma_1(L - r) & \text{si } r \leq L \\ \gamma_2(r - L) & \text{si } r \geq L \end{cases}$$

es también una geodésica. Entonces tenemos que

- $\angle(\gamma_1, \gamma_1)$ existe y es igual a 0.
- $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$ existe y es igual a π .

Demostración : Como para ε suficientemente pequeño sabemos que $\gamma|_{[-\varepsilon, \varepsilon]}$ es una curva minimizante unitaria, tenemos las fórmulas $d(p, \gamma_i(s)) = s$, $d(\gamma_1(s), \gamma_2(t)) = s + t$, $d(\gamma_1(s), \gamma_1(t)) = |s - t|$ para $i \in \{1, 2\}$, $s, t \in [0, \varepsilon]$. Calculando los límite tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\angle}_0 \gamma_1(s) p \gamma_1(t) &= \cos^{-1} \left(\frac{(d(p, \gamma_1(s)))^2 + (d(p, \gamma_1(t)))^2 - (d(\gamma_1(s), \gamma_1(t)))^2}{2d(p, \gamma_1(s))d(p, \gamma_2(t))} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{(s)^2 + (t)^2 - (s - t)^2}{2st} \right) \\ &= \cos^{-1}(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\angle}_0 \gamma_1(s) p \gamma_2(t) &= \cos^{-1} \left(\frac{(d(p, \gamma_1(s)))^2 + (d(p, \gamma_2(t)))^2 - (d(\gamma_1(s), \gamma_2(t)))^2}{2d(p, \gamma_1(s))d(p, \gamma_2(t))} \right) \\
&= \cos^{-1} \left(\frac{(s)^2 + (t)^2 - (s+t)^2}{2st} \right) \\
&= \cos^{-1}(-1) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Tomando el límite $s, t \rightarrow 0$ tenemos ambos incisos. \square

Corolario 3.1.7 Sean γ_1, γ_2 como en la proposición anterior, $q \in X$ con $q \neq p$ y $\gamma_3 : [0, d(p, q)] \rightarrow X$ una curva minimizante unitaria de p a q . Entonces tenemos que

$$\angle_U(\gamma_1, \gamma_3) + \angle_U(\gamma_2, \gamma_3) \geq \pi.$$

Demostración : Se sigue inmediatamente de las proposiciones 3.1.3 y 3.1.6. \square

Observación 3.1.8 La desigualdad en el otro sentido, en general, no se tiene. Por ejemplo, en el espacio de longitud $([0, \infty) \times \{1, 2, 3\} / (\{0\} \times \{1, 2, 3\}), d)$ con

$$d((r, a), (s, b)) = \begin{cases} |r - s| & \text{si } a = b \\ r + s & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

si tomamos las curvas $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow [0, \infty) \times \{1, 2, 3\}$ dadas por $\gamma_i(t) = (t, i)$ para $i = 1, 2, 3$, obtenemos por la proposición 3.1.5 que

$$\angle(\gamma_i, \gamma_j) = \pi \delta_{ij}.$$

Por lo tanto $\angle_U(\gamma_1, \gamma_3) + \angle_U(\gamma_2, \gamma_3) = 2\pi > \pi$.

Definición 3.1.9 Diremos que un espacio de longitud (X, d) es *angularmente regular* si para cualesquiera dos curvas minimizantes unitarias no constantes que comienzan en el mismo punto existe el ángulo entre ellas y para cualesquiera $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ curvas en X como en el corolario 3.1.7 se tiene que

$$\angle(\gamma_1, \gamma_3) + \angle(\gamma_2, \gamma_3) = \pi.$$

3.2. Espacios de Alexandrov

En lo que resta de este capítulo asumiremos que todos los espacios métricos a considerar son localmente geodésicos, es decir, que todo punto tiene una vecindad que es un espacio geodésico. A una vecindad de este tipo le llamaremos una *vecindad convexa*.

Definición 3.2.1 Sea (X, d) un espacio de longitud angularmente regular y $k \in \mathbb{R}$. Decimos que X es un *espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$* (o $\leq k$) si todo punto tiene una vecindad convexa U con la siguiente propiedad:

Para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in U$ distintos y cualesquiera geodésicas minimizantes γ_1 de x_3 a x_1 y γ_2 de x_3 a x_2 en U , se tiene que el ángulo entre γ_1 y γ_2 es mayor o igual (menor o igual, respectivamente) que el ángulo $\overline{\angle}_k x_1 x_3 x_2$.

A una vecindad con esta propiedad la llamaremos *k -normal*.

Como las variedades Riemannianas son angularmente regulares, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.2.2 Una variedad Riemanniana es un espacio RA de curvatura $\geq k$ (o $\leq k$) si y sólo si es un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ ($\leq k$ respectivamente).

Del teorema 2.4.10 y la proposición anterior tenemos inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3 Sea M una variedad Riemanniana. La curvatura seccional de M está acotada inferiormente (o superiormente) por k si y sólo si M es un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ ($\leq k$, respectivamente).

Antes de continuar desarrollando las propiedades de los espacios de Alexandrov, es conveniente dar ciertas caracterizaciones o definiciones alternativas.

Definición 3.2.4 Sea (X, d) un espacio de longitud y $k \in \mathbb{R}$. Decimos que X es un *espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$* si todo punto tiene una vecindad convexa U en la cual es válida la siguiente propiedad:

Para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in U$, k -comparables, γ geodésica minimizante de x_2 a x_3 en U y x_4 un punto en la imagen de γ , si $\overline{x_1 x_2 x_3}$ es un k -triángulo de comparación de $x_1 x_2 x_3$ y x'_4 está en el segmento $[\overline{x_2}, \overline{x_3}]$ y es tal que $d(x'_4, \overline{x_2}) = d(x_4, x_2)$ y $d(x'_4, \overline{x_3}) = d(x_4, x_3)$, entonces

$$d(x'_4, \overline{x_1}) \leq d(x_4, x_1).$$

Definición 3.2.5 Sea (X, d) un espacio de longitud y $k \in \mathbb{R}$. Decimos que X es un *espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$* si todo punto tiene una vecindad convexa U en la cual es válida la siguiente propiedad:

Para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in U$ k -comparables, γ geodésica minimizante de x_2 a x_3 en U y x_4 un punto en la imagen de γ tal que tanto x_1, x_2, x_4 como x_1, x_3, x_4 son k -comparables, si $\overline{x_1x_2x_3}$ es un k -triángulo de comparación de $x_1x_2x_3$ y x'_4 está en el segmento $[\overline{x_2}, \overline{x_3}]$ y es tal que $d(x'_4, \overline{x_2}) = d(x_4, x_2)$ y $d(x'_4, \overline{x_3}) = d(x_4, x_3)$, entonces

$$\overline{\angle_k x_1x_2x_4} \geq \angle \overline{x_1x_2x'_4}.$$

La última condición se puede reestablecer como sigue:

Para γ_1 y γ_2 como en la definición 3.1.1, se tiene que $\exists \delta > 0$ tal que $\theta_k(s, t)$ es una función monótona no creciente de s y t en $(0, \delta] \times (0, \delta]$.

Las definiciones anteriores tienen sus análogas para curvatura $\leq k$, invirtiendo la desigualdad en el último enunciado de cada una. A la definición 3.2.1 le llamaremos la definición del ángulo, a las definiciones 3.2.4 y 3.2.5 les llamaremos las definiciones de la distancia y de la monotonía respectivamente.

Claro, hay que probar que estas definiciones son equivalentes. La prueba está basada en el siguiente lema.

Lema 3.2.6 (Alexandrov) Sean $k \in \mathbb{R}$ y $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in M^2(k)$ distintos tales que d_1 está en el segmento $[b_1, c_1]$ y $d(a_1, b_1) = d(a_2, b_2)$, $d(a_1, c_1) = d(a_2, c_2)$, $d(b_1, d_1) = d(b_2, d_2)$, $d(c_1, d_1) = d(c_2, d_2)$. Entonces

- $d(a_1, d_1) < d(a_2, d_2)$ si y sólo si $\angle c_2d_2b_2 < \pi$.
- $d(a_1, d_1) > d(a_2, d_2)$ si y sólo si $\angle c_2d_2b_2 > \pi$.

Demostración : Demostraremos la primera afirmación. La prueba de la segunda es análoga.

Construyamos un punto c_3 sobre la geodésica $[b_2, d_2]$ tal que $d(d_2, c_3) = d(d_1, c_1)$ y $d(b_2, c_3) = d(b_1, c_1)$ (Figura 3.1).

Por la ley de cosenos correspondiente a k , tenemos que $d(a_1, d_1) < d(a_2, d_2)$ si y sólo si $\angle d_1b_1a_1 < \angle d_2b_2a_2$. Esto último, de nuevo por ley de cosenos, es equivalente a que $d(a_2, c_3) > d(a_1, c_1) = d(a_2, c_2)$. Finalmente por ley de cosenos, esto es equivalente a que $\angle a_2d_2c_2 < \angle a_2d_2c_3 = \pi - \angle a_2d_2b_2$.

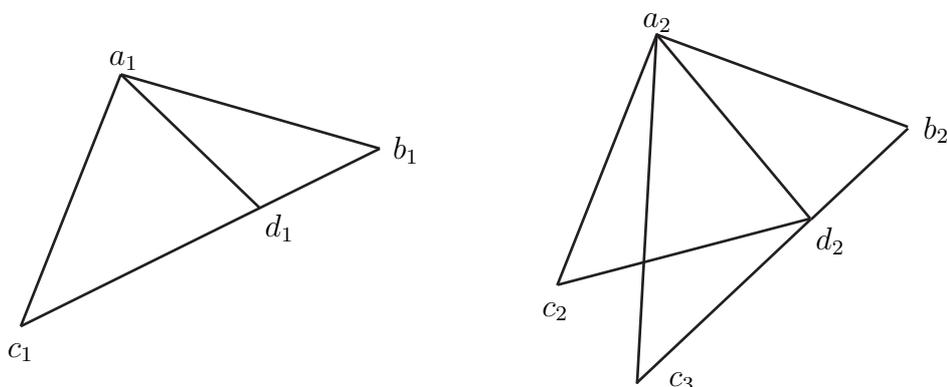


Figura 3.1: Lema de Alexandrov.

Por lo tanto, $d(a_1, d_1) < d(a_2, d_2)$ si y sólo si $\angle c_2 d_2 b_2 = \angle a_2 d_2 c_2 + \angle a_2 d_2 b_2 < \pi$. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar la equivalencia entre las 3 definiciones.

Teorema 3.2.7 Sea (X, d) un espacio de longitud. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- (Definición del ángulo) X es angularmente regular y todo punto tiene una vecindad convexa U con la siguiente propiedad:

Para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in U$ distintos y cualesquiera geodésicas minimizantes γ_1 de x_3 a x_1 y γ_2 de x_3 a x_2 en U , se tiene que el ángulo entre γ_1 y γ_2 es mayor o igual que el ángulo $\angle_k x_1 x_3 x_2$.

- (Definición de la distancia) Todo punto tiene una vecindad convexa U en la cual es válida la siguiente proposición:

Sean $x_1, x_2, x_3 \in U$ k -comparables, γ una geodésica minimizante de x_2 a x_3 en U y x_4 un punto en la imagen de γ . Construimos $\overline{x_1 x_2 x_3}$ un k -triángulo de comparación de $x_1 x_2 x_3$ y x'_4 en el segmento $[\overline{x_2}, \overline{x_3}]$ tal que $d(x'_4, \overline{x_2}) = d(x_4, x_2)$ y $d(x'_4, \overline{x_3}) = d(x_4, x_3)$. Entonces

$$d(x'_4, \overline{x_1}) \leq d(x_4, x_1).$$

- (Definición de la monotonía) Todo punto tiene una vecindad convexa U en la cual es válida la siguiente proposición:

Sean $x_1, x_2, x_3 \in U$ k -comparables, γ una geodésica minimizante de x_2 a x_3 en U y x_4 un punto en la imagen de γ tal que tanto x_1, x_2, x_4 como x_1, x_3, x_4 son k -comparables. Construimos $\overline{x_1x_2x_3}$ un k -triángulo de comparación de $x_1x_2x_3$ y x'_4 en el segmento $[\overline{x_2}, \overline{x_3}]$ tal que $d(x'_4, \overline{x_2}) = d(x_4, x_2)$ y $d(x'_4, \overline{x_3}) = d(x_4, x_3)$. Entonces

$$\overline{\angle}_k x_1x_2x_4 \geq \angle \overline{x_1x_2x'_4}.$$

Demostración : (ángulo \Rightarrow distancia) Sean x_1, x_2, x_3, x_4 y γ como en la definición 3.2.4 tales que tanto ellos como una curva minimizante σ de x_4 a x_1 están contenidos en una vecindad normal U . Sean $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4 \in M^2(k)$ tales que $\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_4$ es un k -triángulo de comparación de $x_1x_2x_4$, $\hat{x}_1\hat{x}_3\hat{x}_4$ de $x_1x_3x_4$ y los puntos x_2 y x_3 están de lados distintos de la geodésica $[\hat{x}_1, \hat{x}_4]$. Por la definición del ángulo tenemos que

$$\begin{aligned} \angle \hat{x}_2\hat{x}_4\hat{x}_3 &= \angle \hat{x}_2\hat{x}_4\hat{x}_1 + \angle \hat{x}_1\hat{x}_4\hat{x}_3 \\ &= \overline{\angle}_k x_2x_4x_1 + \overline{\angle}_k x_1x_4x_3 \\ &\leq \angle x_2x_4x_1 + \angle x_1x_4x_3 \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Por el lema de Alexandrov, tenemos que

$$d(x'_4, \overline{x_1}) \leq d(\hat{x}_4, \hat{x}_1) = d(x_4, x_1).$$

(distancia \Rightarrow monotonía) Sean x_1, x_2, x_3, x_4 y γ como en la definición 3.2.5, dentro de una vecindad U que cumple la propiedad de la definición 3.2.4. Sean $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_4 \in M^2(k)$ tales que $\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_4$ es un k -triángulo de comparación de $x_1x_2x_4$.

Por la ley de cosenos sobre los triángulos $\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_4$ y $\overline{x_1x_2x'_4}$ tenemos que

$$\overline{\angle}_k x_1x_2x_4 \geq \angle \overline{x_1x_2x'_4}.$$

(monotonía \Rightarrow ángulo) Sean $x_1, x_2, x_3, \gamma_1, \gamma_2$ como en la definición 3.2.1, contenidos en una vecindad U que cumple la propiedad de la definición 3.2.5. Entonces la función θ_k es no creciente con respecto a las dos variables y por lo tanto el límite $\lim_{s,t \rightarrow 0} \theta_k(s, t)$ existe y es mayor o igual a $\theta_k(d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)) = \overline{\angle}_k x_1x_3x_2$.

Para probar que X es angularmente regular, tomemos p un punto y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, L] \rightarrow X$ dos geodésicas unitarias no constantes con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ tales que la curva $\gamma : [0, 2L] \rightarrow X$ dada por

$$\gamma(r) = \begin{cases} \gamma_1(L-r) & \text{si } r \leq L \\ \gamma_2(r-L) & \text{si } r \geq L \end{cases}$$

es también una geodésica. Sea $q \in X$ con $q \neq p$ y $\gamma_3 : [0, d(p, q)] \rightarrow X$ una curva minimizante unitaria de p a q . Por la condición de monotonía, para r, s, t fijos se tiene que

$$\overline{\angle}_k \gamma_3(t) \gamma_2(s) p \geq \overline{\angle}_k \gamma_3(t) \gamma_2(s) \gamma_1(r).$$

Y por el lema de Alexandrov se tiene que

$$\overline{\angle}_k \gamma_1(r) p \gamma_3(t) + \overline{\angle}_k \gamma_3(t) p \gamma_2(s) \leq \pi.$$

Tomando el límite cuando $r, s, t \rightarrow 0$ tenemos la desigualdad buscada. \square

Cuando una vecindad U cumple con una, y por lo tanto todas las definiciones, se dice que U es una vecindad k -normal.

Definición 3.2.8 Sea (X, d) un espacio de longitud. Llamamos *triángulo* a un conjunto de tres puntos distintos en X y a una colección de tres curvas minimizantes que los unen por parejas. Cuando no se preste a confusión, denotaremos al triángulo sólomente con sus vértices y a una curva minimizante entre x y y como $[x, y]$.

En un espacio angularmente regular decimos que un triángulo xyz es *AOK* en y si $\angle xyz \geq \overline{\angle}_k xyz$. Si xyz es AOK en x, y y z , decimos que xyz es *AOK*.

La primera propiedad notable de los espacios de Alexandrov de curvatura $\geq k$ es que si tenemos una sucesión de parejas de curvas (α_n, β_n) , con ángulos θ_n , que convergen a (α, β) , entonces el ángulo $\angle(\alpha, \beta)$ no será mayor al límite inferior de θ_n .

Lema 3.2.9 Sean (X, d) un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$, $\alpha, \beta : [0, L] \rightarrow X$, y $\{\alpha_n : [0, L] \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\beta_n : [0, L] \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones

de curvas minimizantes tales que convergen puntualmente a α y β , respectivamente. Si $\alpha_n(0) = \beta_n(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\angle(\alpha_n, \beta_n) = \theta_n$ entonces se tiene que

$$\angle(\alpha, \beta) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \theta_n.$$

Demostración : Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(s) = \alpha(s)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(t) = \beta(t)$ para todo $s, t \in [0, L]$, se tiene que $\alpha(0) = \beta(0)$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Sigma}_k \alpha_n(s) \alpha(0) \beta_n(t) = \bar{\Sigma}_k \alpha(s) \alpha(0) \beta(t)$.

Ahora, para s, t suficientemente pequeños y n suficientemente grande tenemos que $\alpha_n(s) \alpha(0) \beta_n(t)$ es AOK en $\alpha(0)$. Así, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \theta_n \geq$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Sigma}_k \alpha_n(s) \alpha(0) \beta_n(t) = \bar{\Sigma}_k \alpha(s) \alpha(0) \beta(t)$. Por lo tanto, cerca del punto $(0, 0)$, la k -función de ángulo de α y β está acotada superiormente por $\liminf_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ y se tiene el resultado. \square

El lema anterior también es válido en espacios de Alexandrov de curvatura $\leq k$ si se reemplaza la última desigualdad por

$$\angle(\alpha, \beta) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \theta_n.$$

El lema anterior no es verdadero en espacios de longitud en general. Por ejemplo si tomamos el espacio $[0, \infty) \times \{1, 2, 3\} / (\{0\} \times \{1, 2, 3\})$ con la métrica descrita en la observación 3.1.8 y tomamos los segmentos de la forma $[(\frac{1}{n}, 1), (1, 2)]$, $[(\frac{1}{n}, 1), (1, 3)]$ para $n \in \mathbb{N}$. Éstos convergen a los segmentos $[(0, 1), (1, 2)]$ y $[(0, 1), (1, 3)]$. De esta forma, $\theta_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pero el ángulo de las curvas límite es π .

Existen propiedades básicas de los espacios de Alexandrov de curvatura $\geq k$ que no tienen análogo para espacios de Alexandrov de curvatura $\leq k$. Esto pasa debido a que la condición de curvatura $\geq k$ es mucho más restrictiva que la condición de curvatura $\leq k$. Algunas de esas propiedades son las siguientes.

Proposición 3.2.10 Sean (X, d) un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ y $\gamma_1, \gamma_2 : [0, L] \rightarrow X$ dos curvas minimizantes unitarias con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Entonces tenemos lo siguiente:

- Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma_1|_{[0, \varepsilon]}$ y $\gamma_2|_{[0, \varepsilon]}$ coinciden, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.
- Si $\angle(\gamma_1, \gamma_2) = 0$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.

Demostración : Por continuidad, el conjunto S de puntos $r \in (0, L]$ tales que γ_1 y γ_2 coinciden en $[0, r]$, es cerrado. Veamos que es abierto y por conexidad, será igual a $(0, L]$.

Sea $r \in S$. Tomamos $s < r$ tal que $B_s(\gamma_1(r))$ es una vecindad k -normal de $\gamma_1(r)$. Aplicando la condición del ángulo al triángulo $\gamma_1(r - \frac{s}{2})\gamma_1(r+x)\gamma_2(r+y)$ con $x, y \in [0, s]$ tenemos que $\bar{\angle}_k \gamma_1(r+x)\gamma_1(r - \frac{s}{2})\gamma_2(r+y) = 0$. Por lo tanto $d(\gamma_1(r+x), \gamma_2(r+y)) = |x - y|$.

Por continuidad, si tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \nearrow x$ entonces

$$\gamma_2(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1(x_n) = \gamma_1(x).$$

De donde se sigue el primer inciso.

Para probar el segundo inciso, tomamos $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto $\gamma_1([0, \varepsilon]) \cup \gamma_2([0, \varepsilon])$ está contenido en una vecindad normal de p . En este caso, para $r, s \in (0, \varepsilon]$ tenemos análogamente al inciso anterior que $\bar{\angle}_k \gamma_1(r)p\gamma_2(s) = 0$ y por lo tanto $d(\gamma_1(r), \gamma_2(s)) = |r - s|$.

De la misma manera que en el inciso anterior, $\gamma_1(r) = \gamma_2(r) \forall r \in [0, \varepsilon]$. Usando el primer inciso tenemos el resultado. \square

Proposición 3.2.11 Sean (X, d) un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ y x_1, x_2, x_3, x_4 puntos en una vecindad k -normal $U \subset X$ de x_4 . Entonces

$$\bar{\angle}_k x_1 x_4 x_2 + \bar{\angle}_k x_2 x_4 x_3 + \bar{\angle}_k x_3 x_4 x_1 \leq 2\pi.$$

Demostración : Tomemos una sucesión de puntos $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $[x_1, x_4]$ tales que $y_n \rightarrow x_4$. Como el k -ángulo de comparación es una función continua entre las tercias de puntos k -comparables, basta demostrar la proposición sustituyendo x_4 por y_n . Usando la condición del ángulo tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\angle}_k x_1 y_n x_2 + \bar{\angle}_k x_2 y_n x_3 + \bar{\angle}_k x_3 y_n x_1 &\leq \angle x_1 y_n x_2 + \angle x_2 y_n x_3 + \angle x_3 y_n x_1 \\ &\leq \angle x_1 y_n x_2 + \angle x_2 y_n x_4 \\ &\quad + \angle x_4 y_n x_3 + \angle x_3 y_n x_1 \\ &= \pi + \pi \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

\square

La condición

$$\overline{\angle}_k x_1 x_4 x_2 + \overline{\angle}_k x_2 x_4 x_3 + \overline{\angle}_k x_3 x_4 x_1 \leq 2\pi$$

para cualquier cuarteta de puntos en una vecindad también implica que el espacio es de Alexandrov de curvatura $\geq k$, pues si tomamos x_4 en la curva $[x_2, x_3]$, entonces $\overline{\angle}_k x_2 x_4 x_3 = \pi$ y por el lema de Alexandrov tenemos la condición de la distancia.

Hemos probado que la siguiente definición también es válida. La llamaremos la definición de la cuarteta o del cuádruple.

Definición 3.2.12 Sean (X, d) un espacio de longitud y $k \in \mathbb{R}$. Decimos que X es un *espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$* si todo punto tiene una vecindad convexa U en la cual es válida la siguiente proposición:

Sean $x_1, x_2, x_3, x_4 \in U$ tales que $x_1 x_4 x_2, x_2 x_4 x_3, x_3 x_4 x_1$ son k -comparables. Entonces

$$\overline{\angle}_k x_1 x_4 x_2 + \overline{\angle}_k x_2 x_4 x_3 + \overline{\angle}_k x_3 x_4 x_1 \leq 2\pi.$$

Como consecuencia de esta definición, tomando el límite cuando $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_4$ tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2.13 Sean a, b, c, d puntos en un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$, entonces

$$\angle adb + \angle bdc + \angle cda \leq 2\pi.$$

□

La definición 3.2.12 tiene la ventaja de que eliminando la palabra convexa de ella, se puede generalizar a espacios de longitud sin la necesidad de que existan curvas minimizantes, pero no existe una definición análoga para espacios de Alexandrov de curvatura $\leq k$.

3.3. Medida y Dimensión de Hausdorff

Consideremos un intervalo en \mathbb{R} de longitud l . Aplicándole una homotecia con factor λ obtenemos un intervalo de longitud λl . De igual manera, si tomamos en \mathbb{R}^n una curva de longitud l , al aplicarle una homotecia con

factor λ , obtenemos una curva de longitud λl . No sucede lo mismo cuando tomamos un cuadrado en \mathbb{R}^2 y le aplicamos la misma homotecia. Su área se multiplicará por λ^2 . Análogamente, aplicando una homotecia en \mathbb{R}^n , el volumen del cubo $[0, 1]^n$ se multiplicará por λ^n .

Intuitivamente, esto sucede debido a que cuando le aplicamos una homotecia con factor λ a un objeto de dimensión n , su medida se multiplica por un factor λ^n . Para definir formalmente la dimensión de un espacio métrico (en el sentido de Hausdorff) es necesario el concepto de medida de Hausdorff.

Definición 3.3.1 Sean X un espacio métrico, $d \in [0, \infty)$ y $\{U_a\}_{a \in A}$ una cubierta, no necesariamente abierta, a lo más numerable de X . Definimos el d -peso de $\{U_a\}$ como la suma

$$w_d(\{U_a\}) := \sum_{a \in A} (\text{diam}(U_a))^d.$$

Si $d = 0$, tomaremos 0^0 como 1.

También, para $\varepsilon > 0$, definimos la cantidad $\mu_{d,\varepsilon}(X)$ como

$$\mu_{d,\varepsilon}(X) = \inf\{w_d(\{U_a\}) \mid \text{diam}(U_a) < \varepsilon, \forall a \in A\},$$

donde el ínfimo es sobre todas las cubiertas $\{U_a\}_{a \in A}$ tales que $\text{diam}(U_a) < \varepsilon$ $\forall a \in A$. Si no existe una cubierta a lo más numerable, con $\text{diam}(U_a) < \varepsilon$, $\forall a \in A$, definimos $\mu_{d,\varepsilon}(X)$ como ∞ .

De esta forma definimos la *medida de Hausdorff de dimensión d* de X como

$$\mu_d(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{d,\varepsilon}(X).$$

Frecuentemente, en la definición de $\mu_d(X)$ se considera esta cantidad multiplicada por una constante con el único objetivo de que la medida de Hausdorff de dimensión d del cubo $[0, 1]^d$ sea igual a 1. Pero para fines de dimensión, esto no será necesario.

La definición anterior también sirve para cuando X está contenido en otro espacio métrico y los U_a no están necesariamente contenidos en X . No es difícil probar que esta función es realmente una medida cuando la restringimos a la σ -álgebra de Borel de X .

De la definición 3.3.1 se sigue inmediatamente la siguiente propiedad de monotonía. Si $X \subset Y$, entonces $\mu_d(X) \leq \mu_d(Y)$.

Ciertamente, esta medida cumple la propiedad de la que hablamos al comienzo de la sección. Si (X, g) es un espacio métrico, entonces para $\lambda > 0$, se tiene que $\mu_d((X, \lambda g)) = \lambda^d \mu_d((X, g))$. Esto se sigue de la igualdad análoga de los d -pesos, pues para cada U_a , su diámetro en $(X, \lambda g)$ es λ veces su diámetro en (X, g) .

Cuando tratamos de encontrar la medida de algo, no hablamos del área de una curva, o la longitud de un cubo. Esto se debe a que para cada espacio métrico X , existe un único d_0 para el cual la medida de Hausdorff tiene sentido sólo en esa dimensión.

Teorema 3.3.2 Sea X un espacio métrico. Entonces existe $d_0 \in [0, \infty]$ tal que $\mu_d(X) = \infty$, $\forall d < d_0$ y $\mu_d(X) = 0$, $\forall d > d_0$.

Demostración : Sea $d_0 = \inf\{r \in [0, \infty) \mid \mu_s(X) < \infty, \forall s < r\}$. Si $d_0 = \infty$, no hay nada que probar. Supondremos que $d_0 < \infty$. Por construcción, tenemos que $\mu_d(X) = \infty$, $\forall d < d_0$. Tomemos $d > d_0$, entonces existe $d_1 \in [d_0, d)$ con $\mu_{d_1} = M < \infty$. Para $\varepsilon > 0$ y $\{U_a\}_{a \in A}$ cubierta de X con $\text{diam}(U_a) < \varepsilon$, $\forall a \in A$, $w_{d_1}(\{U_a\}) < M + 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} w_d(\{U_a\}) &= \sum_{a \in A} (\text{diam}(U_a))^d \\ &= \sum_{a \in A} (\text{diam}(U_a))^{d_1 + (d - d_1)} \\ &\leq \varepsilon^{d - d_1} \sum_{a \in A} (\text{diam}(U_a))^{d_1} \\ &= \varepsilon^{d - d_1} w_{d_1}(\{U_a\}) \\ &< \varepsilon^{d - d_1} (M + 1). \end{aligned}$$

Lo que implica que $\mu_{d, \varepsilon}(X) < \varepsilon^{d - d_1} (M + 1)$. Tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ tenemos el resultado.

Definición 3.3.3 Sea X un espacio métrico. Definimos la *dimensión de Hausdorff de X* como el número d_0 del teorema anterior y la denotaremos como $\text{dim}_H(X)$.

De la definición de dimensión de Hausdorff se sigue inmediatamente que si $X \subset Y$ entonces $\text{dim}_H(X) \leq \text{dim}_H(Y)$.

Notemos que la dimensión de un espacio métrico no tiene por qué ser un entero. Por ejemplo, no es difícil comprobar que la dimensión del conjunto de Cantor es $\frac{\log 2}{\log 3}$. Pero un hecho sorprendente de los espacios de Alexandrov de curvatura $\geq k$ es que si su dimensión es finita, entonces ésta es un número entero.

3.4. Distancia Entre Espacios Métricos

En la sección 5.2 observamos que los espacios de Alexandrov de curvatura $\geq k$ son una generalización de las variedades Riemannianas con curvatura seccional $\geq k$, pero esto no nos dice por qué es tan relevante su estudio. El teorema de compacidad de Gromov nos da una posible respuesta.

Consideremos esferas concéntricas de radio $1 + \frac{1}{n}$ en \mathbb{R}^3 , para todo $n \in \mathbb{N}$. Intuitivamente, esta sucesión de esferas converge a la esfera de radio 1. Análogamente la sucesión de esferas de radio $\frac{1}{n}$ converge a un punto cuando n tiende a infinito. Pero surge la pregunta ¿Con respecto a qué topología?

Es fácil (aunque no es trivial) definir distancias entre espacios métricos. Lo primero que queremos es que si dos espacios son isométricos entonces su distancia será 0. Una isometría es una función biyectiva tal que, tanto ella como su inversa, tienen constante de Lipschitz 1. Por lo que podemos definir una distancia entre espacios métricos y decir que dos espacios son cercanos si existe una biyección entre ellos tal que tanto ella como su inversa tengan constante de Lipschitz cerca de 1.

Definición 3.4.1 Sean X y Y dos espacios métricos. Definimos la *distancia de Lipschitz entre X y Y* como el número real

$$d_L(X, Y) = \inf \{ \max \{ |\log(L_f)|, |\log(L_{f^{-1}})| \} \},$$

donde el ínfimo es sobre todas las biyecciones Lipschitz f con inversa Lipschitz entre X y Y . Si no existe tal función f , definimos la distancia entre X y Y como ∞ .

Como el producto de las dilataciones es mayor o igual a la dilatación de la composición y $L_{f \circ f^{-1}} = L_{id} = 1$, tenemos que la distancia de Lipschitz entre dos espacios métricos es no negativa. De la misma manera se cumple la desigualdad del triángulo. A pesar de tener estas propiedades, la distancia de Lipschitz no es una métrica pues la clase de espacios métricos no es un conjunto. Aún así, la clase de espacios métricos compactos (módulo isometrías)

es un conjunto y se puede probar que la distancia de Lipschitz es una métrica cuando la restringimos a tal conjunto.

Considerando las homotecias $f_n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$ tenemos biyecciones entre la esfera de radio 1 y la esfera de radio $1 + \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que $L_{f_n} = 1 + \frac{1}{n}$ y $L_{f_n^{-1}} = \frac{n}{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que la sucesión de esferas converge a \mathbb{S}^2 como habíamos intuitido.

A pesar de que en el primer ejemplo todo sucede como debería, al considerar la sucesión de esferas de radio $\frac{1}{n}$, ésta no converge a un punto, pues para que la distancia de Lipschitz entre dos espacios sea finita, tienen que ser homeomorfos. Y en este ejemplo, lo que esperamos que sea el límite (el punto) no es homeomorfo a la esfera.

La distancia de Lipschitz es realmente útil en ciertas situaciones, pero tenemos la desventaja fundamental de la necesidad de que los espacios a considerar sean homeomorfos. Para evitar este obstáculo consideraremos otra distancia, basada en la distancia clásica de Hausdorff entre subespacios de un espacio métrico más grande.

Definición 3.4.2 Sea Y un subespacio de un espacio métrico X . Definimos la *función distancia a Y* como $d_Y : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_Y(x) = \inf\{d(x, y) \mid y \in Y\}.$$

Definición 3.4.3 Sean X_1 y X_2 subespacios de un espacio métrico X . Definimos la *distancia de Hausdorff entre X y Y* como el número real

$$d_H(X_1, X_2) = \max\{\sup\{d_{X_1}(x) \mid x \in X_2\}, \sup\{d_{X_2}(x) \mid x \in X_1\}\}.$$

De nuevo no es difícil verificar que esta distancia es una semi-métrica sobre el espacio de subespacios de X y una métrica sobre el espacio de subespacios cerrados de X . Geométricamente nos dice que dos subespacios serán cercanos si cada uno está contenido en una vecindad pequeña del otro.

Tomando esta distancia, es fácil verificar que la sucesión de esferas de radio $\frac{1}{n}$ en \mathbb{R}^3 convergen al subespacio de un solo punto.

La distancia de Hausdorff tiene la limitación de que sólo compara subespacios de un espacio métrico dado, pero M. Gromov descubrió una manera simple de eliminar esta restricción.

Definición 3.4.4 Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Definimos la *distancia de Gromov-Hausdorff entre X y Y* como el número real

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{d_H(X', Y')\},$$

donde el ínfimo es sobre todos los espacios métricos X' y Y' , tales que son isométricos a X y Y , respectivamente y están ambos contenidos en un espacio métrico Z .

Veamos que el ínfimo se puede tomar sobre las distancias de Hausdorff entre X y Y en los espacios $(X \sqcup Y, d)$ donde \sqcup denota la unión ajena y d es una métrica en $X \sqcup Y$ tal que $d|_{X \times X} = d_X$ y $d|_{Y \times Y} = d_Y$.

Para ello tomemos (Z, d_Z) un espacio métrico y $f_1 : X \rightarrow Z$, $f_2 : Y \rightarrow Z$ dos inclusiones isométricas. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $d_n : (X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y) \rightarrow \mathbb{R}$ como $d_n|_{X \times X} = d_X$, $d_n|_{Y \times Y} = d_Y$ y $d_n(x, y) = d_n(y, x) = d_Z(f_1(x), f_2(y)) + \frac{1}{n}$ $\forall x \in X, y \in Y$.

Es fácil verificar que d_n es una métrica para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $d_{GH}(X, Y) \leq d_H(f_1(X), f_2(Y)) + \frac{1}{n}$, tenemos la afirmación.

La distancia de Gromov-Hausdorff de nuevo tiene las propiedades de una semi-métrica en el espacio de espacios métricos.

Proposición 3.4.5 La distancia de Gromov-Hausdorff es no negativa, simétrica y cumple la desigualdad del triángulo.

Demostración : La no negatividad y simetría se sigue de tales propiedades de la distancia de Hausdorff. Probaremos la desigualdad del triángulo.

Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) y (Z, d_Z) espacios métricos y sean d_1 y d_2 métricas en $X \sqcup Y$ y $Y \sqcup Z$ tales que $d_1|_{X \times X} = d_X$, $d_2|_{Z \times Z} = d_Z$ y $d_1|_{Y \times Y} = d_2|_{Y \times Y} = d_Y$. Definimos $d_3 : (X \sqcup Z) \times (X \sqcup Z) \rightarrow \mathbb{R}$ como $d_3|_{X \times X} = d_X$, $d_3|_{Z \times Z} = d_Z$ y $d_3(x, z) = d_3(z, x) = \inf\{d_1(x, y) + d_2(y, z) \mid y \in Y\}$ $\forall x \in X, z \in Z$.

No es difícil observar que d_3 es una semi-métrica que cumple que la distancia de Hausdorff entre X y Z es menor o igual a la distancia de Hausdorff entre X y Y con la métrica d_1 más la distancia de Hausdorff entre Y y Z con la métrica d_2 . \square

Con respecto a la distancia de Lipschitz, dos espacios métricos son cercanos si existe una función de uno a otro que casi es una isometría. En ese caso se trata de una función de Lipschitz con constante de Lipschitz cercana a 1 tal que su inversa también tiene constante de Lipschitz cercana a 1. En cuanto a la distancia de Gromov-Hausdorff, la cercanía también se puede observar con respecto a funciones que se aproximan a isometrías, pero en este caso no tienen por qué ser continuas ni biyectivas.

Definición 3.4.6 Sean X y Y espacios métricos. Decimos que $f : X \rightarrow Y$ es una ε -isometría si $f(X)$ es una ε -red en Y y para todos $x_1, x_2 \in X$ se tiene que $|d(x_1, x_2) - d(f(x_1), f(x_2))| \leq \varepsilon$.

Teorema 3.4.7 Sean X y Y espacios métricos y $\varepsilon > 0$. Si $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, entonces existe una 2ε -isometría de X a Y . Y si existe una ε -isometría de X a Y , entonces $d_{GH}(X, Y) \leq 2\varepsilon$.

Demostración : Supongamos que $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, entonces existe una métrica d sobre $X \sqcup Y$ tal que $d_H(X, Y) < \varepsilon$. Definimos $f(x)$, para cada $x \in X$, como un punto de Y a distancia menor que ε . El hecho de que f es una 2ε -isometría se sigue directamente de que $d_H(X, Y) < \varepsilon$.

Ahora supongamos que existe una ε -isometría $f : X \rightarrow Y$. Definimos d en $(X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y)$ como $d|_{X \times X} = d_X$, $d|_{Y \times Y} = d_Y$,

$$d(x, y) = d(y, x) = \inf\{d_X(x, z) + \varepsilon + d_Y(f(z), y) \mid z \in X\}.$$

Para probar que d es una métrica sólo falta verificar la desigualdad del triángulo para x, y, z con $x, z \in X$, $y \in Y$, los demás casos son análogos. Pero para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d_X(x, x_1) + d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, z) \\ &\leq d_X(x, x_1) + d_Y(f(x_1), f(x_2)) + d_X(x_2, z) + \varepsilon \\ &\leq d_X(x, x_1) + d_Y(f(x_1), y) + d_Y(y, f(x_2)) + d_X(x_2, x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

$$d_X(x, x_1) + \varepsilon + d_Y(f(x_1), y) \leq d_X(x, z) + d_X(z, x_1) + \varepsilon + d_Y(f(x_1), y).$$

Ahora, como f es una ε -isometría, tenemos que $d_H(X, Y) \leq 2\varepsilon$. Por lo que $d_{GH}(X, Y) \leq 2\varepsilon$. \square

Con este teorema, podemos probar que el conjunto de espacios métricos compactos (módulo isometrías) es un espacio métrico con la distancia de Gormov-Hausdorff. A este espacio le llamaremos el *espacio de Gromov-Hausdorff*.

Teorema 3.4.8 La distancia de Gromov-Hausdorff define una métrica sobre el conjunto de espacios métricos compactos módulo isometrías.

Demostración : Sólo falta probar el hecho de que si $d_{GH}(X, Y) = 0$, entonces X es isométrico a Y . Si $d_{GH}(X, Y) = 0$, entonces existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X a Y tales que f_n es una $\frac{1}{n}$ -isometría para cada $n \in \mathbb{N}$.

El resto de la demostración es idéntica a la prueba del teorema de Arzelá-Ascoli. Dado un subconjunto denso numerable $D \subset X$, usando el proceso diagonal de Cantor, encontramos una subsucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{g_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para todo $x \in D$. Observemos que

$$\begin{aligned} |d(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_1), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_2)) - d(x_1, x_2)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |d(g_n(x_1), g_n(x_2)) - d(x_1, x_2)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que la función límite $g : D \rightarrow Y$ preserva distancias. Usando el lema A.10 la podemos extender a una función $f : X \rightarrow Y$ que preserva distancias. Análogamente existe una función $h : Y \rightarrow X$ que preserva distancias. Por el teorema B.11, $f \circ h$ es una isometría de Y en sí mismo y así f es suprayectiva. Por lo tanto f es una isometría. \square

Una vez en el espacio de Gromov-Hausdorff, la distancia tiene una interpretación dada por aproximaciones con espacios finitos.

Definición 3.4.9 Sean X, Y elementos del espacio de Gromov-Hausdorff, y $\varepsilon, \delta > 0$. Decimos que X es una (ε, δ) -aproximación de Y si existen $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^N$ ε -redes de X y Y respectivamente tales que $|d(x_i, x_j) - d(y_i, y_j)| < \delta$, para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Si X es una $(\varepsilon, \varepsilon)$ -aproximación de Y , le llamaremos simplemente ε -aproximación de Y .

Proposición 3.4.10 Sean X un espacio métrico, $\varepsilon > 0$ y S una ε -red de X , entonces $d_{GH}(S, X) \leq \varepsilon$.

Demostración : Como $d_H(X, S) \leq \varepsilon$ se tiene el resultado. \square

Teorema 3.4.11 Sean X y Y elementos del espacio de Gromov-Hausdorff. Si X es una (ε, δ) -aproximación de Y , entonces $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon + 2\delta$. Si $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, entonces X es una 5ε -aproximación de Y .

Demostración : Sean $\{x_i\}_{i=1}^N$ y $\{y_j\}_{j=1}^N$ ε -redes de X y Y respectivamente tales que $|d(x_i, x_j) - d(y_i, y_j)| < \delta$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$. La aplicación $g : \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \rightarrow \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ dada por $g(x_i) = y_i$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ es una δ -isometría entre $\{x_i\}_{i=1}^N$ y $\{y_j\}_{j=1}^N$. Por las proposiciones 3.4.5, 3.4.10 y el teorema 3.4.7 tenemos que $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon + 2\delta$.

Si $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, por el teorema 3.4.7 existe una 2ε -isometría $f : X \rightarrow Y$. Tomando una ε -red finita $\{x_i\}_{i=1}^N$ en X y definiendo $\{y_i\}_{i=1}^N$ como $y_i = f(x_i)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, tenemos que $|d(x_i, x_j) - d(y_i, y_j)| < 2\varepsilon < 5\varepsilon$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$. Así que basta probar que $\{y_i\}_{i=1}^N$ es una 5ε -red de Y .

Sea $y \in Y$. Como f es una 2ε -isometría, existe $x \in X$ con $d(y, f(x)) \leq 2\varepsilon$, y como $\{x_i\}_{i=1}^N$ es una ε -red existe x_i con $d(x, x_i) \leq \varepsilon$. De esta forma

$$\begin{aligned} d(y, y_i) &\leq d(y, f(x)) + d(f(x), y_i) \\ &< 2\varepsilon + 2\varepsilon + d(x, x_i) \\ &\leq 5\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Con esta interpretación de la distancia de Gromov-Hausdorff se puede probar un importante teorema.

Teorema 3.4.12 En el espacio de Gromov-Hausdorff, si una sucesión de espacios de longitud $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un espacio X , entonces X es de longitud. Si cada X_n es un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$, entonces X también lo es.

Demostración : Para probar la primera afirmación, como X es completo basta probar que para cada $x, y \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un ε -punto medio de x y y . Para esto, tomamos una N suficientemente grande para que X_N sea una $\frac{\varepsilon}{6}$ -aproximación de X . De esta forma existen $\{x_i\}_{i=1}^k$ y $\{x'_i\}_{i=1}^k$ $\frac{\varepsilon}{6}$ -redes de X y X_N respectivamente tales que $|d(x_i, x_j) - d(x'_i, x'_j)| < \frac{\varepsilon}{6}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Ahora tomamos x_i y x_j tales que $d(x, x_i), d(y, x_j) \leq \frac{\varepsilon}{6}$. Como X_N es de longitud, existe un punto z' tal que es un $\frac{\varepsilon}{6}$ -punto medio de x'_i y x'_j . Ahora usando que $\{x'_i\}_{i=1}^k$ es una $\frac{\varepsilon}{6}$ -red, existe x'_m tal que $d(z', x'_m) \leq \frac{\varepsilon}{6}$. Veamos que x_m es el punto buscado.

$$\begin{aligned}
d(x, x_m) &\leq d(x_i, x_m) + \frac{\varepsilon}{6} \\
&\leq d(x'_i, x'_m) + \frac{2\varepsilon}{6} \\
&\leq d(x'_i, z') + \frac{3\varepsilon}{6} \\
&\leq \frac{d(x'_i, x'_j)}{2} + \frac{4\varepsilon}{6} \\
&< \frac{d(x_i, x_j)}{2} + \frac{5\varepsilon}{6} \\
&\leq \frac{d(x, y)}{2} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Análogamente $d(y, x_m) < \frac{d(x, y)}{2} + \varepsilon$, de donde x_m es un ε -punto medio de x y y .

Para probar que un límite de espacios de Alexandrov de curvatura $\geq k$ es un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$, usaremos el criterio de los 4 puntos y el teorema 3.5.2 de la siguiente sección. Para cualesquiera 4 puntos (x_1, x_2, x_3, x_4) en X tales que $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_4$, $x_1x_3x_4$ son k -comparables, existen sucesiones $(x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n \in X_n$ tales que $|d(x_i, x_j) - d(x_i^n, x_j^n)| \rightarrow 0$ para cada $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Por la continuidad del k -ángulo de comparación y el teorema 3.5.2 se sigue la afirmación. Sólomente hay que tener cuidado de que los triángulos $x_1^n x_2^n x_3^n$, $x_1^n x_2^n x_4^n$, $x_1^n x_3^n x_4^n$ sean k -comparables, pero para cualquier $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grande, tales triángulos son $(k - \varepsilon)$ -comparables pues $x_1 x_2 x_3$, $x_1 x_2 x_4$, $x_1 x_3 x_4$ son k -comparables. Esto implica que (x_1, x_2, x_3, x_4) cumplen la condición de los 4 puntos para $k - \varepsilon$. Por la continuidad de $\overline{\angle}_k abc$ con respecto a k tenemos el resultado. \square

Imaginemos una sucesión de variedades Riemannianas compactas $(M_n, g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que todas ellas tienen curvatura seccional acotada inferiormente por k . El teorema anterior nos dice que si la sucesión converge en el espacio de Gromov-Hausdorff, entonces lo hará a un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$. Para que esto ocurra es necesario que la sucesión tenga un punto de acumulación y esto no siempre es el caso, pero con ciertas hipótesis adicionales siempre sucederá.

Sea $\mathfrak{A}(n, k, D)$ el subespacio del espacio de Gromov-Hausdorff que consiste de los espacios de Alexandrov de dimensión menor o igual a n , curvatura

$\geq k$ y diámetro menor o igual a D .

Teorema 3.4.13 (Compacidad de Gromov) $\mathfrak{h}(n, k, D)$ es compacto para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$, $D > 0$.

Pruebas de este teorema se encuentran en [3] y [4].

Corolario 3.4.14 $\mathfrak{h}(j, k, D)$ es cerrado en $\mathfrak{h}(n, k, D)$ para cualesquiera $j, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$, $D > 0$, $j \leq n$.

Demostración : Como $\mathfrak{h}(j, k, D)$ es compacto, el resultado se sigue del teorema B.6. \square

3.5. El Teorema de Toponogov

El resultado básico más importante acerca de espacios de Alexandrov de curvatura $\geq k$ es el teorema de Toponogov. En espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ sabemos que los triángulos suficientemente pequeños cumplen ciertas propiedades, por lo que es natural preguntarse qué pasa con los triángulos más grandes. En el caso de espacios completos el teorema de Toponogov nos da la respuesta.

Antes de demostrar el teorema necesitaremos un lema.

Lema 3.5.1 Sea ABC un triángulo en X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ y D en una curva minimizante de B a C .

- Si el triángulo ABD es AOK en B y en D y el triángulo ADC es AOK en D entonces el triángulo ABC es AOK en B .
- Si el triángulo ABD es AOK y el triángulo ABC no es AOK en B entonces $\overline{\angle}_k Cx_1 D + \overline{\angle}_k Cx_1 A > \pi$.

Demostración : Construyamos \overline{ABD} y \overline{ADC} k -triángulos de comparación de ABD y ADC respectivamente tales que \overline{B} y \overline{C} estén en lados opuestos de \overline{AD} . Como X es angularmente regular y los triángulos ABD y ADC son AOK en D tenemos que $\angle BDC \leq \pi$ (Fig 3.2).

Por el lema de Alexandrov tenemos que si $A_1B_1C_1$ es un k -triángulo de comparación de ABC y D_1 un punto en el segmento $[B_1, C_1]$ tal que $d(B_1, D_1) = d(B, D)$ tendríamos que $d(\overline{A}, \overline{D}) \geq d(A_1, D_1)$. Por lo que

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle ABD \\ &\geq \angle \overline{ABD} \\ &\geq \angle A_1B_1D_1 \\ &= \angle A_1B_1C_1. \end{aligned}$$

Lo que prueba el primer punto. La prueba del segundo es idéntica. \square

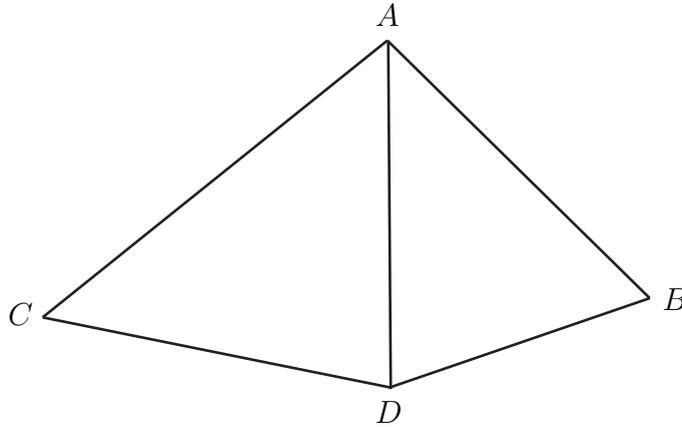


Figura 3.2: Lema 3.5.1.

Teorema 3.5.2 (Toponogov) Sea X un espacio geodésico completo. Si X es un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$, entonces para todas las cuartetitas $\{a, b, c, d\}$ de puntos en X tales que los triángulos abc , abd , acd son k -comparables, se tiene que $\overline{\angle}_k bac + \overline{\angle}_k dab + \overline{\angle}_k dac \leq 2\pi$.

Demostración : Comencemos observando que basta probar la afirmación para todos los triángulos ABC con perímetro $P(ABC) < 2D_k$. Para ello probaremos que todo triángulo k -comparable de perímetro $2D_k$ es AOK suponiendo que el teorema es válido para triángulos de perímetro menor que $2D_k$.

Sea ABC k -comparable con $P(ABC) = 2D_k$. Por continuidad de la función distancia tenemos que existe una sucesión $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en

$[A, C]$ con $P(ABC_n) < 2D_k \forall n$ y $P(ABC_n) \nearrow 2D_k$. Como los triángulos ABC_n son AOK, se tiene que

$$\angle BAC = \angle BAC_n \geq \overline{\angle}_k BAC_n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $P(ABC_n) \nearrow 2D_k$ y $\max\{d(A, B), d(A, C_n), d(B, C_n)\} < D_k$, concluimos que $\overline{\angle}_k BAC_n \rightarrow \pi$, de donde se sigue el teorema.

Demostremos el teorema por contradicción. Supongamos que existe un triángulo con perímetro $L_0 < 2D_k$ que no es AOK.

Sea $\delta \in (0, 0.001]$. Continuemos probando la existencia de un punto Z y un número real positivo $L \leq \frac{L_0 + 2D_k}{2}$ tales que todo triángulo k -comparable con perímetro menor que $(1 - \delta)L$ en la bola $B_{1000L}(Z)$ es AOK y que existe un triángulo k -comparable no AOK de perímetro P , con $(1 - \delta)L < P < L$, en la bola $B_{10L}(Z)$.

De no existir Z y L con tales propiedades podríamos construir una sucesión $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X y una sucesión $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R}^+ , comenzando con L_0 , tales que $d(Z_i, Z_{i+1}) < 1000L_i$, $L_{i+1} < (1 - \delta)L_i$ y que $B_{L_i}(Z_i)$ no sea una vecindad normal de Z_i . Como $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sería de Cauchy y $L_i \rightarrow 0$, tendríamos que Z_i converge a un punto Z el cual no tiene vecindades normales (ya que toda vecindad de Z contiene a una de la forma $B_{L_i}(Z_i)$), lo que es una contradicción.

El siguiente paso es probar que existe un triángulo de perímetro menor que L , en la bola $B_{20L}(Z)$, k -comparable, no AOK tal que es muy delgado, donde muy delgado significa que tiene un lado de longitud menor que δL . Para esto tomemos un triángulo ABC k -comparable no AOK en B dentro de la bola $B_{20L}(Z)$ y puntos $B = c_1, c_2, \dots, c_n = C$ en la curva minimizante $[B, C]$ tales que $d(c_i, c_{i+1}) < \delta L$, para $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Si todos los triángulos $Ac_i c_{i+1}$ son AOK en c_i y en c_{i+1} entonces por el lema 3.5.1 e inducción (Figura 3.3) tendríamos que los triángulos ABC_j son AOK en B para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y por lo tanto el triángulo ABC sería AOK en B .

Ahora, sea ABC un triángulo k -comparable no AOK en B con $d(B, C) < \delta L$ y $P(ABC) < L$. Tomemos D un punto medio de A y B . Por la desigualdad del triángulo tenemos que $d(A, B), d(A, C) < L/2$. Como $P(BCD) \leq 2(d(B, D) + d(B, C)) < d(A, B) + \delta L < (0,5 + \delta)L$ sabemos que el triángulo BCD es AOK y usando el lema 3.5.1 sabemos que el triángulo ADC no es AOK en D .

Usando que $P(ABC) > (1 - \delta)L$ tenemos que $d(A, C) > (1 - \delta)L - d(A, B) - d(B, C) > (1 - \delta)L - (0,5)L - \delta L = (0,5 - 2\delta)L$, análogamente

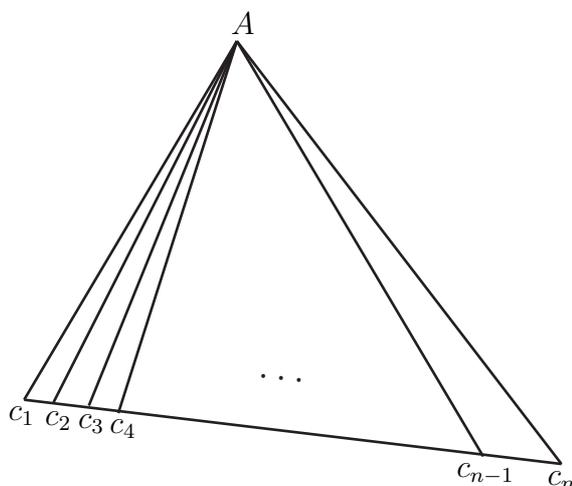


Figura 3.3: Triángulo delgado no AOK.

$d(A, B) > (0,5 - 2\delta)L$ y por lo tanto $d(A, D) > (0,25 - \delta)L$. También por la desigualdad del triángulo, $d(D, C) \leq d(D, B) + d(B, C) < (0,25 + \delta)L$ y $d(D, C) \geq d(D, B) - d(B, C) > (0,25 - 2\delta)L$. Así hemos construido un triángulo ADC con $(1 - \delta)L < P(ADC) < L$ tal que es k -comparable y no es AOK en D con las medidas

$$\begin{aligned} (0,5 - 2\delta)L &< d(A, C) < (0,5)L \\ (0,25 - \delta)L &< d(A, D) < (0,25)L \\ (0,25 - 2\delta)L &< d(C, D) < (0,25 + \delta)L \end{aligned}$$

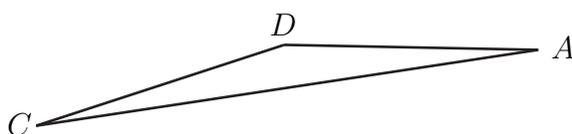


Figura 3.4: Triángulo ACD .

Lo que haremos ahora será construir una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $d(C, y_n) \leq (0,25 + \delta)L \forall n \in \mathbb{N}$ y $d(A, y_n) \leq 2\delta L$ para n suficientemente grande. Lo que contradiría la desigualdad del triángulo. La construiremos inductivamente comenzando con $y_0 = D$.

Sean $\varepsilon = \overline{\angle} CDA - \angle CDA$, x_1 un punto en la curva minimizante $[A, D]$ a distancia δL de D y y_1 un punto en la curva minimizante $[C, x_1]$ a distancia δL de x_1 .

Construimos inductivamente x_{i+1} como un punto en la curva minimizante $[A, y_i]$ a distancia δL de y_i y y_{i+1} un punto en la curva minimizante $[C, x_{i+1}]$ a distancia δL de x_{i+1} .

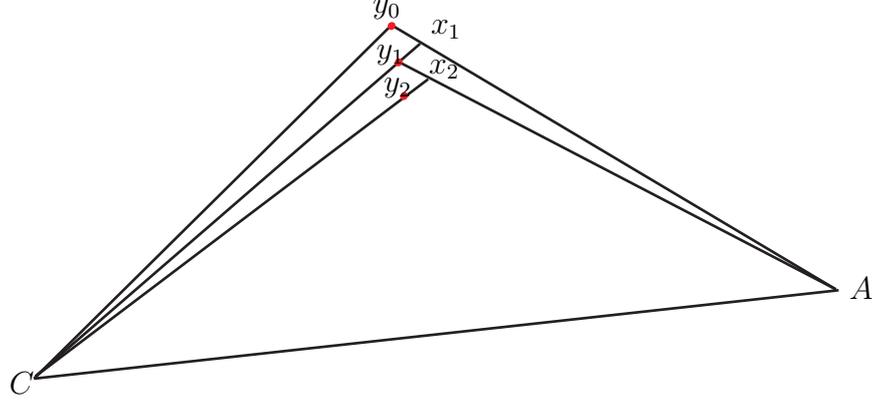


Figura 3.5: Sucesión y_n .

Supongamos que $\overline{\angle}_k Cx_1D + \overline{\angle}_k Cx_1A \geq \pi + \varepsilon$. En ese caso, $\overline{\angle}_k Cx_1D \geq \varepsilon$. Como los triángulos Dy_1x_1 y DCy_1 son AOK por ser pequeños, tenemos que $\overline{\angle}_k y_1x_1D \geq \overline{\angle}_k Cx_1D \geq \varepsilon$. Finalmente como Ax_1y_1 es AOK por ser pequeño, concluimos que $\overline{\angle}_k Ax_1y_1 \leq \pi - \overline{\angle}_k y_1x_1D \leq \pi - \varepsilon$.

También, como $\angle Cx_1D + \angle Cx_1A = \pi$ y Cx_1D es AOK por ser pequeño, tenemos que $\varepsilon \leq \overline{\angle}_k Cx_1A - \angle Cx_1A$.

Suponiendo que $\varepsilon \leq \overline{\angle}_k Cx_iA - \angle Cx_iA$ implica que $\overline{\angle}_k Cy_iA + \overline{\angle}_k Ay_ix_i \geq \pi + \varepsilon$ y que $\varepsilon \leq \overline{\angle}_k Cy_iA - \angle Cy_iA$ implica que $\overline{\angle}_k Cx_{i+1}A + \overline{\angle}_k Cx_{i+1}y_i \geq \pi + \varepsilon$, se puede probar siguiendo un razonamiento análogo al de los últimos dos párrafos que $\overline{\angle}_k Ax_iy_i \leq \pi - \varepsilon$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Por las leyes de cosenos tenemos que $\overline{\angle}_k Ax_iy_i \leq \pi - \varepsilon$ para toda $i \in \mathbb{N}$ implica que la sucesión $\{d(A, y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente por la sucesión $\{f^i(d(A, D))\}_{i \in \mathbb{N}}$ donde $f : [\delta L, D_k] \rightarrow [\delta L, D_k]$ está definida como sigue:

Tomemos un segmento $[X, Y]$ en $\mathbb{M}^2(k)$ de longitud $r \in [\delta L, D_k]$, construimos un punto Z en el segmento tal que $d(Z, Y) = \delta L$. Consideramos una geodésica minimizante que salga de Z y que forme un ángulo de $\pi - \varepsilon$ con el segmento $[Z, X]$. Sea Y_1 el punto en esa geodésica tal que $d(Z, Y_1) = \delta L$, definimos $f(r)$ como $d(X, Y_1)$.

Usando las leyes de cosenos tenemos que f es una función estrictamente creciente en $[\delta L, D_k]$ y continua, de donde se sigue que $\{f^i(d(A, D))\}_{i \in \mathbb{N}}$

converge a un valor R . Por la continuidad de f , tenemos que

$$f(R) = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} f^i(d(A, D))\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} f^{i+1}(d(A, D)) = R.$$

Por lo que R es un punto fijo de f . Pero por las leyes de cosenos el único punto fijo de f es δL , lo que implica que $d(A, y_n) \leq 2\delta L$ para n suficientemente grande.

El hecho de que $d(C, y_n) \leq (0,25 + \delta)L$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se sigue inmediatamente de la desigualdad del triángulo e inducción, pues $d(C, y_n) = d(C, x_n) - \delta L \leq d(C, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, x_n) - \delta L = d(C, y_{n-1})$. Por lo que el teorema quedará demostrado si las implicaciones que habíamos supuesto son válidas para δ suficientemente pequeño.

Probaremos que $\overline{\angle}_k Cx_1D + \overline{\angle}_k Cx_1A \geq \pi + \varepsilon$. Consideremos un k -triángulo de comparación \overline{ACD} de ACD , y colocamos \overline{x}_1 y x'_1 dentro del triángulo \overline{ACD} tales que $\overline{Cx_1D}$ y $\overline{Cx'_1A}$ son k -triángulos de comparación de Cx_1D y Cx_1A respectivamente. Por el lema 3.5.1 tenemos que $\overline{\angle}_k Cx_1D + \overline{\angle}_k Cx_1A > \pi$, por lo que los triángulos $\overline{Cx_1D}$ y $\overline{Cx'_1A}$ no se traslapan. Como el triángulo Cx_1D es AOK tenemos que $\angle \overline{x}_1DA = \angle \overline{CDA} - \angle \overline{CDx_1} \geq \varepsilon + \angle CDA - \angle CDx_1 = \varepsilon$, por lo que basta demostrar que $\overline{\angle}_k Cx_1D + \overline{\angle}_k Cx_1A \geq \angle \overline{x}_1DA + \pi$. Para ello tomemos un punto \overline{x} en $[\overline{D}, \overline{A}]$ tal que $d(\overline{D}, \overline{x}) = d(D, x_1)$ y usemos el teorema de Gauss-Bonnet ([10] p.164) sobre los triángulos $\overline{Dx_1x}$, $\overline{xx_1x'_1}$, $\overline{x'_1xA}$, $\overline{x'_1x_1C}$ para obtener que

$$\begin{aligned} & 4\pi + k [A(\overline{Dx_1x}) + A(\overline{xx_1x'_1}) + A(\overline{x'_1xA}) + A(\overline{x'_1x_1C})] \\ &= \angle \overline{x_1Cx'_1} + \angle \overline{Cx_1x'_1} + \angle \overline{xx_1x'_1C} + \angle \overline{x_1Dx} + \angle \overline{x_1x\overline{D}} + \angle \overline{Dx_1x} + \\ & \quad \angle \overline{x_1\overline{x}x'_1} + \angle \overline{\overline{xx_1}x'_1} + \angle \overline{\overline{xx_1}x_1} + \angle \overline{x\overline{A}x'_1} + \angle \overline{\overline{A}xx'_1} + \angle \overline{\overline{A}x'_1\overline{x}} \\ &= 5\pi - (\angle \overline{Dx_1C} + \angle \overline{\overline{A}x'_1C}) + \angle \overline{x_1Cx'_1} + \angle \overline{x_1Dx} + \angle \overline{x\overline{A}x'_1} \end{aligned}$$

Con esto, bastará probar que $\angle \overline{x_1Cx'_1} + \angle \overline{x\overline{A}x'_1} \geq k[A(\overline{Dx_1x}) + A(\overline{xx_1x'_1}) + A(\overline{x'_1xA}) + A(\overline{x'_1x_1C})]$.

Si $k \leq 0$, esto es trivial, y para $k > 0$ observemos que si δ es suficientemente pequeña tenemos que $d(\overline{C}, \overline{x}_1) \leq d(\overline{C}, \overline{D}) + \delta L < (0,25 + 3\delta)L < (0,5)D_k$. Por lo que $\angle \overline{x_1Cx'_1} \geq kA(\overline{x'_1x_1C})$. Para probar que $\angle \overline{x\overline{A}x'_1} \geq k[A(\overline{Dx_1x}) + A(\overline{xx_1x'_1}) + A(\overline{x'_1xA})]$ basta ver que $\angle \overline{Dx_1x} \leq \angle \overline{D\overline{A}x'_1}$. Esto último se sigue directamente de la primera fórmula de variación de arco para δ suficientemente pequeña, ya que tanto \overline{x}_1 como x'_1 están en la circunferencia con centro \overline{C} y radio $d(C, x_1)$, la cual corta a \overline{AC} con ángulo recto. Y como los triángulos $\overline{Cx_1D}$ y $\overline{Cx'_1A}$ no se traslapan, tenemos que x'_1 está más cerca de \overline{AC} que \overline{x}_1 .

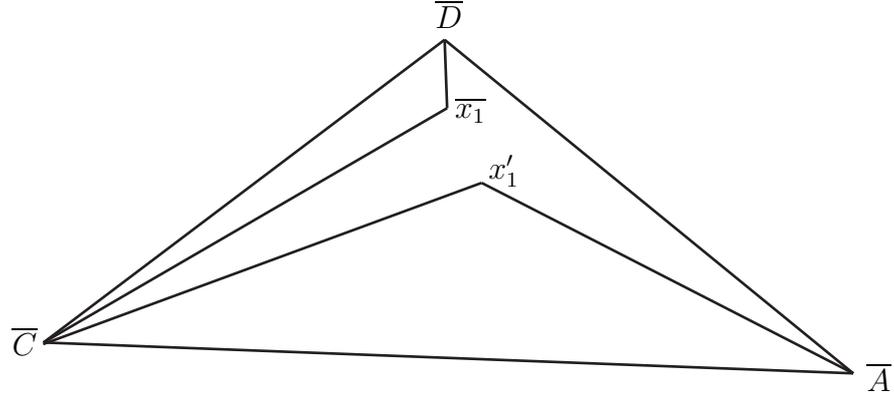


Figura 3.6: $\overline{\angle}_k Cx_1D + \overline{\angle}_k Cx_1A \geq \pi + \varepsilon$.

Las pruebas de que $\overline{\angle}_k Cy_iA + \overline{\angle}_k Ay_ix_i \geq \pi + \varepsilon$ y que $\overline{\angle}_k Cx_{i+1}A + \overline{\angle}_k Cx_{i+1}y_i \geq \pi + \varepsilon$ son análogas ya que sólo hemos utilizado que $\angle CDA \leq \overline{\angle}_k CDA - \varepsilon$, $d(A, C) > (0,5 - 2\delta)L$, $d(A, D) < (0,25 + 2\delta)L$, $d(C, D) < (0,25 + 2\delta)L$ y que δ es suficientemente pequeña. Lo cual se cumple en los triángulos ACx_i y ACy_i para toda $i \in \mathbb{N}$. \square

Observación 3.5.3 El teorema anterior también es válido cuando X no es un espacio geodésico. La prueba en este caso es similar a la anterior, pero ésta usa (ε, δ) -líneas punteadas con ε y δ muy pequeños en lugar de curvas minimizantes.

La condición de completitud en el teorema de Toponogov es esencial, pues si tomamos $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$, tenemos que X es localmente euclidiano y por lo tanto es un espacio de Alexandrov de curvatura ≥ 0 . Podemos aproximarnos a la cuarteta $\{(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, 2)\}$ con cuartetos $\{a, b, c, d\}$ en X , pero por la continuidad de los ángulos de comparación tenemos que $\overline{\angle} bac \approx \pi$, $\overline{\angle} cad \approx (0,75)\pi$ y $\overline{\angle} dab \approx (0,75)\pi$. Sumando tenemos que el teorema de Toponogov no es válido para espacios no completos.

Claramente, las 1-variedades Riemannianas son espacios de Alexandrov de curvatura $\geq k$ para toda $k \in \mathbb{R}$. De aquí en adelante cuando digamos *Espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$* , excluirémos las 1-variedades Riemannianas de diámetro mayor que D_k .

Cuando $k > 0$ existen dos importantes corolarios del teorema de Toponogov. Juntos dicen que todos los triángulos en un espacio completo de

Alexandrov de curvatura $\geq k$ tienen un k -triángulo de comparación (aunque puede no ser único). El primero es una generalización del teorema de Bonnet.

Corolario 3.5.4 Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ tal que es un espacio completo, entonces $d(x, y) \leq D_k \forall x, y \in X$.

Demostración : Para simplificar la prueba, supondremos que X es un espacio geodésico. Si $k \leq 0$ no hay nada que probar, así que supondremos que $k > 0$. Sean $x, y \in X$ tales que $D_k < d(x, y) < 2D_k$ y tomemos z un punto medio de x y y . Tenemos dos casos:

Caso 1. z tiene una vecindad isométrica a un segmento abierto de \mathbb{R} . Para cada $w \in X$, cualquier curva minimizante de z a w forma ángulo 0 con la geodésica $[z, x]$ o la geodésica $[z, y]$. Por lo que usando la proposición 3.2.10 tenemos que las geodésicas $[z, x]$ y $[z, y]$ junto con sus extensiones cubren X . Por lo que X es una 1-variedad y el resultado se sigue de la restricción que hicimos los párrafos anteriores.

Caso 2. Existe un punto w arbitrariamente cercado a z tal que no está en la geodésica $[x, y]$. En este caso tomemos \overline{xzw} y $\overline{yzw_1}$ k -triángulos de comparación de xzw y yzw respectivamente, tales que la geodésica \overline{zy} es una continuación de la geodésica \overline{xz} . En este caso, como los triángulos xzw y yzw son AOK y X es angularmente regular tenemos que $\angle \overline{xzw} \leq \angle \pi - \overline{yzw_1} = \overline{xzw_1}$. De donde $d(\overline{x}, \overline{w_1}) \geq d(\overline{x}, \overline{w})$, y usando el corolario D.6 concluimos que

$$\begin{aligned} d(x, w) + d(w, y) &= d(\overline{x}, \overline{w}) + d(\overline{w_1}, \overline{y}) \\ &\leq d(\overline{x}, \overline{w_1}) + d(\overline{w_1}, \overline{y}) \\ &< 2D_k - d(\overline{x}, \overline{y}) \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Lo que contradice la desigualdad del triángulo. □

Corolario 3.5.5 Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ tal que es un espacio completo, entonces $\forall x, y, z \in X$, se tiene que $P(xyz) \leq 2D_k$.

Demostración : De nuevo, para simplificar la prueba supondremos que X es un espacio geodésico. Primero lo probaremos para espacios con diámetro estrictamente menor que D_k .

Supongamos que tenemos un triángulo ABC en X con $P(ABC) > 2D_k$. En este caso, tomemos B' y C' distintos de B y C en las curvas minimizantes $[A, B]$ y $[A, C]$ tales que $P(AB'C') = 2D_k$. Como el diámetro de X es menor que D_k tenemos que $AB'C'$ es k -comparable y por lo tanto AOK.

De lo anterior, tenemos que $\angle AB'C' = \pi$, de donde $\angle C'B'B = 0$ y por la proposición 3.2.10 B está en el segmento $[B', C']$. Análogamente C también está en ese segmento, lo que es una contradicción, ya que $P(ABC) > P(AB'C')$.

Para analizar el caso en el que el diámetro de X es igual a D_k , observamos que para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que X es un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k - \varepsilon$. Por lo que ya probamos en los párrafos anteriores, el perímetro de un triángulo en X no puede ser mayor que $D_{k-\varepsilon}$. El resultado se sigue de que D_k es una función continua de k . \square

De nuevo es esencial la hipótesis de que X es completo, pues no es difícil construir superficies de revolución en \mathbb{R}^3 con diámetro tan grande como se desee y curvatura Gaussiana constante 1 ([5] sección 5.2 ejemplo 1).

3.6. Resultados y Problemas

Los espacios de Alexandrov de curvatura acotada inferiormente han sido ampliamente estudiados en los últimos 50 años (principalmente en los últimos 30) obteniendo una gran cantidad de resultados tanto locales como globales.

A diferencia de los espacios de Alexandrov de curvatura acotada superiormente, los espacios de Alexandrov de curvatura acotada inferiormente tienen bastantes propiedades interesantes sin suponer muchas hipótesis adicionales. Ejemplos de esto son los teoremas 3.4.13, 3.5.2, 3.5.4, 3.5.5.

También tenemos que los espacios de Alexandrov de curvatura acotada inferiormente tienen una estructura local muy amable, pues de cierta forma son casi variedades topológicas. Concretamente, se tienen los siguientes teoremas:

Teorema 3.6.1 Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$. Si $\dim_H(X) = 1$, entonces X es una 1-variedad topológica.

Teorema 3.6.2 (Homogeneidad Dimensional) Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$. Entonces

$\dim_H(U) = \dim_H(X)$ para todo $U \subset X$ abierto.

Teorema 3.6.3 Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$. Si $\dim_H(X) < \infty$ entonces $\dim_H(X)$ es un entero.

Teorema 3.6.4 Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$. Si $\dim_H(X) = n \in \mathbb{Z}$, entonces existe $U \subset X$ abierto denso tal que todo punto en U tiene una vecindad a distancia de Lipschitz finita de un abierto de \mathbb{R}^n . En particular U es una variedad topológica de dimensión n .

Teorema 3.6.5 Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$. Si $\dim_H(X) < \infty$ entonces X es localmente compacto.

Teorema 3.6.6 Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$. Si $\dim_H(X) = n \in \mathbb{Z}$, entonces para cada $p \in X$ se tiene que el espacio de direcciones en p es un espacio de Alexandrov compacto de curvatura ≥ 1 de dimensión $n - 1$.

Pruebas de estos teoremas se pueden encontrar en [3].

Los teoremas 3.6.1, 3.6.3 y 3.6.6 nos permiten definir inductivamente el concepto de frontera en un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ de dimensión finita.

Definición 3.6.7 Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ de dimensión 2. Decimos que $p \in X$ está en la frontera de X si el espacio de direcciones en p es una 1-variedad con frontera.

Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ de dimensión $n + 1$. Decimos que $p \in X$ está en la frontera de X si el espacio de direcciones en p es un espacio de Alexandrov de curvatura ≥ 1 de dimensión n con frontera.

Globalmente se tiene el siguiente resultado:

Definición 3.6.8 Decimos que una colección $\{M^i\}_{i=1}^k$ de subconjuntos de un espacio topológico M es una *estratificación finita en variedades topológicas* si se cumple lo siguiente:

- $M^i \cap M^j = \emptyset$ para cualesquiera $i \neq j$.
- $M = \bigcup_{i=1}^k M^i$.

- M^i es una variedad topológica para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.
- $\dim M^1 > \dim M^2 > \dots > M^k$.
- $\bigcup_{i=r}^k M^i$ es cerrado en M para todo $r \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Teorema 3.6.9 Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$. Si $\dim_H(X) < \infty$ entonces X admite una estratificación finita en variedades topológicas. Esta estratificación se puede escoger de manera única tal forma que para cualesquiera $p_1, p_2 \in M^i$ existen vecindades U_1 y U_2 de p_1 y p_2 respectivamente tales que (U_1, p_1) y (U_2, p_2) son homeomorfos como espacios topológicos punteados. A esta estratificación le llamaremos la *estratificación canónica de X* .

Una prueba de este resultado se encuentra en el texto [13].

Los teoremas anteriores nos dicen que los espacios de Alexandrov de curvatura $\geq k$ localmente se comportan de manera muy parecida a las variedades topológicas.

También tenemos este importante resultado que nos dice que si perturbamos un poco un espacio de Alexandrov X sin alterar su dimensión entonces el resultado será homeomorfo a X .

Teorema 3.6.10 (Estabilidad de Perelman) Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ compacto con $\dim_H(X) = n \in \mathbb{Z}$. Entonces existe $r > 0$ tal que cualquier espacio de Alexandrov Y de curvatura $\geq k$ compacto con $\dim_H(Y) = n$ y $d_H(X, Y) \leq r$ es homeomorfo a X .

Del teorema anterior y del corolario 3.4.14 se sigue inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 3.6.11 Sea X un espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ compacto con $\dim_H(X) = n \in \mathbb{Z}$, $\text{diam}(X) \leq D$. Entonces existe $r > 0$ tal que cualquier espacio en $B_r(X) \subset \mathfrak{h}(n, k, D)$ es homeomorfo a X .

Este resultado tiene como consecuencia directa que si un espacio de Alexandrov compacto de curvatura $\geq k$ de dimensión finita no es una variedad topológica, entonces no puede ser el límite de Gromov-Hausdorff de variedades Riemannianas compactas de la misma dimensión y de curvatura $\geq k$. Por el corolario 3.4.14 también sabemos que tampoco puede ser el límite

de variedades Riemannianas compactas de dimensión inferior y curvatura $\geq k$. Existen espacios de Alexandrov de curvatura $\geq k$ que no pueden ser el límite de Gromov-Hausdorff de variedades Riemannianas de curvatura $\geq k$ de cualquier dimensión, pero en general no se sabe si cualquier espacio de Alexandrov de curvatura $\geq k$ se puede obtener como el límite de variedades Riemannianas sin restringir ni su curvatura ni su dimensión.

Apéndice A

Funciones, Sucesiones, Completez

Aquí se cubrirá teoría básica de espacios métricos que se utilizará en el texto.

Comencemos con una definición que ligeramente generaliza la noción de espacio métrico.

Definición A.1 Una pareja (X, d) , $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es un *espacio semi-métrico* si se cumplen las siguientes condiciones $\forall x, y, z \in X$:

- (Positividad) $d(x, y) \geq 0$.
- (Simetría) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (Desigualdad del Triángulo) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Claramente todo espacio métrico es un espacio semi-métrico. Observando que la relación $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ es una relación de equivalencia, tomando el cociente X/\sim y verificando que d está bien definida en parejas de clases de equivalencia obtenemos un espacio métrico $(X/\sim, d)$.

Definición A.2 Sea X un espacio métrico. Definimos el *diámetro* de X como

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

Definición A.3 Se dice que una función entre dos espacios métricos $f : X \rightarrow Y$ *preserva distancias* si $d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \forall x_1, x_2 \in X$. A una función biyectiva que preserva distancias le llamamos *isometría*. Si existe una isometría entre dos espacios métricos, decimos que éstos son isométricos. Es fácil ver que ser isométricos es una relación de equivalencia.

Claramente toda función que preserva distancias es inyectiva y más aún, es una isometría con su imagen. La definición anterior se extiende naturalmente a espacios semi-métricos, pero ahí no implica la inyectividad. Para nosotros, dos espacios isométricos serán indistinguibles.

Definición A.4 A una función $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow X$ con X un espacio topológico (o en particular, un espacio métrico) le llamamos una sucesión en X y la denotamos $\{\sigma(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Se dice que una sucesión converge a un punto $x \in X$ si $\forall U \subset X$ abierto tal que $x \in U$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N, \sigma(n) \in U$. En este caso escribimos $\sigma(i) \rightarrow x$ ó $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma(i) = x$.

Si $\forall U \subset X$ abierto tal que $x \in U$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$ tal que $\sigma(n) \in U$, se dice que x es un punto de acumulación de la sucesión.

En un espacio métrico, para toda sucesión convergente $x_i \rightarrow x$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N, x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > N, d(x_n, x_m) < \varepsilon$. A una sucesión con esta propiedad le llamaremos *Sucesión de Cauchy*.

El converso no siempre es cierto, los espacios métricos en los que sí, reciben un nombre especial:

Decimos que un espacio métrico X es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto en X .

Una propiedad que caracteriza a las sucesiones de Cauchy es la siguiente:

Proposición A.5 Si una sucesión de Cauchy $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación x , entonces $x_i \rightarrow x$.

Demostración : Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, se tiene que $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como x es punto de acumulación, existe $n > N$ con $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Entonces si $m > N$, se tiene que $d(x_m, x) < d(x_m, x_n) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo que $x_i \rightarrow x$. \square

Definición A.6 Sea $D \subset X$ con (X, d) un espacio métrico, la métrica d restringida al conjunto $D \times D$ es de nuevo una métrica sobre el conjunto D . Así que llamamos a D un subespacio (métrico) de X .

Definición A.7 Sea $D \subset X$ con X un espacio métrico, se dice que D es denso en X si $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset$.

Dos definiciones equivalentes a la anterior son las siguientes:

- $\forall U \subset X$ abierto no vacío, $U \cap D \neq \emptyset$.
- $\forall x \in X, \exists \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sucesión en D tal que $x_i \rightarrow x$.

Como uno puede imaginar, es mucho más cómodo trabajar en un espacio métrico completo que en uno no completo. Afortunadamente todo espacio métrico lo podemos ver como un subconjunto denso de un espacio completo.

Teorema A.8 Sea X un espacio métrico, entonces existe un espacio métrico Y completo tal que tiene un subconjunto denso isométrico a X . A Y le llamaremos una *completación de X* .

La idea de la demostración es tomar el espacio de las sucesiones de Cauchy en X y darle la semi-métrica $d(\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_i, y_i)$. Tomando el cociente como en la primera definición del apéndice obtenemos Y . A X lo encajamos con la función $j : X \rightarrow Y$ dada por $j(x) = \sigma_x$, donde $\sigma_x(n) = x \forall n \in \mathbb{N}$.

Una propiedad importante de la completación de un espacio métrico es que éste es único (módulo isometrías). Esto surge como un corolario del siguiente importante lema:

Definición A.9 Una función entre dos espacios métricos $f : X \rightarrow Y$ se dice que es de *Lipschitz* con *Constante de Lipschitz* M si $\forall x_1, x_2 \in X, d(f(x_1), f(x_2)) \leq Md(x_1, x_2)$.

Observemos que si M no es constante de Lipschitz de f , entonces existen x_1 y x_2 distintos en X tales que $d(f(x_1), f(x_2)) > Md(x_1, x_2)$. Por lo que $M + \varepsilon$ tampoco será constante de Lipschitz de f para ε suficientemente pequeño. De aquí se sigue que el conjunto de constantes de Lipschitz de una función dada es cerrado.

A la mínima constante de Lipschitz de una función f le llamaremos *la dilatación de f* y la denotaremos como L_f .

Una primera observación de la definición de dilatación es que la dilatación de una composición de funciones Lipschitz f y g es menor o igual al producto de las dilataciones $L_f L_g$. Esto se sigue de la siguiente cadena de desigualdades:

$$d(f(g(x_1)), f(g(x_2))) \leq L_f d(g(x_1), g(x_2)) \leq L_f L_g d(x_1, x_2).$$

Las funciones de Lipschitz tienen dos propiedades particularmente importantes para nosotros; la primera es que toda función de Lipschitz es continua y la segunda es que mandan sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Es decir, si $f : X \rightarrow Y$ es de Lipschitz con constante de Lipschitz M , y $\{x_i\}$ es una sucesión de Cauchy, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > N, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{M}$. Por lo tanto $\forall n, m > N, d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

Lema A.10 Sean X, Y espacios métricos con Y completo, $D \subset X$ un subespacio denso, $g : D \rightarrow Y$ una función de Lipschitz con constante de Lipschitz M . Entonces existe una única extensión $\hat{g} : X \rightarrow Y$ continua. Más aún, \hat{g} es de Lipschitz con constante de Lipschitz M y si g preserva distancias, entonces \hat{g} también.

Demostración: Para $x \in X$ definimos $\hat{g}(x)$ como $\lim_{i \rightarrow \infty} g(x_i)$ donde $\{x_i\}$ es una sucesión en D que converge a x . Esto lo podemos hacer gracias a tres cosas: Como D es denso, la sucesión existe, como g es de Lipschitz, manda sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy y como Y es completo, la sucesión $\{g(x_i)\}$ converge.

Veamos que \hat{g} definida de esta manera es de Lipschitz con constante de Lipschitz M . Tomando $x, y \in X$ y sucesiones $\{x_i\}, \{y_i\}$ en D tales que $x_i \rightarrow x, y_i \rightarrow y$ tenemos que:

$$\begin{aligned} d(\hat{g}(x), \hat{g}(y)) &= d\left(\lim_{i \rightarrow \infty} g(x_i), \lim_{i \rightarrow \infty} g(y_i)\right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} d(g(x_i), g(y_i)) \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} M d(x_i, y_i) \\ &= M d(x, y) \end{aligned}$$

La unicidad de \hat{g} se sigue del hecho de que si dos funciones continuas entre dos espacios métricos fijos coinciden en un subconjunto denso del dominio, coinciden como funciones. Si g preserva distancias, tenemos $M = 1$ y

la desigualdad se vuelve igualdad en las expresiones anteriores, por lo que \hat{g} preserva distancias. \square

Corolario A.11 Sean $Y \supset X$ y $Z \supset X$ dos completaciones de X , entonces existe una isometría $\hat{g} : Y \rightarrow Z$ tal que restringida a X es la identidad.

Demostración: Tomamos $g : X \rightarrow Z$ la inclusión, entonces por el lema anterior, ésta se extiende a $\hat{g} : Y \rightarrow Z$, la cual preserva distancias. Sólo falta ver que es suprayectiva, pero como X es denso en Z , para cualquier $z \in Z$ existe una sucesión en X que converge a z . Tomando la misma sucesión en Y converge a algún punto $y \in Y$. Por cómo definimos \hat{g} tenemos que $\hat{g}(y) = z$. \square

Apéndice B

Topología

Definición B.1 Un subespacio U de un espacio métrico X se dice que es:

- *Acotado* si existe una bola $B_r(a)$ en X tal que $U \subset B_r(a)$.
- *Totalmente Acotado* si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una colección finita $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de puntos en X tales que $U \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$. A una colección $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ con $U \subset \bigcup_{\mu \in M} B_\varepsilon(y_\mu)$ se le llama una ε -red.
- *Compacto* si para cualquier colección de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $U \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ (a este tipo de colecciones les llamaremos *Cubiertas Abiertas*) se tiene una subcolección $\{U_\beta\}_{\beta \in B} \subset \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, con $B \subset A$ finito tal que $U \subset \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$.
- *Disconexo* si existen dos subconjuntos abiertos ajenos no vacíos U_1 y U_2 en U tales que $U \subset U_1 \cup U_2$.
- *Conexo* si no es disconexo.
- *Localmente Conexa* si $\forall x \in U, \forall V \subset U$ abierto con $x \in V$, se tiene que existe una vecindad C conexa de x con $C \subset V$.
- *Conectable por trayectorias* si $\forall x, y \in U, \exists \gamma : [a, b] \rightarrow U$ curva de x a y .
- *Localmente Conexa por trayectorias* si $\forall x \in U, \forall V \subset U$ abierto con $x \in V$, se tiene que existe una vecindad C conexa por trayectorias de x con $C \subset V$.

Normalmente en la literatura, restringen la definición de espacio métrico para que sólo pueda haber distancias finitas. Lo que hace que todo conjunto totalmente acotado sea acotado. Para nosotros no funciona así, por ejemplo un conjunto finito de puntos tales que la distancia entre cualesquiera dos de ellos es infinito, es totalmente acotado pero no acotado.

Otra observación es que la definición de conjunto totalmente acotado es equivalente a una más fuerte: los puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se pueden tomar en U . Para esto, tomamos una colección finita de puntos $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ tales que $U \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i)$. Tomando $x_i \in U \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i)$ tenemos la colección buscada.

Una propiedad muy importante de los conjuntos compactos y conexos es la siguiente.

Proposición B.2 Una función continua manda subespacios compactos en subespacios compactos y subespacios conexos en subespacios conexos.

Demostración : Sea $f : X \rightarrow Y$ continua.

Sea $K \subset X$ compacto. Tomemos una cubierta abierta $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $f(K)$, entonces sus imágenes inversas $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ serán una cubierta abierta de K . Tomando una subcubierta $\{U_\beta\}_{\beta \in B} \subset \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, con $B \subset A$ finito, tenemos que sus imágenes $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ son una subcubierta finita de $f(K)$.

Si existieran dos abiertos ajenos no vacíos V_1 y V_2 en $f(C)$ tales que $f(C) \subset V_1 \cup V_2$, obtendríamos dos abiertos ajenos no vacíos $f^{-1}(V_1)$ y $f^{-1}(V_2)$ en C tales que $C \subset f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$, implicando que C es disconexo. \square

Dos consecuencias básicas de esta proposición es que una función continua de un espacio compacto a \mathbb{R} alcanza su máximo y su mínimo y que una función continua de un espacio conexo a \mathbb{R} tiene a un intervalo como imagen. Más consecuencias importantes son las siguientes.

Lema B.3 (Lebesgue) Sea K un espacio métrico compacto y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta. Entonces existe $\lambda > 0$ tal que $\forall x \in K, \exists \alpha \in A$ tal que $B_\lambda(x) \subset U_\alpha$. A λ le llamaremos un *número de Lebesgue* de la cubierta.

Demostración : Definimos $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}$ como $\phi(x) = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \exists \alpha \in A \text{ tal que } B_r(x) \subset U_\alpha\}$. Veamos que ϕ es continua. Para $x \in K$ y $\varepsilon > 0$, si $d(x, y) < \varepsilon$, por la desigualdad del triángulo tenemos que $B_{r-\varepsilon}(y) \subset B_r(x) \subset B_{r+\varepsilon}(y)$. De donde $\phi(x) - \varepsilon < \phi(y) < \phi(x) + \varepsilon$.

Así tenemos que ϕ es continua y alcanza su mínimo $\delta > 0$. Entonces un número buscado será $\lambda = \frac{\delta}{2}$. \square

Definición B.4 Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice que es *Uniformemente continua* si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Es claro que toda función uniformemente continua es continua. La implicación inversa es falsa en general, pero verdadera para compactos.

Proposición B.5 Toda función continua definida en un compacto es uniformemente continua.

Demostración : Sea $\varepsilon > 0$, alrededor de cada punto x del dominio K construimos una vecindad abierta U_x tal que si $y \in U_x$, entonces $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando un número de Lebesgue δ de la cubierta $\{U_x\}_{x \in K}$ concluimos, pues si $d(x, y) < \delta$, ambos están en U_z para algún z y $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. \square

Ahora veamos una caracterización importante de los espacios compactos.

Teorema B.6 Un espacio métrico es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado.

Demostración : Sea X un espacio compacto. Para cada $\varepsilon > 0$, y cada $x \in X$ tomamos $B_\varepsilon(x)$. Como para cualquier ε podemos tomar una subcubierta finita de $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$, X es totalmente acotado.

Ahora, dada una sucesión de Cauchy que no converge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, por la proposición A.5, no tiene puntos de acumulación y cada $x \in X$ tiene una vecindad U_x que sólo interseca a x_n para una cantidad finita de n . Tomando una subcubierta finita de $\{U_x\}_{x \in X}$ tenemos una colección de subconjuntos de X que lo cubren y sólo intersecan a x_n para una cantidad finita de n , lo que es una contradicción.

Para ver la implicación inversa, tomamos una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X , un espacio totalmente acotado y completo. Tomamos una 1-red finita $\{x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n_1}\}$. Las bolas de radio 1 con centros $x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n_1}$ cubren X , así que si cada una se pudiera cubrir con una cantidad finita de U_α , X también. Supongamos que no, así que existe una bola de radio 1 y centro $x_{1,i}$ que no se puede cubrir con una cantidad finita de U_α . Definimos $y_1 = x_{1,i}$ y $V_1 = B_1(y_1)$. Definamos y_j y V_j inductivamente.

y_{j-1} es un punto de V_{j-1} , donde V_{j-1} no se puede cubrir con una cantidad finita de U_α . Tomamos una $\frac{1}{j}$ -red finita $\{x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n_j}\}$ en V_{j-1} . Las bolas de radio $\frac{1}{j}$ con centros $x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n_j}$ intersectadas con V_{j-1} cubren V_{j-1} ,

así que si cada una se pudiera cubrir con una cantidad finita de U_α , V_{j-1} también. Definimos y_j como el centro de una bola de radio $\frac{1}{j}$ que intersectada con V_{j-1} no se puede cubrir con una cantidad finita de U_α , y definimos a V_j como $V_{j-1} \cap B_{\frac{1}{j}}(y_j)$.

Como para $n, m > N$, $y_n, y_m \in V_N \subset B_{\frac{1}{N}}(y_N)$, se tiene que $d(y_n, y_m) < \frac{2}{N}$. Así que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge en X . Sea y el punto al cual converge, entonces $y \in U_\beta$ para algún β y existe ε tal que $B_\varepsilon(y) \subset U_\beta$. Pero para k suficientemente grande tal que $d(y_k, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene que $V_k \subset B_{\frac{1}{k}}(y_k) \subset B_\varepsilon(y) \subset U_\beta$, lo que contradice que V_k no se pueda cubrir con una cantidad finita de U_α . \square

Con este fuerte teorema obtenemos un útil corolario:

Corolario B.7 Un espacio métrico es compacto si y sólo si toda sucesión tiene un punto de acumulación.

Demostración : Sea X un espacio compacto, si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sin puntos de acumulación, cada $x \in X$ tiene una vecindad U_x que sólo interseca a x_n para una cantidad finita de n . Tomando una subcubierta finita de $\{U_x\}_{x \in X}$ tenemos una colección de subconjuntos de X que lo cubren y sólo intersectan a x_n para una cantidad finita de n , lo que es una contradicción.

Para ver la implicación inversa, sea X un espacio en el cual toda sucesión tiene un punto de acumulación. Tomando una sucesión de Cauchy, por la proposición A.5, converge. Por lo tanto X es completo. Para ver que es totalmente acotado, dado $\varepsilon > 0$, construyamos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tomando a x_1 arbitrario, e inductivamente $x_j \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_\varepsilon(x_i)$. Si no podemos construir x_j , es porque ya encontramos una ε -red finita. Si construimos inductivamente así toda la sucesión tenemos una sucesión tal que la distancia de un elemento a otro es de al menos ε .

Si x es un punto de acumulación existe un elemento x_r en $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ y otro distinto x_s en $B_{d(x_r, x)}(x)$, por lo que $d(x_r, x_s) < \varepsilon$. Contradiciendo nuestra construcción, así que no pudimos haber construido esa sucesión y X es totalmente acotado. Por lo tanto X es compacto. \square

Para subespacios de \mathbb{R}^n tenemos el siguiente Teorema.

Teorema B.8 (Heine-Borel) Un subespacio de \mathbb{R}^n es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Una prueba se puede encontrar en [17] (pp. 7-10).

Otra propiedad importante de los espacios métricos compactos es que no existen funciones de un espacio compacto en sí mismo tales que preserven distancias pero no sean suprayectivas.

Definición B.9 Sea X un espacio métrico. Decimos que $S \subset X$ es un conjunto ε -separado si para todos $x, y \in S$ distintos se tiene que $d(x, y) \geq \varepsilon$.

Lema B.10 Sea X un espacio métrico compacto. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que no existen subconjuntos ε -separados de cardinalidad mayor o igual que N .

Demostración : Todo conjunto ε -separado no puede tener más de un elemento en cada bola $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$, $x \in X$. Tomando una subcobertura finita de $\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\}_{x \in X}$ tenemos el resultado. \square

Teorema B.11 Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función que preserve la distancia. Entonces f es una isometría.

Demostración : Basta ver que f es suprayectiva. Para esto, supongamos lo contrario. Entonces como $f(X)$ es compacto, existe una bola de la forma $B_\varepsilon(x_0)$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap f(X) = \emptyset$. Tomemos S un conjunto $\frac{\varepsilon}{2}$ -separado de cardinalidad máxima. Como f preserva distancias, $f(S)$ también será un conjunto $\frac{\varepsilon}{2}$ -separado, por lo que $f(S) \cup \{x_0\}$ será un conjunto $\frac{\varepsilon}{2}$ -separado contradiciendo la elección de S . \square

Definición B.12 Un espacio métrico se dice que es *Acotadamente Compacto* si todo subespacio cerrado y acotado es compacto.

Esta propiedad resulta ser muy útil al encontrar curvas minimizantes.

Una última propiedad que se debe mencionar que todo espacio U conec-
table por trayectorias es conexo, pues las imágenes de las trayectorias son
conexas y tomando un punto fijo $x_0 \in U$, existe una curva que lo une a
cualquier otro punto de U . Por lo que U es unión de espacios conexos que
comparten un punto, así que es conexo (ver [15] pp. 156, 157).

Apéndice C

Semi-Espacios de Longitud, Parametrizaciones

Regresemos a la primera definición del apéndice. Veamos que toda la construcción de métrica inducida se puede generalizar a espacios semi-métricos. La observación importante es que dado un espacio semi-métrico, tomar su semi-métrica inducida y luego tomar la métrica del cociente es lo mismo que primero tomar la métrica del cociente y obtener la métrica inducida.

Esto sucede porque cada curva en el espacio semi-métrico (X, d) de x a y nos da una curva en el espacio cociente X/\sim de la misma longitud (componiéndola con la proyección $X \rightarrow X/\sim$), y cada curva en el espacio cociente de $[x]$ a $[y]$ nos da una curva en el espacio semi-métrico de x a y de la misma longitud (componiéndola con una función $\phi : X/\sim \rightarrow X$ inversa derecha de la proyección tal que $\phi([x]) = x$ y $\phi([y]) = y$).

Todas las proposiciones, teoremas y definiciones de la sección 1.1 se pueden generalizar a semi-métricas con las mismas demostraciones, sólo sustituyendo métrica por semi-métrica. Incluyendo lo que sigue de este apéndice.

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva de longitud finita en un espacio (semi-)métrico. La experiencia en el análisis y en la geometría nos dice que sería bastante cómodo tener una parametrización *por longitud de arco*. Es decir, que la función $\lambda(c) = \ell_d(\gamma|_{[a,c]})$ tenga la expresión $\lambda(c) = c - a$.

Tales parametrizaciones existen y son bastante fáciles de construir:

Teorema C.1 Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva rectificable con $\ell_d(\gamma) = L$, entonces existe una curva $\sigma : [0, L] \rightarrow X$ tal que $\gamma = \sigma \circ \lambda$. A esta curva le

llamaremos *parametrización por longitud de arco o parametrización unitaria* de γ .

Demostración : $\lambda(c) = \ell_d(\gamma |_{[a,c]})$ es continua, no decreciente y suprayectiva de $[a, b]$ a $[0, L]$. Así que tomando una inversa derecha $g : [0, L] \rightarrow [a, b]$ y componiendo con γ obtenemos para $s_1 < s_2$ en $[0, L]$:

$$\begin{aligned} d(\gamma(g(s_1)), \gamma(g(s_2))) &\leq \ell_d(\gamma |_{[g(s_1), g(s_2)]}) \\ &= \ell_d(\gamma |_{[a, g(s_2)]}) - \ell_d(\gamma |_{[a, g(s_1)]}) \\ &= s_2 - s_1. \end{aligned}$$

Por lo que $\gamma \circ g$ es continua.

Para ver la igualdad $\gamma = \gamma \circ g \circ \lambda$, sólo basta ver que si $\lambda(c_1) = \lambda(c_2)$, entonces

$$\begin{aligned} d(\gamma(c_1), \gamma(c_2)) &\leq \ell_d(\gamma |_{[c_1, c_2]}) \\ &= \ell_d(\gamma |_{[a, c_1]}) - \ell_d(\gamma |_{[a, c_2]}) \\ &= \lambda(c_1) - \lambda(c_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Y por lo tanto $\gamma(c_1) = \gamma(c_2)$. Así que por el quinto punto del teorema 1.1.4, la función $\delta(r) = \ell_d(\gamma \circ g |_{[0, r]})$ tiene la expresión $\delta(r) = r$. \square

Componiendo con una homotecia también existen parametrizaciones $\gamma : [0, \frac{L}{\rho}] \rightarrow X$ para cada $\rho > 0$ tales que la función $\delta(r) = \ell_d(\gamma |_{[0, r]})$ tiene la expresión $\delta(r) = \rho r$. A tales parametrizaciones les llamaremos de *velocidad constante*.

Apéndice D

Leyes de Cosenos

En este apéndice estudiaremos las leyes de cosenos en los espacios $\mathbb{M}^2(k)$, donde $\mathbb{M}^2(k)$ es la superficie orientable simplemente conexa de curvatura Gaussiana constante k .

- Si $k > 0$, $\mathbb{M}^2(k)$ será la esfera de radio $\frac{1}{\sqrt{k}}$ con la métrica inducida por la usual.
- Si $k = 0$, $\mathbb{M}^2(k) = \mathbb{R}^2$.
- Si $k < 0$, $\mathbb{M}^2(k) = \frac{1}{\sqrt{|k|}}\mathbb{H}^2$ donde $\frac{1}{\sqrt{|k|}}\mathbb{H}^2$ es \mathbb{H}^2 con la métrica usual multiplicada por $\frac{1}{\sqrt{|k|}}$.

Denotaremos por D_k al diámetro de $M^2(k)$. Es decir $D_k = \infty$ si $k \leq 0$ y $D_k = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ si $k > 0$.

Definición D.1 Sea $k \in \mathbb{R}$, un *triángulo en $\mathbb{M}^2(k)$* es una colección de tres puntos distintos en $\mathbb{M}^2(k)$ con tres curvas minimizantes que los unen por parejas.

Lema D.2 (Ley de cosenos para $k = 0$) Sea abc un triángulo en \mathbb{R}^2 y θ el ángulo entre la recta ab y la recta ac . Entonces

$$\cos(\theta) = \frac{d^2(a, b) + d^2(a, c) - d^2(b, c)}{2d(a, b)d(a, c)}.$$

Demostración : Calculando $d^2(b, c)$ con producto punto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 d^2(b, c) &= |b - c|^2 \\
 &= (b - c) \cdot (b - c) \\
 &= (b - a - c + a) \cdot (b - a - c + a) \\
 &= (b - a) \cdot (b - a) + (c - a) \cdot (c - a) - 2(b - a) \cdot (c - a) \\
 &= |b - a|^2 + |c - a|^2 - 2(b - a) \cdot (c - a) \\
 &= d^2(a, b) + d^2(a, c) - 2d(a, b)d(a, c) \cos(\theta).
 \end{aligned}$$

De donde se sigue la igualdad. \square

Lema D.3 (Ley de cosenos para $k > 0$) Sea abc un triángulo en $\mathbb{M}^2(k)$ tal que $\max\{d(a, b), d(a, c)\} < D_k$ y θ el ángulo entre las geodésicas ab y ac . Entonces

$$\cos(\theta) = \frac{\cos(\sqrt{k}d(b, c)) - \cos(\sqrt{k}d(a, b)) \cos(\sqrt{k}d(a, c))}{\sin(\sqrt{k}d(a, b)) \sin(\sqrt{k}d(a, c))}.$$

Demostración : Multiplicando las distancias por \sqrt{k} la curvatura se vuelve 1 y las cantidades a considerar no cambian, por lo que basta demostrar el caso $k = 1$ con $\mathbb{M}^2(k) = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

De nuevo, como las expresiones son invariantes bajo rotaciones, podemos suponer que $a = (0, 0, 1)$. En este caso, como $\max\{d(a, b), d(a, c)\} < \pi$, b y c tienen la forma:

$$b = (x_1 \sin(d(a, b)), x_2 \sin(d(a, b)), \cos(d(a, b)))$$

$$c = (y_1 \sin(d(a, c)), y_2 \sin(d(a, c)), \cos(d(a, c)))$$

Donde $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{S}^1$ y θ es el ángulo entre (x_1, x_2) y (y_1, y_2) . Así que:

$$\begin{aligned}
 \cos(d(b, c)) &= b \cdot c \\
 &= (x_1 y_1 + x_2 y_2) \sin(d(a, b)) \sin(d(a, c)) + \cos(d(a, b)) \cos(d(a, c)) \\
 &= (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) \sin(d(a, b)) \sin(d(a, c)) + \cos(d(a, b)) \cos(d(a, c)) \\
 &= \cos(\theta) \sin(d(a, b)) \sin(d(a, c)) + \cos(d(a, b)) \cos(d(a, c)).
 \end{aligned}$$

De donde se sigue la igualdad. \square

Antes de analizar el caso $k < 0$, probaremos un par de fórmulas para la distancia entre dos puntos en \mathbb{H}^2 en el modelo del disco de Poincaré.

Proposición D.4 Sean $u, v \in \mathbb{H}^2$ en el modelo del disco de Poincaré. Entonces la distancia está dada por

$$\cosh(d(u, v)) = 1 + \frac{2|v - u|}{(1 - |u|^2)(1 - |v|^2)}.$$

Cuando $u = 0$, se tiene también

$$\sinh(d(u, v)) = \frac{2|v|}{1 - |v|^2}.$$

Demostración : Como la expresión es invariante bajo isometrías de \mathbb{H}^2 ([9], p. 77), basta demostrar ambas igualdades cuando $u = 0$. En este caso tenemos la fórmula $d(u, v) = \log\left(\frac{1+|v|}{1-|v|}\right)$ ([9], p. 64). Calculando:

$$\begin{aligned} \cosh(d(u, v)) &= \frac{\frac{1+|v|}{1-|v|} + \frac{1-|v|}{1+|v|}}{2} \\ &= \frac{1 + |v|^2}{1 - |v|^2} \\ &= 1 + \frac{1 + |v|^2 - 1 + |v|^2}{1 - |v|^2} \\ &= 1 + \frac{2|v|^2}{1 - |v|^2} \\ &= 1 + \frac{2|u - v|^2}{(1 - |u|^2)(1 - |v|^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh(d(u, v)) &= \frac{\frac{1+|v|}{1-|v|} - \frac{1-|v|}{1+|v|}}{2} \\ &= \frac{2|v|}{1 - |v|^2}. \end{aligned}$$

\square

Lema D.5 (Ley de cosenos para $k < 0$) Sea abc un triángulo en $\mathbb{M}^2(k)$ y θ el ángulo entre las geodésicas ab y ac . Entonces

$$\cos(\theta) = \frac{\cosh(\sqrt{|k|}d(a, b)) \cosh(\sqrt{|k|}d(a, c)) - \cosh(\sqrt{|k|}d(b, c))}{\sinh(\sqrt{|k|}d(a, b)) \sinh(\sqrt{|k|}d(a, c))}.$$

Demostración : Multiplicando las distancias por $\sqrt{|k|}$ la curvatura se vuelve -1 y las cantidades a considerar no cambian, por lo que basta demostrar el caso $k = -1$.

De nuevo, como las expresiones son invariantes bajo isometrías de \mathbb{H}^2 , podemos suponer que estamos trabajando en el modelo del disco de Poincaré, $a = 0$ y $b \in \mathbb{R}^+$. En este caso los puntos tienen la forma:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= r_1 \\ c &= r_2 e^{i\theta} \end{aligned}$$

Usando las fórmulas de distancia de la proposición anterior y la ley de cosenos para $k = 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \cosh(d(b, c)) &= 1 + 2 \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta)}{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)} \\ &= \frac{1 - r_1^2 - r_2^2 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1^2 + 2r_2^2 - 4r_1 r_2 \cos(\theta)}{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)} \\ &= \left(\frac{1 + r_1^2}{1 - r_1^2} \right) \left(\frac{1 + r_2^2}{1 - r_2^2} \right) - \left(\frac{2r_1}{1 - r_1^2} \right) \left(\frac{2r_2}{1 - r_2^2} \right) \cos(\theta) \\ &= \left(1 + \frac{2r_1^2}{1 - r_1^2} \right) \left(1 + \frac{2r_2^2}{1 - r_2^2} \right) - \left(\frac{2r_1}{1 - r_1^2} \right) \left(\frac{2r_2}{1 - r_2^2} \right) \cos(\theta) \\ &= \cosh(d(a, b)) \cosh(d(a, c)) - \sinh(d(a, b)) \sinh(d(a, c)) \cos(\theta). \end{aligned}$$

De donde se sigue la igualdad. \square

Del lema D.3 podemos observar que $d(b, c)$ es una función continua y creciente de θ . De ahí también obtenemos que la imagen es el intervalo $[|d(x, y) - d(x, z)|, \min\{d(x, y) + d(x, z), 2D_k - (d(x, y) + d(x, z))\}]$, pues cuando $\theta = \pi$ tenemos que

$$\cos(\sqrt{k}d(b, c)) = \cos(\sqrt{k}(d(a, b) + d(a, c))).$$

De donde $d(b, c) = \min\{d(x, y) + d(x, z), 2D_k - (d(x, y) + d(x, z))\}$.

Corolario D.6 Todo triángulo en $\mathbb{M}^2(k)$ tiene perímetro menor o igual a $2D_k$ y la igualdad sólo se da cuando los tres ángulos del triángulo son iguales a π o la longitud de un lado es D_k .

□

Bibliografía

- [1] Ahlfors L.V., *Complex Analysis*, Harvard University, Mc Graw Hill. EUA (1966).
- [2] Boothby W.M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Second Edition, Academic Press Inc. EUA (1986).
- [3] Burago D., Burago Y., Ivanov S., *A Course In Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society. EUA-Rusia (2001).
- [4] Burago Y., Gromov M., Perelman G., *Alexandrov Spaces with Curvature Bounded Below*, Russian Math. Surveys 47:2. Rusia (1992).
- [5] Do Carmo M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall. EUA (1976).
- [6] Do Carmo M., *Geometria Riemanniana*, IMPA. Brasil (1979).
- [7] Gauss K.F., *General Investigations of Curved Surfaces*, Raven Press, New York. EUA (1965).
- [8] Kapovitch V., *Perelman's Stability Theorem*, University of Toronto, Canadá (2000).
- [9] Lascurain Orive A., *Una Introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional*, Temas de Matemáticas, Las Prensas de Ciencias. UNAM. México (2005).
- [10] Lee J.M., *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics, Springer. EUA (1997).

- [11] Páez Cárdenas J., *Cálculo Integral de Varias Variables*, Temas de Matemáticas, Las Prensas de Ciencias. UNAM. México (2012).
- [12] Perelman G., *Spaces with Curvature Bounded Below*, Steklov Institute, University of California. EUA-Rusia (1994).
- [13] Perelman G., *Alexandrov Spaces with Curvature Bounded Below II*, preprint. Rusia (1991).
- [14] Plaut C., *Metric Spaces of Curvature $\geq k$* , A Handbook of Geometric Topology. EUA (2002).
- [15] Prieto de Castro C., *Topología Básica*, Segunda Edición, Ediciones Científicas Universitarias, Fondo de Cultura Económica. México (2013).
- [16] Riemann B., *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Alemania (1854).
- [17] Spivak M., *Calculus on Manifolds*, Brandeis University, Addison-Wesley Publishing Company. EUA (1995).