



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

LA TEORÍA DE LAS CONSTRICCIONES DE DIRAC APLICADA A MODELOS
HOLOMORFOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
CARLOS ALBERTO MARGALLI VÁZQUEZ

TUTOR PRINCIPAL:
DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBRO COMITÉ TUTOR:
PABLO FABIÁN VELÁZQUEZ BRITO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBRO COMITÉ TUTOR:
DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD
INSTITUTO DE FÍSICA

MÉXICO, D. F. OCTUBRE 2015.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

La Teoría de las Constricciones de Dirac
Aplicada a Modelos Holomorfos

*Dedicado a
mi familia y mis amigos*

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Lista de figuras | V |
| Agradecimientos | IX |
| Introducción | 1 |
| 1. Modelo de Pais-Uhlenbeck | 9 |
| 1.1. Lagrangiano de Pais-Uhlenbeck | 9 |
| 1.2. Formulación Hamiltoniana y cuantización | 13 |
| 2. Las Condiciones de Realidad | 17 |
| 2.1. Ejemplo del Uso de las Condiciones de Realidad | 17 |
| 2.2. Medida de la Teoría Cuántica | 18 |
| 3. Integral de Fresnel | 21 |
| 4. Transformación General Compleja | 25 |
| 4.1. Oscilador Armónico | 30 |
| 4.2. Sistemas Relacionados al Oscilador Armónico | 33 |
| 4.3. Reparametrización de la Extensión Compleja para un Potencial Arbitrario | 36 |
| 4.4. Oscilador Complejo Desplazado una Cantidad Imaginaria | 37 |
| 4.5. Integral de Camino y Oscilador Complejo Desplazado | 39 |
| 4.6. Potencial Imaginario Cúbico | 40 |
| 4.7. Condición de Norma y los Momentos en Una Dimensión | 49 |
| 4.8. Formalismo BFV en el modelo | 53 |
| 4.9. Integral de Camino y Condiciones de Norma | 57 |
| 5. Generalización para más Dimensiones | 59 |
| 5.1. Extensión a Más Dimensiones | 59 |
| 5.2. Problema Central de Kepler y Oscilador Armónico | 63 |
| 5.3. Condición General de Norma para Dos Dimensiones | 65 |

| | |
|---|------------|
| 6. Teoría de Orden Superior Compleja | 71 |
| 6.1. Modelo de Pais-Uhlenbeck Complejo | 72 |
| 6.2. Transformación de Norma | 78 |
| 6.3. Fuentes Complejas | 78 |
| 6.4. Integral de Camino | 81 |
| 7. Campos de Primer Orden | 85 |
| 7.1. Modelo Sigma No-Lineal | 85 |
| 7.2. Método aplicado al Campo Electromagnético | 88 |
| 8. Campos para el Modelo de Bernard-Duncan | 95 |
| 8.1. Estructura para el Campo Complejo | 95 |
| 8.2. Fuentes Complejas de los Campos | 102 |
| 8.3. Método para Establecer Interacciones | 103 |
| 8.4. Integral de Camino para Fuentes Complejas | 105 |
| 9. Constricciones de Segunda Clase y modelo de B-D | 109 |
| 9.0.1. El principio variacional de Schwinger | 110 |
| 9.1. Ecuaciones de Hamilton y Ecuaciones de Cauchy-Riemann | 112 |
| 9.2. Condiciones de Realidad en el modelo | 116 |
| 9.2.1. Interpretación de las Condiciones de Realidad | 119 |
| 9.3. Los Potenciales de Interacción | 120 |
| 9.3.1. Criterios de Selección de los Potenciales de Interacción | 121 |
| 10. Método Aproximado en el Modelo de P-U | 125 |
| 10.0.2. Manejo de los Potenciales de Interacción en el Modelo de Bernard-Duncan | 125 |
| 10.0.3. Método Aproximado para Masas Distintas No Nulas | 126 |
| 11. Modelo de FLRW y TOS | 129 |
| 11.0.4. Acción de Friedmann Lemaître Robertson Walker y Derivada Temporal de Orden Superior | 129 |
| 11.0.5. Teoría Clásica Hamiltoniana de Wheeler De Witt | 134 |
| Conclusiones | 137 |
| Bibliografía | 147 |

ÍNDICE GENERAL

V

contenidos

Índice de figuras

| | |
|---|-----|
| 1.1. Sistema de dos masas m_1 y m_2 acopladas por medio de dos resortes con k_1 y k_2 | 10 |
| 3.1. Curva cerrada elegida adecuadamente. | 22 |
| 4.1. Gáfica del espacio fase a orden ϵ^2 con $\epsilon=0.1$ | 44 |
| 4.2. Gáfica del espacio fase del Hamiltoniano dado en la ecuación (4.173) a orden ϵ^2 con $\epsilon=0.1$ | 47 |
| 4.3. La línea verde y la línea rosa representan la trayectoria clásica. La línea roja y azul es la trayectoria de la corrección cuántica agregando las correcciones de (4.174). | 48 |
| 4.4. La línea azul y la línea roja representan la trayectoria clásica hecha con nuestro método. La línea rosa y verde es la trayectoria resultante de la teoría de Bender basada en la simetría PT. | 48 |
| 4.5. Espacio fase para el Hamiltoniano (4.214). | 53 |
| 11.1. Momento canónico de orden superior contra ϕ con $k=0$ para el modelo Wheeler de Witt contemplando términos de derivada total. | 135 |
| 11.2. Momento canónico de orden superior contra ϕ para $k=1$ | 136 |
| 11.3. Momento canónico de orden superior contra ϕ fuera del origen. | 136 |

Agradecimientos

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento al Dr. José David Vergara; ya que como tutor principal fue un gran apoyo académico y emocional. Gracias por facilitar y contribuir a la realización de este trabajo. También es importante mencionar el aporte de la Dra. Rocío Jáuregui Renaud y del Dr. Pablo Fabián Velázquez Brito; la asesoría prestada y la correspondiente evaluación fueron importantes durante la realización de este trabajo.

De una importancia significativa es para mí el apoyo de mis familiares y amigos. En especial el apoyo de mi madre y mi hermano, además de personas que han resultado significativas en el transcurso de la realización de este trabajo. Gracias al Dr. Jesús Guzmán Hernández; su amistad y su apoyo emocional fueron de gran ayuda. Gracias al Dr. Francisco González Montoya; su aporte, amistad y discusión en física son gratamente valorados.

No menos importante es para mí el apoyo de Cecilia Cárdenas Dávalos y su familia; su amistad ha sido un pilar en momentos difíciles. Gracias a Sor Lourdes Turueño quien fue un gran apoyo y me brindó una gran amistad.

Gracias a la familia y amigos que no pude mencionar aquí, porque si lo hiciera probablemente no acabaría, pero los tengo presentes como parte de este trabajo.

Es también preciso mencionar el apoyo dado por parte del CONACyT con el proyecto 237503, también el aporte de los proyectos PAPIIT IN109013 y IN103716.

Gracias por la contribución académica y la discusión proporcionada por el Dr. Hugo Morales Técotl, el Dr. Román Linares Romero, el Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero, el Dr. Merced Montesinos Velásquez, el Dr. Juan Manuel Romero Sanpedro y el Dr. Hernando Quevedo Cubillos.

Me gustaría concluir agradeciendo a Dios por la belleza de esta existencia y por permitirme ser parte de su obra.

Introducción

Es un problema muy común de la física en general tratar de encontrar relaciones entre diversos sistemas. Y si uno quiere dificultar más el problema, encontrar la relación entre diversos sistemas físicos inmersos en la mecánica cuántica resulta ser aún más complicado. En este trabajo nos enfocamos precisamente en este tema y desarrollamos un método por medio del cual podemos establecer relaciones o mapéos entre sistemas muy diferentes. Dentro de la mecánica clásica la herramienta que realiza este tipo de cambios entre sistemas es la transformación canónica. Esta herramienta es muy útil a nivel clásico [1] y también lo es a nivel cuántico [2, 3]. Sin embargo, para este caso quedan reducidas a transformaciones canónicas lineales.

En este trabajo proponemos una extensión de las transformaciones canónicas, tanto a nivel clásico como cuántico. Esta extensión consiste en realizar una complejificación, es decir extendemos al plano complejo el Lagrangiano real manteniendo el potencial holomorfo y de allí realizar un análisis descomponiendo las variables complejas en parte real y parte imaginaria para hacer un estudio completo de la estructura compleja resultante. Posteriormente realizamos el análisis Hamiltoniano de la teoría haciendo uso de la teoría de las constricciones de Dirac [4], ya que debido a la estructura compleja del Lagrangiano holomorfo siempre encontraremos una restricción primaria para los momentos. Siguiendo la teoría de Dirac debemos encontrar la naturaleza de la restricción primaria resultante que dada la estructura misma de los números complejos resulta ser una restricción de primera clase. Lo anterior implica que debemos agregar condiciones de norma para manejar esta libertad [5]. Es aquí donde históricamente no se ha trabajado con mucho detalle las opciones que se tienen a la hora de fijar la norma, ya que siempre se suele escoger la opción trivial de eliminar la parte imaginaria por medio de elegir la condición de Hermiticidad.

En este trabajo consideramos a la condición de Hermiticidad como una específica condición de norma y tomamos más en serio la estructura compleja con la restricción de primera clase. La esencia básica de nuestro procedimiento radica en que la condición de norma sobre la restricción complexificada de los momentos nos permite una gran arbitrariedad en la definición de nuestras observables y esto a su vez permite definir diferentes mapéos entre sistemas físicos. El método más conocido propuesto por Heisenberg y basado en la condición de Hermiticidad postula a las variables del espacio fase como operadores Hermíticos expresados en una representación determinada. Entre los postulados

de la mecánica cuántica usual están:

- Todo estado cuántico es normalizable.
- Las observables deben ser cantidades Hermíticas.
- Los conmutadores son obtenidos de los paréntesis de Poisson.
- La evolución temporal de un sistema es dada por la ecuación de Schrödinger.

Estos postulados son la base de la teoría cuántica, pero en la investigación contemporánea se ha planteado la exclusión de algunos de ellos.

Ejemplos del tipo de sistemas que no cumplen con todos los postulados de la mecánica cuántica usual son: Los modelos no Hermíticos [6], el modelo de Pais-Uhlenbeck [7], teorías no conmutativas, etc. Un caso muy importante y que tiene gran problemática si se desea hacer una cuantización aceptable y que concentra la atención actual, es la cuantización de la gravedad [8].

Por otro lado, ya que estamos pensando en ser flexibles con respecto a los axiomas es de utilidad plantear modelos que no sean Hermíticos de forma tal que sea posible comparar con teorías cuánticas que son basadas en algún tipo de simetría general [9].

Es instructivo para un mayor entendimiento comenzar de un ejemplo concreto que sea lo bastante general y que describa nuestra manera de proceder. Consideremos un Lagrangiano real que dependa de un potencial real arbitrario dependiente de la posición y con el que podemos obtener su respectivo Hamiltoniano a partir del cual podemos construir su correspondiente teoría cuántica. Ilustrar la construcción de una teoría cuántica partiendo de un Hamiltoniano real es fácil: Primero debemos postular a la posición y al momento como operadores en un espacio que en general es complejo, los cuales deben cumplir con ser operadores Hermíticos para después aplicar el operador Hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger y buscar las funciones de onda normalizables que resuelvan esta ecuación.

Por otro lado, con respecto a nuestro método aplicado a este ejemplo la manera de proceder es la siguiente: Proponemos la complexificación del Lagrangiano real para este caso, a continuación dividimos al Lagrangiano en parte real y parte imaginaria para posteriormente obtener los momentos tanto de la componente real como de la imaginaria. Notamos que los momentos de las componentes no son independientes, lo cual resulta en la aparición de una restricción primaria. Con lo anterior y con la teoría de Dirac de las constricciones [4, 10] podemos construir el Hamiltoniano complejo relacionado. A partir del Hamiltoniano total podemos mostrar que la restricción primaria es de primera clase. Lo anterior hace necesario fijar la norma por medio de una condición de norma.

En la condición de norma encontraremos diversas condiciones: La condición de Hermiticidad, las condiciones de realidad [11], la cuantización basada en simetría $\mathcal{P}\text{-}\mathcal{T}$ [9], etc.

En algunas ocasiones la cuantización esta demasiado arraigada a la elección de la condición de norma y se debe pensar específicamente en que lugar incluir a ésta. Tal es el caso de realizar una cuantización a partir de hacer una transformada de Fourier en las posiciones y los momentos. Con esto se quiere decir que los operadores de creación y aniquilación con una condición modificada se usan en lugar de las posiciones y los momentos que no necesariamente son Hermíticos. Dicho de otra manera la condición de norma se debe de cumplir en la transformada de Fourier para una función que cumple una determinada condición, la que podría ya no ser totalmente real. También es bien conocido que los operadores de creación y aniquilación son en general cantidades complejas descritas como funciones holomorfas que al cuantizar ya no son operadores hermíticos.

Con respecto a la cuantización usando los operadores de creación y aniquilación podemos fijar la norma por medio de elegir una condición específica antes de aplicar la transformada. Dicho de otra manera antes de realizar la transformada de Fourier nuestras variables complejas cumplen la nueva condición de norma. Aquí también suponemos que las posiciones y los momentos son operadores, no necesariamente Hermíticos, pero logramos Hermiticidad con otras condiciones resultando que no hay una única condición de norma con la que logremos Hermiticidad. Con esto queremos decir que hay una infinidad de condiciones que nos pueden llevar de un espacio complejo a un espacio real notando la naturaleza del espacio fase resultante, ya que dada la estructura de cualquier función compleja holomorfa, según las ecuaciones de Cauchy-Riemann y partiendo del punto de vista dinámico, se puede obtener un sistema con constricciones primarias de primera clase [4, 10] estudiado por Dirac.

En este punto encontramos que la interpretación juega un papel muy importante: Dada la extensión del sistema al plano complejo se piensa en las condiciones de norma que fijamos, ya que en general son transformaciones pertenecientes al plano complejo. Se puede pensar que se estan pasando de un modelo no-Hermítico a un modelo Hermítico a través de una transformación compleja o se puede pensar que se está pasando de un modelo Hermítico a otro Hermítico usando una transformación compleja. En cuyo caso si el modelo de partida es Hermítico puede que no cumpla con todas las condiciones óptimas de cuantización usual por lo que será conveniente manejarlo como no-Hermítico [9].

Ya estableciendo el método lo siguiente es aplicarlo a ejemplos concretos no Hermíticos. Es aquí donde consideramos a las teorías con derivadas temporales de orden superior, ya que aunque es muy simple proponer Hermiticidad la propuesta inicial tendrá muchos problemas los cuales la hacen chocar con otros postulados fundamentales para la mecánica cuántica. Las teorías con derivada temporal de orden superior a lo largo del tiempo han resultado ser muy atractivas para diversas ramas de la física. Una descripción Hamiltoniana planteada por Ostrogradsky [12] resultó ser útil, pero nada trivial de interpretar, dado el orden superior de las variables, y poco conocida para la mecánica clásica.

Con el auge y el éxito de la mecánica cuántica, la cual es una teoría que describe de manera fiable a la naturaleza, y con el desarrollo de la teoría cuántica

de campos en años recientes se ha planteado la posibilidad de retomar el orden superior en los Lagrangianos, además de incluir su Hamiltoniano de orden superior interpretado de forma adecuada.

Una de las aplicaciones de las teorías de orden superior la encontramos en la cuantización de la gravedad específicamente en las teorías $F(R)$ que incluyen términos de orden superior capaces de renormalizar estas teorías [8, 13]. Otros ejemplos que también debemos mencionar son las teorías no conmutativas [14], las teorías cosmológicas sin singularidad [15] y las teorías de campos de cuerdas [16, 17]. Desde un punto de vista clásico estas teorías no representan un problema, ya que aún es posible realizar una descripción de orden superior que sea compatible con la mecánica Lagrangiana. Esto último tiene su origen en la teoría básica de las ecuaciones diferenciales donde se demuestra que siempre es posible reducir el orden de la ecuación diferencial introduciendo variables auxiliares.

La cuantización de estas teorías resulta ser muy compleja. Sin embargo, algunos avances al respecto ya se han logrado para las teorías de orden superior libres [7, 18]. Un caso muy diferente resulta si se incluyen términos de interacción [18], ya que esta situación es un tema abierto y altamente ambiguo.

El formalismo de las teorías con derivadas temporales de orden superior, en el espacio real, hasta el momento es incompatible con el mundo de la mecánica cuántica, ya que aún no se ha podido establecer la forma correcta de cuantizar estas teorías. Lo anterior se debe a las propiedades que aparecen en la estructura simpléctica y que son heredadas en la nueva teoría cuántica [17]. Una de las propiedades es el signo negativo de uno de los paréntesis de Poisson, lo cual genera un conmutador con signo negativo, ya que al promover posiciones y momentos a operadores encontraremos problemas en la teoría que se pueden resumir en:

- Estados con norma negativa.
- Pérdida del estado base.
- Matriz de dispersión no unitaria.

Estas propiedades no permiten establecer una teoría cuántica de campos consistente. Con la finalidad de confrontar estas complicaciones se acostumbra a plantear un método perturbativo, o aproximado, que en ocasiones suele descartar grados de libertad [17, 19] además de estar limitados a ciertas escala de energía.

No obstante esta pérdida, es posible plantearse si los dogmas establecidos de la mecánica cuántica son válidos en cualquier circunstancia y para cualquier modelo.

Entre las opciones que se han establecido para abordar este problema encontramos modificar el producto interno de la mecánica cuántica a uno que sea invariante bajo la simetría $-\mathcal{PT}$ [9]. Sin embargo, la formulación de una realización como ésta resulta no ser única, además de que aún no se establece la manera de proceder cuando se agregan interacciones al sistema.

Lo anterior nos dice que la formulación de Ostrogradsky Hamiltoniana no es trivial y debe ser manejada con cuidado, si se desea realizar una traducción

a la formulación Hamiltoniana de primer orden. formulación Hamiltoniana de orden resultando confuso, si Como un ejemplo inicial concreto está el modelo de Pais-Uhlenbeck [7] el cual establece que no existe una transformación canónica del Hamiltoniano de Pais-Uhlenbeck a un Hamiltoniano real de primer orden que permita introducir potenciales de interacción estables y consistentes.

Para iniciar nuestro estudio debemos partir de un ejemplo concreto que incluya las aberraciones antes mencionadas. El modelo de Pais-Uhlenbeck real resulta ser un buen punto de partida.

El método aquí descrito nos permite afrontar este tipo de problemas que se nos presentan en la cuantización. Dado que el método se basa en la extensión al plano complejo y debido a que encontramos constricciones de primera clase tenemos como consecuencia una amplia gama de posibilidades para establecer una infinidad de condiciones diferentes a la condición de Hermiticidad inicial, de hecho la gama es tan amplia como las condiciones de norma existentes. Lo anterior es válido para teorías que de partida son no-Hermiticas. Sin embargo, también podemos empezar de una teoría Hermítica, ya que la extensión también es válida, sí podemos encontrar la condición de norma que nos lleve al modelo real asociado para después relacionarlo con otro modelo real que no tenga inconsistencias en su formulación cuántica a través de una transformación de norma compleja. El formalismo de las teorías con derivada temporal de orden superior se puede traducir al formalismo usual de primer orden, pero esto resulta ser muy complicado. Es necesario notar que con esta forma de ver las cosas se hace algo similar a lo planteado por Bender. Primero se plantean teorías no-Hermiticas [9], por medio de la simetría $\mathcal{P}\text{-}\mathcal{T}$, y luego a estos sistemas no-Hermiticos se les encuentran sistemas Hermíticos relacionados [6].

La extensión al plano complejo de variables no es un tema nuevo y puede ser ampliamente explotado. Es la base de nuestro trabajo ya que aquí se esta pensando en establecer relaciones entre diferentes sistemas reales por medio de la extensión compleja. Una de las características que es ampliamente explotada es la integral en un espacio complejo, ya que dado que la extensión compleja es holomorfa tendremos que se cumple el teorema de Morera y todas las integrales sobre superficies cerradas son cero por lo tanto podremos establecer relaciones entre diversos sistemas reales a través de escoger diferentes trayectorias [20]. Esta idea en nuestro caso se ve reflejada en la elección de distintas condiciones de norma que fijan las condiciones de primera clase existentes en nuestro modelo complejo.

Este trabajo esta organizado de la siguiente forma: En el capítulo 1 se introduce el modelo de Pais-Uhlenbeck el cual sirve como preámbulo para ilustrar los problemas con los que nos podemos encontrar al hacer una cuantización. Se muestra que este modelo se puede mapear, partiendo de una teoría Lagrangiana de dos osciladores armónicos acoplados al Lagrangiano de Pais-Uhlenbeck. Se establece una formulación Hamiltoniana de Pais-Uhlenbeck, por medio del formalismo de Ostrogradsky [12], para este modelo y se plantea la cuantización a partir de los operadores de creación y aniquilación exhibiendo las complicaciones inherentes a las teorías con derivada temporal de orden superior y las aberraciones que es posible encontrar en estos sistemas. Después en el capítulo

2 se presenta la idea de las condiciones de realidad y se establece un producto interno con una determinada medida para establecer una teoría cuántica. Es aquí donde en el capítulo 3 hacemos una extensión al plano complejo y la tomamos como motivación. Encontramos la integral de Fresnel por medio de manipular adecuadamente la trayectoria cerrada de la parametrización dividiéndola en tres trayectorias y usando el teorema de Morera dado en variable compleja. Mostramos que eligiendo las trayectorias adecuadamente podemos llegar a un resultado definido en el espacio real. Lo anterior sirve de introducción para la idea general de nuestro trabajo que es un caso particular de la idea general de Witten [20]. En el capítulo 4 describimos la idea general del método aquí expuesto. Vemos las consecuencias de éste y las transformaciones que genera la constrictión de primera clase, además fijamos normas concretas muy generales y aplicamos la idea a un oscilador armónico complejo con dos condiciones de norma, de las cuales una nos lleva al oscilador armónico real. Con una condición de norma general encontramos que el oscilador armónico se relaciona con otros sistemas como son: el sistema asociado al potencial de Coulomb y otro sistema asociado a la invariancia conforme, además de que se estudia la reparametrización de la extensión al plano complejo en la que se incluye un potencial arbitrario. Por otro lado también se toma como ejemplo a la complexificación de un oscilador armónico desplazado por una pequeña cantidad lineal imaginaria cuyo modelo cuantizamos por medio de la integral de camino. A partir de estos ejemplos establecemos las condiciones para la cuantización de la complexificación del oscilador armónico con una perturbación cúbica, en este caso usamos un desarrollo perturbativo para lograr la cuantización y comparar con el método desarrollado por Bender [9]. Sin embargo con todo el formalismo desarrollado en este trabajo no podemos garantizar que la teoría cuántica resultante sea correcta a cualquier orden. En el apartado siguiente introducimos una condición de norma proporcional a los momentos y vemos como cambia la métrica para el Lagrangiano reducido. En la parte final de la sección probamos el teorema de Franklin-Vilkovisky para nuestra extensión al plano complejo del oscilador armónico y se calcula la integral de camino para el oscilador armónico complejo o la extensión compleja del oscilador armónico. Con la descripción hecha en una dimensión podemos hacer una generalización y establecer estas ideas para más dimensiones. Ésto es lo que hacemos en el capítulo 5, primero con la extensión general a más variables y luego con el mapéo de dos osciladores armónicos al problema central de Kepler. Por otro lado en este capítulo también consideramos incluir momentos en las condiciones de norma con la finalidad de generar una métrica no lineal que dependa de las velocidades en el Lagrangiano reducido. Y establecido lo anterior en el capítulo 6 aplicamos todo el conocimiento acumulado para el modelo de Pais-Uhlenbeck. Aquí hacemos una extensión al plano complejo del modelo de Pais-Uhlenbeck, se analiza detenidamente la estructura compleja, se aplica el método aquí descrito para el modelo de Pais-Uhlenbeck, en las ecuaciones de Hamilton y la estructura que forman con las ecuaciones de Cauchy Riemann, se introducen constrictiones primarias y se establecen constrictiones que reducen la teoría compleja a una real con el afán de hacer una cuantización para posteriormente establecer los potenciales de interacción. Con

estos últimos agregamos fuentes que permiten explorar otro tipo de cuantización por medio de la integral de camino. En el capítulo 7 extendemos las ideas desarrolladas en el capítulo 4 para sistemas mecánicos, al caso de campos y mostramos que mediante una condición de norma adecuada es posible mapear el sistema de campos escalares a un modelo sigma no-lineal. Partiendo de estas ideas es posible aplicar la extensión compleja a la densidad Lagrangiana electromagnética. Partiendo de la norma de Coulomb y con la norma de modelos sigma no-lineales obtenemos un modelo sigma no-lineal para el campo vectorial asociado a la densidad Lagrangiana electromagnética. Después, en el capítulo 8 aplicamos nuestras ideas al modelo de orden superior de Bernard-Duncan. Aquí es expuesta la teoría de Bernard-Duncan usando campos de orden superior. Estos campos permitirán mapear de una teoría compleja a una teoría real por medio de las constricciones de primera clase a las que debemos fijar la norma por medio de las condiciones de realidad correspondientes. Se establece de una manera más formal la teoría compleja con el modelo de Bernard-Duncan y las ecuaciones de Hamilton, para introducir las constricciones del sistema extendido y se da una interpretación a las condiciones de realidad. Además se establece un criterio para elegir los potenciales de interacción y se incluyen las fuentes con su estructura para establecer la cuantización por medio de la integral de camino. Con el fin de agotar toda la estructura en el capítulo 9 realizamos todo nuestro formalismo sin utilizar las constricciones de Primera clase y usando el método de Schwinger. Simplemente usamos constricciones de segunda clase, de esta manera podremos ver de forma más clara la existencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann y también será posible incluir las interacciones en nuestro modelo. En el capítulo 10 buscamos establecer una relación entre nuestro método y un método aproximado mostrando una posible aplicación más que parte de la extensión al plano complejo. Se establece que hay una relación entre el modelo de Bernard-Duncan y un método perturbativo ya establecido para masas distintas no nulas. En el capítulo 11 se estudia la cosmología de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker considerando la acción con una derivada total que da lugar a una teoría de orden superior la cual resulta ser una teoría equivalente a la usual si se considera la aceleración correspondiente como una variable, además de establecer las condiciones de borde para este problema incluyendo un término de materia con masa cero acoplado minimalmente y con factor de escala $k = -1, 0, 1$. Sin embargo, el Hamiltoniano es distinto desde el punto de vista cuántico ya que se espera evitar estados con norma negativa. Al final se muestra que con estas consideraciones no es posible evitar los problemas cuánticos en el modelo como son las singularidades.

Finalmente, en la última parte se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Modelo de Pais-Uhlenbeck

En este apartado estudiamos la conexión existente entre una descripción hecha por un sistema de ecuaciones de segundo orden resultante de un Lagrangiano de primer orden y la descripción hecha por la ecuación de cuarto orden resultante de este sistema que puede obtenerse de un Lagrangiano de orden superior conocido como Lagrangiano de Pais-Uhlenbeck. Este Lagrangiano es uno de los más simples lo cual nos va a permitir hacer un estudio detallado de estos sistemas.

A partir del Lagrangiano de Pais-Uhlenbeck es posible usar la correspondiente formulación Hamiltoniana desarrollada por Ostrogradsky, definir el respectivo espacio fase e intentar establecer una cuantización a partir de los operadores de creación y aniquilación. Sin embargo, no podremos preservar todos los axiomas de la mecánica cuántica, ya que si conservamos la Hermiticidad de las variables encontraremos inconsistencias que pueden ser afrontadas definiendo adecuadamente los espacios de Hilbert correspondientes, pero ésto no nos permitirá incluir potenciales de interacción estables.

1.1. Lagrangiano de Pais-Uhlenbeck

Las teorías Lagrangianas con derivadas temporales de orden superior tienen una formulación Hamiltoniana que fue desarrollada por Ostrogradsky [12]. Ésta da como resultado las ecuaciones de Hamilton equivalentes a las ecuaciones de Euler Lagrange para este tipo de Lagrangianos.

El Hamiltoniano de Pais-Uhlenbeck se puede reducir al Hamiltoniano de dos osciladores armónicos con signo opuesto, por medio de una transformación no local [7]. Esto último sugiere la existencia de una relación entre la descripción de orden superior, modelo de Pais-Uhlenbeck y la descripción usual de primer orden.

Este resultado lo mostraremos utilizando un sistema de dos masas distintas acopladas por medio de dos resortes con diferente constante de acoplamiento, el cual tiene solución aplicando la estructura Lagrangiana usual para llegar a un

sistema de ecuaciones de segundo orden que describe el movimiento de ambas partículas partiendo del punto de equilibrio de estas.

Consideremos un par de masas m_1 y m_2 acopladas por medio de dos resortes con constantes de acoplamiento k_1 y k_2 . Uno de estos resortes está anclado al techo y tiene longitud l_1 además de tener en el otro extremo a la masa m_1 , mientras que el segundo resorte tiene longitud l_2 anclado a la masa m_1 en un extremo y en el otro extremo tiene una masa m_2 . Todo el sistema está sometido a la fuerza de gravedad g . Utilizando la estructura Lagrangiana usual se llega a

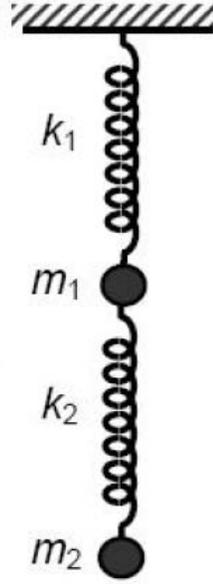


Figura 1.1: Sistema de dos masas m_1 y m_2 acopladas por medio de dos resortes con k_1 y k_2 .

la expresión

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{y}^2 - \frac{k_1}{2}x^2 - \frac{k_2}{2}(y - x)^2, \quad (1.1)$$

en cuyo caso se han tomado las coordenadas desde los puntos de equilibrio.

Es importante mencionar que a partir de aquí podríamos plantear la teoría cuántica de este sistema sin encontrar mayor complicación, pero para facilitar más nuestro trabajo tomaremos en cuenta que existe un mapeo a las correspondientes coordenadas normales.

Las ecuaciones de movimiento son

$$m_1\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + k_2y \quad (1.2)$$

$$m_2\ddot{y} = -k_2(y - x), \quad (1.3)$$

que resolvemos como un sistema de ecuaciones diferenciales proponiendo la solución $(x, y) = e^{i\omega t} \vec{v}_0$ y considerando a la parte real junto con la parte imaginaria como soluciones linealmente independientes, además de \vec{v}_0 un vector constante.

Con la finalidad de no perdernos y concretizar nuestro análisis definimos las variables

$$\alpha = m_1 m_2, \quad \beta = (k_1 + k_2)m_2 + k_2 m_1, \quad \gamma = k_1 k_2, \quad (1.4)$$

que nos permiten obtener los eigenvalores de la matriz asociada al sistema resultando

$$\alpha \omega^4 - \beta \omega^2 + \gamma = 0, \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{\beta \pm (\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}}{2\alpha}. \quad (1.5)$$

Aquí existen varios casos especiales, en particular uno donde ω podría ser imaginaria, por lo que se toma el caso especial de $\omega_{1,2}^2$ positiva. Esto genera cuatro soluciones linealmente independientes con cuatro constantes de integración.

Si ahora escogemos las coordenadas normales que desacoplen al sistema (1.2) obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Notando que (1.6) son generadas por el Lagrangiano

$$L = \frac{\dot{q}_1^2}{2} - \frac{\omega_1^2}{2} q_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{2} - \frac{\omega_2^2}{2} q_2^2, \quad (1.7)$$

la transformación que relaciona ambos conjuntos de variables es

$$\begin{aligned} c_1^2 &= (m_1 + m_2)k_2^2 - 2m_1 m_2 k_2 \omega_1^2 + m_1 m_2^2 \omega_1^4 \\ c_2^2 &= (m_1 + m_2)k_1^2 - 2m_1 m_2 k_1 \omega_2^2 + m_1 m_2^2 \omega_2^4 \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} (k_2 - m_2 \omega_1^2)/c_1 & (k_2 - m_2 \omega_2^2)/c_2 \\ k_2/c_1 & k_2/c_2 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.8)$$

con la determinante de \mathcal{A} distinta de cero si $(\omega_1^2 - \omega_2^2) \neq 0$. Esto último nos indica que existe una transformación coordenada de nuestro sistema acoplado a un sistema coordenado normal siempre y cuando las frecuencias no sean iguales. Si las frecuencias son iguales, lo anterior establece un caso límite que debe ser planteado cuidadosamente, ya que no habrá relación entre la descripción coordenada de modos normales y las coordenadas del sistema acoplado.

Otra forma de abordar el problema es considerar al sistema acoplado de ecuaciones de movimiento y por medio de sustituir la ecuación (1.3) en la ecuación (1.2) obtener una sola ecuación con un orden diferencial mayor resultando

$$m_1 m_2 x^{(4)} + [(k_1 + k_2)m_2 + k_2 m_1] \ddot{x} + k_1 k_2 x = 0. \quad (1.9)$$

Por otro lado consideremos la ecuación (1.5) y dos soluciones ω_1^2 y ω_2^2 a esta ecuación, con $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$. Lo anterior da como resultado las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\alpha\omega_1^4 - \beta\omega_1^2 + \gamma &= 0 \\ \alpha\omega_2^4 - \beta\omega_2^2 + \gamma &= 0,\end{aligned}\tag{1.10}$$

restándole a la primera ecuación la segunda concluimos que:

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{\beta}{\alpha},\tag{1.11}$$

también multiplicando la primera ecuación por ω_2^2 y la segunda por ω_1^2 además de restar ambas se deduce

$$\omega_1^2\omega_2^2 = \frac{\gamma}{\alpha}\tag{1.12}$$

lo que en la ecuación diferencial (1.9) es

$$x^{(4)} + \frac{\beta}{\alpha}\ddot{x} + \frac{\gamma}{\alpha}x = 0, \quad x^{(4)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\ddot{x} + \omega_1^2\omega_2^2x = 0.\tag{1.13}$$

El respectivo Lagrangiano con derivada temporal de orden superior que da lugar a la ecuación anterior es

$$L_{PU} = -\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2}\dot{x}^2 - \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{2}x^2\tag{1.14}$$

conocido como el Lagrangiano de Pais-Uhlenbeck. Escribir la ecuación de cuarto orden de nuestro sistema (1.9) en términos de distintas frecuencias implica que éstas existen lo cual resulta en una relación automática con las coordenadas normales. Sin embargo si las frecuencias son iguales, el polinomio (1.5) tendrá multiplicidad alterando las soluciones de la ecuación diferencial y lo anterior no tendrá validez. El caso especial del Lagrangiano de orden superior (1.14) con frecuencias iguales queda fuera de esta descripción.

Para resolver la ecuación (1.13) uno puede considerar las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0$, $x^{(3)}(0) = x_0^{(3)}$ y obtener la solución general

$$x(t) = a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_1^\dagger e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t} + a_2^\dagger e^{i\omega_2 t},\tag{1.15}$$

donde $a_{1,2}$ son cantidades constantes y es necesario mencionar que la solución $x(t)$ es una cantidad real que parece estar compuesta de dos osciladores armónicos de la forma dada en las ecuaciones (1.6). La solución para este sistema desacoplado es

$$q_1 = A_1 e^{-i\omega_1 t} + A_1^\dagger e^{i\omega_1 t},\tag{1.16}$$

$$q_2 = A_2 e^{-i\omega_2 t} + A_2^\dagger e^{i\omega_2 t}\tag{1.17}$$

y se puede obtener la relación entre ambas constantes por medio de las ecuaciones (1.8).

Lo anterior parece establecer una relación entre esta teoría de orden superior y la teoría de primer orden de dos osciladores. Para poder establecer completamente un mapeo entre el formalismo de orden superior y el formalismo de primer orden es necesario explorar la posibilidad de la existencia de una transformación canónica en el formalismo Hamiltoniano. Lo anterior hace necesario obtener el Hamiltoniano de (1.7) el cual es

$$H_{2OA} = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{\omega_1^2}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{\omega_2^2}{2}q_2^2 \quad (1.18)$$

y como veremos más adelante no existe una transformación canónica real al correspondiente Hamiltoniano de orden superior llamado Hamiltoniano de Pais-Uhlenbeck.

Con el Lagrangiano de Pais-Uhlenbeck ahora es posible definir un espacio fase a partir de la teoría de Ostrogradsky que proveerá la formulación Hamiltoniana.

Es natural pensar que la cuantización de dos osciladores acoplados debería resultar equivalente a la cuantización de un modelo de orden superior, modelo de Pais-Uhlenbeck. El problema fundamental que abordamos en este trabajo es establecer un método que nos permita la cuantización directa de estos modelos, específicamente al modelo de Bernard-Duncan, que es la versión en teoría de campos del modelo de Pais-Uhlenbeck, a partir de la obtención de un Hamiltoniano de orden superior.

En pocas palabras, esta teoría con derivadas temporales de orden superior debería en principio ser cuantizable, ya que este modelo es equivalente clásicamente a una teoría de primer orden. En este trabajo se propone que la única diferencia la encontramos en la codificación de la información establecida por este modelo de orden superior.

1.2. Formulación Hamiltoniana y cuantización

Con la finalidad de señalar los conflictos que encontramos en la respectiva cuantización de estas teorías será necesario construir la formulación Hamiltoniana a partir del método de Ostrogradsky [12].

Para comenzar consideremos una acción dada por un Lagrangiano de segundo orden

$$S = \int dt L(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (1.19)$$

a la cual se le aplica una variación para tener la ecuación de movimiento sin deshacernos de los términos de derivada total, el resultado de la variación es

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right] \delta q \\ & + \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Conservando los términos de derivada total hemos construido el principio variacional de Schwinger y si tomamos en cuenta que la ecuación de movimiento es válida en este intervalo temporal tenemos

$$\delta S = G_{\delta q}(t_1) - G_{\delta q}(t_0) + G_{\delta \dot{q}}(t_1) - G_{\delta \dot{q}}(t_0), \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0, \quad (1.22)$$

$$G_{\delta q}(t) = p_q \delta q, \quad (1.23)$$

$$G_{\delta \dot{q}}(t) = p_{\dot{q}} \delta \dot{q}. \quad (1.24)$$

Lo anterior nos permite definir los momentos para esta teoría de segundo orden

$$p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}, \quad (1.25)$$

$$p_{\dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}. \quad (1.26)$$

Los términos de superficie $G_{\delta q}(t)$ y $G_{\delta \dot{q}}(t)$ que son ignorados en el principio de acción convencional nos permiten obtener la definición de los respectivos momentos.

Por medio de este principio hemos encontrado la estructura simpléctica de la teoría de orden superior y hemos comprobado las definiciones dadas por Ostrogradsky [12], ya que q y \dot{q} se pueden fijar de manera independiente en (1.20). Lo anterior también coincide con los métodos de solución para una ecuación diferencial de alto orden. De esta forma uno puede considerar que el espacio de configuración para la teoría de orden superior esta dado por (q, \dot{q}) .

Partiendo de la acción (1.19) y con el uso del principio variacional de Schwinger (1.20) es posible darle sentido a la teoría de Ostrogradsky y definir el Hamiltoniano de orden superior

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L(x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (1.27)$$

donde se hicieron las identificaciones $x = q, y = \dot{q}$.

La acción Hamiltoniana la definimos mediante la transformada de Legendre

$$S = \int dt [p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - H(x, y, p_x, p_y)] \quad (1.28)$$

tomando en cuenta que $y = \dot{x}$ y nos permite hacer una variación dando como resultado las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Un punto importante a demostrar es que la formulación Hamiltoniana y la formulación Lagrangiana son equivalentes. Las ecuaciones (1.29) se pueden reducir

a la ecuación dada en (1.22) y formalmente se puede demostrar que la correspondiente formulación Hamiltoniana es la dada por Ostrogradsky [25].

Ahora pasamos a describir la formulación Hamiltoniana del modelo de Pais-Uhlenbeck usando el Lagrangiano dado en (1.14). Sus respectivos momentos son

$$p_x = x^{(3)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\dot{x}, \quad p_y = -\ddot{x}. \quad (1.30)$$

Con el Hamiltoniano de Ostrogradsky dado por

$$H_{PU} = p_x y - \frac{p_y^2}{2} - \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} y^2 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2} x^2 \quad (1.31)$$

y las ecuaciones de Hamilton son :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H_{PU}}{\partial p_x} = y & \dot{y} &= \frac{\partial H_{PU}}{\partial p_y} = -p_y \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H_{PU}}{\partial x} = -\omega_1^2 \omega_2^2 x & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H_{PU}}{\partial y} = -p_x + (\omega_1^2 + \omega_2^2)y. \end{aligned} \quad (1.32)$$

A partir de lo anterior ahora es posible realizar la cuantización a partir de promover las variables a operadores que deben ser Hermiticos según la cuantización usual. Para hacer evidentes las propiedades del axioma de Hermiticidad

$$x = x^\dagger, \quad p_x = p_x^\dagger, \quad y = y^\dagger, \quad p_y = p_y^\dagger, \quad (1.33)$$

donde se propone una transformación de Fourier aplicada a la ecuación (1.9) que da origen a los operadores de creación y aniquilación.

Las variables promovidas por medio de los operadores de creación y aniquilación son

$$\begin{aligned} x &= [2\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-\frac{1}{2}}(a_1 + a_1^\dagger) + [2\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-\frac{1}{2}}(a_2 + a_2^\dagger), \\ p_x &= [2\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-\frac{1}{2}}[i\omega_1\omega_2^2(a_1 - a_1^\dagger)] + [2\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-\frac{1}{2}}[i\omega_2\omega_1^2(a_2 - a_2^\dagger)], \\ y &= [2\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-\frac{1}{2}}[i\omega_1(a_1 - a_1^\dagger)] + [2\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-\frac{1}{2}}[i\omega_2(a_2 - a_2^\dagger)], \end{aligned} \quad (1.34)$$

$p_y = [2\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-\frac{1}{2}}[\omega_1^2(a_1 + a_1^\dagger)] + [2\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-\frac{1}{2}}[\omega_2^2(a_2 + a_2^\dagger)]$. El Hamiltoniano resultante es

$$H_{PU} = (\omega_1 a_1^\dagger a_1 - \omega_2 a_2^\dagger a_2) + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad (1.35)$$

con la suposición de que x, p_x y y, p_y cumplen con las reglas de conmutación usuales y tomando $\omega_1 > \omega_2$ se obtiene

$$[a_1, a_1^\dagger] = 1, \quad [a_2, a_2^\dagger] = -1. \quad (1.36)$$

Con nuestra transformación anterior podemos obtener dos posibles realizaciones:

- Si a_1 y a_2 aniquilan al estado de partícula cero $|\Omega\rangle$

$$a_1|\Omega\rangle = 0, \quad a_2|\Omega\rangle = 0, \quad (1.37)$$

el espectro de energía es real y acotado por abajo. El estado $|\Omega\rangle$ es el estado de partícula cero con energía $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. El problema es que el estado excitado

$$|\Psi\rangle = a_2^\dagger|\Omega\rangle \quad (1.38)$$

cuya energía es ω_2 tiene una norma de Dirac negativa dada por

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Omega|a_2a_2^\dagger|\Omega\rangle. \quad (1.39)$$

Para mostrar lo anterior consideremos

$$\langle\Omega|a_2a_2^\dagger|\Omega\rangle = \langle\Omega|(a_2^\dagger a_2 - 1)|\Omega\rangle = -1, \quad (1.40)$$

si $\langle\Omega|\Omega\rangle = 1$.

- Si a_1 y a_2^\dagger aniquilan el estado de partícula cero $|\Omega\rangle$ la teoría es libre de estados con norma negativa, pero esta realización tiene el problema de que el espectro de energía no es acotado por abajo [17].

Lo anterior muestra claramente los problemas que aparecen cuando realizamos la cuantización de las teorías con derivadas temporales de orden superior. Sin embargo de lo anterior vemos que la cuantización de estas teorías Hamiltonianas de alto orden esta estrechamente relacionada con la cuantización del Hamiltoniano de dos osciladores. Lo anterior hace sospechar que el problema esta en establecer un adecuado mapeo entre estas teorías.

En la sección siguiente buscaremos plantear una manera por medio de la cual estableceremos un mapeo que nos permita manejar de una mejor forma el modelo de Pais-Uhlenbeck. Para lograr ésto partiremos de una extensión del Hamiltoniano de orden superior al plano complejo que analizaremos detalladamente y que haremos real por medio de agregar las condiciones de realidad [11], que vamos a introducir en el siguiente capítulo. Es importante mencionar que para realizar la extensión compleja debemos desarrollar toda una maquinaria que nos permita un buen análisis.

Capítulo 2

Las Condiciones de Realidad

La complexificación a partir de un espacio extendido es un método tradicional en matemáticas y física que es usado para resolver varios problemas en diferentes ramas de la ciencia. En nuestro caso, no nos enfocaremos en la complexificación sino más bien en las condiciones de realidad que permiten reducir y resolver un problema por medio de proyectar al espacio real.

Es posible entender la complexificación como una extensión de los grados de libertad físicos para después construir una proyección del espacio complejo al espacio real. Bender propuso una situación similar [9], cambiando el producto interno a partir de la simetría \mathcal{PT} la cual permite encontrar el producto interno asociado.

En nuestro caso las condiciones de realidad proveen la proyección apropiada y posteriormente también el producto interno. Con esto en mente, en este trabajo consideramos un ejemplo simple que permite ilustrar algunas consecuencias de este método.

2.1. Ejemplo del Uso de las Condiciones de Realidad

Consideremos un oscilador armónico con espacio fase Γ en dos dimensiones (q, p) y un Hamiltoniano real

$$h(q, p) = \frac{1}{2}(q^2 + p^2). \quad (2.1)$$

Ahora, queremos extender el dominio de definición al espacio complejo entonces necesitamos usar nuevas variables

$$q^* = q, \quad (2.2)$$

$$z := q - ip, \quad (2.3)$$

de lo cual consideramos al par (q, z) para construir los paréntesis de Poisson

$$\{q, q\} = 0, \quad \{z, z\} = 0, \quad \{z, q\} = i, \quad (2.4)$$

y son pensados como un conjunto conjugado canónico. Nótese que nuestro espacio fase ha sido extendido por medio de

$$(q, p) \mapsto (q, z = q - ip). \quad (2.5)$$

Introduciendo la función $f(q, p)$ que pertenece a Γ es posible definir una nueva función usando (2.3)

$$g(q, z) := f(q, i(z - q)) := f(q, z) \quad (2.6)$$

y cualquier función puede ser construida de esta manera haciendo uso de los paréntesis de Poisson obtenidos de los paréntesis fundamentales con variables q y p .

En particular la función Hamiltoniana en términos de (q, z) usando (2.3) para (2.1) es

$$h(q, z) = \frac{1}{2}(q^2 - (z - q)^2) = zq - \frac{1}{2}z^2 \quad (2.7)$$

y usando los conmutadores la evolución temporal es

$$\dot{q} = \{q, h\} = iz - iq, \quad \dot{z} = \{z, h\} = iz. \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.8) son ecuaciones de movimiento para (2.7). Sin embargo, esta descripción tiene que ser consistente con las ecuaciones de movimiento resultantes de (2.1) con la finalidad de preservar la dinámica original.

Para proyectar del espacio complejo (q, z) al espacio real originar es necesario proponer la siguientes condición de realidad

$$z^* = (-z + 2q). \quad (2.9)$$

Esta última condición impone una restricción para z en el nuevo espacio fase complejo. Lo siguiente que se analiza es la manera en que cambia la medida para construir la teoría cuántica.

2.2. Medida de la Teoría Cuántica

A partir del ejemplo antes expuesto hemos establecido una formulación canónica compleja Hamiltoniana con su respectiva ecuación de movimiento que resulta ser equivalente a la ecuación de movimiento de la teoría real si incluimos la correspondiente condición de realidad. En esta parte del trabajo buscaremos la manera de realizar la cuantización directa del modelo complejo aquí descrito.

Para comenzar esta sección partiremos del Hamiltoniano complejo (2.7) que al ser promovido a operador resulta no ser Hermítico. Sin embargo, por medio de

la posición y el momento que son establecidos usando la estructura simpléctica (2.4) podemos obtener una relación con los operadores Hermíticos (2.5) definidos inicialmente.

La cuantización de nuestra teoría no-Hermitiana se puede realizar por medio de la teoría de las ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville. El problema central es transformar al operador Hamiltoniano que no es autoadjunto en un operador autoadjunto por medio de agregar una medida μ al correspondiente producto interno \langle, \rangle_μ . Partiremos de la notación de Dirac [11] considerando el siguiente producto interno \langle, \rangle_{Dir} para la teoría Hermitiana y en especial para \hat{p} que es Hermítico

$$\langle \hat{p}\chi_1, \chi_2 \rangle_{Dir} = \int dq [\hat{p}\chi_1(q)]^* \chi_2(q) = \int dq \chi_1^*(q) \hat{p}\chi_2(q) = \langle \chi_1, \hat{p}\chi_2 \rangle_{Dir}. \quad (2.10)$$

Siguiendo pasos similares a lo anterior es posible plantear la cuantización de la teoría cuántica compleja considerando establecer las condiciones de realidad en términos de las componentes de las variables

$$z = x + iy, \quad q = q_R \quad (2.11)$$

y en términos de esta descomposición las condición (2.9) resulta ser

$$x = q, \quad (2.12)$$

A partir de este punto es posible la cuantización por medio de postular las variables de nuestro espacio fase a operadores cuánticos resultando del paréntesis de Poisson el siguiente conmutador

$$[\hat{q}, \hat{z}] = 1 \quad (2.13)$$

y en términos de la realización tenemos

$$q \rightarrow \hat{q} = \frac{d}{dz}, \quad (2.14)$$

$$z \rightarrow \hat{z} = z. \quad (2.15)$$

En base a la teoría cuántica Hermitiana podemos construir la no Hermitiana y definir el correspondiente producto interno

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle_\mu = i \int d\mu [\chi_1(z, z^*)]^* \chi_2(z, z^*) \quad (2.16)$$

con la diferencial de la medida $d\mu$ definida como

$$d\mu = dz \wedge dz^* \exp\left(-\frac{1}{4}(z + z^*)^2\right). \quad (2.17)$$

Lo anterior significa que estamos partiendo de un sistema restringido que no analizaremos profundamente, ya que hemos partido del hecho de aplicar una

condición de realidad directamente para reducir los grados de libertad de nuestro sistema. Lo anterior significa que hemos partido de z, z^* y hemos aplicado la condición de realidad dada en (2.12) lo cual reduce nuestro espacio de configuración al espacio $y = -p, x = q = q_R$ a lo que aún nos hace falta aplicarle una restricción, pero este es nuestro espacio de configuración definitivo. La medida (2.17) es definida en este espacio de configuración reducido tomando en cuenta una condición de realidad que restringe la teoría cuántica a una teoría real consistente.

Del operador q obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{q}\chi_1, \chi_2 \rangle_\mu &= i \int d\mu [\hat{q}\chi_1(z, z^*)]^* \chi_2(z, z^*) \\ &= i \int d\mu \chi_1^*(z, z^*) \hat{q}\chi_2(z, z^*) = \langle \chi_1, \hat{q}\chi_2 \rangle_\mu \end{aligned} \quad (2.18)$$

De igual manera el operador z cumple con

$$\begin{aligned} \langle \hat{z}\chi_1, \chi_2 \rangle_\mu &= i \int d\mu [\hat{z}\chi_1(z, z^*)]^* \chi_2(z, z^*) = \\ i \int d\mu \chi_1^*(z, z^*) (-\hat{z} + 2\hat{q})\chi_2(z, z^*) &= \langle \chi_1, (-\hat{z} + 2\hat{q})\chi_2 \rangle_\mu \end{aligned} \quad (2.19)$$

de lo cual ahora es posible establecer la nueva teoría cuántica. Las función delta en la medida establece una nueva condición que ocupa el lugar de la Hermiticidad.

En resumen, hemos hecho un mapeo de un espacio fase real a un espacio complejo a partir de las condiciones de realidad y con la finalidad de hacer una teoría consistente con una dinámica compatible hemos introducido una condición de (2.9) en z una variable compleja dentro de nuestro espacio también complejo. La cuantización se puede realizar por medio del método de Sturm-Liouville que es retomado por Ashtekar con notación de Dirac para hacer la cuantización no Hermitiana de la teoría extendida.

Debemos notar que la relación (2.3) obedece las condiciones de realidad y provee de un mapeo directo que lleva de la ecuación de movimiento (2.8) a la ecuación de movimiento generada por (2.1). En el siguiente capítulo vamos a generalizar estas ideas y ver la manera en la que podemos transformar una teoría compleja en una teoría real.

Capítulo 3

Integral de Fresnel

La complexificación es una herramienta muy útil que se utiliza en física y matemáticas, sobre todo para resolver problemas que en el espacio real resultan muy difíciles de resolver. Un ejemplo ilustrativo acerca de esta herramienta lo podemos encontrar en las integrales de Fresnel.

Consideremos la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{it^2} = 2 \int_0^{\infty} dt e^{it^2}, \quad (3.1)$$

la cual nos gustaría calcular ya que es común encontrarnos con ella en la integral de camino además de que nos sirve para ilustrar el método de complexificación utilizado en este trabajo.

Por otro lado también sabemos que la integral Gaussiana es

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (3.2)$$

y se podría pensar que si escogemos $\alpha = -i$ encontraremos la integral de Fresnel. Sin embargo la deducción formal no resulta tan obvia y debemos establecer más herramientas matemáticas que justifiquen este resultado.

La extensión al plano complejo de nuestra variable real puede proveer la herramienta necesaria y validar nuestro resultado obtenido a partir de la integral Gaussiana. En el caso de nuestra complexificación propuesta debemos considerar una integral sobre una trayectoria que es cerrada, pero con respecto a esto debemos especificar que se cumple con el teorema de Morera y por ende la función integrada debe de ser continua, específicamente nosotros pedimos una función holomorfa definida en un conjunto abierto y conexo, libre de polos. Particularmente consideramos la integral sobre una curva cerrada con la función correspondiente extendida al plano complejo de la siguiente forma:

$$\oint dz e^{iz^2} = 0. \quad (3.3)$$

Es en este punto donde habitualmente se le presta atención a la forma de la curva cerrada. Para la teoría de variable compleja es común elegir una trayectoria en concreto

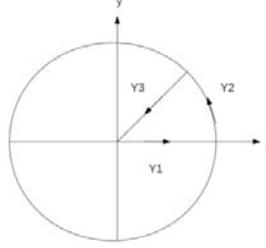


Figura 3.1: Curva cerrada elegida adecuadamente.

donde nuestra trayectoria es $1/8$ del círculo y esta dada por la suma de las trayectorias $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, (ver figura 3.1). Es decir:

$$\oint dz e^{iz^2} = \int_{\gamma_1} dz e^{iz^2} + \int_{\gamma_2} dz e^{iz^2} + \int_{\gamma_3} dz e^{iz^2} = 0. \quad (3.4)$$

La parametrización correspondiente a γ_1 es $z = t$ con $0 \leq t \leq R$ con R siendo el radio del círculo

$$\int_{\gamma_1} dz e^{iz^2} = \int_0^R dt e^{it^2}. \quad (3.5)$$

Con respecto a la segunda trayectoria γ_2 la parametrización es $z = Re^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi/4$ resultando la integral

$$\int_{\gamma_2} dz e^{iz^2} = 0, \quad (3.6)$$

ya que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_2} dz e^{iz^2} \right\| &\leq R \left\| \int_0^{\pi/4} dt e^{-R^2 \operatorname{sen}(2t)} \right\| \leq \\ &Re^{-R^2} \left\| \int_0^{\pi/4} dt e^{-\frac{4t}{\pi}} \right\| \leq 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

debido a que (3.6) es cero si $R \rightarrow \infty$.

Finalmente la última trayectoria tiene una parametrización dada por $z = re^{i\pi/4}$ con $0 \leq r \leq R$ y la última integral es

$$\int_{\gamma_3} dz e^{iz^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} -e^{i\pi/4} \int_0^R dr e^{-r^2} = -\frac{\sqrt{i\pi}}{2}. \quad (3.8)$$

Sumando todos los caminos dados en (3.4) obtenemos la integral en el espacio real

$$\int_0^\infty dt e^{it^2} = \frac{\sqrt{i\pi}}{2}. \quad (3.9)$$

lo cual es el resultado deseado.

Lo notable de este ejemplo es que a partir de una extensión al plano complejo fue posible encontrar formalmente la integral de Fresnel por medio de manipular adecuadamente la trayectoria de la parametrización. Con esta manera de proceder en mente haremos una extensión de esta idea para establecer por medio de la estructura compleja relaciones entre distintos sistemas que pertenecen a la mecánica clásica y que pueden ser propuestos como sistemas cuánticos [20].

Capítulo 4

Transformación General Compleja

Las teorías de orden superior claramente implican un problema que hasta la fecha no ha sido posible resolver. Lograr una cuantización que incluya interacciones, es la meta a lograr. Ha habido intentos de hacer una cuantización razonable. Entre estos intentos encontramos la cuantización basada en realizar una transformación canónica compleja [22]. Lo anterior está fundamentado y es aplicable utilizando la teoría de Ashtekar y las condiciones de realidad [11]. Sin embargo, en este trabajo mostramos la existencia de una simetría escondida, que le da sentido a todas estas ideas, y que explotamos con la finalidad de desarrollar un método que unifique a algunas de las teorías alternativas basadas en simetrías muy particulares [9] y que son equivalentes a teorías reales Hermíticas [23].

La estructura de las funciones complejas ha sido extensamente estudiadas, en especial las funciones holomorfas que son parte fundamental de esta teoría. Como punto de partida, estas funciones tienen que ser mapeables del espacio complejo al espacio real, donde es posible representar cualquier número complejo en el plano real, siempre que la función compleja sea C^∞ -diferenciable y cumpla con las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Sea $G(z)$ una función holomorfa

$$G(z) = G_R(x, y) + iG_I(x, y), \quad (4.1)$$

entonces esta satisface las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} G_R(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} G_I(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} G_I(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y} G_R(x, y). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sin embargo, debido al hecho de que las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden ser deducidas de la trayectoria de $x = 0$ con $y \neq 0$ y $y = 0$ con $x \neq 0$ como es usualmente hecho en las demostraciones de variable compleja, es intuitivo

pensar que la existencia de estas ecuaciones implica una constricción de primera clase con cierta libertad de norma lo que hace necesario usar la teoría de Dirac de las constricciones.

Con la finalidad de establecer esta idea, consideremos el siguiente Lagrangiano Complejo

$$L = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - V(z) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\dot{y}^2 + i\dot{x}\dot{y} - V_R(x, y) - iV_I(x, y), \quad (4.3)$$

con V una función holomorfa compleja

$$V(z) = V_R(x, y) + iV_I(x, y) \quad (4.4)$$

es decir satisface las relaciones (4.2). Las ecuaciones de movimiento del Lagrangiano (5.4) son

$$\frac{\delta L}{\delta x} = -\ddot{x} - i\ddot{y} - \frac{1}{2} \frac{\partial V_R(x, y)}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial V_I(x, y)}{\partial x} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\delta L}{\delta y} = \ddot{y} - i\ddot{x} - \frac{1}{2} \frac{\partial V_R(x, y)}{\partial y} - \frac{i}{2} \frac{\partial V_I(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (4.6)$$

estas ecuaciones son independientes una de la otra, resultando solamente dos ecuaciones, si nosotros separamos en parte real y parte imaginaria

$$-\ddot{x} - \frac{1}{2} \frac{\partial V_R(x, y)}{\partial x} = 0, \quad -\ddot{y} + \frac{1}{2} \frac{\partial V_R(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (4.7)$$

con lo que queda claro que x y y son cantidades reales.

Por otro lado los momentos canónicos son

$$p_x := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad p_y := \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \quad (4.8)$$

o escrito para el Lagrangiano (5.4)

$$p_x = \dot{x} + i\dot{y}, \quad p_y = -\dot{y} + i\dot{x}. \quad (4.9)$$

La definición anterior implica una constricción primaria

$$\Phi = p_x + ip_y \approx 0. \quad (4.10)$$

El siguiente paso es tomar la definición usual de Hamiltoniano

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L, \quad (4.11)$$

pensando que en general H, L, p_x, p_y son cantidades complejas. Lo que estamos buscando es transformar p_x en una cantidad real. A través de (4.11) se obtiene

$$H_T = \frac{1}{2}p_x^2 + V_R(x, y) + iV_I(x, y) + \mu\Phi, \quad (4.12)$$

resultando las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\dot{x} = \{x, H_T\} = p_x + \mu, \quad \dot{y} = \{y, H_T\} = i\mu, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= \{p_x, H_T\} = -\frac{\partial V_R(x, y)}{\partial x} - i\frac{\partial V_I(x, y)}{\partial x}, \\ \dot{p}_y &= \{p_y, H_T\} = -\frac{\partial V_R(x, y)}{\partial y} - i\frac{\partial V_I(x, y)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

dando como resultado la ecuación (4.7) a través de (4.13) y (4.14). En conclusión estas ecuaciones resultan en una ecuación compleja con partes real e imaginaria.

Con la intención de manejar esta teoría es necesario usar la teoría de constricciones de Dirac, debido a que ésta puede tener constricciones tanto de primera como de segunda clase.

La ecuación de la restricción primaria (4.10) resulta ser

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = \{\Phi, H\} &= \left[\frac{\partial}{\partial y} V_I(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} V_R(x, y) \right] \\ &\quad - i \left[\frac{\partial}{\partial x} V_I(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} V_R(x, y) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

o equivalentemente

$$\delta H = \{H, \Phi\} = 0, \quad (4.16)$$

debido a las relaciones de Cauchy-Riemann (4.2) para $V(z)$. Lo cual muestra que ya no tenemos más constricciones. Por otro lado tomando en cuenta la estructura de Cauchy-Riemann y por medio de la teoría de Dirac, se concluye que esta restricción es de primera clase y que este modelo complejo tiene libertad de norma.

Partiendo de este marco y prestando atención en las ecuaciones (4.13) y (4.14), es necesario obtener las condiciones de norma que den como resultado un espacio fase real con x e y cantidades reales. A partir de la condición de norma buscada y la simetría de los números complejos queremos conectar distintos sistemas físicos lo cual implica que hasta cierto grado existen relaciones entre sistemas que son muy diferentes entre sí, trascendiendo las transformaciones canónicas [22].

Ésta es la base del método, tratar de obtener una teoría real usando x, y para obtener L, H como cantidades reales y mostrar que el caso Hermitiano es solamente un caso particular de éste. La variación resultante de la restricción de primera clase es

$$\delta x = \{x, \epsilon\Phi\} = \epsilon, \quad \delta y = \{y, \epsilon\Phi\} = i\epsilon, \quad (4.17)$$

$$\delta p_x = \{p_x, \epsilon\Phi\} = 0, \quad \delta p_y = \{p_y, \epsilon\Phi\} = 0, \quad (4.18)$$

resultando que

$$\delta z = \{z, \Phi\} = 0, \quad \delta p_x = \{p_x, \Phi\} = 0. \quad (4.19)$$

Este hecho es originado del requisito de pedir un potencial holomorfo resultando que el espacio fase complejo z y p_x son observables de Dirac que no son afectadas por la transformación de norma. Del hecho de que las ecuaciones de movimiento obtenidas de la formulación Hamiltoniana son cantidades complejas es natural obtener variaciones complejas. El espacio Hamiltoniano resulta ser más amplio que la condición Lagrangiana, ya que μ existe en esta formulación, pero es posible escoger como una cantidad real a δx o a δy . En general, se puede escoger δx y δp_x como cantidades reales. El punto clave es seleccionar una condición de norma apropiada.

Desde un punto de vista Lagrangiano. Si

$$x' = x + \lambda(t), \quad y' = y + i\lambda(t) \quad (4.20)$$

entonces

$$\delta z = 0, \quad \delta \dot{z} = 0, \quad \text{y} \quad \delta L = 0. \quad (4.21)$$

Por lo tanto la variación del Lagrangiano δL y la variación del hamiltoniano δH son cero. De esta manera, el Lagrangiano y el Hamiltoniano son invariantes a estas transformaciones de simetría. Aunque con este método se pueden obtener resultados similares comparando con el basado en la simetría \mathcal{PT} dado en [9] es conceptualmente diferente, ya que este método no fuerza a que los sistemas tengan una concreta simetría en el Hamiltoniano, ni en la norma y puede ser ajustado a las necesidades del modelo. Sin embargo, éste si comparte un común origen con el método desarrollado por Ashtekar basado en las condiciones de realidad, equivalente a establecer una condición de norma [11].

Con todo lo anterior aún no hemos mencionado algo a cerca de μ (4.13). Es importante notar que se pueden manipular las ecuaciones (4.13) y (4.14) con el fin de obtener las ecuaciones Euler-Lagrange que son linealmente dependientes y son equivalentes entre si, removiendo completamente y asignando un valor para μ . Ésto sugiere que tenemos un parámetro libre o multiplicador de Lagrange que es determinado por la teoría de Dirac fijando la condición de norma

$$\dot{\gamma} = \{\gamma, H_T\} = \{\gamma, H + \mu\Phi\} = \{\gamma, H\} + \mu\{\gamma, \Phi\} \approx 0 \quad (4.22)$$

Ahora, la libertad de norma es utilizada de forma tal que se pueda establecer una condición que sea conveniente, elijamos por ejemplo

$$\gamma_1 = y - ig_1(x) \approx 0 \quad (4.23)$$

y ésto determina un concreto valor para μ

$$\mu_1 \approx -\frac{\{(y - ig_1(x)), H\}}{\{(y - ig_1(x)), \Phi\}} = -\frac{p_x \frac{\partial g_1(x)}{\partial x}}{(\frac{\partial g_1(x)}{\partial x} - 1)} \quad (4.24)$$

Las ecuaciones de movimiento (5.22), (5.23) resultantes de utilizar esta μ_1 son

$$\dot{x} = \left[1 - \frac{\frac{\partial g_1(x)}{\partial x}}{\left(\frac{\partial g_1(x)}{\partial x} - 1\right)}\right] p_x, \quad \dot{y} = -i \frac{p_x \frac{\partial g_1(x)}{\partial x}}{\left(\frac{\partial g_1(x)}{\partial x} - 1\right)}, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= \{p_x, H_T\} = -\frac{\partial V_R(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial V_I(x, y)}{\partial x}, \\ \dot{p}_y &= \{p_y, H_T\} = -\frac{\partial V_R(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial V_I(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por otro lado si recordamos que $V(z)$ es una función holomorfa, tenemos que $\frac{\partial V(z)}{\partial z}$ es también holomorfa. Teniendo una función holomorfa es posible escribir

$$F(z) = F(z_0) + \frac{F'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \dots \quad (4.27)$$

y escoger $z_0 = 0$. El punto fundamental es

$$\begin{aligned} z^n &= (x + iy)^n = i^n y^n + n x i^{n-1} y^{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) x^2 i^{n-2} y^{n-2} \\ &+ \frac{1}{3!} (n-2)(n-1) n x^3 i^{n-3} y^{n-3} + \frac{1}{4!} (n-3)(n-2)(n-1) n x^4 i^{n-4} y^{n-4} \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (4.28)$$

entonces las potencias impares en y tienen una contribución en la parte imaginaria y las potencias pares en y contribuyen a la parte real. Considerando fijar la condición de norma (4.23) las potencias pares e impares siempre son cantidades reales.

Por otro lado para esclarecer podemos tomar

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{\partial V_R(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial V_I(x, y)}{\partial x}, \quad (4.29)$$

entonces la parte imaginaria siempre es una potencia impar en y y esta expresión va a ser real usando esta condición de norma (4.23) cuando nosotros trabajamos con funciones holomorfas.

Por ejemplo

$$z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \quad (4.30)$$

por lo que

$$z^3|_{\gamma_1} = x^3 + 3ix^2(i g_1(x)) - 3x(i g_1(x))^2 - i(i g_1(x))^3, \quad (4.31)$$

y las partes imaginarias siempre contribuyen con partes reales cuando seleccionamos esta condición de norma. En conclusión, \dot{p}_x va a ser una cantidad real, si se toma en cuenta (4.26) y se escoge γ_1 como condición de norma. Por tanto, x y p_x serán cantidades reales y no abandonan el espacio real, aunque ellas evolucionen en el tiempo. Por otro lado, usando este método hacemos que

la parte imaginaria en un potencial contribuya a la parte real por medio de fijar esta norma.

Sin embargo, ésto es válido si nosotros tenemos una constante real multiplicando a $V(z)$, pero multiplicando por una constante imaginaria a $V(z)$ ésto ya no funciona y ya no podemos caer en el espacio real. Por ejemplo

$$V_2 = \frac{1}{2}z^2 + iz^3.$$

Para afrontar este caso necesitamos una nueva condición de norma

$$\gamma_2 = x - ig_2(y) \approx 0 \quad (4.32)$$

que haga que y, p_y, \dot{p}_y y L, H sean cantidades reales, usando similares argumentos a los dados en γ_1 .

Como otro ejemplo de potencial podemos también elegir

$$V_1 = \frac{1}{2}z^2 + iz = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - y\right) + i(xy + x), \quad (4.33)$$

$$V_2 = \frac{1}{2}z^2 + iz^3 = \left(-3x^2y + \frac{1}{2}x^2 + y^3 - \frac{1}{2}y^2\right) + i(x^3 - 3xy^2 + xy), \quad (4.34)$$

donde ambos potenciales son funciones holomorfas. Con esta formulación, es posible aplicar ésto en un caso particular para este tipo de estructuras. En la siguiente sección vamos a estudiar un caso concreto y bien conocido que nos permita entender mejor y evidenciar el método aquí mencionado.

4.1. Oscilador Armónico

En este punto ya hemos desarrollado un método general, para describir su funcionamiento tomaremos un ejemplo concreto. Es usual escoger el oscilador armónico como un ejemplo que ya está bien establecido. Como ya se había dicho, se obtuvo este método de las condiciones de realidad dadas por Ashtekar [11] para lograr una cuantización no Hermítica de una forma simple. Por esta razón y con la finalidad de buscar un entendimiento más profundo, aplicaremos el método aquí descrito para este caso. Este método usa la teoría de las constricciones de Dirac [4] interconectando con la extensión al plano complejo de números reales y usando constricciones de primera clase de forma tal que las condiciones de realidad resultan ser una condición de norma.

En esta sección se analiza esta extensión con la finalidad de entender mejor nuestro método y encontrar una manera de aplicarlo en cualquier caso.

Consideremos una extensión compleja del oscilador armónico partiendo de su Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{\omega^2}{2}z^2 \quad (4.35)$$

donde z es una variable compleja que puede ser separada en parte real y parte imaginaria

$$z = x + iy. \quad (4.36)$$

El Langrangiano separado en partes es

$$L_{(x,y)} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\dot{y}^2 + i\dot{x}\dot{y} - \frac{\omega^2}{2}x^2 + \frac{\omega^2}{2}y^2 - i\omega^2xy. \quad (4.37)$$

para el que podemos obtener los respectivos momentos

$$p_x = \dot{x} + i\dot{y}, \quad (4.38)$$

$$p_y = -\dot{y} + i\dot{x}, \quad (4.39)$$

resultando una constricción primaria

$$\Phi_0 = p_x + ip_y \quad (4.40)$$

y también podemos obtener el Hamiltoniano

$$H_0 = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L_{(x,y)}, \quad (4.41)$$

junto con el Hamiltoniano total

$$H_T = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}y^2 + i\omega^2xy + \mu_0\Phi_0. \quad (4.42)$$

Por otro lado, los paréntesis de Poisson son

$$\{x, p_x\} = 1, \quad \{y, p_y\} = 1. \quad (4.43)$$

y las ecuaciones de Cauchy-Riemann están disponibles para nuestro Hamiltoniano complejo

$$\frac{\partial H_{TR}}{\partial x} = \frac{\partial H_{TI}}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_{TI}}{\partial x} = -\frac{\partial H_{TR}}{\partial y}, \quad (4.44)$$

ya que el Hamiltoniano es una función analítica. La naturaleza de esta constricción compleja puede ser determinada por los paréntesis de Poisson y el Hamiltoniano total

$$\{\Phi_0, H_T\} = 0, \quad (4.45)$$

mostrando que Φ_0 es una constricción compleja de primera clase.

La variación resultante de esta constricción es

$$\begin{aligned} \delta x &= \{x, \epsilon^0 \Phi_0\} = \epsilon^0, & \delta y &= \{y, \epsilon^0 \Phi_0\} = i\epsilon^0, \\ \delta p_x &= \{p_x, \epsilon^0 \Phi_0\} = 0, & \delta p_y &= \{p_y, \epsilon^0 \Phi_0\} = 0, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde $\delta z = 0$. Esta constricción de primera clase implica que el Hamiltoniano complejo es separado en componentes reales que son invariantes bajo las transformaciones (4.46).

Como un ejemplo fijemos una condición de norma. La elección más simple es $\mu = 0$ en (4.13)

$$\gamma_0 = y \approx 0, \quad (4.47)$$

una más general corresponde a

$$\gamma = y - k \approx 0, \quad (4.48)$$

con $k = \text{constante}$. El multiplicador de Lagrange puede ser obtenido a través de la teoría de Dirac de las constricciones

$$\dot{\gamma}_0 = \{\gamma_0, H_T\} = \mu\{\gamma_0, \Phi\} = i\mu \approx 0, \quad (4.49)$$

Las ecuaciones de movimiento de (4.13) y (4.14) son

$$\dot{x} = \{x, H_T\} = p_x, \quad \dot{y} = \{y, H_T\} = 0, \quad (4.50)$$

$$\dot{p}_x = \{p_x, H_T\} = -\frac{\partial V_R(x, y)}{\partial x} - i\frac{\partial V_I(x, y)}{\partial x},$$

$$\dot{p}_y = \{p_y, H_T\} = -\frac{\partial V_R(x, y)}{\partial y} - i\frac{\partial V_I(x, y)}{\partial y}. \quad (4.51)$$

Sin embargo, γ_0 tiene que ser una restricción que involucre componentes y tome en cuenta los grados de libertad. La matriz de $\{\Phi_0, \gamma_0\}$ es

$$C_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

y su determinante

$$\det(C_{ab}) = -1. \quad (4.53)$$

La evolución de la condición de norma es

$$\dot{\gamma}_0 = \{\gamma_0, H_T\} = i\mu_0 \approx 0. \quad (4.54)$$

entonces la condición de norma γ_0 implica sobre el momento que

$$p_x = \dot{x} + i\dot{\gamma}_0 \approx p_{xR}, \quad (4.55)$$

es una cantidad real. El Hamiltoniano (4.42) es reducido a

$$H_{HO} = \frac{1}{2}p_{xR}^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2. \quad (4.56)$$

y el Lagrangiano correspondiente es

$$L_{HO} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{\omega^2}{2}x^2. \quad (4.57)$$

En resumen, es posible manejar un modelo extendido al plano complejo, ya que en la estructura de la teoría compleja aparece una restricción de primera clase que genera libertad de norma y cuando fijamos una condición de norma, se escoge una específica cuantización dependiendo de nuestra meta. Esta idea es usada en algunos ejemplos de interés.

4.2. Sistemas Relacionados al Oscilador Armónico

Como primer ejemplo no trivial, se elige una condición de norma más compleja con el fin de comprender de una manera más completa nuestro método. La manera alternativa de fijar la norma es

$$\gamma_1 = y - ix + iU^{\frac{1}{2}}(x) \approx 0, \quad (4.58)$$

$$\{\Phi, \gamma_1\} = -\frac{i}{2U^{\frac{1}{2}}(x)} \partial_x U(x). \quad (4.59)$$

de donde podemos obtener usando esta condición de norma un nuevo Hamiltoniano en el espacio fase reducido (4.64). Con lo anterior obtenemos un conjunto de constricciones de segunda clase $\chi_{1a} = (\Phi_0, \gamma_1)$, con la correspondiente matriz de constricciones de segunda clase dada por

$$\mathcal{A}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2U^{\frac{1}{2}}(x)} \partial_x U(x) \\ \frac{i}{2U^{\frac{1}{2}}(x)} \partial_x U(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

y la matriz inversa resultante es

$$\mathcal{A}^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -2\frac{i}{\partial_x U(x)} U^{\frac{1}{2}}(x) \\ 2\frac{i}{\partial_x U(x)} U^{\frac{1}{2}}(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

La determinante asociada a estas matrices es

$$\det \mathcal{A}_{ab} = -\frac{[\partial_x U(x)]^2}{4U(x)}. \quad (4.62)$$

De lo anterior observamos que una norma como la dada en (4.58) es permitida y aplicable, lo que significa que dado cualquier conjunto de variables canónicas debe de existir una transformación de norma que mapée el conjunto dado en un conjunto que satisfaga a (4.58). Además esta condición debe fijar completamente la norma lo que es el caso si la determinante (4.62) es diferente de cero. Si la determinante desaparece en algún punto, la condición de norma no es definida globalmente y tenemos una obstrucción de Gribov [44, 45]. Si éste no es el caso, los paréntesis de Dirac son

$$\{x, p_x\}^* = \frac{2U^{\frac{1}{2}}(x)}{\partial_x U(x)}, \quad (4.63)$$

notando que esta condición de norma genera una transformación que no es canónica. El Hamiltoniano en el espacio fase reducido es

$$H_R = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{\omega^2}{2} U(x), \quad (4.64)$$

y obtenemos que la acción en el espacio reducido es

$$S_{1R} = \int dt \left[\frac{\partial_x U(x)}{2U^{\frac{1}{2}}(x)} \dot{x} p_x - H_R \right], \quad (4.65)$$

A partir de la variación con respecto a p_x tenemos un momento en términos de las velocidades

$$p_x = \left[\frac{\partial_x U(x)}{2U^{\frac{1}{2}}(x)} \right] \dot{x}, \quad (4.66)$$

lo cual es consistente con la expresión (4.25). En consecuencia la acción en el espacio de configuración es

$$S_{1R} = \int dt \left(\frac{\partial_x U}{2U^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega^2 \frac{2U^2}{(\partial_x U)^2} \right]. \quad (4.67)$$

Los multiplicadores de Lagrange son

$$\mu_1 = p_x \left[1 - \frac{2U^{\frac{1}{2}}(x)}{\partial_x U(x)} \right] = \left[\frac{\partial_x U(x)}{2U^{\frac{1}{2}}(x)} - 1 \right] \dot{x}, \quad (4.68)$$

Nótese que si asumimos que la condición de norma (4.58) esta infinitesimalmente relacionada a (4.47), la transformación asociada que relaciona a los sistemas es

$$\tilde{x} = x - i\delta\gamma\{x, \Phi\}, \quad \tilde{x} = U^{\frac{1}{2}}(x), \quad (4.69)$$

donde

$$\delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_0 \quad (4.70)$$

con el objetivo de reemplazar a x con \tilde{x} en (4.57) para obtener (4.67).

Con la finalidad de reescribir la acción (4.65) de manera más convencional introducimos la reparametrización

$$\left(\frac{d\tau}{dt} \right) = \left[\frac{4U}{(\partial_x U)^2} \right], \quad (4.71)$$

entonces la acción (4.65) se transforma en

$$S = \int d\tau \left[\frac{1}{2} (x')^2 - \frac{\omega^2}{8} (\partial_x U)^2 \right]. \quad (4.72)$$

para la acción anterior, el nuevo momento es

$$p_{x'} = x' = \left(\frac{dt}{d\tau} \right) \dot{x} = \left[\frac{(\partial_x U)^2}{4U} \right] \dot{x} = \frac{\partial_x U}{2U^{\frac{1}{2}}} p_x, \quad (4.73)$$

y obtenemos la trivial estructura simpléctica

$$\{x, p_{x'}\}^* = \left\{ x, \frac{\partial_x U}{2U^{\frac{1}{2}}} p_x \right\}^* = 1, \quad (4.74)$$

El nuevo Hamiltoniano con esta reparametrización es

$$H_{x'} = \frac{1}{2} p_{x'}^2 + \frac{\omega^2}{8} (\partial_x U)^2. \quad (4.75)$$

Por lo tanto es posible establecer una relación, usando la transformación de norma, entre el oscilador armónico y un sistema con potencial arbitrario dado por $V(x) = \frac{\omega^2}{8}(\partial_x U)^2$ en una dimensión.

Si consideramos a $U(x) = 2\sqrt{8}x^{\frac{1}{2}}$ notando que el dominio de la función es $(0, \infty)$ entonces tenemos el Hamiltoniano reducido para esta $U(x)$ que es

$$H_C = \frac{1}{2}p_{x'}^2 + \frac{\omega^2}{x}. \quad (4.76)$$

Aquí ω tiene el papel de carga eléctrica, en particular estamos pensando en un sistema electrón-electrón.

Por otro lado se puede encontrar un mapéo del oscilador armónico complejo a un Lagrangiano que es invariante bajo el grupo conforme [46] y resultando una transformación de norma entre este Lagrangiano conforme y el oscilador armónico real. Si elegimos $U = \log |x|$ y usando (4.72) tenemos

$$S = \int d\tau \left[\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{\omega^2}{8} \frac{1}{x^2} \right]. \quad (4.77)$$

que es invariante conforme. El Hamiltoniano correspondiente usando (4.75) es

$$H_{x'} = \frac{1}{2}p_{x'}^2 + \frac{\omega^2}{8} \frac{1}{x^2}. \quad (4.78)$$

De esta manera se establece una transformación entre el oscilador armónico real y la acción conforme (4.77).

Además también consideramos un potencial central con carga negativa para este caso la condición de norma es

$$\gamma_{-1} = x + iy - iU^{\frac{1}{2}}(y) \approx 0, \quad (4.79)$$

$$\{\Phi, \gamma_{-1}\} = -\frac{1}{2U^{\frac{1}{2}}} \partial_y U(y), \quad (4.80)$$

En este caso los paréntesis de Dirac son

$$\{y, p_y\}^* = \frac{2U^{\frac{1}{2}}(y)}{\partial_y U(y)}, \quad (4.81)$$

y el momento generado por esta condición es

$$p_y = -\frac{\partial_y U(y)}{2U^{\frac{1}{2}}(y)} \dot{y}. \quad (4.82)$$

La acción asociada a la condición de norma (4.79) resulta ser

$$S_{2R} = \int dt \left(\frac{\partial_y U}{2U^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \left[-\frac{1}{2} \dot{y}^2 - \omega^2 \frac{2U^2}{(\partial_y U)^2} \right], \quad (4.83)$$

y como antes hicimos, la nueva parametrización es

$$\left(\frac{d\tau}{dt} \right) = -\frac{4U}{(\partial_y U)^2} \quad (4.84)$$

resultando una nueva acción de (4.83). Además usando $U(y) = 2\sqrt{8}y^{\frac{1}{2}}$ obtenemos

$$S = \int d\tau \left[\frac{1}{2} (y')^2 + \frac{\omega^2}{y} \right]. \quad (4.85)$$

Por tanto el nuevo momento es

$$p_{y'} = y' = \left(\frac{dt}{d\tau} \right) \dot{y} = - \left[\frac{(\partial_y U(y))^2}{4U(y)} \right] \dot{y} = \frac{\partial_y U}{2U^{\frac{1}{2}}} p_y, \quad (4.86)$$

para finalmente obtener el Hamiltoniano con signo opuesto

$$H_C = \frac{1}{2} p_{y'}^2 - \frac{\omega^2}{y} \quad (4.87)$$

con lo cual se establece el mapéo para este potencial central con signo opuesto. En la siguiente sección usamos esta idea para un desplazamiento complejo de este oscilador armónico.

4.3. Reparametrización de la Extensión Compleja para un Potencial Arbitrario

Como en los casos anteriores es habitual comenzar a partir de la formulación Lagrangiana clásica, pero considerando al tiempo como una nueva coordenada. A partir de ésto podemos pasar a la formulación Hamiltoniana con la finalidad de establecer una teoría cuántica [4] que preserve las simetrías (reparametrizaciones y traslaciones complejas).

La acción compleja con la reparametrización es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} \dot{z}^2 - U(z) \right] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{1}{2} \frac{z'^2}{t'} - t' U(x, y) \right], \quad (4.88)$$

donde es importante mencionar que podemos pasar de la teoría clásica a la teoría cuántica de la forma habitual.

Por otro lado debemos considerar el método aquí expuesto y establecer la descomposición en componentes de z la variable compleja

$$z = x + iy. \quad (4.89)$$

A partir de lo cual podemos descomponer la acción en parte real y parte imaginaria

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x'^2}{t'} - \frac{y'^2}{t'} + 2i \frac{x' y'}{t'} \right) - t' U(x, y) \right]. \quad (4.90)$$

4.4. OSCILADOR COMPLEJO DESPLAZADO UNA CANTIDAD IMAGINARIA 37

Por otro lado también es posible obtener los respectivos momentos

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial x'} = \left[\frac{x'}{t'} + i \frac{y'}{t'} \right], \quad (4.91)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = \left[-\frac{y'}{t'} + i \frac{x'}{t'} \right],$$

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial t'} = \frac{1}{2} \left[-\frac{x'^2}{t'^2} + \frac{y'^2}{t'^2} - 2i \frac{x'y'}{t'^2} \right] - U(x, y), \quad (4.92)$$

de los cuales podemos notar que L es una función homogénea de primer grado en las velocidades, ya que los momentos son funciones homogéneas de grado cero en las velocidades. Partiendo de esta observación y de la forma usual de obtener los momentos notamos que existen las siguientes constricciones

$$\Phi = p_x + ip_y \approx 0, \quad \chi = \frac{1}{2} p_x^2 + U(x, y) + p_t \approx 0, \quad (4.93)$$

y de la transformación de Legendre usual podemos establecer el Hamiltoniano

$$H = x'p_x + y'p_y + t'p_t - L, \quad (4.94)$$

que es proporcional a las constricciones ya que el Lagrangiano es una función homogénea

$$H = \mu\Phi + \lambda\chi, \quad (4.95)$$

y a partir de esto, ya es posible realizar la teoría cuántica.

Las dos constricciones son de primera clase ya que el Hamiltoniano es proporcional a las constricciones. El paréntesis de Poisson entre las constricciones es

$$\{\Phi, \chi\} = -2 \frac{\partial U(z)}{\partial z^*} \approx 0, \quad (4.96)$$

si la función $U(z)$ es una función holomorfa.

La teoría cuántica la podemos establecer a través de la promoción de las constricciones de primera clase a operadores [4, 10]

$$\hat{\Phi}\Psi = 0, \quad \hat{\chi}\Psi = 0, \quad (4.97)$$

con $\Psi(x, y, t)$.

En el siguiente apartado vamos a aplicar nuestro método al caso de un oscilador armónico desplazado perturbativamente una cantidad lineal imaginaria.

4.4. Oscilador Complejo Desplazado una Cantidad Imaginaria

Como un ejemplo de un Lagrangiano complejo, consideramos el oscilador que es desplazado una cantidad imaginaria

$$L = \frac{1}{2} \dot{z}^2 - \frac{1}{2} z^2 - iz + 1 \quad (4.98)$$

donde z es una variable compleja que puede ser separada en parte real y parte imaginaria

$$z = x + iy. \quad (4.99)$$

El Lagrangiano separado en partes es

$$L_{(x,y)} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\dot{y}^2 + i\dot{x}\dot{y} - \frac{1}{2}(x^2 - y^2 - y) + 1 - i(xy + x), \quad (4.100)$$

para lo cual podemos obtener los respectivos momentos

$$p_x = \dot{x} + i\dot{y}, \quad (4.101)$$

$$p_y = -\dot{y} + i\dot{x}. \quad (4.102)$$

y

$$\Phi_1 = p_x + ip_y, \quad (4.103)$$

que es de primera clase, como ya se ha descrito.

Entonces, se obtiene el Hamiltoniano complejo desplazado por una cantidad imaginaria No Hermitiana

$$H_{1T} = \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}z^2 + iz - 1 + \mu_1\Phi_1, \quad (4.104)$$

o es escrito como

$$H_{1T} = \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}(z+i)^2 - \frac{1}{2} + \mu_1\Phi_1, \quad (4.105)$$

siendo necesario escoger la condición de norma que no es única. La condición de norma que hemos elegido es

$$\gamma_1 = x \approx 0. \quad (4.106)$$

dando como resultado $V_I(x,y)|_{\gamma_1} = 0$.

Para determinar el valor de μ_1 hacemos la evolución temporal de la condición de norma

$$\dot{\gamma}_1 = \{\gamma_1, \Phi_1\} = \mu_1 \approx 0, \quad (4.107)$$

resultando que μ_1 puede ser considerado cero si postulamos como condiciones fuertes a las constricciones. Por otro lado obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x} = \{x, H_{1T}\} = 0, \quad \dot{y} = \{y, H_T\} = p_y, \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= \{p_x, H_T\} = -\frac{\partial V_R(x,y)}{\partial x} - i\frac{\partial V_I(x,y)}{\partial x}, \\ \dot{p}_y &= \{p_y, H_T\} = -\frac{\partial V_R(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial V_I(x,y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

y tenemos también la respectiva algebra de las constricciones

$$\{\Phi_1, \gamma_1\} = -1 \quad (4.110)$$

con la respectiva matriz

$$\mathcal{A}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.111)$$

y la matriz inversa

$$\mathcal{A}^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.112)$$

A partir de esta formulación establecemos los paréntesis de Dirac

$$\{y, p_y\}^* = \{y, p_y\} - \{y, \Phi\} A^{12} \{\gamma_0, p_y\} = 1. \quad (4.113)$$

y la condición de norma aplicada al Hamiltoniano resulta ser

$$h_1 = -\frac{1}{2}p_y^2 - \frac{1}{2}(y+1)^2 - \frac{1}{2}, \quad (4.114)$$

o de una manera en la que despreciamos el signo global

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}(y+1)^2 + \frac{1}{2}, \quad (4.115)$$

con un potencial real. A partir de esta expresión nos percatamos que el Hamiltoniano es un oscilador armónico desplazado real, por lo que es posible definir los operadores de creación y aniquilación en términos de este espacio fase

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}[p_y + i(y+1)], \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}[p_y - i(y+1)] \quad (4.116)$$

y el Hamiltoniano es

$$h_1 = -\frac{1}{2}(aa^* + a^*a) - \frac{1}{2}, \quad (4.117)$$

con paréntesis de Dirac

$$\{a, a^*\}^* = -i \quad (4.118)$$

abriendo la posibilidad de hacer la correspondiente cuantización de la forma usual

$$h|n\rangle = [-(n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}]|n\rangle = -(n+1)|n\rangle. \quad (4.119)$$

El ejemplo anterior abre la puerta a la posibilidad de aplicar nuestro método en otros modelos que pueden resultar más exóticos o se puede buscar definir la integral de trayectoria para establecer otra manera en la cual podamos hacer la cuantización.

4.5. Integral de Camino y Oscilador Complejo Desplazado

Como método alternativo y que podría resultar más útil en otros ejemplos para lograr una cuantización ahora nosotros partiremos de la integral de camino. Para comenzar consideremos el Hamiltoniano del oscilador complejo desplazado

$$H_1 = \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}(z+i)^2 - \frac{1}{2}, \quad (4.120)$$

que como ya vimos tiene el siguiente conjunto de constricciones

$$\chi_a = (\Phi, \gamma_1), \quad (4.121)$$

cuya determinante resulta estar definida por los paréntesis de Poisson

$$\mathcal{A}_{ab} = \{\chi_a, \chi_b\}. \quad (4.122)$$

A partir de esto podemos establecer el método dado por Senjanovic [24] y determinar la integral de camino para nuestro modelo complejo. Un punto importante es considerar que los números complejos no tienen ordenamiento, pero en nuestro caso será por medio del tiempo en la integral de camino que nos permitirá definir un orden.

$$\begin{aligned} \langle y_f x_f, t_f | y_I x_I, t_I \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{-\infty} dp_{0x} \wedge dp_{0y} \wedge \\ &(dx_1 \wedge dp_{x1}) \wedge (dy_1 \wedge dp_{y1}) \wedge \dots \wedge (dx_n \wedge dp_{xn}) \wedge (dy_n \wedge dp_{yn}) \\ &\prod_{i=0}^n \det(\{\chi_a, \chi_b\}) \delta(\chi_a) \delta(\chi_b) \exp[i \int_{t_0}^{t_1} dt (\dot{x}p_x + \dot{y}p_y - H_1)]. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Por otro lado es importante recordar que el paréntesis de Dirac, paréntesis de Poisson alterados por nuestro sistema constraído, es

$$\begin{aligned} \{y, p_y\}^* &= 1, \\ \det(\{\chi_a, \chi_b\})^{\frac{1}{2}} &= -1, \end{aligned} \quad (4.124)$$

y en la segunda ecuación hemos agregado la determinante de la matriz de constricciones.

$$\begin{aligned} \langle y_f, t_f | y_I, t_I \rangle &= A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{-\infty} dp_{y0} \wedge (dy_1 \wedge dp_{y1}) \wedge \\ &\dots \wedge (dy_n \wedge dp_{yn}) \exp[-i \int_{t_0}^{t_1} dt (\dot{y}p_y - \bar{h}_1)], \end{aligned} \quad (4.125)$$

con A_0 una constante. Habiendo podido manejar este ejemplo de manera exitosa a continuación buscaremos aplicar las ideas aquí descritas en un modelo aún más complicado no Hermitiano, pero con simetría \mathcal{PT} .

4.6. Potencial Imaginario Cúbico

Como un ejemplo de un sistema no Hermitiano más complicado proponemos una perturbación z^3 con el fin de hacer una comparación con los resultados obtenidos en [6]. Para comenzar consideremos el siguiente Lagrangiano

$$L_3 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}z^2 - i\epsilon z^3, \quad (4.126)$$

donde es visto que V es

$$\begin{aligned} V(z) &= V_R(x, y) + iV_I(x, y) = \frac{1}{2}z^2 + i\epsilon z^3 \\ &= (-3\epsilon x^2 y + \frac{1}{2}x^2 + \epsilon y^3 - \frac{1}{2}y^2) \\ &\quad + i(\epsilon x^3 - 3\epsilon xy^2 + xy), \end{aligned} \quad (4.127)$$

y

$$V_I(x, y) = \epsilon x^3 - 3\epsilon xy^2 + xy, \quad V_I(x, y)|_{\gamma_{\alpha, \beta}} = 0. \quad (4.128)$$

Como primer paso podemos pensar en las raíces de la parte imaginaria del potencial y elegir estas raíces como condición de norma

$$\gamma_\alpha = y + \frac{[(12\epsilon^2 x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1]}{6\epsilon} \approx 0, \quad (4.129)$$

$$\gamma_\beta = y - \frac{[(12\epsilon^2 x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1]}{6\epsilon} \approx 0, \quad (4.130)$$

y para la parte real del potencial se tiene

$$\begin{aligned} V_{R_\alpha}(x, y) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{\epsilon^4}{216}((12\epsilon^2 x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1)^3 - \frac{\epsilon^2}{72}((12\epsilon^2 x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\epsilon^2 x^2 (12\epsilon^2 x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1), \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\begin{aligned} V_{R_\beta}(x, y) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{\epsilon^4}{216}((12\epsilon^2 x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1)^3 - \frac{\epsilon^2}{72}((12\epsilon^2 x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(\epsilon^2 x^2 (12\epsilon^2 x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1). \end{aligned} \quad (4.132)$$

En este punto podemos pensar que esta elección a funcionado, pero

$$p_x = \dot{x} + i\dot{y} \approx \dot{x} \mp i \frac{2\epsilon}{(12\epsilon^2 x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} x \dot{x}, \quad (4.133)$$

el momento es una expresión compleja y el método no funciona adecuadamente. A pesar de este contratiempo concluimos que nuestro método debe de cumplir con $V_I(x, y)|_{\gamma} = 0$, $p_{xI} = 0$ con el objetivo de tener un espacio fase real con cantidades reales que posteriormente al cuantizar sean Hermíticas y por tanto observables.

Hasta este punto la idea general es más sutil que buscar "Los polos de V_I y usar a ésta como condición de norma". La idea general es reducir el espacio complejo por medio de una condición de norma compleja y pasar de una expresión compleja a una expresión real que cumpla con $V_I|_{\gamma} = 0$ y $p_{yI}|_{\gamma} = 0$.

Anteriormente ya hemos mencionado la idea de que éste tipo de sistemas puede bombear energía de la parte real a la parte imaginaria usando las condiciones de norma. En otras palabras con el fin de bombear energía de la parte imaginaria a la parte real [18], se usa una condición de norma imaginaria.

Del Lagrangiano (4.126) se obtiene la formulación Hamiltoniana

$$H_3 = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L \quad (4.134)$$

donde se define

$$p_x = \dot{x} + i\dot{y}, \quad p_y = -\dot{y} + i\dot{x},$$

y se obtiene una constricción de primera clase

$$\Phi = p_x + ip_y. \quad (4.135)$$

El Hamiltoniano es

$$H_{3T} = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}z^2 + i\epsilon z^3 + \mu\Phi \quad (4.136)$$

con

$$V(z) = \frac{1}{2}z^2 + i\epsilon z^3 = (-3\epsilon x^2 y + \frac{1}{2}x^2 + \epsilon y^3 - \frac{1}{2}y^2) + i(\epsilon x^3 - 3\epsilon xy^2 + xy). \quad (4.137)$$

En la sección pasada se había aprendido como fijar la condición de norma. A partir de este conocimiento en esta sección se desarrollará una manera de realizar la cuantización a partir del conjunto de constricciones

$$\Phi = p_x + ip_y \approx 0, \quad (4.138)$$

$$\gamma = x \approx 0. \quad (4.139)$$

y se puede obtener el conmutador asociado entre las dos constricciones, la constricción de primera clase con la condición de norma

$$\{\Phi, \gamma\} = -1, \quad (4.140)$$

resultando que se puede cambiar la notación de las constricciones para poder construir la matriz asociada y el algebra respectiva

$$\chi_a := (\Phi, \gamma), \quad (4.141)$$

obteniendo

$$\mathcal{B}_{ab} = \{\chi_a, \chi_b\} \quad (4.142)$$

o de una manera explicita resulta la matriz con elementos

$$\mathcal{B}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.143)$$

que tiene una matriz inversa

$$\mathcal{B}^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.144)$$

y la determinante es

$$\det \mathcal{B}_{ab} = 1, \quad (4.145)$$

donde $\det B_{ab} \neq 0$. El paréntesis de Dirac es

$$\{y, p_y\}^* = \{y, p_y\} - \{y, \Phi\}B^{\Phi\gamma}\{\gamma, p_y\} - \{y, \gamma\}B^{\gamma\Phi}\{\Phi, p_y\}, \quad (4.146)$$

o

$$\{y, p_y\}^* = 1. \quad (4.147)$$

Estas constricciones(5.7) reducen el Hamiltoniano a

$$h_3 = -\frac{1}{2}p_y^2 - \frac{1}{2}y^2 + \epsilon y^3. \quad (4.148)$$

Dado que el Hamiltoniano anterior es una constante de movimiento uno puede pensar en esta misma constante de movimiento, pero con el signo invertido, de lo cual establecemos un nuevo Hamiltoniano equivalente al anterior, ya que da lugar a las mismas ecuaciones de movimiento, pero más familiar para nosotros

$$\bar{h}_3 = \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}y^2 - \epsilon y^3. \quad (4.149)$$

Uno puede pensar en la evolución producida por el Hamiltoniano anterior para el espacio fase que es equivalente a la evolución de nuestro Hamiltoniano original solo que la evolución es en sentido opuesto

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \{y, \bar{h}_3\} = p_y, \\ \dot{p}_y &= \{p_y, \bar{h}_3\} = -y + 3\epsilon y^2. \end{aligned} \quad (4.150)$$

Y con respecto a nuestro nuevo potencial se tiene que

$$V(y) = \frac{1}{2}y^2 - \epsilon y^3. \quad (4.151)$$

Con todo lo anterior ahora ya es posible construir nuestro espacio fase, figura 4.1, lo cual establece la necesidad de hacer un análisis de éste. Como primer paso necesitamos encontrar los puntos fijos resultando que son $(0, 0), (\frac{1}{3\epsilon}, 0)$. Como un ejemplo consideramos los puntos fijos para $\epsilon = 0.1$ en la figura 4.1 de lo cual se puede notar que el punto $(0, 0)$ es un punto estable o mínimo y aproximadamente el punto $(3.33, 0)$ es un punto silla con energías asociadas $E_{0,\epsilon} = 0, -11.11$.

Con lo anterior se puede pensar en hacer la respectiva cuantización de este sistema. Una manera de lograrla es partir del método usual y partiendo de (4.149), se puede promover y, p_y a operadores

$$\begin{aligned} p_y &\rightarrow -i\frac{\partial}{\partial y}, \\ y &\rightarrow \hat{y}. \end{aligned} \quad (4.152)$$

La ecuación de Schrödinger es

$$\hat{h}_3\psi = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + \frac{1}{2}y^2\psi - \epsilon y^3\psi = E\psi, \quad (4.153)$$

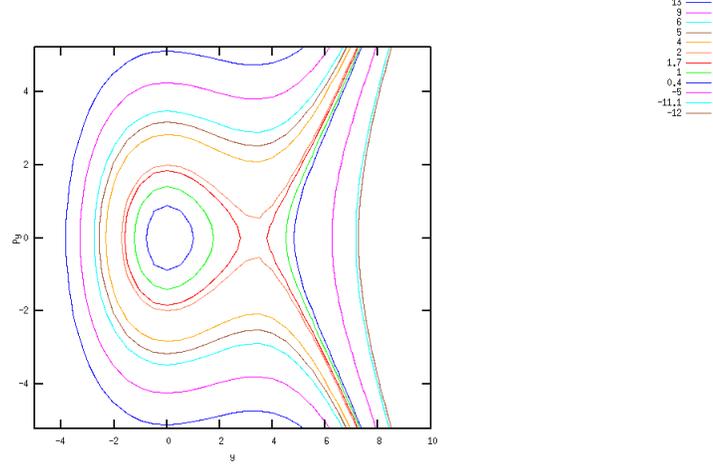


Figura 4.1: Gáfica del espacio fase a orden ϵ^2 con $\epsilon = 0.1$

En este punto podemos establecer o hacer uso de algún método perturbativo. En nuestras circunstancias la manera que se encontró para lograr hacer alguna comparación con los métodos ya existentes. Para comenzar partimos de la cuantización del Hamiltoniano

$$\bar{h}_3 = \bar{h}_{OA} + \bar{h}_I, \quad (4.154)$$

$$\bar{h}_I = -\epsilon y^3, \quad (4.155)$$

$$\hat{h}_{OA} |n^{(0)}\rangle = \left(n^{(0)} + \frac{1}{2}\right) |n^{(0)}\rangle, \quad (4.156)$$

separando el término perturbativo y promoviendo el espacio fase a operadores. Con lo anterior ahora nos enfocaremos en el desarrollo perturbativo por lo que establecemos

$$\hat{h}_3 |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (4.157)$$

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + |n^{(1)}\rangle + |n^{(2)}\rangle + \dots \quad (4.158)$$

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots \quad (4.159)$$

Y juntando todos estos elementos tenemos que

$$\begin{aligned}
E_n^{(1)} &= \langle n^{(0)} | \hat{h}_I | n^{(0)} \rangle \\
|n^{(1)}\rangle &= \sum_{m \neq n} \frac{|m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)} | \hat{h}_I | n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad (4.160) \\
&= \frac{\epsilon}{2^{\frac{3}{2}}} \left\{ -\frac{[(n^{(0)} + 3)(n^{(0)} + 2)(n^{(0)} + 1)]^{\frac{1}{2}}}{3} |n^{(0)} + 3\rangle - [(n^{(0)} + 2) \right. \\
&\quad (n^{(0)} + 1)n^{(0)}]^{\frac{1}{2}} |n^{(0)} + 1\rangle + \frac{[(n^{(0)} + 1)^2 n^{(0)}]^{\frac{1}{2}}}{1} |n^{(0)} - 1\rangle \\
&\quad + \frac{[(n^{(0)} - 2)(n^{(0)} - 1)n^{(0)}]^{\frac{1}{2}}}{3} |n^{(0)} - 3\rangle \\
&\quad - \frac{[(n^{(0)} + 2)^2 (n^{(0)} + 1)]^{\frac{1}{2}}}{1} |n^{(0)} + 1\rangle + \frac{(n^{(0)})^{\frac{3}{2}}}{1} |n^{(0)} - 1\rangle \\
&\quad - \frac{(n^{(0)} + 1)^{\frac{3}{2}}}{1} |n^{(0)} + 1\rangle \\
&\quad \left. + \frac{(n^{(0)} - 1)(n^{(0)})^{\frac{1}{2}}}{1} |n^{(0)} + 3\rangle \right\}, \quad (4.161)
\end{aligned}$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n^{(0)} | \hat{h}_I | m^{(0)} \rangle|^2}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})}, \quad (4.162)$$

con lo cual tenemos la corrección de la energía a primer orden

$$E_n^{(1)} = -\epsilon \langle n^{(0)} | y^3 | n^{(0)} \rangle = -\epsilon \int (\psi_n^{(0)})^* y^3 \psi_n^{(0)} = 0, \quad (4.163)$$

porque $\psi_n^{(0)}$ es una función par.

Las variables y y p_y expresadas en términos de los operadores de creación y aniquilación son

$$\hat{y} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (4.164)$$

$$\hat{p}_y = \frac{i}{2^{\frac{1}{2}}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (4.165)$$

y la acción de los operadores de creación y aniquilación es la ya establecida de la forma usual

$$\hat{a} |m^{(0)}\rangle = (m^{(0)})^{\frac{1}{2}} |m^{(0)} - 1\rangle, \quad (4.166)$$

$$\hat{a}^\dagger |m^{(0)}\rangle = (m^{(0)} + 1)^{\frac{1}{2}} |m^{(0)} + 1\rangle, \quad (4.167)$$

con lo que ahora ya es posible calcular la corrección a segundo orden

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n^{(0)} | \hat{h}_I | m^{(0)} \rangle|^2}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} \quad (4.168)$$

y obtener de $y(a, a^\dagger)$ la forma explícita

$$E_n^{(2)} = \frac{-6\epsilon^2}{2^{\frac{3}{2}}} \left\{ 2(n^{(0)})^2 + 2n^{(0)} + 1 + \frac{1}{6} \right\}. \quad (4.169)$$

Por otro lado

$$\langle n^{(0)} | \hat{y}^4 | n^{(0)} \rangle = -\frac{3}{4} [2(n^{(0)})^2 + 2n^{(0)} + 1], \quad (4.170)$$

y

$$\langle n^{(0)} | \hat{y}^2 \hat{p}_y^2 + \hat{p}_y^2 \hat{y}^2 | n^{(0)} \rangle = -2(n^{(0)})^2 - 2n^{(0)} + 1, \quad (4.171)$$

con lo que podemos obtener nuestras correcciones a la energía por medio de un nuevo Hamiltoniano que sea diagonal resultando que

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n^{(0)} | \hat{h}_I | m^{(0)} \rangle|^2}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} = -\frac{3\epsilon^2}{2^{\frac{3}{2}}} \left[-\frac{4}{3} \langle n^{(0)} | y^4 | n^{(0)} \rangle - \langle n^{(0)} | y^2 p_y^2 + p_y^2 y^2 | n^{(0)} \rangle + \frac{7}{3} \right], \quad (4.172)$$

y resultando que nuestro nuevo Hamiltoniano que ahora es diagonal tiene las siguientes correcciones

$$\langle n^{(0)} | \hat{h}_3 | n^{(0)} \rangle = \langle n^{(0)} | \left[\frac{1}{2} \hat{p}_y^2 + \frac{1}{2} \hat{y}^2 + \frac{3\epsilon^2}{2^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{4}{3} y^4 + \{y^2, p_y^2\} - \frac{7}{3} \right) \right] | n^{(0)} \rangle \quad (4.173)$$

de lo cual podemos pensar en la forma condensada que resulta ser

$$\bar{h}_3 \approx \frac{1}{2} \hat{p}_y^2 + \frac{1}{2} \hat{y}^2 - \epsilon y^3 + \frac{3\epsilon^2}{2^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{4}{3} y^4 + \{y^2, p_y^2\} - \frac{7}{3} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (4.174)$$

que es válida si

$$\left| \frac{\langle n^{(0)} | \hat{h}_I | m^{(0)} \rangle}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} \right| \ll 1, \quad (4.175)$$

o específicamente

$$\left| \frac{\langle n^{(0)} | -\epsilon y^3 | m^{(0)} \rangle}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} \right| \sim \frac{\epsilon n^{\frac{3}{2}}}{3} \ll 1, \quad (4.176)$$

El correspondiente espacio fase del Hamiltoniano cuántico efectivo (4.173) es dado por la figura 4.2. Es importante mencionar que estamos manejando al Hamiltoniano cuántico obtenido por el método aquí descrito, sin un término extra cúbico resultante de (4.174) que no tiene contribución a este nivel, como un Hamiltoniano clásico con espacio fase dado en la figura 4.2 en donde podemos encontrar trayectorias cerradas deformadas del oscilador armónico, debido a

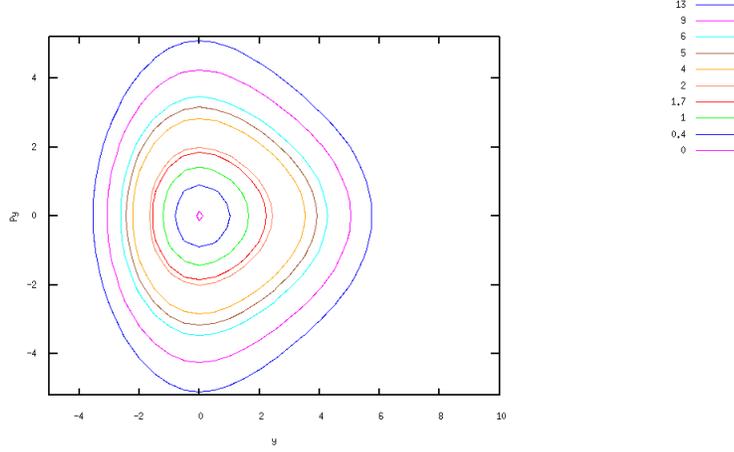


Figura 4.2: Gáfica del espacio fase del Hamiltoniano dado en la ecuación (4.173) a orden ϵ^2 con $\epsilon = 0.1$.

la perturbación cúbica compleja que agregamos con una constante imaginaria extra, y a la manera que escogimos de fijar la condición de norma consecucencia de nuestro método.

Por otro lado es necesario considerar también el espacio fase del Hamiltoniano clásico (4.174) para compararlo con nuestro Hamiltoniano cuántico. Podemos observar que tenemos resultados muy diferentes, dado en la figura 4.3, ya que en las trayectorias clásicas aparecen curvas abiertas que no aparecen en la descripción cuántica a causa de que hay un término cúbico que no influye en los términos diagonales de la matriz cuántica Hamiltoniana. Con la finalidad de obtener una medida de la efectividad de nuestro método debemos considerar el trabajo realizado por Bender [6]. El Hamiltoniano para este caso es

$$h_B = \frac{1}{2}p_q^2 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{3\epsilon^2}{2}[q^4 + \{q^2, p_q^2\} + \frac{2}{3}], \quad (4.177)$$

de forma que si elegimos a $y = q$, $p_q = p_y$ podemos comparar estas dos expresiones. La diferencia es

$$\Delta h \approx -\epsilon y^3 + \frac{3\epsilon^2}{2^{\frac{3}{2}}}(0.06y^4 + 0.29\{y^2, p_y^2\} - 2.32) + \dots \quad (4.178)$$

que se grafica en la figura 4.4 y nos da una idea más clara de las diferencias. Se puede notar que en nuestro caso hay un término y^3 que sobra y el Hamiltoniano resultante no es simétrico en comparación al caso de Bender [9] que si lo es. Por otro lado, en nuestro caso establecer gráficas del espacio fase para un Hamiltoniano cuántico resulta ambiguo. Sin embargo, como método de comparación

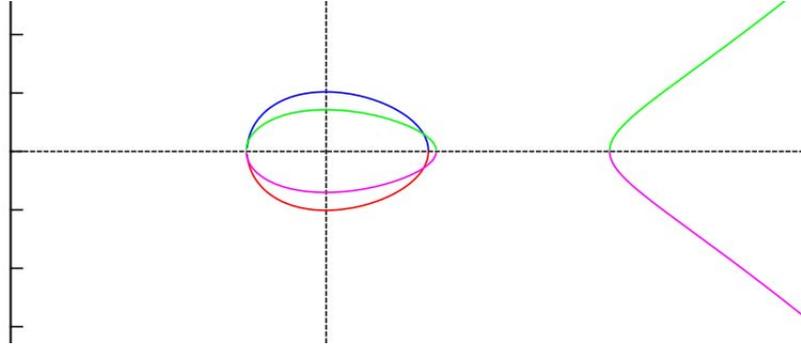


Figura 4.3: La línea verde y la línea rosa representan la trayectoria clásica. La línea roja y azul es la trayectoria de la corrección cuántica agregando las correcciones de (4.174).

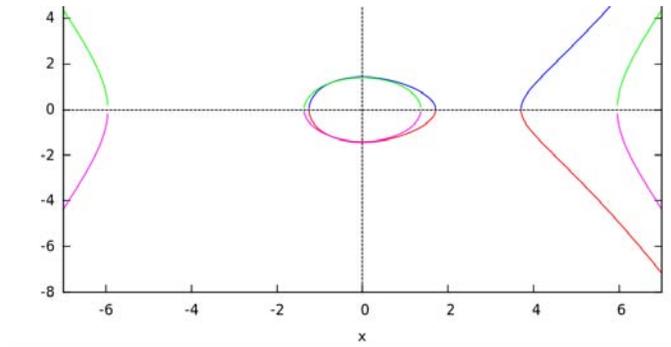


Figura 4.4: La línea azul y la línea roja representan la trayectoria clásica hecha con nuestro método. La línea rosa y verde es la trayectoria resultante de la teoría de Bender basada en la simetría PT.

con otros trabajos es útil. En el caso de nuestro método encontramos una diferencia marcada entre el Hamiltoniano cuántico y el clásico la cual podemos ver en los espacios fases correspondientes (4.2). Esta diferencia es debido a que al hacer el promedio con el método aquí escogido éste no tiene contribución en la diagonal de nuestro método perturbativo. Notamos de la expresión (4.178) que a primer orden sobra un término cúbico que no tiene contribución en la diagonal de la matriz formada por el Hamiltoniano. La única diferencia sustancial es de un término constante en (4.178) lo cual solo desplaza los eigenestados del Hamiltoniano una muy pequeña cantidad ya que esto está a segundo orden en ϵ . En cierto sentido se puede pensar que nuestro método y el dado por Bender tienen un punto de intersección, ya que por otro lado se ha demostrado [6] que estos modelos no Hermíticos pueden relacionarse a modelos Hermíticos. Las diferencias entre estos métodos se resuelven buscando algún sistema físico que

sea descrito usando nuestra teoría o la de Bender para posteriormente comparar los resultados con el experimento y tener criterios que descarten a una u otra física como

4.7. Condición de Norma y los Momentos en Una Dimensión

Con la finalidad de entender de una mejor manera este método en este punto establecemos una condición de norma que incluye al momento. Inicialmente, consideramos un modelo en una dimensión que tiene una relación con el oscilador armónico

$$L = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{\omega^2}{2}z^2 \quad (4.179)$$

y z dividida en parte real y parte imaginaria

$$z = x + iy. \quad (4.180)$$

El Lagrangiano es escrito en términos de estas componentes

$$L_{(x,y)} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\dot{y}^2 + i\dot{x}\dot{y} - \frac{\omega^2}{2}x^2 + \frac{\omega^2}{2}y^2 - i\omega^2xy \quad (4.181)$$

donde el momento para x es

$$p_x = \dot{x} + i\dot{y}, \quad (4.182)$$

y con respecto al otro momento es suficiente establecer la restricción asociada a p_x

$$\Phi_0 = p_x + ip_y, \quad (4.183)$$

con lo que tenemos el Hamiltoniano

$$H_0 = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L_{(x,y)}. \quad (4.184)$$

Por otro lado, consideramos la relación para la parte cinética

$$\dot{x}p_x + \dot{y}p_y = \dot{x}\Phi_0 + p_x^2, \quad (4.185)$$

y el Hamiltoniano de (4.184) es

$$H_T = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}y^2 + i\omega^2xy + \mu^0\Phi_0. \quad (4.186)$$

Es en este punto donde debemos fijar una condición de norma, con el fin de reducir los grados de libertad y caer en un sistema físico. La condición de norma que nosotros hemos escogido es

$$\gamma_\alpha = y - ix - ig_1(x) - ig_2(x)p_x, \quad (4.187)$$

Con lo anterior obtenemos un conjunto de constricciones de segunda clase $\chi_{1\alpha} = (\Phi_0, \gamma_\alpha)$, con la correspondiente matriz de constricciones de segunda clase dada por

$$\mathcal{C}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & i(\partial_x g_1(x) + p_x \partial_x g_2(x)) \\ -i(\partial_x g_1(x) + p_x \partial_x g_2(x)) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.188)$$

y la matriz inversa resultante es

$$\mathcal{C}^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{(\partial_x g_1(x) + p_x \partial_x g_2(x))} \\ -\frac{i}{(\partial_x g_1(x) + p_x \partial_x g_2(x))} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.189)$$

La determinante asociada a estas matrices es

$$\det \mathcal{C}_{ab} = -(\partial_x g_1(x) + p_x \partial_x g_2(x))^2. \quad (4.190)$$

que usando dentro del Hamiltoniano obtenemos un Hamiltoniano reducido

$$\begin{aligned} H_R &= \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{\omega^2}{2} [x + i(ix + ig_1(x) + ig_2(x)p_x + ig_3(x)p_x^2)]^2 + \mu^0 \Phi_0, \\ H_R &= \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{\omega^2}{2} [g_1(x) + g_2(x)p_x]^2 + \mu^0 \Phi_0, \\ H_{Cons} &= [\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{2} g_2^2(x)] p_x^2 + \omega^2 g_1(x) g_2(x) p_x + \frac{\omega^2}{2} g_1^2(x), \end{aligned} \quad (4.191)$$

del cual obtenemos también el Lagrangiano reducido

$$L_{Cons} = \dot{x} p_x + \dot{y} p_y - H_{Cons}. \quad (4.192)$$

La expresión anterior permite una variación

$$\begin{aligned} \delta L_{Cons} &= \delta \dot{x} p_x + \dot{x} \delta p_x + \delta \dot{y} p_y + \dot{y} \delta p_y - \delta H_{Cons} \\ &= \frac{d}{dt} (p_x \delta x) - \dot{p}_x \delta x + \dot{x} \delta p_x + \frac{d}{dt} (p_y \delta y) - \dot{p}_y \delta y + \dot{y} \delta p_y - \delta H_{Cons}, \end{aligned} \quad (4.193)$$

que se incluye a

$$\begin{aligned} \dot{p}_y \delta y &= i \dot{p}_y \delta x + i \dot{p}_y \partial_x g_1 \delta x + i \dot{p}_y p_x \partial_x g_2 \delta x + i g_2 \dot{p}_y \delta p_x \\ &= -\dot{p}_x \delta x - \dot{p}_x \partial_x g_1 \delta x - \dot{p}_x p_x \partial_x g_2 \delta x - g_2 \dot{p}_x \delta p_x, \end{aligned} \quad (4.194)$$

y es resultado de

$$y = ix + ig_1(x) + ig_2(x)p_x, \quad (4.195)$$

$$\dot{y} = i\dot{x} + i\partial_x g_1(x)\dot{x} + i\partial_x g_2(x)\dot{x}p_x + ig_2(x)\dot{p}_x, \quad (4.196)$$

concluyendo que en términos de $\delta x, \delta p_x$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta L_{Cons} &= \frac{d}{dt} [-(p_x \partial_x g_1 + p_x^2 \partial_x g_2) \delta x - \frac{g_2 \delta p_x^2}{2}] \\ &\quad + [\dot{p}_x \partial_x g_1 + \frac{1}{2} \frac{dp_x^2}{dt} \partial_x g_2 - \frac{\partial H_{Cons}}{\partial x}] \delta x \\ &\quad - [\partial_x g_1(x) \dot{x} + \partial_x g_2(x) \dot{x} p_x + \frac{\partial H_{Cons}}{\partial p_x}] \delta p_x, \end{aligned} \quad (4.197)$$

4.7. CONDICIÓN DE NORMA Y LOS MOMENTOS EN UNA DIMENSIÓN 51

con lo cual podemos determinar el momento que es

$$p_x = \frac{-(\dot{x}\partial_x g_1 + \omega^2 g_1 g_2)}{(\omega^2 g_2^2 + \partial_x g_2 \dot{x} + 1)}, \quad (4.198)$$

donde si escogemos que el momento no tiene unidades $[p_x] = 1$, $[g_1] = [g_2] = [L]$ entonces $\omega \sim \frac{1}{[L]}$ y no hay problemas usando las unidades.

Por otro lado es útil definir

$$A = \frac{1}{(1 + \dot{x}\partial_x g_2 + \omega^2 g_2^2)} \quad (4.199)$$

para obtener

$$p_x^2 = A^2(\dot{x}^2(\partial_x g_1)^2 + \omega^4 g_1^2 g_2^2 + 2\omega^2 g_1 g_2 \dot{x}\partial_x g_1) \quad (4.200)$$

y establecer

$$g_{11} = A(\partial_x g_1(x))^2 - \frac{A^2}{2}\dot{x}\partial_x g_2(x)(\partial_x g_1^2(x)) - A^2\omega^2 g_1(x)g_2(x)\partial_x g_1(x)\partial_x g_2(x) - \frac{A^2}{2}(\partial_x g_1(x))^2(1 + \omega^2 g_2^2), \quad (4.201)$$

$$g_0 = A\omega^2 g_1(x)g_2(x)\partial_x g_1(x) - \frac{A^2}{2}\omega^4 g_1^2 g_2^2 \partial_x g_2 - A^2\omega^2 g_1(x)g_2(x)\partial_x g_1(x)(1 + \omega^2 g_2^2(x)) + A\omega^2 g_1(x)g_2(x)\partial_x g_1(x), \quad (4.202)$$

$$\mathcal{U} = \frac{A^2}{2}\omega^4 g_1^2(x)g_2^2(x)(1 + \omega^2 g_2^2(x)) - A\omega^4 g_1^2(x)g_2^2(x) + \frac{\omega^2}{2}g_1^2(x), \quad (4.203)$$

usando una derivada total obtenemos el Lagrangiano

$$L_{Cons} = g_{11}\dot{x}^2 + g_0\dot{x} - \mathcal{U}, \quad (4.204)$$

Tomando un caso concreto

$$g_1(x) = x, \quad g_2(x) = \epsilon U(x) \quad (4.205)$$

obtenemos

$$A \approx [1 - \epsilon\dot{x}\partial_x U(x) - \epsilon^2\omega^2 U^2(x)] \\ A^2 \approx [1 - 2\epsilon\dot{x}\partial_x U(x) + \epsilon^2(\dot{x}\partial_x U - 2\omega^2 U^2(x))] \quad (4.206)$$

además de que

$$p_x = \frac{-(\dot{x} + \epsilon\omega^2 xU)}{(1 + \epsilon\dot{x}\partial_x U)} \approx -\dot{x} + \epsilon[\dot{x}^2\partial_x U - \omega^2 xU] + \epsilon^2[\omega^2 x\dot{x}U\partial_x U - \dot{x}^3(\partial_x U)^2], \quad (4.207)$$

$$g_{11} = \frac{1}{2} - \epsilon(x\dot{x}\partial_x U) + \epsilon^2\left(\frac{\omega^2}{2}U^2 + x\dot{x}^2(\partial_x U)^2 - U^2 - \omega^2 xU\partial_x U - \frac{1}{2}\dot{x}\partial_x U\right), \quad (4.208)$$

$$\mathcal{U} = -\epsilon^2\frac{\omega^4}{2}x^2U^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2, \quad g_0 = \epsilon\omega^2 xU, \quad (4.209)$$

En concreto si escogemos $U(x) = x$ la determinante no se anula a menos que $p_x = -\frac{1}{\epsilon}$ y se obtiene

$$p_x = \frac{-(\dot{x} + \epsilon\omega^2 x^2)}{(1 + \epsilon\dot{x})} \approx -\dot{x} + \epsilon[\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] + \epsilon^2[\omega^2 x^2 \dot{x} - \dot{x}^3], \quad (4.210)$$

$$g_{11} = \frac{1}{2} - \epsilon(x\dot{x}) + \epsilon^2\left(\frac{\omega^2}{2}x^2 + x\dot{x}^2 - x^2 - \omega^2 x^2 - \frac{1}{2}\dot{x}\right), \quad (4.211)$$

$$\mathcal{U} = -\epsilon^2\frac{\omega^4}{2}x^4 + \frac{\omega^2}{2}x^2, \quad g_0 = \epsilon\omega^2 x^2, \quad (4.212)$$

y el Lagrangiano es

$$L_{Cons} \approx \left[\frac{1}{2} - \epsilon(x\dot{x}) + \epsilon^2\left(-\frac{\omega^2}{2}x^2 + x\dot{x}^2 - x^2 - \frac{1}{2}\dot{x}\right)\right]\dot{x}^2 + \left[\epsilon^2\frac{\omega^4}{2}x^4 - \frac{\omega^2}{2}x^2\right], \quad (4.213)$$

De este Lagrangiano vemos que hay una métrica no trivial que depende de la velocidad, en la parte cinética. Esta idea es muy utilizada para ampliar a dos dimensiones y para extender el método. De el Hamiltoniano (4.191) y usando las condiciones de norma con la constricción de primera clase obtenemos

$$H_{Cons} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{2}\epsilon^2 x^2\right]p_x^2 + \omega^2 \epsilon x^2 p_x + \frac{\omega^2}{2}x^2. \quad (4.214)$$

Por otro lado, los paréntesis de Dirac usando la teoría de las constrictiones son

$$\{x, p_x\}^* = -\frac{1}{(\partial_x g_1 + p_x \partial_x g_2)}. \quad (4.215)$$

De esta manera, se obtiene aproximadamente a segundo orden en ϵ , las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -p_x - \epsilon\omega^2 x^2 \\ \dot{p}_x &= -2\omega^2 x(1 - 3\epsilon p_x + 4\epsilon^2 p_x^2) \end{aligned} \quad (4.216)$$

que tienen un punto fijo en $(0, 0)$, si consideramos el espacio-fase dado por la figura 4.5, que es estable. Por otro lado este punto es único a este orden y las trayectorias son deformadas por la perturbación resultando que serán diferentes a las del oscilador armónico. Sin embargo, no solo existe este punto ya que a cuarto orden aparecen nuevos puntos críticos que son aproximadamente $(8.53, -4.21)$ y $(-8.29, -4.07)$ los cuales son repulsivos.

Este modelo y este método dice que si aplicamos este tipo de condición de norma, con un término que incluye al momento, obtenemos un sistema perturbado en el momento y el potencial de interacción con trayectorias cerradas y cercanas al punto de origen. En la siguiente sección mostramos que cuánticamente los distintos sistemas están conectados.

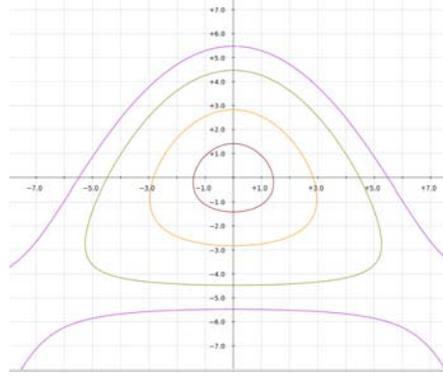


Figura 4.5: Espacio fase para el Hamiltoniano (4.214).

4.8. Formalismo BFV en el modelo

En este apartado buscamos mostrar la relación que hay entre distintas condiciones de norma y como se ve afectada la teoría cuántica correspondiente. Mostramos, por medio de la integral de camino, que las teorías cuánticas en donde se usan distintas condiciones de norma son equivalentes.

Para lograr este fin extendemos nuestro formalismo y usamos la teoría BRST [47] aplicándola al oscilador armónico complejo. Para ésto debemos considerar el correspondiente Lagrangiano complejo asociado

$$L_{(x,y)} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\dot{y}^2 + i\dot{x}\dot{y} - \frac{\omega^2}{2}x^2 + \frac{\omega^2}{2}y^2 - i\omega^2xy. \quad (4.217)$$

del cual los momentos correspondientes son

$$p_x = \dot{x} + i\dot{y}, \quad p_y = -\dot{y} + i\dot{x}, \quad (4.218)$$

resultando que las constricciones de primera clase deben fijarse por medio de una condición de norma, la cual no es única y pueden existir muchas opciones a elegir. Específicamente elegimos dos maneras de fijar la norma $\gamma_{0,1}$

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= p_x + ip_y, \\ \gamma_0 &= y \approx 0, \\ \gamma_1 &= y - ix + iU^{\frac{1}{2}}(x), \\ \{\Phi, \gamma_1\} &= -\frac{i}{2U^{\frac{1}{2}}} \partial_x U(x), \end{aligned}$$

para obtener el Hamiltoniano complejo con la transformación de Legendre

$$H_0 = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L_{(x,y)},$$

y las expresiones totales son

$$H_T = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}y^2 + i\omega^2xy + \mu_0\Phi_0.$$

$$H_0 = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}y^2 + i\omega^2xy.$$

A partir de aquí usamos el formalismo BRST. Dentro de este formalismo el espacio fase se agranda incluyendo grados de libertad fermiónicos, estos grados de libertad tienen el fin de hacer explícita la simetría que es un remanente global de la simetría local de norma existente en la teoría. Pero dado que se ha fijado la norma, la simetría local se pierde y se transforma en una simetría global conocida como BRST. La necesidad de una teoría con estas características es cimentada en el hecho de que para el propagador la suma de todas las probabilidades de los procesos envuelve solamente a las partículas reales en los estados iniciales y finales que deben de ser igual a la unidad. Sin embargo esto resulta insuficiente en teorías más complicadas. Uno necesita en general de un tipo más exótico de partículas conocidas como partículas virtuales. El precio a pagar está en flexibilidad mental, ya que uno debe de aceptar que los nuevos modos obedecen una relación entre el espín y la estadística opuesta a la usual. Estos nuevos modos son llamados fantasmas [10].

Como primer paso se considera que μ^0 es una variable del espacio de configuración a la cual le definimos un correspondiente momento π_0

$$\{\mu^0, \pi_0\} = -\{\pi_0, \mu^0\} = 1. \quad (4.219)$$

Por otro lado, al espacio fase se le adicionan un fantasma y un antifantasma que tienen paréntesis de Poisson dados por

$$\{\bar{\mathcal{P}}, \mathcal{C}\} = \{\mathcal{P}, \bar{\mathcal{C}}\} = -1, \quad (4.220)$$

con los otros paréntesis siendo cero. A partir de estos fantasmas y antifantasmas se obtiene la carga BRST, ya que hay una nueva simetría en esta teoría extendida

$$\Omega = \mathcal{C}\Phi_0 - i\mathcal{P}\pi_0, \quad (4.221)$$

de la cual la carga BRST Ω es el generador. Además las condiciones de norma se introducen mediante las condiciones fermiónicas

$$\Psi_0 = i\bar{\mathcal{C}}\gamma_0 + \bar{\mathcal{P}}\mu^0, \quad \Psi_1 = i\bar{\mathcal{C}}\gamma_1 + \bar{\mathcal{P}}\mu^0, \quad (4.222)$$

que son resultado de incluir fantasmas. A partir de estas condiciones y la carga BRST, se obtiene un paréntesis que después es usado para obtener el Hamiltoniano efectivo

$$\{\Psi_0, \Omega\} = -\mu^0\Phi_0 + \pi_0\gamma_0 - i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} - \bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}, \quad (4.223)$$

$$\{\Psi_1, \Omega\} = -\mu^0\Phi_0 + \pi_0\gamma_1 - i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} - \bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}\left(\frac{\partial_x U}{2U^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Con esta estructura se puede hacer una cuantización usando la integral de camino. Antes de esto se debe mostrar que existe libertad de norma en la integral de camino, la integral de camino es independiente de la selección de las condiciones fermiónicas, teorema de Fradkin-Vilkovisky [47].

La integral de camino usando el Hamiltoniano BRST para esta teoría es

$$Z_{\Psi} = \int \mathcal{D}\mu \exp(iS_{eff}), \quad (4.224)$$

$$S_{eff} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\dot{x}p_x + \dot{y}p_y - \mu^0 \dot{\pi}_0 + \bar{\mathcal{C}}\dot{\mathcal{P}} + \bar{\mathcal{P}}\dot{\mathcal{C}} - H_{eff}), \quad (4.225)$$

$$H_{eff} = H_{BRST} - \{\Psi_0, \Omega\}, \quad (4.226)$$

$$H_{BRST} = H_0,$$

$$H_{eff} = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}y^2 + i\omega^2xy + \bar{\mathcal{C}}\mathcal{C} + \mu^0\Phi_0 - \pi_0\gamma_0 + i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}, \quad (4.227)$$

$$d\mu = dx dp_x dy dp_y d\mu^0 d\pi_0 d\mathcal{P} d\mathcal{C} d\bar{\mathcal{P}} d\bar{\mathcal{C}}, \quad (4.228)$$

y a partir de esto se pueden hacer las siguientes variaciones y la siguiente comparación entre las condiciones fermiónicas

$$\chi_0 = i \int_{t_1}^{t_2} d\tau (\Psi_1 - \Psi_0) = i \int_{t_1}^{t_2} d\tau \bar{\mathcal{C}}(x - U^{\frac{1}{2}}(x)) \quad (4.229)$$

$$\begin{aligned} x' &= x + \{x, (\mathcal{C}\Phi_0 - i\mathcal{P}\pi_0)\}\chi_0 = x + \mathcal{C}\chi_0, \\ y' &= y + \{y, (\mathcal{C}\Phi_0 - i\mathcal{P}\pi_0)\}\chi_0 = y + i\mathcal{C}\chi_0, \\ \mu'^0 &= \mu^0 + \{\mu^0, (\mathcal{C}\Phi_0 - i\mathcal{P}\pi_0)\}\chi_0 = \mu^0 - i\mathcal{P}\chi_0, \\ p_{x'} &= p_x + \{p_x, (\mathcal{C}\Phi_0 - i\mathcal{P}\pi_0)\}\chi_0 = p_x, \\ p_{y'} &= p_y + \{p_y, (\mathcal{C}\Phi_0 - i\mathcal{P}\pi_0)\}\chi_0 = p_y, \\ \pi_0' &= \pi_0, \\ -i\mathcal{P}' &= -i\mathcal{P} + \{-i\mathcal{P}, (\mathcal{C}\Phi_0 - i\mathcal{P}\pi_0)\}\chi_0 = -i\mathcal{P}, \\ \mathcal{C}' &= \mathcal{C} + \{\mathcal{C}, (\mathcal{C}\Phi_0 - i\mathcal{P}\pi_0)\}\chi_0 = \mathcal{C} \\ \bar{\mathcal{C}}' &= \bar{\mathcal{C}} + \{\bar{\mathcal{C}}, (\mathcal{C}\Phi_0 - i\mathcal{P}\pi_0)\}\chi_0 = \bar{\mathcal{C}} + i\chi_0\pi_0, \\ \bar{\mathcal{P}}' &= \bar{\mathcal{P}} + \chi_0\{\bar{\mathcal{P}}, (\mathcal{C}\Phi_0 - i\mathcal{P}\pi_0)\} = \bar{\mathcal{P}} - \chi_0\Phi_0, \end{aligned} \quad (4.230)$$

lo cual se puede aplicar en el Hamiltoniano BRST

$$H'_{BRST} = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{\omega^2}{2}(x + iy)^2, \quad (4.231)$$

resultando que es invariante ante las transformaciones de norma. Lo anterior

también es aplicable al Hamiltoniano efectivo

$$\begin{aligned} H'_{BRST} &= H_{BRST}, \\ H'_{eff} &= H_{eff}. \end{aligned} \quad (4.232)$$

Por otro lado el término cinético es también invariante bajo las transformaciones BRST

$$\begin{aligned} \dot{x}'p'_x + \dot{y}'p'_y - \mu'^0\dot{\pi}'_0 + \bar{\mathcal{C}}'\dot{\mathcal{P}}' + \bar{\mathcal{P}}'\dot{\mathcal{C}}' &= \\ \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - \mu^0\dot{\pi}_0 + \bar{\mathcal{C}}\dot{\mathcal{P}} + \bar{\mathcal{P}}\dot{\mathcal{C}}. \end{aligned} \quad (4.233)$$

con lo que podemos mostrar que la integral de camino es invariante. Para éste fin primero debemos mostrar que la medida de la integral de camino es invariante, por lo menos de forma infinitesimal, dando como resultado

$$\begin{aligned} \frac{\delta x'}{\delta x} &= \delta(t-t') + i\mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}(1 - \partial_x U^{\frac{1}{2}}), \\ \frac{\delta y'}{\delta y} &= \delta(t-t'), \\ \frac{\delta \mu'^0}{\delta \mu^0} &= \delta(t-t'), \\ \frac{\delta p'_x}{\delta p_x} &= \delta(t-t'), \quad \frac{\delta p'_y}{\delta p_y} = \delta(t-t'), \\ \frac{\delta \pi'_0}{\delta \pi_0} &= \delta(t-t'), \quad \frac{\delta \mathcal{P}'}{\delta \mathcal{P}} = \delta(t-t'), \\ \frac{\delta \mathcal{C}'}{\delta \mathcal{C}} &= \delta(t-t'), \\ \frac{\delta \bar{\mathcal{C}}'}{\delta \bar{\mathcal{C}}} &= \delta(t-t') + \pi_0(x - U^{\frac{1}{2}}), \\ \frac{\delta \bar{\mathcal{P}}'}{\delta \bar{\mathcal{P}}} &= \delta(t-t'), \end{aligned} \quad (4.234)$$

lo que infinitesimalmente hablando es

$$\exp\left(\int d\tau\{\Omega, (\Psi_1 - \Psi_0)\}\right) = \exp\left(\int d\tau[\mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}(1 - \frac{\partial U^{\frac{1}{2}}}{\partial x}) + i\pi_0(x - U^{\frac{1}{2}})]\right), \quad (4.235)$$

resultando que la carga BRST genera un cambio infinitesimal en el espacio fase que al aplicar en los elementos de la integral de camino (4.224) contribuye con un elemento que permite pasar a la otra condición de norma fermiónica mostrando el teorema de Fradkin-Vilkovisky. Así hemos mostrado que cuánticamente los sistemas con normas γ_0 y γ_1 están conectados. En la siguiente sección calculamos la integral de camino para nuestro oscilador armónico complejo.

4.9. Integral de Camino y Condiciones de Norma

Con la finalidad de establecer la mecánica cuántica de nuestra teoría compleja usamos la integral de camino y el método de Senjanovic que permite cuantizar sistemas con constricciones de segunda clase [24]. Como un ejemplo consideremos el oscilador armónico (4.217), con condición de norma γ_1 , para lo que presentamos la siguiente notación

$$\xi^a = (x, y), \quad \rho_a = (p_x, p_y), \quad (4.236)$$

$$\tau_a = (\Phi, \gamma_1) \quad (4.237)$$

donde ξ^a incluye las partes real e imaginaria de z y ρ_a que son en principio cantidades complejas. Posteriormente obtenemos la medida de la integral de camino que incluye las constricciones de primera clase y las condiciones de norma dando como resultado

$$\mathcal{D}\Xi = \mathcal{D}\xi^a \mathcal{D}\rho_a \det | \{ \tau_A, \tau_B \} | \delta(\tau_C) \quad (4.238)$$

$$(4.239)$$

y la integral de camino total es

$$Z = \int \mathcal{D}\Xi \exp[i \int dt (\dot{x}p_x + \dot{y}p_y - H_T)]. \quad (4.240)$$

Si se elimina a (y, p_y) , por medio de las funcionales delta $\delta(\tau_C)$ obtenemos

$$Z_R = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p_x \prod_i \left| \frac{2U^{\frac{1}{2}}(x_i)}{\partial_{x_i} U(x_i)} \right| - \frac{i}{2U^{\frac{1}{2}}} \partial_{x_i} U(x_i) \exp[i \int dt (\frac{\partial_x U(x)}{2U^{\frac{1}{2}}(x)} \dot{x}p_x - H_R)]. \quad (4.241)$$

o usando la reparametrización (4.71) se tiene

$$Z_C = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p_{x'} \exp[i \int d\tau (\dot{x}p_{x'} - H_{x'})]. \quad (4.242)$$

con el Hamiltoniano $H_{x'}$ dado por (4.75). De esta manera es posible integrar las variables y, p_y usando la constricción y la condición de norma para obtener una integral de camino real. Es necesario mencionar que los números complejos no tienen orden, pero las particiones temporales resultan una buena herramienta para lograr el ordenamiento. En el siguiente capítulo aplicamos este formalismo en más dimensiones.

Capítulo 5

Generalización para más Dimensiones

El método anteriormente descrito no solo es aplicable a sistemas en una dimensión, ya que podemos generalizar estas ideas y aplicarlo a más dimensiones. En particular en este trabajo consideramos la extensión más simple a dos dimensiones, a parte de la general a múltiples dimensiones.

Un caso especial es de particular interés. Éste nos va a permitir establecer la manera de hacer la correspondiente generalización y nos ayudará a encontrar una relación entre el problema de Kepler, que puede ser visto como un problema en dos dimensiones, y dos osciladores armónicos, o un oscilador en dos dimensiones, por medio de una transformación de norma.

Con lo anterior en mente resulta fácil establecer la generalización del método a más dimensiones lo cual es muy similar a lo ya visto para una dimensión y nos va a permitir relacionar distintos sistemas, con el mismo número de dimensiones, partiendo siempre de un modelo multidimensional complejo a través de fijar distintas condiciones de norma. Con respecto a las condiciones de norma, que deben de existir ya que hay constricciones de primera clase, se explora la forma más general que ésta debe de tener en dos dimensiones y que incluya a los respectivos momentos de alguna teoría en particular.

5.1. Extensión a Más Dimensiones

Consideremos un lagrangiano complejo que es una función de las coordenadas complejas $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$ y sus velocidades

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}(\dot{z}^\alpha)^2 - V(z), \quad (5.1)$$

donde de una manera indirecta, tenemos a x^α, y^α como variables dinámicas.

Por otro lado, proponemos que $V(z)$ es una función holomorfa en z^α con $\alpha = 1, \dots, n$ lo cual implica las ecuaciones de Cauchy-Riemann dadas por el

superíndice

$$\frac{d}{d(z^\alpha)^*} V(z) = 0. \quad (5.2)$$

Entonces el Lagrangiano es invariante bajo la transformación

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \lambda^\alpha(t), \quad y^{\alpha'} = y^\alpha + i\lambda^\alpha(t). \quad (5.3)$$

Como un buen punto de partida se podría hacer una variación en z^α con el fin de encontrar la ecuación de movimiento, pero realmente tenemos más variables con una simetría interna. En este caso el Lagrangiano es dado por

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^\alpha)^2 - \frac{1}{2}(\dot{y}^\alpha)^2 + i(\dot{x}^\alpha)(\dot{y}^\alpha) - V_R(x, y) - iV_I(x, y). \quad (5.4)$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a este Lagrangiano no son independientes, ya que es posible dividir las en parte real y parte imaginaria

$$-\ddot{x}^\alpha - \frac{\partial V_R(x, y)}{\partial x^\alpha} = 0, \quad -\ddot{y}^\alpha + \frac{\partial V_R(x, y)}{\partial y^\alpha} = 0, \quad (5.5)$$

resultando que x e y son cantidades reales. A partir de lo anterior se procede a desarrollar la formulación canónica de esta teoría con estas variables. Éstas nos permitirán notar la simetría del sistema que es trivial en el sentido de que no podemos establecer alguna relación entre las coordenadas holomorfas y anti-holomorfas. Los momentos canónicos para el Lagrangiano (5.4) son

$$p_{x\alpha} := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \dot{x}^\alpha + i\dot{y}^\alpha, \quad p_{y\alpha} := \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\alpha} = -\dot{y}^\alpha + i\dot{x}^\alpha. \quad (5.6)$$

Usando estas definiciones, obtenemos las constricciones primarias

$$\Phi_\alpha = p_{x\alpha} + ip_{y\alpha} \approx 0, \quad (5.7)$$

donde se incluye el símbolo de igualdad " \approx " para enfatizar que la cantidad Φ_α es numéricamente restringida a cero pero no idénticamente desaparece [4]. Siguiendo la definición del Hamiltoniano canónico en el espacio fase

$$H = \dot{x}^\alpha p_{x\alpha} + \dot{y}^\alpha p_{y\alpha} - L, \quad (5.8)$$

se observa que $H, L, p_{x\alpha}, p_{y\alpha}$ son cantidades complejas. Aunque de la definición se obtiene el Hamiltoniano explícito total

$$H_T = \frac{1}{2}p_{x\alpha}^2 + V(z) + \mu^\alpha \Phi_\alpha, \quad (5.9)$$

donde se adiciona la restricción primaria siguiendo el método de Dirac [4]. Las ecuaciones resultantes de movimiento son

$$\dot{x}^\alpha = \{x^\alpha, H_T\} = p_x^\alpha + \mu^\alpha, \quad \dot{y}^\alpha = \{y^\alpha, H_T\} = p_y^\alpha + i\mu^\alpha, \quad (5.10)$$

$$\dot{p}_{x\alpha} = \{p_{x\alpha}, H_T\} = -\frac{\partial V}{\partial x^\alpha}, \quad \dot{p}_{y\alpha} = \{p_{y\alpha}, H_T\} = -\frac{\partial V}{\partial y^\alpha}. \quad (5.11)$$

De la ecuación (5.10) observamos que hay n grados de libertad de norma ya que observamos n multiplicadores de Lagrange arbitrarios.

Es importante notar que la evolución temporal no es necesariamente una cantidad real, por lo tanto nuestras variables reales x e y bajo la evolución pueden tener una contribución imaginaria.

En lo siguiente vamos a evolucionar las constricciones (5.7) para entender el tipo correspondiente, si es de primera o segunda clase. La evolución temporal para estas constricciones primarias es

$$\dot{\Phi}_\alpha = \{\Phi_\alpha, H\} = -2 \frac{dV(z)}{d(z^\alpha)^*} \approx 0. \quad (5.12)$$

Con lo anterior uno puede ver la presencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada superíndice para $V(x, y)$. En consecuencia si $V(x, y)$ es una función holomorfa obtenemos que Φ_α son constricciones de primera clase. Además el sistema ya no tiene otras constricciones y nuestro espacio de configuración reducido tiene n -grados de libertad reales. A partir de lo anterior se vuelve importante contar los grados de libertad de nuestro espacio-fase. Dado que tenemos a $(x^\alpha, y^\alpha, p_{x\alpha}, p_{y\alpha})$ como espacio fase nuestro punto de partida es un sistema con $4n$ grados de libertad a lo que debemos restar $2n$ grados de libertad dado que tenemos las constricciones de primera clase y las correspondientes condiciones de norma. Nuestro sistema Hamiltoniano restringido deberá tener $2n$ grados de libertad en el espacio fase.

Por otro lado siguiendo el método de cuantización de Dirac, los estados físicos son definidos por imponer que la acción de las constricciones de primera clase sobre los estados es igual a cero. En la representación de coordenadas implica

$$(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \hbar \frac{\partial}{\partial y^\alpha}) [G_R(x, y) + iG_I(x, y)] \approx 0, \quad (5.13)$$

resultando las ecuaciones de Cauchy-Riemann para cada superíndice, si se hace una descomposición en parte real y parte imaginaria. De esta manera, se obtiene las ecuaciones de Cauchy-Riemann que aparecen en este formalismo como un inverso bajo las translaciones generadas por la restricción de primera clase.

En otras palabras, obtenemos que nuestra teoría es compatible con la formulación de Dirac [4, 10] pero debe satisfacer que el potencial es una función holomorfa

$$\hat{\Phi}_\alpha V(x, y) = 0, \quad (5.14)$$

y satisfacen esta invarianza traslacional

$$V(x^\alpha, y^\alpha) + iV(x^\alpha, y^\alpha) = V(x^\alpha - \epsilon_1^\alpha, y^\alpha) + iV(x^\alpha, y^\alpha - \epsilon_2^\alpha). \quad (5.15)$$

Ahora, estas constricciones serán el generador de las transformaciones de norma [4]. Las transformaciones producidas por las constricciones de primera clase son

$$\delta x^\alpha = \{x^\alpha, \epsilon^\beta \Phi_\beta\} = \epsilon^\alpha, \quad \delta y^\alpha = \{y^\alpha, \epsilon^\beta \Phi_\beta\} = i\epsilon^\alpha, \quad (5.16)$$

$$\delta p_{x\alpha} = \{p_{x\alpha}, \epsilon^\beta \Phi_\beta\} = 0, \quad \delta p_{y\alpha} = \{p_{y\alpha}, \epsilon^\beta \Phi_\beta\} = 0, \quad (5.17)$$

En consecuencia tenemos

$$\delta z^\alpha = 0. \quad (5.18)$$

de acuerdo con la transformación (5.3). Desde un punto de vista pragmático z^α y p_{z^α} son observables de Dirac con variación nula, pero ésto implica una estructura más complicada, si se tiene en cuenta la variación de la parte real y la parte imaginaria en z . En este escenario es necesario imponer una condición de norma por cada constricción de primera clase con el fin de obtener un espacio fase reducido. Entonces de acuerdo a la condición de norma tenemos una teoría real diferente. El punto interesante es que todas estas teorías son reales y estan conectadas por una transformación de norma compleja que nosotros obtenemos de la formulación Hamiltoniana siendo cantidades complejas obtenidas para las partes real e imaginaria. Además el espacio- fase es más amplio que el espacio de configuración ya que μ^α juega un papel en esta formulación y es posible escogerle como una cantidad real a δx^α o a δy^α . Para el proposito de aplicar un método que no es trivial y que usa esta estructura matemática, debemos proponer una condición de norma en la parte real o imaginaria de z^α de forma que la teoría resultante es real y en consecuencia el grado imaginario de libertad es eliminado. Además, esto producirá que las componentes, real e imaginaria, interactúen entre si y envíen información de un lado al otro. Adicionalmente, el procedimiento no forza a fijar la simetría de norma para el Hamiltoniano en una forma específica y la condición de norma es seleccionada de acuerdo al modelo real que nosotros deseamos construir.

El método comparte un origen común con los modelos complejos de Ashtekar basados en las condiciones de realidad y la aplicación de la condición de norma es equivalente al uso del producto interno [11]. Sin embargo, las condiciones de realidad son una manera de seleccionar una condición de norma. Debemos notar que hay muchas maneras de remover esta libertad en los sistemas complejos para obtener un sistema Hermítico.

El siguiente paso es determinar el multiplicador de Lagrange μ^α (5.10) usando las condiciones de norma $\gamma_\alpha(x, y)$. La evolución canónica de esta condición nos da

$$\dot{\gamma}^\alpha = \{\gamma^\alpha, H_T\} = \{\gamma^\alpha, H + \mu^\beta \Phi_\beta\} = \{\gamma^\alpha, H\} - \mu^\beta H_\beta^\alpha \approx 0, \quad (5.19)$$

con

$$\begin{aligned} H_\beta^\alpha &= \{\Phi_\beta, \gamma^\alpha\} = \partial_{x^\beta} \gamma^\alpha + i \partial_{y^\beta} \gamma^\alpha, \\ H_\beta^\alpha (H^{-1})^\beta_\sigma &= \delta_\sigma^\alpha, \end{aligned} \quad (5.20)$$

entonces

$$\mu^\alpha \approx (H^{-1})^\alpha_\beta p_x^\sigma \partial_{x^\sigma} \gamma^\beta. \quad (5.21)$$

Esto implica para las ecuaciones de movimiento la siguiente expresión

$$\dot{x}^\alpha = p_x^\alpha + (H^{-1})^\alpha_\beta p_x^\sigma \partial_{x^\sigma} \gamma^\beta, \quad \dot{y}^\alpha = p_y^\alpha + i(H^{-1})^\alpha_\beta p_x^\sigma \partial_{x^\sigma} \gamma^\beta, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{x\alpha} = \{p_{x\alpha}, H_T\} &= -\frac{\partial V_R(x, y)}{\partial x^\alpha} - i \frac{\partial V_I(x, y)}{\partial x^\alpha}, \\ \dot{p}_{y\alpha} = \{p_{y\alpha}, H_T\} &= -\frac{\partial V_R(x, y)}{\partial y^\alpha} - i \frac{\partial V_I(x, y)}{\partial y^\alpha}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

En este caso, debemos considerar soluciones reales para el momento p_x en términos de velocidades y obtenemos una acción de segundo orden que obtiene un término con una métrica dependiente de la velocidad. Entonces seleccionando una apropiada condición de norma obtenemos un mapeo de el espacio-fase complejo al espacio físico real. De alguna manera la simetría selecciona la condición de norma de forma que se obtiene un espacio fase reducido real. Por otro lado si queremos cuantizar la teoría real se pueden seguir dos rutas, primero nosotros comparamos los paréntesis de Dirac para las variables en el espacio fase reducido y promover los paréntesis a conmutadores. El segundo procedimiento es construir la medida de la integral de camino usando el procedimiento de Senjanovic [24]. En las siguientes secciones se describen varios ejemplos de como trabaja específicamente este método.

5.2. Problema Central de Kepler y Oscilador Armónico

En esta parte describimos un caso particular para ilustrar nuestra estrategia en sistemas con más grados de libertad. Específicamente se considera el caso de dos dimensiones en donde encontramos una transformación de norma entre el oscilador armónico y un campo central.

El modelo complejo inicial es dado por el Lagrangiano

$$L(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{z}_2^2 - \frac{\omega_1^2}{2} z_1^2 - \frac{\omega_2^2}{2} z_2^2 \quad (5.24)$$

con $z_1 = x + iy$ y $z_2 = u + iv$. A partir del Lagrangiano anterior obtenemos el momento

$$\begin{aligned} p_x &= \dot{x} + i\dot{y}, & p_y &= -\dot{y} + i\dot{x}, \\ p_u &= \dot{u} + i\dot{v}, & p_v &= -\dot{v} + i\dot{u}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

resultando dos clases de constricciones

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= p_x + ip_y \approx 0, \\ \Phi_1 &= p_u + ip_v \approx 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

En consecuencia es necesario incluir dos condiciones de norma

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= x + iy - iU^{\frac{1}{2}}(y, v) \approx 0, \\ \gamma_1 &= u + iv - i\mathcal{U}^{\frac{1}{2}}(y, v) \approx 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

El conjunto completo de constricciones de segunda clase es $\chi_A = (\Phi_0, \gamma_0, \Phi_1, \gamma_1)$, con la matriz de constricciones de segunda clase $\mathcal{C}_{AB} = \{\chi_A, \chi_B\}$ dada por

$$\mathcal{C}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -(\partial_y U^{\frac{1}{2}}) & 0 & -(\partial_y \mathcal{U}^{\frac{1}{2}}) \\ (\partial_y U^{\frac{1}{2}}) & 0 & (\partial_v U^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 0 & -(\partial_v U^{\frac{1}{2}}) & 0 & -(\partial_v \mathcal{U}^{\frac{1}{2}}) \\ (\partial_y \mathcal{U}^{\frac{1}{2}}) & 0 & (\partial_v \mathcal{U}^{\frac{1}{2}}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

y la correspondiente determinante

$$\det \mathcal{C}_{AB} = [(\partial_y U^{\frac{1}{2}})(\partial_v \mathcal{U}^{\frac{1}{2}}) - (\partial_y \mathcal{U}^{\frac{1}{2}})(\partial_v U^{\frac{1}{2}})]^2 \neq 0. \quad (5.29)$$

El Hamiltoniano total para este caso resulta

$$\begin{aligned} H_{T(y,v)} = & -\frac{1}{2}p_y^2 + \frac{\omega_1^2}{2}x^2 - \frac{\omega_1^2}{2}y^2 + i\omega_1^2xy \\ & -\frac{1}{2}p_v^2 + \frac{\omega_2^2}{2}u^2 - \frac{\omega_2^2}{2}v^2 + i\omega_2^2uv \\ & + \mu^0\Phi_0 + \mu^1\Phi_1. \end{aligned} \quad (5.30)$$

En el espacio reducido los momentos son determinados por

$$p_y = -[-\dot{y} + i\dot{x}]|_{cons} = -\frac{d}{dt}(U^{\frac{1}{2}}), \quad p_v = -[-\dot{v} + i\dot{u}]|_{cons} = -\frac{d}{dt}(\mathcal{U}^{\frac{1}{2}}), \quad (5.31)$$

De la misma manera es posible aplicar en (5.30), las constricciones (5.26) y las condiciones de norma (5.27) resultando

$$H_R = -\frac{1}{2}p_y^2 - \frac{1}{2}p_v^2 + \frac{\omega_1^2}{2}U(y,v) + \frac{\omega_2^2}{2}\mathcal{U}(y,v). \quad (5.32)$$

transformation Seleccionando las variables $r^2 = y^2 + v^2$, $y = r \cos(\theta)$ y $v = r \sin(\theta)$ el Lagrangiano reducido es

$$L_R = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dU^{\frac{1}{2}}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\mathcal{U}^{\frac{1}{2}}}{dt} \right)^2 \right] - \frac{\omega_1^2}{2}U(r,\theta) - \frac{\omega_2^2}{2}\mathcal{U}(r,\theta) \quad (5.33)$$

Por otro lado escogiendo frecuencias iguales $\omega_1^2 = \omega_2^2$ y con el potencial dado por

$$U^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{r^\beta} = r^{1-\beta} \cos(\theta), \quad \mathcal{U}^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{r^\beta} = r^{1-\beta} \sin(\theta). \quad (5.34)$$

Obteniendo para la determinante del algebra de las constricciones la siguiente expresión

$$\det | \mathcal{C}_{AB} | = \frac{(2\beta y^2 + 2\beta v^2 - 1)^2}{(y^2 + v^2)^{4\beta}}, \quad (5.35)$$

y la acción reducida es

$$S_R = \int dt \left[-\frac{1}{2} r^{2-2\beta} \dot{\theta}^2 - \frac{(1-\beta)^2}{2} r^{-2\beta} \dot{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2} r^{2(1-\beta)} \right]. \quad (5.36)$$

Usando una nueva selección de tiempo

$$\left(\frac{d\tau}{dt} \right) = r^{2\beta}, \quad \dot{A} = \frac{dA}{d\tau}, \quad (5.37)$$

y el siguiente cambio de variables

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{(1-\beta)} \theta, \quad \tilde{r} = (1-\beta)r, \quad \omega_1^2 = \tilde{\omega}_1^2 (1-\beta)^{2(1-2\beta)} \quad (5.38)$$

obtenemos la acción

$$\tilde{S}_{\tilde{R}} = \int d\tau \left[-\frac{1}{2} \tilde{r}^2 \dot{\tilde{\theta}}^2 - \frac{1}{2} \dot{\tilde{r}}^2 - \frac{\tilde{\omega}_1^2}{2} \tilde{r}^{2(1-2\beta)} \right] \quad (5.39)$$

con Hamiltoniano

$$\tilde{H}_{\tilde{R}} = \frac{1}{2} (p_{\tilde{r}}^2 + \frac{p_{\tilde{\theta}}^2}{\tilde{r}^2}) - \frac{\tilde{\omega}_1^2}{2} \tilde{r}^{2(1-2\beta)}, \quad (5.40)$$

de lo que observamos que para $\beta = \frac{3}{4}$, el Hamiltoniano es reducido al problema central de Kepler. Por lo tanto de esta manera hemos mostrado que nuestro formalismo también funciona para sistemas con más dimensiones. En la siguiente sección hacemos una generalización de nuestro método a más dimensiones sin alguna condición de norma en particular, además agregamos en la condición de norma los momentos del sistema, lo cual nos permitirá encontrar una métrica no trivial para el respectivo Lagrangiano.

5.3. Condición General de Norma para Dos Dimensiones

En esta sección incluimos a los momentos en nuestras condiciones de norma. Primero que nada consideramos el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \dot{s}^2 - \frac{\omega_1^2}{2} z^2 - \frac{\omega_2^2}{2} s^2, \quad (5.41)$$

y haciendo la división usual

$$z = x + iy, \quad s = v + iw, \quad (5.42)$$

el Lagrangiano es

$$\begin{aligned} L_{(x,y,v,w)} = & \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \dot{y}^2 + i\dot{x}\dot{y} - \frac{\omega_1^2}{2} x^2 + \frac{\omega_1^2}{2} y^2 - i\omega_1^2 xy \\ & + \frac{1}{2} \dot{v}^2 - \frac{1}{2} \dot{w}^2 + i\dot{v}\dot{w} - \frac{\omega_2^2}{2} v^2 + \frac{\omega_2^2}{2} w^2 - i\omega_2^2 vw, \end{aligned} \quad (5.43)$$

de lo cual se pueden obtener los momentos

$$p_x = \dot{x} + i\dot{y}, \quad p_v = \dot{v} + i\dot{w}, \quad (5.44)$$

y las constricciones primarias son

$$\Phi_0 = p_x + ip_y, \quad \Phi_1 = p_v + ip_w, \quad (5.45)$$

resultando el Hamiltoniano

$$H_1 = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{v}p_v + \dot{w}p_w - L_{(x,y,v,w)}, \quad (5.46)$$

además de considerar las siguientes relaciones

$$\dot{x}p_x + \dot{y}p_y = \dot{x}\Phi_0 + p_x^2, \quad \dot{v}p_v + \dot{w}p_w = \dot{v}\Phi_1 + p_v^2, \quad (5.47)$$

con la finalidad de obtener el Hamiltoniano total

$$\begin{aligned} H_{1T} &= \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{\omega_1^2}{2}x^2 - \frac{\omega_1^2}{2}y^2 + i\omega_1^2xy + \frac{1}{2}p_v^2 \\ &+ \frac{\omega_2^2}{2}v^2 - \frac{\omega_2^2}{2}w^2 + i\omega_2^2vw + \mu^0\Phi_0 + \mu^1\Phi_1. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Las condiciones de norma que incluyen un término lineal en los momentos son

$$\begin{aligned} \gamma_{0\alpha} &= y - ix - ig_1(x) - ig_2(x)p_x, \\ \gamma_{1\alpha} &= w - iv - ih_1(v) - ih_2(v)p_v, \end{aligned} \quad (5.49)$$

siendo necesario definir

$$B = i(\partial_x g_1 + p_x \partial_x g_2), \quad C = i(\partial_v h_1 + p_v \partial_v h_2) \quad (5.50)$$

con la finalidad de manejar y calcular de forma fácil la matriz asociada formada por el conjunto de constricciones $\chi_A = (\Phi_0, \gamma_{0\alpha}, \Phi_1, \gamma_{1\alpha})$, con la matriz de constricciones de segunda clase $\mathcal{B}_{AB} = \{\chi_A, \chi_B\}$ dada por

$$\mathcal{B}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & -C & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

La determinante para (5.51) debe ser diferente de cero, si queremos un mapéo que sea efectivo. La determinante es

$$\det B_{ab} = B^2 C^2 = (\partial_x g_1 + p_x \partial_x g_2)^2 (\partial_v h_1 + p_v \partial_v h_2)^2, \quad (5.52)$$

y por medio del uso de estas constricciones, obtenemos el Hamiltoniano reducido para estas condiciones de norma

$$\begin{aligned} H_{1Cons} &= \left[\frac{1}{2} + \frac{\omega_1^2}{2} g_2^2(x) \right] p_x^2 + \omega_1^2 g_1(x) g_2(x) p_x + \frac{\omega_1^2}{2} g_1^2(x) \\ &+ \left[\frac{1}{2} + \frac{\omega_2^2}{2} h_2^2(v) \right] p_v^2 + \omega_2^2 h_1(v) h_2(v) p_v + \frac{\omega_2^2}{2} h_1^2(v), \end{aligned} \quad (5.53)$$

y el Lagrangiano que obtenemos de este Hamiltoniano es

$$L_{1Cons} = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{v}p_v + \dot{w}p_w - H_{1Cons}, \quad (5.54)$$

con la variación que es hecha para este Lagrangiano, es posible obtener los momentos

$$\begin{aligned} \delta L_{1Cons} &= \delta \dot{x}p_x + \dot{x}\delta p_x + \delta \dot{y}p_y + \dot{y}\delta p_y \\ &\quad + \delta \dot{v}p_v + \dot{v}\delta p_v + \delta \dot{w}p_w + \dot{w}\delta p_w - \delta H_{1Cons} \\ &= \delta \dot{x}p_x + \dot{x}\delta p_x + \frac{d}{dt}(p_y\delta y) - \dot{p}_y\delta y + \dot{y}\delta p_y \\ &\quad + \delta \dot{v}p_v + \dot{v}\delta p_v + \frac{d}{dt}(p_w\delta w) - \dot{p}_w\delta w + \dot{w}\delta p_w - \delta H_{1Cons} \\ &= \frac{d}{dt}(p_x\delta x) - \dot{p}_x\delta x + \dot{x}\delta p_x + \frac{d}{dt}(p_y\delta y) - \dot{p}_y\delta y + \dot{y}\delta p_y \\ &\quad + \frac{d}{dt}(p_v\delta v) - \dot{p}_v\delta v + \dot{v}\delta p_v + \frac{d}{dt}(p_w\delta w) \\ &\quad - \dot{p}_w\delta w + \dot{w}\delta p_w - \delta H_{1Cons}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

y con la finalidad de establecer una reducción, se utilizan a continuación las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \dot{p}_y\delta y &= i\dot{p}_y\delta x + i\dot{p}_y\partial_x g_1\delta x + i\dot{p}_y p_x\partial_x g_2\delta x + ig_2\dot{p}_y\delta p_x \\ &= -\dot{p}_x\delta x - \dot{p}_x\partial_x g_1\delta x - \dot{p}_x p_x\partial_x g_2\delta x - g_2\dot{p}_x\delta p_x, \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_w\delta w &= i\dot{p}_w\delta v + i\dot{p}_w\partial_v h_1\delta v + i\dot{p}_w p_v\partial_v h_2\delta v + ih_2\dot{p}_w\delta p_v \\ &= -\dot{p}_v\delta v - \dot{p}_v\partial_v h_1\delta v - \dot{p}_v p_v\partial_v h_2\delta v - h_2\dot{p}_v\delta p_v, \end{aligned} \quad (5.57)$$

donde se ha usado en concreto

$$\begin{aligned} y &= ix + ig_1(x) + ig_2(x)p_x, \\ \dot{y} &= i\dot{x} + i\partial_x g_1(x)\dot{x} + i\partial_x g_2(x)\dot{x}p_x + ig_2(x)\dot{p}_x, \\ w &= iv + ih_1(v) + ih_2(v)p_v, \\ \dot{w} &= i\dot{v} + i\partial_v h_1(v)\dot{v} + i\partial_v h_2(v)\dot{v}p_v + ih_2(v)\dot{p}_v, \end{aligned} \quad (5.58)$$

y la variación para la acción es

$$\begin{aligned}
\delta L_{1Cons} &= \frac{d}{dt} \left[-(p_x \partial_x g_1 + p_x^2 \partial_x g_2) \delta x - \frac{g_2 \delta p_x^2}{2} \right. \\
&\quad \left. -(p_v \partial_v h_1 + p_v^2 \partial_v h_2) \delta v - \frac{h_2 \delta p_v^2}{2} \right] \\
&\quad + [\dot{p}_x \partial_x g_1 + \frac{1}{2} \frac{dp_x^2}{dt} \partial_x g_2 - \frac{\partial H_{1Cons}}{\partial x}] \delta x \\
&\quad + [\dot{p}_v \partial_v h_1 + \frac{1}{2} \frac{dp_v^2}{dt} \partial_v h_2 - \frac{\partial H_{1Cons}}{\partial v}] \delta v \\
&\quad - [\partial_x g_1(x) \dot{x} + \partial_x g_2(x) \dot{x} p_x + \frac{\partial H_{1Cons}}{\partial p_x}] \delta p_x \\
&\quad - [\partial_v h_1(v) \dot{v} + \partial_v h_2(v) \dot{v} p_v + \frac{\partial H_{1Cons}}{\partial p_v}] \delta p_v, \tag{5.59}
\end{aligned}$$

resultando los momentos

$$p_x = \frac{-(\dot{x} \partial_x g_1 + \omega_1^2 g_1 g_2)}{(\omega_1^2 g_2^2 + \partial_x g_2 \dot{x} + 1)}, \tag{5.60}$$

$$p_v = \frac{-(\dot{v} \partial_v h_1 + \omega_2^2 h_1 h_2)}{(\omega_2^2 h_2^2 + \partial_v h_2 \dot{v} + 1)}, \tag{5.61}$$

siendo posible ahora encontrar el Lagrangiano que es reducido por las constricciones

$$L_{1Cons} = \dot{x} p_x + (\dot{y} p_y)_{Cons} + \dot{v} p_v + (\dot{w} p_w)_{Cons} - H_{1Cons}, \tag{5.62}$$

además debemos notar que en la parte cinética agregamos el símbolo $()_{Cons}$ con la intención de indicar que aquí también se aplican las constricciones y las condiciones de norma. A partir de lo anterior podemos utilizar las definiciones de los momentos en la variación para el Lagrangiano

$$L_{Cons} = g_{\alpha\beta}(x, v, \dot{x}, \dot{v}) \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta + I_\alpha \dot{X}^\alpha - k_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta, \tag{5.63}$$

con $X = (x, v)$ y donde

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \tag{5.64}$$

y además

$$k_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix}, \tag{5.65}$$

de tal forma que

$$A = \frac{1}{(\omega_1^2 g_2^2(x) + \dot{x} \partial_x g_2(x) + 1)} \quad (5.66)$$

$$B = \frac{1}{(\omega_2^2 h_2^2(v) + \dot{v} \partial_v h_2(v) + 1)} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} E &= [A(\partial_x g_1(x))^2 - A^2 \omega_1^2 g_1(x) g_2(x) \partial_x g_1(x) \partial_x g_2(x) - \frac{A^2}{2} (\partial_x g_1(x))^2 \\ &\quad - \frac{A^2}{2} \omega_1^2 g_2^2(x) (\partial_x g_1(x))^2 - \frac{A^2}{2} (\partial_x g_1(x))^2 (\partial_x g_2(x) \dot{x})], \\ F &= [B(\partial_v h_1(v))^2 - B^2 \omega_2^2 h_1(v) h_2(v) \partial_v h_1(v) \partial_v h_2(v) - \frac{B^2}{2} (\partial_v h_1(v))^2 \\ &\quad - \frac{B^2}{2} \omega_2^2 h_2^2(v) (\partial_v h_1(v))^2 - \frac{B^2}{2} (\partial_v h_1(v))^2 (\partial_v h_2(v) \dot{v})], \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= A \omega_1^2 g_1(x) g_2(x) \partial_x g_1(x) - \frac{A^2}{2} \omega_1^4 g_1^2(x) g_2^2(x) \partial_x g_2(x) \\ &\quad - A^2 \omega_1^2 g_1(x) g_2(x) \partial_x g_1(x) - A \omega_1^2 g_1(x) g_2(x) \partial_x g_1(x) \\ &\quad - A^2 \omega_1^4 g_1(x) g_2^3(x) \partial_x g_1(x), \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= B \omega_2^2 h_1(v) h_2(v) \partial_v h_1(v) - \frac{B^2}{2} \omega_2^4 h_1^2(v) h_2^2(v) \partial_v h_2(v) \\ &\quad - B^2 \omega_2^2 h_1(v) h_2(v) \partial_v h_1(v) + B \omega_2^2 h_1(v) h_2(v) \partial_v h_1(v) \\ &\quad - B^2 \omega_2^4 h_1(v) h_2^3(v) \partial_v h_1(v), \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= A \omega_1^4 g_1^2(x) g_2^2(x) - \frac{A^2}{2} \omega_1^4 g_1^2(x) g_2^2(x) - \frac{A^2}{2} \omega_1^6 g_1^2(x) g_2^4(x) \\ &\quad + A \omega_1^4 g_1^2(x) g_2^2(x) - \frac{\omega_1^2}{2} g_1^2(x), \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} k_{22} &= B \omega_2^4 h_1^2(v) h_2^2(v) - \frac{B^2}{2} \omega_2^4 h_1^2(v) h_2^2(v) - \frac{B^2}{2} \omega_2^6 h_1^2(v) h_2^4(v) \\ &\quad + B \omega_2^4 h_1^2(v) h_2^2(v) - \frac{\omega_2^2}{2} h_1^2(v), \end{aligned} \quad (5.72)$$

encontrando que hay una métrica asociada que depende de las velocidades en la parte cinética. Otro caso que tiene una relación con este procedimiento son las teorías de orden superior en las cuales estableceremos una condición de norma que es diferente a la trivial $y = 0$, resultando que estas condiciones de norma tienen una relación con las condiciones de realidad [11].

En la siguiente sección aplicamos el método complejo aquí descrito al caso de las teorías de orden superior para el modelo de Pais-Uhlenbeck.

Capítulo 6

Teoría de Orden Superior Compleja

En esta sección nos enfocaremos en un caso concreto al cual le podemos aplicar el método aquí descrito. Las teorías de orden superior nos podrían ayudar a resolver muchos problemas que existen actualmente en la física contemporánea. Sin embargo, estas teorías no han tenido avances que sean significativos en la actualidad. En este capítulo veremos la aplicación concreta de nuestro método al modelo de Pais-Uhlenbeck y consideraremos una manera de incluir interacciones. En trabajos anteriores se ha propuesto una transformación canónica compleja [22] que establece una relación entre el modelo de Pais-Uhlenbeck y dos osciladores armónicos. Nosotros retomaremos este trabajo, pero desde otro punto de vista en el que se considera a las transformaciones canónicas como un caso muy especial y analizaremos la manera de establecer las condiciones de norma que generen una relación concreta entre estos modelos partiendo de una generalización compleja.

Como en el caso de los ejemplos expuestos anteriormente encontramos que para la generalización compleja del modelo de Pais-Uhlenbeck, que también resulta ser una función holomorfa de múltiples variables complejas, tenemos cierta libertad de norma que podremos aprovechar y a través de las transformaciones de norma relacionar a diferentes modelos que son reales.

Anteriormente se ha mostrado la equivalencia clásica entre el modelo de Pais-Uhlenbeck y el oscilador armónico. Sin embargo, cuánticamente hablando esta equivalencia desaparece y ya no es posible plantear de una manera adecuada la cuantización de este modelo. En esta parte del trabajo nos enfocaremos en resolver este problema por medio de la integral de camino y el uso del teorema de Fadkin-Vilkovisky.

6.1. Modelo de Pais-Uhlenbeck Complejo

Para comenzar consideremos una teoría con derivada temporal de orden superior compleja, para ser específicos consideremos el modelo de Pais-Uhlenbeck complejo, el cual tiene cierta libertad de norma que aquí mostraremos. En consecuencia demostraremos que imponiendo distintas condiciones de norma, podemos proyectar el sistema a diferentes teorías reales.

El Lagrangiano para el modelo de Pais-Uhlenbeck complejo es dado por

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ -\frac{1}{2} \dot{z}^2 + \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} z^2 - \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2} z^2 \right\}, \quad (6.1)$$

donde z puede ser separada en parte real y en parte imaginaria

$$z = x + iy, \quad (6.2)$$

explícitamente tenemos

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ -\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} x^2 - \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2} x^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 - \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} y^2 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2} y^2 + i[-\dot{x}\dot{y} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x\dot{y} - \omega_1^2 \omega_2^2 xy] \right\}. \quad (6.3)$$

De la variación de la acción obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \{ & [-x^{(4)} - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\ddot{x} - \omega_1^2 \omega_2^2 x - i(y^{(4)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\ddot{y} \\ & + \omega_1^2 \omega_2^2 y)] \delta x + [y^{(4)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\ddot{y} + \omega_1^2 \omega_2^2 y - i(x^{(4)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\ddot{x} \\ & + \omega_1^2 \omega_2^2 x)] \delta y \}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Esta expresión muestra que no todas las ecuaciones de movimiento son independientes lo que implica que habrá una libertad de norma en la teoría. Para ver esto explícitamente introducimos el formalismo Hamiltoniano, por comparar los momentos canónicos, siguiendo el formalismo de Ostrogradsky [12] con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} p_x &= x^{(3)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\dot{x} + i(y^{(3)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\dot{y}), \\ p_y &= -y^{(3)} - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\dot{y} + i(x^{(3)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\dot{x}), \\ p_v &= -\ddot{x} - i\ddot{y}, \\ p_w &= \ddot{y} - i\ddot{x}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Es importante notar que estos momentos son complejos y están relacionados por las dos constricciones primarias

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= p_x + ip_y \approx 0, \\ \Phi_2 &= p_v + ip_w \approx 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

A partir de aquí ya podemos introducir el Hamiltoniano canónico

$$H_{(x,y)} = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{v}p_v + \dot{w}p_w - L \quad (6.7)$$

donde la estructura simpléctica deducida de la transformación de Legendre es dada por

$$\begin{aligned} \{x, p_x\} &= 1, & \{y, p_y\} &= 1, \\ \{v, p_v\} &= 1, & \{w, p_w\} &= 1. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Explicitamente el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H_{(x,y)} &= vp_x + wp_y - \frac{1}{2}p_v^2 - \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2}v^2 \\ &+ \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2}w^2 + \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{2}x^2 - \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{2}y^2 + i(\omega_1^2\omega_2^2xy - (\omega_1^2 + \omega_2^2)vw) \end{aligned} \quad (6.9)$$

En la definición del Hamiltoniano usamos la establecida por el formalismo de Ostrogradsky donde las velocidades $v = \dot{x}$ y $w = \dot{y}$ son consideradas grados de libertad independientes. El Hamiltoniano total es

$$H_T = H_{(x,y)} + \mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2 \quad (6.10)$$

de lo que obtenemos las respectivas ecuaciones de movimiento

$$\dot{x} = \frac{\partial H_{(x,y)}}{\partial p_x} + \mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_x} + \mu_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_x} = v + \mu_1, \quad (6.11)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H_{(x,y)}}{\partial p_y} + \mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_y} + \mu_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_y} = w + i\mu_1, \quad (6.12)$$

$$\dot{v} = \frac{\partial H_{(x,y)}}{\partial p_v} + \mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_v} + \mu_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_v} = -p_v + \mu_2, \quad (6.13)$$

$$\dot{w} = \frac{\partial H_{(x,y)}}{\partial p_w} + \mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_w} + \mu_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_w} = i\mu_2, \quad (6.14)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H_{(x,y)}}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \mu_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = -\omega_1^2\omega_2^2x - i\omega_1^2\omega_2^2y, \quad (6.15)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H_{(x,y)}}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \mu_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = -\omega_1^2\omega_2^2y + i\omega_1^2\omega_2^2x, \quad (6.16)$$

$$\dot{p}_v = -\frac{\partial H_{(x,y)}}{\partial v} - \mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} - \mu_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} = -p_x + (\omega_1^2 + \omega_2^2)v + i(\omega_1^2 + \omega_2^2)w, \quad (6.17)$$

$$\dot{p}_w = -\frac{\partial H_{(x,y)}}{\partial w} - \mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} - \mu_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} = -p_y - (\omega_1^2 + \omega_2^2)w + i(\omega_1^2 + \omega_2^2)v. \quad (6.18)$$

De lo anterior notamos la libertad de norma en la evolución. Por otro lado, también necesitamos revisar lo que pasa con la evolución de las constricciones y ver

si existen más constricciones, secundarias, en nuestro sistema. De la evolución de las constricciones se tiene que

$$\dot{\Phi}_1 = \{\Phi_1, H_T\} = 0, \quad \dot{\Phi}_2 = \{\Phi_2, H_T\} = -\Phi_1, \quad (6.19)$$

de donde concluimos que nuestras constricciones (Φ_1, Φ_2) son constricciones complejas de primera clase y éstas generan transformaciones de norma. Las variaciones generadas por estas constricciones de primera clase y que dejan invariante al Hamiltoniano son dadas por

$$\begin{aligned} \delta x &= \{x, \epsilon^1 \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2\} = \epsilon^1, & \delta y &= \{y, \epsilon^1 \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2\} = i\epsilon^1, & (6.20) \\ \delta v &= \{v, \epsilon^1 \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2\} = \epsilon^2, & \delta w &= \{w, \epsilon^1 \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2\} = i\epsilon^2, \\ \delta p_x &= \{p_x, \epsilon^1 \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2\} = 0, & \delta p_y &= \{p_y, \epsilon^1 \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2\} = 0, \\ \delta p_v &= \{p_v, \epsilon^1 \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2\} = 0, & \delta p_w &= \{p_w, \epsilon^1 \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2\} = 0, \end{aligned}$$

de lo que podemos notar que nuestra transformación de norma implica que las variables, o componentes, y, w adquieren una parte compleja por lo tanto si nosotros queremos fijar la norma debemos considerar este hecho en la cuenta de los grados de libertad. Con esto en mente queremos mostrar que bajo un conjunto de condiciones de norma el modelo de Pais-Uhlebeck complejo esta relacionado al modelo real.

Es importante también definir el número de grados de libertad de nuestro espacio fase antes de aplicar nuestras condiciones de norma. Tomando en cuenta que nuestros cuatro momentos son cantidades complejas (p_x, p_y, p_v, p_w) hemos asociado a ellos 8 grados de libertad reales, además tenemos cuatro variables de configuración reales o grados de libertad (x, y, v, w) que dan como resultado un espacio fase con 12 grados de libertad.

Por otro lado, dado que tenemos las constricciones de primera clase y las condiciones de norma, los grados de libertad efectivos se reducen de la siguiente manera: Se empieza del espacio fase con 12 grados de libertad, de los que restamos 4 debido a las dos constricciones complejas de primera clase y 4 debido a las dos condiciones de norma complejas. Lo anterior implica que los grados de libertad reales son $12 - 8 = 4$ lo cual corresponde a los grados de libertad del espacio fase reducido para el modelo de Pais-Uhlenbeck.

También podemos notar que a nivel Lagrangiano y a nivel Hamiltoniano se cumple con

$$\delta L_C = 0, \quad \delta H_T = \{H_T, \epsilon^1 \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2\} = 0, \quad (6.21)$$

donde L_C es el Lagrangiano complejo de orden superior asociado a la acción inicial dada en esta sección y donde estamos aplicando las transformaciones anteriores para estas cantidades. La condición de norma que establece la relación entre el modelo complejo y el modelo real es dada por

$$\Gamma_1 = y \approx 0, \quad (6.22)$$

$$\Gamma_2 = w \approx 0, \quad (6.23)$$

donde se piensa a estas condiciones como expresiones complejas en el sentido de que las transformaciones de norma dan a estas variables una parte imaginaria. La evolución de estas condiciones de norma implica

$$\dot{y} = \dot{\Gamma}_1 = \{\Gamma_1, H_T\} = \Gamma_2 + i\mu_1, \quad (6.24)$$

$$\dot{y} = \dot{w} = \dot{\Gamma}_2 = \{\Gamma_2, H_T\} = i\mu_2, \quad (6.25)$$

por lo que los multiplicadores de Lagrange μ_1 y μ_2 son fijados a cero. De lo anterior concluimos que

$$y^{(3)} = \ddot{w} = \ddot{\Gamma}_2 = \{\{\Gamma_2, H_T\}, H_T\} = 0. \quad (6.26)$$

Además, la matriz del conjunto completo de constricciones formada por $\chi_A = (\Phi_1, \Phi_2, \Gamma_1, \Gamma_2)$, que incluye a las constricciones de primera clase y a sus condiciones de norma es

$$\mathcal{D}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

con determinante $\det\{\mathcal{D}_{AB}\} = 1$ y Hamiltoniano

$$H_{(w,y=0)} = vp_x - \frac{1}{2}p_v^2 - \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2}v^2 + \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{2}x^2. \quad (6.28)$$

Los paréntesis de Dirac son

$$\{x, p_x\}^* = 1, \quad \{v, p_v\}^* = 1. \quad (6.29)$$

Usando estos paréntesis las transformaciones de norma desaparecen en consecuencia la evolución bajo las condiciones de norma es real. Por otro lado, con respecto a los momentos éstos son separados en parte real y en parte imaginaria

$$p_x = p_{xR} + ip_{xI}, \quad p_y = -p_{xI} + ip_{xR}, \quad (6.30)$$

$$p_v = p_{vR} + ip_{vI}, \quad p_w = -p_{vI} + ip_{vR}, \quad (6.31)$$

pero podemos observar de la expresión (6.5) junto con (6.24)-(6.26) que la parte imaginaria desaparece para tener

$$p_x \approx p_{xR}, \quad p_v \approx p_{vR}. \quad (6.32)$$

Por otra parte, tomando en cuenta que x y v son reales, los paréntesis de Dirac son

$$\{x, p_{xR}\}^* = 1, \quad \{v, p_{vR}\}^* = 1. \quad (6.33)$$

Finalmente, el Hamiltoniano reducido es

$$H_{PU} = vp_{xR} - \frac{1}{2}p_{vR}^2 - \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2}v^2 + \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{2}x^2. \quad (6.34)$$

El cual es conocido como el Hamiltoniano real de Pais-Uhlenbeck. Entonces a partir del método antes descrito planteamos la generalización compleja la cual tiene una libertad de norma que es manejada fijando las condiciones de norma (6.22) concluyendo en la obtención del modelo real de Pais-Uhlenbeck. En este sentido, se dice que el modelo real de Pais-Uhlenbeck es incluido en nuestro modelo complejo. Por otro lado, se puede seleccionar diferentes tipos de condiciones de norma y de ellas obtener un sistema diferente que esta relacionado en el espacio complejo a un modelo real de Pais-Uhlenbeck.

Por otra parte, se puede elegir el siguiente conjunto de condiciones de norma

$$\gamma_1 = p_v - \omega_2^2 x - i\omega_1^2 y \approx 0 \quad (6.35)$$

junto con

$$\gamma_2 = p_x - \omega_1^2 v - i\omega_2^2 w \approx 0, \quad (6.36)$$

para fijar la norma de las constricciones de primera clase (6.6). Los paréntesis entre las constricciones y las condiciones de norma son

$$\begin{aligned} \{\Phi_1, \gamma_1\} &= -(\omega_1^2 - \omega_2^2), & \{\Phi_2, \gamma_2\} &= (\omega_1^2 - \omega_2^2), \\ \{\gamma_1, \gamma_2\} &= (\omega_1^2 - \omega_2^2), \end{aligned} \quad (6.37)$$

y la evolución temporal de las condiciones de norma resulta

$$\dot{\gamma}_1 = \{\gamma_1, H_T\} = -\gamma_2 + \mu_1(\omega_1^2 - \omega_2^2) \approx 0, \quad (6.38)$$

$$\dot{\gamma}_2 = \{\gamma_2, H_T\} = \omega_1^2 \gamma_1 + i(\omega_1^2 - \omega_2^2)y - \mu_2(\omega_1^2 - \omega_2^2) \approx 0,$$

$$\mu_1 = \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \gamma_2, \quad \mu_2 \approx iy. \quad (6.39)$$

Para revisar que las condiciones de norma (6.35) y (6.36) son buenas condiciones de norma se necesita mostrar que junto con las constricciones (6.6) forman un buen conjunto de constricciones de segunda clase. Con lo anterior podemos definir

$$\chi_A = (\Phi_a, \gamma_b), \quad (6.40)$$

con $a, b = 1, 2$ y $A, B = 1, \dots, 4$. Con el paréntesis de Poisson

$$\{\chi_A, \chi_B\} = \mathcal{C}_{AB} \quad (6.41)$$

podemos construir la siguiente matriz

$$\mathcal{C}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\omega_2^2 - \omega_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\omega_2^2 - \omega_1^2) \\ -(\omega_2^2 - \omega_1^2) & 0 & 0 & (\omega_1^2 - \omega_2^2) \\ 0 & (\omega_2^2 - \omega_1^2) & (\omega_2^2 - \omega_1^2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

En consecuencia la determinante de esta matriz es

$$\det(\mathcal{C}_{AB}) = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^4. \quad (6.43)$$

Por lo que tenemos unas bien definidas condiciones de norma solo en el caso de frecuencias diferentes. Usando estas constricciones y las condiciones de norma se eliminan los momentos imaginarios sobrantes resultando los paréntesis de Dirac.

También a causa de que el conjunto completo de constricciones (6.40) es un conjunto de constricciones de segunda clase toda transformación de norma desaparece bajo los paréntesis de Dirac y nuestro espacio fase reducido queda bien definido. Considerando que el Hamiltoniano en términos de las variables del espacio fase reducido corresponde a

$$H_{oa} = \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{2} v^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2) \frac{\omega_2^2}{2} x^2 + \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{2} w^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2) \frac{\omega_1^2}{2} y^2 \quad (6.44)$$

con los correspondientes paréntesis de Dirac

$$\{x, v\}^* = \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad \{y, w\}^* = \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}. \quad (6.45)$$

Además de las condiciones de norma que fijan los multiplicadores de Lagrange como (6.39) obtenemos las variables reales y y w junto con su evolución que es determinada por el Hamiltoniano (6.44) y los paréntesis de Dirac (6.45). Con respecto a la cuenta de los grados de libertad se inicia de un espacio fase de dimensión 12 que es determinado por los grados de libertad reales para las variables x, y, v, w y 2 grados de libertad para cada momento p_x, p_y, p_v, p_w . En estos grados de libertad restamos 4 debido a las constricciones de primera clase y 4 debido a las condiciones de norma. Finalmente, terminamos con un espacio fase reducido de 4 dimensiones. Si consideramos también el Hamiltoniano (6.44) y la estructura simpléctica (6.45), es posible introducir la siguiente transformación de contacto

$$\sigma_R = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}} x, \quad \sigma_I = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}} y, \quad (6.46)$$

$$p_{\sigma R} = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}} v, \quad p_{\sigma I} = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}} w, \quad (6.47)$$

con $\omega_1 > \omega_2$. En estas nuevas variables el Hamiltoniano (6.44) es

$$H_{cs} = \frac{p_{\sigma R}^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2} \sigma_R^2 + \frac{p_{\sigma I}^2}{2} + \frac{\omega_1^2}{2} \sigma_I^2, \quad (6.48)$$

y los paréntesis de Dirac resultan ser

$$\{\sigma_R, p_{\sigma R}\} = 1, \quad \{\sigma_I, p_{\sigma I}\} = 1. \quad (6.49)$$

Aquí se ve explícitamente que para las condiciones de norma (6.35) y (6.36) el modelo de orden superior de Pais- Uhlenbeck es reducido a un sistema de dos osciladores armónicos reales desacoplados. Este sistema puede ser fácilmente cuantizado y en este sentido la elección de norma seleccionada en (6.35) y (6.36) es una buena elección de norma, donde la norma (6.22) no es una buena elección, ya que terminamos con un teoría que no es posible cuantizar al menos si introducimos interacciones.

6.2. Transformación de Norma

En este punto resulta interesante ver cual es la transformación de norma que hay entre el modelo de Pais-Uhlenbeck real y dos osciladores armónicos. Podemos empezar por establecer la transformación de norma que hay entre estos sistemas y que es aplicada a la generalización compleja del modelo de Pais-Uhlenbeck la cual es

$$x' = x - i\delta\gamma_1\{x, \Phi_1\}, \quad v' = v - i\delta\gamma_2\{v, \Phi_2\}, \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma_1 &= \gamma_1 - \Gamma_1 = p_v - \omega_2^2 x - i\omega_1^2 y - y, \\ \delta\gamma_2 &= \gamma_2 - \Gamma_2 = p_x - \omega_1^2 v - i\omega_2^2 w - w, \end{aligned} \quad (6.51)$$

Sin embargo, dado que las transformaciones establecen diferentes variables finales es necesario usar las condiciones de norma (6.35) y (6.36) para obtener

$$\begin{aligned} p'_{vR} &\approx \omega_2^2 x + i\omega_1^2 y, \\ p'_{xR} &\approx \omega_1^2 v + i\omega_2^2 w, \end{aligned} \quad (6.52)$$

lo cual aplicado en la transformación de norma resulta ser

$$\begin{aligned} x' &= x + iy, \\ v' &= v + iw. \end{aligned} \quad (6.53)$$

La transformación de norma anterior (6.53) junto con la transformación de los momentos (6.52) nos lleva del modelo de Pais-Uhlenbeck real (6.34), sustituimos la expresión de las variables primadas en el Hamiltoniano de Pais-Uhlenbeck, al Hamiltoniano equivalente salvo una transformación de contacto de dos osciladores armónicos reales (6.44), variables sin primar.

Debemos tomar en cuenta que esta transformación no es canónica real y si tiene una relación con una transformación canónica compleja.

Además hay que tener presente que usamos las condiciones de norma (6.35) y (6.36) en la definición de los momentos, lo cual es valido ya que estamos pasando del modelo de Pais-Uhlenbeck a los osciladores armónicos.

Con la transformación anterior notamos que para este caso debemos de perder Hermiticidad en alguno de los dos modelos para lograr encontrar una transformación que parta del formalismo de Ostrogradsky a la formulación Lagrangiana habitual de dos osciladores armónicos.

6.3. Fuentes Complejas

En esta sección se incluyen interacciones en el modelo de Pais-Uhlenbeck complejo de tal forma que se produce una interacción consistente al nivel de oscilador armónico, i. e. las interacciones son consistentes con las constricciones y las condiciones de norma (6.35) y (6.36). Un punto importante para introducir cualquier potencial de autointeracción es encontrar una manera de incluir fuentes y aún más complicado es incluir fuentes complejas. Sin embargo, se

puede empezar a usar la mecánica clásica para ilustrar el comportamiento de una fuente compleja en la ecuación de movimiento.

Como punto de partida incluiremos una fuente compleja donde consideramos la formulación Hamiltoniana compleja de Ostrogradsky. El Hamiltoniano complejo con fuentes es

$$H_S = H_{(x,y)} - Jx - Kp_x - Ly - Mp_y - Nv - Op_v - Rw - Qp_w \quad (6.54)$$

cuyas ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H_S}{\partial p_x} = v - K, & \dot{y} &= \frac{\partial H_S}{\partial p_y} = w - M, & (6.55) \\ \dot{v} &= \frac{\partial H_S}{\partial p_v} = -p_v - O, & \dot{w} &= \frac{\partial H_{(x,y)}}{\partial p_w} = -Q, \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H_S}{\partial x} = -\omega_1^2 \omega_2^2 x - i\omega_1^2 \omega_2^2 y + J, \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H_S}{\partial y} = \omega_1^2 \omega_2^2 y - i\omega_1^2 \omega_2^2 x + L, \\ \dot{p}_v &= -\frac{\partial H_S}{\partial v} = -p_x + (\omega_1^2 + \omega_2^2)v + i(\omega_1^2 + \omega_2^2)w + N, \\ \dot{p}_w &= -\frac{\partial H_S}{\partial w} = -p_y - (\omega_1^2 + \omega_2^2)w + i(\omega_1^2 + \omega_2^2)v + R, \end{aligned}$$

en las cuales los momentos con fuente son

$$\begin{aligned} p_x &= \dot{v} + \dot{O} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)v + i(\omega_1^2 + \omega_2^2)w + N, & (6.56) \\ p_y &= i\dot{w} + i\dot{O} + i(\omega_1^2 + \omega_2^2)v - (\omega_1^2 + \omega_2^2)w + iN, \\ p_v &= -\dot{v} - O, \\ p_w &= -i\dot{w} - iO, \end{aligned}$$

y usando (6.55) se puede concluir que

$$N + iR \approx 0, \quad J + iL \approx 0. \quad (6.57)$$

Otras relaciones que son deducidas de (6.55) y las condiciones de norma (6.35) y (6.36) son

$$\begin{aligned} -J_I - \omega_2^2 O_I - \omega_2^2 Q_R \approx 0, & \quad -J_R - \omega_1^2 O_R + \omega_1^2 Q_I \approx 0, & (6.58) \\ -\omega_1^2 K_I - \omega_1^2 M_R - N_I \approx 0, & \quad -\omega_2^2 K_R + \omega_2^2 M_I - N_R \approx 0. \end{aligned}$$

De esta forma hemos mostrado que las condiciones de norma (6.35) y (6.36) originan restricciones en las fuentes de los campos. Sin embargo, hasta este punto aún no es claro como incluir potenciales de interacción en el modelo. La manera más fácil es introducir potenciales complejos que son reducidos a cantidades reales usando las constricciones y condiciones de norma. Con el fin de aplicar este método, se considera

$$\bar{z} = \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} z - \frac{2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} p_v \quad (6.59)$$

de lo que aplicando la condición de norma (6.35) la reducimos a la variable conjugada

$$z^* = \bar{z} \Big|_{rec} = x - iy \quad (6.60)$$

de esta manera es posible introducir el siguiente potencial de interacción

$$U_{1Int} = \frac{\lambda_1}{4!2^4} \left[\frac{2\omega_1^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} z - \frac{2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} p_v \right]^4. \quad (6.61)$$

Otro posible potencial de interacción es

$$U_{2Int} = \frac{\lambda_2}{4!(2i)^4} \left[-\frac{2\omega_2^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} z + \frac{2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} p_v \right]^4 \quad (6.62)$$

y finalmente

$$U_{3Int} = -\frac{\lambda_3}{4!16} \left[\frac{2\omega_1^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} z - \frac{2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} p_v \right]^2 \left[-\frac{2\omega_2^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} z + \frac{2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} p_v \right]^2. \quad (6.63)$$

Separando en parte real y parte imaginaria la variable z dentro de cada potencial obtenemos

$$U_{1Int(x,y)} = \frac{\lambda_1}{4!2^4} \left[\frac{2\omega_1^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} (x + iy) - \frac{2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} p_v \right]^4, \quad (6.64)$$

$$U_{2Int(x,y)} = \frac{\lambda_2}{4!(2i)^4} \left[-\frac{2\omega_2^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} (x + iy) + \frac{2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} p_v \right]^4, \quad (6.65)$$

$$U_{3Int(x,y)} = -\frac{\lambda_3}{4!16} \left\{ \frac{2\omega_1^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} (x + iy) - \frac{2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} p_v \right\}^2 \cdot \left\{ -\frac{2\omega_2^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} (x + iy) + \frac{2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} p_v \right\}^2, \quad (6.66)$$

y el potencial total de interacción es

$$U_T(x,y) = U_{1Int(x,y)} + U_{2Int(x,y)} + U_{3Int(x,y)}. \quad (6.67)$$

Es importante notar que simplemente hemos recuperado la relación que ya existía entre el modelo de Pais-Uhlenbeck y los osciladores armónicos del capítulo 1 para sugerir la forma más natural de establecer los potenciales de interacción, pero en nuestro caso desde un punto de vista Hamiltoniano. El Hamiltoniano total con potenciales de interacción es

$$H_{G(x,y)} = H_T + U_T(x,y). \quad (6.68)$$

El nuevo Hamiltoniano que incluye potenciales de interacción lleva a la siguiente evolución de las constricciones de primera clase

$$\{\Phi_1, H_{G(x,y)}\} = 0, \quad (6.69)$$

$$\{\Phi_2, H_{G(x,y)}\} = -\Phi_1. \quad (6.70)$$

De esta manera las interacciones son consistentes con las constricciones. Además, cuando aplicamos las constricciones, las condiciones de norma, y las transformaciones de contacto los potenciales de interacción son reducidos a

$$\begin{aligned} U_{1Int(x,y)}|_{rec} &= \frac{\lambda_1}{4!} \sigma_R^4, & U_{2Int(x,y)}|_{rec} &= \frac{\lambda_2}{4!} \sigma_I^4, \\ U_{3Int(x,y)}|_{rec} &= \frac{\lambda_3}{4!} \sigma_R^2 \sigma_I^2, \end{aligned} \quad (6.71)$$

El Hamiltoniano aplicando estas condiciones es

$$H_{G(x,y)}|_{rec} = H_{cs} + U_{1Int(x,y)}|_{rec} + U_{2Int(x,y)}|_{rec} + U_{3Int(x,y)}|_{rec}. \quad (6.72)$$

En este punto, se ha desarrollado un procedimiento con la finalidad de introducir potenciales de interacción y fuentes concluyendo que la simetría de norma se preserva para ambos tanto para el modelo de Pais- Uhlenbeck como para el modelo de Pais-Uhlenbeck con un potencial de interacción. Esta formulación nos permitirá incluir la integral de camino con la finalidad de lograr una teoría cuántica de este modelo.

En la siguiente sección vamos a cuantizar el modelo de Pais-Uhlenbeck complejo usando la formulación de path integral.

6.4. Integral de Camino

Para mostrar una manera de lograr la cuantización para este sistema, se empieza por el formalismo de la integral de camino que incluye la simetría de norma y las condiciones de norma.

Para construir la integral de camino, introducimos la siguiente notación

$$\begin{aligned} \Theta^a &= (x, y, v, w), & \Pi_a &= (p_x, p_y, p_v, p_w), \\ \mathcal{J}^a &= (J, L, N, R), & \mathcal{K}_a &= (K, M, O, Q) \end{aligned} \quad (6.73)$$

con Θ^a una cantidad real, y Π_a compleja en general. Las fuentes \mathcal{J}^a y \mathcal{K}_a son complejas en general. Para la medida de la integral de camino se incluyen las constricciones y la condición de norma como un conjunto de constricciones de segunda clase, considerando que la matriz de los paréntesis de Poisson es dada por (6.42). En consecuencia la medida corresponde a

$$\mathcal{D}\mu = \mathcal{D}\Theta^a \mathcal{D}\Pi_a \det |\{\chi_A, \chi_B\}| \prod_C^4 \delta(\chi_C) \quad (6.74)$$

y la integral de camino total es

$$Z = \int \mathcal{D}\mu \exp[i \int dt (\dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{v}p_v + \dot{w}p_w - H_{(x,y)} + \Theta^a \mathcal{J}_a + \Pi_a \mathcal{K}^a)]. \quad (6.75)$$

Usando la delta de las constricciones y las condiciones de norma se integra sobre todos los momentos, resultando que

$$\begin{aligned}
Z_R = \int \mathcal{D}x\mathcal{D}y\mathcal{D}v\mathcal{D}w \exp\{i \int dt & [(\omega_1^2 - \omega_2^2)\dot{x}v + (\omega_1^2 - \omega_2^2) \\
& \dot{y}w - H_{oa} + x(-J_R - \omega_2^2 O_R + \omega_2^2 Q_I) + y(J_I + \omega_1^2 O_I + \omega_1^2 Q_R) \\
& + v(-N_R - \omega_1^2 K_R + \omega_1^2 M_I) + w(N_I + \omega_2^2 K_I + \omega_2^2 M_R)] \\
& + i[x(-J_I - \omega_2^2 O_I - \omega_2^2 Q_R) + y(-J_R - \omega_1^2 O_R + \omega_1^2 Q_I) \\
& + v(-N_I - \omega_1^2 K_I - \omega_1^2 M_R) + w(-N_R - \omega_2^2 K_R + \omega_2^2 M_I)]\}, \quad (6.76)
\end{aligned}$$

Por otro lado la fuente satisface idénticamente la relación (6.58), la parte imaginaria se cancela y no contribuye a la integral de camino. De lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
Z_R = \int \mathcal{D}x\mathcal{D}y\mathcal{D}v\mathcal{D}w \exp\{i \int dt & [(\omega_1^2 - \omega_2^2)\dot{x}v \quad (6.77) \\
& + (\omega_1^2 - \omega_2^2)\dot{y}w - H_{oa} + (\omega_1^2 - \omega_2^2)x(O_R - Q_I) + (\omega_1^2 - \omega_2^2)y(O_I + Q_R) \\
& + (\omega_1^2 - \omega_2^2)v(-K_R + M_I) + (\omega_1^2 - \omega_2^2)w(-K_I - M_R)]\}.
\end{aligned}$$

Con la finalidad de mostrar que este potencial efectivo corresponde a la integral de camino de dos osciladores armónicos desacoplados con fuentes se implementa una transformación de contacto para las variables y fuentes dadas por

$$\begin{aligned}
\sigma_R &= (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}x, & p_{\sigma R} &= (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}v, & (6.78) \\
\sigma_I &= (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}y, & p_{\sigma I} &= (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}w, \\
\aleph_R &= (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}(O_R - Q_I), & \aleph_I &= (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}(O_I + Q_R), \\
\aleph_R &= (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}(-K_R + M_I), & \aleph_I &= (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}(-K_I - M_R).
\end{aligned}$$

Para estas transformaciones la matriz Jacobiana resulta ser

$$|J| = \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}, \quad dx dv dy dw = |J| d\sigma_R dp_{\sigma R} d\sigma_I dp_{\sigma I}. \quad (6.79)$$

De esta expresión (6.79) la path integral (8.4) es transformada a

$$\begin{aligned}
Z_{oa} = S \int \mathcal{D}\sigma_R \mathcal{D}\sigma_I \mathcal{D}p_{\sigma R} \mathcal{D}p_{\sigma I} \exp\{i \int dt & (\dot{\sigma}_R p_{\sigma R} + \dot{\sigma}_I p_{\sigma I} \quad (6.80) \\
& - H_{cs}(\sigma_R, \sigma_I, p_{\sigma R}, p_{\sigma I}) + \sigma_R \aleph_R + \sigma_I \aleph_I + p_{\sigma R} \aleph_R + p_{\sigma I} \aleph_I\}
\end{aligned}$$

Donde H_{cs} esta dado por (6.48). De esta forma hemos empezado del modelo de Pais-Uhlenbeck complejo y hemos fijado la condiciones de norma (6.35) y (6.36) en la integral de camino terminando con la integral de camino de dos osciladores armónicos reales desacoplados con fuentes.

En este punto es necesario mencionar que hemos reducido la elección de las variables Hermíticas a una simple elección de norma en un espacio complejo a partir de hacer una elección adecuada para un sistema en concreto que se desee

estudiar. En nuestro caso hemos trabajado con el modelo de Pais-Uhlenbeck de forma tal que establecimos una manera de agregar fuentes y por tanto interacciones. Lo anterior tiene una relación con el método dado en [23] y las condiciones de realidad de Ashtekar [11] las cuales en nuestra notación son una elección de norma en concreto. En los siguientes capítulos vamos a estudiar la extensión de estas ideas a campos dependientes de la posición y el tiempo, lo cual implica una formulación más general de nuestro método.

Es importante notar los pasos que hemos realizado: En el capítulo 1 mostramos con relativa facilidad que es posible pasar del modelo de dos osciladores acoplados al modelo de Pais-Uhlenbeck usando el formalismo de Ostrogradsky. Sin embargo, hacer lo inverso no resulta ser tan trivial por lo que como primer paso hicimos una extensión al plano complejo del modelo de P-U para posteriormente notar la libertad de norma que nos permite encontrar una transformación que relaciona ambos sistemas partiendo del modelo de orden superior con la formulación de Ostrogradsky y que mapéa a los osciladores armónicos reales. Simplemente hemos encontrado la transformación inversa que me pasa del modelo de Pais-Uhlenbeck de orden superior a los dos osciladores armónicos reales resultando que este mapéo se traduce en una transformación que ya no es canónica real.

Capítulo 7

Campos de Primer Orden

Los campos físicos además de la evolución temporal o variación en el tiempo presentan también variación en el espacio. Lo anterior implica, conceptualmente hablando, hacer una diferente descripción de nuestros sistemas pero estructuralmente hablando resulta ser muy similar a la descripción anterior. La diferencia esencial radica en el número infinito de grados de libertad que aquí encontramos, ya que vamos a tener uno o más grados de libertad por punto del espacio.

7.1. Modelo Sigma No-Lineal

Con el fin de establecer una metodología retomaremos, hasta un cierto punto, lo realizado en la sección 4.2 pero en esta ocasión no consideraremos la reparametrización temporal desarrollada en ese apartado. Aplicando el método vamos a encontrar los modelos sigma no lineales considerando el siguiente Lagrangiano complejo con métrica plana en la parte cinética

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\psi)^2 - \frac{m^2}{2}\psi^2, \quad (7.1)$$

en donde usamos como notación que $\psi^2 = \delta_{ab}\psi^a\psi^b$, $(\partial\psi)^2 = (\partial^\mu\psi^a)(\partial_\mu\psi_a)$ y los subíndices cumplen con $a, b = 1, \dots, N$. Dado que el campo de partida es complejo podemos separarlo en parte real y parte imaginaria de la siguiente manera

$$\psi^a = \varphi_R^a + i\varphi_I^a, \quad (7.2)$$

resultando de aquí la densidad Lagrangiana compleja

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C = & \frac{1}{2}(\partial\varphi_R)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi_R^2 - \frac{1}{2}(\partial\varphi_I)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi_I^2 \\ & + i[(\partial_\mu\varphi_R)(\partial^\mu\varphi_I) - m^2\varphi_R\varphi_I], \end{aligned} \quad (7.3)$$

y a partir de aquí se pueden obtener los respectivos momentos

$$\pi_{Rc} = \frac{\partial \mathcal{L}_C}{\partial \dot{\varphi}_R^c} = \dot{\varphi}_{Rc} + i\dot{\varphi}_{Ic}, \quad \pi_{Ic} = \frac{\partial \mathcal{L}_C}{\partial \dot{\varphi}_I^c} = -\dot{\varphi}_{Ic} + i\dot{\varphi}_{Rc}, \quad (7.4)$$

de donde podemos observar que hay constricciones primarias

$$\Phi_c = \pi_{Rc} + i\pi_{Ic} \approx 0, \quad (7.5)$$

Por otro lado también podemos utilizar una notación abreviada para la escritura de los momentos

$$\pi_R^2 = \pi_{Ra}\pi_R^a$$

con el fin de obtener la densidad Hamiltoniana usamos una transformación de Legendre

$$\mathcal{H}_C = \dot{\varphi}_R^c \pi_{Rc} + \dot{\varphi}_I^c \pi_{Ic} - \mathcal{L}_C \quad (7.6)$$

dando como resultado la siguiente expresión concreta

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{CT} = & \left[\frac{1}{2}\pi_R^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi_R)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi_R^2 \right] - \left[\frac{1}{2}(\nabla\varphi_I)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi_I^2 \right] \\ & - i[-(\nabla\varphi_R^a \cdot \nabla\varphi_{Ia}) - m^2(\varphi_R^a\varphi_{Ia})] + \mu^c\Phi_c, \end{aligned} \quad (7.7)$$

con multiplicadores de Lagrange que incluyen a las constricciones. Es importante notar que la parte cinética resulta ser

$$\dot{\varphi}_R^c \pi_{Rc} + \dot{\varphi}_I^c \pi_{Ic} = \dot{\varphi}_R^c (\dot{\varphi}_{Rc} + i\dot{\varphi}_{Ic}) + \dot{\varphi}_I^c (-\dot{\varphi}_{Ic} + i\dot{\varphi}_{Rc}) = \pi_R^2 \quad (7.8)$$

La expresión simplificada de la densidad Hamiltoniana total es

$$\mathcal{H}_{CT} = \left[\frac{1}{2}\pi_R^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi_R + i\nabla\varphi_I)^2 + \frac{m^2}{2}(\varphi_R + i\varphi_I)^2 \right] + \mu^c\Phi_c. \quad (7.9)$$

Con la obtención de la densidad Hamiltoniana (7.7) ahora es posible determinar la naturaleza de las constricciones primarias por medio de establecer la evolución temporal correspondiente

$$\dot{\Phi}_c = \{\Phi_c, \mathcal{H}_{CT}\} \approx 0, \quad (7.10)$$

resultando que son constricciones de primera clase que tienen como característica la existencia de algunos grados de libertad internos que no modifican alguna propiedad en las observables físicas.

Como tenemos constricciones de primera clase es necesario fijar normas para estas constricciones. Aquí elegiremos normas canónicas y las seleccionaremos de forma tal que el sistema resultante sea más interesante que el original y sea

una buena norma en el sentido de la teoría de constricciones de Dirac [10]. Proponemos las siguientes condiciones de norma

$$\Gamma_c = [\varphi_{Ic} - i\varphi_{Rc} + iV_c(\varphi_R)] \approx 0, \quad (7.11)$$

la que forma un conjunto completo de constricciones con las constricciones de primera clase si proponemos $\chi_A = (\Phi_a, \Gamma_a)$ con el fin de formar la matriz $Z_{AB} = \{\chi_A, \chi_B\}$ resultando explícitamente la expresión

$$\mathcal{Z}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\partial V_d}{\partial \varphi_R^c} \\ i\frac{\partial V_d}{\partial \varphi_R^c} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

con determinante pensada diferente de cero

$$\det(\mathcal{Z}_{AB}) = \left(\frac{\partial V_d}{\partial \varphi_R^c}\right)\left(\frac{\partial V_d}{\partial \varphi_{Rc}}\right) \neq 0, \quad (7.13)$$

y matriz inversa

$$\mathcal{Z}^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -i\left(\frac{\partial V_d}{\partial \varphi_R^c}\right)^{-1} \\ i\left(\frac{\partial V_d}{\partial \varphi_R^c}\right)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

de lo cual vemos que al multiplicar ambas matrices (7.12) y (7.14) tenemos la unidad.

Por otro lado podemos sustituir a (7.11) con (7.5) en el Hamiltoniano (7.9) resultando

$$\mathcal{H}_{CCons} = \frac{1}{2}\pi_R^2 + \frac{1}{2}[\nabla V(\varphi_R)]^2 + \frac{m^2}{2}V^2(\varphi_R). \quad (7.15)$$

Además sustituyendo directamente en la expresión (7.6) las constricciones, obtenemos

$$\mathcal{L}_C = M_a^c \dot{\varphi}_R^a \pi_{Rc} - \mathcal{H}_{CTCons} \quad (7.16)$$

de donde $M_a^c = \left[\frac{\partial V^c}{\partial \varphi_R^a}\right]$.

Por otra parte es importante aclarar que los momentos constreñidos son

$$\pi_{Rc} = M_{ca} \dot{\varphi}_R^a \quad (7.17)$$

A partir de la teoría de Dirac [4] para las constricciones obtenemos los paréntesis de Dirac. Usando los subíndices tenemos

$$\{\varphi_R^g, \pi_{Ra}\}^* = \{\varphi_R^g, \pi_{Ra}\} - \int dw \mathcal{Z}^{AB} \{\varphi_R^g, \Phi_A\} \{\Gamma_B, \pi_{Ra}\}, \quad (7.18)$$

o explícitamente teniendo en mente los subíndices $A = (0, c)$, $B = (0, d)$ tenemos

$$\begin{aligned} \{\varphi_R^g, \pi_{Ra}\}^* = & \delta_a^g \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \int dw \mathcal{Z}^{AB} [-\delta_c^g \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{da} \delta(\vec{y} - \vec{w}) \\ & + \left(\frac{\partial V_d}{\partial \varphi_{Ra}}\right) \delta_c^g \delta(\vec{y} - \vec{w})]. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Y en concreto con lo anterior podemos decir

$$\{\varphi_R^g, \pi_{Ra}\}^* = (M^{-1})^{dc} \delta_c^g \delta_{da} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (7.20)$$

En comparación a lo realizado en la sección 4.2 hemos elegido no establecer una reparametrización que cambie al tiempo como fue hecho para el caso de partícula. Con esta elección buscaremos analizar la forma que adquiere la correspondiente densidad Lagrangiana.

La densidad Lagrangiana en concreto usando nuestro espacio de configuración constreñido es

$$\mathcal{L}_C = M_c^b M_b^s \delta_{as} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_R^e \partial^\mu \varphi_R^a \right) - \frac{m^2}{2} V^2(\varphi_R), \quad (7.21)$$

de lo que podemos definir una métrica con la expresión anterior la cual es dependiente de los potenciales derivados respecto a los campos y es

$$g_{ed} = \frac{\partial V^b}{\partial x^e} \frac{\partial V_b}{\partial x^d}. \quad (7.22)$$

La densidad Lagrangiana en el espacio de configuración constreñido es

$$\mathcal{L}_C = \frac{1}{2} g_{ca} \partial_\mu \varphi_R^c \partial^\mu \varphi_R^a - \frac{m^2}{2} V^2(\varphi_R). \quad (7.23)$$

Cabe mencionar que a partir de un Lagrangiano complejo podemos encontrar una relación entre una densidad Lagrangiana real plana con d-dimensiones y una variedad de Riemann que no está en el espacio plano. Lo anterior equivale a un mapéo para los modelos sigma no-lineales.

7.2. Método aplicado al Campo Electromagnético

Con fines ilustrativos de nuestro modelo vamos a aplicar el método aquí desarrollado al campo electromagnético.

Primero que nada vamos a considerar la densidad Lagrangiana del campo electromagnético real y por medio de ésta vamos a encontrar la respectiva densidad Hamiltoniana para establecer si en nuestro sistema existen nuevas constricciones. La densidad Lagrangiana con $A^\mu = (A^0, A^i)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \dot{A}_i \dot{A}^i - \frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial^i A^0 + \dot{A}^i \partial_i A_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_i A^i)^2 - \frac{1}{2} \partial_i A_j \partial^i A^j, \end{aligned} \quad (7.24)$$

y usando la métrica plana $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ podemos obtener los momentos correspondientes resultando que

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0, \quad \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = \dot{A}_i + \partial_i A_0 = -E_i. \quad (7.25)$$

A partir de lo anterior y con los momentos podemos aplicar una transformación de Legendre

$$\mathcal{H} = \dot{A}^0 \pi_0 + \dot{A}^i \pi_i - \mathcal{L}, \quad (7.26)$$

pero también debemos considerar la constricción que hemos obtenido de la definición de los momentos y que es resultado de la teoría de Dirac [4]

$$\Psi_1 = \pi_0. \quad (7.27)$$

La densidad Hamiltoniana que resulta de nuestro sistema constreñido es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{EMT} = -\frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \frac{1}{2} \partial_i A_j \partial^i A^j + \pi^i \partial_i A^0 - \frac{1}{2} (\partial_i A^i)^2 \\ + \mu^1 \Psi_1, \end{aligned} \quad (7.28)$$

y dada la constricción la teoría de Dirac nos dice que debemos de realizar la evolución temporal de ésta por medio de la densidad Hamiltoniana, ya que de esta manera determinamos la existencia de otras constricciones secundarias que son consecuencia de la constricción primaria

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 = \int dy \{ \Psi_1, \mathcal{H}_{EMT} \} = \Psi_2 \approx 0, \\ \Psi_2 = \partial_i \pi^i, \\ \dot{\Psi}_2 = \int dy \{ \Psi_2, \mathcal{H}_{EMT} \} \approx 0, \end{aligned} \quad (7.29)$$

y que son de primera clase ya que conmutan con la densidad Hamiltoniana y entre ellas mismas

$$\{ \Psi_1, \Psi_2 \} = 0. \quad (7.30)$$

La naturaleza de estas constricciones da como resultado una simetría interna que implica grados de libertad sobrantes los cuales podemos manejar por medio de las condiciones de norma que eliminan los grados de libertad extra. Se puede fijar la norma por medio de las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \Psi_3 = \partial_i A^i \approx 0, \\ \Psi_4 = A^0 \approx 0, \end{aligned} \quad (7.31)$$

que en la literatura son conocidas como la norma de Coulomb. Con lo anterior se pueden encontrar los paréntesis de Poisson del conjunto completo de constricciones

$$\begin{aligned} \{ \Psi_1, \Psi_2 \} = 0, \quad \{ \Psi_1, \Psi_3 \} = 0, \quad \{ \Psi_1, \Psi_4 \} = -\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{ \Psi_2, \Psi_3 \} = -\nabla^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{ \Psi_2, \Psi_4 \} = 0, \quad \{ \Psi_3, \Psi_4 \} = 0, \end{aligned} \quad (7.32)$$

lo cual da como resultado la matriz de constricciones

$$\mathcal{J}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\nabla^2 & 0 \\ 0 & \nabla^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (7.33)$$

con la respectiva determinante que es diferente de cero

$$\det \mathcal{J}^{AB} = [\delta(\vec{x} - \vec{y})]^2 \{\nabla^2[\delta(\vec{x} - \vec{y})]\}^2 \neq 0, \quad (7.34)$$

y con la matriz inversa dada por

$$\mathcal{J}^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \nabla^{-2} & 0 \\ 0 & -\nabla^{-2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (7.35)$$

donde se debe mencionar que $\nabla^{-2}\delta(\vec{x} - \vec{y}) = -\frac{1}{4\pi}(\vec{x} - \vec{y})^{-1/2}$. Por otro lado el conjunto completo de constricciones sustituido en la densidad Hamiltoniana da como resultado

$$\mathcal{H}_{EMCons} = -\frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{2}\partial_i A_j \partial^i A^j, \quad (7.36)$$

con densidad Lagrangiana reducida dada por

$$\mathcal{L}_{red} = -\frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}^i - \frac{1}{2}\partial_i A_j \partial^i A^j. \quad (7.37)$$

Con lo anterior en mente podemos aplicar ahora nuestro método. Como primer paso partimos de la extensión al plano complejo aplicada a nuestra densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_z = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (7.38)$$

El tensor electromagnético complejo queda definido de la forma usual

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (7.39)$$

con

$$A_\mu = A_{R\mu} + iA_{I\mu}, \quad (7.40)$$

resultando que la densidad Lagrangiana compleja en términos del campo es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z = & -\frac{1}{2}\dot{A}_{Ri}\dot{A}_{Ri} - \frac{1}{2}\partial_i A_{R0}\partial^i A_{R0} + \dot{A}_{Ri}\partial_i A_{R0} + \frac{1}{2}(\partial_i A_{Ri})^2 \\ & -\frac{1}{2}\partial_i A_{Rj}\partial^i A_{Rj} + \frac{1}{2}\dot{A}_{Ii}\dot{A}_{Ii} + \frac{1}{2}\partial_i A_{I0}\partial^i A_{I0} - \dot{A}_{Ii}\partial_i A_{I0} - \frac{1}{2}(\partial_i A_{Ii})^2 \\ & + \frac{1}{2}\partial_i A_{Ij}\partial^i A_{Ij} + i[-\dot{A}_{Ri}\dot{A}_{Ii} - \partial_i A_{R0}\partial^i A_{I0} + \dot{A}_{Ri}\partial_i A_{I0} + (\partial_i A_{Ri})(\partial_j A_{Ij}) \\ & - \partial_i A_{Rj}\partial^i A_{Ij}]. \quad (7.41) \end{aligned}$$

Los respectivos momentos de la densidad Lagrangiana compleja extendida son

$$\begin{aligned}\pi_{Ri} &= \frac{\partial \mathcal{L}_z}{\partial \dot{A}_R^i} = -\dot{A}_{Ri} + \partial_i A_R^0 - i[\dot{A}_{Ii} - \partial_i A_I^0], \\ \pi_{Ii} &= \frac{\partial \mathcal{L}_z}{\partial \dot{A}_I^i} = \dot{A}_{Ii} - \partial_i A_I^0 - i[\dot{A}_{Ri} - \partial_i A_R^0], \\ \pi_{R0} &= \frac{\partial \mathcal{L}_z}{\partial \dot{A}_R^0} = 0, \quad \pi_{I0} = \frac{\partial \mathcal{L}_z}{\partial \dot{A}_I^0} = 0,\end{aligned}\tag{7.42}$$

de lo que podemos notar que existen 5 constricciones primarias donde 3 son debido a la estructura compleja y 2 son debido a la propia estructura del campo vectorial

$$\Phi_i = \pi_{Ri} + i\pi_{Ii} \approx 0, \quad \Psi_R = \pi_{R0} \approx 0, \quad \Psi_I = \pi_{I0} \approx 0.$$

y por medio de la transformada de Legendre

$$\mathcal{H}_{EMT} = \dot{A}_R^0 \pi_{R0} + \dot{A}_I^0 \pi_{I0} + \dot{A}_R^i \pi_{Ri} + \dot{A}_I^i \pi_{Ii} - \mathcal{L}_z\tag{7.43}$$

obtenemos la densidad Hamiltoniana compleja total

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{CEMT} &= -\frac{1}{2}\pi_{Ri}\pi_R^i + \frac{1}{2}\partial_i A_{Rj}\partial^i A_R^j - \frac{1}{2}\partial_i A_{Ij}\partial^i A_I^j \\ &+ \pi_R^i \partial_i A_R^0 - \frac{1}{2}(\partial_i A_R^i)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i A_I^i)^2 + i[\partial_i A_{Rj}\partial^i A_I^j \\ &\quad - (\partial_i A_R^i)(\partial_j A_I^j) + \pi_R^i \partial_i A_I^0] \\ &\quad + \mu^i \Phi_i + \mu^R \Psi_R + \mu^I \Psi_I,\end{aligned}\tag{7.44}$$

y podemos proceder como anteriormente hicimos para determinar todas las constricciones existentes en el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_i &= \int dy \{\Phi_i, \mathcal{H}_{CEMT}\} \approx 0, \\ \dot{\Psi}_R &= \int dy \{\Psi_R, \mathcal{H}_{CEMT}\} = \partial_i \pi_R^i \approx 0, \\ &\quad \Psi_{R2} = \partial_i \pi_R^i, \\ \dot{\Psi}_I &= \int dy \{\Psi_I, \mathcal{H}_{CEMT}\} = i\Psi_{R2} \approx 0, \\ \dot{\Psi}_{R2} &= \int dy \{\Psi_{R2}, \mathcal{H}_{CEMT}\} \approx 0,\end{aligned}\tag{7.45}$$

dando como resultado las siguientes constricciones primarias

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \pi_{Ri} + i\pi_{Ii} \approx 0, \\ \Psi_R &= \pi_{R0} \approx 0, \\ \Psi_I &= \pi_{I0} \approx 0 \\ \Psi_{R2} &= \partial_i \pi_R^i \approx 0,\end{aligned}\tag{7.46}$$

las cuales podemos fijar por medio de las condiciones de norma

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= [A_{Ii} - iA_{Ri} + iV_i(A_R)] \approx 0, \\ \Psi_{R4} &= A_R^0 \approx 0 \\ \Psi_{I4} &= A_I^0 \approx 0 \\ \Psi_5 &= \partial_i(A_R^i + iA_I^i),\end{aligned}\tag{7.47}$$

resultando la cuenta de los grados de libertad para el sistema con un total $8 + 8 = 16$ grados de libertad y le restamos $6 + 6 = 12$ constricciones. Al final tenemos 4 grados de libertad en el espacio fase, es decir 2 por cada punto en el espacio de configuración.

Los paréntesis de Poisson resultantes del conjunto completo de constricciones son

$$\begin{aligned}\{\Phi_i, \Psi_R\} &= 0, & \{\Phi_i, \Psi_I\} &= 0, & \{\Phi_i, \Psi_{R2}\} &= 0, \\ \{\Phi_i, \Gamma_j\} &= -i \frac{\partial V_j}{\partial A_R^i} = A_{11}, & \{\Phi_i, \Psi_{R4}\} &= 0, & \{\Phi_i, \Psi_{I4}\} &= 0, \\ \{\Phi_j, \Psi_5\} &= 0, & \{\Psi_R, \Psi_I\} &= 0, & \{\Psi_R, \Psi_{R2}\} &= 0, \\ & & \{\Psi_R, \Gamma_i\} &= 0, & \{\Psi_R, \Psi_{R4}\} &= -1 = A_{33}, \\ \{\Psi_R, \Psi_{I4}\} &= 0, & \{\Psi_R, \Psi_5\} &= 0, & \{\Psi_I, \Psi_{R2}\} &= 0, & \{\Psi_I, \Gamma_i\} &= 0, \\ \{\Psi_I, \Psi_{R4}\} &= 0, & \{\Psi_I, \Psi_{I4}\} &= -1 = A_{33}, & \{\Psi_I, \Psi_5\} &= 0 \\ \{\Psi_{R2}, \Gamma_j\} &= i\partial_j - i\partial^i \left[\frac{\partial V_j}{\partial A_R^i} \right] = A_{44}, & \{\Psi_{R2}, \Psi_{R4}\} &= 0, \\ \{\Psi_{R2}, \Psi_{I4}\} &= 0, & \{\Psi_{R2}, \Psi_5\} &= -\partial_i \partial^i = A_{55}, & \{\Gamma_i, \Psi_{R4}\} &= 0, \\ \{\Gamma_i, \Psi_{I4}\} &= 0, & \{\Gamma_i, \Psi_5\} &= 0, & \{\Psi_{R4}, \Psi_{I4}\} &= 0, & \{\Psi_{R4}, \Psi_5\} &= 0, \\ & & & & \{\Psi_{I4}, \Psi_5\} &= 0,\end{aligned}\tag{7.48}$$

resultando la siguiente matriz

$$\mathcal{Y}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & A_{55} \\ -A_{11} & 0 & 0 & -A_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y})\tag{7.49}$$

con determinante distinta de cero

$$\det(\mathcal{Y}_{AB}) = A_{11}^2 \delta^6(\vec{x} - \vec{y}) A_{33}^4 [A_{55} \delta(\vec{x} - \vec{y})]^2 \neq 0,\tag{7.50}$$

y por tanto con un a matriz invertible

$$\mathcal{Y}^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A_{11}} & 0 & 0 & \frac{A_{44}}{A_{11}A_{55}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A_{33}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A_{55}} \\ \frac{1}{A_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_{44}}{A_{11}A_{55}} & 0 & 0 & \frac{1}{A_{55}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad (7.51)$$

Aplicando las constricciones de primera clase y las condiciones de norma en la densidad Hamiltoniana total obtenemos la densidad Hamiltoniana reducida

$$\mathcal{H}_{EMC} = -\frac{1}{2}\pi_{Ri}\pi_R^i + \frac{1}{2}\partial_i V_j(A_R)\partial^i V^j(A_R), \quad (7.52)$$

y de la transformada de Legendre total (7.43) podemos obtener la densidad Lagrangiana reducida

$$\mathcal{L}_{Red} = \frac{\partial V^i}{\partial A_R^j} \dot{A}_R^j \pi_{Ri} - \mathcal{H}_{EMC}, \quad (7.53)$$

$$\mathcal{L}_{Red} = -\frac{1}{2} \frac{\partial V^i}{\partial A_R^j} \frac{\partial V_i}{\partial A_R^l} \dot{A}_R^j \dot{A}_R^l - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial A_R^k} \right) \left(\frac{\partial V^j}{\partial A_R^l} \right) \partial_i A_R^k \partial^i A_R^l, \quad (7.54)$$

de lo que podemos definir una métrica que depende del campo

$$g_{jl} = \frac{\partial V^i}{\partial A_R^j} \frac{\partial V_i}{\partial A_R^l}, \quad (7.55)$$

lo cual al escribir en estos términos da como resultado el respectivo modelo sigma no-lineal asociado al campo electromagnético pasando a la densidad Lagrangiana reducida

$$\mathcal{L}_{Red} = -\frac{1}{2} g_{jl} (\dot{A}_R^j \dot{A}_R^l + \partial_i A_R^j \partial^i A_R^l). \quad (7.56)$$

Un punto importante a mencionar es que en cierta medida estamos usando la condición de Coulomb para la parte real del campo que junto con la condición de norma propuesta para el método da como resultado un modelo sigma no-lineal, con métrica dependiente del campo vectorial, para el campo electromagnético.

En el siguiente capítulo partiendo de estas ideas desarrollamos la cuantización que involucra a campos de alto orden y encontraremos una manera de traducir el formalismo de Ostrogradsky al formalismo de primer orden Lagrangiano.

Capítulo 8

Campos para el Modelo de Bernard-Duncan

La descripción dada por las teorías con derivada temporal de orden superior resulta ser insuficiente, ya que encontramos otras tres etiquetas, a parte del tiempo, relacionadas con la posición que también deben de ser consideradas. En teoría de campos el modelo de orden superior a más bajo orden es el desarrollado por Bernard-Duncan [21] el cual guarda cierto parentesco con el modelo de Pais-Uhlenbeck a nivel de partícula.

En este apartado nos enfocaremos en el estudio de este caso en concreto y analizaremos la manera de plantear la correspondiente cuantización para estas teorías.

8.1. Estructura para el Campo Complejo

El modelo de Bernard-Duncan es el más básico para las teorías con derivada de orden superior en teoría de campos y es dado por la acción

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2} [-(\square\varphi)^2 + (m_1^2 + m_2^2)\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m_1^2m_2^2\varphi^2] \quad (8.1)$$

Donde el campo escalar φ es real. En este punto uno puede pensar en la cuantización de este modelo siguiendo el procedimiento usual en teoría de campos cuánticos, pero encontramos problemas como la existencia de estados con norma negativa, la energía no es acotada por abajo y la matriz de dispersión no es unitaria. Sin embargo, estos problemas pueden ser considerados como fallas de interpretación en las ideas de Pais y Uhlenbeck [7]. Por otro lado la conclusión de Hawking y Hertog [18] es que esta falla la podemos compensar si consideramos dos espacios de Hilbert independientes, aunque no será posible partiendo de estas premisas establecer potenciales de interacción en nuestro sistema, ya que el sistema nos lleva a la existencia de estados con norma negativa [34].

La metodología antes descrita para el modelo de Pais-Uhlenbeck, en el caso de partícula, es útil para abordar el problema de las teorías de orden superior en los campos y más específicamente en el modelo complejo propuesto con constricciones de segunda clase. La idea general de esta sección es aplicar nuestro formalismo al modelo de Bernard-Duncan [21], pero considerando la estructura más compleja de constricciones que aparecen en el modelo. En general partiremos del modelo complejo de Benard-Duncan

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ -\frac{1}{2}(\square\phi)^2 + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m_1^2 m_2^2}{2} \phi^2 \right\}, \quad (8.2)$$

con el respectivo campo complejo que es separable en parte real y parte imaginaria, como ya lo habíamos hecho

$$\phi = \phi_R + i\phi_I, \quad (8.3)$$

resultando que la acción se puede escribir en sus partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\square\phi_R)^2 + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{m_1^2 m_2^2}{2} \phi_R^2 + \frac{1}{2}(\square\phi_I)^2 \right. \\ \left. - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} \partial_\mu \phi_I \partial^\mu \phi_I + \frac{m_1^2 m_2^2}{2} \phi_I^2 + i[-\square\phi_R \square\phi_I \right. \\ \left. + (m_1^2 + m_2^2) \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_I - m_1^2 m_2^2 \phi_R \phi_I] \right\}. \quad (8.4) \end{aligned}$$

Para continuar con nuestro método es necesario considerar la siguiente definición de los campos y sus velocidades

$$v_R = \dot{\phi}_R, \quad v_I = \dot{\phi}_I, \quad (8.5)$$

las cuales serán útiles más adelante. Las ecuaciones de movimiento resultantes de la acción anterior son

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \left\{ [-\square^2 \phi_R - (m_1^2 + m_2^2) \square \phi_R - m_1^2 m_2^2 \phi_R - i(\square^2 \phi_I \right. \\ \left. + (m_1^2 + m_2^2) \square \phi_I + m_1^2 m_2^2 \phi_I)] \delta \phi_R \right. \\ \left. + [\square^2 \phi_I + (m_1^2 + m_2^2) \square \phi_I + m_1^2 m_2^2 \phi_I - i(\square^2 \phi_R \right. \\ \left. + (m_1^2 + m_2^2) \square \phi_R + m_1^2 m_2^2 \phi_R)] \delta \phi_I \right\} = 0. \quad (8.6) \end{aligned}$$

Los momentos resultantes directamente de la variación (8.6) utilizando el principio variacional de Schwinger son

$$\begin{aligned} \pi_{\phi_R} &= \square \dot{\phi}_R + (m_1^2 + m_2^2) \dot{\phi}_R + i(\square \dot{\phi}_I + (m_1^2 + m_2^2) \dot{\phi}_I), \\ \pi_{\phi_I} &= -\square \dot{\phi}_I - (m_1^2 + m_2^2) \dot{\phi}_I + i(\square \dot{\phi}_R + (m_1^2 + m_2^2) \dot{\phi}_R), \\ \pi_{v_R} &= -\square \phi_R - i \square \phi_I, \\ \pi_{v_I} &= \square \phi_I - i \square \phi_R, \quad (8.7) \end{aligned}$$

de donde podemos inferir las siguientes constricciones primarias

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \pi_{\phi_R} + i\pi_{\phi_I}, \\ \Psi_2 &= \pi_{v_R} + i\pi_{v_I},\end{aligned}\tag{8.8}$$

las que también son pensadas como 4 constricciones reales primarias.

Con estas constricciones (8.8), los momentos (8.7) y la densidad Lagrangiana (8.4) es posible definir una transformación de Legendre que da como resultado la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_{(\phi_R, \phi_I)} = \dot{\phi}_R \pi_{\phi_R} + \dot{\phi}_I \pi_{\phi_I} + \dot{v}_R \pi_{v_R} + \dot{v}_I \pi_{v_I} - \mathcal{L}\tag{8.9}$$

lo que establece la estructura simpléctica del problema

$$\begin{aligned}\{\phi_R, \pi_{\phi_R}\} &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), & \{\phi_I, \pi_{\phi_I}\} &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{v_R, \pi_{v_R}\} &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), & \{v_I, \pi_{v_I}\} &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).\end{aligned}\tag{8.10}$$

La expresión de la densidad Hamiltoniana separada en parte real y parte imaginaria es

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{(\phi_R, \phi_I)} &= v_R \pi_{\phi_R} + v_I \pi_{\phi_I} - \frac{1}{2} \pi_{v_R}^2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} v_R^2 \\ &+ \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} v_I^2 + \frac{m_1^2 m_2^2}{2} \phi_R^2 + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} (\nabla \phi_R)^2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} (\nabla \phi_I)^2 \\ &- \frac{m_1^2 m_2^2}{2} \phi_I^2 + \pi_{v_R} \nabla^2 \phi_R + i (\pi_{v_R} \nabla^2 \phi_I + m_1^2 m_2^2 \phi_R \phi_I - (m_1^2 + m_2^2) v_R v_I \\ &\quad + (m_1^2 + m_2^2) \nabla \phi_R \cdot \nabla \phi_I)\end{aligned}\tag{8.11}$$

y de la densidad Hamiltoniana total que incluye las constricciones tenemos

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_{(\phi_R, \phi_I)} + \mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2.\tag{8.12}$$

Las ecuaciones de movimiento derivadas de la densidad Hamiltoniana o ecua-

ciones de Hamilton son equivalentes a las ecuaciones (8.6) resultando que

$$\dot{\phi}_R = \frac{\partial \mathcal{H}(\phi_R, \phi_I)}{\partial \pi_{\phi_R}} + \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \pi_{\phi_R}} + \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \pi_{\phi_R}} = v_R + \mu_1, \quad (8.13)$$

$$\dot{\phi}_I = \frac{\partial \mathcal{H}(\phi_R, \phi_I)}{\partial \pi_{\phi_I}} + \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \pi_{\phi_I}} + \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \pi_{\phi_I}} = v_I + i\mu_1, \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_R &= \frac{\partial \mathcal{H}(\phi_R, \phi_I)}{\partial \pi_{v_R}} + \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \pi_{v_R}} + \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \pi_{v_R}} \\ &= -\pi_{v_R} + \nabla^2 \phi_R + i\nabla^2 \phi_I + \mu_2, \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\dot{v}_I = \frac{\partial \mathcal{H}(\phi_R, \phi_I)}{\partial \pi_{v_I}} + \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \pi_{v_I}} + \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \pi_{v_I}} = i\mu_2, \quad (8.16)$$

$$\dot{\pi}_{\phi_R} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\phi_R, \phi_I)}{\partial \phi_R} - \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \phi_R} - \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \phi_R} = -m_1^2 m_2^2 \phi_R - i m_1^2 m_2^2 \phi_I, \quad (8.17)$$

$$\dot{\pi}_{\phi_I} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\phi_R, \phi_I)}{\partial \phi_I} - \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \phi_I} - \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \phi_I} = -m_1^2 m_2^2 \phi_I + i m_1^2 m_2^2 \phi_R, \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_{v_R} &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\phi_R, \phi_I)}{\partial v_R} - \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_R} - \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_R} = \\ &= -\pi_{\phi_R} + (m_1^2 + m_2^2)v_R + i(m_1^2 + m_2^2)v_I, \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_{v_I} &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\phi_R, \phi_I)}{\partial v_I} - \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_I} - \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_I} = \\ &= -\pi_{\phi_I} - (m_1^2 + m_2^2)v_I + i(m_1^2 + m_2^2)v_R. \end{aligned} \quad (8.20)$$

La evolución de las constricciones es dada por la densidad Hamiltoniana total, con lo que se obtiene

$$\dot{\Psi}_1 = \int d^3x \{\Psi_1, \mathcal{H}_T\} = 0, \quad \dot{\Psi}_2 = \int d^3x \{\Psi_2, \mathcal{H}_T\} = -\Psi_1 \quad (8.21)$$

y estas constricciones de primera clase dan como resultado variaciones en los

campos y momentos resultando las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\delta\phi_R &= \int d^3y \{\phi_R, \epsilon^1\Psi_1 + \epsilon^2\Psi_2\} = \epsilon^1(\vec{x}, t), \\
\delta\phi_I &= \int d^3y \{\phi_I, \epsilon^1\Psi_1 + \epsilon^2\Psi_2\} = i\epsilon^1(\vec{x}, t), \\
\delta v_R &= \int d^3y \{v_R, \epsilon^1\Psi_1 + \epsilon^2\Psi_2\} = \epsilon^2(\vec{x}, t), \\
\delta v_I &= \int d^3y \{v_I, \epsilon^1\Psi_1 + \epsilon^2\Psi_2\} = i\epsilon^2(\vec{x}, t), \\
\delta\pi_{\phi_R} &= \int d^3y \{\pi_{\phi_R}, \epsilon^1\Psi_1 + \epsilon^2\Psi_2\} = 0, \\
\delta\pi_{\phi_I} &= \int d^3y \{\pi_{\phi_I}, \epsilon^1\Psi_1 + \epsilon^2\Psi_2\} = 0, \\
\delta\pi_{v_R} &= \int d^3y \{\pi_{v_R}, \epsilon^1\Psi_1 + \epsilon^2\Psi_2\} = 0, \\
\delta\pi_{v_I} &= \int d^3y \{\pi_{v_I}, \epsilon^1\Psi_1 + \epsilon^2\Psi_2\} = 0,
\end{aligned} \tag{8.22}$$

donde se puede observar que ϕ_I y v_I se pueden salir del espacio real y para el manejo de las constricciones pueden ser consideradas como cantidades complejas. A partir de esta observación escogemos que estas variables sean cero de tal forma que con éstas se puedan fijar las condiciones de primera clase de forma que obtenemos las siguientes condiciones de norma que son consideradas cantidades complejas

$$\begin{aligned}
\Xi_1 &= \phi_I \approx 0, \\
\Xi_2 &= v_I \approx 0,
\end{aligned} \tag{8.23}$$

La evolución en el tiempo de las constricciones (8.23) es

$$\dot{\Xi}_1 = \int d^3x \{\Xi_1, H_T\} = \Xi_2 + i\mu_1 = 0, \tag{8.24}$$

$$\dot{\Xi}_2 = \int d^3x \{\Xi_2, H_T\} = i\mu_2 = 0, \tag{8.25}$$

lo cual resulta ser la evolución temporal de las condiciones de norma y sirve para fijar valores concretos en los los multiplicadores de Lagrange.

Esto último nos dice que las expresiones (8.7) para los momentos resultan ser cantidades reales. La matriz total de las constricciones adquiere la siguiente forma

$$Q^{ab} = \mathcal{D}^{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{8.26}$$

donde se tiene que

$$\mathcal{D}^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.27}$$

y podemos notar que con estas constricciones hemos fijado la norma ya que $\det\{\mathcal{D}_{ab}\} = 1$. La densidad Hamiltoniana aplicando las condiciones de norma (8.23) es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(v_I, v_R=0)} = v_R \pi_{\phi_R} - \frac{1}{2} \pi_{\phi_R}^2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} v_R^2 + \frac{m_1^2 m_2^2}{2} \phi_R^2 \\ + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} (\nabla \phi_R)^2 + \pi_{v_R} \nabla^2 \phi_R, \end{aligned} \quad (8.28)$$

la cual claramente coincide con el modelo de Bernard-Duncan [21]. Los paréntesis de Dirac resultantes de estas constricciones son

$$\{\phi_R, \pi_{\phi_R}\}^* = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{v_R, \pi_{v_R}\}^* = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (8.29)$$

Con respecto a los momentos podemos realizar la siguiente división

$$\pi_{\phi_R} = p_R + ip_I, \quad \pi_{\phi_I} = -p_I + ip_R, \quad (8.30)$$

$$\pi_{v_R} = \rho_R + i\rho_I, \quad \pi_{v_I} = -\rho_I + i\rho_R, \quad (8.31)$$

y mostrar que la parte imaginaria es cero debido a la definición misma de los momentos. Por otro lado, la evolución de las constricciones se queda en el espacio real concluyendo que

$$\pi_{\phi_R} \approx p_R, \quad \pi_{v_R} \approx \rho_R. \quad (8.32)$$

y por tanto

$$\{\phi_R, p_R\}^* = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{v_R, \rho_R\}^* = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (8.33)$$

La densidad Hamiltoniana real establecida por estas condiciones de norma resulta ser de orden superior

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{BD} = v_R p_R - \frac{1}{2} \rho_R^2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} v_R^2 + \frac{m_1^2 m_2^2}{2} \phi_R^2 \\ + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} (\nabla \phi_R)^2 + \rho_R \nabla^2 \phi_R \end{aligned} \quad (8.34)$$

o densidad Hamiltoniana de Bernard-Duncan.

Sin embargo la manera de establecer las condiciones de norma no es única, ya que es posible elegir otras condiciones de norma. Dada esta libertad originada de la estructura compleja expresada como constricciones de primera clase es posible fijar

$$\Upsilon_1 = \pi_{v_R} - m_2^2 \phi_R - im_1^2 \phi_I \approx 0 \quad (8.35)$$

junto con

$$\Upsilon_2 = \pi_{\phi_R} - m_1^2 v_R - im_2^2 v_I \approx 0, \quad (8.36)$$

las cuales son 2 constricciones complejas o 4 constricciones o condiciones de norma reales. Los paréntesis de Poisson de todas las constricciones, tanto las de primera clase como las que fijan la norma, son

$$\begin{aligned} \{\Psi_1, \Upsilon_1\} &= -(m_1^2 - m_2^2) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\Psi_2, \Upsilon_2\} &= (m_1^2 - m_2^2) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\Upsilon_1, \Upsilon_2\} &= (m_1^2 - m_2^2) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (8.37)$$

La evolución de las condiciones de norma

$$\begin{aligned}\dot{\Upsilon}_1 &= \int d^3x \{\Upsilon_1, \mathcal{H}_T\} = -\Upsilon_2 + \mu_1(m_1^2 - m_2^2) \approx 0, \\ \dot{\Upsilon}_2 &= \int d^3x \{\Upsilon_2, \mathcal{H}_T\} = m_1^2 \Upsilon_1 + i(m_1^2 - m_2^2) \phi_I - \mu_2(m_1^2 - m_2^2) \approx 0, \\ \mu_1 &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)} \Upsilon_2, \quad \mu_2 \approx i\phi_I\end{aligned}\quad (8.38)$$

establece el valor de los multiplicadores de Lagrange. El conjunto final de constricciones, tanto de las constricciones de primera clase como de las condiciones de norma, es

$$\zeta_A = (\Psi_a, \Upsilon_b), \quad (8.39)$$

donde $a, b = 1, 2$ y $A, B = 1, \dots, 4$. Con la definición de este nuevo conjunto se obtiene la siguiente estructura

$$\{\zeta_A, \zeta_B\} = \mathcal{C}_{AB} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (8.40)$$

la cual establece la siguiente matriz

$$\mathcal{C}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (m_2^2 - m_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(m_2^2 - m_1^2) \\ -(m_2^2 - m_1^2) & 0 & 0 & (m_1^2 - m_2^2) \\ 0 & (m_2^2 - m_1^2) & (m_2^2 - m_1^2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.41)$$

cuya determinante no es cero si las masas son distintas

$$\det(\mathcal{C}_{ab}) = (m_1^2 - m_2^2)^4. \quad (8.42)$$

de forma que podemos fijar de una manera adecuada la norma.

Como anteriormente hemos procedido aquí también es posible calcular los paréntesis de Dirac

$$\{\phi_R, v_R\}^* = \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{\phi_I, v_I\}^* = \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (8.43)$$

los cuales establecen la estructura simpléctica de nuestro sistema reducido. La densidad Hamiltoniana con la aplicación de estas condiciones de norma es

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{KG} &= \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2} v_R^2 + (m_1^2 - m_2^2) \frac{m_2^2}{2} \phi_R^2 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2} (\nabla \phi_R)^2 \\ &+ \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2} v_I^2 + (m_1^2 - m_2^2) \frac{m_1^2}{2} \phi_I^2 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2} (\nabla \phi_I)^2.\end{aligned}\quad (8.44)$$

Con esta densidad Hamiltoniana finalmente ahora es posible establecer una transformación de contacto

$$\sigma = (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} \phi_R, \quad \varphi = (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} \phi_I, \quad (8.45)$$

$$\pi_\sigma = (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} v_R, \quad \pi_\varphi = (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} v_I, \quad (8.46)$$

que nos lleva a la densidad de dos campos de Klein-Gordon reales

$$\mathcal{H}_{KGR} = \frac{\pi_\sigma^2}{2} + \frac{1}{2}(\nabla\sigma)^2 + \frac{m_2^2}{2}\sigma^2 + \frac{\pi_\varphi^2}{2} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{m_1^2}{2}\varphi^2, \quad (8.47)$$

y la estructura simpléctica asociada a este sistema resulta ser

$$\{\sigma, \pi_\sigma\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad \{\phi, \pi_\phi\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (8.48)$$

En este capítulo hemos establecido una teoría compleja de orden superior, encontrado una simetría escondida y hemos mostrado que esta estructura tiene constricciones de primera clase que pueden ser manejadas por medio de agregar otras contricciones conocidas como condiciones de norma [4]. Se ha mostrado que escogiendo ciertas condiciones de norma (8.23) se reduce este sistema al modelo de Bernard-Duncan. Sin embargo, la elección de las condiciones de norma resulta no ser única, ya que también encontramos otras condiciones (8.35) y (8.36) que nos llevan a un sistema reducido de dos campos de Klein-Gordon.

Como ya fue establecido para el modelo de Pais-Uhlenbeck aquí también es posible plantear un mapéo por medio de una transformación de norma que nos lleva del modelo de Bernard-Duncan a dos campos de Klein-Gordon. Sin embargo, como anteriormente fue mostrado para el modelo de Pais-Uhlenbeck hay una transformación canónica que nos lleva de los campos de Klein-Gordon al modelo de Bernard-Duncan, pero no hay una transformación canónica inversa del modelo de Bernard-Duncan, o las teorías de orden superior, a dos campos de Klein-Gordon reales, una teoría de primer orden.

Con todo este análisis solo resta ver la manera por medio de la cual podamos agregar fuentes que describan nuestros campos complejos.

8.2. Fuentes Complejas de los Campos

Con el fin de desarrollar una manera eficaz para agregar a nuestra teoría potenciales de intracción, primero que nada es necesario buscar una manera de considerar fuentes para nuestros campos complejos. Una manera adecuada es partir de las ecuaciones de movimiento con las fuentes de los campos y establecer las relaciones que existen entre las fuentes, ya que es lógico pensar que existe relación entre estas debido a que hemos usado el método de Ostrogradsky que hace uso de la definición de nuevos campos.

Para comenzar consideremos la densidad Hamiltoniana con todas las fuentes posibles

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_S = \mathcal{H}_{(\phi_R, \phi_I)} - \mathcal{J}\phi_R - \mathcal{K}\pi_{\phi_R} - \mathcal{Y}\phi_I - \mathcal{M}\pi_{\phi_I} - \mathcal{N}\nu_R \\ - \mathcal{O}\pi_{\nu_R} - \mathcal{R}\nu_I - \mathcal{Q}\pi_{\nu_I} \end{aligned} \quad (8.49)$$

la que da lugar a las ecuaciones de Hamilton con fuentes

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_R &= \frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial \pi_{\phi_R}} = v_R - \mathcal{K}, & \dot{\phi}_I &= \frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial \pi_{\phi_I}} = v_I - \mathcal{M}, \\
\dot{v}_R &= \frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial \pi_{v_R}} = -\pi_{v_R} + \nabla^2 \phi_R + i \nabla^2 \phi_I - \mathcal{O}, \\
\dot{v}_I &= \frac{\partial \mathcal{H}_{(\phi_R, \phi_I)}}{\partial \pi_{v_I}} = -\mathcal{Q}, \\
\dot{\pi}_{\phi_R} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial \phi_R} = -m_1^2 m_2^2 \phi_R - i m_1^2 m_2^2 \phi_I + \mathcal{J}, \\
\dot{\pi}_{\phi_I} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial \phi_I} = m_1^2 m_2^2 \phi_I - i m_1^2 m_2^2 \phi_R + \mathcal{Y}, \\
\dot{\pi}_{v_R} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial v_R} = -\pi_{\phi_R} + (m_1^2 + m_2^2) v_R + i(m_1^2 + m_2^2) v_I + \mathcal{N}, \\
\dot{\pi}_{v_I} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial v_I} = -\pi_{\phi_I} - (m_1^2 + m_2^2) v_I + i(m_1^2 + m_2^2) v_R + \mathcal{R}, \tag{8.50}
\end{aligned}$$

y los respectivos momentos dados por

$$\begin{aligned}
\pi_{\phi_R} &= \dot{v}_R - \nabla^2 \phi_R - i \nabla^2 \phi_I + \dot{\mathcal{O}} + (m_1^2 + m_2^2) v_R + i(m_1^2 + m_2^2) v_I + \mathcal{N}, \\
\pi_{\phi_I} &= i \dot{v}_R - i \nabla^2 \phi_R + \nabla^2 \phi_I + i \dot{\mathcal{O}} + i(m_1^2 + m_2^2) v_R - (m_1^2 + m_2^2) v_I + i \mathcal{N}, \\
\pi_{v_R} &= -\dot{v}_I + \nabla^2 \phi_R + i \nabla^2 \phi_I - \mathcal{O}, \\
\pi_{v_I} &= -i \dot{v}_R + i \nabla^2 \phi_R - \nabla^2 \phi_I - i \mathcal{O}. \tag{8.51}
\end{aligned}$$

De las ecuaciones de Hamilton (8.50) se puede concluir que

$$\mathcal{N} + i \mathcal{R} \approx 0, \quad \mathcal{J} + i \mathcal{Y} \approx 0. \tag{8.52}$$

Otras relaciones de las fuentes que no son tan obvias, pero que también se obtienen de las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{aligned}
-\mathcal{J}_I - m_2^2 \mathcal{O}_I - m_2^2 \mathcal{Q}_R &\approx 0, & -\mathcal{J}_R - m_1^2 \mathcal{O}_R + m_1^2 \mathcal{Q}_I &\approx 0, \\
-m_1^2 \mathcal{K}_I - m_1^2 \mathcal{M}_R - \mathcal{N}_I &\approx 0, & -m_2^2 \mathcal{K}_R + m_2^2 \mathcal{M}_I - \mathcal{N}_R &\approx 0. \tag{8.53}
\end{aligned}$$

Las relaciones entre fuentes tienen sentido, si consideramos que se está utilizando el formalismo de Ostrogradsky el cual establece relaciones entre los campos que se van a ver reflejadas en las respectivas fuentes haciéndolas dependientes entre sí. Además, la elección de las condiciones de norma (8.35) y (8.36) también implican relaciones en las fuentes, ya que estas eliminan grados de libertad en el sistema induciendo una proyección muy específica.

8.3. Método para Establecer Interacciones

Por otro lado, con la finalidad de obtener un potencial de interacción en concreto definimos el equivalente al campo conjugado que se logra a partir de la

inclusión de las condiciones de norma o de la reducción de los grados de libertad

$$\bar{\phi} = \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)}\phi - \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)}\pi_{v_R} \quad (8.54)$$

resultando al incluir las condiciones de norma (8.35) y (8.36) que

$$\phi^* = \bar{\phi}|_{rec} = \phi_R - i\phi_I \quad (8.55)$$

y los potenciales de intracción se puede establecer de la siguiente manera

$$\mathcal{U}_{1Int} = \frac{\lambda_1}{4!2^4} \left[\phi + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)}\phi - \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)}\pi_{v_R} \right]^4. \quad (8.56)$$

o de forma diferente pero también valida

$$\mathcal{U}_{2Int} = \frac{\lambda_2}{4!(2i)^4} \left[\phi - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)}\phi + \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)}\pi_{v_R} \right]^4 \quad (8.57)$$

y la combinación de ambas

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{3Int} = & -\frac{\lambda_3}{4!16} \left[\phi + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)}\phi \right. \\ & \left. - \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)}\pi_{v_R} \right]^2 \left[\phi - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)}\phi + \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)}\pi_{v_R} \right]^2, \end{aligned} \quad (8.58)$$

los cuales pueden ser separados en componentes de ϕ

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1Int(\phi_R, \phi_I)} = & \frac{\lambda_1}{4!2^4} \left[(\phi_R + i\phi_I) + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)}(\phi_R + i\phi_I) \right. \\ & \left. - \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)}\pi_{v_R} \right]^4, \end{aligned} \quad (8.59)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{2Int(\phi_R, \phi_I)} = & \frac{\lambda_2}{4!(2i)^4} \left[(\phi_R + i\phi_I) - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)}(\phi_R + i\phi_I) \right. \\ & \left. + \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)}\pi_{v_R} \right]^4, \end{aligned} \quad (8.60)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{3Int(\phi_R, \phi_I)} = & -\frac{\lambda_3}{4!16} \left\{ (\phi_R + i\phi_I) + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)}(\phi_R + i\phi_I) \right. \\ & \left. - \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)}\pi_{v_R} \right\}^2 \cdot \left\{ (\phi_R + i\phi_I) - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)}(\phi_R + i\phi_I) \right. \\ & \left. + \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)}\pi_{v_R} \right\}^2. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Con estas interacciones podemos formar una interacción total que tiene un mínimo bien establecido

$$\mathcal{U}_{T(\phi_R, \phi_I)} = \mathcal{U}_{1Int(\phi_R, \phi_I)} + \mathcal{U}_{2Int(\phi_R, \phi_I)} + \mathcal{U}_{3Int(\phi_R, \phi_I)}. \quad (8.62)$$

La densidad Hamiltoniana que incluye este potencial de interacción es

$$\mathcal{H}_{G(\phi_R, \phi_I)} = \mathcal{H}_T + \mathcal{U}_{T(\phi_R, \phi_I)}. \quad (8.63)$$

y produce la evolución de las constricciones

$$\int d^4x \{\Phi_1, \mathcal{H}_{G(\phi_R, \phi_I)}\} = 0, \quad (8.64)$$

$$\int d^4x \{\Phi_2, \mathcal{H}_{G(\phi_R, \phi_I)}\} = -\Phi_1. \quad (8.65)$$

Por otro lado estas condiciones de norma al ser aplicadas producen las siguientes interacciones en el espacio reducido, con σ y φ dadas en las ecuaciones (8.45)

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1Int(\phi_R, \phi_I)}|_{rec} &= \frac{\lambda_1}{4!} \sigma^4, & \mathcal{U}_{2Int(\phi_R, \phi_I)}|_{rec} &= \frac{\lambda_2}{4!} \varphi^4, \\ \mathcal{U}_{3Int(\phi_R, \phi_I)}|_{rec} &= \frac{\lambda_3}{4!} \sigma^2 \varphi^2, \end{aligned} \quad (8.66)$$

donde con el símbolo $|_{rec}$ queremos decir que ya hemos aplicado las constricciones. Lo anterior es aplicado a la densidad Hamiltoniana total resultando

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{G(\phi_R, \phi_I)}|_{rec} &= \mathcal{H}_{KG} + \mathcal{U}_{1Int(\phi_R, \phi_I)}|_{rec} \\ &+ \mathcal{U}_{2Int(\phi_R, \phi_I)}|_{rec} + \mathcal{U}_{3Int(\phi_R, \phi_I)}|_{rec}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Con la introducción de las fuentes complejas ahora es posible establecer los potenciales de interacción y desarrollar un formalismo que nos permita llegar a la cuantización de nuestro sistema con interacciones. En lo siguiente mostraremos que las relaciones de las fuentes son también necesarias si hacemos la integral de camino para nuestro sistema.

8.4. Integral de Camino para Fuentes Complejas

Para introducir la integral de camino en un sistema complejo con las constricciones descritas es necesario usar el formalismo propuesto por Senjanovic [24]. Sin embargo, una integral de camino que sea real es lograda por medio de considerar las relaciones entre las fuentes clásicas válidas también para nuestra formulación cuántica hecha por medio de la integral de camino. Esto último no es descabellado, ya que el método de Ostrogradsky establece relaciones entre las variables [12].

Para nuestra comodidad consideraremos un cambio de notación que describa la idea general

$$\begin{aligned} \Theta^a &= (\phi_R, \phi_I, \nu_R, \nu_I), & \Pi_a &= (\pi_{\phi_R}, \pi_{\phi_I}, \pi_{\nu_R}, \pi_{\nu_I}), \\ \mathcal{I}^a &= (\mathcal{J}, \mathcal{Y}, \mathcal{N}, \mathcal{R}), & \mathcal{S}_a &= (\mathcal{K}, \mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{Q}) \end{aligned} \quad (8.68)$$

por medio del cual podemos definir la medida de nuestra integral que ya incluye las constricciones por el método de Senjanovic, con ζ_A dadas en (8.39)

$$\mathcal{D}\mu = \mathcal{D}\Theta^a \mathcal{D}\Pi_a \det | \{\zeta_A, \zeta_B\} | \prod_C^4 \delta(\zeta_C). \quad (8.69)$$

La integral de camino adquiere la siguiente forma

$$Z = \int \mathcal{D}\mu \exp[i \int dt (\dot{\phi}_R \pi_{\phi_R} + \dot{\phi}_I \pi_{\phi_I} + \dot{v}_R \pi_{v_R} + \dot{v}_I \pi_{v_I} - \mathcal{H}_{(\phi_R, \phi_I)} + \Theta^a \mathcal{I}_a + \Pi_a \mathcal{S}^a)] \quad (8.70)$$

y desarrollando la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} Z_R = \int \mathcal{D}\phi_R \mathcal{D}\phi_I \mathcal{D}v_R \mathcal{D}v_I \exp\{i \int dt \left([(m_1^2 - m_2^2) \dot{\phi}_R v_R + (m_1^2 - m_2^2) \right. \\ \dot{\phi}_I v_I - \mathcal{H}_{KG} + \phi_R (-\mathcal{J}_R - m_2^2 \mathcal{O}_R + m_2^2 \mathcal{Q}_I) + \phi_I (\mathcal{J}_I + m_1^2 \mathcal{O}_I + m_1^2 \mathcal{Q}_R) \\ \left. + v_R (-\mathcal{N}_R - m_1^2 \mathcal{K}_R + m_1^2 \mathcal{M}_I) + v_I (\mathcal{N}_I + m_2^2 \mathcal{K}_I + m_2^2 \mathcal{M}_R) \right] \\ \left. + i[\phi_R (-\mathcal{J}_I - m_2^2 \mathcal{O}_I - m_2^2 \mathcal{Q}_R) + \phi_I (-\mathcal{J}_R - m_1^2 \mathcal{O}_R + m_1^2 \mathcal{Q}_I) \right. \\ \left. + v_R (-\mathcal{N}_I - m_1^2 \mathcal{K}_I - m_1^2 \mathcal{M}_R) + v_I (-\mathcal{N}_R - m_2^2 \mathcal{K}_R + m_2^2 \mathcal{M}_I)] \right\}, \end{aligned} \quad (8.71)$$

de la cual podemos utilizar las ecuaciones (8.52) y (8.53) para obtener la integral de camino reducida

$$\begin{aligned} Z_R = \int \mathcal{D}\phi_R \mathcal{D}\phi_I \mathcal{D}v_R \mathcal{D}v_I \exp\{i \int dt \left([(m_1^2 - m_2^2) \dot{\phi}_R v_R + \right. \\ (m_1^2 - m_2^2) \dot{\phi}_I v_I - \mathcal{H}_{KG} + (m_1^2 - m_2^2) \phi_R (\mathcal{O}_R - \mathcal{Q}_I) + (m_1^2 - m_2^2) \phi_I \\ \left. (\mathcal{O}_I + \mathcal{Q}_R) + (m_1^2 - m_2^2) v_R (-\mathcal{K}_R + \mathcal{M}_I) + (m_1^2 - m_2^2) v_I \right. \\ \left. (-\mathcal{K}_I - \mathcal{M}_R)] \right\}. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Sin embargo aquí también podemos hacer una transformación en la integral de camino que implica considerar también el Jacobiano de ésta escogiendo la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \sigma &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} \phi_R, & \pi_\sigma &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} v_R, \\ \varphi &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} \phi_I, & \pi_\varphi &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} v_I, \\ \Omega_R &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} (\mathcal{O}_R - \mathcal{Q}_I), & \Omega_I &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} (\mathcal{O}_I + \mathcal{Q}_R), \\ E_R &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} (-\mathcal{K}_R + \mathcal{M}_I), & E_I &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} (-\mathcal{K}_I - \mathcal{M}_R), \end{aligned} \quad (8.73)$$

que tiene como Jacobiano

$$|J| = \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^2}, \quad d\phi_R dv_R d\phi_I dv_I = |J| d\sigma d\pi_\sigma d\varphi d\pi_\varphi. \quad (8.74)$$

reduciendo la integral de camino a la expresión correspondiente para el modelo de Klein-Gordon

$$Z_{KG} = G \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi_\sigma \mathcal{D}\pi_\phi \exp\left\{i \int dt (\dot{\sigma}\pi_\sigma + \dot{\phi}\pi_\phi - \mathcal{H}_{KGR}(\sigma, \phi, \pi_\sigma, \pi_\phi) + \sigma\Omega_R + \phi\Omega_I + \pi_\sigma E_R + \pi_\phi E_I)\right\}. \quad (8.75)$$

La simetría escondida que hay dentro de este modelo complejo, y en principio se puede presentar para cualquier teoría extendida al plano complejo, permite escoger la forma en la cual se desea fijar las condiciones de norma debido a las constricciones de primera clase existentes. En este trabajo se ha mostrado que la manera de elegir alguna condición de norma no es única y por medio del modelo de Bernard-Duncan pudimos llegar al modelo de dos campos de Klein-Gordon o al modelo de orden superior de Bernard-Duncan real. Es importante mencionar que para el caso de agregar condiciones de norma que nos llevan al modelo de Bernard-Duncan real éstas coinciden con las condiciones de Hermiticidad usuales y para el caso donde las condiciones de norma nos llevan al modelo de dos campos de Klein-Gordon estas condiciones resultan ser las condiciones de realidad mencionadas por Ashtekar [11].

Con la finalidad de recapitular el método aquí expuesto hacemos una descripción resumida: Como primer paso se considera una extensión del modelo de orden superior de Bernard-Duncan al plano complejo, en general es posible hacer esta extensión a cualquier modelo. Como segundo paso separamos al campo dentro de la densidad Lagrangiana en parte real y parte imaginaria. En tercer lugar encontramos las constricciones primarias en el plano complejo, por medio de obtener los momentos resultantes de la parte real y la parte imaginaria del campo que estarán relacionados. Como cuarto paso obtenemos la densidad Hamiltoniana teniendo presente las constricciones primarias. En el siguiente paso hacemos la evolución de nuestras constricciones primarias usando la densidad Hamiltoniana y concluyendo que las constricciones primarias son de primera clase y ya no hay otras constricciones. Posteriormente, vemos la variación que producen estas constricciones y establecemos la dimensión real de las condiciones de norma que se proponen para fijar la norma, o establecer un conjunto de constricciones de segunda clase. Una conclusión que resulta de forma secundaria es que la elección de la condición de norma esta relacionada con las transformaciones canónicas en mecánica clásica y podría ser de utilidad para la cuantización de los sistemas físicos. Sin embargo, también podemos explorar este modelo por medio de la teoría de múltiples variables complejas a partir de otra elección de la definición de los momentos.

Capítulo 9

Constricciones de Segunda Clase y modelo de B-D

La formulación aquí expuesta de un método que permite establecer relaciones entre diversos sistemas físicos a partir de la extensión de un modelo al plano complejo también puede ser vista como transformaciones canónicas complejas que utilizan las condiciones de realidad [22]. Es a partir de las condiciones de realidad que podemos ver que estas pueden ser usadas como constricciones de segunda clase [40].

En este apartado vamos a pensar en términos de transformaciones activas y pasivas solo que en lugar de una transformación temporal pensaremos en nuestra transformación compleja. Podemos pensar que la transformación es compleja y nos permite pasar a diferentes sistemas reales o podemos pensar que un sistema está en el plano complejo con las condiciones adecuadas que permiten pasar a un sistema real.

Partiendo de un sistema complejo, el modelo de Bernard-Duncan, analizaremos un modelo no Hermítico de orden superior. A partir de lo antes visto usamos el hecho de que este modelo complejo puede ser consistentemente restringido al espacio fase real. Estas restricciones son implementadas usando constricciones de segunda clase por medio del formalismo de Dirac [4], sin incluir las constricciones de primera clase, y se muestra que la superficie de las constricciones es preservada por la inclusión de interacciones. Primeramente se establece una complexificación de la teoría de Bernard-Duncan, donde el número de grados de libertad es duplicado. Como segundo punto se introduce un término de derivada total dentro de la densidad Lagrangiana compleja, esto no modifica las ecuaciones de movimiento, pero permite cambiar las condiciones de borde en términos de los campos ϕ y la aceleración $\ddot{\phi}$. Esto se introduce, ya que las condiciones de realidad son formuladas de manera más simple en términos de estas variables. La densidad Lagrangiana incluyendo el término de derivada total es

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} [(\Box\phi)^2 + (m_1^2 + m_2^2)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_1^2m_2^2\phi^2] + \partial_\mu\phi(\partial^\mu\Box\phi) \right\} \quad (9.1)$$

con un campo complejo ϕ y una densidad Lagrangiana que es una función analítica compleja.

Lo anterior (9.1) es usado para obtener directamente los respectivos momentos

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \dot{\phi}} + \partial_\nu \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \partial_\sigma \dot{\phi}} \quad (9.2)$$

$$\pi_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \dot{\phi}} \quad (9.3)$$

$$\pi_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(3)}} \quad (9.4)$$

donde aquí explícitamente se consideran a los momentos de orden superior, con estas expresiones obtenemos

$$\pi_0 = \phi^{(3)} - \nabla^2 \dot{\phi} + (m_1^2 + m_2^2) \dot{\phi} \quad (9.5)$$

$$\pi_1 = 0 \quad (9.6)$$

$$\pi_2 = \dot{\phi} \quad (9.7)$$

los cuales son separables en parte real y parte imaginaria. De estos se obtienen 4 constricciones que después estudiaremos usando la teoría de Dirac [4, 10].

Para resolver las ecuaciones de movimiento dadas por (9.1) necesitamos específicamente las condiciones iniciales $\phi(\vec{x}, t = t_0)$, $\dot{\phi}(\vec{x}, t = t_0)$, $\ddot{\phi}(\vec{x}, t = t_0)$ y $\phi^{(3)}(\vec{x}, t = t_0)$. Lo anterior define el espacio de configuración de la teoría Lagrangiana y muestra que hay 8 soluciones linealmente independientes, ya que trabajamos con una teoría compleja.

De la descripción Hamiltoniana de Ostrogradsky (9.1) se definen los campos independientes

$$\phi = \phi, \quad \eta = \dot{\phi}, \quad \xi = \ddot{\phi}, \quad (9.8)$$

que serán usados para establecer claramente la aparición de constricciones. Los campos y momentos nos permiten introducir la teoría Hamiltoniana que es compleja, pero no es clara la manera en las que se incluyen las cantidades de alto orden. En la siguiente sección, por medio del principio de acción de Schwinger se arguyen razones para introducir estos campos (9.8) y estos momentos (9.2) que resultan ser parte de una teoría Hamiltoniana consistente.

9.0.1. El principio variacional de Schwinger

Con la finalidad de mostrar el efecto de las condiciones de borde, en este apartado se usa el principio variacional de Schwinger aplicado a la acción (9.1) resultando

$$\delta S = \int d^4x - \frac{1}{2} \phi \{ \square(\square) + (m_1^2 + m_2^2) \square + m_1^2 m_2^2 \} \phi + \int d^3x \{ \pi_0 \delta \phi + \pi_2 \delta \xi \}, \quad (9.9)$$

donde encontramos que los campos ϕ y ξ están naturalmente fijos en el borde y en este sentido las definiciones en (9.2) -(9.4) son consistentes. También, de la variación se puede ver que hay solamente 2 grados de libertad en el espacio de configuración, 4 en el espacio fase $(\phi, \xi, \pi_0, \pi_2)$, en lugar de los 3 complejos que se pueden ver en (9.8) y esto implica que nuestra teoría tiene constricciones.

La densidad Hamiltoniana que resulta de la teoría de Ostrogradsky es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \pi_1 \xi + \pi_0 \pi_2 + 2\pi_2 \nabla^2 \eta - (m_1^2 + m_2^2) \eta \pi_2 - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{2} (\nabla^2 \phi)^2 + \xi \nabla^2 \phi \quad (9.10) \\ & - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} \eta^2 + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{m_1^2 m_2^2}{2} \phi^2 - \eta \nabla^2 \eta + (m_1^2 + m_2^2) \eta^2 \\ & - \xi \nabla^2 \phi + (\nabla^2 \phi)^2 + \pi_0 \pi_2 - \eta \pi_0. \end{aligned}$$

La densidad Hamiltoniana (9.10) en términos de la parte real y la parte imaginaria es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R = & \pi_{1R} \xi_R + \pi_{0R} \pi_{2R} + 2\pi_{2R} \nabla^2 \eta_R - (m_1^2 + m_2^2) \eta_R \pi_{2R} - \frac{1}{2} \xi_R^2 \quad (9.11) \\ & - \frac{1}{2} (\nabla^2 \phi_R)^2 + \xi_R \nabla^2 \phi_R - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} \eta_R^2 + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} \nabla \phi_R \cdot \nabla \phi_R \\ & + \frac{m_1^2 m_2^2}{2} \phi_R^2 - \eta_R \nabla^2 \eta_R + (m_1^2 + m_2^2) \eta_R^2 - \xi_R \nabla^2 \phi_R + (\nabla^2 \phi_R)^2 \\ & + \pi_{0R} \pi_{2R} - \eta_R \pi_{0R} \\ & - [\pi_{1I} \xi_I + \pi_{0I} \pi_{2I} + 2\pi_{2I} \nabla^2 \eta_I - (m_1^2 + m_2^2) \eta_I \pi_{2I} - \frac{1}{2} \xi_I^2 \\ & - \frac{1}{2} (\nabla^2 \phi_I)^2 + \xi_I \nabla^2 \phi_I - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} \eta_I^2 + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} \nabla \phi_I \cdot \nabla \phi_I \\ & + \frac{m_1^2 m_2^2}{2} \phi_I^2 - \eta_I \nabla^2 \eta_I + (m_1^2 + m_2^2) \eta_I^2 - \xi_I \nabla^2 \phi_I + (\nabla^2 \phi_I)^2 \\ & + \pi_{0I} \pi_{2I} - \eta_I \pi_{0I}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I = & [\pi_{1R} \xi_I + \pi_{1I} \xi_R + \pi_{0R} \pi_{2I} + \pi_{0I} \pi_{2R} + 2\pi_{2R} \nabla^2 \eta_I + 2\pi_{2I} \nabla^2 \eta_R \\ & - (m_1^2 + m_2^2) \eta_R \pi_{2I} - (m_1^2 + m_2^2) \eta_I \pi_{2R} - \xi_R \xi_I - \nabla^2 \phi_R \nabla^2 \phi_I \quad (9.12) \\ & + \xi_R \nabla^2 \phi_I + \xi_I \nabla^2 \phi_R - (m_1^2 + m_2^2) \eta_R \eta_I + (m_1^2 + m_2^2) \nabla \phi_R \cdot \nabla \phi_I \\ & + m_1^2 m_2^2 \phi_R \phi_I - \eta_R \nabla^2 \eta_I - \eta_I \nabla^2 \eta_R + 2(m_1^2 + m_2^2) \eta_R \eta_I \\ & - \xi_R \nabla^2 \phi_I - \xi_I \nabla^2 \phi_R + 2(\nabla^2 \phi_R)(\nabla^2 \phi_I) \\ & + \pi_{0R} \pi_{2I} + \pi_{0I} \pi_{2R} - \eta_R \pi_{0I} - \eta_I \pi_{0R}]. \end{aligned}$$

En esta parte se ha encontrado un espacio fase real con 12 grados de libertad, pero con el método variacional de Schwinger que tiene 8 grados de libertad. De hecho esto sugiere que la teoría Hamiltoniana está incompleta y necesita incorporar las constricciones las cuales agregamos en la siguiente sección por medio del método de Dirac. Además, en el espíritu de Hamiltoniano complejo en la siguiente sección se analiza como introducir una estructura simpléctica de

tal manera que las ecuaciones Hamiltonianas satisfacen idénticamente las condiciones de Cauchy-Riemann y de esta manera se logra una evolución temporal de la teoría analítica. Debe notarse que nuestra densidad Lagrangiana depende hasta derivadas de tercer orden.

9.1. Ecuaciones de Hamilton y Ecuaciones de Cauchy-Riemann

En esta sección se estudia la estructura Hamiltoniana compleja y seleccionamos la estructura simpléctica correcta de tal forma que la evolución temporal clásica respeta analiticidad del sistema.

Estructura Compleja

En esta parte del trabajo, nosotros determinamos el elemento minimal que produce la evolución temporal en esta descripción compleja. En este caso la transformación de Legendre para la densidad Hamiltoniana(9.10) es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \dot{\phi}_R \pi_{0R} - \dot{\phi}_I \pi_{0I} + \dot{\eta}_R \pi_{1R} - \dot{\eta}_I \pi_{1I} + \dot{\xi}_R \pi_{2R} - \dot{\xi}_I \pi_{2I} - \mathcal{H}_R \\ & + i[\dot{\phi}_I \pi_{0R} + \dot{\phi}_R \pi_{0I} + \dot{\eta}_I \pi_{1R} + \dot{\eta}_R \pi_{1I} + \dot{\xi}_R \pi_{2I} + \dot{\xi}_I \pi_{2R} - \mathcal{H}_I]. \end{aligned} \quad (9.13)$$

donde se introduce dos estructuras simplécticas. Una para la parte real de la densidad Hamiltoniana y otra para la parte imaginaria.

Para continuar se define una nueva notación que establece una descripción más compacta

$$\Theta_A^a = (\phi_R, \eta_R, \xi_R, \phi_I, \eta_I, \xi_I), \quad (9.14)$$

$$\Pi_{bB} = (\pi_{0R}, \pi_{1R}, \pi_{2R}, \pi_{0I}, \pi_{1I}, \pi_{2I}), \quad (9.15)$$

con el índice a corriendo de $a = (\phi, \eta, \xi)$ y $b = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ que incluye también los subíndices $A, B = (R, I)$ corriendo sobre las partes reales e imaginarias.

De esta forma la densidad Lagrangiana se reduce a

$$\mathcal{L} = \dot{\Theta}_R^a \Pi_{aR} - \dot{\Theta}_I^a \Pi_{aI} - \mathcal{H}_R + i[\dot{\Theta}_I^a \Pi_{aR} + \dot{\Theta}_R^a \Pi_{aI} - \mathcal{H}_I], \quad (9.16)$$

de la variación de la densidad Lagrangiana (9.13) se obtiene

$$\dot{\Theta}_R^a = \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \Pi_{aR}} = \frac{\partial \mathcal{H}_I}{\partial \Pi_{aI}}, \quad \dot{\Theta}_I^a = \frac{\partial \mathcal{H}_I}{\partial \Pi_{aR}} = -\frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \Pi_{aI}}, \quad (9.17)$$

$$\dot{\Pi}_{aR} = -\frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \Theta_R^a} = -\frac{\partial \mathcal{H}_I}{\partial \Theta_I^a}, \quad \dot{\Pi}_{aI} = -\frac{\partial \mathcal{H}_I}{\partial \Theta_R^a} = \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \Theta_I^a}. \quad (9.18)$$

Éste es el conjunto completo de ecuaciones de Hamilton y este sistema satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y en consecuencia la evolución dada por estas ecuaciones de movimiento es analítica. Sin embargo, éstas son equivalentes a las ecuaciones de movimiento (8.13), pero de momentos diferentes.

De la estructura simpléctica dada en (9.13) los paréntesis de Poisson son

$$\{\Theta_A^a(t, \vec{x}), \Pi_{bB}(t, \vec{x}')\} = \mathcal{J}_{AB} \delta_b^a \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (9.19)$$

donde se ha definido $A, B = R, I$ y \mathcal{J}_{AB} como

$$\mathcal{J}_{AB} = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B = R \\ 0 & \text{si } A \neq B \\ -1 & \text{si } A = B = I \end{cases}$$

De esta expresión se obtiene la definición general

$$\begin{aligned} \{F, G\} = \int d^3x' & \left(\frac{\delta F}{\delta \phi_R} \frac{\delta G}{\delta \pi_{0R}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_{0R}} \frac{\delta G}{\delta \phi_R} \right) - \left(\frac{\delta F}{\delta \phi_I} \frac{\delta G}{\delta \pi_{0I}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_{0I}} \frac{\delta G}{\delta \phi_I} \right) \\ & + \left(\frac{\delta F}{\delta \eta_R} \frac{\delta G}{\delta \pi_{1R}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_{1R}} \frac{\delta G}{\delta \eta_R} \right) - \left(\frac{\delta F}{\delta \eta_I} \frac{\delta G}{\delta \pi_{1I}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_{1I}} \frac{\delta G}{\delta \eta_I} \right) \\ & + \left(\frac{\delta F}{\delta \xi_R} \frac{\delta G}{\delta \pi_{2R}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_{2R}} \frac{\delta G}{\delta \xi_R} \right) - \left(\frac{\delta F}{\delta \xi_I} \frac{\delta G}{\delta \pi_{2I}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_{2I}} \frac{\delta G}{\delta \xi_I} \right). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Es importante mencionar que de los paréntesis dados en (9.19) hay varios paréntesis con signo opuesto que son una consecuencia natural de la estructura compleja y de la transformación de Legendre (9.13).

Constricciones en el Sistema

Para empezar a analizar la dinámica del sistema se usan los paréntesis de Poisson dados en (9.20) y se considera la teoría de Dirac de las constricciones con el fin de manejar sistemáticamente las restricciones que encontramos en la definición de los momentos.

De los momentos (9.5)-(9.7) vemos que existen cuatro constricciones primarias, ya que hemos dividido en partes real e imaginaria respectivamente

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \pi_{1R}, & \gamma_2 &= \pi_{1I}, \\ \gamma_3 &= \pi_{2R} - \eta_R, & \gamma_4 &= \pi_{2I} - \eta_I. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Estas constricciones satisfacen

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = \mathcal{C}_{ab} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (9.22)$$

y

$$\mathcal{C}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.23)$$

con determinante dada por

$$\det(\mathcal{C}_{ab}) = 1. \quad (9.24)$$

La evolución temporal de las constricciones es lograda através de las ecuaciones de Cauchy-Riemann y se encuentra que por analiticidad que hay una asociación o con la parte real, o con la parte imaginaria de la densidad Hamiltoniana compleja

$$\dot{\gamma}_1 = \int d^3x' \{ \gamma_1, \mathcal{H}_R + \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 + \alpha_4 \gamma_4 \} \quad (9.25)$$

$$= [-2\nabla^2 + (m_1^2 + m_2^2)] \gamma_3 + \pi_{0R} + \alpha_3 \approx 0, \quad (9.26)$$

$$\dot{\gamma}_2 = [-2\nabla^2 + (m_1^2 + m_2^2)] \gamma_4 + \pi_{0I} - \alpha_4 \approx 0, \quad (9.26)$$

$$\dot{\gamma}_3 = -\gamma_1 - \nabla^2 \phi_R - \alpha_1 \approx 0, \quad (9.27)$$

$$\dot{\gamma}_4 = -\gamma_2 - \nabla^2 \phi_I + \alpha_2 \approx 0, \quad (9.28)$$

y vemos que estas constricciones son un conjunto completo, ya que de (9.25)-(9.28) se obtienen los multiplicadores de Lagrange α 's y de la expresión (9.22) este es un conjunto de constricciones de segunda clase. Ésto implica que se pasa de 12 a 8 grados reales de libertad real del espacio fase complejo.

Estas constricciones (9.21) definen una nueva estructura simpléctica a través de los paréntesis de Dirac

$$\begin{aligned} \{F(t, \vec{x}_0), G(t, \vec{x})\}^* &= \{F(t, \vec{x}_0), G(t, \vec{x})\} \quad (9.29) \\ - \int dx' dx'' \{F(t, \vec{x}_0), \gamma_a(t, \vec{x}')\} C^{ab} \delta(\vec{x}' - \vec{x}'') \{ \gamma_b(t, \vec{x}''), G(t, \vec{x}) \}. \end{aligned}$$

De la definición (9.29) la nueva estructura simpléctica resulta

$$\begin{aligned} \{ \phi_R(t, \vec{x}), \pi_{0R}(t, \vec{x}_0) \}^* &= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (9.30) \\ \{ \phi_I(t, \vec{x}), \pi_{0I}(t, \vec{x}_0) \}^* &= -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ \{ \eta_R(t, \vec{x}), \xi_R(t, \vec{x}_0) \}^* &= -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ \{ \eta_I(t, \vec{x}), \xi_I(t, \vec{x}_0) \}^* &= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ \{ \xi_R(t, \vec{x}), \pi_{2R}(t, \vec{x}_0) \}^* &= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ \{ \xi_I(t, \vec{x}), \pi_{2I}(t, \vec{x}_0) \}^* &= -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0). \end{aligned}$$

Esta estructura la usaremos para hacer una comparación y de esta manera habremos incorporado las condiciones de borde correctas.

Para cuantizar el sistema se necesita promover los paréntesis de Dirac (9.30) a conmutadores siendo bastante simple, ya que la matriz (9.23) es constante, entonces se puede usar la constricción (9.21) directamente en el Hamiltoniano y de ella eliminar las variables $(\eta_R, \eta_I, \pi_{1R}, \pi_{1I})$.

En el espacio reducido la densidad Hamiltoniana es dada por

$$\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_{CR} + i\mathcal{H}_{CI} \quad (9.31)$$

$$\mathcal{H}_{CR} = \pi_{0R}\pi_{2R} - \frac{1}{2}\xi_R^2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2}\pi_{2R}^2 + \frac{m_1^2 m_2^2}{2}\phi_R^2 + \frac{1}{2}(\nabla^2 \phi_R)^2 \quad (9.32)$$

$$+ \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2}(\nabla \phi_R)^2 + \pi_{2R}\nabla^2 \pi_{2R}$$

$$- [\pi_{0I}\pi_{2I} - \frac{1}{2}\xi_I^2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2}\pi_{2I}^2 + \frac{m_1^2 m_2^2}{2}\phi_I^2 + \frac{1}{2}(\nabla^2 \phi_I)^2$$

$$+ \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2}(\nabla \phi_I)^2 + \pi_{2I}\nabla^2 \pi_{2I}]$$

$$\mathcal{H}_{CI} = [\pi_{0R}\pi_{2I} + \pi_{0I}\pi_{2R} - \xi_R\xi_I - (m_1^2 + m_2^2)\pi_{2R}\pi_{2I} \quad (9.33)$$

$$+ m_1^2 m_2^2 \phi_R \phi_I + \nabla^2 \phi_R \nabla^2 \phi_I$$

$$+ (m_1^2 + m_2^2)\nabla \phi_R \cdot \nabla \phi_I + \pi_{2R}\nabla^2 \pi_{2I} + \pi_{2I}\nabla^2 \pi_{2R}].$$

De esta manera la dinámica del sistema es dada por la densidad Hamiltoniana (9.32) con la estructura simpléctica (9.30).

La densidad Hamiltoniana compleja escrita en términos de las variables complejas $(\phi, \xi, \pi_0, \pi_2)$ es

$$\mathcal{H}_C = \pi_0\pi_2 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2}\pi_2^2 + \frac{m_1^2 m_2^2}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}(\nabla^2 \phi)^2 \quad (9.34)$$

$$+ \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2}(\nabla \phi)^2 + \pi_2\nabla^2 \pi_2.$$

La densidad Hamiltoniana (9.34) esta estrechamente relacionada a la densidad Hamiltoniana de Bernard-Duncan [22, 21]. Lo anterior lo podemos ver por medio de una transformación canónica

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t), \quad \pi_\phi(\vec{x}, t) = \pi_0(\vec{x}, t) + \nabla^2 \pi_2(\vec{x}, t), \quad (9.35)$$

$$\pi_\phi = -\xi + \nabla^2 \phi(\vec{x}, t), \quad \dot{\phi}(\vec{x}, t) = \pi_2(\vec{x}, t),$$

que implica

$$\mathcal{H}_D = \pi_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2}\pi_\phi^2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{m_1^2 m_2^2}{2}\phi^2 \quad (9.36)$$

$$- \nabla \phi \cdot \nabla \pi_\phi,$$

donde debe de ser tomado en cuenta que la teoría es compleja.

En este punto es posible aplicar las 4 constricciones (9.21) a la densidad Lagrangiana (9.13) que confirma los paréntesis de Dirac

$$\mathcal{L}_C = \pi_0 \dot{\phi} + \pi_2 \dot{\xi} - \mathcal{H}_C = \pi_{0R}\eta_R - \pi_{0I}\eta_I + \pi_{2R}\dot{\xi}_R - \pi_{2I}\dot{\xi}_I - \mathcal{H}_{CR} \quad (9.37)$$

$$+ i[\pi_{0R}\eta_I + \pi_{0I}\eta_R + \pi_{2R}\dot{\xi}_I + \pi_{2I}\dot{\xi}_R - \mathcal{H}_{CI}],$$

y dada la forma en que procedemos es necesario establecer una nueva notación compacta

$$\Lambda_C^c = (\phi_R, \xi_R, \phi_I, \xi_I), \quad (9.38)$$

$$\Upsilon_{dD} = (\pi_{0R}, \pi_{2R}, \pi_{0I}, \pi_{2I}), \quad (9.39)$$

con $c = \phi, \xi$ para el superíndice de Λ , $d = \pi_0, \pi_2$ y el subíndice Υ y $C, D = R, I$. De la variación de la densidad Lagrangiana (9.37) resultan las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\dot{\Lambda}_R^a = \frac{\partial \mathcal{H}_{CR}}{\partial \Upsilon_{aR}} = \frac{\partial \mathcal{H}_{CI}}{\partial \Upsilon_{aI}}, \quad \dot{\Lambda}_I^a = \frac{\partial \mathcal{H}_{CI}}{\partial \Upsilon_{aR}} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{CR}}{\partial \Upsilon_{aI}}, \quad (9.40)$$

$$\dot{\Upsilon}_{aR} = \frac{\partial \mathcal{H}_{CR}}{\partial \Lambda_R^a} = \frac{\partial \mathcal{H}_{CI}}{\partial \Lambda_I^a}, \quad \dot{\Upsilon}_{aI} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{CI}}{\partial \Lambda_R^a} = \frac{\partial \mathcal{H}_{CR}}{\partial \Lambda_I^a}, \quad (9.41)$$

con los paréntesis de Dirac

$$\begin{aligned} \{F, G\}^* = \int d^3x' & \left(\frac{\delta F}{\delta \phi_R} \frac{\delta G}{\delta \pi_{0R}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_{0R}} \frac{\delta G}{\delta \phi_R} \right) - \left(\frac{\delta F}{\delta \phi_I} \frac{\delta G}{\delta \pi_{0I}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_{0I}} \frac{\delta G}{\delta \phi_I} \right) \\ & + \left(\frac{\delta F}{\delta \xi_R} \frac{\delta G}{\delta \pi_{2R}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_{2R}} \frac{\delta G}{\delta \xi_R} \right) - \left(\frac{\delta F}{\delta \xi_I} \frac{\delta G}{\delta \pi_{2I}} - \frac{\delta F}{\delta \pi_{2I}} \frac{\delta G}{\delta \xi_I} \right) \end{aligned} \quad (9.42)$$

que siguen directamente de los paréntesis de Dirac (9.29). Explicitamente, los paréntesis son

$$\{\Lambda_A^a(t, \vec{x}), \Upsilon_{bB}(t, \vec{x}')\}^* = \mathcal{I}_{AB} \delta_b^a \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (9.43)$$

donde $A, B = R, I$ y la matriz \mathcal{I}_{AB} es

$$\mathcal{I}_{AB} = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B = R \\ 0 & \text{si } A \neq B \\ -1 & \text{si } A = B = I \end{cases}$$

9.2. Condiciones de Realidad en el modelo

Hasta este punto nuestro modelo sigue siendo complejo y la idea ahora es introducir condiciones que proyecten nuestro sistema a un espacio real. La idea de las condiciones de realidad, que transforma una teoría compleja en real, fue propuesta inicialmente por Ashtekar en el contexto de relatividad general [11]. Las condiciones de realidad han sido importantes para darle sentido físico a una teoría compleja tal que estas condiciones son usadas para cancelar el efecto de la parte imaginaria [22]. En la formulación original de Ashtekar estas condiciones fueron implementadas por medio del producto escalar. Sin embargo, aquí tenemos constricciones que pueden ser aplicadas como constricciones de segunda clase [40]. Para nuestro caso este procedimiento es más útil, ya que en la cuantización de la teoría las condiciones realmente importantes pueden ser implementadas directamente sobre la integral de camino. Otro punto importante es que el conjunto completo de condiciones de realidad es fijado por la evolución del sistema lo que significa que se empieza de un conjunto de constricciones que son evolucionadas para mostrar que son consistentes con las condiciones de realidad. Si aparecieran nuevas constricciones son incluidas también y nosotros terminaríamos con un algebra cerrada bajo la evolución. En nuestro caso, con

la finalidad de reducir a una densidad Hamiltoniana real es necesario considerar como punto de inicio dos constricciones que generen un conjunto completo

$$\Sigma_1 = \pi_{0I} + \nabla^2 \pi_{2I} - m_2^2 \pi_{2I}, \quad \Sigma_2 = \pi_{0R} + \nabla^2 \pi_{2R} - m_1^2 \pi_{2R}, \quad (9.44)$$

y su evolución temporal es

$$\dot{\Sigma}_1 = \int d^3 x' \{ \Sigma_1, \mathcal{H}_{CR} \} = (-\nabla^2 + m_2^2) \Sigma_4 \quad \dot{\Sigma}_2 = (-\nabla^2 + m_1^2) \Sigma_3 \quad (9.45)$$

donde Σ_3 y Σ_4 son dados por

$$\Sigma_3 = -\xi_R + \nabla^2 \phi_R - m_2^2 \phi_R, \quad \Sigma_4 = -\xi_I + \nabla^2 \phi_I - m_1^2 \phi_I. \quad (9.46)$$

Con la finalidad de obtener el conjunto complejo necesitamos establecer que son el conjunto completo de constricciones y que también son cerradas.

La evolución temporal de las constricciones secundarias es

$$\dot{\Sigma}_3 = -\Sigma_2 \quad \dot{\Sigma}_4 = -\Sigma_1. \quad (9.47)$$

De esta forma el sistema es cerrado. El algebra completa de constricciones es

$$\{ \Sigma_a, \Sigma_b \} = \mathcal{D}_{ab} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (9.48)$$

y

$$\mathcal{D}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(m_1^2 - m_2^2) \\ 0 & 0 & -(m_1^2 - m_2^2) & 0 \\ 0 & (m_1^2 - m_2^2) & 0 & 0 \\ (m_1^2 - m_2^2) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.49)$$

con determinante dado por

$$\det(\mathcal{D}_{ab}) = (m_1^2 - m_2^2)^4. \quad (9.50)$$

La matriz inversa existe cuando $m_1 \neq m_2$ resultando

$$\mathcal{D}^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta^2 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.51)$$

con $\beta^2 = \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)}$. En conclusión ya que, se incluyen 4 condiciones de realidad como constricciones de segunda clase, resultando que el análisis de los grados de libertad pasa de 8 a 4.

Este espacio fase que hemos decidido usar para nuestra conveniencia es dado por $(\phi_R, \phi_I, \pi_{2R}, \pi_{2I})$. Por otro lado la nueva teoría reducida que nosotros establecemos da como resultado los paréntesis de Dirac

$$\begin{aligned} \{ F_R(t, \vec{x}), G_R(t, \vec{x}_0) \}^{**} &\equiv \{ F_R(t, \vec{x}), G_R(t, \vec{x}_0) \}^* \\ - \int d^3 y \{ F_R(t, \vec{x}), \Sigma_a(t, \vec{y}) \}^* \mathcal{D}^{ab} \{ \Sigma_b(t, \vec{y}), G_R(t, \vec{x}_0) \}^* \end{aligned} \quad (9.52)$$

con los paréntesis fundamentales que son

$$\begin{aligned}\{\phi_R(t, \vec{x}), \pi_{2R}(t, \vec{x}_0)\}^{**} &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0), \\ \{\phi_I(t, \vec{x}), \pi_{2I}(t, \vec{x}_0)\}^{**} &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0),\end{aligned}\quad (9.53)$$

Aunque en principio se escoge un diferente conjunto de condiciones de realidad que no es arbitraria ya que en este caso la cancelación de la parte imaginaria de la densidad Hamiltoniana es clara, pero usando otra elección no es tan clara. Este enunciado implica que el espacio fase es establecido por las condiciones de realidad (9.44) y (9.46) con la finalidad de expresar una transformación inversa usando estas condiciones.

Por esta razón se enfatiza que el espacio fase es $(\phi_R, \phi_I, \pi_{2R}, \pi_{2I})$. Aplicando fuertemente las condiciones (9.44) y (9.46) en la densidad (9.34), se obtiene la densidad Hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{CKG} &= \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2} \pi_{2R}^2 + \frac{m_2^2(m_1^2 - m_2^2)}{2} \phi_R^2 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2} (\nabla \phi_R)^2 \\ &+ \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2} \pi_{2I}^2 + \frac{m_1^2(m_1^2 - m_2^2)}{2} \phi_I^2 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2} (\nabla \phi_I)^2.\end{aligned}\quad (9.54)$$

La densidad Lagrangiana (9.1) con las constricciones y las condiciones de realidad es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{CKG} &= (\dot{\phi}\pi_0 + \dot{\xi}\pi_2)|_{cons} - \mathcal{H}_{CKG} = (m_1^2 - m_2^2) \dot{\phi}_R \pi_{2R} \\ &+ (m_1^2 - m_2^2) \dot{\phi}_I \pi_{2I} - \mathcal{H}_{CKG}.\end{aligned}\quad (9.55)$$

La expresión (9.54) tiene una relación a directa con la densidad Hamiltoniana de dos campos de Klein-Gordon reales. La diferencia es solamente una transformación de contacto, dada por

$$\begin{aligned}\sigma_R &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} \phi_R, & p_R &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} \pi_{2R}, \\ \sigma_I &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} \phi_I, & p_I &= (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} \pi_{2I}.\end{aligned}\quad (9.56)$$

Usando esta transformación en la densidad Hamiltoniana (9.54) se obtiene

$$\mathcal{H}_{KG} = \frac{1}{2} p_R^2 + \frac{m_2^2}{2} \sigma_R^2 + \frac{1}{2} (\nabla \sigma_R)^2 + \frac{1}{2} p_I^2 + \frac{m_1^2}{2} \sigma_I^2 + \frac{1}{2} (\nabla \sigma_I)^2. \quad (9.57)$$

La transformación de contacto (9.56) será muy utilizada con la meta de agregar las respectivas fuentes en el formalismo de la integral de camino.

En la siguiente sección se explorará con más detalle las condiciones de realidad (9.44) y (9.46) ya que por medio de esta estructura se incluyen potenciales de interacción en este modelo de orden superior complejo.

9.2.1. Interpretación de las Condiciones de Realidad

Como ya hemos visto es posible reducir una teoría con derivada temporal de orden superior compleja a un sistema real que resulta ser Hermitiano y cuantizable con un momento y posición también Hermíticos. Las condiciones de realidad usadas como constricciones de segunda clase [40] juegan un papel fundamental en esta reducción, además de establecer una transformación de contacto lo cual logra la identificación con un sistema real de dos campos de Klein-Gordon. Sin embargo, este método no es el único posible, ya que el punto de partida (9.44) fue dado a mano sin seguir un procedimiento sistemático. Considerando esto último se observa un mapéo particular que relaciona el espacio fase complejo $(\phi, \dot{\phi}, \pi_\phi, \pi_{\dot{\phi}})$ al espacio fase real $(\psi_1, \pi_{\psi_1}, \psi_2, \pi_{\psi_2})$ resultando

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} (im_2^2 \phi - i(-\xi + \nabla^2 \phi)), \\
\psi_2 &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} (m_1^2 \phi - (-\xi + \nabla^2 \phi)), \\
\pi_{\psi_1} &= i \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} ((\pi_0 + \nabla^2 \pi_2) - m_1^2 \pi_2), \\
\pi_{\psi_2} &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} ((\pi_0 + \nabla^2 \pi_2) - m_2^2 \pi_2).
\end{aligned} \tag{9.58}$$

Por otro lado se puede mostrar que el espacio fase $(\psi_1, \psi_2, \pi_{\psi_1}, \pi_{\psi_2})$ es real, por lo que de manera general se debe de asumir que estamos trabajando en un espacio complejo y resultando que

$$\begin{aligned}
(\psi_{1R} + i\psi_{1I}) &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} [(m_1^2 - m_2^2)\phi_I - i\Sigma_3], \\
(\psi_{2R} + i\psi_{2I}) &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} [(m_1^2 - m_2^2)\phi_R - i\Sigma_4], \\
(\pi_{\psi_{1R}} + i\pi_{\psi_{1I}}) &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} [(m_1^2 - m_2^2)\pi_{2I} + i\Sigma_2], \\
(\pi_{\psi_{2R}} + i\pi_{\psi_{2I}}) &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} [(m_1^2 - m_2^2)\pi_{2R} + i\Sigma_1].
\end{aligned} \tag{9.59}$$

Para concluir si el espacio fase es complejo, la parte imaginaria debe ser proporcional a las condiciones de realidad o constricciones (9.44) y (9.46). Entonces el espacio fase es real implementando estas condiciones en la superficie donde son válidas. Debemos notar que las condiciones de realidad no son expresiones minimales ya que

$$\begin{aligned}
(m_1^2 - m_2^2)\phi^* &= (m_1^2 + m_2^2)\phi + 2(\xi - \nabla^2 \phi), \\
(m_1^2 - m_2^2)\pi_2^* &= -(m_1^2 + m_2^2)\pi_2 + 2(\pi_0 + \nabla^2 \pi_2), \\
(m_1^2 - m_2^2)(\pi_0^* + \nabla^2 \pi_2^*) &= (m_1^2 + m_2^2)(\pi_0 + \nabla^2 \pi_2) - 2m_1^2 m_2^2 \pi_2, \\
(m_1^2 - m_2^2)(-\xi^* + \nabla^2 \phi^*) &= -(m_1^2 + m_2^2)(-\xi + \nabla^2 \phi) + 2m_1^2 m_2^2 \phi_2
\end{aligned} \tag{9.60}$$

y separando en partes, real e imaginaria

$$\begin{aligned} \Sigma_3 + i\Sigma_4 &= 0, & \Sigma_2 + i\Sigma_1 &= 0, \\ m_2^2\Sigma_2 + im_1^2\Sigma_4 &= 0, & m_1^2\Sigma_3 + im_2^2\Sigma_4 &= 0. \end{aligned} \quad (9.61)$$

Las condiciones (9.60) no pueden ser usadas como constricciones [22] ya que las variables conjugadas en nuestro sistema no son campos independientes a menos que nosotros consideremos las componentes como campos independientes reales en el caso (9.44) y (9.46) teniendo un sistema dinámico complejo similar.

La relación entre el método descrito con las constricciones de segunda clase o condiciones de realidad y el método de una transformación canónica compleja es

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \psi_2, & \sigma_I &= \psi_1, \\ p_R &= \pi_2, & p_I &= \pi_1. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Resumiendo, partiendo del modelo de Bernard-Duncan complejo con 12 grados de libertad reales es posible reducirlo a 4 grados de libertad reales. Para lo anterior usamos 4 constricciones que aparecen de la definición del momento Eq. (9.21) y 4 condiciones de realidad. De esta manera las condiciones de realidad generan una teoría de primer orden real que es directamente relacionada a una teoría compleja de orden superior.

Es importante remarcar que las condiciones de realidad son constricciones de segunda clase cuyos paréntesis de Poisson forman una matriz compleja. Por lo tanto a nivel cuántico no tenemos problemas al implementar estos paréntesis.

Esta descripción aún esta incompleta ya que este modelo no tiene la autointeracción entre los campos internos como los externos, además de que hasta este punto fijamos las condiciones de realidad a mano sin una razón natural para incluirlas.

Con la finalidad de agregarle a nuestro modelo los efectos interactivos, en la siguiente sección incluimos potenciales de autointeracción cuya aplicación de las condiciones de realidad resulta ser consistente para establecer potenciales de interacción en nuestro espacio reducido.

9.3. Los Potenciales de Interacción

Con el proposito de incluir interacciones al modelo se consideran los siguientes criterios: i) Las interacciones deben de ser cantidades reales por medio de la aplicación de las condiciones de realidad y las constricciones. ii) En principio es posible incluir interacciones reales que dependen de los momentos, sin tomar en cuenta esta posibilidad. Sin embargo, esta posibilidad modifica la definición de los momentos y puede dar como resultado una teoría que no es invariante de Lorentz. iii) Por consistencia de la teoría se requiere que la densidad Hamiltoniana de interacción no genere nuevas constricciones. Para implementar esta condición se selecciona un conjunto de interacciones que conmutan con las condiciones de realidad Σ_1 y Σ_2 . De esta manera es posible escoger potenciales

de interacción que son exclusivamente dependientes de los campos y en adición automáticamente conmuta con las condiciones de realidad Σ_3 y Σ_4 . Este criterio asegura que la evolución temporal de las constricciones no es modificada por los términos de interacción.

9.3.1. Criterios de Selección de los Potenciales de Interacción

Con la finalidad de establecer ciertos criterios vamos a considerar un ejemplo de manera que sea posible extenderlo a otros potenciales de interacción.

Para seleccionar este potencial de interacción se aplican las condiciones de realidad en el potencial propuesto resultando un término invariante de Lorentz. Para encontrar tal expresión se considera el campo conjugado ϕ^* , pero ya que no es una variable del sistema se sustituye la expresión conjugada usando las condiciones de realidad.

Selección de los Potenciales de Interacción

En la teoría compleja usual es común encontrar el espacio fase, los campos, los momentos y sus elementos conjugados. En la descripción presentada aquí, no tenemos elementos conjugados que permitan seleccionar los potenciales de interacción. Sin embargo, tenemos las condiciones de realidad que ayudan a encontrar potenciales de interacción consistentes con potenciales reales en el espacio reducido.

Con ésto es posible definir un campo desnudo en el espacio extendido que colapsa en un campo conjugado dentro del espacio reducido dando como resultado

$$\bar{\phi} = \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)}\phi - \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)}(-\xi + \nabla^2\phi), \quad (9.63)$$

cuando $m_1 \neq m_2$ y diferente de cero. La expresión de (9.63) está $\bar{\phi} \neq \phi^*$ dentro del espacio extendido en general, pero puede ser reducido al campo conjugado dentro del espacio reducido siendo que

$$\phi^* = \bar{\phi}|_{rec} = \phi_R - i\phi_I. \quad (9.64)$$

Este espacio reducido es obtenido de aplicar las condiciones de realidad Σ_3 y Σ_4 sobre el espacio extendido que será denotado por $|_{rec}$.

El último enunciado sugiere que la selección de los potenciales de interacción dentro del espacio extendido es dependiente de las condiciones de realidad de tal manera que restringiendo el espacio fase los potenciales de interacción no abandonan el espacio reducido.

Las componentes de campo en términos de ϕ y su conjugado $\bar{\phi}$ son

$$\phi_R = \frac{1}{2}(\phi + \bar{\phi})|_{cre}, \quad \phi_I = \frac{1}{2i}(\phi - \bar{\phi})|_{cre} \quad (9.65)$$

lo cual permite introducir los posibles potenciales de interacción

$$\begin{aligned} U_{int}^1(\phi, \xi) &= \int d^3x \frac{g_1}{4!(m_1^2 - m_2^2)^2} [m_1^2\phi + (\xi - \nabla^2\phi)]^4, \quad (9.66) \\ U_{int}^2(\phi, \xi) &= \int d^3x \frac{g_2}{4!(m_1^2 - m_2^2)^2} [m_2^2\phi + (\xi - \nabla^2\phi)]^4, \\ U_{int}^3(\phi, \xi) &= \int d^3x \frac{g_3}{4!(m_1^2 - m_2^2)^2} [m_1^2\phi + (\xi - \nabla^2\phi)]^2 [m_2^2\phi + (\xi - \nabla^2\phi)]^2. \end{aligned}$$

Incluyendo estas expresiones se obtiene una densidad Hamiltoniana total y si nosotros conmutamos ésta con las condiciones de realidad se obtienen elementos proporcionales a las condiciones de realidad ya que cada potencial es real.

Los potenciales de interacción (10.1) aplicando las condiciones de realidad (9.46) son

$$\begin{aligned} U_{int}^1|_{cre} &= \int d^3x \frac{g_1}{4!} \psi_2^4, & U_{int}^2|_{cre} &= \int d^3x \frac{g_2}{4!} \psi_1^4, & (9.67) \\ U_{int}^3|_{cre} &= \int d^3x \frac{g_3}{4!} \psi_2^2 \psi_1^2. \end{aligned}$$

El procedimiento anterior establece una manera de introducir los potenciales de autointeracción que puede ser aplicado sistemáticamente. En la siguiente sección se explorará otros tipos de interacción que también se pueden agregar y con las cuales podemos realizar la cuantización usando la integral de camino.

Algunos Potenciales de Interacción

Siguiendo el procedimiento aquí descrito podemos considerar algunos potenciales de interacción que tienen las mismas características en común. Del formalismo Hamiltoniano se escriben las partes reales e imaginarias en términos de los campos (9.65), resultando

$$\begin{aligned} U_{int}^4(\phi, \xi) &= \int d^3x \frac{-g_4}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{3}{2}}} (m_1^2\phi + \xi - \nabla^2\phi)(m_2^2\phi + \xi - \nabla^2\phi)^2, \\ U_{int}^5(\phi, \xi) &= \int d^3x \frac{g_5}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{3}{2}}} (m_1^2\phi + \xi - \nabla^2\phi)^3, & (9.68) \\ U_{int}^6(\phi, \xi) &= \int d^3x \frac{-ig_6}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{3}{2}}} (m_2^2\phi + \xi - \nabla^2\phi)^3, \\ U_{int}^7(\phi, \xi) &= \int d^3x \frac{-ig_7}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{3}{2}}} (m_2^2\phi + \xi - \nabla^2\phi)(m_1^2\phi + \xi - \nabla^2\phi)^2, \end{aligned}$$

donde al aplicar las condiciones de realidad (9.46) obtenemos

$$\begin{aligned} U_{int}^4|_{cre} &= g_4\psi_2\psi_1^2, & U_{int}^5|_{cre} &= g_5\psi_2^3, & (9.69) \\ U_{int}^6|_{cre} &= g_6\psi_1^3, & U_{int}^7|_{cre} &= \psi_1\psi_2^2. \end{aligned}$$

Es importante enfatizar que las condiciones de realidad o constricciones de segunda clase forman un conjunto cerrado bajo la evolución temporal. Ésto se muestra en las ecuaciones (9.59) donde fue exhibido que la parte imaginaria de los campos ψ desaparece módulo las condiciones de realidad (9.44), (9.46). Por otro lado si se incluyen los potenciales (9.67) y (9.68) a la densidad Hamiltoniana (9.34), la evolución de las condiciones de realidad no es modificada por las interacciones. Esto es usado para construir la integral de camino de tal forma que las fuentes agregadas son consistentes con la teoría. Además, considerando la dependencia entre los campos debido a las constricciones, tendremos que tomar en cuenta la dependencia entre las fuentes, para obtener una explicación de la razón por la cual agregamos a la teoría las condiciones de realidad.

En el siguiente capítulo buscamos establecer una relación entre nuestro método y un método aproximado mostrando una posible aplicación más para nuestro método que parte de la extensión al plano complejo.

Capítulo 10

Método Aproximado en el Modelo de P-U

En esta sección estudiaremos si existe una relación entre el método propuesto en capítulos anteriores y el método perturbativo desarrollado en [48].

El método desarrollado en capítulos previos, es el primero que logra la cuantización de una teoría de orden superior con interacciones.

No obstante existen en la literatura planteamientos perturbativos que atacan este mismo problema [17, 19, 13, 48].

Sin embargo, todos estos procedimientos eliminan grados de libertad de la teoría original, es decir, solo describen los grados de libertad de bajas energías.

Para comparar estos métodos a bajas energías con nuestro procedimiento es necesario establecer una aproximación a partir de nuestras ecuaciones de movimiento que son obtenidas de la densidad Hamiltoniana reducida por nuestras constricciones y condiciones de realidad. Usando esto retomamos el método aproximado dado en [48] basado en una iteración que nosotros introduciremos en las ecuaciones de movimiento.

Partiremos del modelo de Bernard-Duncan Complejo que no incluye la derivada total y utilizaremos potenciales de interacción complejos que se reducen a expresiones reales. Prestamos atención en las ecuaciones de movimiento de nuestro modelo incluyendo algunos potenciales de interacción que son reales al aplicar las condiciones de realidad y que son posibles de incluir en nuestro modelo.

10.0.2. Manejo de los Potenciales de Interacción en el Modelo de Bernard-Duncan

Las interacciones que se considerarán son aquellas que al reducir a componentes de campos reales, introduciendo la aplicación de las condiciones de realidad, sean cantidades reales y no incluyan a sus momentos correspondientes.

El potencial de interacción que es reducido a las componentes del campo y

que estudiaremos es

$$\frac{g_1}{4!} \left[(m_1^2 + m_2^2)\phi^2 - 2\phi\pi_{\dot{\phi}} \right]^2 \Big|_{cder} = \frac{g_1}{4!} (\psi_2^2 + \psi_1^2)^2, \quad (10.1)$$

con

$$\psi_2 = (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} \phi_R, \quad \psi_1 = (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} \phi_I \quad (10.2)$$

esta interacción se puede obtener de la interacción para el modelo de Pais-Uhlenbeck cuando $g_1 = g_2 = g_3$. Para lograr plantear estos nuevos potenciales consideremos que la componente real del campo es una combinación del campo y el momento conjugado asociado a $\dot{\phi}$, es decir,

$$\psi_2 = \frac{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2} (\phi + \phi^*) = \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} (\pi_{\dot{\phi}} - m_1^2 \phi) \Big|_{cder} \quad (10.3)$$

donde $|_{cder}$ significa que las condiciones de realidad se aplican a la expresión compleja correspondiente. De la misma forma podemos proceder para la parte imaginaria del campo

$$\psi_1 = \frac{i(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2} (\phi^* - \phi) = \frac{i}{(m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} (m_2^2 \phi - \pi_{\dot{\phi}}) \Big|_{cder} \quad (10.4)$$

por lo que otras interacciones posibles son

$$\begin{aligned} \lambda_1 (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} (\pi_{\dot{\phi}} - m_1^2 \phi) \left[\frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)} \phi^2 - \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)} \phi \pi_{\dot{\phi}} \right] \Big|_{cder} \\ = \lambda_1 \psi_2 (\psi_2^2 + \psi_1^2), \end{aligned} \quad (10.5)$$

junto con

$$\begin{aligned} \lambda_2 i (m_1^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}} (m_2^2 \phi - \pi_{\dot{\phi}}) \left[\frac{(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 - m_2^2)} \phi^2 - \frac{2}{(m_1^2 - m_2^2)} \phi \pi_{\dot{\phi}} \right] \Big|_{cder} \\ = \lambda_2 \psi_1 (\psi_2^2 + \psi_1^2), \end{aligned} \quad (10.6)$$

lo cual completa las posibles interacciones que pueden ser utilizadas. En nuestro caso particular tomaremos en cuenta los potenciales de interacción aquí descritos exceptuando la expresión (10.5).

10.0.3. Método Aproximado para Masas Distintas No Nulas

La densidad Hamiltoniana aplicando las condiciones de realidad para el caso de masas distintas es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{KGI} = \frac{1}{2} \pi_{\psi_2}^2 + \frac{m_2^2}{2} \psi_2^2 + \frac{1}{2} (\nabla \psi_2)^2 + \frac{1}{2} \pi_{\psi_1}^2 + \frac{m_1^2}{2} \psi_1^2 + \frac{1}{2} (\nabla \psi_1)^2 \\ + \lambda_2 \psi_1 (\psi_2^2 + \psi_1^2) + \frac{g_1}{4!} (\psi_2^2 + \psi_1^2)^2 \end{aligned} \quad (10.7)$$

de la cual podemos obtener dos ecuaciones de movimiento

$$\square\psi_2 + m_2^2\psi_2 = -2\lambda_2\psi_2\psi_1 - \frac{g_1}{3!}\psi_2(\psi_2^2 + \psi_1^2), \quad (10.8)$$

$$\square\psi_1 + m_1^2\psi_1 = -3\lambda_2\psi_1^2 - \lambda_2\psi_2^2 - \frac{g_1}{3!}\psi_1(\psi_2^2 + \psi_1^2). \quad (10.9)$$

De estas ecuaciones de movimiento se puede obtener una teoría efectiva para el campo ψ_2 . Para realizar esto seguiremos el procedimiento descrito en [48]. Así, usando la ecuación de movimiento (10.9) podemos despejar ψ_1 por medio del operador inverso

$$\psi_1 = (\square + m_1^2)^{-1}[-3\lambda_2\psi_1^2 - \lambda_2\psi_2^2 - \frac{g_1}{3!}\psi_1(\psi_2^2 + \psi_1^2)] \quad (10.10)$$

de lo cual escogemos $m_1^2 \gg 1$ y condiciones iniciales de ψ_1 igual a cero para obtener la siguiente aproximación

$$\psi_1 \approx -\frac{\lambda_2}{m_1^2}\psi_2^2 + \frac{\lambda_2}{m_1^4}\square\psi_2^2 \quad (10.11)$$

la que es sustituida en la expresión (10.8) resultando

$$\square\psi_2 + m_2^2\psi_2 = -[\frac{g_1}{3!} - \frac{2\lambda_2^2}{m_1^2}]\psi_2^3 - \frac{2\lambda_2^2}{m_1^4}\psi_2\square\psi_2^2 - \frac{g_1\lambda_2^2}{3!m_1^4}\psi_2^5. \quad (10.12)$$

Esta ecuación de movimiento es nuestra teoría efectiva la cual puede ser obtenida a través de la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\psi_2\square\psi_2 - \frac{m_2^2}{2}\psi_2^2 - \frac{g_1}{4!}[1 - \frac{12\lambda_2^2}{g_1m_1^2}]\psi_2^4 - \frac{2\lambda_2^2}{3m_1^4}\psi_2^3\square\psi_2 - \frac{g_1\lambda_2^2}{(3!)^2m_1^4}\psi_2^6. \quad (10.13)$$

Otra posible interacción que mencionaremos, pero no consideraremos es

$$\square\psi_2 + m_2^2\psi_2 = -3\lambda_1\psi_2^2 - \frac{\lambda_1\lambda_2^2}{m_1^4}\psi_2^4 - [\frac{g_1}{3!} - \frac{2\lambda_2^2}{m_1^2}]\psi_2^3 - \frac{2\lambda_2^2}{m_1^4}\psi_2\square\psi_2^2 - \frac{g_1\lambda_2^2}{3!m_1^4}\psi_2^5 \quad (10.14)$$

lo que muestra que en general es posible construir cualquier potencial de interacción con el método aquí descrito.

La densidad Lagrangiana anterior (10.13) es similar a lo obtenido en [48], pero sin una corrección a la masa. Lo anterior establece un método aproximado para la teoría de orden superior. Es importante notar la manera en la cual trabaja el procedimiento. Hemos partido de un densidad Hamiltoniana (10.7) que contiene dos campos ψ_1, ψ_2 y dos momentos en su formulación $\pi_{\psi_1}, \pi_{\psi_2}$. Esta densidad Hamiltoniana da lugar a ecuaciones de movimiento que se pueden reducir simplemente a dos ecuaciones, una sirve para encontrar el valor aproximado del campo ψ_1 a partir de desarrollar un método basado en encontrar un valor aproximado para el operador inverso dado en (10.11) por medio de un método recursivo que comienza del valor inicial de $\psi_1 = 0$. Una vez obtenida esta aproximación podemos sustituir ψ_1 en términos de ψ_2 y reemplazar esta

variable auxiliar en la ecuación (10.8) para obtener una ecuación con un solo campo ψ_2 . A partir de la ecuación de movimiento (10.14) podemos encontrar una densidad Lagrangiana (10.13) efectiva que da lugar a ésta.

Lo descrito anteriormente establece un método aproximado partiendo de nuestra formulación. Esto supone una ventaja, ya que tomando como base nuestro desarrollo es posible incluir un método aproximado partiendo de nuestra teoría de Klein-Gordon de primer orden semejante al trabajo inicialmente mencionado en esta sección [48].

Capítulo 11

Modelo de FLRW y TOS

En esta capítulo estudiaremos el modelo cosmológico de Friedmann Lemaître Robertson Walker, pero en el contexto de una teoría con derivada temporal de orden superior (TOS). Utilizando la ecuación de Einstein-Hilbert para la métrica de FLRW se encuentra que ésta es una teoría de orden superior, la cual puede reducirse a una teoría usual mediante el uso de una derivada total. Aquí nos enfocaremos en realizar el formalismo Hamiltoniano de la teoría de orden superior y queremos mostrar que nuestro formalismo se reduce al usual una vez que se han eliminado las constricciones extra que aparecen al hacerlas fuertes.

Nos enfocaremos principalmente en el modelo clásico el cual inicialmente no establece las condiciones de borde en forma usual, sino que por medio de la teoría de constricciones de Dirac plantea otra manera de manejar las condiciones de borde. Lo anterior implica no fijar, por lo menos al principio, alguna condición en específico. Con el análisis anterior, en principio, se puede escoger cierto valor para el factor de escala como condición de borde.

Partiendo de este Hamiltoniano, el cual es proporcional a una restricción primaria, será posible manejar la formulación clásica y obtener las ecuaciones de movimiento. Notando que el momento conjugado asociado al campo es una constante de movimiento pensaremos al campo que aparece en el Lagrangiano de materia puede ser usado como un tiempo, si éste es una función monótona del tiempo.

Trabajando como aquí es descrito concluimos que a nivel clásico no hay diferencia entre proceder de la forma usual y proceder como aquí lo hacemos.

11.0.4. Acción de Friedmann Lemaître Robertson Walker y Derivada Temporal de Orden Superior

Partiendo de la hipótesis de que nuestro universo es homogéneo e Isotrópico y que la amplitud de las componentes espaciales de la métrica solo depende del tiempo podemos plantear como punto de partida la métrica de Friedmann

Lemaître Robertson Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{(1-kr^2)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (11.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala dependiente del tiempo y $k = +1, -1, 0$.

Las ecuaciones de movimiento son obtenidas de la acción de Einstein-Hilbert como principio fundamental junto con un término de materia de la siguiente forma

$$S[g] = \int d^4x \left(\frac{\mathcal{R}}{16\pi G} + \mathcal{L}_{mat} \right), \quad (11.2)$$

en cuyo caso \mathcal{L}_{mat} es el término de la densidad Lagrangiana que depende de la materia y \mathcal{R} es el escalar de curvatura con la velocidad de la luz $c = 1$. En esta métrica obtenemos que

$$\mathcal{R} = g^{ab} R_{ab} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (11.3)$$

Dado que por hipótesis las variables a y N solo dependen de t es posible integrar la parte espacial para obtener lo siguiente

$$S = \int dt [\beta \{ \frac{\ddot{a}a^2}{N} + \frac{\dot{a}^2 a}{N} - \frac{\dot{a}\dot{N}a^2}{N^2} + kNa \} + \mathcal{L}_{mat}] \quad (11.4)$$

donde

$$\mathcal{L}_{mat} = \frac{V_0 a^3}{2N} \dot{\phi}^2 \quad (11.5)$$

y

$$\beta = \frac{3V_0}{8\pi G}. \quad (11.6)$$

El Lagrangiano de Friedmann Robertson Walker resulta ser

$$L = \beta \left\{ \frac{\ddot{a}a^2}{N} + \frac{\dot{a}^2 a}{N} - \frac{\dot{a}\dot{N}a^2}{N^2} + kNa \right\} + \frac{V_0 a^3}{2N} \dot{\phi}^2. \quad (11.7)$$

Donde vemos que es de orden superior. Sin embargo usualmente se suele eliminar el término de derivada total con el fin de manejar una teoría de primer orden. Eliminar este término implica forzar la elección de la condición de borde. Con el uso de la teoría de orden superior (11.7) podemos elegir las condiciones de borde o podemos escoger las que resulten más naturales para el sistema.

De lo anterior podemos obtener los respectivos momentos y por tanto encontrar las respectivas constricciones primarias

$$p_\phi = \frac{V_0 a^3}{N} \dot{\phi}, \quad (11.8)$$

$$\phi_1 = p_N + \frac{\beta \dot{a}a^2}{N^2} \approx 0, \quad (11.9)$$

$$\phi_2 = \pi_a - \frac{\beta a^2}{N} \approx 0, \quad (11.10)$$

$$\phi_3 = p_a \approx 0, \quad (11.11)$$

con (ϕ, a, \dot{a}, N) como nuestras variables. A causa de que tres momentos no son cuadráticos en las velocidades tenemos tres constricciones que se denotan por la letra griega ϕ_i . Usando esto último encontramos que el Hamiltoniano canónico es

$$H_C = -\frac{\beta a \dot{a}^2}{N} - \beta k N a + \frac{N p_\phi^2}{2V_0 a^3} \quad (11.12)$$

y Hamiltoniano total será

$$H_T = H_C + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \lambda_3 \phi_3. \quad (11.13)$$

Lo anterior establece la posibilidad de constricciones secundarias. Para encontrar las constricciones secundarias es necesario evolucionar las 3 constricciones primarias.

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_T\}, \quad \dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H_T\}, \quad \dot{\phi}_3 = \{\phi_3, H_T\}. \quad (11.14)$$

De $\dot{\phi}_1$ y $\dot{\phi}_2$, obtenemos una constricción secundaria a partir de λ_3 , a causa de que se tienen dos diferentes resultados para λ_3 al hacer la evolución.

La constricción secundaria es

$$\phi_4 = \dot{a}^2 + k N^2 - \frac{N^2 p_\phi^2}{2\beta a^4 V_0} \approx 0 \quad (11.15)$$

y ya no hay más constricciones secundarias.

Habiendo obtenido todas las constricciones uno puede obtener la respectiva estructura algebraica dada por

$$C_{\alpha\beta} = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \quad (11.16)$$

que se resume en la matriz

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2\beta a \dot{a}}{N^2} & (\frac{p_\phi^2}{2\beta a^4 V_0} - k)2N \\ 0 & 0 & -\frac{2\beta a}{N} & -2\dot{a} \\ -\frac{2\beta \dot{a} a}{N^2} & \frac{2\beta a}{N} & 0 & -\frac{2N^2 p_\phi^2}{\beta a^5 V_0} \\ (k - \frac{p_\phi^2}{2\beta a^4 V_0})2N & 2\dot{a} & \frac{2N^2 p_\phi^2}{\beta a^5 V_0} & 0 \end{pmatrix}$$

con vectores nulos $V_1 = \begin{pmatrix} \frac{N^2 p_\phi^2}{2\beta a^5 V_0} \\ 0 \\ (\frac{p_\phi^2}{2\beta a^4 V_0} - k)\frac{N}{2} \\ -\frac{\beta a \dot{a}}{2N^2} \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} N \\ \dot{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La determinante

de esta matriz es cero y el rango es dos. Esto implica que hay dos constricciones de primera clase

$$\psi_1 = \frac{N^2 p_\phi^2}{2\beta a^5 V_0} \phi_1 + \frac{N}{2} \left(\frac{p_\phi^2}{2\beta a^4 V_0} - k \right) \phi_3 - \frac{\beta a \dot{a}}{2N^2} \phi_4 \approx 0, \quad (11.17)$$

$$\psi_2 = N \phi_1 + \dot{a} \phi_2 \approx 0, \quad (11.18)$$

que finalmente se reducen a

$$\psi_1 = \frac{N^2 p_\phi^2}{2\beta a^5 V_0} \left(p_N + \frac{\beta \dot{a} a^2}{N^2} \right) + \frac{N}{2} \left(\frac{p_\phi^2}{2\beta a^4 V_0} - k \right) (p_a) - \frac{\beta a \dot{a}}{2N^2} (\dot{a}^2 + kN^2 - \frac{N^2 p_\phi^2}{2\beta a^4 V_0}) \approx 0, \quad (11.19)$$

$$\psi_2 = N \left(p_N + \frac{\beta \dot{a} a^2}{N^2} \right) + \dot{a} \left(\pi_a - \frac{\beta a^2}{N} \right) \approx 0, \quad (11.20)$$

lo que define las constricciones primarias.

Definido lo anterior solo resta escoger un adecuado conjunto de constricciones secundarias lo cual es realizado a continuación.

Dada la libertad del problema podemos escoger un nuevo conjunto de constricciones que sea de segunda clase. Las constricciones de segunda clase que se han escogido son

$$\chi_1 = \phi_1 = p_N + \frac{\beta a^2 \dot{a}}{N^2} \approx 0 \quad \chi_2 = \frac{1}{2\beta a \dot{a}} \phi_3 = \frac{1}{2\beta a \dot{a}} p_a \approx 0. \quad (11.21)$$

La correspondiente matriz es

$$B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N^2} \\ -\frac{1}{N^2} & 0 \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$B^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -N^2 \\ N^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con la finalidad de saber la estructura simpléctica, se calculan los paréntesis de Dirac

$$\{a, N\}^* = \frac{N^2}{2\beta a \dot{a}}, \quad (11.22)$$

$$\{a, \pi_a\}^* = -\frac{a}{2\dot{a}}, \quad (11.23)$$

$$\{a, p_N\}^* = \frac{a}{N}, \quad (11.24)$$

$$\{\phi, p_\phi\}^* = 1, \quad (11.25)$$

$$\{\dot{a}, \pi_a\}^* = 1, \quad (11.26)$$

$$\{N, p_N\}^* = 1. \quad (11.27)$$

Finalmente se pueden usar las constricciones de segunda clase en los paréntesis de Dirac y obtener solamente tres paréntesis fundamentales

$$\{\dot{a}, \pi_a\}^* = 1, \quad (11.28)$$

$$\{\phi, p_\phi\}^* = 1, \quad (11.29)$$

$$\{N, p_N\}^* = 1. \quad (11.30)$$

Ahora, si ponemos las constricciones de segunda clase en las constricciones de primera clase debido al hecho de que implícitamente estamos usando los paréntesis de Dirac se obtiene

$$-\frac{2\beta a \dot{a}}{N^2} [\dot{a}^2 + kN^2 - \frac{N^2 p_\phi^2}{2\beta a^4 V_0}] \approx 0, \quad (11.31)$$

$$\dot{a} [\pi_a - \frac{\beta a^2}{N}] \approx 0. \quad (11.32)$$

Lo anterior se puede escribir como

$$2V_0 N^2 p_N^2 (\dot{a}^2 + kN^2) - p_\phi^2 \dot{a}^2 \beta \approx 0, \quad (11.33)$$

$$\dot{a} \pi_a + N p_N \approx 0. \quad (11.34)$$

A causa de que tenemos dos constricciones de primera clase, se puede fijar la norma para una de éstas y dejar únicamente una sola constricción. La norma que hemos elegido es

$$\psi_3 = N - f(t) \approx 0, \quad (11.35)$$

y rearreglando de nuevo, se obtiene una constricción de primera clase

$$2V_0 f^2(t) (\dot{a}^2 + k f^2(t)) p_N [2\dot{a} \pi_a + (2f - 1) p_N] + p_\phi^2 \dot{a}^2 \beta \approx 0, \quad (11.36)$$

que es

$$-2V_0 f^2(t) (\dot{a}^2 + k f^2(t)) p_N^2 + p_\phi^2 \dot{a}^2 \beta \approx 0. \quad (11.37)$$

Al fijar la norma una constricción de primera clase con la condición respectiva de norma resultan ser constricciones de segunda clase de la siguiente forma

$$\gamma_1 = \dot{a} \pi_a + N p_N \approx 0, \quad (11.38)$$

$$\gamma_2 = N - f(t) \approx 0, \quad (11.39)$$

con la siguiente algebra

$$B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}.$$

Colocando $p_N = -\frac{\dot{a} \pi_a}{N}$ y tomando $f = 1$ tenemos los paréntesis de Dirac

$$\{\dot{a}, \pi_a\}^* = 1, \quad (11.40)$$

$$\{\phi, p_\phi\}^* = 1, \quad (11.41)$$

lo cual nos dice que podemos escoger a (π_a, ϕ) como espacio de configuración con dos grados de libertad debido a la constricción (11.10) que define al momento π_a en términos del radio del universo a . Con esto último definimos el espacio fase $(\pi_a, \phi, \dot{a}, p_\phi)$ con cuatro grados de libertad para obtener la ecuación final de Wheeler De Witt que es

$$G = -V_0 (\dot{a}^2 + k) \pi_a^2 + \frac{\beta p_\phi^2}{2} \approx 0, \quad (11.42)$$

de la cual se obtiene el Hamiltoniano de la teoría. Con G lo que resta realizar es definir un Hamiltoniano para hacer un análisis de la teoría clásica y posteriormente intentar hacer una cuantización.

11.0.5. Teoría Clásica Hamiltoniana de Wheeler De Witt

En esta sección usamos la constrictión G para definir al Hamiltoniano. La constrictión G igualada a cero fuertemente es

$$\frac{1}{\alpha}(\dot{a}^2 + k)\pi_a^2 - \frac{p_\phi^2}{2} = 0 \quad (11.43)$$

con $\alpha = \frac{\beta}{V_0}$. La expresión anterior puede ser escrita como

$$(H + p_\phi)(H - p_\phi) = 0 \quad (11.44)$$

con

$$H = \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\pi_a \quad (11.45)$$

Dado que ϕ es una función monótona de t es posible considerarla como una nueva variable de tiempo. Lo anterior esta perfectamente justificado, porque el Hamiltoniano es proporcional al momento de ϕ y a nivel cuántico habrá una semejanza a la ecuación de Schrodinger más cercana a la cuantización de la ecuación de Klein-Gordon. Esto último refleja el principal problema de hacer la cuantización sin cierto cuidado. En resumen ϕ es un buen tiempo ya que

$$\phi : H = -p_\phi \quad (11.46)$$

y justifica la elección tomada.

Con la cuantización de esta ecuación encontramos el problema de que la densidad de probabilidad no es definida positiva y aparecen probabilidades negativas, o fantasmas, lo que acarrea problemas de interpretación. Paul A.M. Dirac postuló hacer una división parecida a la descrita en este trabajo (11.44) con el fin de dar una interpretación a la densidad de probabilidad no definida positiva la cual nace de la teoría cuántica de campos.

En el caso cuántico existe este problema, aunque para la versión clásica no hay inconveniente, por lo que manejaremos una descripción basada en la mecánica clásica para visualizar mejor la ecuación de Wheeler De Witt.

Tomando a ϕ como al respectivo tiempo y usando los paréntesis de Poisson se obtiene

$$\frac{d\pi_a}{d\phi} = \{\pi_a, H\} = -\frac{\dot{a}\pi_a}{\alpha^{\frac{1}{2}}(\dot{a}^2 + k)^{\frac{1}{2}}} \quad (11.47)$$

$$\frac{d\dot{a}}{d\phi} = \{\dot{a}, H\} = \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (11.48)$$

de lo cual se infiere

$$\frac{d\pi_a}{d\dot{a}} = -\frac{\dot{a}\pi_a}{(\dot{a}^2 + k)}. \quad (11.49)$$

Lo anterior nos permite encontrar al momento como función del nuevo tiempo, pero el valor de éste va a depender de k .

Considerando $k = 0$ se obtiene lo siguiente

$$\pi_a = \frac{\pi_{a0}}{\exp \mp \frac{1}{\alpha^2}(\phi - \phi_0)}, \quad (11.50)$$

lo que podemos graficar para obtener la figura 11.1.

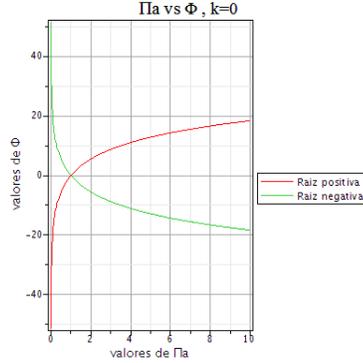


Figura 11.1: Momento canónico de orden superior contra ϕ con $k = 0$ para el modelo Wheeler de Witt contemplando términos de derivada total.

Lo anterior muestra que no existe alguna ventaja entre aplicar nuestro método y aplicar el método usual, lo cual era de esperarse, ya que solo hay una derivada total en la que ambos difieren. Clásicamente uno no esperaría que hubiera ventaja. Sin embargo, cuánticamente podría en principio ser éste el caso. Nuestro análisis muestra que en este caso tampoco hay alguna ventaja.

Un punto interesante de nuestro análisis es que la variable canónica elegida por este procedimiento que es π_a corresponde directamente al equivalente obtenido usando las variables de Loop Quantum Gravity. A pesar de esto, se ha mostrado que una mejor variable corresponde a tomar el volumen del universo, es decir proporcional a a^3 [49].

Podemos hacer el mismo análisis para el caso $k = 1$. La expresión para el momento es

$$(\phi - \phi_0) = \pm \alpha^{\frac{1}{2}} \ln \left[\frac{\pi_0}{\pi_a} + \frac{(\pi_0^2 - \pi_a^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi_a} \right] \quad (11.51)$$

lo cual da como resultado la figura 11.2.

Finalmente para el caso $k = -1$ tenemos que se cumple la relación para los momentos dada en la figura 11.3.

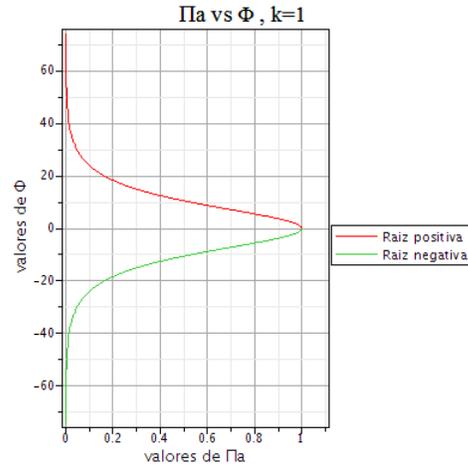


Figura 11.2: Momento canônico de ordem superior contra ϕ para $k = 1$.
 $k = -1$.

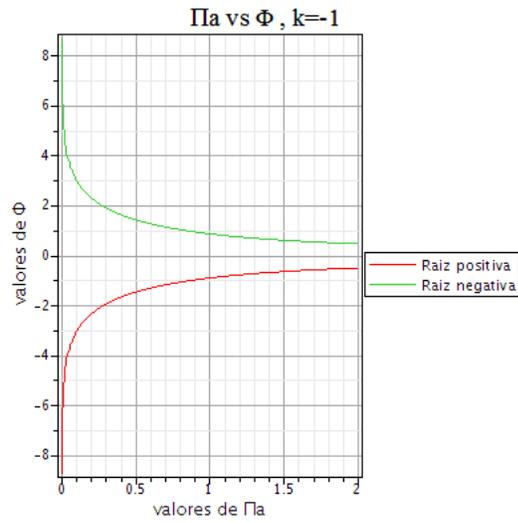


Figura 11.3: Momento canônico de ordem superior contra ϕ fora do origem.

Conclusiones

En este trabajo, se ha desarrollado un método por medio del cual se puede establecer una relación entre dos sistemas que podrían resultar muy distintos y que a pesar de eso pueden tener una correspondencia por medio de una transformación de norma compleja. Por otro lado también se podría pensar en que la formulación antes descrita permite mapear de una teoría compleja a una teoría real quitando grados de libertad al sistema. Específicamente, como primer punto en este trabajo estudiamos las afecciones que se pueden presentar en algunos sistemas al momento de querer realizar una teoría cuántica para estos. Mostramos que no necesariamente se van a cumplir todos los axiomas de la mecánica cuántica al momento de realizar su respectiva cuantización, ya que se podrían encontrar aberraciones en ciertos sistemas. Específicamente, el modelo de Pais-Uhlenbeck presenta problemas que dificultan su cuantización. En este punto podemos sospechar que la causa de la problemática es debido a que no se ha interpretado bien la información arrojada por éste y no se ha logrado hacer un empalme adecuado entre la mecánica Hamiltoniana de primer orden y la mecánica Hamiltoniana de Ostrogradsky [12]. Lo anterior resulta de vital importancia para enfrentar las efecciones que nos podríamos encontrar en cualquier sistema.

En base a estos problemas en este trabajo nos dimos a la tarea de desarrollar un método que nos permitiera entender un poco mejor lo que ha estado ocurriendo. Sin embargo nuestro método no empieza de cero y tiene la necesidad de sustentarse en teorías antes expuestas. Tal es el caso de la teoría de los números complejos formulada por Gauss, Cauchy y Riemann, la teoría de las constricciones de Dirac [4] y la teoría de las condiciones de realidad formulada por Ashtekar [11].

El método puede ser resumido de la siguiente forma: Se considera el correspondiente modelo real y posteriormente se hace una extensión de éste al plano complejo, después nos encontraremos con que hay constricciones primarias en la extensión Lagrangiana dependientes de la definición de los respectivos momentos, esto es debido a que las variables complejas no son independientes entre sí debido a las ecuaciones de Cauchy-Riemann y a la estructura que esta misma guarda para que un mapéo de los números complejos al plano real sea posible. Posteriormente, según la teoría de Dirac es necesario obtener el Hamiltoniano total del sistema Lagrangiano extendido el cual va a tener constricciones primarias. Con este Hamiltoniano podemos calcular la evolución temporal de las

constricciones primarias resultando la naturaleza de éstas y concluyendo que las constricciones primarias son de primera clase. Por otro lado, también podemos determinar si hay más constricciones a partir de la evolución de las constricciones primarias y encontramos que no las hay siempre y cuando asumamos que nuestro potencial es holomorfo. Dada la estructura compleja será inevitable encontrarnos con constricciones de primera clase por lo que será necesario fijar condiciones de norma. La manera de manejar la libertad de norma se basa en considerar la simetría que tiene el propio sistema y en base a esto escoger una condición de norma natural que nos lleve a un espacio real o tomar una condición de norma que sea conveniente para nosotros partiendo del sistema complejo y que establezca el mapéo a un sistema real. Lo antes dicho puede ser resumido de la siguiente forma: Hacemos una extensión al plano complejo resultando una teoría de norma a la cual se le imponen condiciones de norma arbitrarias que mapéan del espacio complejo a un espacio real.

En este punto debemos explorar la relación que hay entre los sistemas. Si el espacio en el cual estamos inmersos es real entonces no hay relación visible entre los sistemas resultando ser independientes y a lo mucho es posible establecer un mapéo por medio de las transformaciones canónicas en nuestro espacio real. La restricción del uso de las transformaciones canónicas se agudiza aún más a nivel cuántico, ya que solo las podremos usar si son lineales [2, 3].

Por otro lado, usando la extensión al plano complejo tenemos más maniobrabilidad, ya que tenemos la libertad de norma inherente que nos va a permitir pasar de sistemas reales en sistemas reales siempre y cuando las condiciones de norma lo permitan. A nivel cuántico es más complicado, ya que podemos establecer el mapéo por medio de las condiciones de norma, pero no sabremos concretamente si las teorías resultantes son normalizables y el mapéo a una teoría cuántica adecuada es posible. Este tema sale del alcance del trabajo planteado.

A partir de la extensión al plano complejo también podemos establecer un mapéo de los sistemas complejos a los sistemas reales por medio de las condiciones de norma. Lo anterior puede ser traducido cuánticamente como pasar de un sistema no-Hermítico a un sistema Hermítico equivalente.

Como ejemplos concretos de estas condiciones de norma tenemos: La Hermiticidad, las condiciones de realidad [11] y la simetría $\mathcal{P}\text{-}\mathcal{T}$ propuesta por Bender [9].

Habiendo establecido el método consideramos algunos ejemplos manejados en la literatura para poder tener un a buena referencia de lo aquí descrito. Primero mostramos como funciona el método en un oscilador armónico, ya que resulta ser el modelo mejor entendido en la física moderna, extendiéndolo al espacio complejo para posteriormente mostrar cual es la condición de norma que se debe de utilizar para recuperar los resultados ya conocidos considerando tanto la descripción clásica como la cuántica. Concretamente consideramos la condición de norma que recupera la Hermiticidad de la forma más simple posible. Por otro lado, estableciendo otra condición de norma podemos encontrar que existen sistemas relacionados al oscilador armónico como el sistema Hamiltoniano con potencial de Coulomb donde la frecuencia del oscilador es-

ta asociado a la carga eléctrica. Además, tenemos también una condición de norma que genera una relación entre el Hamiltoniano invariante ante una transformación conforme y nuestro oscilador armónico real. Con esta idea uno puede pensar en hacer una reparametrización en el tiempo y considerar a éste como una variable extra con el fin de aplicarlo en la extensión compleja del oscilador armónico y encontrar que existen dos constricciones de primera clase por medio de las cuales podríamos plantear la respectiva cuantización usando la teoría de Dirac [4, 10].

Por otro lado, este procedimiento también recuperó los resultados de manera exacta, tanto clásicamente como cuánticamente, para el caso de un oscilador armónico que incluye un término imaginario de desplazamiento formulado inicialmente por Bender [9] y que se expone brevemente en este trabajo como resultado de una específica elección en la condición de norma y lo que podríamos cuantizar por medio de la integral de camino.

Con el afán de aplicar nuestro método a casos conocidos, también consideramos al oscilador armónico con una perturbación cúbica imaginaria donde tuvimos en cuenta la extensión al plano complejo del respectivo Lagrangiano. Sin embargo este ejemplo resulta ser mucho más complicado, por lo que inicialmente consideramos una condición de norma que no nos mantiene en el espacio real, ya que hace que el momento reducido sea una cantidad compleja. Sin embargo, el problema también nos da tregua y escogiendo una condición de norma que fije a la parte real y nos permita usar a la parte imaginaria como variables reducidas del sistema podemos llegar a un Hamiltoniano real. Es aquí donde por mera conveniencia usamos la aproximación de la teoría de perturbaciones para establecer la teoría cuántica. Aquí encontramos que la teoría cuántica no coincide con la teoría clásica, ya que esta cuenta con un término cúbico que no se ve en la formulación cuántica de lo que tenemos que el Hamiltoniano resultante para nosotros no es $\mathcal{P}\text{-}\mathcal{T}$ simétrico. Los resultados obtenidos son muy similares a los obtenidos en [9], a pesar de haber encontrado esta discrepancia entre el Hamiltoniano clásico y el cuántico. Sin embargo, nuestro método no produce un Hamiltoniano que este acotado por abajo. Mostrando que una condición de norma arbitraria no necesariamente produce un sistema cuántico bien fundamentado.

Habiendo dominado los ejemplos clásicos nos enfocamos en la forma más general que debe de tener nuestra condición de norma. Notamos que si trabajamos con una condición de norma que dependa del momento obtendremos un Hamiltoniano reducido que no es tan trivial, ya que proviene de un Lagrangiano reducido que tiene una métrica no trivial. Esto nos da pistas para considerar los mapas a modelos que tienen métrica dependiente de las velocidades y las posiciones.

Dada la complexificación podemos mostrar el teorema de Franklin-Vilkovisky usando la integral de camino e incluyendo fantasmas. Con lo anterior podemos concluir que dada la relación entre los diferentes sistemas las cuantizaciones resultantes entre fijar diferentes condiciones de norma serán equivalentes entre sí, en el espacio complejo pero no necesariamente en el espacio real. Cabe mencionar que en ningún momento se ha hablado de que la transformación de norma

debe de estar emparentada a una transformación canónica.

Con todo lo anterior es fácil generalizar nuestras ideas a más dimensiones y encontrar sistemas a los que se les puedan aplicar esta idea. Un ejemplo concreto y de gran utilidad es el mapéo del Hamiltoniano del oscilador armónico en dos dimensiones al Hamiltoniano con potencial central de Kepler en dos dimensiones. El método aplicado a este caso en particular resulta ser interesante, ya que como se mostró antes si se cumple el teorema de Franklin-Vilkovisky entonces para calcular la integral de camino con un potencial de Kepler será suficiente con calcular la integral de camino para el oscilador armónico bidimensional, ya que para ambos modelos las integrales de camino son equivalentes para la parte acotada del potencial de Kepler. Y como en el caso unidimensional es posible agregar en las condiciones de norma terminos que dependen de los momentos, resultando un Hamiltoniano reducido muy complicado que viene de un Lagrangiano reducido con métrica no trivial que podría depender de las velocidades y las posiciones. Aquí debemos destacar que con el método hemos sido capaces de alterar la medida, es decir hemos transformado la medida, con lo que la nueva teoría ya no es tan trivial incluyendo al momento en la condición de norma.

Otro tema de interés es el caso de una teoría con derivada temporal de orden superior con potenciales de interacción incluidos, específicamente el modelo de Pais-Uhlenbeck complejo. Como se ha establecido en el método plantemos la complejificación del modelo de Pais-Uhlenbeck y fijamos las normas que nos llevan al modelo real. Sin embargo, también hay otras normas que nos llevan al modelo de dos osciladores armónicos. Ésta idea se puede generalizar e incluir a nuestro modelo complejo de orden superior potenciales de interacción.

Ésto es logrado por medio de usar condiciones de norma que hemos establecido para una teoría compleja con constricciones de primera clase. Esta extensión compleja para las teorías de orden superior es una consecuencia de pensar en una teoría más general con estructura compleja que incluya simetrías de norma. En el momento que elegimos fijar la norma es posible relacionar esta teoría compleja al modelo de Pais-Uhlenbeck real y usando otra condición de norma relacionar esta teoría a un par de osciladores armónicos. Dependiendo de nuestra elección de condición de norma podríamos realizar la cuantización y encontrar, o evitar, problemas tales como, energías negativas y estados con norma negativa.

La teoría compleja permite ganar más flexibilidad, debido a la simetría de norma que muestra la relación entre el modelo de Pais-Uhlenbeck y dos osciladores armónicos a través de una transformación de norma compleja. En este sentido el modelo de Pais-Uhlenbeck complejo contiene a ambas teorías y la selección de la teoría depende de las condiciones de norma. Un hecho interesante del formalismo es que el espacio fase complejo posee estas simetrías de norma que permiten reducir los grados de libertad y hacer un mapéo usando las condiciones de norma para diferentes tipos de teorías. Esto último se ve traducido en una distribución diferente de los espectros correspondientes, es decir para el espectro del modelo de Pais-Uhlenbeck encontramos que no es acotado por abajo, mientras que para los dos osciladores no encontramos este problema y los dos osciladores son acotados por abajo. Por lo tanto el efecto de las condiciones de norma en los respectivos espectros es de ordenarlos de una diferente forma,

es decir una en la que tenemos dos sistemas acotados por debajo y otra en la que tenemos un solo sistema que no es acotado por abajo.

Para incluir potenciales de interacción se consideran cantidades en la densidad Hamiltoniana que no generen nuevas constricciones y preserven un conjunto cerrado de constricciones cuando la evolución temporal es establecida (10.1). Estos potenciales de interacción son generados por corrientes o en el espacio complejo o en el espacio real usando las condiciones de norma y las constricciones. De esta descripción, la cuantización es posible usando la integral de camino con el método de Senjanovic [24] desarrollado para cuantizar una teoría con constricciones de segunda clase. Usando corrientes complejas y desarrollando un formalismo que incluya a las constricciones, además de separar en componentes. La relación entre campos de alto orden es exhibida resultado de la estructura compleja y las condiciones de realidad.

Las corrientes complejas no son independientes en un modelo con derivadas de orden superior, si las condiciones de realidad son establecidas. Además, la cancelación de la parte imaginaria de la integral de camino genera la relación entre las corrientes que son también obtenidas clásicamente por medio de las ecuaciones de Hamilton de movimiento que incluyen a estas corrientes. En otro apartado se ve la transformación de norma compleja que relaciona a ambos modelos. La cual en otros trabajos fue pensada como una transformación canónica compleja.

Con todo lo anterior el paso más natural a seguir es establecer nuestro formalismo para el caso de la teoría de campos. Inicialmente estudiamos ejemplos concretos para modelos de primer orden. Tal es el caso de campos complejos con una métrica plana que por medio de las condiciones de norma adecuadas se pueden deducir y establecer los modelos sigma no-lineales reales. Lo anterior no solo es aplicable a los campos complejos escalares, ya que también lo aplicamos a la extensión compleja del Lagrangiano del campo electromagnético que con la elección adecuada de normas se puede obtener la densidad Lagrangiana reducida que esta construida con los campos vectoriales espaciales, escogiendo la norma de Coulomb, y la métrica característica de los modelos sigma no-lineales. Con el dominio de las teorías de orden superior ahora es posible desarrollar nuestro formalismo para una teoría de campos de orden superior, modelo de Bernard-Duncan, que pueda ser mapeada al Hamiltoniano de dos simples campos de Klein-Gordon. Partiendo de esto último resultó instructivo analizar la estructura de los números complejos en esta teoría olvidandonos un poco de las constricciones de primera clase y de las teorías de norma para prestar más atención en la estructura compleja inmersa en la teoría con derivada temporal de orden superior, o modelo de Bernard-Duncan. En una formulación con constricciones de segunda clase es posible analizar de forma más tranquila el papel que juegan las condiciones de realidad y la manera de establecer las interacciones a partir de las condiciones de realidad que aquí son constricciones de segunda clase.

Através de todo lo antes desarrollado, también podemos establecer un método perturbativo que es semejante a lo hecho en [48] y que para el caso de bajas energías encuentra similitudes con el formalismo aquí descrito.

Otro tema que también tratamos aquí es el modelo cosmológico de Friedmann Lemaître Robertson Walker, pero en el contexto de una teoría con derivada temporal de orden superior. Establecemos primero la densidad Lagrangiana que esencialmente tiene la parte de Einstein-Hilbert, además de un término de materia con masa cero acoplado minimalmente. Obtendremos los respectivos momentos y concluiremos que aparecen 3 constricciones primarias. A partir de esta formulación y de integrar sobre el volumen se obtendrá el Hamiltoniano de orden superior. Con la formulación de orden superior concluimos que a nivel clásico no hay diferencia entre proceder de la forma usual y proceder como aquí lo hacemos.

A partir de lo desarrollado en este trabajo encontramos que la extensión compleja abre las puertas a temas paralelos que debemos estudiar. Uno de estos temas es estudiar que es lo que pasa con la medida de integración de la integral de camino al pasar de modelos no Hermíticos a modelos Hermíticos. También se puede pensar en plantear que es lo que pasa a nivel cuántico, ya que podemos establecer el mapéo por medio de las condiciones de norma, pero no sabemos concretamente si las teorías resultantes son normalizables y si el mapéo a una teoría cuántica adecuada es posible. Además faltaría ver que es lo que pasa con los espectros y la relación que hay entre éstos y las condiciones de norma. Un tema interesante resultado de nuestra investigación es como las condiciones de norma transforman a las funciones de onda de los sistemas involucrados, Hermíticos o no. Dicho de otra manera y usando un ejemplo concreto podemos pensar en el mapéo que pasa del sistema para el oscilador armónico bidimensional al sistema de un potencial Coulombiano y lo que pasa con la transformación de las funciones de onda correspondientes.

Independientemente de lo anterior también podríamos pensar en si podríamos tener una condición de norma que nos lleve de una teoría no relativista clásica a una teoría relativista, es decir si mediante una norma podemos realizar una expansión del grupo de Galileo de tal manera que sea estable [50]. Finalmente, igual de interesante resulta la posibilidad de analizar con mayor profundidad la extensión compleja, pero ahora considerando el punto de vista de la integral de Cauchy para tomar en cuenta la homotopía que encontramos en las trayectorias debido a la propiedad de las funciones holomorfas integradas en una superficie cerrada [20]. Por otro lado, a partir de este punto de vista es posible explorar la relación entre los modelos sigma no-lineales y nuestra extensión al plano complejo para después compararla con nuestra formulación ya expuesta.

Bibliografía

- [1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, (1989), **2**, 520.
- [2] A. Anderson, *Annals Phys.*, 232,(1994), 292.
- [3] M. Moshinsky, C. Quesne, *J. Math. Phys.*, **12**, (1971),772.
- [4] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*,Dover, New York, (2001), 151.
- [5] Carlos A. Margalli, J. David Vergara, Hidden gauge symmetry in holomorphic models, *Phys. Lett. A* **379** (2015), 2434.
- [6] A. Mostafazadeh, \mathcal{PT} -symmetric cubic anharmonic oscillator as a physical model ,*JPhysA*, **038**, (2004), 6557.
- [7] A. Pais, G.E. Uhlenbeck, On Field with Non- Localized Action, *Phys. Rev.* **79** (1950), 145.
- [8] K. S. Stelle, Classical Gravity with Higher Derivatives, *Phys. General Relativity and Gravitation* **9**, (1978), 353.
- [9] C.M. Bender, P.D. Mannheim, Exactly solvable \mathcal{PT} -symmetric Hamiltonian having no Hermitian counterpart. *Phys. Rev.***D78**, (2008), 0255022.
- [10] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, 1992.
- [11] A. Ashtekar , *Mathematical problems of nonperturbative quantum general relativity*, gr-qc/9302024, (1992).
- [12] M.V. Ostrogradski, Mémoires sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres, *Mem. Acad. St. Petersburg* **6**, (1850), 385.
- [13] R.P. Woodard, Avoiding Dark Energy with $\frac{1}{R}$ Modifications of Gravity, *Lect. Notes Phys.* **720**, (2007), 403.
- [14] N. Seiberg, E. Witten, String Theory and Noncommutative Geometry, *JHEP* **9909**, (1999), 032 .

- [15] T.Biswas, A. Mazumdar, W. Siegel, Bouncing universes in string-inspired gravity, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* (**03**), 2006 , 009.
- [16] Nicolas Moeller, Barton Zwiebach, Dynamics with infinitely many time derivatives and rolling tachyons, *JHEP* **10**, (2002), 034.
- [17] D.A. Eliezer, R. Woodard, The Problem of Nonlocality In String Theory, *Nucl. Phys.* **B325**, (1989),389.
- [18] S. W. Hawking and T. Hertog, Living with ghosts, *Phys. Rev.* **D65**, (2002), 103515.
- [19] T-C. Cheng, P-M. Ho, M-C. Yeh, Perturbative approach to higher derivative and nonlocal theories, *Nucl. Phys.* **B 625** (2002), 151.
- [20] E. Witten, A New Look At The Path Integral Of Quantum Mechanics, arXiv:1009.6032 [hep-th], (2010).
- [21] C. Bernard, A. Duncan, Lorentz covariance and Matthews's theorem for derivative-coupled field theories, *Phys. Rev.***D11**, (2008), 848.
- [22] A. Dector, H. A. Morales- Técotl, L.F. Urrutia and J.D. Vergara, An Alternative Canonical Approach to the Ghost Problem in a complexified Extension of the Pais-Uhlenbeck Oscillator, *SIGMA* **5**, (2009), 053.
- [23] A. Mostafazadeh, Imaginary-Scaling versus Indefinite -Metric Quantization of the Pais-Uhlenbeck Oscillator, *Phys. Rev.***D84**, (2011), 105018.
- [24] P. Senjanovic, Path Integral Quantization of Field Theories with Second-Class Constraints, *Annals of Physics* **100**, (1976), 227.
- [25] J.M. Pons, Ostrogradski Theorem for Higher Order Singular Lagrangians, *Lett. Math. Phys.* **17**, (1989) 181.
- [26] A. Smilga, Comments on the Dynamics of the Pais-Uhlenbeck Oscillator, *Sigma* **5**, (2009), 017.
- [27] F.A. Schaposnik, Chiral Symmetry in The Path Integral Approach, *CN-Pq/CBPF* (1986) 15.
- [28] T.P. Sotiriou, V. Faraoni, $f(R)$ theories of gravity, presented at SIGRAV(2008),18th congress of the Italian society of General Relativity and Gravitation, Cosenza Italy.
- [29] E. A. Bergshoeff, S. de Haan, W. Merbis, and J. Rosseel, A Non-relativistic Logarithmic Conformal Field Theory from a Holographic Point of View, *JHEP* **1109**,(2011) 038.
- [30] S.I. Muslih, H.A. EL-Zalan, Hamiltonian Formulation of Systems with Higher Order Derivatives, *Int. J. Theor. Phys.* **46**, (2007), 3158

- [31] C. Grosse-Knetter, Effective Lagrangians with higher derivatives and equations of motion, *Phys. Rev. D* **49** (1994), 6709.
- [32] T. Nakamura and S. Hamamoto, Higher Derivatives and Canonical Formalisms, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996), 469.
- [33] K. Andrzejewski, J. Gonera, and P. Maślanka, Euclidean Path Integral and Higher-Derivative Theories, *Prog. Theor. Phys.* **125** (2011), 247.
- [34] I. Antoniadis, E. Dudas and D. M. Ghilencea, Living with ghosts and their radiative corrections, *Nucl. Phys. B* **767** (2007), 29.
- [35] P. Bolokhov and M. Pospelov, Classification of dimension 5 Lorentz-violating interactions in the standard model, *Phys.Rev D* **77** (2008), 025022.
- [36] V. Kostelecky and M. Mewes, Electrodynamics with Lorentz- Violating Operators of Arbitrary dimension, *Phys.Rev. D* **80** (2009), 015020.
- [37] E.A. Bergshoeff, S. de Haan, W. Merbis, M. Porrati and J. Rosseel, Unitary Truncations and Critical Gravity: a Toy Model, *JHEP* **1204**, (2012), 134.
- [38] Margalli, C. A. and Vergara, J. D., Quantization of the Interacting Non-Hermitian Higher Order Derivative Field, arXiv:1309.2928 [hep-th].
- [39] W. Dittrich and M. Reuter, *Classical and Quantum Dynamics: From Classical Paths to Path Integrals*, Springer, Berlin, 2001.
- [40] H.A.Morales-Tecotl, L.F.Urrutia and J.D. Vergara, Reality conditions for Ashtekar variables as Dirac constraints, *Class. Quant. Grav.* **13** (1996), 2933.
- [41] V. O. Rivelles, Triviality of higher derivative theories, *Phys. Lett. B* **577** (2003), 137.
- [42] M. Faizal and M. Khan, A superspace formulation of the BV action for higher derivative theories, *Eur. Phys. J. C* **71** (2011), 1603.
- [43] K. Andrzejewski, J. Gonera, P. Machalski and K. Bolonek-Lasoń, On the triviality of higher-derivative theories, *Phys. Lett. B* **706** (2012), 427.
- [44] V. N. Gribov, *Nucl. Phys.* **B139** (1978)1.
- [45] G. Esposito, D. N. Pelliccia and F. Zaccaria, *Int. J. of Geom. Meth. in Mod. Phys.* **1** (2004) 423.
- [46] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan. *Nuovo Cimento* 34A (1976) 569
- [47] Heneaux, M.: Hamiltonian form of the path integral for theories with gauge freedom. *Phys. Rep.* **126**, 1-66 (1985).

- [48] S.A. Martinez, R. Montemayor, L.F.Urrutia, Perturbative Hamiltonian Constraints For Higher Order Theories, *Int.J.Mod.Phys. A26* (2011) 4661-4686 arXiv:1104.4923 [hep-th].
- [49] A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, Quantum nature of the Big Bang, *Phys.Rev.D74*, p. 084003 (2006).
- [50] R.Gilmore, Lie Groups, Lie Algebras and some of their applications, J. Wiley, New York (1974).