UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CATEGORÍAS COMPLETAMENTE DISTRIBUTIVAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Eduardo Sebastián Martínez Ruiz

TUTOR

Dr. Francisco Marmolejo Rivas
2016

Ciudad Universitaria, D. F.

Categorías completamente distributivas

February 19, 2016

1.- Datos del alumno
Martínez
Ruiz
Eduardo Sebastián
55 24 14 49 28
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
411075613

2.- Datos del tutor
Dr.
Francisco
Marmolejo
Rivas

3.- Datos del sinodal 1
Dr.
Octavio
Mendoza
Hernández

4.- Datos del sinodal 2
Dr.
José
Ríos
Montes

5.- Datos del sinodal 3
Dr.
Hugo
Juárez
Anguiano

6.- Datos del sinodal 4
Dr.
Adrián
Vázquez
Márquez

7.- Datos del trabajo escrito
Categorías completamente distributivas
173 páginas
2016

Agradecimientos

Agradezco principalmente al Dr. Francisco Marmolejo por todas sus enseñanzas, por tenerme paciencia y por todo el tiempo invertido en la realización de este documento.

Agradezco a mi familia por todo su apoyo a lo largo de este proceso.

A mi madre por tener esa ganas interminables de salir adelante y enseñarme a nunca rendirme no importa cual sea el reto.

A mi padre por todos sus consejos e inculcarme el gusto por el estudio.

A mi hermano por todo su cariño, compresión y enseñarme que la vida es más que solo estudiar.

A mi primo Leonardo por su cariño y por estar al pendiente de mi bienestar.

A Jorge Franco por todo el apoyo brindado pues sin él, esto no hubiera sido posible.

A mis amigos Rodolfo, Moises, Milton, Luis, Esteban, Sebastián y Marcos, por brindarme su amistad, por su gran apoyo y por las incontables horas de diversión que tuvimos a lo largo de la carrera.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM con clave de proyecto IN110814 y cuyo nombre es Teoría de Categorías: Cohesión axiomática, distributividad total y topos. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Contenido

Introducción

Decimos que una categoría $\mathcal{K}$ localmente pequeña es total si el funtor de Yoneda $Y_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathbf{Con}^{\mathcal{K}^{\mathrm{op}}}$ tiene adjunto izquierdo X, esta definición fue dada por Street y Walters en el artículo [6]. Una categoría total $\mathcal{K}$ se dice que es totalmente distributiva si el funtor X tiene adjunto izquierdo W, esta definición puede consultarse en el artículo [8]. Un ejemplo de estas dos definiciones es la categoría de conjuntos (**Con**), pues se tiene la siguiente cadena de adjunciones.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{Con} \arrow[r, bend left=60, "L"] \arrow[r, bend left=20, "Cte"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right=30, "Y"'] & \mathbf{Con}^{\mathbf{Con}^{\mathrm{op}}} \arrow[l, bend right=40, "Ev_{\phi}"'] \arrow[l, bend right=5, "Ev_1"']
\end{tikzcd}$$

Donde L está definida de la siguiente manera: $L(S)(X) = \begin{cases} S\ si\ X=\emptyset \\ \phi\ si\ X\neq\emptyset \end{cases}$ con $S, X \in$ **Con**. En el artículo [8] se demostró que cualquier categoría $\mathcal{B}$ que tenga una cadena de adjunciones $U \dashv V \dashv W \dashv X \dashv Y$ es equivalente a **Con**, con Y el funtor de Yoneda en $\mathcal{B}$.

Una categoría $\mathcal{K}$ localmente pequeña se dice que es completamente distributiva si $\mathcal{K}$ es cocompleta pequeña, completa pequeña y la asignación de colímites, $X : \mathcal{P}\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ preserva todos los límites pequeños, en la cual $\mathcal{P}\mathcal{K}$ es la subcategoría plena de $\mathbf{Con}^{\mathcal{K}^{\mathrm{op}}}$ determinada por todos los colímites pequeños representables, esto se puede consultar en el artículo [9]. La idea básica detrás de las categorías completamente distributivas es que cierto tipo de límites en $\mathcal{K}$ se dristribuyen sobre los colímites de $\mathcal{K}$, esto nos dice que tiene ciertas leyes distributivas.

El objetivo de este trabajo, en principio, fue el estudio de las categorías completamente distributivas y las categorías totalmente distributivas, y mostrar que relación guardan estos dos tipos de categorías. Esta relación es que toda categoría totalmente distributiva es completamente distributiva, además ver un resultado interesante que nos provee de muchos ejemplos de categorías totales, el cual es que toda categoría monádica sobre conjuntos es total, este resultado puede consultarse en el artículo [7]. Sin embargo el tiempo para desarrollar de manera adecuada estos temas no era el suficiente por lo que se optó por elaborar un texto que prepara al lector para abordar y entender los temas antes mencionados con mayor facilidad. Para una buena comprensión del texto, suponemos que el lector debe estar familiarizado con algunos conceptos de la Teoría de Categorías que pueden consultarse en los libros [1], [2] y en el artículo [10].

En el primer capítulo hablaremos sobre los funtores semi-topológicos, daremos una caraterización interna de estos funtores por medio de factorizaciones de conos o coconos, lo cual quiere decir que se pueden caracterizar por inicialidad o finalidad en cierto sentido; esto nos dice que los funtores semi-topológicos son autoduales. Este tipo de funtores generalizan a los funtores topológicos. Veremos algunas propiedades interesantes de estos funtores como son: todo funtor semitopológico es fiel y además tiene adjunto izquierdo.

En el segundo capítulo hablaremos sobre los objetos coma en una 2-categoría, esta idea viene de generalizar las categorías coma en **Cat** pues nos permitirán posteriormente definir las extensiones y levantamientos puntuales. Daremos una versión del Lema de Yoneda libre de conjuntos, la cual nos dice que hay una biyección entre morfismos de palmos definidos en ciertos objetos coma, esta versión del Lema de Yoneda nos permite dar un resultado importante sobre extensiones en la identidad. Además veremos que si uno de los morfismos que definen un objeto coma tiene adjunto entonces podemos levantar un adjunto al morfismo "paralelo" al que tiene al adjunto.

En el capítulo 3 definiremos las extensiones derechas (puntuales) y levantamientos izquierdos (puntuales), que a simples rasgos son extensiones Kan. Las extensiones derechas nos servirán de herramienta en el siguiente capítulo para definir y trabajar las diagonales de una 2-celda. Daremos un resultado el cual nos permite caracterizar, por medio de la 2-celdas que tengan la propiedad de escisión de idempotentes, cuando un funtor tiene adjunto izquierdo.

En el capítulo 4 definiremos la categoría $\mathcal{K}||$X sobre una 2-categoría $\mathcal{K}$, que en simples términos es la generalización de la categoría coma pero tomando como base a una 2-categoría; con la categoría $\mathcal{K}||$X definiremos lo que es una diagonal de un diagrama como el que sigue

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd} \tag{1}$$

pues nos permitirá trabajar de manera más sencilla con las diagonales, ya que una diagonal en $\mathcal{K}$ la podemos ver como una 2-celda con la propiedad de extensión derecha en ciertos morfismos. La razón por la cuál se estudian las diagonales en este capítulo es por que nos interesa ver bajo que condiciones es posible levantar un adjunto izquierdo de u a un adjunto izquierdo de v.

Capítulo 1

Funtores semi-topológicos

En este capítulo daremos las definiciones de funtores semi-topológicos y funtores topológicos, también se verá que los funtores semi-topológicos tienen adjunto izquierdo y que para cualquier subcategoría reflexiva el funtor inclusión es un funtor semi-topológico. Para esto definimos en primer lugar los levantamientos P-semi iniciales y los levantamientos P-semi finales y veremos la relación entre estas dos definiciones. Toda la información que se verá en este capítulo puede verse en el artículo [3].

Definición 1.1. *Dado un funtor* $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$*, un* P*-cono es una terna* (X, ξ, D)*, donde* X *es un objeto de* $\mathcal{X}$*,* D *es un funtor* $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ *y* $\xi : \Delta X \longrightarrow P \circ D$ *es una transformación natural.*

Para abreviar llamaremos a ξ un P-cono.

Observación 1.2. Si $\mathcal{D} = 1$ entonces los P-conos pueden verse como como pares, (x, A), donde A es un objeto de $\mathcal{A}$ y $x : X \to PA$ es un morfismo en $\mathcal{X}$, estos P-conos forman la clase de $\mathrm{Mor}(P)$ llamados P-morfismos.

Observación 1.3. Si $\mathcal{D} = \emptyset$ entonces los P-conos y P-coconos se pueden ver como objetos de $\mathcal{X}$.

Definición 1.4. *Sea* $\xi : \Delta X \longrightarrow P \circ D$ *un* P*-cono. Un levantamiento* P*-semi inicial de* ξ *consiste de un* P*-morfismo* $e : X \to PA$ *y un* $\mathcal{A}$*-cono* $\alpha : \Delta A \longrightarrow D$ *tales que:*

$$(P\alpha)(\Delta e) = \xi \qquad (*)$$

y satisfacen la siguiente condición:

(SI) *Para todo* P*-comorfismo* $y : PB \to X$ *y* $\mathcal{A}$*-cono* $\beta : \Delta B \longrightarrow D$ *con* $\xi(\Delta y) = P \circ \beta$ *hay un único morfismo* $b : B \to A$ *tal que* $ey = Pb$ *y* $\alpha(\Delta b) = \beta$*.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, "P\alpha"] \\
\Delta PB \arrow[r, "\Delta y"] \arrow[urr, dotted, "\Delta Pb"] \arrow[drr, "P\beta"'] & \Delta X \arrow[ur, "\Delta e"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\
 & & P \circ D
\end{tikzcd}$$

Llamaremos a la ecuación (*) una factorización P-semi inicial de ξ. Si e es un isomorfismo (morfismo identidad), se le llamará a α un levantamiento P-inicial (propio) de ξ.

Definición 1.5. *Supongamos dada una factorización de ξ como en la ecuación (*). Diremos que la factorización es* rígida*, si y solo si se cumple la siguiente condición:*

(R) *Para todo endomorfismo $t : A \to A$ con $(Pt)e = e$ y $\alpha(\Delta t) = \alpha$ entonces se tiene que $t = Id_A$.*

Definición 1.6. *Sea $\alpha : \Delta A \longrightarrow D$ un $\mathcal{A}$-cono. Diremos que α es un cono P-inicial, si α es un levantamiento P-inicial propio de $P\alpha$.*

Es decir, α es un cono P-inicial si cumple que

$$P\alpha = P\alpha(Id_{PA}) \tag{1.1}$$

es una factorización P-semi inicial de $P\alpha$, esto es que para todo P-comorfismo $y : PB \to PA$ y $\mathcal{A}$-cono $\beta : \Delta B \longrightarrow D$ con $P\alpha(\Delta y) = P\beta$ hay un único morfismo $b : B \to A$ tal que $y = Pb$ y $\alpha(\Delta b) = \beta$

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, "P\alpha"] \\
\Delta PB \arrow[r, "\Delta y"] \arrow[urr, dotted, "\Delta Pb"] \arrow[drr, "P\beta"'] & \Delta PA \arrow[ur, "\Delta Id_{PA}"'] \arrow[dr, "P\alpha"] & \\
 & & P \circ D
\end{tikzcd}$$

Observación 1.7. La condición (SI) se satisface, si en (*), $\alpha : \Delta A \longrightarrow D$ es elegido como un cono P-inicial.

En efecto, sean α un cono P-inicial y $e : X \to PA$ un P-morfismo tales que $P\alpha(\varDelta e) = \xi$ con $\xi : \varDelta X \longrightarrow P \circ D$ un P-cono. Ahora veamos que se cumple la condición (SI): sea $\beta : \varDelta B \longrightarrow D$ un $\mathcal{A}$-cono y sea $y : PB \to X$ un P-comorfismo tal que $\xi(\varDelta y) = P\beta$. Como $ey : PB \to PA$ es un P-comorfismo, β un $\mathcal{A}$-cono tales que $P\alpha(\varDelta ey) = P\beta$ y α es un cono P-inicial, entonces existe un único morfismo $b : B \to A$ tal que $\alpha(\varDelta b) = \beta$ y $Id_{PA}(ey) = Pb$.

Observación 1.8. La condición (R) se satisface si en (*) $e : X \to PA$ puede ser elegida como un P-epimorfismo, donde P-epimorfismo significa que para todo $f, g : A \to B$ la ecuación $(Pf)e = (Pg)e$ implica $f = g$.

En efecto, sea $t : A \to A$ un endomorfismo tal que $(Pt)e = e$ y $\alpha(\varDelta t) = \alpha$ con $\alpha : \varDelta A \longrightarrow D$. Como Id_A cumple que $(PId_A)e = e$, entonces $(Pt)e = e = (PId_A)e$, por lo tanto $(Pt)e = (PId_A)e$ y, como e es P-epimorfismo, entonces $t = Id_A$. Por lo tanto se cumple la condición (R).

Observación 1.9. Para cada funtor $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$, todos los P-morfismos $x : X \to PA$ tienen una factorización P-semi inicial rígida la cual es $x = (PId_A)x$.

Veamos que la afirmación anterior se cumple: sea $\mathcal{D} = 1$ y definamos $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ de la siguiente manera, $D_0 = A$, $\xi : \varDelta X \longrightarrow P \circ D$ donde $\xi = x$, $e = x$ y $\alpha : \varDelta A \longrightarrow D$ donde $\alpha = Id_A$, los cuales cumplen $P\alpha(\varDelta e) = \xi$ pues $P\alpha(\varDelta e) = Id_A x = x = \xi$. Sean $y : PB \to X$ un P-comorfismo y $\beta : \varDelta B \longrightarrow D$ tales que $\xi(\varDelta y) = P\beta$. Como $D = 1$ entonces $\beta = b : B \to A$, por lo que $xy = Pb$, por lo que b cumple que $Pb = ey$ y $\alpha(\varDelta b) = \beta$ pues $\alpha(\varDelta b) = Id_A b = b = \beta$ y b es único, pues si $c : B \to A$ tal que $Pc = ey$ y $\alpha(\varDelta c) = \beta$, entonces $c = Id_A c = \alpha(\varDelta c) = \beta = b$, por lo tanto $c = b$. Ahora veamos que el levantamiento es rígido. Sea $t : A \to A$ un endomorfismo tal que $(Pt)e = e$ y $\alpha(\varDelta t) = \alpha$, como $\alpha = Id_A$ entonces $Id_A t = Id_A$ por lo tanto $t = Id_A$. Por lo tanto es rígido el levantamiento P-semi inicial de x.

$$\begin{tikzcd}
 & & PA \arrow[dd, "PId_A"] \\
PB \arrow[r, "y"] \arrow[urr, dotted, "Pb"] \arrow[drr, "Pb"'] & X \arrow[ur, "e=x"] \arrow[dr, "x"] & \\
 & & PA
\end{tikzcd}$$

Lema 1.10. *Si ξ es un cono límite que tiene un levantamiento P-semi inicial rígido como en la ecuación (*) , entonces α es un cono límite y e es un isomorfismo de $\mathcal{X}$.*

Demostración. Tenemos que $\xi : \varDelta X \longrightarrow P \circ D$ y $P\alpha : \varDelta A \longrightarrow P \circ D$ son $\mathcal{X}$-conos, por hipótesis ξ es límite, entonces existe un único morfismo $q : PA \to X$

tal que $\xi(\Delta q) = P\alpha$ y por hipótesis se tiene que $P\alpha(\Delta e) = \xi$. Como ξ es cono límite entonces, existe un único morfismo $z : X \to X$ tal que $\xi(\Delta z) = \xi$, sin embargo z tiene que ser Id_X, pues Id_X cumple que $\xi(\Delta Id_X) = \xi$ y como z es único entonces $z = Id_X$. Como $qe : X \to X$ es tal que $\xi(\Delta(qe)) = \xi$ por lo tanto $q \circ e = Id_X$, esto por la unicidad. Ahora el levantamiento P-semi inicial de ξ cumple la condición (SI) de la definición (1.4), dado que $q : PA \to X$ es un P-comorfismo y α es un $\mathcal{A}$-cono tal que $\xi(\Delta q) = P\alpha$ entonces existe un único morfismo $t : A \to A$ tal que $Pt = eq$ y $\alpha(\Delta t) = \alpha$, como es rígida la factorización entonces $t = Id_A$, por lo que $Id_{PA} = e \circ q$. Por lo tanto e es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, "P\alpha"] \\
\Delta PA \arrow[r, "\Delta q"] \arrow[urr, dotted, "\Delta Pt=\Delta Id_{PA}"] \arrow[drr, "P\alpha"'] & \Delta X \arrow[ur, "\Delta e"] \arrow[dr, "\xi"] & \\
 & & P \circ D
\end{tikzcd}$$

Sea ahora $\beta : \Delta B \longrightarrow D$ un $\mathcal{A}$-cono, entones $P\beta$ es un $\mathcal{X}$-cono y como ξ es límite, entonces existe un único morfismo $d : PB \to X$ tal que $\xi(\Delta d) = P\beta$, ya que la factorización cumple la condición (SI), entonces existe una única flecha $s : B \to A$ tal que $Ps = ed$ y $\beta = \alpha(\Delta s)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, "P\alpha"] \\
\Delta PB \arrow[r, "\Delta d"] \arrow[urr, dotted, "\Delta Ps"] \arrow[drr, "P\beta"'] & \Delta X \arrow[ur, "\Delta e"] \arrow[dr, "\xi"] & \\
 & & P \circ D
\end{tikzcd}$$

Consideremos un morfismo $r : B \to A$ tal que $\beta = \alpha(\Delta r)$. Entonces para ver que que $r = s$ basta con demostrar que $Pr = ed$. Como q es un isomorfismo, basta con ver que $(Pr)q = edq$. Como el codominio de q es X, el cual es vértice del cono límite ξ, basta con ver que para todo $i \in \mathcal{D}$, $(Pr)q\xi_i = edq\xi_i$, lo cual es fácil.

Por lo tanto α es cono límite. □

Definición 1.11. *Sea $\xi : P \circ D \longrightarrow \Delta X$ un P-cocono. Un levantamiento P-semi final de ξ consiste de un P-morfismo $e : X \to PA$ y un $\mathcal{A}$-cocono*

$\alpha : D \longrightarrow \Delta A$ tales que:

$$(\Delta e)\xi = P\alpha \qquad (**)$$

y satisfacen la siguiente condición:

(SF) *Para todo P-morfismo $y : X \to PB$ y $\mathcal{A}$-cocono $\beta : D \longrightarrow \Delta B$ con $(\Delta y)\xi = P\beta$ existe un único morfismo $t : A \to B$ tal que $(Pt)e = y$ y $(\Delta t)\alpha = \beta$.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, dotted, "\Delta Pt"] \\
P \circ D \arrow[r, "\xi"] \arrow[urr, "P\alpha"] \arrow[drr, "P\beta"'] & \Delta X \arrow[ur, "\Delta e"] \arrow[dr, "\Delta y"'] & \\
 & & \Delta PB
\end{tikzcd}$$

Llamaremos a la ecuación (**) una prolongación P-semi final de ξ, si e es un isomorfismo (morfismo identidad), se le llamará a α un levantamiento P-final (propio) de ξ.

Observación 1.12. "Semi final" no es la noción dual de "semi inicial", sus duales son "co-semi final" y "co-semi inicial" respectivamente.

Para comprender mejor la obsevación anterior daremos la definición de levantamiento P-co-semi inicial.

Definición 1.13. *Sea $\xi : P \circ D \longrightarrow \Delta X$ un P-cocono. Un levantamiento P-co-semi inicial de ξ consiste de un P-comorfismo $e : PA \to X$ y un $\mathcal{A}$-cocono $\alpha : D \longrightarrow \Delta A$ tales que:*

$$\xi = (\Delta e)P\alpha \qquad (***)$$

y satisfacen la siguiente condición:

(CO-SI) *Para todo P-morfismo $y : X \to PB$ y $\mathcal{A}$-cocono $\beta : D \longrightarrow \Delta B$ con $(\Delta y)\xi = P\beta$, entonces existe un único morfismo $t : A \to B$ con $Pt = ye$ y $(\Delta t)\alpha = \beta$.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, dotted, "\Delta Pt"] \arrow[dl, "\Delta e"] \\
P \circ D \arrow[r, "\xi"] \arrow[urr, "P\alpha"] \arrow[drr, "P\beta"'] & \Delta X \arrow[dr, "\Delta y"] & \\
 & & \Delta PB
\end{tikzcd}$$

Llamaremos a la ecuación (***) una factorización P-co-semi inicial de ξ, si e es un isomorfismo (morfismo identidad), se le llamará a α un levantamiento P-co-inicial (propio) de ξ.

Definición 1.14. *Sea una factorización P-co-semi inicial de ξ como en la ecuación (***), se denomina co-rígida si para todo endomorfismo $t : A \to A$ con $e(Pt) = e$ y $(\Delta t)\alpha = \alpha$ entonces se tiene que $t = Id_A$.*

Observación 1.15. Una prolongación P-semi final de un P-cocono esta determinada de manera única salvo isomorfismo.

En efecto, ya que si $\xi : P \circ D \longrightarrow \Delta X$ es un P-cocono y tenemos $\alpha : D \longrightarrow \Delta A$, $e : X \to PA$ tales que $P\alpha = (\Delta e)\xi$ y $\alpha' : D \longrightarrow \Delta A'$, $e' : X \to PA'$ tales que $P\alpha' = (\Delta e')\xi$ son dos prolongaciones P-semi finales de ξ, entonces existe $f : A \to A'$ tal que $(Pf)e = e'$ y $(\Delta f)\alpha = \alpha'$ y $g : A' \to A$ tal que $(Pg)e' = e$ y $(\Delta g)\alpha' = \alpha$ puesto que son prolongaciones P-semi finales de ξ.

$$\begin{tikzcd}
& & \Delta PA \arrow[dd, dotted, shift right, "\Delta Pf"'] \\
P \circ D \arrow[urr, "P\alpha"] \arrow[r, "\xi"] \arrow[drr, "P\alpha'"'] & \Delta X \arrow[ur, "\Delta e"] \arrow[dr, "\Delta e'"] & \\
& & \Delta PA' \arrow[uu, dotted, shift right, "\Delta Pg"']
\end{tikzcd}$$

Como $P\alpha$ es un P-cocono y e es un P-comorfismo tal que $P\alpha = (\Delta e)\xi$ entonces existe $s : A \to A$ tal que $(Ps)e = e$ y $(\Delta s)\alpha = \alpha$ por ser α prolongación P-semi final de ξ y como la Id_A cumple lo mismo utilizando la unicidad de s, entonces $s = Id_A$, pero $gf : A \to A$ cumple que $(P(gf))e = e$ y $(\Delta(gf))\alpha = \alpha$, por la unicidad de s, entonces $s = gf$ por lo tanto $Id_A = gf$. De manera análoga se obtiene que $Id_{A'} = fg$. Por lo tanto $f : A \to A'$ es isomorfismo, por lo que los levantamientos P-semi finales son únicos salvo isomorfismo.

Definición 1.16. *Sea $e : X \to PA$ un P-morfismo. Decimos que e es un P-cociente, si aparece en alguna prolongación P-semi final, es decir, si existen un P-cocono $\xi : P \circ D \longrightarrow \Delta X$ y un $\mathcal{A}$-cocono $\alpha : D \longrightarrow \Delta A$ tales que cumplen la ecuación (**) y la condición* (SF).

Observación 1.17. Consideremos las siguientes subclases de $\mathrm{Mor}(P)$:
$\mathrm{Iso}(P) := \{(e, A) \mid e \text{ es un isomorfismo de } \mathcal{X}\}$,
$\mathrm{Quot}(P) := \{(e, A) \mid (e, A) \text{ es un } P\text{-cociente}\}$,
$\mathrm{Epi}(P) := \{(e, A) \mid (e, A) \text{ es un } P\text{-epimorfismo}\}$.
Si P es un funtor fiel se tienen las siguientes contenciones

$$\mathrm{Iso}(P) \subseteq \mathrm{Quot}(P) \subseteq \mathrm{Epi}(P).$$

Probemos la afirmación anterior. Sea $(e, A) \in \text{Iso}(P)$, entonces $e : X \to PA$ es un isomorfismo con lo cual tenemos $e^{-1} : PA \to X$ tal que $e^{-1}e = Id_x$ y $ee^{-1} = Id_{PA}$, sea $\xi = e^{-1}$ y $\alpha = Id_A$, por lo que cumplen que $e\xi = PId_A$ pues $\xi = e^{-1}$.

Sean $y : X \to PB$ y $\beta : A \to B$ tal que $y\xi = P\beta$. Definimos el morfismo $t := \beta$ el cual cumple que $(Pt)e = y$ pues $Pt = P\beta = ye^{-1}$ por lo que $(Pt)e = ye^{-1}e = yId_X = y$, también cumple que $tId_A = \beta$ esto por como se definió t. Sea $z : A \to B$ tal que $(Pz)e = y$ y $zId_A = \beta$, entonces $z = zId_A = \beta = t$, por lo tanto $t = z$. Por lo que $(e, A) \in \text{Quot}(P)$, por lo tanto $\text{Iso}(P) \subseteq \text{Quot}(P)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & PA \arrow[dd, dotted, "Pt=P\beta"] \\
PA \arrow[urr, "PId_A"] \arrow[r, "\xi"] \arrow[drr, "P\beta"'] & X \arrow[ur, "e"'] \arrow[dr, "y"] & \\
 & & PB
\end{tikzcd}$$

Sea $(e, A) \in \text{Quot}(P)$, entonces existen $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ diagrama, $\xi : P \circ D \longrightarrow \varDelta X$ P-cocono, $\alpha : D \longrightarrow \varDelta A$ $\mathcal{A}$-cocono tal que $(\varDelta e)\xi = P\alpha$ y cumplen la condición (SF). Sean $f, g : A \to B$ morfismos tales que $(Pf)e = (Pg)e$. Definimos el $\mathcal{A}$-cocono $\beta : D \longrightarrow \varDelta B$ de la siguiente manera: $\beta_d = f\alpha_d$ para todo $d \in \mathcal{D}$, es decir, $\beta = (\varDelta f)\alpha$; así mismo definimos el P-morfismo $y := (Pf)e : X \to PB$ que junto con β cumplen $(\varDelta y)\xi = P\beta$ ya que $(\varDelta y)\xi = (\varDelta((Pf)e))\xi = \varDelta Pf((\varDelta e)\xi) = (\varDelta Pf)P\alpha = P\beta$; como se cumple la condición (SF), entonces existe un único morfismo $t : A \to B$ tal que $(Pt)e = y$ y $(\varDelta t)\alpha = \beta$.

Observemos que $P((\varDelta g)\alpha) = P((\varDelta f)\alpha)$ ya que $P((\varDelta g)\alpha) = (\varDelta Pg)P\alpha = \varDelta Pg((\varDelta e)\xi) = (\varDelta(Pg)e)\xi = (\varDelta y)\xi = P\beta = P((\varDelta f)\alpha)$ y, como P es fiel, entonces $(\varDelta g)\alpha = (\varDelta f)\alpha$. El morfismo g cumple que $(Pg)e = y$ pues $(Pg)e = (Pf)e$ y cumple también que $(\varDelta g)\alpha = \beta$ por lo mencionado anteriormente; por la unicidad de t, entonces $t = g$, pero el morfismo f cumple trivialmente que $(Pf)e = y$ y $(\varDelta f)\alpha = \beta$, por la unicidad de t, entonces $t = f$, por lo que $f = g$.

Por lo tanto $(e, A) \in \mathrm{Epi}(P)$, con lo cual concluimos que $\mathrm{Quot}(P) \subseteq \mathrm{Epi}(P)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, dotted, "Pt"] \\
P \circ D \arrow[urr, "P\alpha"] \arrow[r, "\xi"] \arrow[drr, "P((\Delta f)\alpha)"'] & \Delta X \arrow[ur, "\Delta e"] \arrow[dr, "\Delta y"] & \\
 & & \Delta PB
\end{tikzcd}$$

Lema 1.18. *Dado un levantamiento P-semi final de un cocono colímite ξ como en la ecuación (**), entonces α también es un cocono colímite.*

A continuación se verá un teorema el cual nos permite ver la relación entre levantamiento P-semi inicial y levantamiento P-semi final. Es importante este teorema ya que nos permitirá demostrar la equivalencia entre dos definiciones que se vieron anteriormente.

Teorema 1.19. *Sea $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor y sea $Q \subseteq Mor(P)$ una subclase. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todo P-cono ξ tiene un levantamiento P-semi inicial rígido como en la ecuación (*), tal que $(e, A) \in Q$.*

2. *Todo P-cocono ξ tiene un levantamiento P-semi final como en la ecuación (**), tal que $(e, A) \in Q$.*

Antes de probar este teorema, se verá un lema el cual nos permite saber que si se cumple alguna de las dos condiciones anteriores, entonces el funtor P es fiel, además nos servirá de herramienta para demostrar el teorema anterior.

Lema 1.20. *Dadas las siguientes condiciones:*

1. *Todo P-cono ξ tiene un levantamiento P-semi inicial rígido como en la ecuación (*), tal que $(e, A) \in Q$.*

2. *Todo P-cocono ξ tiene un levantamiento P-semi final como en la ecuación (**), tal que $(e, A) \in Q$.*

Si la condición (1) se cumple, entonces P es un funtor fiel. De la misma manera, si se cumple la condición (2) entonces P es un funtor fiel.

DEMOSTRACIÓN. 1. Sean $f, g : A \to B$ $\mathcal{A}$-morfismos tal que $Pf = Pg$.

Definamos la categoría discreta $\mathcal{I} := \mathrm{Mor}(\mathcal{A})$, donde $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$ es la clase de todos los morfismos de $\mathcal{A}$, también definamos el diagrama $D : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $Di := B$ para todo $i \in \mathcal{I}$.

Definamos la transformación natural $\xi : \Delta PA \longrightarrow P \circ D$ donde para todo $i \in \mathcal{I}$, $\xi_i := Pf : PA \to PB$. Con esto formamos el siguiente P-cono (PA, ξ, D). Por hipótesis, el P-cono tiene un levantamiento P-semi inicial rígido, esto es, existen C un objeto de $\mathcal{A}$, $e : PA \to PC$ un morfismo en $\mathcal{X}$ tal que $(e, C) \in Q$ y un $\mathcal{A}$-cono $\alpha : \Delta C \longrightarrow D$ los cuales cumplen lo siguiente:

$$(P\alpha_i)e = Pf \quad \text{para todo} \;\; i \in \mathcal{I} \tag{1.2}$$

Es decir cumplen con la ecuación (*). Definamos la siguiente clase de morfismos

$$\mathcal{K} := \{h : A \to C : \alpha_i h \in \{f, g\} \;\; \text{para todo} \;\; i \in \mathcal{I}\}$$

claramente $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$.

Veamos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Para esto observemos que ξ se puede ver de la siguiente manera : $\xi = P\gamma$ en la cual $\gamma : \Delta A \longrightarrow D$ donde $\gamma_i = f$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Como $\xi(\Delta PId_A) = P\gamma$. Por la condición (SI), entonces existe un único morfismo $c : A \to C$ tal que $(Id_{PA})e = Pc$ y $\alpha(\Delta c) = \gamma$, por lo tanto $Pc = e$ y $\alpha_i c = f$, por lo que $c \in \mathcal{K}$.

$$\begin{tikzcd}
& & \Delta PC \arrow[dd, "P\alpha"] \\
\Delta PA \arrow[r, "\Delta Id_{PA}"] \arrow[urr, dotted, "\Delta Pc"] \arrow[drr, "\xi=P\gamma"'] & \Delta PA \arrow[ur, "\Delta e"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\
& & P \circ D
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\mathcal{K} \neq \emptyset$, por lo que existe una función suprayectiva $\sigma : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ con $\sigma_{|\mathcal{K}} = Id_{\mathcal{K}}$. Con esto se define la transformación natural $\beta : \Delta A \longrightarrow D$ de la siguiente manera:

$$\text{para todo } i \in \mathcal{I}, \; \beta_i := \begin{cases} f \text{ si } \; \alpha_i\sigma(i) = g \\ g \text{ si } \alpha_i\sigma(i) = f \end{cases}$$

Puesto que β cumple que $\xi(\Delta Id_{PA}) = P\beta$ ya que $Pf = Pg$, aplicando la condición (SI) a β, entonces existe un único morfismo $h : A \to C$ tal que

$\alpha_i h = \beta_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$ además $e(Id_{PA}) = Ph$.

$$\begin{tikzcd}
 & & PC \arrow[dd, "P\alpha_i"] \\
PA \arrow[r, "Id_{PA}"] \arrow[urr, dotted, "Ph"] \arrow[drr, "P\beta_i"'] & PA \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "Pf"] & \\
 & & PB
\end{tikzcd}$$

Como $\alpha_i h = \beta_i$ y $\beta_i \in \{f, g\}$, se tiene que $h \in \mathcal{K}$. Entonces $\sigma(h) = h$; si $\alpha_h \sigma(h) = f$ entonces $\beta_h = g$, por lo que $\alpha_h h = g$ por lo tanto $f = g$. Si $\alpha_h \sigma(h) = g$ entonces $\beta_h = f$, por lo que $\alpha_h h = f$, por lo tanto $f = g$. Por lo tanto $f = g$ y P es fiel.

2. Sean $f, g : B \to A$ morfismos en $\mathcal{A}$ tal que $Pf = Pg$.

Definamos la categoría discreta $\mathcal{I} := \mathrm{Mor}(\mathcal{A})$, también definamos el diagrama $D : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $D_i := B$ para todo $i \in \mathcal{I}$.

Definimos la transformación natural $\xi : P \circ D \longrightarrow \Delta PA$ tal que $\xi_i := Pf$. Por hipótesis el P-cocono (PA, ξ, D) tiene un levantamiento P-semi final, esto es, existen C un objeto de $\mathcal{A}$, $e : PA \to PC$ un morfismo de $\mathcal{X}$ tal que $(e, C) \in Q$ y un $\mathcal{A}$-cocono $\alpha : P \circ D \longrightarrow \Delta C$ los cuales cumplen lo siguiente:

$$e(Pf) = P\alpha_i \quad \text{para todo} \ \ i \in \mathcal{I} \tag{1.3}$$

Es decir cumplen con la ecuación (**). Definamos la siguiente clase de morfismos

$$\mathcal{K} := \{h : C \to A : h\alpha_i \in \{f, g\} \ \ \text{para todo} \ \ i \in \mathcal{I}\}$$

claramente $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$. Veamos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$ para esto notemos que ξ puede verse de la siguiente forma $\xi = P\delta$ en donde $\delta : D \longrightarrow \Delta A$ y $\delta_i = f$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Ahora notemos que $(PId_A)\xi = P\delta$. Por la condición (SF), entonces existe un único morfismo $d : C \to A$ tal que $(Pd)e = PId_A$ y $(\Delta d)\alpha = \delta$, por lo tanto $d\alpha_i = f$, por lo que $d \in \mathcal{K}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PC \arrow[dd, dotted, "\Delta Pd"] \\
P \circ D \arrow[r, "\xi"] \arrow[urr, "P\alpha"] \arrow[drr, "\xi = P\delta"'] & \Delta PA \arrow[ur, "\Delta e"] \arrow[dr, "\Delta Id_{PA}"] & \\
 & & \Delta PA
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\mathcal{K} \neq \emptyset$, por lo que existe una función suprayectiva $\sigma : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ con $\sigma_{|\mathcal{K}} = Id_{\mathcal{K}}$. Con esta función definimos la siguiente transformación natural $\beta : D \longrightarrow \Delta A$ de la siguiente manera:

$$\text{para todo } \ i \in \mathcal{I}, \ \beta_i := \begin{cases} f & \text{si} \quad \sigma(i)\alpha_i = g \\ g & \text{si} \quad \sigma(i)\alpha_i = f \end{cases}$$

Como $Pf = Pg$ tenemos que $(\Delta P Id_A)\xi = P\beta$, por la condición (SF), entonces existe un único morfismo $h : C \to A$ tal que $h\alpha_i = \beta_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$ además $(Ph)e = Id_{PA}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & PC \arrow[dd, dotted, "Ph"] \\
PB \arrow[urr, "P\alpha_i"] \arrow[r, "Pf"] \arrow[drr, "P\beta_i"'] & PA \arrow[ur, "e"'] \arrow[dr, "Id_{PA}"] & \\
 & & PA
\end{tikzcd}$$

Como $h\alpha_i = \beta_i$ y $\beta_i \in \{f, g\}$, tenemos que $h \in \mathcal{K}$. Entonces $\sigma(h) = h$; si $\sigma(h)\alpha_h = f$ entonces $\beta_h = g$, por lo que $h\alpha_h = g$, por lo tanto $f = g$. Si $\sigma(h)\alpha_h = g$ entonces $\beta_h = f$, por lo que $h\alpha_h = f$, por lo tanto $f = g$. Por lo tanto $f = g$ y P es fiel. □

Observación 1.21. Observemos que este lema es falso si se restringe a que los diagramas sean pequeños.

En efecto, consideremos el funtor $P : \mathcal{A} \longrightarrow 1$ donde $\mathcal{A}$ es una categoría completa la cual no es un conjunto parcialmente ordenado y 1 es una categoría discreta la cual sólo tiene un objeto. Primero veamos que para este funtor cualquier P-cono pequeño tiene un levantamiento P-semi inicial rígido.

Sean $\mathcal{D}$ una categoría pequeña y $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ un funtor. Como $\mathcal{D}$ es pequeña y $\mathcal{A}$ es completa, entonces existe el cono límite $\alpha : A \longrightarrow D$. Sea $0 \in Ob(1)$ el único objeto de 1, por lo que el único P-cono que existe con el diagrama D es $\xi : \Delta 0 \longrightarrow P \circ D$ donde $\xi_i = Id_0$ esto para todo $i \in D$.

Notemos que $\xi = P\alpha(\Delta Id_0)$ ya que el único morfismo de 1 es la Id_0, por lo que es una factorización P-semi inicial de ξ. Ahora veamos que cumple con la condición (SI), sea $\beta : \Delta B \longrightarrow D$ un $\mathcal{A}$-cono tal que $P\beta = \xi(\Delta Id_0)$, dado que β es un $\mathcal{A}$-cono con base en D, por la propiedad universal del cono límite α, entonces existe un único morfismo $b : B \to A$ tal que $\beta = \alpha(\Delta b)$ y claramente $Pb = Id_0$, por lo que ξ tiene un levantamiento P-semi inicial, sólo falta ver que es rígido.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, "P\alpha"] \\
\Delta PB \arrow[urr, dotted, "\Delta Pb"] \arrow[r, "\Delta Id_0"] \arrow[drr, "P\beta"'] & \Delta 0 \arrow[ur, "\Delta Id_0"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\
 & & P \circ D
\end{tikzcd}$$

Sea $t : A \to A$ tal que $(Pt)Id_0 = Id_0$ y $\alpha(\Delta t) = \alpha$, dado que α es un cono límite entonces existe un único morfismo $c : A \to A$ tal que $\alpha = \alpha(\Delta c)$, pero el morfsimo Id_A cumple también que $\alpha = \alpha(\Delta Id_A)$, ahora por la unicidad de c, entonces $c = Id_A$. De la misma manera tenemos que $c = t$, por lo que $t = Id_A$. Por lo tanto el levantamiento es rígido. Por lo que para cualquier P-cono pequeño, este tiene un levantamiento P-semi inicial rígido.
Por último notemos que P no es un funtor fiel ya que 1 sólo tiene un morfismo.

Observación 1.22. Notemos que para probar la parte 1) del Lema 1.20, no se usa que el levantamiento sea rígido.

Observación 1.23. Observemos que para probar las partes 1) y 2) del Lema 1.20, solo se usa que cualquier P-cono discreto tiene un levantamiento P-semi inicial y que cualquier P-cocono discreto tiene un levantamiento P-semi-final.

Procedamos a probar el Teorema 1.19.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Sea $\xi : P \circ D \longrightarrow \Delta X$ un P-cocono, con $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$. Definamos la categoría $\widetilde{\mathcal{D}}$, donde los objetos son los P-morfismos (x, B) tal que hay un $\mathcal{A}$-cocono $\beta : D \longrightarrow \Delta B$ con $(\Delta x)\xi = P\beta$. Como P es fiel por el lema 1.20, por lo tanto β está determinado de manera única por cada objeto en $\widetilde{\mathcal{D}}$. Por lo que podemos denotar a cada β de la siguiente manera $\beta_{x,B}$. Un morfismo $\widetilde{f} : (x, B) \to (y, C)$, es un $\mathcal{A}$-morfismo $f : B \to C$ tal que $(Pf)x = y$.

Definimos el funtor $\widetilde{D} : \widetilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $\widetilde{D}(x, B) := B$ para todo (x, B) objeto de $\widetilde{\mathcal{D}}$ y sea $\widetilde{\xi} : \widetilde{\Delta} X \longrightarrow P \circ \widetilde{D}$ el P-cono definido de la siguiente manera: $\widetilde{\xi}(x, B) := x$ para todo (x, B) en $\widetilde{\mathcal{D}}$. Por hipótesis tenemos que $\widetilde{\xi}$ tiene una factorización P-semi inicial rígida, entonces existen $e : X \to PA$ con $e \in Q$ y $\widetilde{\alpha} : \widetilde{\Delta} A \longrightarrow \widetilde{D}$ un $\mathcal{A}$-cono tales que $(P\widetilde{\alpha})\widetilde{\Delta} e = \widetilde{\xi}$, los cuales cumplen con la condición (SI); el P-morfismo e formará parte del levantamiento P-semi final.

Ahora definimos para cada $d \in Ob(\mathcal{D})$, el $\mathcal{A}$-cono $\widetilde{\beta}_d : \widetilde{\Delta} Dd \longrightarrow \widetilde{D}$ donde $\widetilde{\beta}_d(x, B) := \beta_{x,B}(d)$ para todo $(x, B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$, observemos que a cada objeto de $\widetilde{\mathcal{D}}$ es asignado uno y solo un morfismo ya que cada β está determinada de manera única por cada $(x, B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$. Ahora veamos que también cada $\widetilde{\beta}_d$ es una transformación natural.

Sean $(x,B),(y,C) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$ y un morfismo $\widetilde{f} : (x,B) \to (y,C)$ el cual consiste de $f : B \to C$ y cumple que $(Pf)x = y$, tenemos que $P\beta_{y,C}(d) = y\xi_d = ((Pf)x)\xi_d$ y $P\beta_{x,B}(d) = x\xi_d$, por lo que

$$P\beta_{y,C}(d) = (Pf)P\beta_{x,B}(d) = P(f\beta_{x,B}(d))$$

como P es fiel, entonces $\beta_{y,C}(d) = f\beta_{x,B}(d)$, por lo que $\widetilde{\beta}_d$ es un $\mathcal{A}$-cono.

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{\Delta}PA \arrow[dd, "P\widetilde{\alpha}"] \\
\widetilde{\Delta}PDd \arrow[urr, dotted, "\widetilde{\Delta}P\alpha_d"] \arrow[r, "\widetilde{\Delta}\xi_d"] \arrow[drr, "P\widetilde{\beta}_d"'] & \widetilde{\Delta}X \arrow[ur, "\widetilde{\Delta}e"] \arrow[dr, "\widetilde{\xi}"] & \\
 & & P \circ \widetilde{D}
\end{tikzcd}$$

Para todo $d \in Ob(\mathcal{D})$ el P-cono $\widetilde{\beta}_d$ cumple que $\widetilde{\xi}(\widetilde{\Delta}\xi_d) = P\widetilde{\beta}_d$, ya que para todo $(x,B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$ tenemos lo siguiente

$$(\widetilde{\xi}(\widetilde{\Delta}\xi_d))(x,B) = x(\xi_d) = ((\Delta x)\xi)d = P\beta_{x,B}(d) = P\widetilde{\beta}_d(x,B)$$

debido a que $(\Delta x)\xi = P\beta$. Aplicando la condición (SI) a cada $\widetilde{\beta}_d$, existe $\alpha_d : Dd \to A$ tal que $e(\xi_d) = P\alpha_d$ y $\widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}\alpha_d) = \widetilde{\beta}_d$. No es difícil ver, utilizando la fidelidad de P, que los α_d constituyen un $\mathcal{A}$-cocono $\alpha : D \longrightarrow \Delta A$, que satisface $(\Delta e)\xi = P\alpha$; esta es una prolongación P-semi final de ξ.

Veamos que la prolongación P-semi final anterior cumple la condición (SF). Sea $\beta : D \longrightarrow \Delta B$ y $y : X \to PB$ tal que $(\Delta y)\xi = P\beta$, por lo que $(y,B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$ y $\beta = \beta_{y,B}$ por lo antes mencionado.

Definimos el morfismo $t := \widetilde{\alpha}(y,B) : A \to B$, observemos que

$$(Pt)e = (P\widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}e))(y,B) = \widetilde{\xi}(y,B) = y$$

por lo tanto $(Pt)e = y$ y también $(\Delta t)\alpha = \beta$ ya que $\widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}\alpha_d) = \widetilde{\beta}_d$ para todo $d \in Ob(\mathcal{D})$, pues

$$((\Delta t)\alpha)d = t(\alpha_d) = (\widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}\alpha_d))(y,B) = \widetilde{\beta}_d(y,B) = \beta_{y,B}(d)$$

$$\begin{tikzcd}
& & \Delta PA \arrow[dd, dotted, "\Delta Pt"] \\
P\circ D \arrow[r, "\xi"] \arrow[urr, "P\alpha"] \arrow[drr, "P\beta"'] & \Delta X \arrow[ur, "\Delta e"'] \arrow[dr, "\Delta y"] & \\
& & \Delta PB
\end{tikzcd}$$

Sólo falta ver que t es único.

Sea $s : A \to B$ morfismo tal que $(Ps)e = y$ y $(\Delta s)\alpha = \beta$. Tenemos que s es un morfismo $\widetilde{s} : (e, A) \to (y, B)$ en la categoría $\widetilde{\mathcal{D}}$. Como $\widetilde{\alpha}$ es una transformación natural entre los funtores $\widetilde{\Delta}A$ y $\widetilde{D}$, se cumple la conmutatividad del siguiente cuadro.

$$\begin{tikzcd}
(e,A) \arrow[d, "\widetilde{s}"'] & (\widetilde{\Delta}A)(e,A) = A \arrow[r, "\widetilde{\alpha}(e,A)"] \arrow[d, "Id_A"'] & \widetilde{D}(e,A) = A \arrow[d, "s"] \\
(y,B) & (\widetilde{\Delta}A)(y,B) = A \arrow[r, "\widetilde{\alpha}(y,B)=t"'] & \widetilde{D}(y,B) = B
\end{tikzcd}$$

Entonces $s\widetilde{\alpha}(e, A) = \widetilde{\alpha}(y, B) = t$, por lo tanto $s\widetilde{\alpha}(e, A) = t$. Definamos el morfismo $a := \widetilde{\alpha}(e, A) : A \to A$, y a cumple que $(Pa)e = e$ esto se puede ver al evaluar en (e, A) la ecuación $P\widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}e) = \widetilde{\xi}$.

Veamos que $a = Id_A$; sea $(x, B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$, del morfismo $\widetilde{\alpha}(x, B) : A \to B$ obtenemos el morfismo $\widetilde{a}_{(x,B)} : (e, A) \to (x, B)$ en $\widetilde{\mathcal{D}}$, pues cumple que $P\widetilde{\alpha}(x, B)e = x$, ya que $P\widetilde{\alpha}(\widetilde{\Delta}e) = \widetilde{\xi}$. Como $\widetilde{\alpha}$ es una transformación natural, es decir, $\widetilde{\alpha}(x, B)a = \widetilde{\alpha}(x, B)$ esto para cualquier $(x, B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$, por lo tanto $\widetilde{\alpha}(\Delta a) = \widetilde{\alpha}$. Como la condición (R) se cumple por hipótesis, entonces $a = Id_A$, por lo tanto $s = t$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sea $\xi : \Delta X \longrightarrow P \circ D$ un P-cono, con $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}$. Definamos la categoría $\widetilde{\mathcal{D}}$, donde los objetos son los P-comorfismos (x, B), donde $x : PB \to X$ tal que hay un $\mathcal{A}$-cono $\beta : \Delta B \longrightarrow D$ con $\xi(\Delta x) = P\beta$. Como P es fiel por el lema 1.20, por lo tanto β esta determinado de manera única por cada objeto en $\widetilde{\mathcal{D}}$. Por lo que denotaremos a cada β de la siguiente manera $\beta_{x,B}$. Un morfismo $\widetilde{f} : (x, B) \to (y, C)$, es un $\mathcal{A}$-morfismo $f : C \to B$ tal que $x(Pf) = y$.

Definimos el funtor $\widetilde{D} : \widetilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $\widetilde{D}(x, B) := B$ para todo $(x, B) \in \widetilde{\mathcal{D}}$ y sea $\widetilde{\xi} : P \circ \widetilde{D} \longrightarrow \widetilde{\Delta}X$ el P-cocono definido de la siguiente manera, $\widetilde{\xi}(x, B) := x$ para todo $(x, B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$, por hipótesis tenemos que $\widetilde{\xi}$ tiene una prolongación P-semi final, entonces existen $e : X \to PA$ con $e \in Q$ y $\widetilde{\alpha} : \widetilde{D} \longrightarrow \widetilde{\Delta}A$ un $\mathcal{A}$-

cocono tales que $(\widetilde{\Delta}e)\widetilde{\xi} = P\widetilde{\alpha}$, los cuales cumplen condición (SF); el P-morfismo e formará parte del levantamiento P-semi inicial.

Ahora definimos para cada $d \in Ob(\mathcal{D})$ el $\mathcal{A}$-cocono $\widetilde{\beta}_d : \widetilde{D} \longrightarrow \widetilde{\Delta}Dd$ donde $\widetilde{\beta}_d(x,B) = \beta_{x,B}(d)$ para todo $(x,B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$, observemos que a cada objeto de $\widetilde{\mathcal{D}}$ es asignado uno y solo un morfismo, ya que cada β esta determinada de manera única por cada $(x,B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$. Ahora veamos que cada $\widetilde{\beta}_d$ es una transformación natural.

Sean $(x,B),(y,C) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$ y un morfismo $\widetilde{f} : (x,B) \to (y,C)$ el cual consiste de $f : C \to B$ y cumple que $x(Pf) = y$, tenemos que $P\beta_{y,C}(d) = \xi_d y = \xi_d(x(Pf))$ y $P\beta_{x,B}(d) = \xi_d x$, por lo que

$$P\beta_{y,C}(d) = P\beta_{x,B}(d)(Pf) = P(\beta_{x,B}(d)f)$$

como P es fiel, entonces $\beta_{y,C}(d) = \beta_{x,B}(d)f$, por lo que $\widetilde{\beta}_d$ es un $\mathcal{A}$-cocono.

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{\Delta}PA \arrow[dd, dotted, "\widetilde{\Delta}Pr_d"] \\
P \circ \widetilde{D} \arrow[r, "\widetilde{\xi}"] \arrow[urr, "P\widetilde{\alpha}"] \arrow[drr, "P\widetilde{\beta}_d"'] & \widetilde{\Delta}X \arrow[ur, "\widetilde{\Delta}e"] \arrow[dr, "\widetilde{\Delta}\xi d"] & \\
 & & \widetilde{\Delta}PDd
\end{tikzcd}$$

Para cada $\mathcal{A}$-cocono $\widetilde{\beta}_d$ se cumple que $(\widetilde{\Delta}\xi_d)\widetilde{\xi} = P\widetilde{\beta}_d$, ya que para todo $(x,B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$ tenemos lo siguiente

$$((\widetilde{\Delta}\xi d)\widetilde{\xi})(x,B) = x(\xi d) = (\xi(\widetilde{\Delta}x))d = P\widetilde{\beta}_{x,B}(d) = P\widetilde{\beta}_d(x,B)$$

pues se cumple que $\xi(\Delta x) = P\beta$. Aplicando la condición (SF) a cada $\widetilde{\beta}_d$, existe $\alpha_d : A \to D_d$ tal que $(P\alpha_d)e = \xi_d$ y $(\widetilde{\Delta}\alpha_d)\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}_d$. Como $(e,A) \in \text{Quot}(P)$ dado que (e,A) aparece en la prolongación P-semi final de $\widetilde{\xi}$ y por la observación 1.17 $(e,A) \in \text{Epi}(P)$, por lo tanto e es un P-epimorfismo; no es difícil ver, utilizando que e es P-epimorfismo, que los α_d constituyen un $\mathcal{A}$-cono $\alpha : \Delta A \longrightarrow D$, que satisface $P\alpha(\Delta e) = \xi$; esta es una factorización P-semi inicial de ξ.

Veamos que la factorización P-semi inicial anterior cumple la condición (SI). Para esto sean $\beta : \Delta B \longrightarrow D$ y $y : PB \to X$ tal que $\xi(\Delta y) = P\beta$, por lo que $(y,B) \in Ob(\widetilde{\mathcal{D}})$ y $\beta = \beta_{y,B}$ por lo antes mencionado.
Definimos el morfismo $z := \widetilde{\alpha}(y,B) : B \to A$, observemos que

$$ey = ((\widetilde{\Delta}e)\widetilde{\xi})(y,B) = P\widetilde{\alpha}(y,B) = Pz$$

por lo tanto $ey = Pz$ y también $\alpha(\Delta z) = \beta$ ya que $(\widetilde{\Delta}\alpha_d)\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}_d$ para todo $d \in Ob(\mathcal{D})$ puesto que

$$(\alpha(\Delta z))d = (\alpha_d)z = ((\widetilde{\Delta}\alpha_d)\widetilde{\alpha})(y,B) = \widetilde{\beta}_d(y,B) = \beta_{y,B}(d)$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, "P\alpha"] \\
\Delta PB \arrow[r, "\Delta y"] \arrow[urr, dotted, "\Delta Pz"] \arrow[drr, "P\beta"'] & \Delta X \arrow[ur, "\Delta e"] \arrow[dr, "\xi"] & \\
 & & P \circ D
\end{tikzcd}$$

Sólo falta ver que z es único.

Sea $r : B \to A$ morfismo tal que $ey = Pr$ y $\alpha(\Delta r) = \beta$. Como z cumple $ey = Pz$, entonces $Pz = Pr$; utilizando que P es fiel obtenemos que $z = r$, por lo tanto z es único.

Veamos que este levantamiento P-semi inicial es rígido. Como e es un P-epimorfismo y por la observación 1.8, entonces el levantamiento P-semi inicial es rígido. ☐

La proposición siguiente nos permite asegurar que todo P-cocono tiene un levantamiento P-semi final si y solo si los P-coconos discretos lo tienen.

Proposición 1.24. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todo P-cocono ξ tiene un levantamiento P-semi final como en la ecuación (**), tal que $(e, A) \in Q$.*

2. *Todo P-cocono discreto ξ tiene un levantamiento P-semi final como en la ecuación (**), tal que $(e, A) \in Q$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2): Esta implicación es inmediata.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sean $\mathcal{D}$ una categoría, $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama y $\xi : P \circ D \longrightarrow \Delta X$ un P-cocono, definimos $\mathcal{D}^{'}$ la categoría discreta cuyos objetos son los mismos que los de $\mathcal{D}$. Se define el diagrama $D^{'} : \mathcal{D}^{'} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $D^{'}_d = D_d$ para todo $d \in Ob(\mathcal{D}^{'})$, ya que los objetos de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^{'}$ son los mismos, también definimos el P-cocono $\xi^{'} : P \circ D^{'} \longrightarrow \Delta X$ de este modo, $\xi^{'}_d = \xi_d$ para todo $d \in Ob(\mathcal{D}^{'})$. Dado que $\mathcal{D}^{'}$ es discreta entonces por hipótesis existe un P-morfismo $(e, A) \in Q$ con $e : X \to PA$ y un P-cocono $\alpha^{'} : D^{'} \longrightarrow \Delta A$ tales que $(\Delta e)\xi^{'} = P\alpha^{'}$ y se cumple la condición (SF).

Definamos $\alpha : D \longrightarrow \Delta A$ de la siguiente manera: $\alpha_d = \alpha^{'}_d$. Ahora comprobemos que α es una transfomación natural entre D y ΔA, sean $d, d^{'} \in Ob(\mathcal{D})$ e $i : d \to d^{'}$ morfismo en $\mathcal{D}$. Como $(\Delta e)\xi^{'} = P\alpha^{'}$, tenemos que $P\alpha_d = e\xi_d$ y $P\alpha_{d'} = e\xi_{d'}$; dado que ξ es una transformación natural entonces $\xi_d = \xi_{d'}(PD_i)$, por lo que $P\alpha_d = e\xi_d = e\xi_{d'}(PD_i) = P\alpha_{d'}(PD_i)$, por lo tanto $P\alpha_d = P\alpha_{d'}(PD_i) = P(\alpha_{d'}(D_i))$, como P es fiel por el lema 1.20 y la observación 1.23, entonces $\alpha_d = \alpha_{d'}(D_i)$, por lo tanto α es una transformación natural. Observemos que $(\Delta e)\xi = P\alpha$, ya que para todo $d \in Ob(\mathcal{D})$, tenemos que

$$((\Delta e)\xi)d = e\xi_d = e\xi'_d = ((\Delta e)\xi')d = (P\alpha')d = P\alpha'_d = P\alpha_d = P\alpha(d)$$

con lo cual tenemos que $(\Delta e)\xi = P\alpha$ es una prolongación P-semi final de ξ.

Veamos que la prolongación P-semi final anterior sí cumple la condición (SF). Sean $\beta : D \longrightarrow \Delta B$ y $y : X \to PB$ tales que $(\Delta y)\xi = P\beta$, se define $\beta' : D' \longrightarrow \Delta B$ como sigue, $\beta'_d = \beta_d$ para todo $d \in Ob(\mathcal{D}')$ y como

$$((\Delta y)\xi')d = y\xi'_d = y\xi_d = ((\Delta y)\xi)d = P\beta(d) = P\beta_d = P\beta'_d = P\beta'(d)$$

para todo $d \in Ob(\mathcal{D})$, por lo tanto $(\Delta y)\xi' = P\beta'$; dado que se cumple la condición (SF) para ξ', entonces existe un único morfismo $t : A \to B$ tal que $(Pt)e = y$ y $(\Delta t)\alpha' = \beta'$, solo basta ver que $(\Delta t)\alpha = \beta$. Sea $d \in Ob(\mathcal{D})$, observemos que

$$((\Delta t)\alpha)d = t\alpha_d = t\alpha'_d = ((\Delta t)\alpha')d = \beta'_d = \beta_d$$

por lo tanto $(\Delta t)\alpha = \beta$. $\square$

Tenemos otro resultado parecido al anterior con levantamientos P-semi iniciales.

Proposición 1.25. *Sea $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor. Si cada P-cono discreto (X, ξ, D) tiene un levantamiento P-semi inicial (*) con $(e, A) \in Epi(P)$, entonces cada P-cono tiene un levantamiento P-semi inicial rígido con $(e, A) \in Epi(P)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ una categoría , $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama y $\xi : \Delta X \longrightarrow P \circ D$ un P-cono, definimos $\mathcal{D}'$ la categoría discreta cuyos objetos son los mismos que los de $\mathcal{D}$. Se define el diagrama $D' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{A}$ de esta manera, $D'_d = D_d$ para todo $d \in Ob(\mathcal{D}')$, ya que los objetos de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ son los mismos, también definimos el P-cono $\xi' : \Delta X \longrightarrow P \circ D'$ de este modo, $\xi'_d = \xi_d$ para todo $d \in Ob(\mathcal{D}')$, dado que $\mathcal{D}'$ es discreta entonces por hipótesis tenemos que existe un P-morfismo $(e, A) \in Epi(P)$ y un P-cono $\alpha' : \Delta A \longrightarrow D'$ tales que $P\alpha'(\Delta e) = \xi'$ y cumplen la condición (SI).

Definamos $\alpha : \Delta A \longrightarrow D$ de la siguiente manera: $\alpha_d = \alpha'_d$. Ahora comprobemos que α es una transformación natural entre ΔA y D, sean $d, d' \in Ob(\mathcal{D})$, $i : d \to d'$ morfismo en $\mathcal{D}$. Notemos que $\xi'_d = (PD_i)\xi_d$ para todo $d \in Ob(\mathcal{D})$, debido a como se definió ξ' y utilizando que ξ es una transformación natural. Luego, usando $\xi_d = (P\alpha_d)e$, $\xi_{d'} = (P\alpha_{d'})e$ y el hecho anterior, entonces se tiene que $(P\alpha_{d'})e = (PD_i)(P\alpha_d)e = (P(D_i\alpha_d))e$, por lo que $(P\alpha_{d'})e = (P(D_i\alpha_d))e$; dado que $e \in Epi(P)$, entonces $\alpha_{d'} = D_i\alpha_d$, por lo tanto α es una transformación natural. Observemos que $P\alpha(\Delta e) = \xi$, ya que para todo $d \in Ob(\mathcal{D})$, tenemos que

$$(\xi)d = \xi_d = \xi'_d = (\xi')d = (P\alpha'(\Delta e))d = (P\alpha'_d)e = (P\alpha_d)e = (P\alpha(\Delta e))d$$

con lo cual tenemos que $P\alpha(\varDelta e) = \xi$ es una factorización P-semi inicial de ξ.

Veamos que la factorización P-semi inicial anterior sí cumple la condición (SI). Sean $\beta : \varDelta B \longrightarrow D$ y $y : PB \rightarrow X$ tales que $P\beta = \xi(\varDelta y)$, se define $\beta^{'} : \varDelta B \longrightarrow D$ como sigue, $\beta^{'}_d = \beta_d$ para todo $d \in Ob(\mathcal{D}^{'})$ y como

$$(\xi^{'}(\varDelta y))d = (\xi^{'}_d)y = (\xi_d)y = (\xi(\varDelta y))d = P\beta(d) = P\beta_d = P\beta^{'}_d = P\beta^{'}(d)$$

para todo $d \in Ob(\mathcal{D})$, por lo tanto $P\beta^{'} = \xi^{'}(\varDelta y)$; dado que se cumple la condición (SI) para $\xi^{'}$, entonces existe un único morfismo $t : B \rightarrow A$ tal que $ey = Pt$ y $\alpha^{'}(\varDelta t) = \beta^{'}$, solo basta ver que $\alpha(\varDelta t) = \beta$. Sea $d \in Ob(\mathcal{D})$, observemos que

$$(\alpha(\varDelta t))d = (\alpha_d)t = (\alpha^{'}_d)t = (\alpha^{'}(\varDelta t))d = \beta^{'}_d = \beta_d$$

por lo tanto $\alpha(\varDelta t) = \beta$.

Puesto que $e \in Epi(P)$ por la observación 1.8, entonces el levantamiento anterior es rígido. □

A continuación daremos la definición de funtor semi-topológico, esta definición es de suma importancia, pues veremos un resultado el cual nos permite ver que se comporta bien con las categorías totales.

Definición 1.26. *Sea $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor.*

1. *P es llamado semi-topológico si y solo si, cada P-cono tiene un levantamiento P-semi inicial rígido.*

2. *P es llamado (propiamente) topológico si y solo si, cada P-cono tiene un levantamiento P-inicial (propio).*

3. *P es llamado fibración (propia) si y solo si, cada P-morfismo tiene un levantamiento P-inicial (propio).*

Las nociones duales de las definiciones anteriores son: co-semi-topológico, (propiamente) co-topológico y co-fibración (propia).
Tenemos algunos resultados inmediatos del teorema 1.19.

Corolario 1.27. *Sea $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *P es semi-topológico.*

2. *Cada P-cocono (discreto) tiene un levantamiento P-semi final.*

3. *Cada P-cono (discreto) (X, ξ, D) tiene un levantamiento P-semi inicial (*) con $(e, A) \in Epi(P)$.*

4. *Cada P-cono (discreto) (X, ξ, D) tiene un levantamiento P-semi inicial (*) con $(e, A) \in Quot(P)$.*

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (4).
Por el Teorema 1.19 y observemos que en la prueba 2) $\Rightarrow$ 1) del Teorema 1.19, el P-morfismo $(e, A) \in Q$ que es utilizado en el levantamiento P-semi final, es el mismo que se usa en el levantamiento P-semi inicial rígido. Por lo tanto $(e, A) \in Quot(P)$.

(4) $\Rightarrow$ (3).
Por el Lema 1.20 y la observación 1.22, tenemos que P es fiel y por la observación 1.17, entonces $Quot(P) \subseteq Epi(P)$.

(3) $\Rightarrow$ (1).
Basta ver que cada levantamiento es rígido. Por la observación 1.8, tenemos que cada levantamiento es rígido.

(1) $\Rightarrow$ (2).
Por el Teorema 1.19. □

Observación 1.28. En el corolario 1.27 solo se dio la prueba para P-conos que no son discretos. Para el caso de P-conos discretos solo es necesario agregar en la pruebas algunos resultados anteriormente demostrados.

En 4) $\Rightarrow$ 3) la proposición 1.23.
En 3) $\Rightarrow$ 1) la proposición 1.25 .
En 1) $\Rightarrow$ 2) y 2) $\Rightarrow$ 4) la proposición 1.24.

Corolario 1.29. *Sea $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *P es (propiamente) topológico.*
2. *P es (propiamente) co-topológico.*
3. *P es semi-topológico y fibración (propia).*
4. *P es co-semi-topológico y co-fibración (propia).*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) : Si aplica uno el Teorema 1.19 obtiene uno un levantamiento P-semi final para cada P-cocono con $(e, A) \in \mathrm{Iso}(P)$. Lo cual quiere decir que dado un P-cocono $\xi : P \circ D \longrightarrow \varDelta X$, existen $(e, A) \in \mathrm{Iso}(P)$ con $e : X \to PA$ y un $\mathcal{A}$-cono $\alpha : D \longrightarrow \varDelta A$ tales que $P\alpha = (\varDelta e)\xi$ y cumplen la condición (SF). Esto es para todo P-morfismo $y : X \to PB$ y todo $\mathcal{A}$-cono $\beta : D \longrightarrow \varDelta B$ tales que $P\beta = (\varDelta y)\xi$, entonces existe $t : A \to B$ tal que

$(Pt)e = y$ y $\alpha(\Delta t) = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, dotted, "\Delta Pt"] \\
P \circ D \arrow[r, "\xi"] \arrow[urr, "P\alpha"] \arrow[drr, "P\beta"'] & \Delta X \arrow[ur, "\Delta e"] \arrow[dr, "\Delta y"] & \\
 & & \Delta PB
\end{tikzcd}$$

Como e es un isomorfismo, entonces $\xi = (\Delta e^{-1})P\alpha$, con lo cual tenemos que cada P-cocono tiene un levantamiento P-co-semi inicial con $(e, A) \in \mathrm{Iso}(P)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta PA \arrow[dd, dotted, "\Delta Pt"] \arrow[dl, "\Delta e^{-1}"] \\
P \circ D \arrow[r, "\xi"] \arrow[urr, "P\alpha"] \arrow[drr, "P\beta"'] & \Delta X \arrow[dr, "\Delta y"] & \\
 & & \Delta PB
\end{tikzcd}$$

2) $\Rightarrow$ 1) : Es el dual de la demostración anterior.

1) $\Rightarrow$ 3) : Basta con ver que los levantamientos P-iniciales son rígidos. Por el lema 1.20 y la observaciones 1.22, 1.23, entonces P es fiel. Sea $\xi : \Delta X \longrightarrow P \circ D$ un P-cono, entonces existen $(e, A) \in \mathrm{Iso}(P)$ con $e : X \to PA$ y un $\mathcal{A}$-cono $\alpha : \Delta A \longrightarrow D$ tales que $\xi = P\alpha(\Delta e)$.

Puesto que $(e, A) \in \mathrm{Iso}(P)$ utilizando la observación 1.17, obtenemos que $(e, A) \in \mathrm{Epi}(P)$. Ahora por la observación 1.8 tenemos que el levantamiento P-inicial anterior es rígido.

3) $\Rightarrow$ 1) : Sean $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama, $\xi : \Delta X \longrightarrow P \circ D$ un P-cono. Por hipótesis, existe un levantamiento P-semi inicial rígido de ξ, es decir, existen $e : X \to PA$ un P-morfismo y $\alpha : \Delta A \longrightarrow D$ un $\mathcal{A}$-cono tales que

$$\xi = P\alpha(\Delta e) \tag{1.4}$$

y cumplen la condición (SI).

Ahora, como e es un P-morfismo y P es fibración, existe $h : X \to PC$ isomorfismo y $g : C \to A$ tal que

$$e = (Pg)h \tag{1.5}$$

y cumplen la condición (SI).

Utilizando la igualdad 1.5 y sustituyendo en la igualdad 1.4 obtenemos

$$\xi = P\alpha(\Delta e) = P\alpha(\Delta((Pg)h)) = (P\alpha(\Delta Pg))(\Delta h) = P(\alpha\Delta g)(\Delta h)$$

Definimos el $\mathcal{A}$-cono $\alpha^{'} : \Delta C \longrightarrow D$ de la siguiente manera, $\alpha^{'}_{d} = \alpha_{d} g$ para todo $d \in Ob(\mathcal{D})$, por lo que la igualdad anterior queda de la siguiente manera

$$\xi = P\alpha^{'}(\Delta h)$$

esta es una factorización P-semi inicial de ξ donde h es un isomorfismo.

2) es equivalente a 4) es dual de 1) equivalente a 3). □

Proposición 1.30. *Sea $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor. Si P es el funtor inclusión de una subcategoría plena reflexiva, entonces P es semi-topológico.*

Demostración. Sean $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama, $\xi : \Delta X \longrightarrow P \circ D$ un P-cono. Como $\mathcal{A}$ es una subcategoría reflexiva de $\mathcal{X}$ y P es el funtor inclusión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{X}$, entonces el funtor P tiene adjunto izquierdo K, por lo que para todo $X \in Ob(\mathcal{X})$ y todo $A \in Ob(\mathcal{A})$ se tiene la siguiente biyección

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(KX, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) \tag{1.6}$$

Notemos que para todo $d \in Ob(\mathcal{D})$, $\xi_d : X \to (PD)d$ es un morfismo en $\mathcal{X}$, donde $D(d) \in Ob(\mathcal{A})$. Como φ es una biyección, entonces para cada $d \in Ob(\mathcal{D})$ existe un único morfismo $f_d : KX \to D(d)$ tal que $\varphi(f_d) = \xi_d$, pero sabemos que la biyección φ evaluada en un morfismo $f : KX^{'} \to A$ esta dada por $\varphi(f) = Pf \circ \eta_{X'}$, donde $\eta : 1_{\mathcal{X}} \longrightarrow PK$ es la unidad de la adjunción. Utilizando lo anterior en los morfismos ξ_d, obtenemos $\varphi(f_d) = Pf_d \circ \eta_X = \xi_d$.

Definimos $\alpha : \Delta(K(X)) \longrightarrow D$ como sigue, $\alpha_d = f_d$. Veamos que α es una transformación natural, sean $d, d^{'} \in Ob(\mathcal{D})$ e $i : d \to d^{'}$ un morfismo. Por lo que necesitamos demostrar que se cumple el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & Dd \arrow[dd, "Di"] \\
KX \arrow[ur, "\alpha_d"] \arrow[dr, "\alpha_{d'}"'] & \\
 & Dd^{'}
\end{tikzcd}$$

Como ξ es una transformación natural, entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & Dd \arrow[dd, "Di"] \\
X \arrow[ur, "\xi_d"] \arrow[dr, "\xi_{d'}"'] & \\
 & Dd^{'}
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\varphi(\alpha_{d'}) = \xi_{d'} = \varphi(Di \circ f_d)$ pues

$$\varphi(f_{d'}) = \xi_{d'} = Di \circ \xi_d = Di(\alpha_d \circ \eta_X) = (Di \circ \alpha_d)\eta_X = \varphi(Di \circ \alpha_d)$$

Por la unicidad de $\alpha_{d'}$, entonces $\alpha_{d'} = Di \circ \alpha_d$. Por lo tanto α es una transformación natural, con lo cual el P-cono ξ tiene una factorización P-semi inicial, la cual es $\xi = P\alpha(\Delta\eta_X)$.

Falta ver que esta factorización cumple la condición (SI) y que es rígida. Primero probemos que cumple la condición (SI). Sean $\beta : \Delta B \longrightarrow P \circ D$ un $\mathcal{A}$-cono y $y : PB \to X$ un P-comorfismo tales que

$$P\beta = \xi(\Delta y)$$

Observemos que $\eta_X \circ y : PB \to PKX$ y como P es pleno, esto por ser $\mathcal{A}$ una subcategoría plena de $\mathcal{X}$, entonces existe $g : B \to KX$ tal que $Pg = \eta_X \circ y$, veamos que este morfismo es único, sea $h : B \to KX$ tal que $Ph = \eta_X \circ y$, dado que P es fiel por ser el funtor inclusión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{X}$, entonces $g = h$, por lo tanto único.

Ahora probemos que este levantamiento es rígido, sea $t : KX \to KX$ un morfismo tal que

$$(Pt)\eta_X = \eta_X \ \text{ y } \ \alpha(\Delta t) = \alpha \tag{1.7}$$

Sabemos que 1_{KX} es el único morfismo tal que $\varphi(1_{KX}) = \eta_X$, observemos que $\varphi(1_{KX}) = \varphi(t)$ esto por la igualdad de la izquierda en (1.7), por la unicidad de 1_{KX}, entonces $1_{KX} = t$. □

Teorema 1.31. *Sea $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ un funtor semi-topológico, entonces P tiene adjunto izquierdo.*

Demostración. Por la observación 1.3, cualquier $X \in Ob(\mathcal{X})$ lo podemos ver como un P-co-cono, como P es semi topológico, por el corolario 1.27, entonces X tiene un levantamiento P-semi final, es decir, existen $R_O X \in Ob(\mathcal{A})$ y $\eta_X : X \to PR_O X$ un morfismo tales que para todo $y : X \to PB$, P-morfismo, existe un único morfismo $s_{X,y} : R_O X \to B$ tal que

$$\begin{tikzcd} & PR_O X \arrow[dd, "Ps_{X,y}"] \\ X \arrow[ur, "\eta_X"] \arrow[dr, "y"'] & \\ & PB \end{tikzcd}$$

Por lo anterior podemos observar que η_X es una flecha universal de X en P. Utilizando el Teorema 2 del capítulo 4 del libro [1], obtenemos que el funtor $R : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}$ definido de la siguiente forma: para todo $X \in Ob(\mathcal{X})$ $RX = R_O X$; para todo morfismo $h : X \to X^{'}$ $Rh = s_{X,\eta_{X'} \circ h}$. Cumple que R es adjunto izquierdo de P.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "h"'] & PR_O X \arrow[d, "Ps_{X,\eta_{X^{'}}\circ h}"] \\
X^{'} \arrow[r, "\eta_{X^{'}}"'] & PR_O X^{'}
\end{tikzcd}$$

Capítulo 2

Cuadrados (co-)coma

La idea de los objetos (co)-coma en una 2-categoría $\mathcal{K}$ viene de extender la idea de que en **Cat** algunos objetos de esta 2-categoría son categorías coma. En **Cat** sabemos como se construyen este tipo de objetos a partir de dos funtores que comparten codominio, aunque en una 2-categoría cualquiera no podemos dar una construcción general. Es por eso que como cualquier objeto que se pueda definir en matemáticas, las categorías coma se caracterizan bajo dos condiciones, una de ellas es bien conocida y la otra es una condición sobre las 2-celdas. Todo lo referente a este capítulo puede consultarse en [5].

En este capítulo daremos algunos teoremas relevantes sobre los cuadros coma; por ejemplo cuándo es posible levantar una adjunción si alguno de los morfismos en el cuadro coma tiene adjunto y se verá otra versión del Lema de Yoneda, la cual habla sobre una biyección entre morfismos de cuadros coma.

Definición 2.1. *Sean una 2-categoría $\mathcal{K}$ y A, B objetos de $\mathcal{K}$. Un palmo de A a B en $\mathcal{K}$, (u_0, S, u_1) es un diagrama como el siguiente.*

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[ld, "u_0"'] \arrow[rd, "u_1"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Un morfismo entre dos palmos $f : (u_0, S, u_1) \to (u_0^{'}, S^{'}, u_1^{'})$, es un morfismo $f : S \to S^{'}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[ld, "u_0"'] \arrow[rd, "u_1"] \arrow[dd, "f"'] & \\
A & & B \\
& S^{'} \arrow[lu, "u_0^{'}"] \arrow[ru, "u_1^{'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación 2.2. Notemos que los palmos de A a B forman una categoría.

Definición 2.3. *Un copalmo* (u_0, S, u_1) *de* A *a* B *en* $\mathcal{K}$*, es un palmo de* A *a* B *en la* 2*-categoría* $\mathcal{K}^{\mathrm{op}}$*.*

$$\begin{tikzcd}
 & S & \\
A \arrow[ur, "u_0"] & & B \arrow[ul, "u_1"']
\end{tikzcd}$$

Definición 2.4. *Sea* (r, D, s) *un copalmo de* A *a* B *en* $\mathcal{K}$*. Definimos un objeto coma de* (r, D, s)*, como un palmo* $(d_0, r/s, d_1)$ *de* A *a* B *y una* 2*-celda*

$$\begin{tikzcd}
r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & A \arrow[d, "r"] \\
B \arrow[r, "s"'] & D
\end{tikzcd}$$

Los cuales cumplen las siguientes condiciones:

1. *Para cualquier palmo* (u_0, S, u_1) *de* A *a* B*, la composición con la* 2*-celda* λ *nos da una biyección*

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl, "u_0"'] \arrow[dr, "u_1"] \arrow[dd, "f"'] & \\
A & & B \\
 & r/s \arrow[ul, "d_0"] \arrow[ur, "d_1"'] &
\end{tikzcd}
\longleftrightarrow
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}"] & A \arrow[d, "r"] \\
B \arrow[r, "s"'] & D
\end{tikzcd}$$

entre las flechas de palmos $f : (u_0, S, u_1) \to (d_0, r/s, d_1)$ *y las* 2*-celdas* σ*.*

2. *Para cualquier par de* 2*-celdas*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\xi}{\Longleftarrow}"] & r/s \arrow[d, "d_0"] \\
r/s \arrow[r, "d_0"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] & r/s \arrow[d, "d_1"] \\
r/s \arrow[r, "d_1"'] & B
\end{tikzcd}$$

las cuales cumplan que

$$\begin{tikzcd}
 & r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & A \arrow[r, "r"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\lambda"] & D \\
S \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & r/s \arrow[ur, "d_0"'] \arrow[r, "d_1"'] & B \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & A \arrow[dr, "r"] \arrow[d, phantom, "\lambda\Downarrow"] & \\
 & r/s \arrow[r, "d_1"'] & B \arrow[r, "s"'] & D
\end{tikzcd}$$

existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f^{'}"'] \arrow[r, phantom, "\phi\Downarrow"] & r/s \end{tikzcd}$$

tal que $\xi = d_0\phi$ y $\eta = d_1\phi$.

Proposición 2.5. *Para cualesquiera dos funtores en* **Cat**, *el objeto coma existe en Cat.*

Demostración. Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ y $G : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ dos funtores en Cat.
Definimos la categoría F/G como sigue. Los objetos de F/G son las ternas de la forma (A, Y, f), donde $A \in Ob(\mathcal{A})$, $Y \in Ob(\mathcal{Y})$ y $f : FA \to GY$ un morfismo en $\mathcal{X}$. Los morfimos son de la forma $(h, k) : (A, Y, f) \to (A^{'}, Y^{'}, f^{'})$, donde $h : A \to A^{'}$ es un morfismo en $\mathcal{A}$ y $k : Y \to Y^{'}$ es un morfismo en $\mathcal{Y}$, lo cuales hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Fh"] \arrow[d, "f"'] & FA^{'} \arrow[d, "f^{'}"] \\ GY \arrow[r, "Gk"'] & GY^{'} \end{tikzcd}$$

La composición de dos morfismos $(h, k) : (A, Yf) \to (B, C, g)$ y $(h^{'}, k^{'}) : (B, C, g) \to (D, E, r)$ es la siguiente: $(h^{'}, k^{'}) \circ (h, k) = (h^{'} \circ h, k^{'} \circ k)$.

Es claro que F/G es una categoría. Observemos que tenemos los funtores $D_0 : F/G \to \mathcal{A}$ y $D_1 : F/G \to \mathcal{Y}$, los cuales están definidos como, $D_0(A, Y, f) = A$ y $D_1(A, Y, f) = Y$, esto para todo $(A, Y, f) \in Ob(F/G)$, $D_0(h, k) = h$ y $D_1(h, k) = k$ para todo morfismo $(h, k) : (A, Yf) \to (B, C, g)$ en F/G.

Definimos la 2-celda

$$\begin{tikzcd} F/G \arrow[r, "D_0"] \arrow[d, "D_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & \mathcal{A} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{Y} \arrow[r, "G"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

como sigue, $\lambda_{(A,Y,f)} = f$ para todo $(A, Y, f) \in Ob(F/G)$.

Ahora veamos que el palmo $(D_0, F/G, D_1)$ de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{Y}$ junto con λ cumple las dos condiciones del objeto coma.

Probemos la condición 1 del objeto coma, definamos la función φ de los morfismos de palmos a las 2-celdas. Sea $f : (R, \mathcal{S}, T) \to (D_0, F/G, D_1)$ un morfismo de palmos, $\varphi(f) = \lambda f$, es decir, es la composición con λ.

Procedamos a definir una función de las 2-celdas a los morfismos de palmos. Consideremos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "R"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "F"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] \\
\mathcal{Y} \arrow[r, "G"'] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

Definimos la función ψ de la siguiente manera: $\psi(\sigma) = V : (R, \mathcal{S}, T) \to (D_0, F/G, D_1)$ donde $V(s) = (Rs, Ts, \sigma_s)$ para todo $s \in Ob(\mathcal{S})$ y $V(h) = (Rh, Th)$ para todo morfismo $h : s \to s^{'}$.

Notemos que $D_0V = R$ y $D_1V = T$, pues $D_0V(s) = D_0(Rs, Ts, \sigma_s) = Rs$ y $D_1V(s) = D_1(Rs, Ts, \sigma_s) = Ts$ para todo $s \in Ob(\mathcal{S})$, tambien $D_0V(h, k) = D_0(Rh, Th) = Rh$ y $D_1V(h, k) = D_1(Rh, Th) = Th$ para todo (h, k) morfismo en $\mathcal{S}$.

Primero veamos que $\psi \circ \varphi = 1$. Sea

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S} \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "T"] \arrow[dd, "V"] & \\
\mathcal{A} & & \mathcal{Y} \\
 & F/G \arrow[ul, "D_0"] \arrow[ur, "D_1"'] &
\end{tikzcd}$$

un morfismo de palmos. Por lo que

$$\psi \circ \varphi(V) = \psi(\varphi(V)) = \psi(\lambda V) = H : (R, \mathcal{S}, T) \to (D_0, F/G, D_1)$$

donde $H(s) = (Rs, Ts, (\lambda V)_s)$ para todo $s \in Ob(\mathcal{S})$. Tomemos $s \in Ob(\mathcal{S})$ y supongamos que $V(s) = (A_s, Y_s, r_s)$. Como $R = D_0V$ y $T = D_1V$, entonces $Rs = D_0V(s) = A_s$ y $Ts = D_1V(s) = Y_s$, con lo cual obtenemos que $(Rs, Ts, (\lambda V)_s) = (A_s, Y_s, \lambda_{V(s)}) = (A_s, Y_s, r_s)$. Por lo que V y H coinciden en los objetos, ahora veamos que coinciden en los morfismos.

Sea $z : s \to s^{'}$ un morfismo en $\mathcal{S}$ y supongamos que $V(z) = (h, k)$. Evaluemos en z a H, por lo que obtenemos $H(z) = (Rz, Tz)$. Como $R = D_0V$ y $T = D_1V$, entonces $Rz = D_0V(z) = D_0(h, k) = h$ y $Tz = D_1V(z) = D_1(h, k) = k$, con lo cual $(Rz, Tz) = (h, k)$. Por lo que H y V coinciden en las flechas, por lo tanto $H = V$.

Por lo anterior obtenemos que $\psi \circ \varphi = 1$. Procedamos a probar que $\varphi \circ \psi = 1$. Consideremos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "R"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "F"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] \\
\mathcal{Y} \arrow[r, "G"'] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

por lo que $\varphi \circ \psi(\sigma) = \varphi(V) = \lambda V$, donde $V : S \to F/G$. Sea $s \in Ob(\mathcal{S})$, por lo que $(\lambda V)_s = \lambda_{V(s)} = \lambda_{(Rs,Ts,\sigma_s)} = \sigma_s$. Por lo tanto $\lambda V = \sigma$, con lo cual obtenemos que $\varphi \circ \psi = 1$.

Ahora probemos que se cumple la propiedad 2 del objeto coma. Para esto, sean un par de 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "R"] \arrow[d, "R^{'}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\xi}{\Longleftarrow}"] & F/G \arrow[d, "D_0"] \\
F/G \arrow[r, "D_0"'] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "R"] \arrow[d, "R^{'}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] & F/G \arrow[d, "D_1"] \\
F/G \arrow[r, "D_1"'] & \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

las cuales cumplan que

$$\begin{tikzcd}
 & F/G \arrow[r, "D_0"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \mathcal{X} & = & \mathcal{S} \arrow[r, "R"] \arrow[dr, "R^{'}"'] & F/G \arrow[r, "D_0"] \arrow[dr, "D_1"'] \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & \mathcal{A} \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\lambda\Downarrow"] & \\
\mathcal{S} \arrow[ur, "R"] \arrow[r, "R^{'}"'] & F/G \arrow[ur, "D_0"'] \arrow[r, "D_1"'] & \mathcal{Y} \arrow[ur, "G"'] & & & & F/G \arrow[r, "D_1"'] & \mathcal{Y} \arrow[r, "G"'] & \mathcal{X}
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Definimos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, bend left, "R"] \arrow[r, bend right, "R^{'}"'] \arrow[r, phantom, "\zeta\Downarrow"] & F/G
\end{tikzcd}$$

de la siguiente manera: $\zeta_s = (\xi_s, \eta_s)$ para todo $s \in Ob(\mathcal{S})$.

Probemos que (ξ_s, η_s) es un morfismo en la categoría F/G. Sea $s \in Ob(\mathcal{S})$ y supongamos que $Rs = (A_{(R,s)}, Y_{(R,s)}, f_{(R,s)})$, $R^{'}s = (A_{(R',s)}, Y_{(R',s)}, f_{(R',s)})$.

Para ver que (ξ_s, η_s) es un morfismo en F/G, hay que probar que el siguiente cuadro es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
FA_{(R,s)} \arrow[r, "F\xi_s"] \arrow[d, "f_{(R,s)}"'] & FA_{(R',s)} \arrow[d, "f_{(R',s)}"] \\
GY_{(R,s)} \arrow[r, "G\eta_s"'] & GY_{(R',s)}
\end{tikzcd}$$

Utilizando la igualdad (2.1) en la componente s obtenemos que

$$f_{(R',s)} \circ F\xi_s = (\lambda R^{'})s \circ (F\xi)s = (G\eta)s \circ (\lambda R)s = G\eta_s \circ f_{(R,s)}$$

Por lo tanto la conmutatividad del cuadro anterior se cumple.

Probemos que ζ es una transformación natural. Sean $s, s^{'} \in Ob(\mathcal{S})$ y $g : s \to s^{'}$ un morfismo en $\mathcal{S}$. Veamos que el siguiente cuadro es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[d, "g"'] & Rs \arrow[r, "\zeta_s"] \arrow[d, "Rg"'] & R^{'}s \arrow[d, "R^{'}g"] \\
s^{'} & Rs^{'} \arrow[r, "\zeta_{s^{'}}"'] & R^{'}s^{'}
\end{tikzcd}$$

Para esto, supongamos que $Ri = (A_{(R,i)}, Y_{(R,i)}, f_{(R,i)})$, $R^{'}i = (A_{(R^{'},i)}, Y_{(R^{'},i)}, f_{(R^{'},i)})$ con $i \in s, s^{'}$, $Rg = (h_{(R,g)}, k_{(R,g)})$ y $R^{'}g = (h_{(R^{'},g)}, k_{(R^{'},g)})$. Con lo anterior, lo que tenemos que probar se traduce en ver que las siguientes composiciones son iguales

$$(\xi_s, \eta_s) \circ (h_{(R,g)}, k_{(R,g)}) = (h_{(R^{'},g)}, k_{(R^{'},g)}) \circ (\xi_{s^{'}}, \eta_{s^{'}}) \tag{2.2}$$

Puesto que ξ y η son transformaciones naturales obtenemos

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[d, "g"'] & A_{(R,s)} \arrow[r, "\xi_s"] \arrow[d, "h_{(R,g)}"'] & A_{(R^{'},s)} \arrow[d, "h_{(R^{'},g)}"] & Y_{(R,s)} \arrow[r, "\eta_s"] \arrow[d, "h_{(R,g)}"'] & Y_{(R^{'},s)} \arrow[d, "h_{(R^{'},g)}"] \\
s^{'} & A_{(R,s^{'})} \arrow[r, "\xi_{s^{'}}"'] & A_{(R^{'},s^{'})} & Y_{(R,s^{'})} \arrow[r, "\eta_{s^{'}}"'] & Y_{(R^{'},s^{'})}
\end{tikzcd}$$

Con lo cual queda probada la igualdad (2.2).

Es claro, que se tienen las siguientes igualdades

$$\xi \quad = \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, bend left=40, "R"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "R^{'}"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\zeta"'] & F/G \arrow[r, "D_0"'] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

y

$$\eta \quad = \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, bend left=40, "R"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "R^{'}"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\zeta"'] & F/G \arrow[r, "D_1"'] & \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

por como están definidos los funtores D_0 y D_1.

Ahora veamos que ζ es única. Consideremos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, bend left=40, "R"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "R^{'}"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\theta"'] & F/G
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\xi \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, bend left, "R"] \arrow[r, bend right, "R^{'}"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Downarrow"] & F/G \arrow[r, "D_0"'] & \mathcal{A} \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

y

$$\eta \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, bend left, "R"] \arrow[r, bend right, "R^{'}"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Downarrow"] & F/G \arrow[r, "D_1"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Supongamos que $\theta_s = (h_{(\theta,s),k_{(\theta,s)}})$ para todo $s \in Ob(\mathcal{S})$. Por la igualdad (2.3) obtenemos que $(D_0\theta)_s = \xi_s$ para todo $s \in Ob(\mathcal{S})$, es decir, $h_{(\theta,s)} = \xi_s$; por la igualdad (2.4) obtenemos que $(D_1\theta)_s = \eta_s$, es decir, $k_{(\theta,s)} = \eta_s$. Por como se definió ζ, tenemos que $\theta_s = \zeta_s$ para todo $s \in Ob(\mathcal{S})$. Por lo tanto, $\zeta = \theta$. $\square$

Regresemos al contexto de una 2-categoría general.

Proposición 2.6. *Sean $r : A \to D$, $s : B \to D$, $g : A \to B$ morfismos, r/s el objeto coma de r y s*

$$\begin{tikzcd} r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & A \arrow[d, "r"] \\ B \arrow[r, "s"'] & D \end{tikzcd}$$

y una 2-celda

$$\begin{tikzcd} r/s \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & A \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Para cualquier par de 2-celdas

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f^{'}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\xi}{\Longleftarrow}"] & r/s \arrow[d, "d_0"] \\ r/s \arrow[r, "d_0"'] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f^{'}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] & r/s \arrow[d, "d_1"] \\ r/s \arrow[r, "d_1"'] & B \end{tikzcd}$$

las cuales cumplan que

$$\begin{tikzcd}
& r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & A \arrow[r, "r"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\lambda"] & D \\
S \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & r/s \arrow[ur, "d_0"'] \arrow[r, "d_1"'] & B \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"] \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & A \arrow[dr, "r"] \arrow[d, phantom, "\lambda\Downarrow"] & \\
& r/s \arrow[r, "d_1"'] & B \arrow[r, "s"'] & D
\end{tikzcd}
\tag{2.5}$$

entonces se cumple la siguiente igualdad.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] & r/s \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & S \arrow[dl, "g"] \\
& r/s \arrow[rr, "d_1"'] & & B &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\xi}{\Longleftarrow}"] & r/s \arrow[d, "d_0"] \\
r/s \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & S \arrow[dl, "g"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por la propiedad 2 del objeto coma r/s aplicada a la igualdad (2.5), existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\psi\Downarrow"] & r/s
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\xi \quad = \quad \begin{tikzcd}
S \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\psi\Downarrow"] & r/s \arrow[r, "d_0"'] & S
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

y

$$\eta \quad = \quad \begin{tikzcd}
S \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\psi\Downarrow"] & r/s \arrow[r, "d_1"'] & B
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

notemos que por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f^{'}"'] \arrow[r, phantom, "\psi\Downarrow"] & r/s \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & S \arrow[dl, "g"] \\
 & & B &
\end{tikzcd}$$

y las igualdades (2.6) y (2.7) podemos obtener la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^{'}"'] & & r/s \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & S \arrow[dl, "g"] \\
 & r/s \arrow[rr, "d_1"'] & & B &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "f^{'}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"] & r/s \arrow[d, "d_0"] \\
r/s \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & S \arrow[dl, "g"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 2.7. *Sea $s : B \to D$ con adjunto izquierdo $v : D \to B$, con unidad η y counidad ε. Para cualquier flecha $r : A \to D$, la flecha $u : A \to r/s$ correspondiente a la 2-celda ηr, es decir*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "1_A"] \arrow[dd, "r"'] & & \\
 & r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[dd, "d_1"'] & A \arrow[dd, "r"] \\
D \arrow[dr, "v"'] & & \\
 & B \arrow[r, "s"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\lambda}{\Leftarrow}"] & D
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] & D \arrow[r, "1_D"] \arrow[dr, "v"'] & D \\
 & & B \arrow[u, "s"'] \arrow[u, phantom, "\eta\Downarrow", shift right=4ex]
\end{tikzcd}$$

es adjunto izquierdo de $d_0 : r/s \to A$ con unidad la identidad y counidad $\phi : ud_0 \Rightarrow 1_{r/s}$ definida como la única 2-celda tal que $d_0\phi = 1_{d_0}$ y $d_1\phi = \varepsilon d_1 \cdot v\lambda$.

Demostración. Supongamos que s tiene adjunto izquierdo v, con unidad η y counidad ε.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] & D \arrow[rr, "1_D"] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & D \\
 & & B \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

Si aplicamos la propiedad 1 del objeto coma r/s, existe una única flecha $u : A \to r/s$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "1_A"] \arrow[dd, "r"'] & & & & & & & \\
 & r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[dd, "d_1"'] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & A \arrow[dd, "r"] & & & & & \\
D \arrow[dr, "v"'] & & & = & A \arrow[r, "r"] & D \arrow[rr, "1_D"] \arrow[dr, "v"'] \arrow[rr, phantom, "\eta\Downarrow"', shift right=12] & & D \\
 & B \arrow[r, "s"'] & D & & & & B \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Procedemos a definir la 2-celda siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & A \arrow[d, "r"] \\
\omega := & B \arrow[r, "s"'] \arrow[dr, "1_B"'] & D \arrow[d, "v"] \arrow[d, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longleftarrow}"', shift right=12] \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Ahora veamos que al pegar la 2-celda ω con λ obtenemos λ. Para esto consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Downarrow"] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "r"'] & r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Downarrow"] & A \arrow[d, "r"] \\
B \arrow[r, "s"'] \arrow[rr, bend right=50, "1_B"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\varepsilon\Downarrow"] & D \arrow[r, "v"'] & B \arrow[r, "s"'] & D
\end{tikzcd}$$

dado que $\lambda u = \eta r$, obtenemos

$$\begin{tikzcd}
r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Downarrow"] & A \arrow[d, "r"] \\
B \arrow[r, "s"'] \arrow[dr, "1_B"'] \arrow[dr, phantom, "\varepsilon\Downarrow", near start, shift left=3] & D \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, "1_D"] \arrow[dr, phantom, "\eta\Downarrow", near end, shift right=3] \\
& B \arrow[r, "s"'] & D
\end{tikzcd}$$

por una de las identidades triangulares tenemos que el diagrama de arriba es igual a λ. Por lo que tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
& r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow 1_{d_0}"] & A \arrow[r, "r"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\lambda"] & D \\
r/s \arrow[ur, "ud_0"] \arrow[r, "1_{r/s}"'] & r/s \arrow[ur, "d_0"'] \arrow[r, "d_1"'] & B \arrow[ur, "s"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
r/s \arrow[r, "ud_0"] \arrow[dr, "1_{r/s}"'] & r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"] \arrow[d, phantom, "\omega\Downarrow"] & A \arrow[dr, "r"] \arrow[d, phantom, "\lambda\Downarrow"] \\
& r/s \arrow[r, "d_1"'] & B \arrow[r, "s"'] & D
\end{tikzcd}$$

ya que el diagrama de la izquierda es igual a λ y el de la derecha, como antes vimos, es igual λ. Por la propiedad 2 del objeto coma r/s, existe una única 2-celda $\phi : ud_0 \Rightarrow 1_{r/s}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\phi\Downarrow"] \\
r/s \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{r/s}"'] & & r/s \arrow[r, "d_0"] & A
\end{tikzcd} = 1_{d_0}$$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\phi\Downarrow"] \\
r/s \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{r/s}"'] & & r/s \arrow[r, "d_1"] & B
\end{tikzcd} = \omega \tag{2.9}$$

Las 2-celdas 1_A y ϕ son la unidad y counidad de la adjunción que queremos probar. En el diagrama 2.9, el diagrama superior es una de las identidades triangulares, por lo que solo falta probar la otra.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] & r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & A \arrow[d, "r"] \\
& B \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "1_B"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\varepsilon}{\Longleftarrow}"] & D \arrow[d, "v"] \\
& & B
\end{tikzcd}$$

puesto que $\lambda u = \eta r$ tenemos que es igual a

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] & D \arrow[rr, "1_D"] \arrow[dr, "v"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\eta\Downarrow"] & & D \arrow[dr, "v"] & \\
& & B \arrow[ur, "s"'] \arrow[rr, "1_B"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\varepsilon\Downarrow"] & & B
\end{tikzcd}$$

y por una de las identidades triangulares, concluimos que es igual a 1_{vr}, por lo tanto $\omega u = 1_{vr}$. Notemos que se tiene la siguiente igualdad.

$$\begin{tikzcd}
& r/s \arrow[r, "d_0"] & A \arrow[r, "r"] & D \\
A \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, phantom, shift right=6, "\Downarrow 1_A"] & r/s \arrow[ur, "d_0"'] \arrow[r, "d_1"'] \arrow[ur, phantom, shift right=6, "\Downarrow \lambda"] & B \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, shift left=6, "1_{vr}\Downarrow"] & r/s \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, shift left=6, "\lambda\Downarrow"] & A \arrow[dr, "r"] & \\
& r/s \arrow[r, "d_1"'] & B \arrow[r, "s"'] & D
\end{tikzcd}$$

ya que ambos diagramas son iguales a $\lambda u = \eta r$, por una de las propiedades del objeto coma r/s, entonces existe una única 2-celda $\psi : u \Rightarrow u$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u"'] \arrow[r, phantom, "\psi\Downarrow"] & r/s \arrow[r, "d_0"] & A
\end{tikzcd} = 1_A$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u"'] \arrow[r, phantom, "\psi\Downarrow"] & r/s \arrow[r, "d_1"] & B
\end{tikzcd} = 1_{vr}$$

pero la 2-celda 1_u también cumple que $d_0 1_u = 1_A$ y $d_1 1_u = 1_{vr}$, por la unicidad de ψ, entonces $\psi = 1_u$, de igual manera la 2-celda ϕu cumple que $d_0 \phi u = 1_A$ y

$d_1\phi u = 1_{vr}$, ya que $\omega u = 1_{vr}$, por la unicidad de ψ, entonces

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\phi\Downarrow"] & \\
A \arrow[r, "u"] & r/s \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{r/s}"'] & {} & r/s
\end{tikzcd} \quad = 1_u \tag{2.10}$$

Por lo tanto d_0 tiene adjunto izquierdo u,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dr, "u"'] & {} \arrow[d, phantom, "1_A\Downarrow"] & A \\
 & r/s \arrow[ur, "d_0"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\phi\Downarrow"] & \\
r/s \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{r/s}"'] & {} & r/s
\end{tikzcd}$$

con unidad 1_A y counidad ϕ y las correspondientes identidades triangulares en los diagramas (2.9) y (2.10). ☐

Corolario 2.8. *Sea $p : E \to B$ un morfismo. La flecha $d_0 : p/1_B \to E$ tiene adjunto izquierdo i_p donde la unidad de la adjunción es la identidad y cumple que i_p es la única flecha tal que*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "i_p"] \arrow[drr, bend left, "1_A"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\
 & p/1_B \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & E \arrow[d, "p"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\lambda}{\Leftarrow}"] \\
 & B \arrow[r, "1_B"'] & B
\end{tikzcd} \quad = 1_p$$

Demostración. Sea $p : E \to B$ un morfismo, formamos el objeto coma de p y 1_B

$$\begin{tikzcd}
p/1_B \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & E \arrow[d, "p"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\lambda}{\Leftarrow}"] \\
B \arrow[r, "1_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

dado que 1_B tiene adjunto izquierdo 1_B, por la proposición 2.7 d_0 tiene adjunto izquierdo i_p donde la unidad de la adjunción es la identidad y cumple que i_p es la única flecha tal que $\lambda i_p = 1_p$. ☐

Proposición 2.9 (**Lema de Yoneda**). *Sean* $j : A \to B$*,* $f : A \to X$ *y* $k : B \to X$ *morfismos en la* 2*-categoría* $\mathcal{K}$*. Existe una biyección entre morfismos de palmos*

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, dashed, "l"] & & & & j/1_B \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] \arrow[dd, dashed, "s"] & \\
A & & B & \longleftrightarrow & A & & B \\
& f/k \arrow[ul, "e_0"] \arrow[ur, "e_1"'] & & & & f/k \arrow[ul, "e_0"] \arrow[ur, "e_1"'] &
\end{tikzcd}$$

donde los correspondientes cuadrados coma son

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "1"] & y & f/k \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
A \arrow[r, "j"'] & B & & A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $j : A \to B$, $f : A \to X$ y $k : B \to X$ morfismos en la 2-categoría $\mathcal{K}$. Aplicando el Corolario 2.8 al morfismo j, existe el morfismo i_j el cual es adjunto izquierdo de $d_0 : j/1_B \to A$, además es el único morfismo tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_j"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "1_A"'] & & \\
& j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "1_B"] \\
& A \arrow[r, "j"'] & B
\end{tikzcd} = 1_j$$

Con esto procedemos a construir las funciones entre morfismos de palmos como sigue.

De derecha a izquierda simplemente precomponemos con $i_j : A \to j/1_B$.

De izquierda a derecha: comencemos con un morfismo de palmos

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "l"] & \\
A & & B \\
& f/k \arrow[ul, "e_0"] \arrow[ur, "e_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Con ayuda de l construimos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[dr, "d_0"'] \arrow[rrrdd, bend left, "d_1"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rrightarrow}"] & & & \\
& A \arrow[dr, "l"] \arrow[rrd, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "1_A"'] & & \\
& & f/k \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
& & A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo de palmos

$$\begin{tikzcd}
& j/1_B \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] \arrow[dd, "\widehat{l}"'] & \\
A & & B \\
& f/k \arrow[ul, "e_0"] \arrow[ur, "e_1"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[dr, "d_0"'] \arrow[rrrdd, bend left, "d_1"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rrightarrow}"] & & & \\
& A \arrow[dr, "l"] \arrow[rrd, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "1_A"'] & & \\
& & f/k \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
& & A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[dr, "\widehat{l}"] \arrow[rrd, bend left, "d_1"] \arrow[ddr, bend right, "d_0"'] & & \\
& f/k \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Veamos que estas construcciones son inversas la una de la otra. Si en la igualdad anterior precedemos con $i_j : A \to j/1_B$ obtenemos, dado que $\lambda i_j = 1_j$, que el lado izquierdo es igual a μl. Entonces $\widehat{l} i_j = l$, lo cual nos da una de las composiciones.

En el sentido contrario, comencemos con un morfismo de palmos

$$\begin{tikzcd}
& j/1_B \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] \arrow[dd, "m"'] & \\
A & & B \\
& f/k \arrow[ul, "e_0"] \arrow[ur, "e_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Necesitamos demostrar que

$$\widehat{mi_j} = m$$

Tenemos que $\widehat{mi_j}$ es el único morfismo de palmos tal que

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[dr, "d_0"'] \arrow[rrrrddd, bend left, "d_1"] & & & & \\
& A \arrow[r, phantom, "\overset{\lambda}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, "i_j"] \arrow[rrrdd, bend left, "j"] \arrow[rrddd, bend right, "1_A"'] & & & \\
& & j/1_B \arrow[dr, "m"] & & \\
& & & f/k \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
& & & A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[dr, "\widehat{mi_j}"] \arrow[drr, bend left, "d_1"] \arrow[ddr, bend right, "d_0"'] & & \\
& f/k \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Por lo que es suficiente con demostrar que el lado izquierdo de la igualdad anterior es μm. Para esto llamamos ε a la counidad de $i_j \dashv d_0$ y observamos que, por una de las identidades triangulares, el lado izquierdo de la igualdad de arriba es

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[rr, "1_{j/1_B}"] \arrow[dr, "d_0"'] & & j/1_B \arrow[dr, "d_0"] \arrow[rrrrddd, bend left, "d_1"] & & & & \\
& A \arrow[u, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Uparrow}"] \arrow[ur, "i_j"'] \arrow[rr, "1_A"'] & & A \arrow[r, phantom, "\overset{\lambda}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, "i_j"] \arrow[rrrdd, bend left, "j"] \arrow[rrddd, bend right, "1_A"'] & & & \\
& & & & j/1_B \arrow[dr, "m"] & & \\
& & & & & f/k \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
& & & & & A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Como λi_j es la identidad en j, esto se transforma en

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[rr, "1_{j/1_B}"] \arrow[dr, swap, "d_0"] & & j/1_B \arrow[ddr, "m"] \arrow[ddrr, bend left, "d_1"] \arrow[dddr, bend right, swap, "d_0"] & & \\
& A \arrow[ur, swap, "i_j"] \arrow[u, Rightarrow, "\varepsilon"] & & & \\
& & & f/k \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, swap, "e_0"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
& & & A \arrow[r, swap, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Como $d_0\varepsilon = 1_{d_0}$, esto concluye la demostración. $\square$

Capítulo 3

Extensiones y levantamientos

En este capítulo daremos las definiciones de extensión derecha y levantamiento izquierdo sobre una 2-categoría $\mathcal{K}$. Haremos notar que estas dos definiciones son duales. Se demostrará el Teorema del Funtor Adjunto Formal Relativo el cual nos permite ver otra relación entre extensiones, levantamientos y adjunciones, un resultado de este teorema nos permite caracterizar de otra forma cuándo un funtor en **Cat** tiene adjunto izquierdo. La información en este capítulo puede consultarse en los artículos [5] y [4].

Definición 3.1. *Sean $\mathcal{K}$ una 2-categoría, $\mathcal{Q}$ un conjunto de flechas con codominio fijo A y consideramos el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Decimos que el diagrama (3.1) tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión derecha o que ρ exhibe a f como una $\mathcal{Q}$-extensión derecha de w a lo largo de k si y solo si para todo $g : Y \to A$ en $\mathcal{Q}$ y $\alpha : gk \Rightarrow w$, existe una única 2-celda $\delta : g \Rightarrow f$ tal que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \arrow[dl, bend left=60, "g"] \arrow[dl, phantom, bend left=30, "\overset{\delta}{\Longleftarrow}"] \\
& A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "g"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Cuando la condición de unicidad en δ no se cumple necesariamente, diremos que es una $\mathcal{Q}$-extesión derecha débil.

Observación 3.2. Cuando el conjunto de flechas $\mathcal{Q}$ es el conjunto de todas las flechas con codominio A, se omitirá el prefijo $\mathcal{Q}$.

Definición 3.3. *El diagrama (3.1) es rígido si y solo si la única endo-2-celda $\delta : f \Rightarrow f$ que satisface que $\rho = \rho \cdot \delta k$ es la identidad en f.*

Observación 3.4. Si se cumple que el diagrama (3.1) tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión derecha y $f \in \mathcal{Q}$, entonces el diagrama es rígido.

Definición 3.5. *El diagrama (3.1) tiene la propiedad de escisión de idempotentes, si cada idempotente $\delta : f \Rightarrow f$ que satisfaga $\rho = \rho \cdot \delta k$ se escinde en la categoría $\mathcal{K}(Y, A)$.*

Observación 3.6. Si el diagrama (3.1) es rígido, entonces el diagrama tiene la propiedad de escisión de idempotentes.

Definición 3.7. *El diagrama (3.1) tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión derecha en $y : G \to Y$ cuando el objeto coma y/k existe y el siguiente pegado*

$$\begin{tikzcd}
y/k \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dd, "d_1"'] & & G \arrow[dd, "y"] \\
& \overset{\lambda}{\Longleftarrow} & \\
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd} \qquad (3.2)$$

exhibe a fy como una $\mathcal{Q}$-extensión derecha de wd_1 a lo largo de d_0.

Definición 3.8. *El diagrama (3.1) tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión derecha puntual si y solo si para toda flecha g con codominio Y, el diagrama (3.1) tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión derecha en g.*

Definición 3.9. *Sean $\mathcal{K}$ una 2-categoría, $\mathcal{Q}$ un conjunto de flechas con codominio fijo A y consideramos el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & \overset{\zeta}{\Longrightarrow} & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd} \qquad (3.3)$$

Decimos que el diagrama (3.3) tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión izquierda o que ζ exhibe a f como una $\mathcal{Q}$-extensión izquierda de w a lo largo de k si y solo si para todo $g : Y \to A$ en $\mathcal{Q}$ y $\alpha : gk \Rightarrow w$, existe una única 2-celda $\delta : f \Rightarrow g$

tal que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dl, bend left, "g"] \arrow[dl, phantom, shift left=2ex, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] & = & B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
& A & & & & A &
\end{tikzcd}$$

Cuando la condición de unicidad en δ no se cumple necesariamente, diremos que es una $\mathcal{Q}$-extesión derecha débil.

Teorema 3.10. *1. Sean $f : A \to X$, $k : B \to X$ y $j : A \to B$. Supongamos que existen los objetos coma f/k y $j/1_B$, entonces existe una biyección entre las 2-celdas*

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] & & A \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\overset{\kappa}{\Longrightarrow}"] & & B \arrow[dl, "k"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r, phantom, shift left=5ex, "\longleftrightarrow"] & & & X &
\end{tikzcd}$$

Obtenida por la composición de la flecha $i_j : A \to j/1_B$, del corolario 2.8.

2. Supongamos que f/l existe para toda $l \in Q$. La 2-celda κ exhibe a k como una Q-extensión izquierda de f a lo largo de j si y solo si la correspondiente 2-celda ζ exhibe a k como una Q-extensión izquierda de fd_0 a lo largo de d_1.

Demostración. 1) : Consideremos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

por la propiedad 1 del objeto coma f/k, existe la siguiente biyección

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] & & & j/1_B \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] \arrow[dd, "z"] & \\
A \arrow[r, "f"'] & X & \longleftrightarrow & A & & B \\
& & & & f/k \arrow[ul, "e_0"] \arrow[ur, "e_1"'] &
\end{tikzcd}$$

por el Lema 2.9, existe la siguiente biyección

$$\begin{tikzcd}
 & j/1_B \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] \arrow[dd, "z"] & \\
A & & B \\
 & f/k \arrow[ul, "e_0"] \arrow[ur, "e_1"'] &
\end{tikzcd}
\longleftrightarrow
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "y"] & \\
A & & B \\
 & f/k \arrow[ul, "e_0"] \arrow[ur, "e_1"'] &
\end{tikzcd}$$

por la propiedad 1 del objeto coma f/k, entonces existe la siguiente biyección

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "y"] & \\
A & & B \\
 & f/k \arrow[ul, "e_0"] \arrow[ur, "e_1"'] &
\end{tikzcd}
\longleftrightarrow
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\kappa}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

con lo cual tenemos la siguiente biyección, al componer las biyecciones anteriores

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
\longleftrightarrow
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & B \arrow[dl, "k"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

dado que la biyección del Lema 2.9 está dada por la composición con el morfismo i_j del corolario 2.8, la biyección anterior también se obtiene de la misma manera, es decir, al componer con i_j.

2): Supongamos que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & B \arrow[dl, "k"] \\
 & X &
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

y

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

se corresponden de acuerdo con la afirmación 1.

⇒) Supongamos que κ exhibe a k como una Q-extensión izquierda de f a lo largo de j. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "l"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Por la biyección de la afirmación 1, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\xi}{\Longrightarrow} & B \arrow[dl, "l"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

asociada al diagrama 3.6, dado que el diagrama 3.4 tiene la propiedad de Q-extensión izquierda, entonces existe una única 2-celda $\delta : k \Rightarrow l$ tal que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & Y \arrow[dl, "k"'] \arrow[dl, bend left=60, "l"] \arrow[dl, phantom, shift left=3ex, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] \\
& A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\xi}{\Longrightarrow} & Y \arrow[dl, "l"] \\
& A &
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

probemos que

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"'] \arrow[d, bend left=60, "l"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "l"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

para esto mandemos al diagrama de la izquierda de la igualdad anterior bajo la biyección de la afirmación 1. Por como está definida la biyección de la afirmación

1 obtenemos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrd, bend left, "j"] \arrow[rd, "i_j"] \arrow[rdd, bend right, "1_A"'] & & & & & \\
& j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"'] \arrow[d, bend left=60, "l"] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] & = & A \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\kappa}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[dl, "k"] \arrow[dl, bend left=60, "l"] \arrow[dl, phantom, shift right=3, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & X & & X &
\end{tikzcd}$$

ahora por la igualdad (3.7) y el hecho de que se aplicó una biyección, se obtiene la igualdad (3.8). Falta ver que δ es única.

Sea la 2-celda $\gamma : k \Rightarrow l$ tal que

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"'] \arrow[d, bend left=60, "l"] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\overset{\gamma}{\Longrightarrow}"] & = & j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\varphi}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "l"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X & & A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Por lo que al mandar bajo la biyección de la afirmación 1 la igualdad anterior tenemos que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\overset{\kappa}{\Longrightarrow}"] & & Y \arrow[dl, "k"] \arrow[dl, bend left=60, "l"] \arrow[dl, phantom, shift right=3, "\overset{\gamma}{\Longrightarrow}"] & = & B \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\xi}{\Longrightarrow} & Y \arrow[dl, "l"] \\
& A & & & & A &
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad de δ, entonces $\delta = \gamma$.

$\Leftarrow$) Supongamos que en el diagrama (3.5), ζ exhibe a k como una extensión izquierda de fd_0 a lo largo de d_1. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\xi}{\Longrightarrow} & B \arrow[dl, "l"] \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

por la afirmación 1, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "l"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

asociada a la 2-celda del diagrama (3.9), dado que el diagrama (3.5) tiene la propiedad la Q-extensión izquierda, entonces existe una única 2-celda $\delta : k \Rightarrow l$ tal que

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"'] \arrow[d, bend left=60, "l"] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "l"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

probemos que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & Y \arrow[dl, "k"] \arrow[dl, bend left=60, "l"] \arrow[dl, phantom, shift left=4, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] \\
& A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\xi}{\Longrightarrow} & Y \arrow[dl, "l"] \\
& A &
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

para esto tomemos la imagen de la igualdad (3.10) bajo la biyección de la afirmación 1 con lo cual obtenemos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_j"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "1_A"'] & & \\
& j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"'] \arrow[d, bend left=60, "l"] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\xi}{\Longrightarrow} & B \arrow[dl, "k"] \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{3.12}$$

dado que ζ bajo la biyección es κ, obtenemos la igualdad (3.11). Veamos que δ es única.

Sea $\gamma : k \Rightarrow l$ tal que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & Y \arrow[dl, "k"] \arrow[dl, bend left=60, "l"] & & B \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overset{\xi}{\Longrightarrow} & Y \arrow[dl, "l"] \\
& A & \overset{\gamma}{\Longrightarrow} & = & & A &
\end{tikzcd}$$

Por lo que al tomar la imagen, bajo la biyección de la afirmación 1, de la igualdad anterior tenemos que

$$\begin{tikzcd}
j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"'] \arrow[d, bend left=60, "l"] & \overset{\gamma}{\Longrightarrow} & & j/1_B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "l"] \\
A \arrow[r, "f"'] & X & & = & A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad de δ, entonces $\delta = \gamma$. □

Observación 3.11. Se tiene el Teorema dual al 3.10, correspondiente a extensiones derechas.

Proposición 3.12. *Supongamos que el objeto coma $1_Y/k$ existe y l/w existe para todo $l \in Q$. El diagrama (3.1) tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión derecha si y solo si tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión derecha en 1_Y.*

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos la biyección dual del Teorema 3.10 a la siguiente 2-celda

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[rr, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & \overset{\lambda}{\Longleftarrow} & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & Y \arrow[dl, "f"] \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{3.13}$$

obtenemos la 2-celda ρ, ya que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "z"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "1_B"'] & & \\
& 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
& B \arrow[r, "k"'] & Y
\end{tikzcd} \quad = 1_k$$

lo único que basta es utilizar el dual del Teorema 3.10 en las 2-celdas (3.13) y (3.1), esto concluye la prueba. ☐

En vista de la proposición anterior tenemos la siguiente observación.

Observación 3.13. Bajo las hipótesis de la Observación (3.12), si el digrama (3.1) tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión derecha puntual, entonces tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión derecha.

Definición 3.14. *Decimos que una flecha $w : B \to A$ tiene una $\mathcal{Q}$-extensión derecha a lo largo de $k : B \to Y$ en la flecha $y : G \to Y$, cuando el objeto coma y/k existe y existe un diagrama*

$$\begin{tikzcd}
y/k \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "wd_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\mu}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[dl, "z"] \\
& A &
\end{tikzcd} \tag{3.14}$$

con la propiedad de $\mathcal{Q}$-extensión derecha.

Definición 3.15. *Sea $\mathcal{R}$ un conjunto de flechas en $\mathcal{K}$ con codominio X. Una flecha $t : A \to X$ se dice que $\mathcal{R}$-respeta (débilmente) el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

en $y : G \to Y$ *cuando* y/k *existe y la* 2*-celda*

$$\begin{tikzcd}
y/k \arrow[rr, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] \\
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

al componerla con t*, exhibe a* tfy *como una* $\mathcal{R}$*-extensión derecha (débil) de* twd_1 *a lo largo de* d_0*.*

$$\begin{tikzcd}
y/k \arrow[rr, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] \\
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A \arrow[d, "t"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Definición 3.16. *Sea* $\mathcal{R}$ *un conjunto de flechas en* $\mathcal{K}$ *con codominio* X*. Una flecha* $t : A \to X$ *se dice que* $\mathcal{R}$*-respeta (débilmente) el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd} \tag{3.15}$$

cuando $t\rho$ *exhibe a* tf *como una* $\mathcal{R}$*-extensión derecha (débil) de* tw *a lo largo de* *la flecha k.*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A \arrow[d, "t"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Con la definición anterior y la proposición 3.12 tenemos la siguiente observación.

Observación 3.17. Supongamos que l/tw existe para todo $l \in Q$. Si $t : A \to X$, $\mathcal{R}$-respeta el diagrama (3.15) en 1_Y entonces t, $\mathcal{R}$-respeta el diagrama (3.15).

Observación 3.18. La flecha 1_A $\mathcal{R}$-respeta el diagrama (3.15) si y solo si el diagrama (3.15) tiene la propiedad de $\mathcal{R}$-extensión derecha.

Veamos ahora el dual de la definición 3.1.

Definición 3.19. *Sean $\mathcal{K}$ una 2-categoría, $\mathcal{Q}$ un conjunto de flechas con dominio fijo Y y consideramos el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
B & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Rightarrow}"] & Y \arrow[ll, "k"'] \\
& A \arrow[ul, "w"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.16}$$

Decimos que el diagrama (3.16) tiene la propiedad de $\mathcal{Q}$-levantamiento izquierdo o que ρ exhibe a f como un $\mathcal{Q}$-levantamiento izquierdo de w a lo largo de k si y solo si para todo $g : A \to Y$ en $\mathcal{Q}$ y $\alpha : w \Rightarrow kg$, existe una única 2-celda $\delta : f \Rightarrow g$ tal que $\alpha = k\delta \cdot \rho$. Cuando la condición de unicidad en δ no se cumple necesariamente, diremos que es un $\mathcal{Q}$-levantamiento izquierdo débil.

Observación 3.20. Los diagramas de levantamientos izquierdos en $\mathcal{K}$ son diagramas de extensiones derechas en $\mathcal{K}^{\mathrm{coop}}$.

Definición 3.21. *Sea $z : Y \to A$ un levantamiento izquierdo de $m : Y \to X$ a lo largo de $t : A \to X$*

$$\begin{tikzcd}
X & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Rightarrow}"] & A \arrow[ll, "t"'] \\
& Y \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "z"'] &
\end{tikzcd}$$

Decimos que el levantamiento es absoluto si y solo es respetado por toda flecha g con codominio Y.

$$\begin{tikzcd}
X & & A \arrow[ll, "t"'] \\
& \underset{\rho}{\Longrightarrow} & \\
& Y \arrow[uul, "m"] \arrow[uur, "z"'] & \\
& B \arrow[u, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Definición 3.22. *Sea $q : Q \to C$ una flecha, decimos que q es plenamente fiel si y solo si para todo par de flechas $u, v : G \to Q$ y toda 2-celda*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] & Q \arrow[d, "q"] \\
Q \arrow[r, "q"'] & C
\end{tikzcd}$$

existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, bend left, "u"{name=U}] \arrow[r, bend right, "v"'{name=V}] & Q
\arrow[Rightarrow, from=U, to=V, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, bend left, "u"{name=U}] \arrow[r, bend right, "v"'{name=V}] & Q \arrow[r, "q"] & C
\arrow[Rightarrow, from=U, to=V, "\tau"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] & Q \arrow[d, "q"] \\
Q \arrow[r, "q"'] & C
\end{tikzcd}$$

Observación 3.23. Sea $P : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ una flecha en **Cat**. La flecha P es plenamente fiel si y solo si P es fiel y pleno.

En efecto, primero supongamos que P es plenamente fiel. Consideremos la categoría $\mathbf{1}$ la cual solo tiene el objeto 0. Empecemos probando que P es fiel. Sean $f, g : a \to b$ flechas en $\mathcal{A}$ tales que $Pf = Pg$. Definimos los funtores $F, G : \mathbf{1} \to \mathcal{A}$ de la siguiente manera: $F0 := a$, $G0 := b$. También definimos la transformación natural

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "PF"{name=U}] \arrow[r, bend right, "PG"'{name=V}] & \mathcal{X}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=V, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

de la siguiente manera: $\eta_0 = Pf$.

Como P es plenamente fiel, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, bend left=40, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "G"'{name=D}] & \mathcal{A} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, bend left=40, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "G"'{name=D}] & \mathcal{A} \arrow[r, "P"] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\tau"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "P"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "P"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd} \tag{3.17}$$

Ahora definimos las siguientes transformaciones naturales $\varphi, \psi : F \Rightarrow G$ de la siguiente manera: $\varphi_0 := f$ y $\psi_0 := g$. Notemos que φ y ψ cumplen la ecuación (3.17), pues $P\varphi_0 = Pf$ y $P\psi_0 = Pg = Pf$. Por la unicidad de τ, entonces $\tau = \varphi$ y $\tau = \psi$, por lo que $\varphi = \psi$. Por lo tanto $f = g$, con lo cual P es fiel.

Ahora probemos que P es pleno. Sean $a, b \in Ob(\mathcal{A})$ y $h : Pa \to Pb$ un morfismo en $\mathcal{X}$. Consideremos los funtores F y G definidos anteriormente. Definimos la transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, bend left=40, "PF"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "PG"'{name=D}] & \mathcal{X} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

de la siguiente manera: $\delta_0 := h$.

Como P es plenamente fiel, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, bend left=40, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "G"'{name=D}] & \mathcal{A} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, bend left=40, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "G"'{name=D}] & \mathcal{A} \arrow[r, "P"] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\sigma"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "P"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\delta}{\Longleftarrow}"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "P"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd} \tag{3.18}$$

Por lo que $h = \delta_0 = P\sigma_0 = t : a \to b$, entonces $Pt = h$. Por lo tanto P es pleno.

Ahora supongamos que P es fiel y pleno. Sean $F, G : \mathcal{Y} \to \mathcal{A}$ funtores y

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, bend left=40, "PF"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "PG"'{name=D}] & \mathcal{X}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

una transformación natural. Para todo $y \in Ob(\mathcal{Y})$, $\eta_y : PFy \to PGy$ es un morfismo en $\mathcal{X}$; como P es pleno, existe $f_y : Fy \to Gy$ morfismo en $\mathcal{X}$ tal que $Pf_y = \eta_y$. Veamos que f_y es el único morfismo que bajo P va a dar a η_y. Para lo anterior, consideremos $g_y : Fy \to Gy$ morfismo en $\mathcal{A}$ tal que $Pg_y = \eta_y$. Como P es fiel, entonces $g_y = f_y$, esto para toda $y \in Ob(\mathcal{Y})$. Definimos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, bend left=40, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "G"'{name=D}] & \mathcal{A}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

de la siguiente manera: $\tau_y = f_y$ para toda $y \in Ob(\mathcal{Y})$.

Observemos que τ cumple la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathcal{Y} \arrow[r, "F"] \arrow[dd, "G"'] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] & \mathcal{A} \arrow[dd, "P"] \\
\mathcal{Y} \arrow[r, bend left=40, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "G"'{name=D}] & \mathcal{A} \arrow[r, "P"] & \mathcal{X} & = & & \\
 & & & & \mathcal{A} \arrow[r, "P"'] & \mathcal{X}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

por la manera en como se definió τ.

Falta probar la unicidad de τ. Consideremos la 2-celda $\theta : F \Rightarrow G$ tal que

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathcal{Y} \arrow[r, "F"] \arrow[dd, "G"'] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] & \mathcal{A} \arrow[dd, "P"] \\
\mathcal{Y} \arrow[r, bend left=40, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "G"'{name=D}] & \mathcal{A} \arrow[r, "P"] & \mathcal{X} & = & & \\
 & & & & \mathcal{A} \arrow[r, "P"'] & \mathcal{X}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

Puesto que $P\theta_y = \eta_y = P\tau_y$ para todo $y \in Ob(\mathcal{Y})$. Como P es fiel, entonces $\theta_y = \tau_y$ para todo $y \in Ob(\mathcal{Y})$, por lo tanto $\tau = \theta$.

Definición 3.24. *Sea $q : Q \to C$ plenamente fiel. Definimos el subobjeto pleno de C, como el conjunto de morfismos que van hacia C y son equivalentes a q, identificamos a Q con este conjunto de flechas y diremos que Q es un subobjeto pleno de C.*

Lema 3.25. *Sean $f : X \to A$, $g : A \to X$ morfismos tales que $f \dashv g$ donde η y ϵ son la unidad y counidad de la adjunción respectivamente.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "1_X"] \arrow[dr, "f"'] & {} \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & X \\
& A \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
A \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "1_A"'] & {} & A
\end{tikzcd}$$

Entonces la 2*-celda*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "1_A"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longleftarrow}" near start] \\
& A
\end{tikzcd}$$

exhibe a f como extensión derecha absoluta de 1_A a lo largo de g.

Demostración. Sean $h : A \to B$, $s : X \to B$ y la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h"'] & \overset{\beta}{\Longleftarrow} & X \arrow[dl, "s"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Definimos la 2-celda

$$\varphi \;:=\; \begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "1_X"] & \overset{\eta}{\Longleftarrow} & \\
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h"'] & \overset{\beta}{\Longleftarrow} & X \arrow[dl, "s"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Notemos que φ cumple que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h"'] & \overset{\beta}{\Longleftarrow} & X \arrow[dl, "s"] \\
& B &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "1_A"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left=70, "s"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longleftarrow}" near start] \\
& A \arrow[d, "h"] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] & {} \\
& B
\end{tikzcd}
\tag{3.19}$$

D

Debido a la definición de α y φ, el lado derecho de la igualdad anterior se traduce en

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "1_A"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "1_X"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Leftarrow}"] & \\
 & A \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "h"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "s"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"'] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

el cual, por una de las identidades triángulares asociada a la adjunción entre g y f, es igual β, con lo cual queda demostrada la igualdad (3.19). Veamos que φ es única, sea $\psi : s \Rightarrow hf$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h"'] & X \arrow[d, "s"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"] \\
 & B
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "1_A"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left=60, "s"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Leftarrow}"] \\
 & A \arrow[d, "h"] \arrow[r, phantom, "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] & {} \\
 & B
\end{tikzcd}$$

si en la igualdad anterior pegamos la 2-celda η obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "1_A"] & \\
A \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "h"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "s"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"'] \\
B &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "1_X"] & & \\
A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "1_A"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left=60, "s"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Leftarrow}"] & \\
 & A \arrow[d, "h"] \arrow[r, phantom, "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] & {} \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

el diagrama de la izquierda es igual a φ y por una de las identidades triángulares de la ajunción tenemos que el diagrama de la derecha es igual a ψ, con lo cual $\varphi = \psi$. Por lo tanto φ es único. De lo anterior y la obsevación 3.18 podemos concluir que h tiene una extesión derecha absoluta a lo largo de g. $\square$

Teorema 3.26 (Funtor adjunto formal relativo)**.** *Supongamos que el objeto coma de $m : Y \to X$ y $t : A \to X$ existe*

$$\begin{tikzcd}
m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *m tiene un levantamiento izquierdo absoluto a lo largo de t.*
2. *Existe un diagrama rígido en la flecha s*

   $$\begin{tikzcd}
   & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] & \\
   A \arrow[rr, "t"'] & {} & X
   \end{tikzcd}$$

   el cual es respetado débilmente por d_0.
3. *d_0 tiene un adjunto izquierdo donde la unidad de la adjunción es la identidad.*
4. *d_0 tiene un adjunto izquierdo.*
5. *1_A tiene una extensión derecha absoluta a lo largo de t en m.*
6. *Existe un diagrama*

   $$\begin{tikzcd}
   m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
   & A &
   \end{tikzcd}$$

   con la propiedad de escisión de idempotentes y la cual es respetada débilmente por t.
7. *(Previsto con la existencia de los objetos coma necesarios) 1_A tiene una extensión derecha puntual a lo largo de t en m la cual es respetada por t.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) : Supongamos que $\eta : m \Rightarrow ts$ exhibe a s como un levantamiento izquierdo absoluto de m a lo largo de t

$$\begin{tikzcd}
X & \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[ll, "t"'] \\
& Y \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.20}$$

por el dual de la observación 3.18 tenemos que el diagrama anterior tiene la propiedad de levantamiento izquierdo, ahora por el dual de la observación 3.4 se tiene que el diagrama (3.20) es rígido. Dado que el levantamiento es absoluto, entonces el diagrama (3.20) es respetado por la flecha $d_0 : m/t \to Y$

$$\begin{tikzcd}
X & & A \arrow[ll, "t"'] \\
& Y \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & \\
& m/t \arrow[u, "d_0"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo que d_0 respeta débilmente al diagrama (3.20).

3) $\Rightarrow$ 4) : Es inmediata.

4) $\Rightarrow$ 5) : Supongamos que d_0 tiene adjunto izquierdo $c : Y \to m/t$ donde η y ε son la unidad y counidad respectivamente

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "1_Y"] \arrow[dr, "c"'] & \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & Y \\
& m/t \arrow[ur, "d_0"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "c"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
m/t \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{m/t}"'] & & m/t
\end{tikzcd}$$

Definimos $f := d_1 c : Y \to A,\ \ \alpha := d_1\varepsilon : fd_0 \Rightarrow 1_A d_1$

$$\begin{tikzcd}
& m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "1_{m/t}"'] & Y \arrow[d, "c"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longleftarrow}"] \\
\alpha \ := & & m/t \arrow[d, "d_1"] \\
& & A
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 3.25 y la Definición 3.14 tenemos que 1_A tiene una extensión derecha absoluta a lo largo de t en m.

5) $\Rightarrow$ 6) : Por hipótesis tenemos que 1_A tiene una extensión derecha absoluta a

lo largo de t en m, por lo que existe la siguiente 2-celda

$$\begin{tikzcd}
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & & Y \arrow[dd, "f"] \\
& A \arrow[r, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] \arrow[dr, "1_A"'] & \\
& & A
\end{tikzcd}$$

(3.21)

la cual exhibe a f como extensión derecha de d_1 a lo largo de d_0 y además es absoluta. Por la observación 3.4, entonces el diagrama (3.21) tiene la propiedad de escisión de idempotentes. Dado que la extensión de 1_A es absoluta, entonces el diagrama (3.21) es respetado por la flecha t y por ende es respetado débilmente por t.

7) $\Rightarrow$ 6) : Por hipótesis tenemos que 1_A tiene una extensión derecha a lo largo de t en m

$$\begin{tikzcd}
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & & Y \arrow[dd, "f"] \\
& A \arrow[r, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] \arrow[dr, "1_A"'] & \\
& & A
\end{tikzcd}$$

la cual es puntual, por lo que el siguiente diagrama tiene la propiedad de extesión derecha

$$\begin{tikzcd}
1_Y/d_0 \arrow[rr, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"'] & \overset{\lambda}{\Longleftarrow} & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & & Y \arrow[dd, "f"] \\
& A \arrow[r, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] \arrow[dr, "1_A"'] & \\
& & A
\end{tikzcd}$$

por la observacion 3.12, entonces el siguiente diagrama tiene la propiedad de extesión derecha

$$\begin{tikzcd}
m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& A
\end{tikzcd} \tag{3.22}$$

luego por las observaciones 3.4 y 3.6, se tiene que el diagrama (3.22) tiene la propiedad de escisión de idempotentes. Como la extensión derecha puntual es respetada por t, entonces el diagrama (3.22) es respetado débilmente por t.

2) $\Rightarrow$ 3) : Por hipótesis tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{3.23}$$

el cual es rígido y respetado débilmente por d_0. Ahora por la propiedad del objeto coma m/t, existe una única flecha $v : Y \to m/t$ tal que

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "v"] \arrow[drr, bend left, "1_Y"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\
& m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
& A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{3.24}$$

Probaremos que v es adjunto izquierdo de d_0, en el diagrama anterior podemos observar que aparece la unidad de la adjunción.

Dado que el diagrama (3.23) es respetado débilmente por d_0, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& m/t \arrow[d, "d_0"] & \\
& Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "m"] & \\
A \arrow[rr, "t"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & & X
\end{tikzcd}$$

exhibe a sd_0 como un levantamiento izquierdo débil de md_0 a lo largo de t. Aplicando la propiedad de levantamiento izquierdo débil a λ, entonces existe

$$\begin{tikzcd}
 & m/t \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dr, "d_0"] & \\
A & \overset{\phi}{\Longleftarrow} & Y \arrow[ll, "s"]
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
 & m/t \arrow[d, "d_0"] \arrow[ddl, bend right, "d_1"'] & \\
\overset{\phi}{\Longleftarrow} & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "m"] & \\
A \arrow[rr, "t"'] & \overset{\eta}{\Longleftarrow} & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & Y \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & X
\end{tikzcd}
\tag{3.25}$$

Probemos la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
 & m/t \arrow[rr, "d_0"] & & Y \arrow[rr, "m"] & & X \\
 & \Downarrow 1_{d_0} & & \Downarrow \lambda & & \\
m/t \arrow[uur, "vd_0"] \arrow[rr, "1_{m/t}"'] & & m/t \arrow[uur, "d_0"'] \arrow[rr, "d_1"'] & & A \arrow[uur, "t"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
m/t \arrow[rr, "vd_0"] \arrow[ddr, "1_{m/t}"'] & & m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[ddr, "d_1"'] & & Y \arrow[ddr, "m"] & \\
 & & \phi \Downarrow & & \lambda \Downarrow & \\
 & m/t \arrow[rr, "d_1"'] & & A \arrow[rr, "t"'] & & X
\end{tikzcd}
\tag{3.26}$$

el diagrama de la izquierda claramente es igual a λ, por la igualdades (3.24) y (3.25) obtenemos que el lado derecho de la igualdad anterior es igual a λ, por lo que se cumple la igualdad (3.26).

Utilizando la propiedad 2 del objeto coma m/t en la igualdad (3.26), existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "v"] & \\
m/t \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{m/t}"'] & \xi \Downarrow & m/t
\end{tikzcd}$$

tal que

$$1_{d_0} = \begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "v"] & & \\
m/t \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{m/t}"'] & \xi \Downarrow & m/t \arrow[r, "d_0"'] & Y
\end{tikzcd}
\tag{3.27}$$

y

$$\phi \;=\; \begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "v"] \arrow[d, phantom, "\xi\Downarrow"] & \\
m/t \arrow[ur, "d_0"] \arrow[r, "1_{m/t}"'] & m/t \arrow[r, "d_1"'] & A
\end{tikzcd} \tag{3.28}$$

Veamos que la 2-celda ξ es la counidad de la adjunción que queremos y el diagrama (3.27) es una de las identidades triangulares.

Notemos que se cumple la siguiente igualdad por las ecuaciones (3.24) (3.25)

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "v"] \arrow[drrr, bend left, "1_Y"] \arrow[ddrr, bend right, "s"'] & & & & \\
& m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & \\
& & A \arrow[u, phantom, "\overset{\phi}{\Leftarrow}"] \arrow[rr, "t"'] & & X
\end{tikzcd}
\;=\;
\begin{tikzcd}
& m/t \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & \\
A \arrow[rr, "t"'] & & X
\end{tikzcd} \tag{3.29}$$

Dado que la 2-celda η es rígida, entonces

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "v"] \arrow[drrr, bend left, "1_Y"] \arrow[ddrr, bend right, "s"'] & & & \\
& m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\
& & A \arrow[u, phantom, "\overset{\phi}{\Leftarrow}"] &
\end{tikzcd}
\;=\; 1_s \tag{3.30}$$

Ahora observemos que se cumple la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
& m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow 1_Y"] & & Y \arrow[rr, "m"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\lambda"] & & X \\
Y \arrow[ur, "v"] \arrow[rr, "v"'] & & m/t \arrow[ur, "d_0"'] \arrow[rr, "d_1"'] & & A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}
\;=\;
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v"'] & & m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"] & & Y \arrow[dr, "m"] & \\
& m/t \arrow[u, phantom, "1_s\Downarrow"] \arrow[rr, "d_1"'] & & A \arrow[u, phantom, "\lambda\Downarrow"] \arrow[rr, "t"'] & & X
\end{tikzcd} \tag{3.31}$$

por la propiedad 2 del objeto coma, entonces existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, bend left, "v"] \arrow[rr, bend right, "v"'] \arrow[rr, phantom, "\psi\Downarrow"] & & m/t
\end{tikzcd}$$

tal que

$$1_Y = \begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\psi\Downarrow"] & m/t \arrow[r, "d_0"'] & Y \end{tikzcd}$$

y

$$1_s = \begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\psi\Downarrow"] & m/t \arrow[r, "d_1"'] & A \end{tikzcd}$$

pero la 2-celda 1_v cumple también que

$$1_Y = \begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "1_v\Downarrow"] & m/t \arrow[r, "d_0"'] & Y \end{tikzcd}$$

y

$$1_s = \begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "1_v\Downarrow"] & m/t \arrow[r, "d_1"'] & A \end{tikzcd}$$

por la unicidad de ψ, entonces $\psi = 1_v$, observemos que la 2-celda ξv cumple también que

$$1_Y = \begin{tikzcd} & & Y \arrow[dr, "v"] \arrow[d, phantom, "\xi\Downarrow"] & & \\ Y \arrow[r, "v"'] & m/t \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{m/t}"'] & & m/t \arrow[r, "d_0"'] & Y \end{tikzcd}$$

y

$$1_s = \begin{tikzcd} & & Y \arrow[dr, "v"] \arrow[d, phantom, "\xi\Downarrow"] & & \\ Y \arrow[r, "v"'] & m/t \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{m/t}"'] & & m/t \arrow[r, "d_1"'] & A \end{tikzcd}$$

esto por las igualdades (3.27), (3.28) y (3.30), por la unicidad de ψ, entonces

$$1_v = \begin{tikzcd} & & Y \arrow[dr, "v"] \arrow[d, phantom, "\xi\Downarrow"] & \\ Y \arrow[r, "v"'] & m/t \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{m/t}"'] & & m/t \end{tikzcd} \tag{3.32}$$

Por lo tanto $v \dashv d_0$ donde la unidad y la counidad de la adjunción son 1_Y y ξ respectivamente, las identidades triangulares son la igualdades (3.27) y (3.32).

6) $\Rightarrow$ 1) : Por hipótesis tenemos que existe el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"' near start, shift right=4] & & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

el cual tiene la propiedad de escisión de idempotentes y es respetado débilmente por t, aplicando esto a la 2-celda λ, entonces existe

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "t"'] & & Y \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "m"] \arrow[ll, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}", shift left=4] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"', shift right=4] & & Y \arrow[dl, "f"] \arrow[dd, bend left, "m"] & & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
& A \arrow[dr, "t"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & & = & A \arrow[r, "t"'] & X \\
& & X & & &
\end{tikzcd} \tag{3.33}$$

aplicando la propiedad 1 del objeto coma m/t a β, existe una única flecha $g : Y \to m/t$ tal que

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, bend left, "1_Y"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & & & & \\
& m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] & = & Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
& A \arrow[r, "t"'] & X & & A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{3.34}$$

Definimos las siguiente 2-celda

$$\omega \ := \ \begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "g"'] \arrow[drrr, bend left, "1_Y"] \arrow[ddrr, bend right, "f"'] & & & \\
& m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & Y \arrow[dl, "f"] \\
& & A &
\end{tikzcd}$$

Dada esta 2-celda, probaremos que se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
& m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow 1_Y"] & Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \lambda"] & X & & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g"'] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[d, phantom, "\omega\Downarrow"] & Y \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "\lambda\Downarrow"] & \\
Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "g"'] & m/t \arrow[ur, "d_0"'] \arrow[r, "d_1"'] & A \arrow[ur, "t"'] & & = & & m/t \arrow[r, "d_1"'] & A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{3.35}$$

por la igualdad (3.34) el diagrama de la izquierda de la igualdad anterior es igual a β, probemos que el diagrama de la derecha también es igual a β, por la definición de ω tenemos que el diagrama de la derecha es igual a

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl, "d_1"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
& & A \arrow[rr, "t"'] & & X
\end{tikzcd}$$

por la igualdad (3.34) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] & m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[rr, phantom, shift right=2ex, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & \\
& & A \arrow[rr, "t"'] & & X
\end{tikzcd} \tag{3.36}$$

por la ecuaciones (3.33) y (3.34) tenemos que es igual a β, con lo cual obtenemos (3.35).

Por la proposición 2.6, tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g"'] & & m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[dl, phantom, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& m/t \arrow[rr, "d_1"'] & & A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "g"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{1_Y}{\Longleftarrow}"] & m/t \arrow[d, "d_0"] \\
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

y por la definicón de ω, tenemos que

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl, "d_1"] & Y \arrow[dll, bend left, "f"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] \\
& & A & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "g"'] & & \\
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

por lo que ρg es un idempotente.

Probemos ahora que ω cumple la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dl, bend left=60, "f"] \arrow[dl, phantom, bend left=30, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] \\
& A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}
\tag{3.37}$$

Para esto primero veamos que se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
& m/t \arrow[rr, "d_0"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow 1_{d_0}"] & Y \arrow[rr, "m"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \lambda"] & X \\
m/t \arrow[ur, "gd_0"] \arrow[rr, "1_{m/t}"'] & & m/t \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "d_1"'] & & A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
m/t \arrow[rr, "gd_0"] \arrow[dr, "1_{m/t}"'] & \arrow[d, phantom, "\rho\Downarrow"] & m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\lambda\Downarrow"] & Y \arrow[dr, "m"] & \\
& m/t \arrow[rr, "d_1"'] & & A \arrow[rr, "t"'] & & X
\end{tikzcd}
\tag{3.38}$$

el lado izquierdo es igual a λ, solo falta ver que el lado derecho también lo es.

Por la ecuación (3.34) tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl, "d_1"] \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[dl, "m"] \\
& A \arrow[r, "t"'] & X &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \overset{\rho}{\Leftarrow} & Y \arrow[dl, "f"] \arrow[dd, bend left, "m"] \\
& A \arrow[dr, "t"'] & \overset{\beta}{\Leftarrow} \\
& & X
\end{tikzcd}$$

utilizando la igualdad (3.33) obtenemos que el lado derecho de la igualdad (3.38) es igual a λ. Por la proposición 2.6 obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[drr, bend right, "d_1"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& {} & A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "gd_0"] \arrow[d, "1_{m/t}"'] & \overset{1_{d_0}}{\Leftarrow} & m/t \arrow[d, "d_0"] \\
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \overset{\rho}{\Leftarrow} & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Por la definición de ω obtenemos la igualdad (3.37). Dado que ρ tiene la propiedad de escisión de idempotentes, entonces existen $s : Y \to A$, $\alpha : f \Rightarrow s$ y $\gamma : s \Rightarrow f$ tales que

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, bend left, "1_Y"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, bend right=60, "f"'] \arrow[d, "s" description] \arrow[d, bend left=60, "f"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] \\
A
\end{tikzcd}
\tag{3.39}$$

y

$$1_s \; = \;
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, bend right=60, "s"'] \arrow[d, "f" description] \arrow[d, bend left=60, "s"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \\
A
\end{tikzcd}
\tag{3.40}$$

Definimos la 2-celda

$$\eta \;:=\; \begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, bend right=60, "s"'] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[dl, phantom, bend right=30, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & \\ A \arrow[rr, "t"'] & & X \end{tikzcd}$$

Veamos que η exhibe a s como levantamiento izquierdo absoluto de m a lo largo de t.
Sean G, $y : G \to Y$, $h : G \to A$ y la 2-celda

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "y"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\ A \arrow[r, "t"'] & X \end{tikzcd}$$

Por la propiedad del objeto coma m/t, existe una única flecha $z : G \to m/t$ tal que

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "z"] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\ & A \arrow[r, "t"'] & X \end{tikzcd} \;=\; \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "y"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\ A \arrow[r, "t"'] & X \end{tikzcd} \tag{3.41}$$

definimos la 2-celda

$$\delta \;:=\; \begin{tikzcd} G \arrow[dr, "z"] \arrow[drrr, bend left, "y"] \arrow[ddrr, bend right, "h"'] & & & \\ & m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dl, bend left=60, "s"] \arrow[dl, phantom, bend left=30, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] \\ & & A & \end{tikzcd}$$

probemos que

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "y"] \arrow[dd, bend right, "h"'] & & \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\delta}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & \\
A \arrow[rr, "t"'] & {} & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "y"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}
\tag{3.42}$$

para esto observemos antes que se da la siguiente igualdad, por la ecuación (3.39) y el hecho de que el diagrama (3.36) es igual a β

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, bend right=60, "f"'] \arrow[d, "s"] \arrow[d, bend left=60, "f"] \arrow[dr, bend left, "m"] \arrow[d, phantom, bend right=35, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, bend left=35, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"] & \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"'] & \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}
\tag{3.43}$$

probemos la igualdad (3.42) para esto consideremos la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "y"] \arrow[dd, bend right, "h"'] & & \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\delta}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & \\
A \arrow[rr, "t"'] & {} & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "z"] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, bend right, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, bend right=60, "f"'] \arrow[d, "s"] \arrow[d, bend left=60, "f"] \arrow[dr, bend left, "m"] \arrow[d, phantom, bend right=35, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, bend left=35, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"] & \\
& & A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

por la ecuación (3.43) el diagrama de la izquierda de la igualdad anterior es igual a

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "z"] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"'] & \\
& & A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

utilizando la igualdad (3.33) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "z"] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
& A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

por la igualdad (3.41) tenemos que es igual a ϕ, con lo cual queda probada la ecuación (3.42).
Veamos que δ es única. Supongamos que

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, bend left, "s"] \arrow[d, phantom, "\theta\Downarrow"] & \\
G \arrow[ur, bend left, "y"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & {} & A
\end{tikzcd}$$

satisface que

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "y"] \arrow[dd, bend right=50, "h"'] & & & & & \\
\overset{\theta}{\Longleftarrow} & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "m"] & & & G \arrow[r, "y"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[rr, "t"'] & \overset{\eta}{\Longleftarrow} & X & = & A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{3.44}$$

Definimos la 2-celda

$$\nu \ := \quad \begin{tikzcd}
G \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "s"'] \arrow[d, bend left=70, "f"] \arrow[d, phantom, shift right=5ex, "\overset{\theta}{\Longleftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

ahora veamos que se cumple lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow 1_y"] & Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \lambda"] & X \\
G \arrow[ur, "gy"] \arrow[r, "z"'] & m/t \arrow[ur, "d_0"'] \arrow[r, "d_1"'] & A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "gy"] \arrow[dr, "z"'] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\nu \Downarrow"] \arrow[dr, "d_1"'] & Y \arrow[d, phantom, "\lambda \Downarrow"] \arrow[dr, "m"] & \\
 & m/t \arrow[r, "d_1"'] & A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}
\tag{3.45}$$

es claro que el diagrama de la izquierda es igual a ϕ, si utilizamos la ecuación (3.35) y la definición de ν en el diagrama de la derecha obtenemos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "y"] \arrow[dr, bend right, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, bend right=50, "s"'] \arrow[d, bend left=50, "f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] \arrow[dr, bend left, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & \\
 & A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

por la definición de η tenemos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "y"] \arrow[dd, bend right, "h"'] & & \\
\overset{\theta}{\Longleftarrow} & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] & \\
A \arrow[rr, "t"'] & & X
\end{tikzcd}$$

y por la ecuación (3.44) el diagrama anterior es igual a ϕ, con lo cual queda probada le igualdad (3.45). Por la proposición 2.6, obtenemos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "gy"] \arrow[dr, "z"'] & \overset{\nu}{\Longleftarrow} & m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & Y \arrow[dl, "f"] \\
 & m/t \arrow[rr, "d_1"'] & & A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "gy"] \arrow[d, "z"'] & \overset{1_y}{\Longleftarrow} & m/t \arrow[d, "d_0"] \\
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & Y \arrow[dl, "f"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
\tag{3.46}$$

Antes de seguir notemos que se cumple la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}" near start] \arrow[d, "d_1"'] & Y \arrow[dl, "f"] \arrow[dl, bend left=60, "s"] \arrow[dl, phantom, shift left=3ex, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] & & & \\
& A & & = & Y \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\gamma\Downarrow"] & A
\end{tikzcd} \tag{3.47}$$

utilizando la ecuación (3.39) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, bend right=80, "f"'] \arrow[d, bend right=25, "s"] \arrow[d, bend left=25, "f"'] \arrow[d, bend left=80, "s"] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \\
A
\end{tikzcd}$$

por la igualdad (3.40) tenemos que le diagrama anterior es igual a γ, por lo tanto se cumple la igualdad (3.47).
A la igualdad (3.46) la componemos con la 2-celda γ con lo cual obtenemos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "y"] \arrow[dr, bend right, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta}{\Leftarrow}" near start] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, bend right, "s"'] \arrow[d, bend left, "f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] & m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl, "d_1"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}" near start] & Y \arrow[dll, "f"'] \arrow[dll, bend left=40, "s"] \arrow[dll, phantom, shift left=4ex, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] & & \\
& A & & & = & \delta
\end{tikzcd}$$

utilizando la igualdad (3.47) en el lado izquierdo de la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "y"] \arrow[dr, bend right, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta}{\Leftarrow}" near start] & Y \arrow[d, bend right=50, "s"'] \arrow[d, "f"] \arrow[d, bend left=50, "s"] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

por la igualdad (3.40) el diagrama anterior es igual a ϕ, por lo que $\phi = \delta$. Por lo tanto δ es única.

1) $\Rightarrow$ 7) : Sabemos que 1) $\Rightarrow$ 3), entonces existe $v : Y \to m/t$ tal que $v \dashv d_0$ y la unidad de la adjunción es la identidad, llamemos ϵ a la counidad.

Definimos el morfismo $f := d_1 v : Y \to A$ y la 2-celda

$$\rho \ := \quad \begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "v"] \arrow[d, phantom, "\overset{\epsilon}{\Downarrow}"] & & \\
m/t \arrow[ur, "d_0"] \arrow[rr, "1_{m/t}"'] & {} & m/t \arrow[r, "d_1"] & A
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 3.25 obtenemos que ρ es una extensión derecha de 1_A a lo largo de t en m, que además es absoluta.

Probemos ahora que ρ tiene la propiedad de extesión puntual. Sean $y : G \to Y$ y y/d_0 el objeto coma de y y d_0 junto la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
y/d_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"'] & G \arrow[d, "y"] \\
m/t \arrow[r, "d_0"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] & Y
\end{tikzcd}$$

Como d_0 tiene adjunto izquierdo, la Proposición (2.7) nos dice que existe $u : G \to y/d_0$ tal que $u \dashv d_0'$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "1_G"] \arrow[dr, "u"'] & {} \arrow[d, phantom, "1_G \Downarrow"] & G & & G \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\epsilon' \Downarrow"] & \\
& y/d_0 \arrow[ur, "d_0'"'] & & y/d_0 \arrow[ur, "d_0'"] \arrow[rr, "1_{y/d_0}"'] & {} & y/d_0
\end{tikzcd}$$

donde 1_G es la unidad y ϵ' la counidad de la adjunción y ϵ' cumple que

$$1_{d_0'} \ = \quad \begin{tikzcd}
& G \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\epsilon' \Downarrow"] & & \\
y/d_0 \arrow[ur, "d_0'"] \arrow[rr, "1_{y/d_0}"'] & {} & y/d_0 \arrow[r, "d_0'"] & G
\end{tikzcd} \tag{3.48}$$

y

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\epsilon' \Downarrow"] & & & & y/d_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] \\
y/d_0 \arrow[ur, "d_0'"] \arrow[rr, "1_{y/d_0}"'] & & y/d_0 \arrow[r, "d_1'"] & m/t & = & m/t \arrow[r, "d_0"'] \arrow[dr, "1_{m/t}"'] & Y \arrow[d, "v"] \arrow[d, phantom, shift right=20, "\overset{\epsilon}{\Longleftarrow}"] \\
& & & & & & m/t
\end{tikzcd} \tag{3.49}$$

además u es el único morfismo tal que

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "y"'] \arrow[drr, bend left, "1_G"] & & \\
& y/d_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[dd, "d_1'"'] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[dd, "y"] \\
Y \arrow[dr, "v"'] & & \\
& m/t \arrow[r, "d_0"'] & Y
\end{tikzcd} = 1_y$$

por lo tanto $d_1 d_1' u = d_1 v y$.
Ahora probemos que ρ es un levantamiento puntual, sea $h : G \to A$ y la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
y/d_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "h"] \\
m/t \arrow[r, "d_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

Definimos la 2-celda

$$\delta \;:=\; \begin{tikzcd}
y/d_0 \arrow[from=0-0] \\
\end{tikzcd}$$

veamos que se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
y/d_0 \arrow[rr, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & & G \arrow[d, "y"] \arrow[dl, phantom, ""] \arrow[ddl, bend left=60, "h"] \\
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & Y \arrow[dl, "d_1 d_1'"] \arrow[r, phantom, "\overset{\delta}{\Longleftarrow}"] & {} \\
& A &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
y/d_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "h"] \\
m/t \arrow[r, "d_1"'] & A
\end{tikzcd} \tag{3.50}$$

para esto empecemos viendo que el lado izquierdo, por la definición de las 2-celdas ρ y δ, es igual a

$$\begin{tikzcd}
y/d_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] \arrow[dr, "u"] & & \\
m/t \arrow[r, "d_0"'] \arrow[dr, "1_{m/t}"'] & Y \arrow[d, "v"] \arrow[d, phantom, shift right=5, "\overset{\epsilon}{\Longleftarrow}"] & y/d_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[dl, "d_1'"'] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[dl, "h"] \\
& m/t \arrow[r, "d_1"'] & A &
\end{tikzcd}$$

utilizando la ecuación (3.49) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "u"] \arrow[dl, phantom, "\epsilon'\Downarrow"] & \\
y/d_0 \arrow[ur, "d_0'"] \arrow[r, "1_{y/d_0}"'] & y/d_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"'] & G \arrow[d, "h"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] \\
 & m/t \arrow[r, "d_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

por la igualdad (3.48), tenemos que el diagrama anterior es igual a β, con lo cual se queda probada la igualdad (3.50).
Ahora probemos que δ es única. Sea la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rrr, bend left, "h"] \arrow[r, "u"'] \arrow[rrr, phantom, "\varphi\Downarrow"] & y/d_0 \arrow[r, "d_1'"'] & m/t \arrow[r, "d_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
y/d_0 \arrow[rr, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & & G \arrow[d, "y"] \arrow[dl, bend left=70, "h"] \\
m/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & Y \arrow[dl, "d_1d_1'"] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] & {} \\
 & A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
y/d_0 \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "h"] \\
m/t \arrow[r, "d_1"'] & A
\end{tikzcd}
\tag{3.51}$$

precomponiendo con la igualdad anterior y por la definición de δ y ρ obtenemos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "1_G"] & & & \\
& y/d_0 \arrow[r, "d_0^{'}"] \arrow[d, "d_1^{'}"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
& m/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "1_{m/t}"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\overset{\epsilon}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "v"] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] & \\
& & m/t \arrow[r, "d_1"'] & A
\end{tikzcd} \qquad = \quad \delta$$

utilizando la igualdad (3.49) tenemos que el diagrama de la izquierda es igual a

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "1_G"] & & & \\
& y/d_0 \arrow[r, "d_0^{'}"] \arrow[dr, "1_{y/d_0}"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\overset{\epsilon^{'}}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
& & y/d_0 \arrow[d, "d_1^{'}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] & \\
& & m/t \arrow[r, "d_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

por una de las identidades de la adjunción $u \dashv d_0^{'}$, el diagrama anterior es igual a φ, por lo tanto δ es única. Por lo tanto, la extesión es puntual. $\square$

Veamos la siguiente proposición, la cual nos ayudará a demostrar resultados interesantes e importantes.

Proposición 3.27. *Sea $t : A \to X$ un morfismo en $\mathcal{K}$. Supongamos que la 1_X tiene un levantamiento izquierdo absoluto a lo largo de t.*

$$\begin{tikzcd}
X & & A \arrow[ll, "t"'] \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

Entonces $s \dashv t$ *con unidad* η *y counidad*

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "s"] & \\
A \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "1_A"'] & {} \arrow[u, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & A
\end{tikzcd}$$

donde ε *es la única* 2*-celda que cumple la siguiente ecuación*

$$\begin{tikzcd}
X & & A \arrow[ll, "t"'] \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & {} \\
& & A \arrow[ul, "t"] \arrow[uu, "1_A"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}"]
\end{tikzcd} = 1_t$$

Demostración. Por hipótesis existe una 2-celda

$$\begin{tikzcd}
X & & A \arrow[ll, "t"'] \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

la cual exhibe a s como levantamiento absoluto de 1_X a lo largo de t. Veamos que $s \dashv t$ y la 2-celda η es la unidad de la adjunción. Por la propiedad de levantamiento izquierdo de η existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "s"] & \\
A \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "1_A"'] & {} \arrow[u, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & A
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
X & & A \arrow[ll, "t"'] \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & {} \\
& & A \arrow[ul, "t"] \arrow[uu, "1_A"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}"]
\end{tikzcd} = 1_t \tag{3.52}$$

La 2-celda ε es nuestro candidato a la counidad de la adjunción entre s y t, una identidad triangular es la igualdad (3.52). Utilizando otra vez la propiedad de levantamiento izquierdo de η, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, bend right, "s"'] \arrow[r, phantom, "\zeta\Downarrow"] & A
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
X & & A \arrow[ll, "t"'] & & X & & A \arrow[ll, "t"'] \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"] \arrow[ur, bend right=50, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] \arrow[ur, phantom, bend right=25, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & & = & & X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que la 2-celda $1_s : s \Rightarrow s$ también cumple con la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
X & & A \arrow[ll, "t"'] & & X & & A \arrow[ll, "t"'] \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"] \arrow[ur, bend right=50, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] \arrow[ur, phantom, bend right=25, "\overset{1_s}{\Longrightarrow}"] & & = & & X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad de ζ, entonces $\zeta = 1_s$. Observemos que por la igualdad (3.52) la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, "s"] & A \\
X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[r, "s"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Downarrow\varepsilon"] & A \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "1_A"'] \arrow[ur, phantom, shift left=4, "\Downarrow\eta"] &
\end{tikzcd}$$

cumple que

$$\begin{tikzcd}
X & & A \arrow[ll, "t"'] & & & X & & A \arrow[ll, "t"'] \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & & A \arrow[ll, "t"] \arrow[ul, "1_A"'] \arrow[l, phantom, shift right=4, "\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}"] & = & & X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & \\
& & X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad de ζ, entonces

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, "s"] & A \\
X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[r, "s"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Downarrow\varepsilon"] & A \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "1_A"'] \arrow[ur, phantom, shift left=4, "\Downarrow\eta"] &
\end{tikzcd} = 1_s \tag{3.53}$$

La igualdad (3.53) es la identidad triangular que faltaba. Por lo tanto $s \dashv t$. $\square$

Observación 3.28. Por la equivalencia entre 1) y 6) del Teorema 3.26, usando la Proposición 3.10 y $m = 1$, tenemos que t tiene adjunto izquierdo si y solo si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "1_A"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

el cual tiene la propiedad de escisión de idempotentes y es respetado débilmente por t.

En efecto, supongamos primero que t tiene adjunto izquierdo s y la unidad de la adjunción es

$$\begin{tikzcd}
X & \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[ll, "t"'] \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Por el dual del Lema 3.25 obtenemos que η exhibe a s como levantamiento absoluto de 1_X a lo largo de t; por la equivalencia entre 1) y 6) del Teorema 3.26, existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}
1_X/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho'}{\Longleftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

con la propiedad de escisión de idempotentes y que es respetado débilmente por t. Por el dual del inciso 1) de la Proposición 3.10, existe una única 2-celda asociada a ρ'

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "1_A"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Probemos que ρ tiene la propiedad de escisión de idempotentes. Consideremos el idempotente $\delta : f \Rightarrow f$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "1_A"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dl, bend left=60, "f"] \arrow[dl, phantom, shift left=3ex, "\overset{\delta}{\Longleftarrow}"] \\
& A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "1_A"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}
\tag{3.54}$$

Veamos que δ y $\rho^{'}$ cumplen con la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
1_X/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho^{'}}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dl, bend left=60, "f"] \arrow[dl, phantom, bend left=30, "\overset{\delta}{\Leftarrow}"] & = & 1_X/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho^{'}}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \\
& A & & & & A &
\end{tikzcd} \tag{3.55}$$

Para esto tomemos la imagen, bajo la biyección del dual del Teorema 3.10, del diagrama del lado izquierdo, con lo cual obtenemos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_t"] \arrow[drrr, bend left, "t"] \arrow[ddrr, bend right, "1_A"'] & & & & & & & \\
& 1_X/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho^{'}}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dl, bend left=60, "f"] \arrow[dl, phantom, bend left=30, "\overset{\delta}{\Leftarrow}"] & = & A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "1_A"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dl, bend left=60, "f"] \arrow[dl, phantom, bend left=30, "\overset{\delta}{\Leftarrow}"] \\
& & A & & & & A &
\end{tikzcd}$$

Por la igualdad (3.54), la ecuación anterior es igual a ρ, de igual manera la imagen de la 2-celda $\rho^{'}$ bajo la biyección es la 2-celda ρ. Debido a la biyección, obtenemos la igualdad (3.55).

Como $\rho^{'}$ tiene la propiedad de escisión de idempotentes, entonces δ se escinde en $\mathcal{K}(X, A)$. Con lo cual queda demostrado que ρ tiene la propiedad de escisión de idempotentes.

Falta probar que ρ es respetada débilmente por t. La prueba de esto es simplemente una de las implicaciones de la prueba del dual del Teorema 3.10.

Supongamos ahora que tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "1_A"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

con la propiedad de escisión de idempotentes y que es respetado débilmente por t. Por el dual del Teorema 3.10, existe una única 2-celda asociada a ρ

$$\begin{tikzcd}
1_X/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho^{'}}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Probemos que $\rho^{'}$ tiene la propiedad de escisión de idempotentes. Consideremos el idempotente $\delta : f \Rightarrow f$ tal que

$$\begin{tikzcd}
1_X/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho'}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dl, bend left=60, "f"] \arrow[dl, phantom, bend left=25, "\overset{\delta}{\Leftarrow}"] \\
& A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
1_X/t \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho'}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Tomemos la imagen, bajo la biyección del Teorema 3.10, de la igualdad anterior, con lo cual obtenemos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "1_A"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dl, bend left=60, "f"] \arrow[dl, phantom, bend left=25, "\overset{\delta}{\Leftarrow}"] \\
& A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "1_A"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & X \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Como ρ tiene la propiedad de escisión de idempotentes, entonces δ se escinde en $\mathcal{K}(X, A)$. De igual manera, la prueba de que ρ' es respetado débilmente por t, es una de las implicaciones de la prueba del dual del Teorema 3.10. Por la equivalencia entre 1) y 6) del Teorema 3.26, existe una 2-celda

$$\begin{tikzcd}
X & \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] & A \arrow[ll, "t"'] \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

la cual exhibe a s como levantamiento absoluto de 1_X a lo largo de t. Por la Proposición 3.27 tenemos que $s \dashv t$.

Capítulo 4

Diagonales

En este capítulo daremos la construcción de la categoría $\mathcal{K}||\mathrm{X}$, la cual básicamente es una extensión de la construcción de la categoría coma sobre un objeto, en las 2-categorías. Definiremos en una 2-categoría $\mathcal{K}$ lo que es una diagonal para el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\ A \arrow[r, "t"'] & X \end{tikzcd}$$

Asimismo, se verán los diferentes tipos de diagonales: localmente Q-ortogonal, localmente Q-ortogonal puntual, con la propiedad de escisión de idempotentes y rígidas. Los diferentes tipos de diagonales en $\mathcal{K}$ los definiremos por medio de la categoría $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ ya que nos facilitará el trabajo y de esta forma podremos trabajar con cosas que conocemos mejor como extensiones derechas y levantamientos izquierdos que vimos en el capítulo anterior. Por último haremos notar la relación que hay entre los diferentes tipos de diagonales. Todo lo referente a este capítulo puede consultarse en el artículo [4].

Sea $\mathcal{K}$ una 2-categoría finitamente completa y con objetos co-coma para cualquier par de morfismos en $\mathcal{K}$, (objetos coma en $\mathcal{K}^{\mathrm{op}}$).

Definición 4.1. *Para cada objeto X en $\mathcal{K}$ definimos la 2-categoría laxa coma $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ descrita como sigue.*

Un objeto (U, u) en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ es una flecha $u : U \to X$ con codominio X.

Una flecha $(k, \kappa) : (U, u) \to (V, v)$ en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ es un diagrama como el siguiente

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "u"'] & \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & V \arrow[dl, "v"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Si $(k,\kappa) : (U,u) \to (V,v)$ *y* $(y,\beta) : (V,v) \to (B,b)$ *son flechas en* $\mathcal{K}||\mathrm{X}$*, la composición de las flechas es la siguiente*

$$(y,\beta)(k,\kappa) = (yk, \beta k \cdot \kappa) : (U,u) \to (B,b)$$

Una 2*-celda* $\theta : (k,\kappa) \Rightarrow (k^{'},\kappa^{'})$ *en* $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ *es una* 2*-celda*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[r, bend right, "k^{'}"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Downarrow"] & V \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{K}$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "k"'] \arrow[rr, bend left=60, "k^{'}"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\theta\Nearrow"] \arrow[dr, "u"'] & & V \arrow[dl, "v"] & = & U \arrow[rr, "k^{'}"] \arrow[dr, "u"'] & & V \arrow[dl, "v"] \\ & X \arrow[u, phantom, "\overset{\kappa}{\Longrightarrow}"] & & & & X \arrow[u, phantom, "\overset{\kappa^{'}}{\Longrightarrow}"] & \end{tikzcd}$$

Las flechas (k,κ) *en* $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ *con* κ *la identidad (isomorfismo) las llamaremos estrictas (fuertes).*

Observación 4.2. La 2-categoría $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ generalmente no es finitamente completa. Aunque lo es, si X es un objeto finitamente completo de $\mathcal{K}$.

Teorema 4.3. *La* 2*-categoría* $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ *tiene objetos coma de flechas estrictas con flechas arbitrarias, es decir, para cada flecha estricta* $(k, 1_{mk}) : (B, mk) \to (Y, m)$ *y cualquier flecha* $(y,\beta) : (G,r) \to (Y,m)$ *en* $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ *existe el objeto coma* $(y,\beta)/(k,1_{mk})$ *en* $\mathcal{K} \mid\mid X$ *y es igual a* $(y/k, rd_0)$ *junto con la* 2*-celda*

$$\begin{tikzcd} (y/k, rd_0) \arrow[r, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] & (G,r) \arrow[d, "{(y,\beta)}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] \\ (B,mk) \arrow[r, "{(k,1_{mk})}"'] & (Y,m) \end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{tikzcd} y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & G \arrow[d, "y"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] \\ B \arrow[r, "k"'] & Y \end{tikzcd}$$

es el cuadrado coma en $\mathcal{K}$.

Demostración. Sean $(k, 1_{mk}) : (B, mk) \to (Y, m)$ y $(y, \beta) : (G, r) \to (Y, m)$ flechas en $\mathcal{K}||$X, probemos que el objeto $(y/k, rd_0)$ junto con la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(y/k, rd_0) \arrow[r, "(d_0{,}1_{rd_0})"] \arrow[d, "(d_1{,}m\lambda\cdot\beta d_0)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & (G, r) \arrow[d, "(y{,}\beta)"] \\
(B, mk) \arrow[r, "(k{,}1_{mk})"'] & (Y, m)
\end{tikzcd}$$

es el objeto coma de $(k, 1_{mk})$ y (y, β), para esto veamos que se cumplen las dos condiciones del objeto coma.

Primera condición. Sean (D, z) un objeto en $\mathcal{K}||$X, $(f, \gamma) : (D, z) \to (G, r)$ y $(g, \delta) : (D, z) \to (B, mk)$ flechas en $\mathcal{K}||$X, sea la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(D, z) \arrow[r, "(f{,}\gamma)"] \arrow[d, "(g{,}\delta)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & (G, r) \arrow[d, "(y{,}\beta)"] \\
(B, mk) \arrow[r, "(k{,}1_{mk})"'] & (Y, m)
\end{tikzcd}$$

ahora asignemos a α un morfismo entre (D, z) y $(y/k, rd_0)$, a esta asignación la llamaremos ψ.

La 2-celda α en $\mathcal{K}||$X es una 2-celda en $\mathcal{K}$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] \\
B \arrow[r, "k"'] & Y
\end{tikzcd}$$

que cumple la siguiente condición

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, bend left, "k"] & \\
D \arrow[ur, bend left, "g"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "z"'] & G \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha}{\Nearrow}"] \arrow[r, "y"] \arrow[d, "r"] & Y \arrow[dl, "m"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
\;\overset{\gamma}{\Longrightarrow}\;\overset{\beta}{\Longrightarrow}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "z"'] & \overset{\delta}{\Longrightarrow} & B \arrow[dl, "mk"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
\tag{4.1}$$

utilizando la propiedad 1 del objeto coma y/k en la 2-celda α, entonces existe un único morfismo $t : D \to y/k$ tal que

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rrd, bend left, "f"] \arrow[rd, "t"] \arrow[rdd, bend right, "g"'] & & & & & \\
& y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\lambda}{\Leftarrow}"] & B \arrow[d, "y"] \arrow[rd, phantom, "="] & & D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] \\
& G \arrow[r, "k"'] & Y & & B \arrow[r, "k"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

como $d_0 t = f$, entonces podemos ver a γ de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "t"] \arrow[rd, "z"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\gamma}{\Rightarrow}"] & y/k \arrow[ld, "rd_0"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

con lo anterior definimos el morfismo $\psi(\alpha) := (t, \gamma) : (D, z) \to (y/k, rd_0)$ en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Veamos que este morfismo cumple con lo siguiente

$$(d_0, 1_{rd_0})(t, \gamma) = (f, \gamma) \tag{4.3}$$

y

$$(d_1, m\lambda \cdot \beta d_0)(t, \gamma) = (g, \delta). \tag{4.4}$$

En efecto, dado que $d_0 t = f$ y por la siguiente composición

$$(d_0, 1_{rd_0})(t, \gamma) = (d_0 t, \gamma)$$

obtenemos la ecuación (4.3). Para la segunda igualdad, de igual manera, dado que $d_1 t = g$ y por la siguiente composición

$$(d_1, m\lambda \cdot \beta d_0)(t, \gamma) = (d_1 t, (m\lambda \cdot \beta d_0)t \cdot \gamma)$$

obtenemos

$$(d_1, m\lambda \cdot \beta d_0)(t, \gamma) = (g, (m\lambda \cdot \beta d_0)t \cdot \gamma)$$

para obtener la ecuación (4.4), veamos que se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "t"] \arrow[ddr, bend right, "z"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\gamma}{\Longrightarrow}"] & y/k \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
 & G \arrow[r, "y"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longrightarrow}"] & Y \arrow[dl, "m"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "z"'] & \overset{\delta}{\Longrightarrow} & B \arrow[dl, "mk"] \\
 & X &
\end{tikzcd} \qquad (4.5)$$

para esto consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "t"] \arrow[ddr, bend right, "z"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\gamma}{\Longrightarrow}"] & y/k \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "k"] \\
 & G \arrow[r, "y"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longrightarrow}"] & Y \arrow[dl, "m"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

utilizando la ecuación (4.2) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, bend left, "k"] & \\
D \arrow[ur, bend left, "g"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "z"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\alpha}{\Nearrow}"] & G \arrow[r, "y"] \arrow[d, "r"] & Y \arrow[dl, "m"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

(con $\overset{\gamma}{\Longrightarrow}$ entre z y r, y $\overset{\beta}{\Longrightarrow}$ entre r y m)

por la igualdad (4.1) obtenemos la ecuación (4.5), con lo cual queda probada la igualdad (4.4). Las igualdades (4.3) y (4.4) pueden visualizarse en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & (D,z) \arrow[dl, "{(f,\gamma)}"'] \arrow[dr, "{(g,\delta)}"] \arrow[dd, "{(t,\gamma)}"] & \\
(G,r) & & (B,mk) \\
 & (y/k, rd_0) \arrow[ul, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[ur, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] &
\end{tikzcd} \qquad (4.6)$$

Notemos que (t, γ) satisface que

$$\begin{tikzcd}
(D,z) \arrow[drr, bend left, "{(f,\gamma)}"] \arrow[dr, "{(t,\gamma)}"] \arrow[ddr, bend right, "{(g,\delta)}"'] & & & & & \\
& (y/k, rd_0) \arrow[r, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & (G,r) \arrow[d, "{(y,\beta)}"] & = & (D,z) \arrow[r, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & (G,r) \arrow[d, "{(y,\beta)}"] \\
& (B,mk) \arrow[r, "{(k,1_{mk})}"'] & (Y,m) & & (B,mk) \arrow[r, "{(k,1_{mk})}"'] & (Y,m)
\end{tikzcd}$$

esto por los diagramas (4.2) y (4.6). La asignación ψ está bien definida por la unicidad de t.

Ahora asignemos a cada morfismo de palmos

$$\begin{tikzcd}
& (D,z) \arrow[dl, "{(f,\gamma)}"'] \arrow[dr, "{(g,\delta)}"] \arrow[dd] & \\
(G,r) & & (B,mk) \\
& (y/k, rd_0) \arrow[ul, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[ur, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] &
\end{tikzcd}$$

una 2-celda $\rho : (y, \beta)(f, \gamma) \Rightarrow (k, 1_{mk})(g, \delta)$ en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$, a esta asignación la llamaremos φ.

Consideremos $(s, \xi) : (D, z) \to (y/k, rd_0)$ un morfismo tal que

$$\begin{tikzcd}
& (D,z) \arrow[dl, "{(f,\gamma)}"'] \arrow[dr, "{(g,\delta)}"] \arrow[dd, "{(s,\xi)}"] & \\
(G,r) & & (B,mk) \\
& (y/k, rd_0) \arrow[ul, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[ur, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] &
\end{tikzcd}$$

A este morfismo le asignamos la siguiente 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(D,z) \arrow[drr, bend left, "{(f,\gamma)}"] \arrow[dr, "{(s,\xi)}"] \arrow[ddr, bend right, "{(g,\delta)}"'] & & \\
& (y/k, rd_0) \arrow[r, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & (G,r) \arrow[d, "{(y,\beta)}"] \\
& (B,mk) \arrow[r, "{(k,1_{mk})}"'] & (Y,m)
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\varphi((s,\xi)) = \lambda(s,\xi)$. Ahora veamos que ψ y φ son inversas. Consideremos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(D,z) \arrow[r, "{(f,\gamma)}"] \arrow[d, "{(g,\delta)}"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & (G,r) \arrow[d, "{(y,\beta)}"] \\
(B,mk) \arrow[r, "{(k,1_{mk})}"'] & (Y,m)
\end{tikzcd}$$

por lo que $\psi(\alpha) = (t,\gamma)$, donde $(t,\gamma) : (D,z) \to (y/k, rd_0)$ cumple que

$$\begin{tikzcd}
(D,z) \arrow[rrd, bend left, "{(f,\gamma)}"] \arrow[rd, "{(t,\gamma)}"] \arrow[rdd, bend right, "{(g,\delta)}"'] & & & & & \\
& (y/k, rd_0) \arrow[r, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1, m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & (G,r) \arrow[d, "{(y,\beta)}"] \arrow[rrd, phantom, "="] & & (D,z) \arrow[r, "{(f,\gamma)}"] \arrow[d, "{(g,\delta)}"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & (G,r) \arrow[d, "{(y,\beta)}"] \\
& (B,mk) \arrow[r, "{(k,1_{mk})}"'] & (Y,m) & & (B,mk) \arrow[r, "{(k,1_{mk})}"'] & (Y,m)
\end{tikzcd}$$

tal que t es el único morfismo en $\mathcal{K}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rrd, bend left, "f"] \arrow[rd, "t"] \arrow[rdd, bend right, "g"'] & & & & & \\
& y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] \arrow[rrd, phantom, "="] & & D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] \\
& B \arrow[r, "k"'] & Y & & B \arrow[r, "k"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Por lo que $\varphi \circ \psi(\alpha) = \varphi((t,\gamma)) = \lambda(t,\gamma) = \alpha$, por lo tanto $\varphi \circ \psi = 1$. Ahora consideremos el morfismo

$$\begin{tikzcd}
& (D,z) \arrow[ld, "{(f,\gamma)}"'] \arrow[rd, "{(g,\delta)}"] \arrow[dd, "{(s,\xi)}"] & \\
(G,r) & & (B,mk) \\
& (y/k, rd_0) \arrow[lu, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[ru, "{(d_1, m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dado que el diagrama anterior conmuta, tenemos que $(d_0, 1_{rd_0})(s,\xi) = (f,\gamma)$, por lo cual $(d_0 s, \xi) = (f,\gamma)$. Por lo tanto $\xi = \gamma$; para hacer más clara la prueba omitiremos ξ y pondremos en su lugar a γ.

Por lo que $\varphi((s,\gamma)) = \lambda(s,\gamma)$ y por la manera en que se definió φ, existe una única 2-celda $\theta : (y,\beta)(f,\gamma) \Rightarrow (k,1_{mk})(g,\delta)$ tal que

$$\begin{tikzcd}
(D,z) \arrow[drr, bend left, "{(f,\gamma)}"] \arrow[dr, "{(s,\gamma)}"] \arrow[ddr, bend right, "{(g,\delta)}"'] & & & & & \\
& (y/k, rd_0) \arrow[r, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & (G,r) \arrow[d, "{(y,\beta)}"] & & (D,z) \arrow[r, "{(f,\gamma)}"] \arrow[d, "{(g,\delta)}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta}{\Longleftarrow}"] & (G,r) \arrow[d, "{(y,\beta)}"] \\
& (B,mk) \arrow[r, "{(k,1_{mk})}"'] & (Y,m) & & (B,mk) \arrow[r, "{(k,1_{mk})}"'] & (Y,m)
\arrow[from=2-3, to=3-5, phantom, "="]
\end{tikzcd}$$

donde s es el único morfismo tal que

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, "s"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & & & & \\
& y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] & & D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta}{\Longleftarrow}"] & G \arrow[d, "y"] \\
& B \arrow[r, "k"'] & Y & & B \arrow[r, "k"'] & Y
\arrow[from=2-3, to=3-5, phantom, "="]
\end{tikzcd}$$

Con lo anterior y por la constucción de la función ψ, tenemos que $\psi((s,\gamma)) = \theta$, por lo que $\psi \circ \varphi = 1$. Por lo tanto φ es una biyección.

Ahora probemos la propiedad 2 del objeto coma. Consideremos un objeto (S,t) y un par de 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
(S,t) \arrow[r, "{(f,\nu)}"] \arrow[d, "{(f',\nu')}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\xi}{\Longleftarrow}"] & (y/k, rd_0) \arrow[d, "{(d_0,1_{rd_0})}"] & & (S,t) \arrow[r, "{(f,\nu)}"] \arrow[d, "{(f',\nu')}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] & (y/k, rd_0) \arrow[d, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"] \\
(y/k, rd_0) \arrow[r, "{(d_0,1_{rd_0})}"'] & (G,r) & & (y/k, rd_0) \arrow[r, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] & (B,mk)
\end{tikzcd}$$

las cuales cumplan que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& (y/k, rd_0) \arrow[rr, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\xi"] & & (G,r) \arrow[rr, "{(y,\beta)}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & & (Y,m) \\
(S,t) \arrow[ur, "{(f,\nu)}"] \arrow[rr, "{(f',\nu')}"'] & & (y/k, rd_0) \arrow[ur, "{(d_0,1_{rd_0})}"'] \arrow[rr, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] & & (B,mk) \arrow[ur, "{(k,1_{mk})}"'] &
\end{tikzcd}$$

es igual a

$$\begin{tikzcd}
(S,t) \arrow[rr, "{(f,\nu)}"] \arrow[dr, "{(f',\nu')}"'] \arrow[drr, phantom, "\eta\Downarrow"] & & (y/k,rd_0) \arrow[rr, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[dr, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & & (G,r) \arrow[dr, "{(y,\beta)}"] & \\
& (y/k,rd_0) \arrow[rr, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"'] & & (B,mk) \arrow[rr, "{(k,1_{mk})}"'] & & (Y,m)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto obtenemos las siguientes 2-celdas en $\mathcal{K}$

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\xi}{\Longleftarrow}"] & r/s \arrow[d, "d_0"] \\
y/k \arrow[r, "d_0"'] & G
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Longleftarrow}"] & y/k \arrow[d, "d_1"] \\
y/k \arrow[r, "d_1"'] & B
\end{tikzcd}$$

las cuales cumplen que

$$\begin{tikzcd}
& y/k \arrow[rr, "d_0"] & & G \arrow[rr, "y"] & & Y \\
S \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f'"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow\xi"] & & y/k \arrow[ur, "d_0"'] \arrow[rr, "d_1"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & & B \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] \arrow[drr, phantom, "\eta\Downarrow"] & & y/k \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] \arrow[drr, phantom, "\lambda\Downarrow"] & & G \arrow[dr, "y"] & \\
& y/k \arrow[rr, "d_1"'] & & B \arrow[rr, "k"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

y por la propiedad 2 del objeto coma y/k, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "f'"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\phi\Downarrow"] & y/k
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "f'"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\phi\Downarrow"] & y/k \arrow[r, "d_0"] & G
\end{tikzcd} = \xi \tag{4.7}$$

y

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "f'"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\phi\Downarrow"] & y/k \arrow[r, "d_1"] & B
\end{tikzcd} = \eta \tag{4.8}$$

Para poder definir una 2-celda en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ a partir de la 2-celda ϕ necesitamos probar la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "f"'] \arrow[rr, bend left=60, "f'"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\overset{\phi}{\Nearrow}"] \arrow[dr, "t"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\nu}{\Rightarrow}"] & y/k \arrow[dl, "rd_0"] & = & S \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "t"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\nu'}{\Rightarrow}"] & y/k \arrow[dl, "rd_0"] \\
& X & & & & X &
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

Primero notemos que la 2-celda ξ cumple

$$\begin{tikzcd}
& y/k \arrow[dr, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\overset{\xi}{\Nearrow}"] & & & & & \\
S \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "t"'] & y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\overset{\nu}{\Rightarrow}"] & G \arrow[dl, "r"] & = & S \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "t"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\nu'}{\Rightarrow}"] & y/k \arrow[dl, "rd_0"] \\
& X & & & & X &
\end{tikzcd} \tag{4.10}$$

Observemos que el lado izquierdo de la igualdad (4.9) es igual al diagrama de la izquierda en la igualdad (4.10) por la ecuación (4.7). Por lo tanto queda demostrada la igualdad (4.9). Con lo anterior, nos es posible definir la 2-celda en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$

$$\begin{tikzcd}
(S,t) \arrow[rr, bend left, "{(f,\nu)}"] \arrow[rr, bend right, "{(f',\nu')}"'] \arrow[rr, phantom, "\phi\Downarrow"] & & (y/k, rd_0)
\end{tikzcd}$$

la cual satisface que

$$\begin{tikzcd}
(S,t) \arrow[rr, bend left, "{(f,\nu)}"] \arrow[rr, bend right, "{(f',\nu')}"'] \arrow[rr, phantom, "\phi\Downarrow"] & & (y/k, rd_0) \arrow[r, "{(d_0,1_{rd_0})}"] & (G,r) & = \xi
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(S,t) \arrow[rr, bend left, "{(f,\nu)}"] \arrow[rr, bend right, "{(f',\nu')}"'] \arrow[rr, phantom, "\phi\Downarrow"] & & (y/k, rd_0) \arrow[r, "{(d_1,m\lambda\cdot\beta d_0)}"] & (B,mk) & = \eta
\end{tikzcd}$$

La 2-celda ϕ en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ es la única 2-celda que cumple lo anterior, por la unicidad de ϕ en $\mathcal{K}$. □

Proposición 4.4. *Una flecha* $(k,\kappa):(U,u)\to(V,v)$ *tiene adjunto izquierdo* $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ *si y solo si* k *tiene adjunto izquierdo y* κ *es un isomorfismo en* $\mathcal{K}$*.*

Demostración. $\Rightarrow)$: Consideremos $(k,\kappa):(U,u)\to(V,v)$ una flecha en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ tal que tiene adjunto izquierdo, por lo que existe $(y,\beta):(V,v)\to(U,u)$ flecha en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ tal que $(y,\beta)\dashv(k,\kappa)$. Probemos primero que $y\dashv k$. La unidad y la counidad de la adjunción son

$$\begin{tikzcd}
(V,v) \arrow[rr, "{(1_V,1_v)}"] \arrow[dr, "{(y,\beta)}"'] & {} & (V,v) \\
& (U,u) \arrow[ur, "{(k,\kappa)}"'] \arrow[u, phantom, "\eta\Downarrow"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (V,v) \arrow[dr, "{(y,\beta)}"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
(U,u) \arrow[ur, "{(k,\kappa)}"] \arrow[rr, "{(1_U,1_u)}"'] & {} & (U,u)
\end{tikzcd}$$

Como η y ε son 2-celdas en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$, lo son en $\mathcal{K}$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "1_V"] \arrow[dr, "y"'] & {} & V \\
& U \arrow[ur, "k"'] \arrow[u, phantom, "\eta\Downarrow"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& V \arrow[dr, "y"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
U \arrow[ur, "k"] \arrow[rr, "1_U"'] & {} & U
\end{tikzcd}$$

Puesto que la adjunción cumple las identidades triangulares en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$, tenemos que se cumplen las siguientes composiciones en $\mathcal{K}$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "1_V"] \arrow[dr, "y"'] & {} & V \arrow[dr, "y"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
& U \arrow[ur, "k"'] \arrow[u, phantom, "\eta\Downarrow"] \arrow[rr, "1_U"'] & {} & U
\end{tikzcd}
\quad = \ 1_y$$

y

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[rr, "1_V"] \arrow[dr, "y"'] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & {} & V \\
U \arrow[ur, "k"] \arrow[rr, "1_U"'] & {} & U \arrow[ur, "k"'] \arrow[u, phantom, "\eta\Downarrow"] &
\end{tikzcd}
\quad = \ 1_k$$

Por lo tanto $y\dashv k$ donde la unidad y la counidad son η y ε respectivamente, las cuales cumplen las identidades triangulares.

Ahora veamos que κ es un isomorfismo. Definimos la 2-celda

$$\gamma \ := \quad \begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "1_u"] \arrow[d, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}"] & \\
V \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\beta}{\Longrightarrow}"] & U \arrow[dl, "u"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

en $\mathcal{K}$. Veamos que

$$\kappa \cdot \gamma = 1_{vk} \tag{4.11}$$

y

$$\gamma \cdot \kappa = 1_u \tag{4.12}$$

para esto primero observemos que la 2-celda ε por estar en $\mathcal{K}||$X cumple lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend left=40, "1_U"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\kappa}{\Longrightarrow}"] & V \arrow[r, "y"] \arrow[d, "v"] \arrow[u, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Nearrow}"] & U \arrow[dl, "u"] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\overset{\beta}{\Longrightarrow}"] \\
 & X &
\end{tikzcd} \quad = \ 1_u$$

con lo cual queda probada la igualdad (4.12). Procedamos a demostrar la otra igualdad. Como η es una 2-celda en $\mathcal{K}||$X cumple la siguiente condición

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "k"] \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Nearrow}"] & \\
V \arrow[ur, "y"] \arrow[rr, "1_V"'] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{1_v}{\Longrightarrow}"] & V \arrow[dl, "v"] \\
 & X &
\end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd}
V \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "v"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\beta}{\Longrightarrow}"] & U \arrow[r, "k"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[dl, "v"] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\overset{\kappa}{\Longrightarrow}"] \\
 & X &
\end{tikzcd} \tag{4.13}$$

Ahora por la definición de γ obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "u" description] \arrow[d, bend right=70, "vk"'] \arrow[d, bend left=70, "vk"] \arrow[d, phantom, shift right=5, "\overset{\gamma}{\Longrightarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=5, "\overset{\kappa}{\Longrightarrow}"] \\
X
\end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "1_U"] \arrow[d, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}"] & & \\
V \arrow[r, "y"] \arrow[drr, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longrightarrow}"] & {} & U \arrow[r, "k"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[dl, "v"] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\overset{\kappa}{\Longrightarrow}"] \\
 & & X &
\end{tikzcd}$$

Utilizando la igualdad (4.13) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "1_U"] \arrow[d, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}"] & \\
V \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "1_V"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & U \arrow[dl, "k"] \\
& V \arrow[dr, "v"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Por una de las identidades triangulares obtenemos 1_{vk}, con lo cual que probada la ecuación (4.11). Por lo tanto κ es isomorfismo en $\mathcal{K}$ y su inversa es γ.

$\Leftarrow)$: Supongamos que k tiene adjunto izquierdo $y : V \to U$ y que κ es un isomorfismo en $\mathcal{K}$. Como $y \dashv k$, existen las siguientes 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "1_V"] \arrow[dr, "y"'] & \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & V \\
& U \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& V \arrow[dr, "y"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
U \arrow[ur, "k"] \arrow[rr, "1_U"'] & & U
\end{tikzcd}$$

donde η y ε son la unidad y la counidad respectivamente. Dado que κ es un isomorfismo existe $\gamma : vk \Rightarrow u$ 2-celda en $\mathcal{K}$ tal que $\gamma \cdot \kappa = 1_u$ y $\kappa \cdot \gamma = 1_{vk}$. Definimos la 2-celda

$$\beta \ := \quad \begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "1_V"'] \arrow[dr, "y"] \arrow[d, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & \\
V \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\gamma}{\Longrightarrow}"] & U \arrow[ll, "k"'] \arrow[dl, "u"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

en $\mathcal{K}$. Puesto que y es un morfismo de V en U y β es una 2-celda de vy en u, podemos definir el morfismo $(y, \beta) : (V, v) \to (U, u)$ en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$.

Probaremos que la flecha (y, β) es adjunto izquierdo de (k, κ). Primero veamos que η y ε cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dr, "k"] & \\
V \arrow[ur, "y"] \arrow[rr, "1_V"'] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Nearrow}"] \arrow[d, phantom, "\overset{1_v}{\Longrightarrow}"] & V \arrow[dl, "v"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "v"'] & U \arrow[r, "k"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[dl, "v"] \\
\arrow[ur, phantom, "\overset{\beta}{\Longrightarrow}"] & X & \arrow[ul, phantom, "\overset{\kappa}{\Longrightarrow}"]
\end{tikzcd}
\tag{4.14}$$

y

$$\begin{tikzcd}
& & \overset{\varepsilon}{\Nearrow} & & \\
U \arrow[rrrr, bend left, "1_U"] \arrow[rr, "k"] \arrow[ddrr, "u"'] & & V \arrow[rr, "y"] \arrow[dd, "v"] & & U \arrow[ddll, "u"] \\
& \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & & \overset{\beta}{\Longrightarrow} & \\
& & X & &
\end{tikzcd} = 1_u \tag{4.15}$$

respectivamente. Empecemos probando la primera igualdad. Por la definición de β obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "y"] \arrow[ddrr, "v"'] & & U \arrow[rr, "k"] \arrow[dd, "u"] & & V \arrow[ddll, "v"] \\
& \overset{\beta}{\Longrightarrow} & & \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & \\
& & X & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "1_V"'] \arrow[dr, "y"] & & & \\
V \arrow[rr, "k"] \arrow[ddrr, "v"'] & \overset{\eta}{\Longrightarrow} & U \arrow[rr, "k"] \arrow[dd, "u"] & & V \arrow[ddll, "v"] \\
& \overset{\gamma}{\Longrightarrow} & & \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & \\
& & X & &
\end{tikzcd}$$

Como $\kappa{\cdot}\gamma = 1_{vk}$, obtenemos la igualdad (4.14). Procedamos a probar la segunda igualdad. Por la definición de β obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
& & \overset{\varepsilon}{\Nearrow} & & \\
U \arrow[rrrr, bend left, "1_U"] \arrow[rr, "k"] \arrow[ddrr, "u"'] & & V \arrow[rr, "y"] \arrow[dd, "v"] & & U \arrow[ddll, "u"] \\
& \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & & \overset{\beta}{\Longrightarrow} & \\
& & X & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & \overset{\varepsilon}{\Nearrow} & & \\
U \arrow[rrrr, bend left, "1_U"] \arrow[rr, "k"] \arrow[dddrr, bend right, "u"'] & & V \arrow[rr, "y"] \arrow[dd, "1_V"'] & & U \arrow[ddll, "k"] \arrow[dddll, bend left, "u"] \\
& \overset{\kappa}{\Longrightarrow} & & \overset{\eta}{\Longrightarrow} & \\
& & V \arrow[d, "v"] & \overset{\gamma}{\Longrightarrow} & \\
& & X & &
\end{tikzcd}$$

Utilizando una de las identidades triangulares y que γ es inverso de κ tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[d, "k"] \arrow[dd, bend right=60, "u"'] \arrow[dd, bend left=60, "u"] & \\
\overset{\kappa}{\Longrightarrow} & V \arrow[d, "v"] & \overset{\gamma}{\Longrightarrow} \\
& X &
\end{tikzcd} = 1_u$$

Con lo cual queda probada la igualdad (4.15). Lo anterior nos permite ver que las 2-celdas η y ε también son 2-celdas en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$

$$\begin{tikzcd}
(V,v) \arrow[rr, "{(1_V,1_v)}"] \arrow[dr, "{(y,\beta)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & (V,v) \\
& (U,u) \arrow[ur, "{(k,\kappa)}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (V,v) \arrow[dr, "{(y,\beta)}"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
(U,u) \arrow[ur, "{(k,\kappa)}"] \arrow[rr, "{(1_U,1_u)}"'] & {} & (U,u)
\end{tikzcd}$$

Como la composición de 2-celdas es la misma en $\mathcal{K}$ que en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ y las identidades triangulares se cumplen en $\mathcal{K}$, entonces las identidades triangulares de η y ε se cumplen en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Por lo tanto $(y,\beta) \dashv (k,\kappa)$ donde la unidad y la counidad son η y ε respectivamente. ☐

Notemos que un diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[d, "m"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{4.16}$$

en $\mathcal{K}$, podemos verlo como una flecha estricta $(k, 1_{mk})$ junto con otra flecha (w,ψ) con el mismo dominio en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$.

$$\begin{tikzcd}
(B,mk) \arrow[rr, "{(k,1_{mk})}"] \arrow[dr, "{(w,\psi)}"'] & & (Y,m) \\
& (A,t) &
\end{tikzcd}$$

Por lo que un diagrama como el que sigue

$$\begin{tikzcd}
(B,mk) \arrow[rr, "{(k,1_{mk})}"] \arrow[dr, "{(w,\psi)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & (Y,m) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] \\
& (A,t) &
\end{tikzcd} \tag{4.17}$$

en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$, es un diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}", pos=0.25] & Y \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "f"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}", pos=0.75] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{4.18}$$

en $\mathcal{K}$, donde las 2-celdas ρ y σ cumplen que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, near start, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, near end, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "f"'] & & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X \arrow[ur, phantom, "="] & & A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{4.19}$$

Definición 4.5. *A el diagrama (4.18) le llamaremos una diagonal* (ρ, f, σ) *para el diagrama (4.16) en* $\mathcal{K}$ *si cumple la igualdad (4.19). Si* σ *es una identidad, la diagonal se dice que es estricta derecha.*

Definición 4.6. *Sean* $t : A \to X$ *una flecha en* $\mathcal{K}$*, el objeto coma*

$$\begin{tikzcd}
1_X/t \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Leftarrow}"] & X \arrow[d, "1_X"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

y Q *un objeto de* $\mathcal{K}$*. Decimos que* Q *es un objeto de* t*-morfismos si y solo si* Q *es un subobjeto pleno de* $1_X/t$*.*

Definición 4.7. *Sean* $t : A \to X$*,* $q : Q \to 1_X/t$ *donde* Q *es un objeto de* t*-morfismos. Definimos el conjunto de flechas* $\mathcal{Q}_Q$*, como el conjunto de flechas* $(a, \xi) : (G, x) \to (A, t)$ *en* $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ *tal que la flecha* $s : G \to 1_X/t$ *inducida por la propiedad del objeto coma* $1_X/t$ *aplicada a la 2-celda* ξ*, se factoriza a través de* Q*.*

Definición 4.8. *Sean* $t : A \to X$*,* $q : Q \to 1_X/t$ *donde* Q *es un objeto de* t*-morfimos, los diagramas*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{4.20}$$

y

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, near start, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, near end, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "f"'] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{4.21}$$

donde el digrama (4.21) es una diagonal (ρ, f, σ) del diagrama (4.20).

Decimos que la diagonal (4.21) del diagrama (4.20) es (débilmente) localmente Q-ortogonal si y solo si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(B,mk) \arrow[rr, "{(k,1_{mk})}"] \arrow[dr, "{(w,\psi)}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & (Y,m) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] \\
& (A,t) &
\end{tikzcd} \tag{4.22}$$

tiene la propiedad de $\mathcal{Q}_Q$-extensión derecha (débil) en cada flecha de la forma $(1_Y, \beta) : (Y, r) \to (Y, m)$.

A partir de aquí daremos por supuesto que Q es un subobjeto pleno de $1_X/t$.

Definición 4.9. *Decimos que la diagonal (4.21) del diagrama (4.20) es localmente Q-ortogonal puntual si y solo si el diagrama (4.22) tiene la propiedad de $\mathcal{Q}_Q$-extensión derecha puntual.*

Definición 4.10. *Decimos que la diagonal (4.21) del diagrama (4.20) es rígida si y solo si el diagrama (4.22) es rígido.*

Definición 4.11. *Decimos que la diagonal (4.21) del diagrama (4.20) tiene la propiedad de escisión de idempotentes si y solo si el diagrama (4.22) tiene la propiedad de escisión de idempotentes.*

Definición 4.12. *Consideremos el siguiente diagrama en $\mathcal{K}$*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd} \tag{4.23}$$

Decimos que el diagrama (4.23) respeta (débilmente) localmente la diagonal (4.21) del diagrama (4.20) si y solo si para cualquier morfismo $h : Y \to C$ y cualquier par de 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

tales que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] & & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "s"'] & Z & = & A \arrow[r, "t"'] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Existe una única (no necesariamente) 2*-celda*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\tau}{\Longrightarrow}"', yshift=-4ex] & & A \arrow[dl, "v"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "w"] \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longrightarrow}"] & & & B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \\
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & {} & A \arrow[dl, "v"] & = & Y \arrow[r, "h"'] & C \\
& C \arrow[u, phantom, "\overset{\tau}{\Longrightarrow}"] & & & &
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] \arrow[l, phantom, "\overset{\tau}{\Longrightarrow}"', yshift=-3ex] & X \arrow[d, "u"] & & & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
& C \arrow[r, "s"'] & Z & = & A \arrow[r, "t"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}", yshift=3ex] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Definición 4.13. *Decimos que el diagrama (4.23) respeta muy débilmente localmente la diagonal (4.21) si y solo si para cualquier morfismo* $h : Y \to C$ *y cualquier par de* 2*-celdas*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] & & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & C & & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

tales que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] & & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "s"'] & Z & = & A \arrow[r, "t"'] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Existe una 2*-celda*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \overset{\tau}{\Longrightarrow} & A \arrow[dl, "v"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "w"] \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longrightarrow}"] & & & B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \\
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & A \arrow[dl, "v"] & = & Y \arrow[r, "h"'] & C \\
& C \arrow[u, phantom, "\overset{\tau}{\Longrightarrow}"] & & & &
\end{tikzcd}$$

En el diagrama (4.23) supongamos que s tiene un levantamiento izquierdo absoluto $z : C \to X$ a lo largo de u.

$$\begin{tikzcd}
Z & \overset{\zeta}{\Longrightarrow} & X \arrow[ll, "u"'] \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] &
\end{tikzcd}$$

Como el levantamiento es absoluto, entonces ζ es respetado por la flecha $v : A \to C$, por lo que si consideramos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "t"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\phi'}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[dl, "z"] \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{4.24}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
Z & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[ll, "u"'] \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi'}{\Longrightarrow}"] & {} \\
& A \arrow[u, "v"] \arrow[uur, bend right, "t"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd} \tag{4.25}$$

Ahora, dado que $\mathcal{K}$ tiene objetos co-coma para cualquier par de morfismos en $\mathcal{K}$, en particular para los morfismos v y 1_A

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "\partial_1"] \\
C \arrow[r, "\partial_0"'] & V
\end{tikzcd}$$

Utilizando una propiedad del objeto co-coma V en el diagrama (4.24), existe una única flecha $x : V \to X$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "\partial_1"] \arrow[ddr, bend left, "t"] & \\
C \arrow[r, "\partial_0"'] \arrow[drr, bend right, "z"'] & V \arrow[dr, "x"] & \\
& & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi'}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "t"] \\
V \arrow[r, "z"'] & X
\end{tikzcd} \tag{4.26}$$

Con lo cual tenemos una flecha estricta en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$

$$(\partial_1, 1_t) : (A, t) \to (V, x) \tag{4.27}$$

Definición 4.14. *Definimos el conjunto $\mathcal{R}_v$ como el conjunto de flechas en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ con codominio (V, x), las cuales son de la forma $(\partial_0 h, 1)$ para alguna flecha (necesariamente única) h con codominio C.*

Como hemos observado anteriormente, el trabajar con diagonales en $\mathcal{K}$ produce diagramas en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$, los cuales cumplen que tiene la propiedad de extensión derecha o la propiedad de escisión de idempotentes y estos son conceptos que sabemos como manejar por lo hecho en el capítulo 3. Entonces es natural poner las definiciones anteriores en términos de cosas que estén en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Como el lector se ha de imaginar las definiciones anteriores tienen que ver con el hecho de que un diagrama sea respetado por un morfismo en específico.

Proposición 4.15. *Supongamos que en el diagrama (4.23), s tiene un levantamiento izquierdo absoluto a lo largo de u.*

$$\begin{tikzcd}
Z & & X \arrow[ll, "u"'] \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

El diagrama (4.23) respeta (débilmente) localmente la diagonal (4.18) si y solo si la flecha (4.27) $\mathcal{R}_v$-respeta (débilmente) el diagrama (4.17) en cada flecha de la forma $(1_Y, \gamma) : (Y, r) \to (Y, m)$.

Demostración. $\Rightarrow)$: Supongamos que el diagrama (4.23) respeta (débilmente) localmente la diagonal (4.18).

Consideremos una flecha $(1_Y, \gamma) : (Y, r) \to (Y, m)$ en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(1_Y/k, rd_0) \arrow[rr, "{(d_0, 1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1, m\lambda \cdot \gamma d_0)}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & (Y, r) \arrow[d, "{(1_Y, \gamma)}"] \\
(B, mk) \arrow[rr, "{(k, 1_m k)}"] \arrow[dr, "{(w, \psi)}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & (Y, m) \arrow[dl, "{(f, \sigma)}"] \\
& (A, t) \arrow[d, "{(\partial_1, 1_t)}"'] & \\
& (V, x) &
\end{tikzcd}$$

tiene la propiedad de $\mathcal{R}_v$-extensión derecha. Para esto consideremos los siguientes morfismos $h : Y \to C$, $(\partial_0 h, 1_r) : (Y, r) \to (V, x)$ y la 2-celda en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$

$$\begin{tikzcd}
(1_Y/k, rd_0) \arrow[rrr, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[dr, "{(d_1,m\lambda\cdot\gamma d_0)}"'] & & & (Y,r) \arrow[ddd, "{(\partial_0 h,1_r)}"] \\
& (B,mk) \arrow[dr, "{(w,\psi)}"'] & \overset{\varphi}{\Longleftarrow} & \\
& & (A,t) \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"'] & \\
& & & (V,x)
\end{tikzcd}$$

Como φ es una 2-celda en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ cumple que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, phantom, "\overset{\varphi}{\Swarrow}"] & C \arrow[d, "\partial_0"] & \\
B \arrow[r, "w"'] & A \arrow[r, "\partial_1"'] & V \arrow[r, "x"'] & X
\end{tikzcd} \tag{4.28}$$

es igual al siguiente

$$\begin{tikzcd}
& & & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[dr, phantom, "\gamma\Downarrow"] & V \arrow[dr, "x"] & \\
1_Y/k \arrow[rr, bend left, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \lambda\Downarrow & Y \arrow[ur, "h"] \arrow[rrr, "m"] \arrow[dr, phantom, "\psi\Downarrow"] & & & X \\
& B \arrow[ur, "k"'] \arrow[drr, "w"'] & & & & \\
& & & A \arrow[uurr, "t"] \arrow[r, "\partial_1"'] & V \arrow[uur, "x"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.29}$$

Ahora utilizando una de las propiedades del objeto coma $1_Y/k$ en la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "1_B"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_k}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
B \arrow[r, "k"'] & Y
\end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $g : B \to 1_Y/k$ tal que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "1_B"'] & & & \\
& 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & \\
& B \arrow[r, "k"'] & Y & = 1_k
\end{tikzcd}$$

Puesto que 1_Y tiene adjunto derecho, utilizamos el dual del Corolario 2.8 en el cuadro coma

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] \\
B \arrow[r, "k"'] & Y
\end{tikzcd}$$

entonces $d_1 \dashv g$, con counidad la identidad y unidad η, donde η es la única 2-celda tal que

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[rr, "1_{1_Y/k}"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\eta \Downarrow"] & 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] & Y & = \lambda \\
& B \arrow[ur, "g"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{4.30}$$

y

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[rr, "1_{1_Y/k}"] \arrow[dr, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\eta \Downarrow"] & 1_Y/k \arrow[r, "d_1"] & Y & = 1_{d_1} \\
& B \arrow[ur, "g"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{4.31}$$

Consideremos el objeto co-coma del par de flechas v y 1_A

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_A"'] & C \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\mu}{\Longleftarrow}"] \\
A \arrow[r, "\partial_1"'] & V
\end{tikzcd}$$

Utilizando una de las propiedades del objeto co-coma V en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_v}{\Longleftarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \\
C \arrow[r, "1_C"'] & C
\end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $l : V \to C$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "\partial_1"] \arrow[dd, bend left=40, "v"] \\
C \arrow[r, "\partial_0"'] \arrow[dr, bend right, "1_c"'] & V \arrow[d, "l"] \\
& C
\end{tikzcd} = 1_v$$

Puesto que 1_A tiene adjunto derecho, utilizamos el dual del Corolario 2.8 en el cuadro co-coma anterior, por lo que $\partial_0 \dashv l$, con unidad la identidad y counidad ε, donde ε es la única 2-celda que cumple lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[dr, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
C \arrow[r, "\partial_0"] & V \arrow[ur, "l"] \arrow[rr, "1_V"'] & {} & V
\end{tikzcd} = 1_{\partial_0} \tag{4.32}$$

y

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[dr, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
A \arrow[r, "\partial_1"] & V \arrow[ur, "l"] \arrow[rr, "1_V"'] & {} & V
\end{tikzcd} = \mu \tag{4.33}$$

El morfismo $x : V \to X$ es obtenido, utilizando la propiedad del objeto co-coma

V al diagrama (4.24) y es el único morfismo que cumple lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "\partial_1"] \arrow[ddr, bend left, "t"] & \\
C \arrow[r, "\partial_0"'] \arrow[drr, bend right, "z"'] & V \arrow[dr, "x"] & \\
& & X
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi'}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "t"] \\
V \arrow[r, "z"'] & X
\end{tikzcd}$$

Observemos que la flecha $(\partial_0 h, 1_r)$ en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ quiere decir que

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "r"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "z"] & V \arrow[dl, "x"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Procedamos a definir un par de 2-celdas

$$\alpha \ := \quad \begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "1_B"'] & & & \\
& 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & Y \arrow[d, "h"] & \\
& B \arrow[d, "w"'] & C \arrow[l, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[ddr, bend left, "1_C"] & \\
& A \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[drr, bend right, "v"'] & V \arrow[dr, "l"] & \\
& & & C
\end{tikzcd}$$

y

$$\beta \ := \quad \begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "\partial_0"] \arrow[ddrr, bend left, "z"] \arrow[drrr, bend left, "s"] \arrow[dd, phantom, "\gamma \Downarrow"] & & & \\
& & V \arrow[dr, "x"'] & & Z \arrow[dl, phantom, "\overset{\zeta}{\Swarrow}"] \\
Y \arrow[uur, "h"] \arrow[rrr, "m"'] & & & X \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

Probemos que las 2-celdas definidas anteriormente cumplen la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] & X \arrow[d, "u"] & & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"] & C \arrow[d, "s"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "s"'] & Z & & A \arrow[r, "t"'] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"]
\arrow[from=1-2, to=2-3, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"]
\arrow[from=1-3, to=2-5, phantom, "="]
\arrow[from=1-5, to=2-6, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"]
\arrow[from=1-6, to=2-7, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"]
\end{tikzcd} \tag{4.34}$$

Comencemos con el lado izquierdo de la igualdad anterior, por la igualdad (4.25) y la definición de α obtenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, bend right, "1_B"'] & & & & \\
& 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & Y \arrow[r, "h"] & C \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[dr, bend left, "1_C"] & \\
& B \arrow[r, "w"'] & A \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[drr, bend right, "v"] \arrow[ddr, "t"'] & V \arrow[dr, "l"] & \\
& & & & C \arrow[dl, "z"] \arrow[d, "s"] \\
& & & X \arrow[r, "u"'] & Z
\arrow[from=2-2, to=3-4, phantom, "\overset{\varphi}{\Swarrow}"]
\arrow[from=3-3, to=5-4, phantom, "\overset{\phi'}{\Swarrow}"]
\arrow[from=4-5, to=5-5, phantom, "\zeta\,\Swarrow"]
\end{tikzcd}$$

Utilizando la igualdad (4.26) se tiene lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, bend right, "1_B"'] & & & & & \\
& 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & Y \arrow[r, "h"] & C \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[dr, bend left, "1_C"] & & \\
& B \arrow[r, "w"'] & A \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[drr, bend right, "v"] \arrow[ddrr, bend right, "\partial_1"'] \arrow[ddrrr, bend right=60, "t"'] & V \arrow[dr, "l"] & & \\
& & & & C \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[dr, "z"] & Z \\
& & & & V \arrow[r, "x"'] & X \arrow[u, "u"']
\arrow[from=2-2, to=3-4, phantom, "\overset{\varphi}{\Swarrow}"]
\arrow[from=3-3, to=5-5, phantom, "\overset{\mu}{\Swarrow}"]
\arrow[from=4-5, to=5-6, phantom, "\zeta\Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

usando la ecuación (4.33) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrd, bend left, "k"] \arrow[rd, "g"] \arrow[rdd, bend right, "1_B"'] & & & & & \\
& 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, phantom, "\varphi\Swarrow"] & C \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[rdd, bend left, "1_C"] & & \\
& B \arrow[r, "w"'] & A \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[rrrdd, bend right, "t"'] & V \arrow[rd, "l"] \arrow[rdd, bend right, "1_V"'] & & \\
& & & & C \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[rd, "z"] \arrow[ld, phantom, "\varepsilon\Swarrow"] & Z \arrow[d, phantom, "\zeta\Downarrow"] \\
& & & & V \arrow[r, "x"'] & X \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

luego utilizando una de las identidades triangulares de la adjunción $\partial_0 \dashv l$, tenemos que es igual a

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrd, bend left, "k"] \arrow[rd, "g"] \arrow[rdd, bend right, "1_B"'] & & & & \\
& 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, phantom, "\varphi\Swarrow"] & C \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[rd, "z"] & Z \arrow[d, phantom, "\zeta\Downarrow"] \\
& B \arrow[r, "w"'] & A \arrow[r, "\partial_1"'] & V \arrow[r, "x"'] & X \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

Ahora usando que los diagramas (4.28) y (4.29) son iguales tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
& & & & C \arrow[rrd, bend left, "s"] \arrow[rd, "\partial_0"] \arrow[rdd, bend left, "z"] & & \\
B \arrow[rrrd, bend left, "k"] \arrow[rd, "g"] \arrow[rrdd, bend right, "1_B"'] & & & & \gamma\Downarrow & V \arrow[d, "x"] & Z \arrow[l, phantom, "\zeta\Swarrow"] \\
& 1_Y/k \arrow[rr, bend left, "d_0"] \arrow[rd, "d_1"'] & \lambda\Downarrow & Y \arrow[ruu, "h"] \arrow[rr, bend right, "m"] & \psi\Downarrow & X \arrow[ru, "u"] & \\
& & B \arrow[ru, "k"'] \arrow[rr, "w"'] & & A \arrow[ru, "t"'] \arrow[rr, "\partial_1"'] & & V \arrow[lu, "x"']
\end{tikzcd}$$

puesto que $\lambda g = 1_k$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[rrr, bend left, "s"] \arrow[rr, bend left, "z"'] \arrow[r, "\partial_0"'] & & |[phantom]| \zeta\Swarrow & Z \\
 & \gamma\Downarrow & V \arrow[dr, "x"'] & & \\
Y \arrow[uur, "h"] \arrow[rrr, "m"'] & & & X \arrow[uur, "u"'] & \\
B \arrow[u, "k"] \arrow[rrr, "w"'] & & \psi\Downarrow & A \arrow[u, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

con lo cual queda probada la igualdad (4.34) por como se definió β. Ahora por hipótesis, existe una (no necesariamente) única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \overset{\tau}{\Longrightarrow} & A \arrow[dl, "v"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "w"] & \\
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \overset{\rho}{\Longrightarrow} & A \arrow[dl, "v"] \\
 & C \arrow[u, phantom, "\overset{\tau}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & C
\end{tikzcd} \tag{4.35}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
 & C \arrow[r, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\tau}{\Longrightarrow}", near end, shift right=6] & Z
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
A \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}", shift left=4] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd} \tag{4.36}$$

Definimos la 2-celda

$$\delta \;:=\; \begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\tau\Downarrow", shift right=5] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu", shift left=5] & V \\
 & A \arrow[u, "v"'] \arrow[ur, "\partial_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que δ es una 2-celda en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$

$$\begin{tikzcd}
& (Y,m) \arrow[r, "{(f,\sigma)}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\delta"] & (A,t) \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"] & \\
(Y,r) \arrow[ur, "{(1_Y,\gamma)}"] \arrow[rrr, "{(\partial_0 h,1_r)}"'] & & & (V,x)
\end{tikzcd}$$

para esto necesitamos probar la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
& & & & & & & & C \arrow[dr, "z"] \arrow[d, phantom, "\gamma\Downarrow"] & & \\
Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[rr, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\mu\Downarrow"] & & V \arrow[dr, "x"] & & = & Y \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "m"'] \arrow[dr, "f"'] & & X & (4.37) \\
& A \arrow[ur, "v"'] \arrow[urrr, bend right, "\partial_1"'] \arrow[u, phantom, "\tau\Downarrow"] & & & & X & & & A \arrow[ur, "t"'] \arrow[u, phantom, "\sigma\Downarrow"] & &
\end{tikzcd}$$

Antes observemos que ζ es un levantamiento izquierdo absoluto, por lo que h respeta a ζ; utilizando la propiedad de levantamiento izquierda a la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, phantom, "\phi\Downarrow"] & & Z \\
& A \arrow[ur, "v"'] \arrow[rr, "t"'] \arrow[u, phantom, "\tau\Downarrow"] & & X \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo cual existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "z"] \arrow[dd, phantom, "\chi\Downarrow"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & X \\
& A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
Z & & X \arrow[ll, "u"'] & & = & Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, phantom, "\phi\Downarrow"] & & Z & (4.38) \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\chi}{\Longrightarrow}"] & & A \arrow[ul, "t"'] & & & A \arrow[ur, "v"'] \arrow[rr, "t"'] \arrow[u, phantom, "\tau\Downarrow"] & & X \arrow[ur, "u"'] & & \\
& & Y \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, "f"'] & & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, haciendo el pegado de la 2-celda ζ con el lado izquierdo de la ecuación (4.37) y el hecho de que $x\mu = \phi'$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
Z & X \arrow[l, "u"'] & \\
 & & A \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "v"] \\
 & C \arrow[uul, "s"] \arrow[uu, "z"'] & \\
 & & Y \arrow[ul, "h"] \arrow[uu, "f"']
\arrow[from=2-1, to=2-2, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"]
\arrow[from=2-2, to=2-3, phantom, "\overset{\phi'}{\Longrightarrow}"]
\arrow[from=3-2, to=3-3, phantom, "\tau\Nearrow"]
\end{tikzcd}$$

Dado que el pegado de ζ y ϕ' es igual a ϕ, obtenemos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[rr, "s"] & & Z \\
 & A \arrow[ur, "v"'] \arrow[rr, "t"'] & & X \arrow[ur, "u"'] &
\arrow[from=1-2, to=2-2, phantom, "\tau\Downarrow"]
\arrow[from=1-3, to=2-3, phantom, "\phi\Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

por la unicidad de χ tenemos que

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dr, "z"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \chi\Downarrow & X \\
 & A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[rr, "\partial_0"] & & V \arrow[dr, "x"] & \\
 & A \arrow[ur, "v"'] \arrow[urrr, bend right, "\partial_1"'] & & & & X
\arrow[from=1-2, to=2-2, phantom, "\tau\Downarrow"]
\arrow[from=1-4, to=2-4, phantom, "\phi\Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

Luego, hacemos el pegado de la 2-celda ζ con el lado derecho de la igualdad (4.37)

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[ddr, "\partial_0"'] \arrow[dddrr, bend left, "z"] \arrow[drrr, bend left, "s"] & & & \\
 & & & & Z \\
 & & V \arrow[dr, "x"'] & & \\
Y \arrow[uuur, "h"] \arrow[rrr, "m"'] \arrow[drr, "f"'] & & & X \arrow[uur, "u"'] & \\
 & & A \arrow[ur, "t"'] & &
\arrow[from=3-2, to=4-2, phantom, "\gamma\Downarrow"]
\arrow[from=4-3, to=5-3, phantom, "\sigma\Downarrow"]
\arrow[from=1-4, to=2-4, phantom, "\zeta\Swarrow"]
\end{tikzcd}$$

Utilizando la igualdad (4.36) tenemos que es igual al siguiente pegado

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[rr, "s"] & & Z \\
 & A \arrow[ur, "v"'] \arrow[rr, "t"'] & & X \arrow[ur, "u"'] &
\arrow[from=1-2, to=2-2, phantom, "\tau\Downarrow"]
\arrow[from=1-3, to=2-3, phantom, "\phi\Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

de la misma manera, por la unicidad de χ obtenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "z"] \arrow[dd, phantom, "\chi\Downarrow"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & X \\
& A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "x\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\gamma\Downarrow"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "m"'] \arrow[dr, "f"'] & {} & X \\
& A \arrow[ur, "t"'] \arrow[u, phantom, "\sigma\Downarrow"] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto queda probada la igualdad (4.37), con lo cual δ es una flecha en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Ahora veamos que δ en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ cumple lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
(1_Y/k, rd_0) \arrow[rr, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1,m\lambda\cdot\gamma d_0)}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & & (Y,r) \arrow[d, "{(1_Y,\gamma)}"] \arrow[dddl, bend left=40, "{(\partial_0 h,1_r)}"] \\
(B,mk) \arrow[rr, "{(k,1_m k)}"] \arrow[dr, "{(w,\psi)}"'] & {} & (Y,m) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] \\
& (A,t) \arrow[d, "{(\partial_1,1_t)}"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\delta}{\Longleftarrow}"] & {} \\
& (V,x) &
\end{tikzcd}
= \varphi$$

Para esto basta probar que se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[d, "d_1"'] \arrow[drr, "d_0"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & & & \\
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & {} & Y \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, bend left, "h"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Longleftarrow}"] & \\
& A \arrow[rr, "v"'] \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & {} & C \arrow[dll, "\partial_0"] \\
& V \arrow[ur, phantom, "\overset{\mu}{\Longleftarrow}"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[rrr, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & & & Y \arrow[d, "h"] \\
& B \arrow[dr, "w"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[dd, "\partial_0"] \\
& & A \arrow[dr, "\partial_1"'] & \\
& & & V
\end{tikzcd}
\tag{4.39}$$

Comencemos con el lado izquierdo de la igualdad anterior, notemos que es igual a lo siguiente usando la igualdad (4.35)

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[ddr, bend left, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda}{\Leftarrow}"] & & & \\
B \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "1_B"'] & & & & \\
 & 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\varphi}{\Swarrow}"] & Y \arrow[r, "h"] & C \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[ddr, bend left, "1_C"] & \\
 & B \arrow[r, "w"'] & A \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[drr, bend right, "v"] \arrow[ddrr, bend right=50, "\partial_1"'] \arrow[ddrr, phantom, "\overset{\mu}{\Swarrow}"] & V \arrow[dr, "l"] & \\
 & & & & C \arrow[d, "\partial_0"] \\
 & & & & V
\end{tikzcd}$$

Ahora utilizando las ecuaciones (4.30) y (4.33) tenemos que el diagrama anterior es igual al siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & 1_Y/k \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dd, "1_{1_Y/k}"] & & & \\
B \arrow[dr, "g"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & & & & \\
 & 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\varphi}{\Swarrow}"] & Y \arrow[r, "h"] & C \arrow[d, "\partial_0"] & \\
 & B \arrow[r, "w"'] & A \arrow[r, "\partial_1"'] & V \arrow[dr, "l"] \arrow[dd, "1_V"'] & \\
 & & & & C \arrow[dl, "\partial_0"] \arrow[l, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Leftarrow}"] \\
 & & & V &
\end{tikzcd}$$

Por las identidades triangulares de las adjunciones $g \dashv d_1$ y $\partial_0 \dashv l$, tenemos que el diagrama anterior es igual a φ. Por lo tanto queda probada la igualdad (4.39). Ahora veamos que δ es la única 2-celda que cumple con la igualdad (4.39).

Consideremos la siguiente 2-celda en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$

$$\begin{tikzcd}
& (Y,m) \arrow[r, "{(f,\sigma)}"] & (A,t) \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"] & \\
(Y,r) \arrow[ur, "{(1_Y,\gamma)}"] \arrow[rrr, "{(\partial_0 h,1_r)}"'] & & & (V,x)
\arrow[from=2-1, to=1-3, phantom, "\Uparrow\delta'"]
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
(1_Y/k, rd_0) \arrow[rr, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1,m\lambda\cdot\gamma d_0)}"'] & & (Y,r) \arrow[d, "{(1_Y,\gamma)}"] \arrow[ddl, bend left=60, "{(\partial_0 h,1_r)}"] \\
(B,mk) \arrow[rr, "{(k,1_{mk})}"] \arrow[dr, "{(w,\psi)}"'] & & (Y,m) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] \\
& (A,t) \arrow[d, "{(\partial_1,1_t)}"'] & {} \\
& (V,x) &
\arrow[from=1-2, to=2-2, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"]
\arrow[from=2-2, to=3-2, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"]
\arrow[from=3-2, to=3-3, phantom, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad \varphi \tag{4.40}$$

Antes observemos que δ' por ser una 2-celda en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ cumple la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "\partial_0"] & & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & V \arrow[dr, "x"] & \\
& A \arrow[ur, "\partial_1"'] & & X
\arrow[from=1-2, to=3-2, phantom, "\delta'\Downarrow"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "z"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "m"'] \arrow[dr, "f"'] & & X \\
& A \arrow[ur, "t"'] &
\arrow[from=1-2, to=2-2, phantom, "\gamma\Downarrow"]
\arrow[from=2-2, to=3-2, phantom, "\sigma\Downarrow"]
\end{tikzcd} \tag{4.41}$$

Definamos la siguiente 2-celda

$$\tau' \ := \quad \begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "\partial_0"] & & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & V \arrow[r, "l"] & C \\
& A \arrow[ur, "\partial_1"'] & &
\arrow[from=1-2, to=3-2, phantom, "\delta'\Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

Probemos que τ' cumple las siguientes igualdades

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "w"] & \\
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & A \arrow[dl, "v"] \\
& C \arrow[u, phantom, "\overset{\tau'}{\Longrightarrow}"] \arrow[uu, phantom, bend left=0, "\overset{\rho}{\Longrightarrow}" near end] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & C
\end{tikzcd}
\tag{4.42}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
& C \arrow[r, "s"'] \arrow[ul, phantom, "\overset{\tau'}{\Longrightarrow}" near end] & Z
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
A \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}" near end] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}
\tag{4.43}$$

Comencemos probando la primera ecuación. Al precomponer y componer las flechas g y l respectivamente a la igualdad subyacente de la ecuación (4.40) y por la definición de α obtenemos

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right=60, "1_B"'] \arrow[ddrr, bend left=40, "k"] & & & \\
1_Y/k \arrow[d, "d_1"'] \arrow[drr, "d_0"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & & & \\
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "h"] & \\
& A \arrow[d, "\partial_1"] \arrow[dd, bend right=50, "v"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[dll, "\partial_0"] \arrow[ddll, bend left=30, "1_C"] \arrow[ll, phantom, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"] \\
& V \arrow[d, "l"] & & \\
& C & &
\end{tikzcd}
= \alpha$$

Puesto que $\lambda g = 1_k$ tenemos que el lado izquierdo de la igualdad anterior es igual a lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & Y \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "h"] & & \\
& A \arrow[d, "\partial_1"'] & \overset{\delta'}{\Longleftarrow} & C \arrow[dll, "\partial_0"] & = \quad \alpha \\
& V \arrow[d, "l"] & & & \\
& C & & &
\end{tikzcd}$$

Por la definición de τ' obtenemos la igualdad (4.42). Procedamos a probar la igualdad (4.43), comencemos con el lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{tikzcd}
Z & C \arrow[l, "s"'] & \\
X \arrow[u, "u"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\phi}{\Longleftarrow}"] & A \arrow[l, "t"] \arrow[u, "v"'] & Y \arrow[l, "f"] \arrow[ul, "h"'] \arrow[ul, phantom, "\overset{\tau'}{\Longleftarrow}", near end, shift right=3]
\end{tikzcd}$$

Por la igualdad (4.25) y la definición de τ' obtenemos

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Swarrow}", near start] & & C \arrow[ll, "s"'] \arrow[ddll, "z"] & & \\
& & & V \arrow[ul, "l"'] & \\
X \arrow[uu, "u"] & & A \arrow[ll, "t"] \arrow[uu, "v"'] \arrow[ur, "\partial_1"'] \arrow[ul, phantom, "\overset{\phi'}{\Swarrow}"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[ul, "\partial_0"'] \\
& & & Y \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Utilizando la ecuación (4.26) tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Swarrow}", near start] & & & & C \arrow[llll, "s"'] \arrow[ddllll, bend right, "z"'] \arrow[ddll, "\partial_0"'] & & \\
& & & & & V \arrow[ul, "l"'] & \\
X \arrow[uu, "u"] & & V \arrow[ll, "x"] & & A \arrow[ll, "\partial_1"] \arrow[uu, "v"'] \arrow[ur, "\partial_1"'] \arrow[ul, phantom, "\overset{\mu}{\Swarrow}"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[ul, "\partial_0"'] \\
& & & & & Y \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Por la igualdad (4.33) obtenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
Z & & C \arrow[ll, "s"'] \arrow[ddll, bend right, "z"'] \arrow[ddl, "\partial_0"'] & & \\
& {} \arrow[ul, phantom, "\zeta \Swarrow"] & \arrow[u, phantom, "\varepsilon \Swarrow"] & V \arrow[ul, "l"'] \arrow[dll, "1_V"] & \\
X \arrow[uu, "u"] & V \arrow[l, "x"] & A \arrow[ur, "\partial_1"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[ul, "\partial_0"'] \\
& & & Y \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Por una de las identidades triangulares de la adjunción entre ∂_0 y l tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "u"] & & {} \arrow[r, phantom, "\overset{\zeta}{\Longleftarrow}"] & Z \\
& V \arrow[ul, "x"] & & \\
A \arrow[ur, "\partial_1"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[ul, "\partial_0"'] \arrow[uull, bend right, "z"'] \arrow[uur, "s"'] & \\
& Y \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por la igualdad (4.41) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[rrr, bend left, "s"] \arrow[rrdd, bend left, "z"] \arrow[dr, "\partial_0"] & & \arrow[d, phantom, "\zeta \Swarrow"] & Z \\
& \arrow[d, phantom, "\gamma \Downarrow"] & V \arrow[dr, "x"'] & & \\
Y \arrow[uur, "h"] \arrow[rrr, "m"] \arrow[drr, "f"'] & & \arrow[d, phantom, "\sigma \Downarrow"] & X \arrow[uur, "u"'] & \\
& & A \arrow[ur, "t"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por la definición de β obtenemos el pegado de β y σ, con lo cual queda probada la ecuación (4.43). Por la unicidad de τ, entonces $\tau = \tau'$. Por el hecho anterior tenemos la siguiente igualdad.

$$\delta \quad = \quad \begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\tau' \Downarrow" near start, shift right=3ex] & V \\
& A \arrow[u, "v"'] \arrow[ur, "\partial_1"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \mu" near end, shift left=5ex] &
\end{tikzcd}$$

Por la definición de la 2-celda τ' obtenemos

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[rr, "1_C"] \arrow[dr, "\partial_0"] & & C \arrow[drr, "\partial_0"] & & \\
\delta \quad = & Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \delta'\Downarrow & V \arrow[ur, "l"'] & & \Downarrow\mu & V \\
 & & A \arrow[ur, "\partial_1"'] \arrow[uurr, bend right, "v"'] \arrow[urrrr, bend right, "\partial_1"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Utilizando la igualdad (4.33) tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[rr, "1_C"] \arrow[dr, "\partial_0"] & & C \arrow[dr, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \\
\delta \quad = & Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \delta'\Downarrow & V \arrow[ur, "l"] \arrow[rr, "1_V"'] & & V \\
 & & A \arrow[ur, "\partial_1"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Por una de las identidades triangulares de la adjunción entre ∂_0 y l obtenemos

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dr, "\partial_0"] & \\
\delta \quad = & Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \delta'\Downarrow & V \\
 & & A \arrow[ur, "\partial_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto δ es única.

$\Leftarrow$): Consideremos un morfismo $h : Y \to C$ y un par de 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] & & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & C & & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

tales que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] & = & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "s"'] & Z & & A \arrow[r, "t"'] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd} \tag{4.44}$$

Como ζ es un levantamiento izquierdo absoluto, entonces para la 2-celda β, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "z"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, bend right, "m"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & & X
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
Z & & X \arrow[ll, "u"'] \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\gamma}{\Longrightarrow}"] & \\
& Y \arrow[u, "h"] \arrow[uur, bend right, "m"'] &
\end{tikzcd} \quad = \quad \beta \tag{4.45}$$

Con lo anterior podemos dar una flecha en $\mathcal{K}||$X, $(1_Y, \gamma) : (Y, r) \to (Y, m)$ donde $r := zh$. De la misma manera, para la 2 celda

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"] & C \arrow[d, "s"] \\
A \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"] & X \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & Z
\end{tikzcd}$$

existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "h"] & C \arrow[dr, "z"] & \\
B \arrow[ur, "k"] \arrow[dr, "w"'] & & & X \\
& & A \arrow[ur, "t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varsigma"] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
Z & & X \arrow[ll, "u"'] & \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\varsigma}{\Longrightarrow}"] & & A \arrow[ul, "t"'] \\
& Y \arrow[u, "h"] & & B \arrow[u, "w"'] \arrow[ll, "k"]
\end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd}
Z & X \arrow[l, "u"'] & A \arrow[l, "t"'] \\
C \arrow[u, "s"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\beta}{\Longrightarrow}"] & Y \arrow[l, "h"] \arrow[u, "m"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\psi}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[l, "k"] \arrow[u, "w"']
\end{tikzcd}$$

Notemos que se tienen la siguientes igualdades

$$\begin{tikzcd}
Z & & X \arrow[ll, "u"'] & \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Rightarrow}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\gamma}{\Rightarrow}"] & & A \arrow[ul, "t"'] \\
& Y \arrow[u, "h"] \arrow[uur, bend right, "m"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\psi}{\Rightarrow}"] & & B \arrow[u, "w"'] \arrow[ll, "k"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Z & X \arrow[l, "u"'] & A \arrow[l, "t"'] \\
C \arrow[u, "s"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\beta}{\Rightarrow}"] & Y \arrow[l, "h"] \arrow[u, "m"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\psi}{\Rightarrow}"] & B \arrow[l, "k"] \arrow[u, "w"']
\end{tikzcd}
\tag{4.46}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Z & & X \arrow[ll, "u"'] & \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Rightarrow}"] & & A \arrow[ul, "t"'] \arrow[ll, "v"] \arrow[ul, phantom, "\overset{\phi'}{\Rightarrow}"] \\
& Y \arrow[u, "h"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] & & B \arrow[u, "w"'] \arrow[ll, "k"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Z & X \arrow[l, "u"'] & A \arrow[l, "t"'] \\
C \arrow[u, "s"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\beta}{\Rightarrow}"] & Y \arrow[l, "h"] \arrow[u, "m"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\psi}{\Rightarrow}"] & B \arrow[l, "k"] \arrow[u, "w"']
\end{tikzcd}
\tag{4.47}$$

La igualdad (4.46) se cumple por la ecuación (4.45) y la igualdad (4.47) se cumple por las ecuaciones (4.26) y (4.44). Por la unicidad de ς obtenemos

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
C \arrow[ur, "z"] & & A \arrow[ul, "t"'] \arrow[ll, "v"] \arrow[u, phantom, "\overset{\phi'}{\Rightarrow}"] \\
Y \arrow[u, "h"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] & & B \arrow[u, "w"'] \arrow[ll, "k"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& X & A \arrow[l, "t"'] \\
C \arrow[ur, "z"] \arrow[r, phantom, "\overset{\gamma}{\Rightarrow}"] & \arrow[r, phantom, "\overset{\psi}{\Rightarrow}"] & \\
& Y \arrow[ul, "h"] \arrow[uu, "m"] & B \arrow[l, "k"] \arrow[uu, "w"']
\end{tikzcd}
\tag{4.48}$$

Definimos la 2-celda

$$\varphi \ := \quad \begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[r, "d_1"] \arrow[dr, "d_0"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "\partial_1"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\overset{\mu}{\Rightarrow}"] & \\
& Y \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "\partial_0"'] & V
\end{tikzcd}$$

Queremos ver que la 2-celda anterior pertenece a $\mathcal{K}||$X. Para esto es necesario ver que se cumpla la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & Y \arrow[d, "h"] \arrow[dddr, bend left, "r"] & \\
B \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] \arrow[d, "w"'] & C \arrow[d, "\partial_0"] & \\
A \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[drr, bend right, "t"'] & V \arrow[dr, "x"'] & \\
& & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, "d_0"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & \\
B \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"'] \arrow[d, bend left=70, "r"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}
\tag{4.49}$$

Partamos del lado izquierdo de la igualdad anterior, por la definicón de φ y la igualdad (4.26) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[r, "d_1"] \arrow[dr, "d_0"'] & B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\lambda}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\phi'}{\Longrightarrow}"] & \\
& Y \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "z"'] & X
\end{tikzcd}$$

Por la ecuación (4.48) tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, "d_0"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & \\
B \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "m"'] \arrow[d, bend left=70, "r"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

Con lo cual queda probada la igualdad (4.49). Por lo tanto φ es una 2-celda en

$\mathcal{K}||$X.

$$\begin{tikzcd}
(1_Y/k, rd_0) \arrow[rrr, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[dr, "{(d_1,m\lambda\cdot\gamma d_0)}"'] & & & (Y,r) \arrow[ddd, "{(\partial_0 h,1_r)}"] \\
& (B,mk) \arrow[dr, "{(w,\psi)}"'] & \overset{\varphi}{\Longleftarrow} & \\
& & (A,t) \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"'] & \\
& & & (V,x)
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis la flecha (4.27) $\mathcal{R}_v$-respeta el diagrama (4.17) en cada flecha de la forma $(1_Y, \beta) : (Y, r) \to (Y, m)$, por lo que existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
& (Y,m) \arrow[r, "{(f,\sigma)}"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\delta"] & (A,t) \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"] & \\
(Y,r) \arrow[ur, "{(1_Y,\gamma)}"] \arrow[rrr, "{(\partial_0 h,1_r)}"'] & & & (V,x)
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
(1_Y/k, rd_0) \arrow[rr, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1,m\lambda\cdot\gamma d_0)}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & (Y,r) \arrow[d, "{(1_Y,\gamma)}"] \arrow[dddl, bend left=60, "{(\partial_0 h,1_r)}"] \\
(B,mk) \arrow[rr, "{(k,1_{mk})}"] \arrow[dr, "{(w,\psi)}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & (Y,m) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] \\
& (A,t) \arrow[d, "{(\partial_1,1_t)}"'] & \overset{\delta}{\Longleftarrow} \\
& (V,x) &
\end{tikzcd} = \varphi \tag{4.50}$$

Notemos que la 2-celda δ cumple la siguiente igualdad por estar en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, Rightarrow, "\delta"'] & V \arrow[dr, "x"] & \\
 & A \arrow[ur, "\partial_1"'] & & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dr, "z"] \arrow[d, phantom, "\gamma\Downarrow"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "m"'] \arrow[dr, "f"'] & {} \arrow[d, phantom, "\sigma\Downarrow"] & X \\
 & A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.51}$$

Como vimos en la implicación anterior, existe un único morfismo $g : B \to 1_Y/k$ tal que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, bend right, "1_B"'] & & \\
 & 1_Y/k \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
 & B \arrow[r, "k"'] & Y
\end{tikzcd}
= 1_k \tag{4.52}$$

y existe un único morfismo $l : V \to C$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "\partial_1"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
C \arrow[r, "\partial_0"'] \arrow[drr, bend right, "1_c"'] & V \arrow[dr, "l"] & \\
 & & C
\end{tikzcd}
= 1_v \tag{4.53}$$

Esto por la propiedades del objeto coma $1_Y/k$ y co-coma V.

Puesto que 1_A tiene adjunto derecho, utilizamos el dual del Corolario 2.8 en el cuadro co-coma anterior, por lo que $\partial_0 \dashv l$, con unidad la identidad y couidad ε, donde ε es la única 2-celda que cumple lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dr, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
C \arrow[r, "\partial_0"] & V \arrow[ur, "l"] \arrow[rr, "1_v"'] & {} & V
\end{tikzcd}
= 1_{\partial_0} \tag{4.54}$$

y

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dr, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & & \\
A \arrow[r, "\partial_1"] & V \arrow[ur, "l"] \arrow[rr, "1_{1_{Y/k}}"'] & & V & = \mu
\end{tikzcd} \tag{4.55}$$

Definimos la siguiente 2-celda

$$\begin{tikzcd}
\tau := & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\delta\Downarrow"] & V \arrow[dr, "l"] & \\
 & & A \arrow[ur, "\partial_1"'] & & C
\end{tikzcd}$$

Veamos que τ cumple las siguientes igualdades

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "w"] \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longrightarrow}"] & & & B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \\
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & A \arrow[dl, "v"] & = & Y \arrow[r, "h"'] & C \\
 & C \arrow[u, phantom, "\overset{\tau}{\Longrightarrow}"] & & & &
\end{tikzcd} \tag{4.56}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\tau}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] & & & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
 & C \arrow[r, "s"'] & Z & = & A \arrow[r, "t"'] & X \arrow[r, "u"'] \arrow[ul, phantom, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}"] & Z
\end{tikzcd} \tag{4.57}$$

Empecemos probando la igualdad (4.56). Sabemos que se cumple la siguiente igualdad por la ecuación (4.50)

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[d, "d_1"'] \arrow[drr, "d_0"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & & & \\
B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "h"] & \\
& A \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\delta}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[dll, "\partial_0"] \\
& V & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[rr, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & & Y \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[dr, "w"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[dd, "\partial_0"] \\
& A \arrow[dr, "\partial_1"'] & \\
& & V
\end{tikzcd}$$

Componiendo y precomponiendo con las flechas g y l respectivamente obtenemos

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "g"] & & & & \\
& 1_Y/k \arrow[d, "d_1"'] \arrow[drr, "d_0"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & & & \\
& B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "h"] & \\
& & A \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\delta}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[dll, "\partial_0"] \\
& & V \arrow[dr, "l"'] & & \\
& & & C &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "g"] & & & & \\
& 1_Y/k \arrow[rr, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & & Y \arrow[d, "h"] & \\
& B \arrow[dr, "w"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[dd, "\partial_0"] & \\
& & A \arrow[dr, "\partial_1"'] & & \\
& & & V \arrow[dr, "l"'] & \\
& & & & C
\end{tikzcd}$$

Por las ecuaciones (4.52) y (4.53), la definicón de τ y φ obtenemos la igualdad (4.56). Procedamos a probar la igualdad (4.57). Para esto consideremos el siguiente pegado

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\tau}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
& C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Por la definición de τ y la ecuación (4.25) tenemos que es igual al siguiente pegado

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
C \arrow[rr, phantom, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, "\partial_0"] \arrow[ddr, bend right, "1_C"'] & & A \arrow[dl, "\partial_1"'] \arrow[ddl, bend left, "v"] \arrow[ddr, "t"] & \\
& V \arrow[d, "l"] & \arrow[r, phantom, "\overset{\phi'}{\Longrightarrow}"] & \\
& C \arrow[rr, "z"] \arrow[dr, "s"'] & & X \arrow[dl, "u"] \\
& & Z \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

Utilizando la igualdad (4.26) tenemos

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
C \arrow[rr, phantom, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, "\partial_0"] \arrow[ddr, bend right, "1_C"'] & & A \arrow[dl, "\partial_1"'] \arrow[ddl, bend left, "v"] \arrow[dd, "\partial_1"] \arrow[dddr, bend left, "t"] & \\
& V \arrow[d, "l"] & \overset{\mu}{\Longrightarrow} & \\
& C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[drr, bend right, "z"] \arrow[ddr, "s"'] & V \arrow[dr, "x"] & \\
& & \arrow[d, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[dl, "u"] \\
& & Z &
\end{tikzcd}$$

Por la ecuación (4.55) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "f"] & & & \\
C \arrow[rr, phantom, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, "\partial_0"] \arrow[ddr, bend right, "1_C"'] & & A \arrow[dl, "\partial_1"'] \arrow[dddrr, bend left, "t"] & & \\
 & V \arrow[d, "l"'] \arrow[drr, "1_V"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}"] & & & \\
 & C \arrow[rr, "\partial_0"] \arrow[drrr, bend right, "z"] \arrow[ddr, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & & V \arrow[dr, "x"] & \\
 & & & & X \arrow[dll, "u"] \\
 & & Z & &
\end{tikzcd}$$

Usando la igualdad (4.54) tenemos

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
A \arrow[rr, phantom, "\overset{\delta}{\Longleftarrow}"] \arrow[dr, "\partial_1"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & C \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[ddl, bend left, "z"] \arrow[ddr, "s"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\zeta}{\Longleftarrow}"] & \\
 & V \arrow[d, "x"'] & & \\
 & X \arrow[rr, "u"] & & Z
\end{tikzcd}$$

Empleando la ecuación (4.51) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, "h"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "m"] & C \arrow[dl, "z"'] \arrow[d, "s"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X \arrow[ul, phantom, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}"] \arrow[r, "u"'] & Z \arrow[u, phantom, shift right=4, "\overset{\zeta}{\Longleftarrow}"]
\end{tikzcd}$$

Por la igualdad (4.45) tenemos que es igual al siguiente pegado

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
A \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}" near end] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Por lo que hemos probado la igualdad (4.57). Falta probar la unicidad de τ. Para esto consideremos una 2-celda

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\tau'}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[dl, "v"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "w"] \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longrightarrow}"] & \\
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\tau'}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[dl, "v"] \\
& C &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & C
\end{tikzcd}
\tag{4.58}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\tau'}{\Longrightarrow}" near start, shift left=3] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
& C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
A \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}" near end] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}
\tag{4.59}$$

Definimos la 2-celda

$$\delta' \; := \quad \begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\tau' \Downarrow" near start, shift right=3] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mu" near start, shift left=4] & V \\
& A \arrow[u, "v"'] \arrow[ur, "\partial_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que δ' es una 2-celda en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Para esto probemos la siguiente igualdad.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\delta'\Downarrow"] & V \arrow[dr, "x"] & \\
& A \arrow[ur, "\partial_1"'] & & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "z"] \arrow[d, phantom, "\gamma\Downarrow"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "m"'] \arrow[dr, "f"'] & & X \\
& A \arrow[ur, "t"'] \arrow[u, phantom, "\sigma\Downarrow"] &
\end{tikzcd}
\qquad (4.60)$$

Dado que ζ es un levantamiento izquierdo absoluto, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "z"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow\chi"] & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & X \\
& A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
Z & & X \arrow[ll, "u"'] & \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Rightarrow}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\gamma}{\Rightarrow}"] & & A \arrow[ul, "t"'] \\
& Y \arrow[u, "h"] \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\overset{\tau'}{\Rightarrow}"] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Rightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
& C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Notemos que se tienen las siguientes igualdades.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\overset{\tau'}{\Rightarrow}"] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Rightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
& C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\overset{\tau'}{\Rightarrow}"] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\overset{\phi'}{\Rightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
& C \arrow[r, "s"'] \arrow[ur, "z"] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\overset{\zeta}{\Rightarrow}"] & Z
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\overset{\tau'}{\Rightarrow}"] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Rightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
& C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "m"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \arrow[dl, phantom, shift right=3ex, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \arrow[dl, "z"'] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\overset{\zeta}{\Leftarrow}"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

La primera igualdad se da por la ecuación (4.25) y la segunda por las igualdades (4.45) y (4.59). Por la unicidad de χ tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\tau'}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi'}{\Longrightarrow}"] & X \\
& C \arrow[ur, "z"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "m"] \arrow[dl, phantom, shift right=4, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[dl, "z"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X &
\end{tikzcd}$$

Observemos que el lado izquierdo de la igualdad anterior es igual a lo siguiente, por la ecuación (4.26) y la definición de δ'.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\delta'\Downarrow"] & V \arrow[dr, "x"] & \\
& A \arrow[ur, "\partial_1"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Con lo cual queda probada la igualdad (4.60). Por lo tanto δ' es una 2-celda en $\mathcal{K}||$X.

$$\begin{tikzcd}
& (Y,m) \arrow[r, "{(f,\sigma)}"] \arrow[d, phantom, shift left=6, "\Uparrow\delta'"] & (A,t) \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"] & \\
(Y,r) \arrow[ur, "{(1_Y,\gamma)}"] \arrow[rrr, "{(\partial_0 h,1_r)}"'] & & & (V,x)
\end{tikzcd}$$

Veamos que δ' cumple la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
(1_Y/k, rd_0) \arrow[r, "{(d_0,1_{rd_0})}"] \arrow[d, "{(d_1,m\lambda\cdot\gamma d_0)}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & (Y,r) \arrow[d, "{(1_Y,\gamma)}"'] \arrow[ddd, bend left=60, "{(\partial_0 h,1_r)}"] \\
(B,mk) \arrow[r, "{(k,1_{mk})}"] \arrow[dr, "{(w,\psi)}"'] & (Y,m) \arrow[d, "{(f,\sigma)}"] \arrow[dl, phantom, shift right=3, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] \\
& (A,t) \arrow[d, "{(\partial_1,1_t)}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"] & \\
& (V,x)
\end{tikzcd}
\quad = \quad \varphi \qquad (4.61)$$

Para esto basta probar la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[d, "d_1"'] \arrow[rrd, "d_0"] \arrow[rd, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & & & \\
B \arrow[rr, "k"] \arrow[rd, "w"'] \arrow[rrd, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & Y \arrow[ld, "f"] \arrow[rd, "h"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"] & \\
& A \arrow[d, "\partial_1"'] & & C \arrow[lld, "\partial_0"] \\
& V & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[rrr, "d_0"] \arrow[rd, "d_1"'] & & & Y \arrow[dd, "h"] \\
& B \arrow[rd, "w"'] & \overset{\varphi}{\Longleftarrow} & \\
& & A \arrow[rd, "\partial_1"'] & C \arrow[d, "\partial_0"] \\
& & & V
\end{tikzcd}
\tag{4.62}$$

Comencemos con el lado izquierdo de la igualdad anterior. Por la definición de δ' obtenemos

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[d, "d_1"'] \arrow[rrd, "d_0"] \arrow[rd, phantom, "\overset{\lambda}{\Longleftarrow}"] & & & \\
B \arrow[rr, "k"] \arrow[rd, "w"'] \arrow[rrd, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & Y \arrow[ld, "f"] \arrow[rd, bend left, "h"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau'}{\Longleftarrow}"] & \\
& A \arrow[rr, "v"'] \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\mu}{\Longleftarrow}"] & & C \arrow[lld, "\partial_0"] \\
& V & &
\end{tikzcd}$$

Utilizando la ecuación (4.58) tenemos

$$\begin{tikzcd}
1_Y/k \arrow[r, "d_1"] \arrow[rd, "d_0"'] & B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "k"] \arrow[ld, phantom, "\overset{\lambda}{\Longrightarrow}"] \arrow[rd, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"'] \arrow[rd, "\partial_1"] & \\
& Y \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "\partial_0"'] \arrow[ru, phantom, "\overset{\mu}{\Longrightarrow}"] & V
\end{tikzcd}$$

pero sabemos que esta es la definición de la 2-celda φ. Por lo tanto queda probada la igualdad (4.62) y por ende la igualdad (4.61). Por la unicidad de δ

tenemos que

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\delta\Downarrow"] & V & = & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\delta'\Downarrow"] & V \\
& A \arrow[ur, "\partial_1"'] & & & & A \arrow[ur, "\partial_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Componiendo la igualdad anterior con la flecha l y por la definición de δ' obtenemos

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\delta\Downarrow"] & V \arrow[dr, "l"] & & = & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, "\partial_0"] & V \arrow[dr, "l"] & \\
& A \arrow[ur, "\partial_1"'] & & C & & & A \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "\partial_1"'] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\tau'\Downarrow"] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\mu\Downarrow"] & & C
\end{tikzcd}$$

El lado izquierdo por definición es τ y el lado derecho por la igualdad (4.53) es igual a τ'. Por lo tanto $\tau = \tau'$, por lo que la 2-celda τ es única. $\square$

Teorema 4.16. *Si en el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd} \tag{4.63}$$

la flecha s tiene un levantamiento izquierdo absoluto z a lo largo de u

$$\begin{tikzcd}
Z & & X \arrow[ll, "u"'] \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *v tiene adjunto izquierdo.*
2. *Existe una diagonal localmente ortogonal puntual para el diagrama (4.24) y el diagrama (4.63) respeta localmente cada diagonal localmente ortogonal del diagrama (4.24).*
3. *Existe una diagonal para el diagrama (4.24) la cual tiene la propiedad de escisión de idempotentes y es respetada débilmente localmente por el diagrama (4.63).*

4. *(Si los idempotentes se escinden en $\mathcal{K}(C, A)$) Existe una diagonal para el diagrama (4.24) la cual es respetada muy débilmente localmente por (4.63).*

DEMOSTRACIÓN. 2) $\Rightarrow$ 3) y 3) $\Rightarrow$ 4) son claras.

1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que v tiene adjunto izquierdo $f : C \to A$ donde la unidad y counidad de la ajunción son η y ε respectivamente

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "1_V"] \arrow[dr, "y"'] & \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & V \\
& U \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& V \arrow[dr, "y"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
U \arrow[ur, "k"] \arrow[rr, "1_U"'] & & U
\end{tikzcd}$$

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[l, "u"'] \\
C \arrow[u, "s"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[u, "t"'] \arrow[l, "v"'] \\
C \arrow[u, "1_C"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.64}$$

Puesto que ζ exhibe a z como levantamiento izquierdo absoluto de s a lo largo de u, aplicamos la propiedad de levantamiento izquierdo al diagrama (4.64), por lo que existe una única 2-celda en $\mathcal{K}$

$$\begin{tikzcd}
X & & A \arrow[ll, "t"'] \\
& C \arrow[ul, "z"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
Z & X \arrow[l, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma}{\Longrightarrow}"] & \\
\arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & & A \arrow[ul, "t"'] \\
& C \arrow[uul, "s"] \arrow[uu, "z"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[l, "u"'] \\
C \arrow[u, "s"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[u, "t"'] \arrow[l, "v"'] \\
C \arrow[u, "1_C"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.65}$$

Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longleftarrow}", pos=0.25] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}", pos=0.75] & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "z"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

es una diagonal localmente ortogonal puntual para ϕ'. Probemos primero que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longleftarrow}", pos=0.25] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}", pos=0.75] & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "z"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi'}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "z"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd} \tag{4.66}$$

Sabemos que ϕ' es la única 2-celda que la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
Z & & X \arrow[ll, "u"'] \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi'}{\Longrightarrow}"] & \\
& A \arrow[u, "v"] \arrow[uur, bend right, "t"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] \\
C \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Notemos que el siguiente pegado

$$\begin{tikzcd}
Z & & X & \\
& C \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "z"'] \arrow[rr, "f"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\zeta}{\Longrightarrow}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[ul, "t"'] \\
& A \arrow[u, "v"] \arrow[urr, "1_A"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}"] & &
\arrow[from=1-3, to=1-1, "u"']
\end{tikzcd}$$

por la ecuación (4.65) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
Z & X \arrow[l, "u"'] \\
C \arrow[u, "s"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[u, "t"'] \arrow[l, "v"'] \\
C \arrow[u, "1_C"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}\quad\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[u, "1_A"'] \arrow[l, "v"]
\end{tikzcd}$$

Por una de las identidades triangulares tenemos que es igual a ϕ. Por la unidad de ϕ', obtenemos la ecuación (4.66). La ecuación (4.66) nos dice que la 2-celda ε es una 2-celda en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$

$$\begin{tikzcd}
(A, vz) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] & \overset{\varepsilon}{\Longleftarrow} & (C, z) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] \\
& (A, t) &
\end{tikzcd} \tag{4.67}$$

Dado que v tiene adjunto izquierdo y 1_{zv} es un isomorfismo, por la Proposición 4.4, la flecha $(v, 1_{zv})$ tiene adjunto izquierdo $(f, z\eta)$ donde la unidad y counidad de la adjunción son la misma unidad y counidad de la adjunción $f \dashv v$. Por el Lema 3.25 la 2-celda (4.67) exhibe a (f, σ) como una extensión derecha absoluta de $(1_A, \phi')$ a lo largo de $(v, 1_{zv})$. Probemos que la 2-celda (4.67) es una extensión puntual, para esto consideremos un morfismo $(q, \chi) : (P, o) \to (C, z)$ en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$, el objeto coma de las flechas $(v, 1_{zv})$ y (q, χ)

$$\begin{tikzcd}
(q/v, od_0) \arrow[r, "(d_0{,}1_{od_0})"] \arrow[d, "(d_1{,}z\nu\cdot\chi d_0)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\nu}{\Longleftarrow}"] & (P, o) \arrow[d, "(q{,}\chi)"] \\
(A, zv) \arrow[r, "(v{,}1_{zv})"'] & (C, z)
\end{tikzcd}$$

y la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(q/v, od_0) \arrow[r, "(d_0{,}1_{od_0})"] \arrow[d, "(d_1{,}z\nu\cdot\chi d_0)"'] & (P, o) \arrow[dd, "(m{,}\iota)"] \\
(A, zv) \arrow[dr, "(1_A{,}\phi')"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] & \\
& (A, t)
\end{tikzcd}$$

Puesto que la flecha $(v, 1_{zv})$ tiene adjunto izquierdo, por la Proposición 2.7 tenemos que la flecha $(d_0, 1_{od_0})$ tiene adjunto izquierdo $(n, \varsigma) : (P, o) \to (q/v, od_0)$ con unidad la identidad y counidad ε', la cual es la única 2-celda tal que

$$\begin{tikzcd}
& (P, o) \arrow[dr, "(n{,}\varsigma)"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon' \Downarrow"] & & & \\
(q/v, od_0) \arrow[ur, "(d_0{,}1_{od_0})"] \arrow[rr, "1_{(q/v,od_0)}"'] & {} & (q/v, od_0) \arrow[r, "(d_0{,}od_0)"] & (P, o) & = 1_{(d_0,1_{od_0})}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (P, o) \arrow[dr, "(n{,}\varsigma)"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon' \Downarrow"] & & & \\
(q/v, od_0) \arrow[ur, "(d_0{,}od_0)"] \arrow[rr, "1_{(q/v,od_0)}"'] & {} & (q/v, od_0) \arrow[r, "(d_1{,}z\nu\cdot\chi d_0)"] & (A, zv) & = (f, \sigma)\nu \cdot \varepsilon(d_1, z\nu \cdot \chi d_0)
\end{tikzcd} \tag{4.68}$$

además (n,ς) es la única flecha que cumple la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
(P,o) \arrow[rrrd, bend left, "{(1_P,1_o)}"] \arrow[rd, "{(n,\varsigma)}"] \arrow[dd, "{(q,\chi)}"'] & & & \\
& (q/v,od_0) \arrow[rr, "{(d_0,1_{od_0})}"] \arrow[dd, "{(d_1,z\nu\cdot\chi d_0)}"'] & & (P,o) \arrow[dd, "{(q,\chi)}"] \\
(C,z) \arrow[rd, "{(f,\sigma)}"'] & & \overset{\nu}{\Longleftarrow} & \\
& (A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"'] & & (C,z)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
(P,o) \arrow[r, "{(q,\chi)}"] & (C,z) \arrow[rr, "{(1_C,1_z)}"] \arrow[ddr, "{(f,\sigma)}"'] & & (C,z) \\
& & \eta\Downarrow & \\
& & (A,zv) \arrow[uur, "{(v,1_{zv})}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad (4.69)$$

Definimos la siguiente 2-celda

$$\varphi' := \quad \begin{tikzcd}
(P,o) \arrow[rrrd, bend left, "{(1_P,1_o)}"] \arrow[rd, "{(n,\varsigma)}"] \arrow[dd, "{(q,\chi)}"'] & & & \\
& (q/v,od_0) \arrow[rr, "{(d_0,1_{od_0})}"] \arrow[dd, "{(d_1,z\nu\cdot\chi d_0)}"] & & (P,o) \arrow[ddd, "{(m,\iota)}"] \\
(C,z) \arrow[rd, "{(f,\sigma)}"'] & & \overset{\varphi}{\Longleftarrow} & \\
& (A,zv) \arrow[rrd, "{(1_A,\phi')}"'] & & \\
& & & (A,t)
\end{tikzcd}$$

Veamos que φ' cumple la siguiente ecuación y es la única que lo cumple

$$\begin{tikzcd}
(q/v,od_0) \arrow[rr, "{(d_0,1_{od_0})}"] \arrow[dd, "{(d_1,z\nu\cdot\chi d_0)}"'] & & (P,o) \arrow[dd, "{(q,\chi)}"'] \arrow[ddddl, bend left=60, "{(m,\iota)}"] & \\
& \overset{\nu}{\Longleftarrow} & & \\
(A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[ddr, "{(1_A,\phi')}"'] & & (C,z) \arrow[ddl, "{(f,\sigma)}"] & \\
& \overset{\varepsilon}{\Longleftarrow} & & \overset{\varphi'}{\Longleftarrow} \\
& (A,t) & &
\end{tikzcd}
= \varphi \qquad (4.70)$$

Empecemos probando la igualdad, partamos del lado izquierdo de la igualdad anterior. Utilizando la ecuación inferior de (4.68) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
 & (P,o) \arrow[dr, "{(n,\varsigma)}"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] \arrow[drrr, bend left, "{(1_P,1_o)}"] & & & \\
(q/v,od_0) \arrow[ur, "{(d_0,1_{od_0})}"] \arrow[rr, "{(1_{q/v},1od_0)}"'] & {} & (q/v,od_0) \arrow[rr, "{(d_0,1_{od_0})}"] \arrow[dr, "{(d_1,z\nu\cdot\chi d_0)}"'] & & (P,o) \arrow[dd, "{(m,\iota)}"] \\
 & & & (A,zv) \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] & {} \\
 & & & & (A,t)
\end{tikzcd}$$

Por una de la identidades triangulares de la adjuncón entre $(d_0, 1_{od_0})$ y (n, ς) obtenemos la 2-celda φ. Procedamos a probar la unicidad de φ'. Sea una 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(P,o) \arrow[rr, bend left, "{(m,\iota)}"] \arrow[dr, "{(q,\chi)}"'] \arrow[rr, phantom, "\varrho\Downarrow"] & & (A,t) \\
 & (A,zv) \arrow[ur, "{(f,\sigma)}"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
(q/v,od_0) \arrow[rr, "{(d_0,1_{od_0})}"] \arrow[d, "{(d_1,z\nu\cdot\chi d_0)}"'] & \overset{\nu}{\Longleftarrow} & (P,o) \arrow[d, "{(q,\chi)}"] \arrow[dl, bend left=60, "{(m,\iota)}"] & & \\
(A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] & \overset{\varepsilon}{\Longleftarrow} & (C,z) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] & \overset{\varrho}{\Longleftarrow} & = \varphi \\
 & (A,t) & & &
\end{tikzcd}$$

Precomponiendo la ecuación anterior con la flecha (n,ς) tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
(P,o) \arrow[dr, "(n{,}\varsigma)"] \arrow[drrr, bend left, "(1_P{,}1_o)"] \arrow[dd, "(q{,}\chi)"'] & & & & & \\
& (q/v,od_0) \arrow[rr, "(d_0{,}1_{od_0})"] \arrow[dd] & & (P,o) \arrow[dd, "(q{,}\chi)"'] \arrow[ddddl, bend left, "(m{,}\iota)"] & & \\
(C,z) \arrow[dr, "(f{,}\sigma)"'] & (d_1,z\nu\cdot\chi d_0) & \overset{\nu}{\Longleftarrow} & & & \\
& (A,zv) \arrow[rr, "(v{,}1_{zv})"] \arrow[ddr, "(1_A{,}\phi')"'] & & (C,z) \arrow[ddl, "(f{,}\sigma)"] & & = \varphi' \\
& & \overset{\varepsilon}{\Longleftarrow} & & \overset{\varrho}{\Longleftarrow} & \\
& & (A,t) & & &
\end{tikzcd}$$

Utilizando la igualdad (4.69) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
(C,z) \arrow[dd, "(f{,}\sigma)"'] \arrow[ddrr, "(1_C{,}1_z)"] & & (P,o) \arrow[ll, "(q{,}\chi)"'] \arrow[dd, "(q{,}\chi)"] \arrow[ddddl, bend left, "(m{,}\iota)"] & & \\
& \overset{\eta}{\Longleftarrow} & & & \\
(A,zv) \arrow[rr, "(v{,}1_{zv})"] \arrow[ddr, "(1_A{,}\phi')"'] & & (C,z) \arrow[ddl, "(f{,}\sigma)"] & & = \varphi' \\
& \overset{\varepsilon}{\Longleftarrow} & & \overset{\varrho}{\Longleftarrow} & \\
& (A,t) & & &
\end{tikzcd}$$

Por una de la identidades triangulares de la adjunción entre $(v,1_{zv})$ y (f,σ) obtenemos la 2-celda ϱ. Por lo que ϱ y φ' son iguales. Por lo tanto φ' es única.

Falta demostrar que el diagrama (4.63) respeta cualquier diagonal localmente ortogonal de ϕ'. Antes hay que observar un par de cosas. Dado que v tiene adjunto izquierdo por el dual de la Proposición (2.7) entonces el morfismo ∂_1 tiene adjunto izquierdo $h : V \to A$ con unidad la identidad y counidad β

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "1_V"] \arrow[dr, "h"'] & {} \arrow[d, phantom, "1\Downarrow"] & V & & V \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, "\beta\Downarrow"] & \\
& A \arrow[ur, "\partial_1"'] & & A \arrow[ur, "\partial_1"] \arrow[rr, "1_A"'] & {} & A
\end{tikzcd}$$

Como ∂_1 tiene adjunto izquierdo y la 2-celda 1_t es un isomorfismo, por la Proposición (4.4), la flecha $(\partial_1, 1_t)$ tiene adjunto izquierdo $(h, 1_x) : (V,x) \to (A,t)$ donde la unidad y counidad de la adjunción son la misma unidad y counidad de la adjunción $h \dashv \partial_1$. Sea (ρ, g, τ) una diagonal localmente ortogonal de la 2-celda ϕ'

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}" near start] & C \arrow[d, "z"] \arrow[dl, "g"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\tau}{\Longleftarrow}" near end, shift left=4] & = & A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi'}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "z"] \\
A \arrow[r, "t"'] & X & & A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

Veamos que esta diagonal es respetada por el diagrama (4.63). Para esto consideremos una flecha $(1_C, \gamma) : (C, p) \to (C, z)$ y una 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(1_C, pd'_0) \arrow[r, "(d'_0, 1_{pd'_0})"] \arrow[d, "(d'_1, z\omega \cdot \gamma d'_0)"'] & (C, p) \arrow[dd, "(r, \theta)"] \\
(A, zv) \arrow[d, "(1_A, \phi')"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"] & \\
(A, t) \arrow[r, "(\partial_1, 1_t)"'] & (V, x)
\end{tikzcd}$$

Definimos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
 & (1_C/v, pd'_0) \arrow[r, "(d'_0, 1_{pd'_0})"] \arrow[d, "(d'_1, z\omega \cdot \gamma d'_0)"'] & (C, p) \arrow[dd, "(r, \theta)"] \\
\psi' := & (A, zv) \arrow[d, "(1_A, \phi')"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"] & \\
 & (A, t) \arrow[r, "(\partial_1, 1_t)"'] \arrow[dr, "(1_A, 1_t)"'] & (V, x) \arrow[d, "(h, 1_x)"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}", shift right=6] \\
 & & (A, t)
\end{tikzcd}$$

Como (ρ, g, τ) es una diagonal localmente ortogonal de ϕ', existe una única

2-celda

$$\begin{tikzcd}
 & (V,x) \arrow[dr, "{(h,1_x)}"] \arrow[dd, phantom, "\delta' \Downarrow"] & \\
(C,p) \arrow[ur, "{(r,\theta)}"] \arrow[dr, "{(1_C,\gamma)}"'] & & (A,t) \\
 & (C,z) \arrow[ur, "{(g,\tau)}"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
(1_C/v, pd'_0) \arrow[rr, "{(d'_0,1_{pd'_0})}"] \arrow[d, "{(d'_1,z\omega\cdot\gamma d'_0)}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] & (C,p) \arrow[d, "{(1_C,\gamma)}"] \arrow[rr, bend left, "{(r,\theta)}"] & & (V,x) \arrow[dlll, bend left, "{(h,1_x)}"] & = \psi' \\
(A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & (C,z) \arrow[dl, "{(g,\tau)}"] & \overset{\delta'}{\Longleftarrow} & & \\
 & (A,t) & & & &
\end{tikzcd} \tag{4.71}$$

Definimos la 2-celda $\delta := (\partial_1, 1_t)\delta'$. Veamos que cumple la siguiente igualdad y es la única 2-celda que la cumple.

$$\begin{tikzcd}
(1_C/v, pd'_0) \arrow[rr, "{(d'_0,1_{pd'_0})}"] \arrow[d, "{(d'_1,z\omega\cdot\gamma d'_0)}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] & (C,p) \arrow[d, "{(1_C,\gamma)}"] \arrow[dddl, bend left=60, "{(r,\theta)}"] & & = \psi \\
(A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & (C,z) \arrow[dl, "{(g,\tau)}"] & \overset{\delta}{\Longleftarrow} & \\
 & (A,t) \arrow[d, "{(\partial_1,1_t)}"'] & & & \\
 & (V,x) & & &
\end{tikzcd} \tag{4.72}$$

Comencemos probando la igualdad. Partamos con el lado izquierdo de la igualdad anterior, por la definicón de δ obtenemos

$$\begin{tikzcd}
(1_C/v, pd'_0) \arrow[rr, "{(d'_0,1_{pd'_0})}"] \arrow[d, "{(d'_1,z\omega\cdot\gamma d'_0)}"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] & & (C,p) \arrow[d, "{(1_C,\gamma)}"] \arrow[dr, bend left, "{(r,\theta)}"] & \\
(A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & (C,z) \arrow[dl, "{(g,\tau)}"] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"] & (V,x) \arrow[dll, "{(h,1_x)}"] \arrow[ddll, bend left, "1"] \\
& (A,t) \arrow[d, "{(\partial_1,1_t)}"'] & & \\
& (V,x) & &
\end{tikzcd}$$

Utilizando la ecuación (4.71) tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
(1_C/v, pd'_0) \arrow[rr, "{(d'_0,1_{pd'_0})}"] \arrow[d, "{(d'_1,z\omega\cdot\gamma d'_0)}"'] & & (C,p) \arrow[dd, "{(r,\theta)}"] & \\
(A,zv) \arrow[d, "{(1_A,\phi')}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\psi}{\Longleftarrow}"] & & & \\
(A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"'] \arrow[drr, "{(1_A,1_t)}"'] \arrow[drr, phantom, shift left=3, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & & (V,x) \arrow[d, "{(h,1_x)}"] \arrow[dr, "1"] & \\
& & (A,t) \arrow[r, "{(\partial_1,1_t)}"'] & (V,x)
\end{tikzcd}$$

Utilizando una de las identidades triangulares de la adjunción $(h, 1_x) \dashv (\partial_1, 1_t)$, obtenemos ψ. Esto prueba la igualdad (4.72). Procedamos a probar la unicidad de δ. Sea una 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(C,p) \arrow[rrr, bend left, "{(r,\theta)}"] \arrow[dr, "{(1_C,\gamma)}"'] \arrow[rrr, phantom, "\pi\Downarrow"] & & & (V,x) \\
& (C,z) \arrow[r, "{(g,\tau)}"'] & (A,t) \arrow[ur, "{(\partial_1,1_t)}"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
(1_C/v, pd_0') \arrow[rr, "(d_0',1_{pd_0'})"] \arrow[d, "(d_1', z\omega\cdot\gamma d_0')"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] & (C,p) \arrow[d, "(1_C,\gamma)"] \arrow[dddl, bend left=60, "(r,\theta)"] \\
(A,zv) \arrow[rr, "(v,1_{zv})"] \arrow[dr, "(1_A,\phi')"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & (C,z) \arrow[dl, "(g,\tau)"] \arrow[r, phantom, "\overset{\pi}{\Longleftarrow}"] & {} \\
& (A,t) \arrow[d, "(\partial_1,1_t)"'] & \\
& (V,x) &
\end{tikzcd} \qquad = \ \psi$$

A la ecuación anteriror la componemos con la 2-celda β, para obtener

$$\begin{tikzcd}
(1_C/v, pd_0') \arrow[rr, "(d_0',1_{pd_0'})"] \arrow[d, "(d_1', z\omega\cdot\gamma d_0')"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] & (C,p) \arrow[d, "(1_C,\gamma)"] \arrow[dddl, bend left=60, "(r,\theta)"] \\
(A,zv) \arrow[rr, "(v,1_{zv})"] \arrow[dr, "(1_A,\phi')"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & (C,z) \arrow[dl, "(g,\tau)"] \arrow[r, phantom, "\overset{\pi}{\Longleftarrow}"] & {} \\
& (A,t) \arrow[d, "(\partial_1,1_t)"] \arrow[dl, "1"'] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & \\
(A,t) & (V,x) \arrow[l, "(h,1_x)"] &
\end{tikzcd} \qquad = \ \psi'$$

Por la unicidad δ' tenemos que

$$\delta' \ = \ \begin{tikzcd}
(C,p) \arrow[rrr, bend left, "(r,\theta)"] \arrow[dr, "(1_C,\gamma)"'] & & \pi\Downarrow & (V,x) \arrow[dd, "(h,1_x)"] \\
& (C,z) \arrow[r, "(g,\tau)"'] & (A,t) \arrow[ur, "(\partial_1,1_t)"] \arrow[dr, "1"'] & \overset{\beta}{\Longleftarrow} \\
& & & (A,t)
\end{tikzcd}$$

Componemos la igualdad anterior con la flecha $(\partial_1, 1_t)$ para obtener

$$\delta \;=\; \begin{tikzcd}
(C,p) \arrow[rrr, bend left, "{(r,\theta)}"] \arrow[dr, "{(1_C,\gamma)}"'] \arrow[rr, phantom, "\pi\Downarrow"] & & & (V,x) \arrow[d, "{(h,1_x)}"] \arrow[dr, "1"] & \\
& (C,z) \arrow[r, "{(g,\tau)}"'] & (A,t) \arrow[ur, "{(\partial_1,1_t)}"] \arrow[dr, "1"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & & \\
& & & (A,t) \arrow[r, "{(\partial_1,1_t)}"'] & (V,x)
\end{tikzcd}$$

Por una de las identidades triangulares de la adjunción $(h, 1_x) \dashv (\partial_1, 1_t)$ tenemos que $\delta = \pi$. Por lo tanto δ es única. Por lo que el diagrama (4.63) respeta cualquier diagonal localmente ortogonal de ϕ'.

3) $\Rightarrow$ 1): Por hipótesis el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & (C,z) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] \\
& (A,t) &
\end{tikzcd}$$

en $\mathcal{K}||$X tiene la propiedad de escisión de idempotentes y la cual es débilmente $\mathcal{R}_v$-respetada por (4.63) en cada flecha de la forma $(1_Y, \beta)$. Dado que ρ es una 2-celda en $\mathcal{K}||$X cumple lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left=50, "1_A"] \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "zv"'] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "z"] \arrow[u, phantom, "\overset{\rho}{\Nearrow}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"'] & A \arrow[dl, "t"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dr, "zv"'] & \overset{\phi'}{\Rightarrow} & A \arrow[dl, "t"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\tag{4.73}$$

Ahora utilizando una de las propiedades del objeto co-coma V a la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "1_A"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & C \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

existe una única flecha $f' : V \to A$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Leftarrow}"] & A \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
C \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[drr, bend right, "1_A"'] & V \arrow[dr, "f'"] & \\
& & A
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "1_A"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & C \arrow[dl, "f"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\tag{4.74}$$

Notemos que las siguientes 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & V \arrow[d, "x"] \\
V \arrow[r, "tf'"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_t}{\Leftarrow}"] & V \arrow[d, "x"] \\
V \arrow[r, "tf'"'] & X
\end{tikzcd}$$

cumplen la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "x"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\sigma"] & C \arrow[l, "\partial_0"'] \arrow[dl, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu"] & A \arrow[l, "v"'] \arrow[dl, "1_A"] \\
X & V \arrow[l, "tf'"] & A \arrow[l, "\partial_1"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
X & V \arrow[l, "x"'] & C \arrow[l, "\partial_0"'] & \\
& V \arrow[ul, "tf'"] \arrow[u, phantom, "1_t\Downarrow"] & A \arrow[l, "\partial_1"] \arrow[ul, "\partial_1"'] \arrow[u, phantom, "\mu\Downarrow"] & A \arrow[l, "1_A"] \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

Está igualdad es clara pues el lado derecho es igual a ϕ' por la ecuación (4.26) y el lado izquierdo es igual a ϕ' por la ecuación (4.73). Por una de las propiedades del objeto co-coma V, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\sigma'\Downarrow"] & X \\
& A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial_0"] & V \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\sigma'\Downarrow"] & X \\
& & A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}
= \sigma
\tag{4.75}$$

y

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] & V \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[phantom, "\sigma'\Downarrow"] & X & = 1_t \\
 & & A \arrow[ur, "t"'] & &
\end{tikzcd} \tag{4.76}$$

Por la ecuación (4.76) podemos dar la siguiente 2-celda en $\mathcal{K}||$X

$$\begin{tikzcd}
(A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"] \arrow[dr, "{(1_A,1_t)}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{1_A}{\Longleftarrow}"] & (V,x) \arrow[dl, "{(f',\sigma')}"] \\
 & (A,t) &
\end{tikzcd} \tag{4.77}$$

Por la ecuación (4.74) podemos notar que se cumple lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
(A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[d, "{(1_A,\phi')}"'] & \overset{\mu}{\Longleftarrow} & (C,z) \arrow[d, "{(\partial_0,1_z)}"] & & & & \\
(A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"] \arrow[dr, "{(1_A,1_t)}"'] & \overset{1_A}{\Longleftarrow} & (V,x) \arrow[dl, "{(f',\sigma')}"] & = & (A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] & \overset{\rho}{\Longleftarrow} & (C,z) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] \\
 & (A,t) & & & & (A,t) &
\end{tikzcd} \tag{4.78}$$

Probemos que la 2-celda (4.77) tiene la propiedad de escisión de idempotentes. Consideremos la siguiente 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(V,x) \arrow[rr, bend left, "{(f',\sigma')}"] \arrow[rr, bend right, "{(f',\sigma')}"'] & \delta\Downarrow & (A,t)
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
(A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"] \arrow[dr, "{(1_A,1_t)}"'] & \overset{1_A}{\Longleftarrow} & (V,x) \arrow[dl, "{(f',\sigma')}"] \arrow[dl, bend left=80, "{(f',\sigma')}"] & = & (A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"] \arrow[dr, "{(1_A,1_t)}"'] & \overset{1_A}{\Longleftarrow} & (V,x) \arrow[dl, "{(f',\sigma')}"] \\
 & (A,t) & \overset{\delta}{\Longleftarrow} & & & (A,t) &
\end{tikzcd} \tag{4.79}$$

Definimos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
\delta' \; = \; (C,z) \arrow[r, "{(\partial_0,1_z)}"] & (V,x) \arrow[r, bend left, "{(f',\sigma')}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "{(f',\sigma')}"'{name=D}] & (A,t) \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

Notemos que δ' cumple la siguiente igualdad por las ecuaciones (4.79) y (4.78)

$$\begin{tikzcd}
(A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & (C,z) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"'] \arrow[dl, bend left=70, "{(f,\sigma)}"] \arrow[dl, phantom, shift left=3ex, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"] \\
& (A,t) &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
(A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & & (C,z) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] \\
& (A,t) &
\end{tikzcd} \tag{4.80}$$

Como ρ tiene la propiedad de escisión de idempotentes, existen $(s,\xi):(C,z)\to(A,t)$, $\alpha:(f,\sigma)\Rightarrow(s,\xi)$ y $\gamma:(s,\xi)\to(f,\sigma)$ tales que

$$\begin{tikzcd}
(C,z) \arrow[d, bend right=50, "{(f,\sigma)}"'] \arrow[d, bend left=50, "{(f,\sigma)}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\delta'}{\Longleftarrow}"] \\
(A,t)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
(C,z) \arrow[d, bend right=60, "{(f,\sigma)}"'] \arrow[d, "{(s,\xi)}"'] \arrow[d, bend left=60, "{(f,\sigma)}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] \\
(A,t)
\end{tikzcd} \tag{4.81}$$

y

$$1_{(s,\xi)} \; = \;
\begin{tikzcd}[column sep=large]
(C,z) \arrow[d, bend right=60, "{(s,\xi)}"'] \arrow[d, "{(f,\sigma)}"'] \arrow[d, bend left=60, "{(s,\xi)}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] \\
(A,t)
\end{tikzcd} \tag{4.82}$$

Observemos que las 2-celdas α y γ por estar en $\mathcal{K}||$X cumplen lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f"'{name=F}] \arrow[rr, bend left=60, "s"{name=S}] \arrow[dr, "z"'] & & A \arrow[dl, "t"] \arrow[Rightarrow, from=F, to=S, "\alpha"] \\
& X \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "z"'] & & A \arrow[dl, "t"] \\
& X \arrow[u, phantom, "\overset{\xi}{\Longrightarrow}"] &
\end{tikzcd} \tag{4.83}$$

y

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\gamma}{\Nearrow}"] & \\
C \arrow[rr, bend left=60, "f"] \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "z"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\xi}{\Rightarrow}"] & A \arrow[dl, "t"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "z"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & A \arrow[dl, "t"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
\tag{4.84}$$

Utilizando una de las propiedades del objeto co-coma V en la siguiente 2-celda

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "1_A"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dl, bend left=60, "s"] \arrow[dl, phantom, bend left=30, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Existe una única flecha $s' : V \to A$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Leftarrow}"] & A \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[ddr, bend left, "s"] & \\
C \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[drr, bend right, "1_A"'] & V \arrow[dr, "s'"] & \\
 & & A
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "1_A"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dl, bend left=60, "s"] \arrow[dl, phantom, bend left=30, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
\tag{4.85}$$

Notemos que las siguientes 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"] & V \arrow[d, "x"] \\
V \arrow[r, "ts'"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_t}{\Leftarrow}"] & V \arrow[d, "x"] \\
V \arrow[r, "ts'"'] & X
\end{tikzcd}$$

cumplen la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "x"'] & & C \arrow[ll, "\partial_0"'] \arrow[dl, "\partial_0"] & & A \arrow[ll, "v"'] \arrow[dl, "1_A"] \\
X & & V \arrow[ll, "ts'"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\xi"] & & A \arrow[ll, "\partial_1"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\mu"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
X & & V \arrow[ll, "x"'] & & C \arrow[ll, "\partial_0"'] & \\
 & V \arrow[ul, "ts'"] \arrow[u, phantom, "1_t\Downarrow"] & & A \arrow[ll, "\partial_1"] \arrow[ul, "\partial_1"'] \arrow[u, phantom, "\mu\Downarrow"] & & A \arrow[ll, "1_A"] \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}
\tag{4.86}$$

El lado derecho es igual a ϕ' por la ecuación (4.26). Utilizando en el lado izquierdo la ecuación (4.85) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[rd, "1_A"'] \arrow[rd, phantom, shift left=3ex, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "f"'] \arrow[d, bend left=50, "s"] \arrow[d, phantom, shift left=1ex, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] \arrow[rd, bend left, "z"] \arrow[rd, phantom, shift left=1ex, "\overset{\xi}{\Longleftarrow}"] & \\
 & A \arrow[r, bend right, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

Por la igualdad (4.84) tenemos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[rd, "1_A"'] \arrow[rd, phantom, shift left=3ex, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "f"'] \arrow[rd, "z"] \arrow[rd, phantom, shift right=3ex, "\overset{\sigma}{\Longleftarrow}"] & \\
 & A \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

Utilizando la ecuación (4.73) obtenemos ϕ' con lo cual queda probada la igualdad (4.86). Por una de las propiedades del objeto co-coma V, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[rd, "s'"'] & {\scriptstyle \xi'\Downarrow} & X \\
 & A \arrow[ru, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial_0"] & V \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[rd, "s'"'] & {\scriptstyle \xi'\Downarrow} & X \\
 & & A \arrow[ru, "t"'] &
\end{tikzcd} = \xi \tag{4.87}$$

y

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] & V \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[rd, "s'"'] & {\scriptstyle \xi'\Downarrow} & X \\
 & & A \arrow[ru, "t"'] &
\end{tikzcd} = 1_t \tag{4.88}$$

Con lo anterior podemos ver que la flecha $(s', \xi') : (V, x) \to (A, t)$ está en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Procedamos a hacer algo parecido con las 2-celdas α y γ. Notemos que las siguientes 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{\gamma}{\Longleftarrow}"] & V \arrow[d, "s'"] \\
V \arrow[r, "f'"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[rd, phantom, "\overset{1_A}{\Longleftarrow}"] & V \arrow[d, "s'"] \\
V \arrow[r, "f'"'] & A
\end{tikzcd}$$

cumplen la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "s'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma"] & & C \arrow[ll, "\partial_0"'] \arrow[dl, "\partial_0"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu"] & & A \arrow[ll, "v"'] \arrow[dl, "1_A"] & \arrow[d, phantom, "="] & A & & V \arrow[ll, "s'"'] \arrow[d, phantom, "1_A\Downarrow"] & & C \arrow[ll, "\partial_0"'] \arrow[d, phantom, "\mu\Downarrow"] & \\
A & & V \arrow[ll, "f'"] & & A \arrow[ll, "\partial_1"] & & & & V \arrow[ul, "f'"] & & A \arrow[ll, "\partial_1"] \arrow[ul, "\partial_1"'] & & A \arrow[ll, "1_A"] \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

La igualdad es clara, pues el lado derecho es igual al pegado de ρ con γ por la igualdad (4.85) y el lado izquierdo es igual a al mismo pegado pues $f'\partial_0 = f$. Por una de las propiedades del objeto co-coma V, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, bend left, "s'"{name=U}] \arrow[r, bend right, "f'"'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\gamma'"'] & A
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial_0"] & V \arrow[r, bend left, "s'"{name=U}] \arrow[r, bend right, "f'"'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\gamma'"'] & A
\end{tikzcd} \quad = \quad \gamma \tag{4.89}$$

y

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] & V \arrow[r, bend left, "s'"{name=U}] \arrow[r, bend right, "f'"'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\gamma'"'] & A
\end{tikzcd} \quad = \quad 1_A \tag{4.90}$$

De igual manera, notemos que las siguientes 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] & V \arrow[d, "f'"] \\
V \arrow[r, "s'"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_A}{\Leftarrow}"] & V \arrow[d, "f'"] \\
V \arrow[r, "s'"'] & A
\end{tikzcd}$$

cumplen la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & C \arrow[l, "\partial_0"'] \arrow[d, "\partial_0"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mu"] & A \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "1_A"] \\
A & V \arrow[l, "s'"] & A \arrow[l, "\partial_1"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, phantom, "1_A\Downarrow"] & V \arrow[l, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\mu\Downarrow"] & C \arrow[l, "\partial_0"'] \\
V \arrow[u, "s'"] & A \arrow[l, "\partial_1"] \arrow[u, "\partial_1"] & A \arrow[l, "1_A"] \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd} \tag{4.91}$$

El lado derecho de la igualdad anterior es igual a ρ por la ecuación (4.74). El lado izquierdo, por la ecuación (4.85) es igual a

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & C \arrow[d, "f"'] \arrow[d, bend left=40, "s"] \arrow[d, bend left=90, "f"] \arrow[d, phantom, shift left=3, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift left=8, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Utilizando las ecuaciones (4.80) y (4.81) obtenemos que es igual a ρ. Con lo cual queda probada la igualdad (4.91). Por una de las propiedades del objeto co-coma V, existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, bend right, "s'"'] \arrow[r, phantom, "\alpha'\Downarrow"] & A
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial_0"] & V \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, bend right, "s'"'] \arrow[r, phantom, "\alpha'\Downarrow"] & A
\end{tikzcd} = \alpha \tag{4.92}$$

y

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] & V \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, bend right, "s'"'] \arrow[r, phantom, "\alpha'\Downarrow"] & A
\end{tikzcd} = 1_A \tag{4.93}$$

Nuestros candidatos para escindir el idempotente δ son las 2-celdas α' y γ', pero necesitamos ver que estas 2-celdas están en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Por lo que procedemos a ver que estas 2-celdas están en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$, para lo cual α' y γ' deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f'"] \arrow[rr, bend left=60, "s'"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\overset{\alpha'}{\Nearrow}"] \arrow[ddr, "x"'] & & A \arrow[ddl, "t"] \\
& \overset{\sigma'}{\Longrightarrow} & \\
& X &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "s'"] \arrow[ddr, "x"'] & & A \arrow[ddl, "t"] \\
& \overset{\xi'}{\Longrightarrow} & \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{4.94}$$

y

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "s'"] \arrow[rr, bend left=60, "f'"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\overset{\gamma'}{\Nearrow}"] \arrow[ddr, "x"'] & & A \arrow[ddl, "t"] \\
& \overset{\xi'}{\Longrightarrow} & \\
& X &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f'"] \arrow[ddr, "x"'] & & A \arrow[ddl, "t"] \\
& \overset{\sigma'}{\Longrightarrow} & \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{4.95}$$

Al precomponer el lado izquierdo de la ecuación (4.94) con la flecha ∂_0 obtenemos el pegado de las 2-celdas σ y α por las igualdades (4.92) y (4.75), por la ecuación (4.83) es igual a ξ; claramente el lado derecho de la igualdad (4.94) al precomponerlo con ∂_0 es igual a ξ por la ecuación (4.87).

Observemos que al precomponer el lado izquierdo de la ecuación (4.94) con ∂_1 obtenemos la 2-celda 1_t por las ecuaciones (4.93) y (4.76); al precomponer el lado derecho de la misma igualdad con ∂_1 tenemos que es igual a 1_t por la igualdad (4.88). Por la unicidad de ξ' tenemos la igualdad (4.94).

Probemos la segunda igualdad. Al precomponer con la flecha ∂_0 el lado izquierdo de la ecuación (4.95) obtenemos el pegado de las 2-celdas ξ y γ por las ecuaciones (4.89) y (4.87), por la igualdad (4.84) es igual a σ; claramente el lado derecho de la ecuación (4.95) al precomponerlo con ∂_0 es igual a ξ por la ecuación (4.87).

Observemos que al precomponer el lado izquierdo de la ecuación (4.95) con ∂_1 obtenemos la 2-celda 1_t por las ecuaciones (4.90) y (4.88); al precomponer el lado derecho de la misma igualdad con ∂_1 tenemos que es igual a 1_t por la igualdad (4.76). Por la unicidad de σ' tenemos la igualdad (4.95).

Por lo tanto α' y γ' son 2-celdas en $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Probemos que α' y γ' cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{tikzcd}
(V,x) \arrow[d, bend right=60, "{(f',\sigma')}"'] \arrow[d, bend left=60, "{(f',\sigma')}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\delta}{\Longleftarrow}"] \\
(A,t)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
(V,x) \arrow[d, "{(s',\xi')}"'] \arrow[d, bend right=70, "{(f',\sigma')}"'] \arrow[d, bend left=70, "{(f',\sigma')}"] \arrow[d, phantom, bend right=35, "\overset{\gamma'}{\Longleftarrow}"] \arrow[d, phantom, bend left=35, "\overset{\alpha'}{\Longleftarrow}"] \\
(A,t)
\end{tikzcd} \tag{4.96}$$

y

$$1_{(s',\xi')} = \begin{tikzcd}[row sep=huge] (V,x) \arrow[d, bend right=70, "(s',\xi')"', ""{name=L}] \arrow[d, "(f',\sigma')"{description}, ""{name=M}] \arrow[d, bend left=70, "(s',\xi')", ""{name=R}] \\ (A,t) \arrow[Rightarrow, from=M, to=L, shorten=2mm, "\alpha'"'] \arrow[Rightarrow, from=R, to=M, shorten=2mm, "\gamma'"'] \end{tikzcd} \tag{4.97}$$

Para esto notemos que las siguientes 2-celdas

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\delta'}{\Leftarrow}"] & V \arrow[d, "f'"] \\ V \arrow[r, "f'"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_A}{\Leftarrow}"] & V \arrow[d, "f'"] \\ V \arrow[r, "f'"'] & A \end{tikzcd}$$

cumplen la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "f'"'] & \Downarrow\delta' & C \arrow[ll, "\partial_0"'] \arrow[dl, "\partial_0"] & \Downarrow\mu & A \arrow[ll, "v"'] \arrow[dl, "1_A"] \\ A & & V \arrow[ll, "f'"] & & A \arrow[ll, "\partial_1"] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A & & V \arrow[ll, "f'"'] & & C \arrow[ll, "\partial_0"'] & \\ & V \arrow[ul, "f'"] & 1_A\Downarrow & A \arrow[ll, "\partial_1"] \arrow[ul, "\partial_1"] & \mu\Downarrow & A \arrow[ll, "1_A"] \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

El lado derecho de la igualdad anterior es claro que es igual a ρ por la ecuación (4.74); el lado izquierdo es igual a al pegado de ρ con δ' y por la igualdad (4.80) es igual a ρ. Con lo cual queda probada la igualdad anterior. Por una de las propiedades del objeto co-coma V existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left=40, "f'", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=40, "f'"', ""{name=D}] & A \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial_0"] & V \arrow[r, bend left=40, "f'", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=40, "f'"', ""{name=D}] & A \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\nu"'] \end{tikzcd} = \delta' \tag{4.98}$$

y

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\partial_1"] & V \arrow[r, bend left, "f'"{name=U}] \arrow[r, bend right, "f'"'{name=D}] & A \arrow[from=U, to=D, phantom, "\upsilon\Downarrow"] \end{tikzcd} = 1_A \tag{4.99}$$

También observemos que las siguientes 2-celdas

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_s}{\Leftarrow}"] & V \arrow[d, "s'"] \\ V \arrow[r, "s'"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_A}{\Leftarrow}"] & V \arrow[d, "s'"] \\ V \arrow[r, "s'"'] & A \end{tikzcd}$$

cumplen la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow 1_s"] & & C \arrow[ll, "\partial_0"'] \arrow[dl, "\partial_0"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mu"] & & A \arrow[ll, "\upsilon"'] \arrow[dl, "1_A"] & = & A & & V \arrow[ll, "s'"'] & & C \arrow[ll, "\partial_0"'] & \\ A & & V \arrow[ll, "s'"] & & A \arrow[ll, "\partial_1"] & & & & V \arrow[ul, "s'"] \arrow[ur, phantom, "1_A\Downarrow"] & & A \arrow[ll, "\partial_1"] \arrow[ul, "\partial_1"] \arrow[ur, phantom, "\mu\Downarrow"] & & A \arrow[ll, "1_A"] \arrow[ul, "\upsilon"'] \end{tikzcd}$$

Esta igualdad es clara pues ambos lados son iguales al pegado de ρ con γ por la ecuación (4.85). Con lo cual queda probada la igualdad anterior. Por una de las propiedades del objeto co-coma V existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "s'"{name=U}] \arrow[r, bend right, "s'"'{name=D}] & A \arrow[from=U, to=D, phantom, "\iota\Downarrow"] \end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial_0"] & V \arrow[r, bend left, "s'"{name=U}] \arrow[r, bend right, "s'"'{name=D}] & A \arrow[from=U, to=D, phantom, "\iota\Downarrow"] \end{tikzcd} = 1_s \tag{4.100}$$

y

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\partial_1"] & V \arrow[r, bend left, "s'"{name=U}] \arrow[r, bend right, "s'"'{name=D}] & A \arrow[from=U, to=D, phantom, "\iota\Downarrow"] \end{tikzcd} = 1_A \tag{4.101}$$

Procedamos a probar las igualdades (4.96) y (4.97). Notemos que al precomponer con ∂_0 el lado derecho de la ecuación (4.96) obtenemos el pegado de α y γ por las ecuaciones (4.92) y (4.89) y este pegado es igual a δ' por la igualdad (4.81); al preocomponer el lado izquierdo de la ecuación (4.96) con ∂_0 obtenemos δ', esto por definición.

Observemos que al precomponer el lado izquierdo de la ecuación (4.96) con ∂_1 obtenemos la 2-celda 1_A por la ecuación (4.79); al precomponer el lado derecho de la misma igualdad con ∂_1 tenemos que es igual a 1_A por las igualdades (4.93) y (4.90). Por la unicidad de υ tenemos la igualdad (4.96).

Notemos que al precomponer con ∂_0 el lado derecho de la ecuación (4.97) obtenemos el pegado de γ y α por las ecuaciones (4.92) y (4.89) y este pegado es igual a 1_s por la igualdad (4.82); al preocomponer el lado izquierdo de la ecuación (4.97) con ∂_0 obtenemos 1_s por las ecuaciones (4.85) y (4.87).

Observemos que al precomponer el lado izquierdo de la ecuación (4.97) con ∂_1 obtenemos la 2-celda 1_A por las ecuaciones (4.85) y (4.88); al precomponer el lado derecho de la misma igualdad con ∂_1 tenemos que es igual a 1_A por las igualdades (4.93) y (4.90). Por la unicidad de ι tenemos la igualdad (4.97).

Por lo tanto tenemos que el diagrama (4.77) tiene la propiedad de escisión de idempotentes. Veamos que el diagrama (4.77) es débilmente respetado por $(\partial_1, 1_t)$. Utilizando que ρ es débilmente respetado por la flecha $(\partial_1, 1_t)$ en la siguiente 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(A, z\upsilon) \arrow[r, "(\upsilon{,}1_{z\upsilon})"] \arrow[d, "(1_A{,}\phi')"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longleftarrow}"] & (C, z) \arrow[d, "(\partial_0{,}1_z)"] \\
(A, t) \arrow[r, "(\partial_1{,}1_t)"] & (V, x)
\end{tikzcd}$$

existe una 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(C, z) \arrow[rr, bend left, "(\partial_0{,}1_z)"] \arrow[dr, "(f{,}\sigma)"'] & \tau' \Downarrow & (V, x) \\
& (A, t) \arrow[ur, "(\partial_1{,}1_t)"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
(A,zv) \arrow[rr, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[dr, "{(1_A,\phi')}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & (C,z) \arrow[dl, "{(f,\sigma)}"] \arrow[ddl, bend left, "{(\partial_0,1_z)}"] \\
 & (A,t) \arrow[d, "{(\partial_1,1_t)}"'] & \overset{\tau'}{\Longleftarrow} \\
 & (V,x) &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
(A,zv) \arrow[r, "{(v,1_{zv})}"] \arrow[d, "{(1_A,\phi')}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu}{\Longleftarrow}"] & (C,z) \arrow[d, "{(\partial_0,1_z)}"] \\
(A.t) \arrow[r, "{(\partial_1,1_t)}"'] & (V,x)
\end{tikzcd}
\tag{4.102}$$

Notemos que al pertenecer a $\mathcal{K}||\mathrm{X}$ la 2-celda τ' cumple la siguiente condición

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\partial_0"] \arrow[dr, "f"'] & {} \arrow[d, phantom, "\tau'\Downarrow"] & V \arrow[r, "x"] & X \\
 & A \arrow[ur, "\partial_1"'] \arrow[urr, bend right, "t"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "z"] \arrow[dr, "f"'] & {} \arrow[d, phantom, "\sigma\Downarrow"] & X \\
 & A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}
\tag{4.103}$$

Procedemos a hacer con la 2-celda τ' lo mismo que con las 2-celdas α, γ y ξ. Para esto notemos que las siguientes 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\tau'}{\Longleftarrow}"] & V \arrow[d, "1_V"] \\
V \arrow[r, "\partial_1 f'"'] & V
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_{\partial_1}}{\Longleftarrow}"] & V \arrow[d, "1_V"] \\
V \arrow[r, "\partial_1 f'"'] & V
\end{tikzcd}$$

cumplen la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "1_V"'] & C \arrow[l, "\partial_0"'] \arrow[dl, "\partial_0"] & A \arrow[l, "v"'] \arrow[dl, "1_A"] \\
V & V \arrow[l, "\partial_1 f'"] & A \arrow[l, "\partial_1"] &
\arrow[from=1-2, to=2-2, phantom, "\Downarrow\tau'"]
\arrow[from=1-3, to=2-3, phantom, "\Downarrow\mu"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
V & V \arrow[l, "1_V"'] & C \arrow[l, "\partial_0"'] & \\
 & V \arrow[ul, "\partial_1 f'"] & A \arrow[l, "\partial_1"] \arrow[ul, "\partial_1"'] & A \arrow[l, "1_A"] \arrow[ul, "v"']
\arrow[from=1-2, to=2-2, phantom, "1_{\partial_1}\Downarrow"]
\arrow[from=1-3, to=2-3, phantom, "\mu\Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

El lado derecho de la igualdad anterior es claro que es igual a μ; el lado izquierdo es igual al pegado de ρ con τ, por la igualdad (4.74) y por la igualdad (4.102) es igual a μ. Con lo cual queda probada la igualdad anterior. Por una de las propiedades del objeto co-coma V existe una única 2-celda

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "1_V"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\tau\Downarrow"] & V \\
& A \arrow[ur, "\partial_1"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial_0"] & V \arrow[rr, "1_V"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\tau\Downarrow"] & V \\
& & A \arrow[ur, "\partial_1"'] &
\end{tikzcd} = \tau' \tag{4.104}$$

y

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] & V \arrow[rr, "1_V"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\tau\Downarrow"] & V \\
& & A \arrow[ur, "\partial_1"'] &
\end{tikzcd} = 1_{\partial_1} \tag{4.105}$$

Veamos que la 2-celda τ pertenece a $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Para esto es necesario probar la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "1_V"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\tau\Downarrow"] & V \arrow[r, "x"] & X \\
& A \arrow[ur, "\partial_1"'] \arrow[urr, bend right, "t"'] & &
\end{tikzcd} = \begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "x"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\sigma'\Downarrow"] & X \\
& A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.106}$$

Notemos que al precomponer con la flecha ∂_0 el lado izquierdo de la ecucación (4.106), obtenemos la 2-celda σ por las igualdades (4.104) y (4.103); al precomponer el lado derecho de la ecuación (4.106) con ∂_0 obtenemos σ por la igualdad (4.75).

Observemos que al precomponer el lado izquierdo de la ecuación (4.106) con ∂_1 obtenemos la 2-celda 1_t esto por la igualdad (4.105); al precomponer el lado derecho de la misma igualdad con ∂_1 tenemos que es igual a 1_t por al igualdad (4.76). Por la unicidad de σ' tenemos que la igualdad (4.106).

Por lo tanto la 2-celda τ pertenece a $\mathcal{K}||\mathrm{X}$. Ahora notemos que la siguiente 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(A,t) \arrow[rr, "(\partial_1{,}1_t)"] \arrow[dr, "(1_A{,}1_t)"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{1_A}{\Leftarrow}"] & (V,x) \arrow[dl, "(f'{,}\sigma')"] \\
& (A,t) &
\end{tikzcd} \tag{4.107}$$

es respetada débilmente por la flecha $(\partial_1, 1_t)$. Para esto consideremos la flecha $(r, \theta) : (V, x) \to (V, x)$ y la siguiente 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"] \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] & (V,x) \arrow[dl, "{(r,\theta)}"] \\
& (V,x) &
\end{tikzcd}$$

Definimos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
& & (V,x) \arrow[dl, "{(f',\sigma')}"'] \arrow[dr, "{(1_V,1_x)}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Longleftarrow}"] & \\
\varsigma \; := & (A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"] \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] & (V,x) \arrow[dl, "{(r,\theta)}"] \\
& & (V,x) &
\end{tikzcd}$$

Veamos que cumple la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
(A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"] \arrow[dr, "{(1_A,1_t)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{1_A}{\Longleftarrow}"] & (V,x) \arrow[dl, "{(f',\sigma')}"] \arrow[ddl, bend left=40, "{(r,\theta)}"] & & (A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"] \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] & (V,x) \arrow[dl, "{(r,\theta)}"] \\
& (A,t) \arrow[d, "{(\partial_1,1_t)}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\varsigma}{\Longleftarrow}"] & {} & = & & (V,x) & \\
& (V,x) & & & & &
\end{tikzcd} \tag{4.108}$$

Por la definición de ς, el lado izquierdo de la ecuación (4.108) es igual al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"] \arrow[dr, "{(1_A,1_t)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{1_A}{\Longleftarrow}"] & (V,x) \arrow[dl, "{(f',\sigma')}"] \arrow[dr, "{(1_V,1_x)}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Longleftarrow}"] & \\
& (A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\omega}{\Longleftarrow}"] & (V,x) \arrow[dl, "{(r,\theta)}"] \\
& & (V,x) &
\end{tikzcd}$$

el cual a su vez es igual al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"] & & (V,x) \arrow[dl, "{(f',\sigma')}"'] \arrow[dr, "{(1_V,1_x)}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] & \\
& (A,t) \arrow[rr, "{(\partial_1,1_t)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_1,1_t)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\omega}{\Leftarrow}"] & (V,x) \arrow[dl, "{(r,\theta)}"] \\
& & (V,x) &
\end{tikzcd}$$

Utilizando la ecuación (4.105) tenemos que es igual a ω. Con lo cual queda probada la ecuación (4.108). Por lo tanto la 2-celda (4.107) es respetada débilmente por la flecha $(\partial_1, 1_t)$. Por la Observación (3.28) entonces la flecha $(\partial_1, 1_t)$ tiene adjunto izquierdo $(h, \varrho) : (V, x) \to (A, t)$. Utilizando la equivalencia dual entre 1) y 4) del Teorema 3.26 obtenemos que 1_A tiene una extensión derecha absoluta a lo largo de v

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "1_A"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Leftarrow}"] & C \arrow[dl, "c"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Utilizando el dual de la Proposición 3.27 tenemos que $c \dashv v$, por lo tanto v tiene adjunto izquierdo.

4) $\Rightarrow$ 1): Por hipótesis, existe una diagonal (ρ, f, σ) del diagrama (4.24) y es respetada muy débilmente por el diagrama (4.63). Como se esta asumiendo que se escinden los idempotentes en $\mathcal{K}(C, A)$, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "1_A"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] & C \arrow[dl, "f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

tiene la propiedad de escisión de idempotentes. Consideremos las siguientes 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_v}{\Rightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \\
C \arrow[r, "1_C"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "z"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Leftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

observemos que cumplen la siguiente igualdad por la ecuación (4.25)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_v}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "u"] & = & A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi'}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "z"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\zeta}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[d, "s"] \\
C \arrow[r, "1_C"'] & C \arrow[r, "s"'] & Z & & A \arrow[r, "t"'] & X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Dado que (ρ, f, σ) es respetado muy débilmente por el diagrama (4.63), existe una 2-celda

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "1_C"'] & \overset{\tau}{\Longrightarrow} & A \arrow[dl, "v"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "1_A"] & & & & \\
& \overset{\rho}{\Longrightarrow} & & & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{1_v}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "v"] \\
C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "1_C"'] & & A \arrow[dl, "v"] & = & C \arrow[r, "1_C"'] & C \\
& \overset{\tau}{\Longrightarrow} & & & & \\
& C & & & &
\end{tikzcd} \tag{4.109}$$

Veamos ahora que ρ es respetado débilmente por v. Para esto consideremos la flecha $r : C \to C$ y la siguiente 2-celda

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v"'] & \overset{\alpha}{\Longleftarrow} & C \arrow[dl, "r"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Definimos la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "1_C"] & \\
& & \overset{\tau}{\Longleftarrow} & \\
\varsigma \ := & A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v"'] & & C \arrow[dl, "r"] \\
& & \overset{\alpha}{\Longleftarrow} & \\
& & C &
\end{tikzcd}$$

Veamos que cumple la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "1_A"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[dl, "f"] \arrow[ddl, bend left, "r"] \\
& A \arrow[d, "v"'] & \overset{\varsigma}{\Longleftarrow} \\
& C &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[dl, "r"] \\
& C &
\end{tikzcd}
\tag{4.110}$$

Por la definición de ς, el lado izquierdo de la ecuación (4.110) es igual al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "1_A"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "1_C"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Longleftarrow}"] & \\
& A \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Longleftarrow}"] & C \arrow[dl, "r"] \\
& & C &
\end{tikzcd}$$

Utilizando la ecuación (4.109) tenemos que es igual a α, por lo que ρ es respetado débilmente por v. Por el Observación (3.28) obtenemos que v tiene adjunto izquierdo.

□

Bibliografía

[1] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Second Edition, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York,1998.

[2] M. Makkai, R. Paré. *Accessible categories: The foundations of categorical model theory.* Contemporary Mathematics, 1989.

[3] W. Tholen. Semi-topological functors I. *Journal of Pure and Applied Algebra* **15**, (1979) 53-73.

[4] R. Street, W. Tholen, M. Wischnewsky, H. Wolff. Semi-topological functors III: Lifting of monads and adjoint functors. *Journal of Pure and Applied Algebra* **16**, (1980) 299-314.

[5] R. Street. Fibrations and Yoneda's lemma in a 2-category. *Lecture Notes in Math.* 420 (Springer, Berlin, 1974) 104-133.

[6] R. Street, R. Walters. Yoneda structures on 2-categories. *Journal of Algebra* **50** (1978) 350-379.

[7] W. Tholen. Note on total categories. *Bull. Austral. Math. Soc.* **21** (1980) 169-173.

[8] R. Rosebrugh, R.J. Wood. An adjoint characterization of the category of sets. *Proc. American Math. Soc.* **122** (2) (1994) 409-413.

[9] F. Marmolejo, R. Rosebrugh, R.J. Wood. Completely and totally distributive categories I. *Journal of Pure and Applied Algebra* **216** (2012) 1775-1790.

[10] G.M. Kelly, R. Street. Review of the elements of 2-categories. *Sydney Category Seminar, Lecture notes in Mathematics, Vol.* **420**, Springer, Berlin, 1974, pp. 75-103.