UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA EN SISTEMAS – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

CARACTERIZACIÓN DE ARCOS GEODÉSICOS EN EL LÍMITE SOBRE UN ESPACIO PSICOLÓGICO MULTIDIMENSIONAL

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
MAT. OLIVIA ISAURA LÓPEZ GONZÁLEZ

TUTOR PRINCIPAL
DRA. HÉRICA SÁNCHEZ LARIOS,
ENES-MORELIA

MÉXICO, D. F., FEBRERO 2016.

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Guillen Burguete Servio Tulio.
Secretario:	Dra. Flores De La Mota Idalia.
Vocal:	Dra. Sánchez Larios Hérica.
1 er. Suplente:	Dra. Elizondo Cortés Mayra.
2 d o. Suplente:	Dr. Gómez Aíza Ricardo.

Lugar donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, México, D. F.

TUTOR DE TESIS:

Dra. Hérica Sánchez Larios.

FIRMA

De esta tesis se deriva el artículo: **"Characterization of geodesics in the small in multidimensional psychological spaces"**, publicado en la revista Journal of Mathematical Psychology, 70, 12-20.

Agradecimientos.

Principalmente quiero agradecer a mi familia por el apoyo constante durante toda mi vida.

A cada uno de los docentes que contribuyeron en mi formación, especialmente a la Dra. Hérica Sánchez y al Dr. Tulio Guillén.

A mis viejos amigos que aprecio mucho y que han estado conmigo en las buenas y en las malas al igual que mis compañeros de Investigación de Operaciones.

A mis amigas con las que comparto tanto: Carmen, Esther, Bere, Yeral, Gladys, Grace.

A las personas que conocí a lo largo de estos dos años, y que ahora son muy importantes en mi vida, pues de ellas recibí apoyo, amor, cariño, amistad, y muchas otras cosas que no imagine al comenzar esta etapa.

Especialmente quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo brindado a lo largo de los dos años que curse la maestría.

Índice general

Abstract.

Dzhafarov and Colonius [8] proposed a theory of subjective Fechnerian distances in a continuous stimulus space of arbitrary dimensionality, where each stimulus is associated with a psychometric function that determines probabilities with which it is discriminated from its infinitesimally close neighboring stimuli. In their theory, the Finslerian metric function $F(x, v)$ plays a central role, where x is a point of a manifold M and $v \in T_xM\backslash\{0\}$ is a nonzero vector in the tangent space at x. Dzhafarov and Colonius [9] proved that if the Finslerian metric function $F(x, v)$ is not convex in the direction of a tangent vector v at x, then there exist polygonal arcs from x to $x + vs$, with $s > 0$ sufficiently small, called Fechnerian geodesic arcs in the small for v at x, whose psychometric length is strictly less than that of the straight line segment from x to $x + vs$. In their paper, the authors pointed out that: "it is important to investigate the problem of Fechnerian geodesics in the small, that is, the existence and properties of an allowable path connecting x to $y = x + vs$, whose psychometric length tends to the Fechnerian distance $G(x, x + vs)$ as $s \to 0^+$". Consequently, the principal aim of our paper is to characterize the Fechnerian geodesic arcs in the small. We prove that the Fechnerian geodesic arcs in the small for v at x can be obtained from sets H of tangent vectors at x, provided that:

a) The sum of the vectors in H is equal to v.

b) The rays in the directions of the vectors of H pass through extreme points of only one face $C_x(v)$ of the convex closure of the indicatrix of F at x.

c) The ray in the direction of v intersects the relative interior of $C_x(v)$.

Also, we prove that the Fechnerian geodesic arcs in the small for v at x determine totally their corresponding face $C_x(v)$.

Keywords: Multidimensional scaling, Fechnerian distance, non-convex indicatrix, triangle inequality.

Resumen.

Dzhafarov y Colonius [8] propusieron una teoría sobre las distancias fechnerianas subjetivas en un espacio de estímulos continuo de dimensión arbitraria donde cada estímulo está asociado a una función psicométrica la cual determina las probabilidades con las cuales tal estímulo es diferenciado (o distinguido) de los estímulos infinitamente cercanos a él.

En su teoría, la función métrica finsleriana $F(x,v)$ juega un rol central, donde x es un punto en una variedad M y $v \in T_xM\backslash\{0\}$ es un vector distinto de cero en el espacio tangente asociado a x. Dzhafarov y Colonius [9] probaron que si la función métrica finsleriana $F(x,v)$ no es convexa en la dirección del vector tangente v en x, entonces existen arcos poligonales de x a $x+vs$ cuya longitud psicométrica es estrictamente menor que la longitud del segmento de línea recta que une x con $x+vs$. En su trabajo los autores señalan que: "es importante investigar el problema de los arcos geodésicos fechnerianos en el límite, esto es, la existencia y propiedades de un camino dirigido que conecta x con $y = x+vs$ cuya longitud psicométrica tiende a la distancia fechneriana $G(x, x+vs)$, cuando $s \to 0^+$". De acuerdo con esto, el principal objetivo de este trabajo es caracterizar los arcos geodésicos en el límite. Probaremos que los arcos geodésicos en el límite en el punto x y en la dirección del vector v pueden obtenerse a partir de conjuntos H de vectores tangentes a x siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

a) La suma de los vectores en H es igual a v.

b) Los rayos en las direcciones de los vectores de H pasan por puntos extremos de una única cara $C_x(v)$ de la cerradura convexa de la indicatriz de F en x.

c) El rayo en la dirección de v interseca el interior relativo de $C_x(v)$.

También probamos que los arcos geodésicos de Fechner en el límite para v en x determinan totalmente su correspondiente cara $C_x(v)$.

Palabras clave: Escalamiento multidimensional, distancia Fechneriana, indicatriz no convexa, desigualdad del triángulo.

Introducción.

Como es sabido, la Investigación de Operaciones es una rama dedicada a resolver problemas de la vida diaria empleando técnicas matemáticas como son: programación matemática (lineal, entera o no lineal), teoría de colas, teoría de redes, simulación, estadística, procesos markovianos, análisis matemático, por mencionar algunas.

La Investigación de Operaciones es una ciencia multidisciplinaria que aparece en muchos campos del ámbito industrial, empresarial y de la administración pública así como también en el desarrollo de la investigación científica.

Por otro lado, la Psicología Matemática es una aproximación a la investigación psicológica que se basa en modelos matemáticos de los procesos perceptuales, cognitivos y motrices, a partir del estudio de la "persona promedio". También implica el establecimiento de reglas que relacionan las características cuantificables de un estímulo con el comportamiento cuantificable.

La Psicología Matemática es una área interdisciplinaria de investigación en la cual se usan métodos matemáticos, la investigación de operaciones y las ciencias de la computación en la psicología y se centra en el modelado de los datos obtenidos a partir de paradigmas experimentales que a menudo utilizan optimización estadística como principio rector, suponiendo que el cerebro humano ha evolucionado para resolver problemas de forma optimizada.

Entre los primeros en aplicar con éxito técnicas matemáticas de ecuaciones funcionales de la física a los procesos psicológicos se encuentran Heinrich Weber (1795-1878) y Gustav Fechner (1801-1887), originando el modelado matemático dentro de la psicología en el siglo XIX.

Cabe señalar que la aportación principal de este trabajo de tesis es de tipo teórico, y consiste en proponer una caracterización de los arcos de mínima longitud (geodésicos) "en lo pequeño" (en el límite). Como se verá en el desarrollo de esta tesis, para llegar a la caracterización propuesta, se requieren varios conceptos del análisis convexo. En el análisis convexo se presenta un tratamiento riguroso de los fundamentos analíticos y geométricos de la teoría de la convexidad y de la optimización. En este trabajo no pretendemos resolver algún problema“clásico” de la Investigación de Operaciones, sino un problema de optimización que es de interés para los estudiosos de la Psicología matemática.

En particular, en este trabajo se va a resolver un problema de la teoría propuesta por Dzhafarov y Colonius [8] relacionado con funciones distancia fechnerianas definidas en un espacio de estímulos. Dicha teoría se conoce como *escalamiento fechneriano* y daremos una descripción detallada de esta.

Si quisiéramos hacer una analogía con algún problema clásico de la Investigación de Operaciones, podemos decir que en la Investigación de Operaciones se emplean funciones distancia para modelar problemas como localización de servicios continuo, longitud de recorrido, costos de transporte, tiempo de recorrido, energía consumida, etc. En estos problemas se busca optimizar las funciones distancia.

El escalamiento fechneriano es una teoría que también nos permite encontrar ciertas métricas en un espacio continuo de estímulos de dimensión arbitraria a partir de funciones psicométricas que se basan en la probabilidad de diferenciación dentro de pequeñas vecindades alrededor de un estímulo en el cual, estas funciones alcanzan su valor mínimo. De esta manera podemos calcular distancias entre estímulos físicos (tales como el espacio de amplitud-frecuencia de tonos) a partir del cálculo de estas probabilidades.

Dzhafarov y Colonius [8] basaron su teoría de la métrica fechneriana en un espacio de estímulos multidimensional M y en una función métrica $F(x,u)$ conocida como *función métrica de* $Fechner - Finsler$, donde x es un punto en el espacio M y u es un vector en el espacio tangente $T_xM\backslash\{0\}$ en x. La función métrica de Fecher-Finsler $F(x,u)$ determina la *longitud psicométrica* de cualquier arco $C(a,b)$ que conecta un estímulo a con otro estímulo b dentro de un espacio de estímulos M y se denota por $L[C(a,b)]$. Además, definen la *distancia fechneriana* como la mínima longitud psicométrica de los arcos que conectan a con b, esta función se denota por $G(a,b)$.

Definición 0.1. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Una función $F : M \times M \to \mathbb{R}$ es una *función métrica* si para todo $x, u \in M$, F satisface las siguientes condiciones:

(A) $F(x,u)$ es continua como función de $2n$ variables (x,u), donde n es la dimensión de M.

(B) $F(x,u)$ es positiva definida, es decir, $F(x,u) > 0$ para todo $u \neq 0$.

(C) $F(x,u)$ es homogénea positiva de orden uno en u, es decir, $F(x,ku) = kF(x,u)$ para $k > 0$.

Vamos a suponer que la función F satisface las propiedades A, B, C además de la propiedad D que definimos a continuación.

(D) *Compacidad Finita de M.* Si las distancias $G(x_v, y)$ o $G(y, x_v)$ están acotadas, entonces la sucesión $x_v, v = 1, 2, \ldots$ tiene un punto de acumulación.

Dzhafarov y Colonius [8], [9] desarrollaron la teoría del escalamiento fechneriano multidimensional a partir de tres condiciones que debe satisfacer la función métrica $F(x, u)$ (la última versión del escalamiento fechneriano generalizada la podemos encontrar en Dzhafarov [6], [7] y Dzhafarov y Colonius [10]), que a continuación mencionamos.

La primera condición es que la función psicométrica sea continua respecto al estímulo de comparación que varía continuamente respecto al estímulo de referencia, además, alcanza su valor mínimo en un único punto en el espacio de estímulos.

La segunda condición, considerada la más importante del escalamiento fechneriano, es afirmar que una transición desde el punto mínimo hasta un estímulo cercano corresponde a un incremento en el valor de la función psicométrica. Esta condición significa que el valor de la magnitud de la transición corresponde a uno y el mismo incremento se puede calcular en el límite[1], es decir, es asintóticamente proporcional para toda función psicométrica y toda dirección de la transición.

La tercera condición es que cualesquiera dos transiciones en direcciones opuestas a partir del punto mínimo de una función psicométrica, que causen el mismo incremento en su valor, son asintóticamente equivalentes. Esta condición asegura que la distancia fechneriana de un punto a a un punto b es la misma que la de b a a.

Equivalentemente, Dzhafarov y Colonius [9] definieron un *arco geodésico fechneriano en el límite* que conecta x con $x + vs$ como aquel cuyo tamaño psicométrico tiende a la distancia fechneriana $G(x, x+vs)$, cuando $s \to 0^+$. Los autores hacen énfasis en **la importancia de investigar la existencia y propiedades de los arcos geodésicos fechnerianos en el límite en un espacio de estímulos**.

En este sentido, el principal **objetivo** de este trabajo es caracterizar a los arcos geodésicos fechnerianos en el límite contenidos en un espacio de estímulos. Además, mostraremos cómo dicha caracterización establece útiles relaciones entre los arcos geodésicos fechnerianos y el contorno de las indicatrices.

Por otro lado, ubicamos la teoría de la métrica fechneriana en el contexto de la geometría general de las *métricas internas*, lo que significa que la distancia fechneriana entre dos estímulos en un espacio de estímulos se define como el *ínfimo* de la longitud psicométrica de todas las curvas suaves que conectan dichos estímulos dentro del espacio.

En el Capítulo 1 se propone una generalización de la definición tradicional de longitud de arco sobre una variedad diferenciable arco conexa, donde la longitud de arco está asociada a una función distancia d que satisface la propiedad de identidad pero puede no satisfacer la desigualdad del triángulo o las propiedades de no negatividad, definitoreidad y simetría.

[1] En este trabajo, el término “en el límite”se utiliza como sinónimo de “local” o “en lo pequeño” e indica que la cantidad considerada tiende a cero, o el área considerada tiende a un punto. Se dará una definición específica cada vez que dicho término sea utilizado en un cierto contexto por primera vez.

De esta definición de longitud de arco surgen de manera natural una nueva clase de arcos, los cuales llamamos *d-conservativos*. Un arco d-conservativo (o un arco inducido por una función distancia d) es un arco dirigido tal que, para cualquier triada ordenada de puntos sobre el arco, la desigualdad del triángulo se cumple en su forma de igualdad.

En el Capítulo 2 desarrollamos de manera general la teoría del escalamiento fechneriano que propusieron Dzhafarov y Colonius, así como sus fundamentos matemáticos y establecemos el significado operacional de los principales conceptos e hipótesis. También probaremos que las tres condiciones que deben cumplir las funciones psicométricas implican que F es una función métrica, es decir, F satisface las condiciones A, B, C mencionadas en la definición 0.1.

En el Capítulo 3 proponemos una definición de *convexidad* de una función F con respecto a la dirección de cualquier vector tangente $v \in T_xM\backslash\{0\}$ en x, y probaremos que cualquier conjunto F-minimizante de vectores tangentes en x con suma v se puede expresar como una combinación convexa de conjuntos extremos mínimos de vectores tangentes en x con suma v (teorema 3.1). También mencionaremos algunas propiedades que cumplen los conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$. En particular, explicaremos un concepto conocido como *cara* de un conjunto convexo.

La longitud psicométrica también se define mediante el concepto de *indicatriz* de F asociada al punto x, que es un recurso geométrico que nos permite medir la magnitud de cualquier vector de cambio originado en el estímulo x. Establecemos el significado empírico de las indicatrices fechnerianas en términos del contorno de las funciones de la probabilidad de diferenciación definidas en un espacio de estímulos. Además presentaremos dos nuevas propiedades de la indicatriz:

a) Una condición suficiente y necesaria (en términos de la indicatriz) para que la suma de los vectores tangentes en x de un conjunto $H \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ sea igual a v (Lema 3.3).

b) Para todo $v \in T_xM\backslash\{0\}$ existe una y solo una F-cara de la cerradura convexa de la indicatriz en x tal que el interior relativo de dicha F-cara intersecta el rayo $r(v)$ del vector extendido v (teorema 3.4).

Esta última propiedad establece que a cada dirección del espacio tangente $T_xM\backslash\{0\}$ le corresponde un solo hiperplano soporte de la cerradura convexa de la indicatriz en x.

Estas dos propiedades de la indicatriz las utilizamos para caracterizar a los conjuntos extremos F-minimizantes de vectores tangentes en x (teorema 3.5).

Por el teorema de Carathéodory, todo conjunto F-minimizante de vectores tangentes en cualquier punto tiene al menos n elementos, donde n es la dimensión del espacio M. También analizamos la cerradura convexa de la función métrica F, que denotamos por F^* y mostramos que F^* es una función métrica que induce la misma distancia fechneriana que induce F, además, $F^*(x, v)$ es convexa en todos los puntos $x \in M$ y $v \in T_xM\backslash\{0\}$. Probaremos que cada arco F-geodésico fechneriano de a a b es un arco F^*-geodéscio fechneriano de a a b pero no necesariamente al revés.

Por último mostraremos un ejemplo para ilustra la caracterización de los arcos geodésicos en el límite que proponemos en un espacio psicológico y exponemos una breve discusión donde concluimos que la caracterización de los arcos geodésicos fechnerianos en el límite puede usarse para encontrar el contorno de las indicatrices fechnerianas.

Notas terminológicas.

Los adjetivos "fechneriana" y "Fechner" asociados en el presente trabajo a los conceptos matemáticos y psicofísicos se deben a la sugerencia hecha por Dzhafarov y Colonius [33], pues la idea de establecer una métrica a partir de la diferenciabilidad constituye la esencia de la teoría original de Gustav Theodor Fechner ([28], [29], [30], [31]), planteada de la siguiente manera: en un espacio de estímulos continuo unidimensional, la distancia "subjetiva" entre a y b se calcula con la siguiente integral:

$$G(a,b) = \int_a^b \delta(x)dx$$

donde $\delta(x)$ es una medida de diferenciabilidad local (que Fechner aproximó mediante el reciproco de un "umbral diferencial"). Se puede probar (ver Dzhafarov & Colonius [33]) que este enfoque es un caso particular unidimensional de la definición de la distancia fechneriana que se presenta en este trabajo; siempre que la medida de diferenciabilidad $\delta(x)$ se obtenga a partir de las probabilidades con las cuales un estímulo x es diferenciado de un estímulo $x \pm \Delta x$, cuando $\Delta x \to 0^+$.

Geométricamente la métrica fechneriana se identifica en Dzhafarov y Colonius [33] como una métrica de Finsler (después de que Paul Finsler la propusiera en 1918; ver Busemann [32], y Rund [27]), para detalles históricos). Debido a ésto, uno de los conceptos básicos de la teoría de Dzhafarov y Colonius se conoce como "función métrica de Fechner-Finsler", conservamos este término a fin de dar continuidad a la presente teoría, sin embargo, el adjetivo "Finsler" se refiere a las métricas generalizadas de Finsler, término que se toma como sinónimo de las métricas internas. Las métricas de Finsler en sentido estricto son inducidas por las indicatrices cuyos contornos satisfacen una fuerte restricción de convexidad que en el presente contexto significa una restricción importante impuesta al contorno de las funciones psicométricas. En matemáticas abstractas relajando esta condición de convexidad obtenemos diversas formas y niveles de generalización para las métricas de Finsler.

En la literatura matemática el término "métrica de Finsler" y "métrica generalizada de Finsler" no parecen tener fronteras rígidamente establecidas (comparar, e.g., Asanov [26], Alexksandrov & Berestovskii [35]; Busemann [36], [37]).

A pesar de que el presente trabajo presenta una teoría psicofísica, los resultados matemáticos abstractos que contiene no son completamente nuevos desde el punto de vista de un matemático. Los teoremas aplicados a las métricas internas (o mejor dicho a la métrica fechneriana y específicamente relacionados con las funciones psicométricas) los podemos encontrar en Rockafellar [14].

Estado del arte.

A continuación mencionaremos algunos artículos importantes relacionados con el presente trabajo. En ellos encontramos el desarrollo de la teoría del escalamiento fechneriano, desde sus principios básicos hasta los aspectos más complejos desarrollados hasta la fecha.

1. *Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (1999).* ***Fechnerian metrics in unidimensional and multidimensional stimulus spaces****. Psychonomic Bulletin and Review, 6(2), 239-268.*

   En este artículo los autores exponen la teoría donde desarrollan la distancia fechneriana entre estímulos en un espacio de estímulos de dimensión arbitraria (como puede ser, un espacio de colores parametrizado, las localizaciones espaciales o las formas geométricas), partiendo de la teoría original de Fechner. Cada estímulo se asocia a una función psicométrica que determina la probabilidad con la que éste se diferencia (o distingue) de otro estímulo en una vecindad infinitesimalmente pequeña alrededor de él.

   Esta medida de diferenciación se puede calcular integrando a lo largo de cualquier camino que conecta dos puntos en un espacio continuo de dimensión arbitraria, obteniendo la longitud psicométrica de dicho camino. La distancia de Fechner entre dos estímulos se define como el mínimo de la longitud psicométrica de todos los caminos que los conectan.

2. *Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (2001).* ***Multidimensional Fechnerian scaling: Basics****. Journal of Mathematical Psychology, 45, 670-719.*

   En este artículo los autores desarrollan, en forma detallada, las tres condiciones en las que se basan las funciones psicométricas, que son los siguientes:

   a) Son funciones continuas y crecientes en todas las direcciones alrededor de un punto mínimo global.

   b) Cualesquiera dos puntos diferentes al mínimo, que correspondan al mismo aumento en la probabilidad de distinción, son asintóticamente proporcionales con un coeficiente continuo de proporcionalidad.

c) La diferencia entre estímulos opuestamente dirigidos con respecto a un punto mínimo y que corresponde al mismo incremento en la probabilidad de diferenciación es igual en el límite.

La métrica fechneriana derivada de estas tres condiciones es una métrica interna cuya indicatriz es asintóticamente similar a las secciones transversales (o curvas de nivel) de las funciones psicométricas realizadas a una corta distancia por encima del punto mínimo.

3. *Dzhafarov, E. N., (2002).* ***Multidimensional Fechnerian scaling: Probability - Distance hypothesis.*** *Journal of Mathematical Psychology, 46, 352-374.*

   En este artículo se desarrolla la hipótesis de la probabilidad de diferenciación entre estímulos dentro del contexto del escalamiento multidimensional de Fechner. El análisis de esta hipótesis proporciona los siguientes resultados: si la métrica de la hipótesis es interna (i.e., que la distancia entre dos estímulos es igual al ínfimo de la longitud de los caminos que los conectan), entonces las hipótesis subyacentes al escalamiento fechneriano se satisfacen y la métrica en cuestión coincide con la métrica fechneriana.

   Bajo la hipótesis de la probabilidad de diferenciación, la métrica fechneriana existe (es decir, las condiciones subyacentes del escalamiento fechneriano se satisfacen) si y solo si la métrica subjetiva es internabilizable, lo que significa a grosso modo, que bajo una cierta transformación coincide en el límite con una métrica interna y entonces esta métrica interna es la métrica fechneriana. La especialización de estos resultados en un espacio de estímulos continuo unidimensional está fuertemente relacionado al conocido *problema de Fechner* propuesto alrededor de 1960's como substituto de la teoría original de Fechner.

4. *Dzhafarov, E. N. (2002).* ***Multidimensional Fechnerian Scaling: Pairwise Comparisons, Regular Minimality, and Nonconstant Self-Similarity.*** *Journal of Mathematical Psychology, 46, 583-608.*

   Normalmente dos estímulos x y y pertenecen al mismo espacio de estímulos de dimensión n. Este artículo se enfoca en el estudio de los estímulos presentados como pares ordenados que pertenecen a dos áreas de observación distintas (esencialmente, dos espacios de estímulos). Para reflejar este hecho, se debe complementar la primera condición de la teoría del escalamiento fechneriano con una restricción cualitativa llamada *mínima regularidad* y se presenta de la siguiente manera: para todo x y y tales que $x \neq y$

$$\Psi(x,x) < \left\{ \begin{array}{l} \Psi(x,y) \\ \Psi(y,x) \end{array} \right.$$

   Además, la primera condición del escalamiento fechneriano incluye lo siguiente:

   - (*Continuidad*). $\Psi(x,y)$ es continua en (x,y).
   - (*Monotonía*). $\Psi(x, x+us)$ y $\Psi(x+us, x)$ son crecientes para todo x, $s > 0$ suficientemente pequeña y para todo vector director $u \neq 0$.

   Esto significa que la función de probabilidad con la que un estímulo fijo (referencia) en un área de observación es distinto de un estímulo en otra área de observación, alcanza su mínimo cuando los dos estímulos son idénticos (quizá sea necesaria una transformación apropiada de la medida de los estímulos a una de las dos áreas de observación). Las siguientes modificaciones son sencillas, su resultado principal es que cada una de las dos áreas de observación tienen su propia métrica fechneriana inducida por una función métrica obtenida de acuerdo a la versión original de esta misma métrica.

La segunda restricción se conoce como *similaridad no constante* y significa que el mínimo nivel de la función de probabilidad de diferenciación, generalmente es distinto para estímulos de referencia diferentes.

Al combinar ambas propiedades, la mínima regularidad y la similaridad no constante, se imponen restricciones estrictas tanto a la interdependencia entre la probabilidad de diferenciación y las funciones métricas dentro de cada área de observación como a la interdependencia entre las métricas fechneriana y las funciones métricas que pertenecen a diferentes áreas de observación.

5. *Dzhafarov, E. N. (2002).* ***Multidimensional Fechnerian Scaling: Perceptual Separability.*** *Journal of Mathematical Psychology, 46,564-582.*

   En este artículo el autor propone la definición de *separabilidad perceptual* de la dimensión de los estímulos con base en la probabilidad de diferenciación. La dimensión de los estímulos se considera separable si se cumplen las siguientes dos condiciones:

   a) La probabilidad de diferenciación entre dos estímulos suficientemente cercanos se puede calcular a partir de la probabilidad con la que cada uno discrimina las proyecciones de estos estímulos sobre los ejes coordenados. En otras palabras, la probabilidad con la que un estímulo x es diferente a un estímulo cercano y.

   b) La diferencia entre la probabilidad con la que un estímulo x es diferenciado de otro estímulo y cuyas coordenadas coinciden en al menos una entrada y la probabilidad con la que dicho estímulo es diferenciado de sí mismo; no depende del valor de la coordenada coincidente.

   Además se analiza la separabilidad perceptual dentro del contexto del escalamiento multidimensional fechneriano. El resultado de este análisis es que la métrica fechneriana en un espacio de estímulos cuya dimensión es separable perceptualmente tiene la estructura de una métrica de Minkowski con respecto a estas dimensiones.

6. *Jun Zhang (2004).* ***Dual scaling of comparison and reference stimuli in multidimensional psychological space.*** *Journal of Mathematical Psychology, 48, 409-424.*

   En este artículo el autor investiga un paradigma llamado *tarea de comparación de sondeo-referente*, donde la pareja (x, u) bajo comparación asume un estatus psicológico sustancialmente diferente, conocido como *sondeo-referente.*

   Se analizan tanto la dualidad entre un par de funciones psicométricas (derivada de asignar a x ó y como estímulos de referencia o de comparación indistintamente) como la función uno a uno definida de un espacio de estímulos X a un espacio Y bajo cualquier asignación.

   De acuerdo con Dzhafarov y Colonius, el autor investiga la siguientes dos propiedades características de una tarea de comparación sondeo-referente:

a) *Mínima regularidad cruzada* del valor de los estímulos involucrados en la comparación sondeo-referente, donde uno minimiza la función de probabilidad de diferenciación y el otro es tratado como estímulo de referencia fijo.

b) *Similaridad no constante* que establece que el valor de la función de probabilidad en el punto mínimo no es una función constante que depende del valor del estímulo de referencia.

A partir de la forma particular que adoptan las funciones psicométricas investigadas, el autor muestra que, al imponer la condición de mínima regularidad cruzada al par de funciones psicométricas, forzamos un mapeo consistente (pero aún arbitrario) entre X y Y que es independiente de la asignación de referencia o comparación impuesta a x o y. Las diferenciales psicométricas resultantes bajo ambas asignaciones son iguales y toman una forma asimétrica y dualista de la llamada medida de divergencia que surge en el contexto de la geometría diferencial de la probabilidad en una variedad con conexiones duales.

El par de funciones divergentes en X y en Y inducen una métrica Riemanniana en el límite de orden psicométrico igual a 2. El autor también desarrolla ciertos resultados derivados de la diferencia entre el enfoque de la geometría de Finsler-Riemann en un espacio de estímulos y el enfoque de la geometría dual Riemanniana del escalamiento dual de los estímulos.

7. *Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (2004).* ***Psychophysics without physics: a purely psychological theory of Fechnerian scaling in continuous stimulus spaces.*** *Journal of Mathematical Psychology, 49, 1-50.*

   En este artículo los autores proporcionan un enfoque de la teoría del escalamiento fechneriano puramente psicológico. En los artículos anteriores esta teoría se desarrolló en dos tipos de espacios de estímulos: continuos (por ejemplo, el espacio de amplitud y frecuencia de tono) y discretos (como alfabetos o palabras). En ambos casos la teoría fechneriana toma un enfoque psico-físico en el sentido de que la distancia subjetiva resultante no solo se basa en la probabilidad de diferenciación, sino también en ciertas propiedades proporcionadas por las medidas físicas de los estímulos.

   Así, tanto la estructura vectorial como la topología Euclidiana del espacio de estímulos son propiedades físicas y al estimar la métrica fechneriana se hace uso de dichas propiedades. Esta situación es poco satisfactoria, pues la definición de una distancia subjetiva entre dos estímulos no debería depender de cómo se miden estos estímulos físicos.

   La teoría del escalamiento fechneriano en espacios discretos de estímulos es, por el contrario, puramente psicológica: la discretización de un espacio de estímulos y todos las estimaciones fechnerianas pueden definirse completamente en términos de la probabilidad de diferenciación.

   En este artículo los autores muestran cómo construir el escalamiento fechneriano como una teoría puramente psicológica en un espacio de naturaleza arbitraria arco conexo; incluyendo aquellos espacios cuya dimensión es infinita o espacios sin dimensiones físicas (como espacios de imágenes o movimientos).

   Como en el caso euclidiano, la teoría del escalamiento fechneriano se basa en las propiedades que definen a la probabilidad de diferenciación, que son la mínima regularidad y la medida de variación de la diferencial psicométrica; así como también en los principales teoremas derivados del escalamiento fechneriano.

8. *Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (2004).* ***Psychophysics without physics: extension of Fechnerian scaling from continuous to discrete and discrete-continuous stimulus spaces.*** *Journal of Mathematical Psychology, 49, 125-141.*

   Calcular la distancia fechneriana subjetiva a partir de la probabilidad de diferenciación involucra la acumulación de pequeños incrementos a lo largo de caminos suaves (en espacios continuos), o a lo largo de cadenas de estímulos (en espacios discretos).

   En un espacio donde a cualquier par de estímulos, considerados como puntos de igualdad subjetiva, se le asigna etiquetas físicas idénticas, los incrementos psicométricos resultan ser diferencias positivas, es decir, $\Phi_x(y) - \Phi_x(x) > 0$ y $\Phi_y(x) - \Phi_x(x) > 0$ para $x \neq y$ y donde Φ es la probabilidad de juzgar dos estímulos diferentes.

   En un espacio continuo de estímulos, una transformación apropiada monótona de estos incrementos se determina de forma única en una vecindad alrededor del cero y su extensión a valores más grandes de su argumento no es necesaria. En espacios discretos, sin embargo, la distancia fechneriana depende críticamente de esta extensión.

   En el presente artículo los autores muestran que si asumimos que las transformaciones psicométricas cumplen las siguientes condiciones, dicha transformación solo puede ser la identidad:

   a) Ser iguales para una clase suficientemente grande de espacios de estímulos discretos.
   b) Asegurar la validez del segundo teorema fundamental del escalamiento fechneriano en esta clase de espacios.
   c) Acordar que en una vecindad alrededor del cero se defina una de las posibles transformaciones en un espacio continuo.

   Este resultado se generaliza en una amplia gama de espacios de estímulos discretos y continuos.

9. *Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (2007).* ***Dissimilarity cumulation theory and subjective metrics.*** *Journal of Mathematical Psychology, 51, 290-304.*

   Los autores presentan una nueva función que llamaron *función de disimilitud* y se basa en una extensión radical del escalamiento fechneriano, una teoría encargada de calcular la distancia subjetiva relacionada con la probabilidad de diferenciación entre cualquier par de puntos. Esta nueva teoría se aplica a cualquier espacio de estímulos que cumpla las siguientes condiciones:

   a) La probabilidad de diferenciación satisface la propiedad de mínima regularidad.
   b) Los incrementos psicométricos canónicos son funciones de disimilitud.

   Una función de disimilitud Dab entre pares de estímulos representados canónicamente se define mediante las siguientes propiedades:

   a) Si $a \neq b$, entonces $Dab > 0$.
   b) $Daa = 0$.
   c) Si $Da_na'_n \to 0$ y $Db_nb'_n \to 0$, entonces $Da'_nb'_n - Da_nb_n \to 0$.

d) Para toda sucesión $\{a_n X_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde X_n es una cadena de estímulos, si $Da_n X_n b_n \to 0$, entonces $Da_n b_n \to 0$.

La expresión $DaXb$ se refiere al valor de disimilitud acumulado a lo largo de los puntos sucesivos de la cadena aXb. La distancia subjetiva (fechneriana) entre los estímulos a y b se define como el ínfimo de $DaXb + DbYa$ entre todas las cadenas posibles X y Y contenidas entre a y b.

La función de disimilitud comparte ciertas propiedades con una función distancia pero se considera más general. La función de disimilitud en general, no satisface ni la desigualdad del triángulo, ni la propiedad de simetría, sin embargo, nos permite construir una métrica en un espacio de estímulos. La motivación de esta nueva construcción, particularmente viene de su principal aplicación que es calcular la distancia fechneriana entre estímulos a partir de la probabilidad de diferenciación.

10. *Ünlü, A., Thomas, K. & Dzhafarov, E. N., (2009).* ***Fechnerian Scaling in $\mathbb{R}$: The Package fechner.*** *Journal of Statistical Software, 31, 1-24.*

    Los autores consideran que el escalamiento fechneriano es un procedimiento para construir una métrica sobre un conjunto de objetos (por ejemplo, colores, símbolos, rayos X, etc.) o sobre cualquier modelo estadístico para representar disimilitudes entre los objetos desde el punto de vista del sistema que los percibe (por ejemplo, una persona, dispositivos técnicos, o cualquier algoritmo computacional). Esta métrica se calcula a partir de una matriz que contiene los datos de las probabilidades de diferenciación o cualquier otra medida que pueda interpretarse como el grado con el que pares de objetos en el conjunto se diferencian uno del otro.

    Se presenta el paquete computacional para calcular el escalamiento fechneriano de un conjunto sobre objetos en $\mathbb{R}$ y se describen las funciones del paquete. Así, el escalamiento fechneriano se demuestra con conjuntos de datos tanto reales como artificiales que van acompañados de este paquete.

11. *Dzhafarov, E. N., & Colonius, H., (2012).* ***Ultrametric Fechnerian scaling of discretee object sets.*** *Mathematics of Distances and Applications.*

    La escala fechneriana basada en una función de disimilitud, resulta en una función distancia localmente simétrica en el contexto de la acumulación de disimilitud. En este artículo los autores definen un nuevo concepto: la desigualdad ultramétrica y muestran que para un conjunto finito de objetos, el remplazo de la función de acumulación de disimilitud por un procedimiento para maximizar dicha disimilitud, resulta en una distancia subjetiva que satisface la desigualdad ultramétrica.

12. *Dzhafarov, E. N., & Colonius, H., (2006b).* ***Generalized Fechnerian Scaling.*** *In H. Colonius, & E. N. Dzhafarov (Eds.), Measurement and representation of sensations (pp. 47–88). Mahwah, NJ: Erlbaum.*

    Los autores tratan el problema de la medida de disimilaridad, pues las aplicaciones encontradas son numerosas e incluyen tazas numéricas, clasificación de estímulos, correlación entre variables de respuesta, errores de substitución, etc. Las representaciones formales para aproximar datos incluyen al escalamiento multidimensional o el análisis cluster que sirven para desplegar y describir estructuras de datos en alguna dimensión espacial menor o en una configuración gráfica, respectivamente.

La probabilidad de diferenciación ocupa un lugar especial entre la medida de disimilaridad, pues la habilidad para determinar si dos objetos son diferentes o son iguales es una de las funciones cognitivas más básicas atribuidas al sujeto que las percibe y la técnica de inteligencia más básica requerida por un sistema.

Por lo tanto, es una posición aceptable que la métrica calculada apropiadamente a partir de los valores de la función psicométrica $\Phi_x(y)$ pueda ser vista como una métrica subjetiva, o como una red de distancias desde el punto de vista del perceptor.

Para enfatizar la importancia del escalamiento multidimensional, en este artículo se plantean diferentes ejemplos, tanto en espacios continuos como discretos, donde se aplican los resultados derivados de la métrica fechneriana.

Capítulo 1

Arcos de mínima longitud.

Definición 1.1. Sea M una variedad diferenciable. Una *función distancia* es una función binaria $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que cumple la propiedad de *identidad*, es decir, para todo $a \in M$ se cumple que $d(a, a) = 0$.

Sea $\mathbf{S}^n$ la n-ésima esfera euclidiana, definida por $\mathbf{S}^n = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Una función binaria $d : M \times M \to \mathbb{R}$ satisface cualquiera de las siguientes propiedades, si para todo vector $a, b, c \in M$ y para todo $u, v \in \mathbf{S}^n$, se cumple:

1. $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$	*Desigualdad del triángulo.*
2. $d(a,a) = 0$	*Identidad.*
3. $d(a,b) \geq 0$	*No negatividad.*
4. $d(a,b) = d(b,a)$	*Simetría.*
5. $d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$	*Definetoreidad.*
6. $d(a+c, b+c) = d(a,b)$	*Uniformidad.*
7. $d(a,b) = -d(b,a)$	*Antisimetría.*
8. $d(a, a+\lambda v) = d(a, a+\lambda u)$ para toda $\lambda > 0$ pequeña.	*Isotropía.*
9. $d(\lambda a, \lambda b) = \lambda d(a,b)$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$	*Homogénea positiva de grado uno en $\lambda > 0$.*

Tabla 1.1: Propiedades de las funciones distancia.

Definición 1.2. 1. Una *premétrica* en $\mathbb{R}^n$ es una función distancia que cumple la *desigualdad del* *triángulo.*

2. Una *métrica débil* es una premétrica que cumple la propiedad de *no negatividad.*

3. Una *cuasimétrica* es una métrica débil que cumple la propiedad de *definetoreidad*, es decir, es una premétrica estrictamente positiva ($d(a, b) > 0 \Leftrightarrow a \neq b$).

4. Una *pseudométrica* es una métrica débil que cumple la propiedad de *simetría.*

5. Una *métrica* es una pseudométrica que cumple la propiedad de *definetoreidad.*

Definición 1.3. Una *sucesión de puntos en M* de a a b es un conjunto de la forma $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} = b\}$ con $k \geq 0$. Los puntos a y b se conocen como *puntos extremos de la sucesión* y se denominan *inicio* y *final* de la sucesión, respectivamente. Los puntos $x_1, \ldots, x_k$ son los *vértices* de la sucesión.

Definición 1.4. Un *camino* de a a $b \in M$ es una aplicación continua $\bar{x} : [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \to M$ tal que $\bar{x}(\alpha) = a$ y $\bar{x}(\beta) = b$. A la imagen dirigida $C(a, b) \subseteq M$ del camino $\bar{x} : [\alpha, \beta] \to M$ se le denomina *arco dirigido* de a a b.

El conjunto de todas las sucesiones de a a $b \in M$ se denota por $P[a, b]$ y para toda sucesión en M, dada por $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} = b\}$, la función distancia $d : M \times M \to \mathbb{R}$ determina un valor real que llamamos *d-longitud* de la sucesión P y se define como la suma de las d-distancias:

$$\ell(P) = \sum_{i=0}^{k} d(x_i, x_{i+1}) \text{ para toda sucesión } P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} = b\} \in P[a, b]. \tag{1.1}$$

En general, la longitud de una sucesión es diferente de la distancia entre los puntos de inicio y final de la sucesión, es decir $\ell(P) \neq d(a, b)$. Por ejemplo, cuando la función distancia d cumple la desigualdad del triángulo ocurre que $\ell(P) \geq d(a, b)$.

Decimos que un arco $C(a, b)$ es de *clase C^1* (o un *arco suave*) si tiene una representación paramétrica $\bar{x} : [\alpha, \beta] \to M$ con $\alpha < \beta$ cuya derivada $\bar{x}'$ es acotada, distinta de cero en su dominio y continua en todo $[\alpha, \beta]$, excepto tal vez en un número finito de puntos. El conjunto de todos los arcos suaves por pedazos se denota por Ω y $\Omega_{[a,b]}$ denota al conjunto de arcos contenidos en Ω que comienzan en el punto a y terminan en b, así como sus respectivas parametrizaciones.

Si $\bar{x} : [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \to M$ es una función inyectiva ($s \neq t \Rightarrow \bar{x}(s) \neq \bar{x}(t)$) se dice que el camino $\bar{x}$ es un *camino simple* y que su correspondiente arco es un *arco simple.* Un arco simple tal que $a = b$ no tiene puntos extremos y está formado únicamente por puntos interiores y se denomina *arco simple cerrado.*

Si $\bar{x} : [\alpha, \beta] \to M$ es un camino en M y $C(a, b)$ su respectivo arco, entonces cualquier restricción de $\bar{x}$ a algún subintervalo $[\alpha', \beta'] \subseteq [\alpha, \beta]$ es un *subcamino* de $\bar{x}$, y su respectiva imagen dirigida $C(\bar{x}(\alpha'), \bar{x}(\beta'))$ es un *subarco* de $C(a, b)$.

Definición 1.5. Una *partición* de un arco $C(a,b)$ es una sucesión $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} = b\}$, con $k \geq 1$ y $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b$, cuyos puntos extremos coinciden con los extremos del arco $C(a,b)$ y cuyos vértices son puntos interiores del mismo. Así, todo arco $C(x_i, x_{i+1}) \subset C(a,b)$ con $i = 0, \ldots, k$, es un *subarco* de la partición y el conjunto de todas las particiones del arco $C(a,b)$ se denota por $P[C(a,b)]$.

Si $\mathcal{P}_1 = \{a, p_1, \ldots, p_k, b\}$ es una partición del arco $C(a,b)$, podemos decir que para cada representación paramétrica $\bar{x} : [\alpha, \beta] \to M$ de $C(a,b)$ existe una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$ dada por $\mathcal{P}_2 = \{\alpha = q_0, q_1, \ldots, q_k, q_{k+1} = \beta\}$ tal que $\bar{x}(q_0) = a, \bar{x}(q_1) = p_1, \ldots, \bar{x}(q_k) = p_k, \bar{x}(q_{k+1}) = b$. Por tanto,

$$\ell(\mathcal{P}_1) = \sum_{i=0}^{k} d(\bar{x}(q_i), \bar{x}(q_{i+1})).$$

La partición *trivial* de un arco $C(a,b)$ se determina por la sucesión trivial $P = \{a = x_0, x_1 = b\}$. Un *refinamiento* de alguna partición P del arco $C(a,b)$ es una partición Q de $C(a,b)$ tal que $Q \subset P$. La *d-longitud* de una partición $P \in P[C(a,b)]$ de un arco $C(a,b)$ es la longitud de la sucesión P con respecto a la función distancia d, denotada por $\ell(P)$ y definida en la ecuación (1.1).

Definición 1.6. La *longitud de un arco dirigido C asociada a una función distancia d* sobre M (o *d-longitud de un arco C*) es un valor real L tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P_ϵ de C tal que $\mid \ell(P) - L \mid < \epsilon$ para todo refinamiento P de P_ϵ.

Denotamos a la d-longitud de un arco $C(a,b)$ por $\ell[C(a,b)]$. Si $\ell[C(a,b)]$ es finita, se dice que $C(a,b)$ es *d-rectificable.* Si la d-longitud de un arco existe, entonces es única y decimos que $C(a,b)$ es un arco de *mínima d-longitud* si es rectificable y su d-longitud es menor o igual a la d-longitud de cualquier otro arco que va de a a b. Todo subarco de un arco de mínima d-longitud es un arco de mínima d-longitud.

La definición 1.6 nos permite deducir la existencia de ciertos arcos dirigidos, llamados *arcos conservativos* que básicamente podemos ver como una generalización de los segmentos de línea recta en $\mathbb{R}^n$. La propiedad de identidad que se le pide a la función distancia d es suficiente para determinar que dichos arcos cumplen con la *forma simple de la igualdad del triángulo* (o condición de *conservación de la distancia* d). Intuitivamente, la definición de arco conservativo se apega a la idea de que la distancia entre dos puntos con la métrica euclidiana es igual a la suma de las distancias entre puntos consecutivos a lo largo del segmento de recta que los une. Se tiene entonces la siguiente definición.

Definición 1.7. Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una función distancia. Decimos que un arco $C(a,b)$ es un *arco d-conservativo* si todas sus particiones tienen la misma d-longitud. Equivalentemente, $C(a,b)$ es un arco d-conservativo si la d-longitud de cada una de sus particiones $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} = b\}$ con $k \geq 0$, es igual a la d-distancia de a a b, es decir,

$$d(a,b) = \sum_{i=0}^{k} d(x_i, x_{i+1}), \text{ para toda } P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} = b\} \in P[C(a,b)].$$

Así, todo arco d-conservativo que va de a a b satisface la siguiente propiedad: la d-distancia de a a b es igual a la suma de las d-distancias entre todos los puntos consecutivos de cualquier sucesión de puntos sobre el arco, donde cada sucesión contiene a los puntos extremos a y b. Por tanto, todo arco d-conservativo $C(a,b)$ es d-rectificable y su d-longitud es igual a la d-longitud de su partición trivial (es decir, $\ell[C(a,b)] = d(a,b)$). Es inmediato que todo subarco de un arco d-conservativo es un arco d-conservativo.

Además, decimos que un arco $C(a,b)$ es un *arco geodésico con respecto a una función distancia d (o arco d-geodésico) sobre* M si éste es rectificable y su longitud con respecto a la función distancia d es al menos tan pequeña como la longitud con respecto a d de cualquier otro arco que va de a a b. Los arcos d-geodésicos se pueden caracterizar por la siguiente condición algebraica: cualquier triada de puntos x, y, z sobre un arco d-geodésico C satisface la igualdad del triángulo $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$. De forma alternativa podemos definir a los arcos d conservativos de la siguiente manera: $C(a,b)$ es un arco d-conservativo si y solo si se satisface la forma simple de la igualdad del triángulo con respecto al punto extremo b:

$$d(\bar{x}(s), b) = d(\bar{x}(s), \bar{x}(t)) + d(\bar{x}(t), b) \text{ para todo } s \in [\alpha, \beta] \text{ y para todo } t \in [s, \beta] \tag{1.2}$$

donde $\bar{x} : [\alpha, \beta] \to M$ es una representación paramétrica de $C(a,b)$. Equivalentemente tenemos

$$d(\bar{x}(s), \bar{x}(z)) = d(\bar{x}(s), \bar{x}(t)) + d(\bar{x}(t), \bar{x}(z)) \text{ para } \alpha \le s \le t \le z \le \beta. \tag{1.3}$$

Esta última ecuación expresa la igualdad del triángulo para cualesquiera tres puntos ordenados sobre un arco $C(a,b)$.

Decimos que una función distancia d es *completa* si para todo par de puntos $a, b \in M$ existe un arco d-conservativo C^1 por pedazos que los conecta. Si una función distancia d es completa, entonces toda partición de un arco $C(a,b)$ d-rectificable tiene asociada una *d-poligonal inscrita* formada por arcos d-conservativos, cada uno de los cuales conecta dos puntos consecutivos de la partición. Por lo tanto, la d-longitud de la d-poligonal de un arco $C(a,b)$ d-rectificable es igual al límite de la d-longitud de la d-poligonal d-rectificable inscrita en $C(a,b)$.

La expresión para calcular la longitud de un arco $C(a,b)$ en un espacio euclidiano, dada por $\ell(C(a,b)) = \sup\{\ell(P) \ \mid P \in P[C(a,b)]\}$, es aplicable a cualquier función distancia d que satisface la desigualdad del triángulo. Si d no satisface la desigualdad del triángulo, esta expresión no es válida.

1.1. Funcional d-longitud.

En esta seción obtenemos, a partir de la definición 1.6, una fórmula para calcular la longitud de arco asociada a una función distancia d. También se demuestra que si la derivada direccional unilateral F de una función distancia d es continua, entonces d satisface la desigualdad del triángulo si y solo si F es convexa. Es decir, si una función distancia d es convexa, entonces el camino más corto entre dos puntos es el segmento de línea recta que los conecta. Así, cuando la función F no es convexa, el camino más corto es un camino poligonal inscrito en el arco que conecta a los dos puntos.

Decimos que una función $f : M \to \mathbb{R}$ tiene *derivada direccional unilateral* en el punto $x \in M$ con respecto a $v \in T_xM$ si y solo si el siguiente límite existe sobre el conjunto de los números reales extendidos:

$$D^+f(x;v) = \lim \frac{f(\sigma(t)) - f(x)}{t},$$

donde $\sigma : [0,1] \to M$ es un camino en M con $\sigma(0) = x$ y $(d\sigma(t)/dt)(0) = v$. Se puede demostrar directamente que $D^+f(x;v)$ es homogénea positiva de grado uno en el argumento v, es decir, $D^+f(x;\alpha v) = \alpha D^+(x;v)$ para todo $\alpha > 0$ y todo $x \in M$. Entonces D^+f es independiente de la representación paramétrica de la curva σ. El segundo argumento de $D^+f(x;v)$ se conoce como la *dirección* en el punto $x \in M$, pues $v \in T_xM\backslash\{0\}$.

Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una función distancia sobre M. La *derivada direccional unilateral* de d en el punto $x \in M$ con respecto a una dirección $v \in T_xM\backslash\{0\}$ se define como el límite

$$F(x,v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{d(x,\sigma(t))}{t},$$

si éste existe. Por la propiedad de identidad de d, $F(x,v)$ es

$$F(x,v) := \lim_{t\to 0^+} \frac{d(x,\sigma(t))}{t} \text{ para todo } x \in M, v \in T_xM\backslash\{0\}, \tag{1.4}$$

donde $\sigma : [0,1] \to M$ es un camino en M tal que $\sigma(0) = x$ y $(d\sigma/ds)(0) = v$. La función $F : TM \to \mathbb{R}$ dada por la ecuación (1.4) evaluada en el punto x y en la dirección de v se denota por $F(x,v)$ y la función F a lo largo de un camino $\bar{x} : [\alpha,\beta] \to M$ se denota por $F(\bar{x}(s),\dot{\bar{x}}(s))$ y está dada por

$$F(\bar{x}(s),\dot{\bar{x}}(s)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{d(\bar{x}(s),\bar{x}(s+t))}{t} \tag{1.5}$$

La ecuación $F : TM \to \mathbb{R}$ dada por (1.4) es homogénea positiva de grado uno en su segundo argumento, es decir, $F(x,\alpha v) = \alpha F(x,v)$ para toda $\alpha > 0, x \in M$ y $v \in T_xM\backslash\{0\}$.

Definición 1.8. Una función $F : TM \to \mathbb{R}$ es *convexa en el punto* $x \in M$ si para todo $v, w \in T_xM$ y $\alpha \in [0,1]$,

$$F(x, \alpha v + (1-\alpha)w) \leq \alpha F(x,v) + (1-\alpha)F(x,w).$$

Considerando que la función $F(x,u)$ es homogénea positiva de orden uno en u, entonces F es convexa en x si y solo si $F(x, v+w) \leq F(x,v) + F(x,w)$ para todo $v, w \in T_xM\backslash\{0\}$. Así, la propiedad C) definida en la Introducción nos permite definir la convexidad de F en la dirección de algún vector $v \in T_xM\backslash\{0\}$.

Definición 1.9. Sea $F(x,u)$ una función homogénea positiva de orden u. Decimos que F es *convexa en* $x \in M$ *en la dirección de* $v \in T_xM\backslash\{0\}$ (o también podemos decir que la dirección de v es una *dirección convexa de* F), si

$$u + w = v \text{ implica } F(x,v) \leq F(x,u) + F(x,w) \text{ para todo } u, w \in T_xM\backslash\{0\}.$$

Si F es convexa en la dirección de v, entonces, por la propiedad C), F es convexa en la dirección αv, con $\alpha > 0$. Decimos que la convexidad de F en x en la dirección de v es *estricta* si $F(x,v) < F(x,u) + F(x,w)$ para todo $u, w \in T_xM\backslash\{0\}$ tales que $u + w = v$ y $u \neq \alpha w, \alpha > 0, u \neq 0, w \neq 0$. Cuando la convexidad de F en la dirección de v no es estricta decimos que se trata de *convexidad débil.* Así, si F es *(estrictamente) convexa* significa que F es (estrictamente) convexa en todo punto $x \in M$ y para todo vector $v \in T_xM\backslash\{0\}$.

Ahora se determinará la d-longitud de un arco d-rectificable $C(a,b)$ clase C^1 por pedazos en términos de la función derivada direccional unilateral F de d. Supongamos que $F(x,v)$ es una función continua sobre su dominio, entonces $F(\bar{x}(s), \dot{\bar{x}}(s))$ es una función continua y acotada sobre $[\alpha, \beta]$ y por lo tanto integrable, para todo arco $C(a,b)$ de clase C^1, además, el arco $C(a,b)$ es d-rectificable.

Teorema 1.1. ***(Funcional longitud de arco).*** *La longitud de arco asociada a una función distancia* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *está dada por*

$$\ell[C(a,b)] = \int_{\alpha}^{\beta} F(\bar{x}(s), \dot{\bar{x}}(s))ds \text{ para todo } C(a,b) \in \Omega \tag{1.6}$$

si y solo si $F : TM \to \mathbb{R}$ *es continua y es la derivada direccional unilateral de* d *dada por la ecuación (1.4), donde* $\bar{x} : [\alpha, \beta] \to M$ *es una representación paramétrica de clase* C^1 *del arco* $C(a,b)$.

Considerando que la función F en (1.6) no depende explícitamente del parámetro s y que F es homogénea positiva de grado uno en su segundo argumento, se sigue que $F(\bar{x}(s), \dot{\bar{x}}(s))ds$ es invariante bajo cualquier transformación del parámetro s, y por tanto la d-longitud de cualquier arco $C(a,b)$ es independiente de la representación paramétrica de la curva.

Teorema 1.2. *Sea* d *una función distancia sobre* M *y sea* $F : TM \to \mathbb{R}$ *la derivada direccional unilateral de* d*. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

a) *Si* d *satisface la desigualdad del triángulo (es decir,* d *es una premétrica), entonces* F *es una función convexa.*

b) *Si* F *es una función convexa y continua, entonces la función distancia* d *es una premétrica y está dada por*

$$d(a,b) = \min_{x \in \Omega_{[a,b]}} \int_{\alpha}^{\beta} F(\bar{x}(s), \dot{\bar{x}}(s))ds, \text{ para todo } a, b \in M, \dot{\bar{x}}(s) \in T_xM\backslash\{0\}, \tag{1.7}$$

donde $\bar{x} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *es una representación paramétrica del arco* $C(a,b)$ *que es de clase* C^1 *por pedazos.*

Demostración. Se encuentra en Sánchez Larios [25]. □

En la geometría de Finsler, la longitud de arco en una variedad M está dada por la ecuación (1.6) y la función distancia está definida mediante la expresión (1.7) donde F es estrictamente convexa, no negativa, homogénea positiva de grado uno en su segundo argumento y de clase C^∞ sobre $TM\backslash\{0\}$ (ver [4], p.1). Busemann y Mayer (ver [3], p. 186) probaron que bajo estas condiciones la función F es la derivada direccional unilateral de d dada por la ecuación (1.4).

La fórmula para calcular la longitud de arco en $\mathbb{R}^n$,

$$\ell[C(a,b)] = \int_\alpha^\beta \parallel \dot{x}(s) \parallel ds, \tag{1.8}$$

se puede obtener como un caso particular de la ecuación (1.6). Supongamos que d es una función distancia sobre $\mathbb{R}^n$ tal que para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $d(a,b) = d(0, b-a) = \parallel b-a \parallel$, donde $\parallel \bullet \parallel$ denota la norma usual en $\mathbb{R}^n$. Esta condición se satisface si d es invaritante bajo traslaciones (es decir, $d(a+c, b+c) = d(a,b)$, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}^n$) y es no negativa. Se sigue de la expresión (1.4) que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{d(\bar{x}(s), \bar{x}(s+t))}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\parallel (\bar{x}(s), \bar{x}(s+t)) \parallel}{t} = \lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{(\bar{x}(s), \bar{x}(s+t))}{t} \right\| = \|\dot{\bar{x}}(s)\|$$

y sustituyendo el resultado en la ecuación (1.6), obtenemos (1.8).

Nótese que el valor de la derivada direccional unilateral $F(x,v)$ es el límite de la razón de cambio entre la distancia del punto $x \in M$ a un punto cercano y la dirección $v \in T_xM$ que emana desde x. Esta interpretación de F como la derivada direccional unilateral de la función distancia d surge en algunas aplicaciones (ver e.g. [4] y [3]) donde d se puede referir a energía gastada, tiempo de recorrido, o costo de recorrido, etc.

1.2. Longitud de un arco asociada a una función distancia d.

Una función distancia cuya función fundamental es acotada y continua salvo en un número finito de puntos (por tanto integrable) determina una funcional[1] sobre el conjunto de arcos suaves por pedazos, la cual a cada arco suave le asocia un número real denominado *d-longitud de arco*. Esta funcional es aditiva con respecto a la concatenación de arcos en el sentido de que la d-longitud de un arco se puede descomponer como la suma de las d-longitudes de los subarcos que lo componen.

A continuación se muestra que la d-longitud de un arco d-conservativo es igual a la d-distancia entre sus extremos. Además, se dan condiciones suficientes para que una función distancia d sea completa, es decir, para que induzca al menos un arco por cada par ordenado de puntos.

[1]Una *funcional* es una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

Teorema 1.3. *Una función distancia* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *cuya función fundamental* F *es una función acotada y continua salvo en un número finito de discontinuidades determina una funcional* $\ell_d : \Omega \to \mathbb{R}$ *sobre el conjunto* Ω *de arcos suaves por pedazos, dada por:*

$$\ell_d[C(a,b)] = \int_\alpha^\beta F(\bar{x}(s), \dot{\bar{x}}(s))ds, \ \textit{para todo arco } C(a,b) \in \Omega. \tag{1.9}$$

El valor de esta funcional asociada a algún arco d-conservativo $C(a,b)$*, es igual a la d-distancia entre sus extremos, es decir,* $d(a,b) = \ell_d[C(a,b)]$*.*

Demostración. Se encuentra en Sánchez Larios [25] □

Capítulo 2

Construcción de la métrica fechneriana

Intuitivamente el escalamiento de Fechner es un método para calcular distancias entre estímulos a partir de la probabilidad con la que cada uno de estos estímulos puede ser diferenciado (o distinguido) de otro estímulo infinitamente cercano a él. Dzhafarov y Colonius en su teoría desarrollaron una *métrica a partir de la probabilidad de diferenciación* en un espacio continuo de estímulos de dimensión arbitraria.

En este capítulo desarrollamos de manera general la teoría del escalamiento fechneriano, así como sus fundamentos matemáticos y establecemos el significado operacional de los principales conceptos e hipótesis.

2.1. Teoría de Fechner.

Lo que motivó esta teoría es la creencia de que la distancia calculada a partir de la probabilidad de diferenciación debería tener un estatus fundamental entre la medida del comportamiento, pues la diferenciación entre estímulos se considera una función cognitiva básica y la probabilidad de diferenciación se considera una medida universal de diferenciabilidad.

Los resultados obtenidos a partir de esta teoría están basados en el contorno que forman las funciones psicométricas dentro de pequeñas vecindades escogidas de forma arbitraria alrededor de los puntos donde las funciones alcanzan su valor mínimo. Una función psicométrica muestra la probabilidad con la cual cada estímulo (de comparación) es diferenciado de un estímulo fijo (de referencia) en un espacio de estímulos. En este trabajo no desarrollamos ningún procedimiento empírico para obtener funciones psicométricas, ni discutimos los mecanismos psicológicos hipotéticos que se toman en cuenta al decidir el procedimiento a utilizar. Por otro lado, en el presente nivel de abstracción, una función psicométrica es considerada como una primitiva del escalamiento fechneriano y asumimos que cumple con tres condiciones esenciales que desarrollaremos más adelante.

2.2. Espacio de estímulos y caminos dirigidos.

La métrica fechneriana se puede construir fácilmente si consideramos que un espacio de estímulos es una variedad diferenciable, pues no podemos encontrar una situación en la que la siguiente y más especializada definición, no sea suficiente.

Definición 2.1. Un *espacio de estímulos* es una variedad diferencable $M \subseteq \mathbb{R}^n$ (es decir, un espacio que localmente se parece a $\mathbb{R}^n$) arco conexa dotada con una topología convencional (digamos, la inducida por la métrica Euclidiana[1]). Los puntos en M son vectores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cuyas coordenadas representan las dimensiones físicas de los estímulos.

En la figura 2.1 se ilustra el espacio de estímulos.

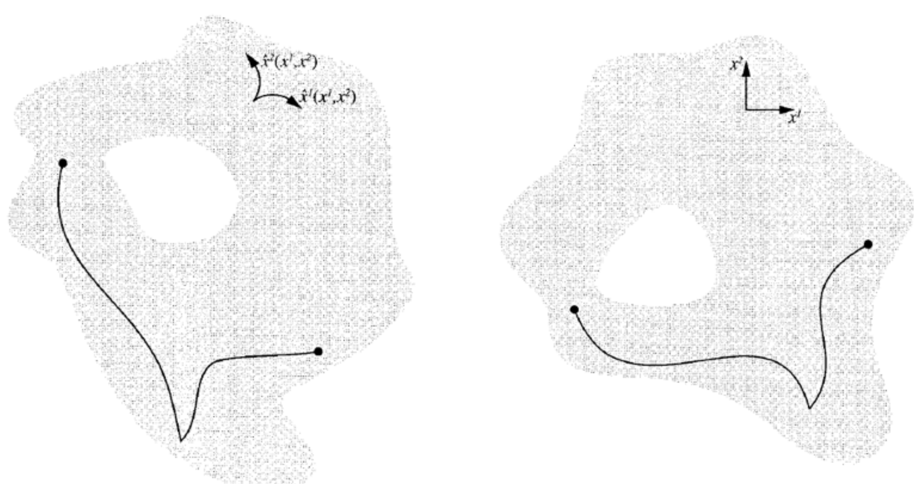

Figura 2.1: Transformación difeomórfica en un espacio de estímulos junto con una trayectoria de un camino orientado.

[1]Es decir, la convergencia de los puntos en el espacio de estímulos se puede definir a través de una distancia Euclidiana que tiende a cero, es decir, una sucesión $x_k \to x, k = 1, \ldots$, si y solo si $\mid x_k - x \mid \to 0$, donde $\mid \circ \mid$ denota la norma Euclidiana o equivalentemente $x_k \to x$ si y solo si $\text{máx}_{i=1,\ldots,n}(\mid x_k^i - x^i \mid) \to 0$.

Definición 2.2. Un *difeomorfismo* $\hat{x}(x)$ es una transformación inyectiva, continuamente diferenciable cuya inversa $x(\hat{x})$ también es continuamente diferenciable, además, el Jacobiano de un difeomorfismo es distinto de cero, es decir, $\det\left[\dfrac{\partial \hat{x}}{\partial x}\right] \neq 0$.

La manera en que se escoja la dimensión de los estímulos es subjetiva, pues cualquier transformación difeomórfica del espacio de estímulos M se considera una reparametrización equivalente de M. Por lo tanto, la métrica fechneriana que vamos a construir es invariante bajo cualquier transformación difeomórfica. Como se muestra más adelante, la invarianza resulta inmediata, pues los valores de las funciones psicométricas definidas sobre un espacio de estímulos permanece invariante.

Definición 2.3. Un *camino* en M, de un estímulo $a \in M$ a un estímulo $b \in M$, es una función continua $\bar{x} : [\alpha, \beta] \to M$ donde $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ son tales que $\bar{x}(\alpha) = a$ y $\bar{x}(\beta) = b$ cuya tangente $\dot{x}(t)$ también es continua y no se anula en ningún intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de alguna partición finita $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots, < t_n = b\}$, donde $n \in \mathbb{N}$.

La imagen dirigida del camino $\bar{x} : [\alpha, \beta] \to M$ se conoce como *arco* o *curva* que conecta a con b y se denota $C(a, b)$. Decimos que M es una variedad arco conexa si cualquier par de puntos en este espacio de estímulos se puede conectar mediante un camino dirigido completamente contenido en M. Para efectos de este trabajo, cuando mencionemos el término arco nos referimos a un arco dirigido.

Un camino $z(\tau)_{\alpha_1}^{\beta_1}$ tal que $z[\tau(t)] = x(t)$, donde $\tau(t)$ es un difeomorfismo de $[\alpha, \beta] \to [\alpha_1, \beta_1]$ con $\dot{\tau}(t) > 0$, se considera una reparametrización equivalente a $x(t)_{\alpha}^{\beta}$. Así, tanto los caminos como sus respectivas representaciones paramétricas son invariantes bajo transformaciones difeomórficas del espacio M.

Decimos que $C(a, b)$ es un *arco* de clase C^1 si la derivada $\dot{x}$ de su representación paramétrica $x : [a.b] \to M$ es continua y acotada en el intervalo $[a, b]$. Denotamos por Ω al conjunto de todos los arcos C^1 por pedazos en M. Por simplicidad, denotamos al conjunto de arcos C^1 por pedazos que conectan a con b y a sus respectivas representaciones paramétricas por $\Omega_{[a,b]}$.

Dados dos vectores u y v en un espacio de estímulos M decimos que son *vectores codireccionales* si $u = \lambda v$, con $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$.

2.3. Espacio tangente.

La teoría fechneriana hace uso prominente de las transiciones de un estímulo x a un estímulo $x + us$, $u \neq 0$, en otras palabras, del desplazamiento de un estímulo x en la *dirección* de $u = (u_1, \ldots, u_n)$, con $s > 0$ suficientemente pequeña[2]. Esta transición corresponde a un incremento

[2]Llamar a *s magnitud de cambio de un estímulo* es un tanto sutil, pues observamos que, si las correspondientes componentes x y u se miden con las mismas unidades, s no tiene unidades. Observamos también que si u_1 y u_2 son

infinitesimal en la función psicométrica cuyo punto mínimo coincide con el estímulo original.

Como se estableció en la sección anterior, cualquier transformación difeomórfica de un espacio de estímulos M es considerada equivalente a M. Por lo que necesitamos saber cómo se determina la dirección de una transición del punto x al punto $x + us$ bajo una transformación difeomórfica.

Sea $\hat{x} = \hat{x}(x)$ dicha transformación[3], entonces

$$\hat{x}(x + us) = \hat{x}(x) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} us + o\{s\}. \tag{2.1}$$

donde la matriz Jacobiana de $\hat{x} = \hat{x}(x)$ es

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \right\}_{i,j=1,\ldots,n}$$

y u se considera un vector columna denotado por

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \times u. \tag{2.2}$$

Si bajo alguna una transformación difeomórfica $x \to \hat{x}$, un vector director $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ se transforma en un vector $\hat{u}$ de acuerdo a la ecuación (2.2), entonces u se conoce como vector *contravariante* asociado a $x \in M$.

Definición 2.4. El *espacio tangente* o *espacio de direcciones* asociado a x es el conjunto que contiene a todos los vectores contravariantes asociados a x y se denota por T_xM. Al conjunto $TM := \cup_{x \in M} T_xM$ se le conoce como *frontera tangente* de M. Además, cada elemento de TM se denota por (x, v), donde $x \in M$ y $v \in T_xM$.

El espacio tangente se ilustra en la figura 2.2. Cualquier pareja compuesta por un estímulo y una dirección (x, u) forman un *segmento lineal* del punto x en la dirección de u que representa el desplazamiento de x a $x + us$, cuando $s \to 0^+$. Al decir que x se desplaza en la dirección de u, queda implícito que $u \neq 0$.

2.4. Funciones psicométricas.

Para continuar con el desarrollo de la métrica fechneriana se requiere definir una función de probabilidad que sirve para diferenciar un estímulo (fijo) de otro estímulo (de referencia), dicha función se denomina *función psicométrica* y se define a continuación.

codireccionales, se consideran vectores directores diferentes y el cambio de x en la dirección u_1 y u_2 por un mismo factor s implican diferentes cambios que representan diferentes estímulos.

[3]El término $o\{s\}$ en (2.1) denota una cantidad de orden inferior al infinitesimal cuando $s \to 0^+$, en otras palabras, $o\{s\}/s \to 0$ cuando $s \to 0^+$.

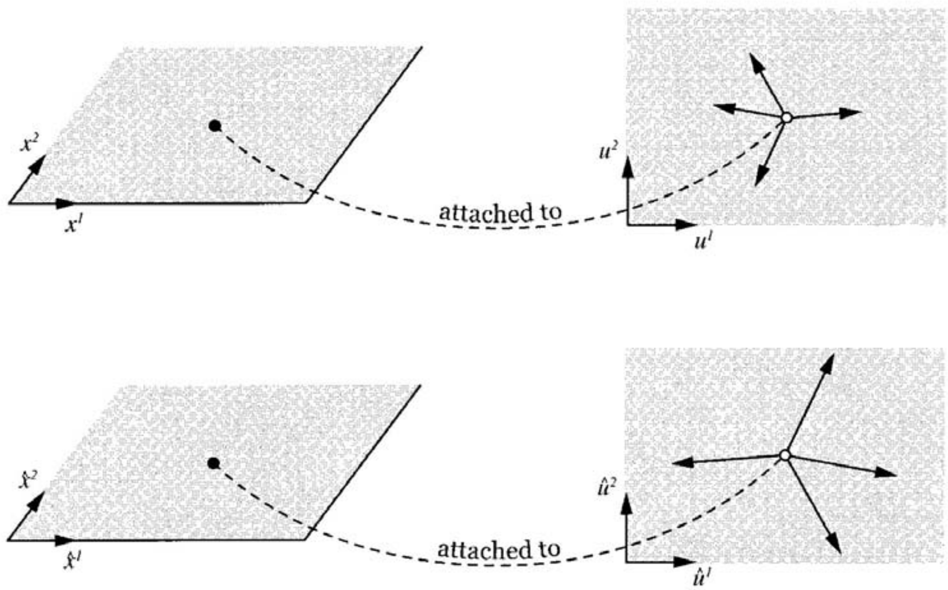

Figura 2.2: (Arriba) Un punto en un espacio de estímulos y el espacio tangente asociado a él. (Debajo) Mismo espacio bajo una transformación difeomórfica.

Definición 2.5. Una *función psicométrica* es una función $\Psi : M \times M \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x, y \in M$,

$$\Psi_x(y) \ = \mathbb{P}[y \text{ es diferenciado de } x]. \tag{2.3}$$

Podemos notar que el estímulo de *referencia* x representa un parámetro de la función psicométrica, mientras que el estímulo de *comparación* y es un argumento. En ocasiones, abusando del lenguaje, $\Psi_x(y)$ denota al conjunto de funciones psicométricas, es decir,

$$\{\Psi_x(y)\}_{x \in M}$$

vista como una sola función de x y y.

En la teoría del escalamiento de Fechner propuesta por Dzhafarov y Colonius ([8], [9]) se requiere que la función psicométrica Ψ cumpla las siguientes tres condiciones:

Primera

La primera condición acerca de las funciones psicométricas es que $\Psi_x(y)$ sea continua en (x, y), no negativa y que para todo x alcanza su mínimo global en algún punto difeomórfico $y = h(x) \in M$ asociado a x, en una vecindad donde $\Psi_x(y)$ es creciente en todas las direcciones, como se ilustra en la figura 2.3. En otras palabras, podemos encontrar una vecindad alrededor de $h(x)$ dentro de la cual, para todo $u \in T_xM$, la diferencia

$$\Psi_x[h(x) + us] - \Psi_x[h(x)]$$

incrementa cuando $s > 0$ y $\Psi_x(y)$ no cuenta con otro punto mínimo (no se asume que el mínimo nivel de una función psicométrica debe ser el mismo para diferentes estímulos de referencia).

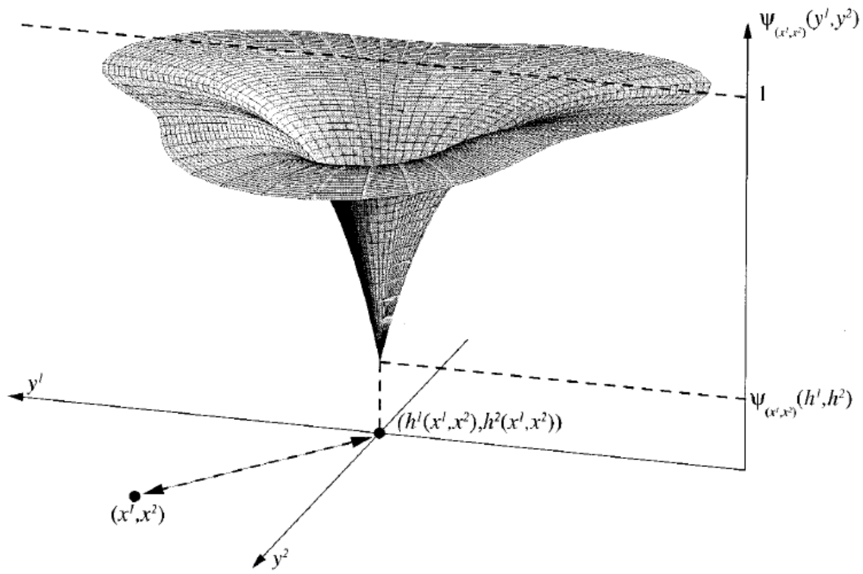

Figura 2.3: Posible apariencia de una función psicométrica.

A la diferencia $h(x) - x$ se le conoce (en el caso unidimensional) como *error constante* de diferenciación, mientras que $h(x)$ se considera *el punto de igualdad subjetiva* para el estímulo de referencia x.

Así, la primera condición que deben cumplir las funciones psicométricas se puede formular como sigue: $\Psi_x(y)$ es continua en (x, y) y para algún x dado alcanza su mínimo global en $y = x$ dentro de alguna vecindad donde la función es creciente en todas las direcciones.

En ocasiones podemos requerir adicionalmente que la función psicométrica sea una curva suave (aunque en este trabajo no es necesario). Dicha restricción significa que el incremento en el valor de la función psicométrica a partir del punto mínimo,

$$\Psi_x(x + us) - \Psi_x(x), \quad u \neq 0,$$

(una cantidad considerable en el escalamiento fechneriano) sea infinitamente diferenciable en $s > 0$.

Segunda

Antes de formular la segunda condición introduciremos un concepto importante relacionado con los resultados centrales del escalamiento fechneriano.

Definición 2.6. La *diferencial psicométrica* de la función Ψ en el punto $x \in M$ y en la dirección $u \in T_xM\backslash\{0\}$ es

$$h(x,u) = \Psi_x(x+us) - \Psi_x(x), \quad \text{cuando } s \to 0^+. \tag{2.4}$$

Esto es, la derivada direccional por la derecha en el punto mínimo de la función psicométrica $\Psi_x(y)$ en la dirección de u. Esta diferencial se desvanece cuando $s = 0$ y por la primera condición es continuamente creciente como función de $s > 0$, al menos en un intervalo de valores suficientemente pequeño para s. Denotamos a esta función por $\Phi^{-1}_{x,u}(s)$ y así, obtenemos la identidad

$$\Phi_{x,u}[\Psi_x(x+us) - \Psi_x(x)] = s$$

para $s \geq 0$ suficientemente pequeña. Llamamos a

$$s = \Phi_{x,u}(h), \text{ cuando } h \to 0^+, \tag{2.5}$$

diferencial del estímulo en (x,u).

De esta manera la segunda condición es la existencia de una transformación continua $\Phi : [0,\epsilon) \to [0,\infty)$, con $\Phi(0) = 0$ tal que, para alguna pareja fija (x_0,u_0) y una arbitraria (x,u), las diferenciales $\Phi_{x,u}(h)$ y $\Phi_{x_0,u_0}(h)$ son *asintóticamente proporcionales*, es decir, cumplen la siguiente propiedad:

$$0 < \lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi_{x_0,u_0}(h)}{\Phi_{x,u}(h)} < \infty, \tag{2.6}$$

y mas aún, el coeficiente de proporcionalidad asintótica (es decir, el valor del límite) es continuo en (x,u).

La importancia fundamental de la segunda condición del escalamiento fechneriano se encuentra en el hecho de que la ecuación (2.6) implica que el siguiente límite existe para todo $x \in M$ y $v \in T_xM\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0^+} \frac{\Phi_{x_0,u_0}(h)}{\Phi_{x,u}(h)} &= \lim_{s\to 0^+} \frac{\Phi_{x_0,u_0}[\Psi_x(x+us) - \Psi_x(x)]}{\Phi_{x,u}[\Psi_x(x+us) - \Psi_x(x)]} \\ &= \lim_{s\to 0^+} \frac{\Phi_{x_0,u_0}[\Psi_x(x+us) - \Psi_x(x)]}{s} \end{aligned}$$

renombrado Φ_{x_0,u_0} por Φ, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$F(x,u) := \lim_{s\to 0^+} \frac{\Phi[\Psi_x(x+us) - \Psi_x(x)]}{s}, \text{ para todo } x \in M, u \in T_xM\backslash\{0\}, \tag{2.7}$$

donde la transformación Φ es única para todo x y u. La función dada por (2.7) se conoce como *función métrica de Fechner-Finsler* asociada a Φ y es una función continua y positiva.

La función dada por la ecuación (2.7) y la función Φ se determinan de forma única. Es fácil ver que para preservar la ecuación 2.7 podemos multiplicar $F(x,u)$ por alguna constante $k > 0$ y sustituir a Φ por una función asintóticamente equivalente multiplicada por el mismo valor k. En efecto, si se satsiface la ecuación (2.7) junto con el siguiente límite,

$$F^*(x,u) = \lim_{s\to 0^+} \frac{\Phi^*[\Psi_x(x+us) - \Psi_x(x)]}{s},$$

entonces
$$\frac{F^*(x,u)}{F(x,u)} = \lim_{s\to 0^+} \frac{\Phi^*[\Psi_x(x+us)-\Psi_x(x)]}{\Phi[\Psi_x(x+us)-\Psi_x(x)]} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi^*(h)}{\Phi(h)} = k$$
para alguna $k > 0$. Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. ***(Teorema fundamental del escalamiento fechneriano)***. *Existe una transformación $\Phi(h)$ continuamente creciente para valores de $h \geq 0$ suficientemente pequeños que se anula cuando $h = 0$ e implica que todas las diferenciales psicométricas $\Psi_x(s+us) - \Psi_x(x)$ sean asintóticamente equivalentes en el límite, cuando $s \to 0^+$, es decir,*

$$\Phi[\Psi_x(x+us)-\Psi_x(x)] = F(x,u)s + o\{s\}, s \to 0^+, \tag{2.8}$$

donde $F(x,u) > 0$ es continua. Además, $F(x,u)$ se determina de forma única y $\Phi(h)$ de forma asintóticamente única (cuando $h \to 0^+$) salvo la multiplicación por una constante arbitraria $k > 0$. Esto es, cualquier sustitución de $F(x,u)$ y $\Phi(h)$ están dadas por

$$F^*(x,u) = kF(x,u) \tag{2.9}$$

$$\Phi^*(h) = k\Phi(h) + o\{\Phi(h)\}, \quad h \to 0^+$$

Llamamos a Φ *transformación global psicométrica* de un espacio de estímulos M; éste es otro concepto central en la teoría del escalamiento fechneriano relacionado con el contorno de las funciones psicométricas, pues esta transformación permite que el incremento de las funciones psicométricas entre dos estímulos cercanos sea *asintóticamente equivalente*, término que se define a contiuación.

Tercera

La tercera condición que deben cumplir las funciones psicométricas es que, para cualquier estímulo $x \in M$ y una dirección $u \in T_xM$, las diferenciales de ambos estímulos $\Phi_{x,u}(h)$ y $\Phi_{x,-u}(h)$ sean *asintóticamente equivalentes*, es decir,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi_{x,u}(h)}{\Phi_{x,-u}(h)} = 1, \tag{2.10}$$

lo que es equivalente a
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi(h)}{\Phi_{x,u}(h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi(h)}{\Phi_{x,-u}(h)}$$
y por el teorema fundamental del escalamiento fechneriano tenemos,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi(h)}{\Phi_{x,\pm u}(h)} = \lim_{s\to 0^+} \frac{\Phi[\Psi_x(x \pm us)-\Psi_x(x)]}{s} = F(x, \pm u),$$
por lo tanto, para toda pareja (x,u) podemos concluir que (2.10) es equivalente a

$$F(x,u) = F(x,-u). \tag{2.11}$$

Claramente, la ecuación (2.11) es equivalente a

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\Psi_x(x+us)-\Psi_x(x)}{\Psi_x(x-us)-\Psi_x(x)} = 1. \tag{2.12}$$

La tercera condición establece que la métrica fechneriana es simétrica, es decir, la distancia fechneriana desde el punto a hasta el punto b es igual a la distancia fechneriana desde b hasta a. Como se mencionó anteriormente $F(x,u) = F(x,-u)$, para todo $x \in M$ y $u \in T_xM \backslash \{0\}$.

En este trabajo no requerimos la tercera condición (de hecho, esta condición fue abandonada por Dzhafarov [5]), pues todos los resultados se derivan de la primera y segunda condición a menos de que se especifique lo contrario.

2.4.1. Propiedades de una función métrica.

Interpretamos a la función métrica de Fechner-Finsler $F(x,u)$ como la magnitud del vector director $u \in T_xM$ asociado al estímulo $x \in M$. Podemos notar que esta magnitud se define en el espacio tangente T_xM y no en el espacio de estímulos M.

Por el teorema fundamental del escalamiento fechneriano, sabemos que $F(x,u)$ es positiva y continua y suponiendo la tercera condición tenemos que $F(x,u) = F(x,-u)$. Otra propiedad importante de las funciones métricas es la homogeneidad de Euler que probaremos a continuación.

Teorema 2.2. ***(Homogeneidad de Euler).*** *Para todo $k > 0$ ocurre que,*

$$F(x,ku) = kF(x,u) \tag{2.13}$$

suponiendo la tercera condición, para todo $k \neq 0$ se cumple,

$$F(x,ku) = \mid k \mid F(x,u). \tag{2.14}$$

Demostración. Sea $k > 0$, por el teorema fundamental del escalamiento fechneriano

$$\begin{aligned} F(x,ku) &= \lim_{s \to 0^+} \frac{\Phi[\Psi_x(x+kus) - \Psi_x(x)]}{s} \\ &= \lim_{s \to 0^+} \frac{k\Phi[\Psi_x(x+kus) - k\Psi_x(x)]}{ks} \\ &= k \lim_{ks \to 0^+} \frac{\Phi[\Psi_x(x+uks) - \Psi_x(x)]}{ks} \\ &= k \lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi[\Psi_x(x+ut) - \Psi_x(x)]}{t} \qquad = kF(x,u). \end{aligned}$$

Para $k < 0$ el resultado se obtiene usando la propiedad de simetría, $F(x,u) = F(x,-u)$. □

En el resto del trabajo suponemos que dicha función F satisface las propiedades definidas en la Introducción, A), B), C) y D). Se sigue de las propiedades A) y C) que $F(x,0) = 0$.

Una métrica en la que la distancia entre dos puntos se define como la mínima longitud asociada a alguno de los caminos que conectan a dichos puntos se conoce como *métrica interna (o generalizada) de Finsler*.

En general, cualquier función $\phi(x,u)$ positiva, continua y homogénea, definida sobre un conjunto de segmentos lineales e invariante bajo difeomorfismos en el espacio de estímulos puede considerarse una función métrica, y por el procedimiento que describiremos en la siguiente sección, podemos emplearla para construir una métrica interna.

Para construir la *métrica de Finsler* en sentido estricto, adicionalmente la función métrica debe ser suficientemente suave (i.e., infinitamente diferenciable) y cumplir la siguiente propiedad de regularidad: las cantidades

$$g_{ij}(x,u) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi(x,u)^2}{\partial u^i \partial u^j}, \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

(llamadas *componentes del tensor métrico de Finsler*) forman una matriz positiva definida. Esto último es equivalente a decir que la función sea convexa.

2.5. Métrica fechneriana.

Una vez que hemos definido la función métrica de Fechner-Finsler, a continuación describiremos el procedimiento para construir la métrica de Fechner propuesta por Dzhafarov y Colonius [8].

Como $F(x,u)$ es interpretada como la magnitud del vector director u asociado al estímulo x, podemos emplearla para medir la magnitud del vector tangente $\dot{x}(t)$ en el punto $x(t)$ de algún arco $C(a,b)$ que conecta al estímulo $a = x(\alpha)$ con el estímulo $b = x(\beta)$ en algún espacio de estímulos M. Esta magnitud es $F[x(t),\dot{x}(t)]$ y se obtiene calculando la integral a lo largo del camino,

$$L[C(a,b)] := \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t),\dot{x}(t))dt. \tag{2.15}$$

donde $x : [\alpha,\beta] \to M$ es una representación paramétrica de clase C^1 por pedazos del arco $C(a,b)$, con $\dot{x}(t) \in T_xM\backslash\{0\}$ para todo $t \in [\alpha,\beta]$.

La ecuación (2.15) se conoce como *longitud psicométrica (orientada)* del camino $C(a,b)$ inducida por la métrica de Fechner-Finsler $F(x,u)$ y se denota por $L[C(a,b)]$.

Ya que la función $F[x(t),\dot{x}(t)]$ que acabamos de definir no depende explícitamente del parámetro t y cumple la propiedad de homogeneidad de Euler, se sigue que $F(x(t),\dot{x}(t))dt$ es invariante bajo cualquier transformación del parámetro t, por lo que la longitud de cualquier arco $C(a,b)$ asociado a F es independiente de la representación paramétrica de la curva.

2.5.1. Indicatriz fechneriana.

La construcción descrita en la sección anterior implica que la métrica fechneriana es un caso especial de una métrica interna (o una métrica generalizada de Finsler). Las métricas internas se pueden definir por medio de una función métrica (como fue nuestro caso) o también se pueden definir a través de una *indicatriz*, que es el conjunto de vectores directores u de magnitud unitaria originados en un punto dado x. Veremos que tanto la indicatriz como la función métrica se determinan una a otra de forma única (pues la indicatriz centrada en x se describe mediante la ecuación $F(x, u) = 1$). La introducción de las indicatrices enriquece de forma significativa el análisis de ambas métricas, la interna en general, y la fechneriana en particular.

En el presente contexto, la importancia de la indicatriz radica en que a diferencia de la función métrica de Fechner-Finsler, la indicatriz tiene una interpretación geométrica directamente relacionada con la gráfica de las funciones psicométricas, pues el contorno de la indicatriz centrada en un punto x es similar a una curva de nivel de la función psicométrica $\Psi_x(y)$ realizada a una corta altura de su punto mímimo $\Psi_x(x)$.

Como resultado de lo anterior tenemos una disociación entre la indicatriz de Fechner (y por lo tanto de la funcion métrica) y la transformación global psicométrica: dado un subconjunto compacto de estímulos, la indicatriz fechneriana se puede determinar sin que conozcamos esta transformación (bajo el supuesto de que exista).

Definición 2.7. Dado un estímulo $x \in M$, el conjunto de vectores

$$S_x(F) := \{u \in T_xM\backslash\{0\} \mid F(x, u) = 1\}, \tag{2.16}$$

se conoce como *indicatriz fechneriana* centrada en x y se ilustra en la figura 2.4.

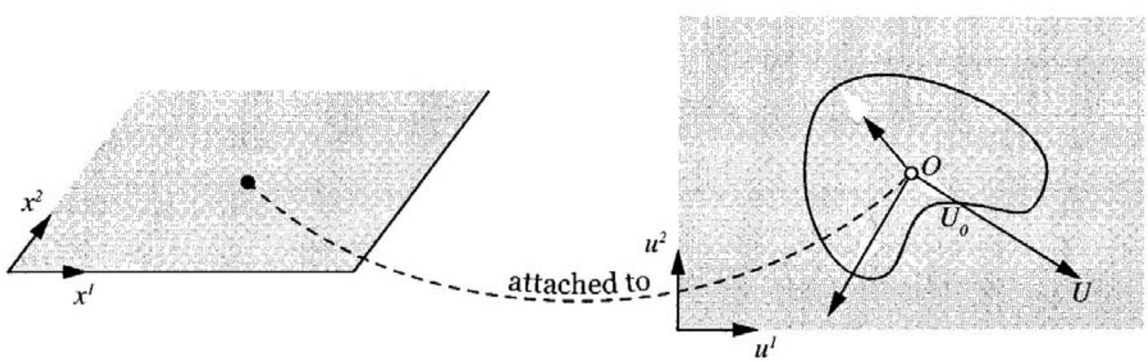

Figura 2.4: Indicatriz fechneriana asociada a un estímulo x.

Es decir, la indicatriz fechneriana centrada en x es el conjunto de vectores tangentes $u \in T_xM\backslash\{0\}$ que satisfacen la ecuación $F(x, u) = 1$. Por lo tanto, la indicatriz $S_x(F)$ es un subconjunto del espacio tangente T_xM y no del espacio de estímulos M.

Este es un concepto central en este trabajo, su importancia radica en la relación que existe entre la métrica fechneriana y la gráfica de las funciones psicométricas.

Por otro lado, los puntos finales de los vectores directores que constituyen a $S_x(F)$ forman un contorno cerrado de dimensión $(n-1)$ en T_xM, recordemos que n es la dimensión del espacio M. Decimos que $S_x(F)$ es cerrado, pues para cualquier vector director $u \in T_xM$ podemos encontrar un único vector codireccional (es decir, $u = \lambda u_0, \lambda > 0$) $u_0 \in S_x(F)$ tal que

$$u \in T_xM \Leftrightarrow \frac{u}{F(x,u)} = u_0 \in S_x(F).$$

En otras palabras, cualquier vector $u_0 \in S_x(F)$ interseca al contorno de $S_x(F)$ en un único punto.

La *función unitaria* $\mathbf{1}_x : T_xM\backslash\{0\} \to S_x(F)$, dada por

$$\mathbf{1}_x(u) = \frac{u}{F(x,u)}, \tag{2.17}$$

mapea cualquier vector $u \in T_xM$ en un vector codireccional que pertenece a $S_x(F)$, además, representa a la indicatriz $S_x(F)$ de forma única. Esta función $\mathbf{1}_x(u)$ se conoce como *función indicatriz fechneriana* centrada en x y podemos observar que $S_x(F)$ es la imagen de la función dada por la ecuación (2.17).

Teorema 2.3. ***(Propiedades de la función indicatriz).*** *La función indicatriz $\mathbf{1}_x(u)$ es continua en (x,u) y*

$$\mathbf{1}_x(ku) = \mathbf{1}_x(u) \tag{2.18}$$

para todo $k > 0$ (y suponiendo la tercera condición, para todo $k \neq 0$).

Demostración. Es inmediata a partir de las propiedades de la función $F(x,u)$. □

Es importante enfatizar que el contorno de la indicatriz $S_x(F)$ no se determina de forma única, sino que lo hace conjuntamente con la posición del centro (el vector nulo) que se encuentra al interior de la frontera de dicho contorno, como se muestra en la figura 2.5. Por lo tanto, la imagen de una función indicatriz $S_x(F)$ es un conjunto que consiste de un contorno de dimensión $(n-1)$ y un punto al interior de la frontera interpretado como el *centro* de la indicatriz $S_x(F)$ asociada al estímulo x. Sin embargo, bajo la tercera condición, el centro de la indicatriz es el baricentro de dicho contorno, pues su posición se determina de forma única al centro del contorno.

Cualquier dibujo, digamos "a mano alzada", de un contorno cerrado alrededor de un punto central no necesariamente determina una indicatriz; también es necesario que cualquier vector que conecta el centro con un punto sobre el contorno de la indicatriz "no sea obstruido", es decir, que el vector no interseca al contorno en ningún otro punto. Esta es una interpretación de la unicidad y continuidad de la función $\mathbf{1}_x(u)$ en u.

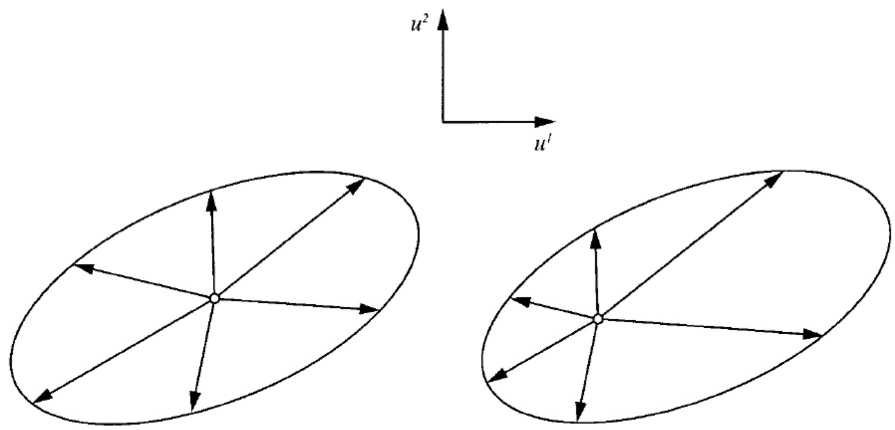

Figura 2.5: Dos indicatrices pueden ser diferentes incluso cuando tienen el mismo contorno.

En el caso unidimensional ($n = 1$), la indicatriz $S_x(F)$ asociada al punto x se reduce a un par de puntos $u_- < 0$ y $u_+ > 0 \in \mathbb{R}^n$ (tales que $u_- = -u_+$, bajo la tercera condición) suponiendo que la coordenada del centro sea el cero.

En la teoría general de las métricas internas (donde la métrica fechneriana es un caso especial) podemos introducir indicatrices $S_x(F)$ como primitivas y después definir la función métrica como se estableció en la ecuación (2.17).

Podemos decir que la indicatriz es una generalización radical de la esfera unitaria Euclidiana, pues la indicatriz de la métrica Euclidiana cuya función métrica correspondiente es la norma Euclidiana convencional es

$$\tilde{F}(x,u) = \mid u \mid$$

y

$$\tilde{\mathbf{1}}_x(u) = \frac{u}{\mid u \mid}.$$

Mas aún, cualquier indicatriz $S_x(F)$ puede ser vista como una transformación homeomórfica de la esfera unitaria Euclidiana,

$$\mathbf{1}_x(u) = \tilde{\mathbf{1}}_x(u) \frac{\mid u \mid}{F(x,u)}.$$

Una consecuencia importante de este simple hecho es que la indicatriz $S_x(F)$, siendo el codominio de $\mathbf{1}_x(u)$, es un conjunto compacto en T_xM.

2.5.2. Longitud psicométrica.

Para cualquier camino $C(a, b)$ el vector tangente $\dot{x}(t) \in T_x M$ existe en cualquier punto, excepto posiblemente en un número finito de valores de t y podemos probar fácilmente que es un vector contravariante asociado a $x(t)$ al derivar $\hat{x}^i[x(t)], i = 1, \ldots, n$. Entonces $\dot{x}(t) \in T_x M_{x(t)}$ y $[x(t), \dot{x}(t)]$ siempre es un segmento lineal. Este segmento lineal determina una parte del camino C entre los puntos $x(t)$ y $x(t + dt) = x(t) + \dot{x}(t)dt$. Se sigue que la función $F[x(t), \dot{x}(t)]$ está bien definida y se interpreta como la longitud del camino C entre los puntos $x(t)$ y $x(t + dt)$.

Por lo tanto, es natural definir una funcional L sobre un conjunto de caminos orientados $C(a, b) \in M$ como sigue:

$$L[C(a, b)] := \int_{\alpha}^{\beta} F[x(t), \dot{x}(t)]dt, \tag{2.19}$$

donde $x : [\alpha, \beta] \to M$ es una representación paramétrica del camino $C(a, b)$. La ecuación (2.19) se conoce como *longitud psicométrica orientada* del camino $C(a, b)$ inducida por la función métrica de Fechner-Finsler $F(x, u)$ o, equivalentemente, por la correspondiente indicatriz fechneriana $S_x(F)$. Observamos que $\alpha < \beta$ pero $x(\alpha)$ puede coincidir con $x(\beta)$.

Debido a la ecuación (2.17) la longitud psicométrica del camino $C(a, b)$ también se puede escribir como:

$$L[C(a, b)] = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{x}(t)}{\mathbf{1}_{x(t)}[\dot{x}(t)]} dt, \tag{2.20}$$

dejándonos la siguiente interpretación (ver figura 2.6). En cada punto $x(t)$ del camino $C(a, b)$ existe una indicatriz fechneriana $S_{x(t)}(F)$ asociada a dicho punto. Esta indicatriz nos permite medir la magnitud del vector tangente $\dot{x}(t) \in T_x M$ con el procedimiento descrito en la sección §2.5. Al integrar a lo largo del camino $C(a, b)$ interpretamos a la magnitud de este vector tangente como la longitud del camino. Como ejemplo familiar, en el caso de la indicatriz Euclidiana obtenemos

$$\tilde{L}[C(a, b)] = \int_{\alpha}^{\beta} \mid \dot{x}(t) \mid dt,$$

que es la longitud Euclidiana del camino $C(a, b)$. El siguiente teorema justifica por qué la funcional L define una longitud.

Teorema 2.4. ***(Propiedades de la longitud psicométrica).***

a) $L[C(a, b)]$ *es un número real positivo para todo* $C(a, b)$*.*

b) Para todo $a < b < c$*,* $L[C(a, c)] = L[C(a, b)] + L[C(b, c)]$*.*

c) $L[C(a, b)]$ *es invariante bajo cualquier reparametrización difeomórfica positiva de* $C(a, b)$*.*

d) $L[C(a, b)]$ *es invariante bajo transformaciones difeomórficas de* M*.*

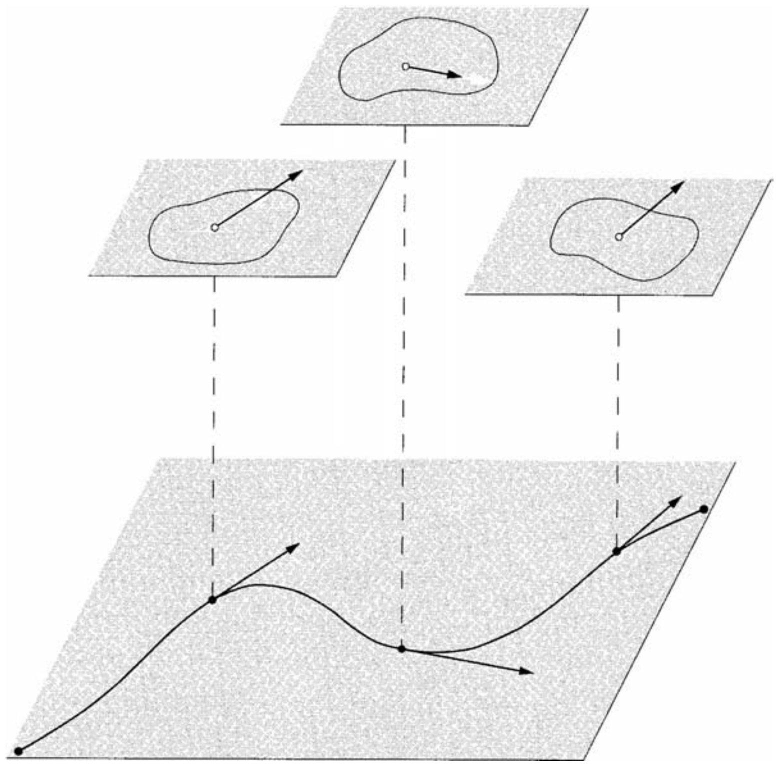

Figura 2.6: La magnitud de un vector tangente tomado en un punto del camino medido por la indicatriz fechneriana asociada a ese punto. La longitud psicométrica del camino es la integral de dicha magnitud a lo largo del camino.

Demostración. Como la función $F(x,u)$ es continua y admite cualquier camino dirigido $C(a,b)$, es decir, su parametrización asociada es $x : [\alpha, \beta] \to M$ y está bien definida, la función $F[x(t), \dot{x}(t)]$ es continua en t, por lo que, la integral en la ecuación (2.19) existe en el sentido de Riemann. Además es positiva pues $\alpha < \beta$. La propiedad de aditividad es inmediata.

La invarianza bajo representaciones difeomórficas positivas $\tau(t)$ se sigue del hecho de que si $z[\tau(t)] = x(t)$, entonces en todos los puntos donde $\dot{x}(t)$ existe, ocurre que

$$F[x(t), \dot{x}(t)]dt = F\left[z(\tau), \frac{d\tau}{dt}\dot{z}(\tau)\right]dt = F[z(\tau), \dot{z}(\tau)]\frac{d\tau}{dt}dt = F[z(\tau), \dot{z}(\tau)]d\tau.$$

Finalmente, la invarianza bajo difeomorfismos del espacio de estímulos se obtiene a partir de las mismas propiedades de $F(x,u)$. $\square$

Como el espacio de estímulos M posee topología convencional que podemos ver como aquella inducida por la métrica Euclidiana en M, es importante entender las restricciones impuestas a la longitud psicométrica de algún camino dentro de una bola Eucldiana, denotada por $B(a,R) \subseteq \mathbb{R}^n$, centrada en a y con radio suficientemente pequeño R, dicha bola debe estar completamente contenida en M, es decir, $B(a,R) \subseteq M$. Dado un camino $C(a,b)$ contenido en una bola $B(a,R)$ ocurre que

$$\mid x(t) - a \mid \leq R.$$

Dado un arco $C(a,b)$ cuya representación paramétrica es $x : [\alpha, \beta] \to M$, sabemos que x admite una *parametrización natural*, es decir, podemos reparametrizarla como $z(\tau)_0^E$ donde τ es la longitud Euclidiana del arco $C(a,b)$ entre los puntos $x(\alpha) = a$ y $x(t)$, es decir,

$$\tau(t) = \int_\alpha^t \mid \dot{x}(t) \mid dt.$$

Así, E es la longitud Euclidiana del camino $z(\tau)_0^E$. Es fácil mostrar que bajo esta parametrización todos los vectores tangentes a $z(\tau)_0^E$ (existen y cambian continuamente excepto en un número finito de puntos) tienen norma Euclidiana unitaria,

$$\mid \dot{z}(\tau) \mid = 1. \tag{2.21}$$

2.5.3. Distancia fechneriana.

Con este apartado completamos la construcción de la métrica fechneriana.

Definición 2.8. La *métrica fechneriana* de $a \in M$ a $b \in M$ inducida por $F(x,u)$ y denotada por $G(a,b)$ es el ínfimo de la longitud psicométrica de los arcos $C(a,b)$ de clase C^1 por pedazos que conectan a con b, es decir,

$$G(a,b) := \operatorname*{ínf}_{x \in \Omega_{[a,b]}} \int_\alpha^\beta F(x(t), \dot{x}(t))dt, \tag{2.22}$$

donde el conjunto de todos los arcos $C(a,b)$ de clase C^1 por pedazos en M, así como sus respectivas parametrizaciones $x : [\alpha, \beta] \to M$ se denota por $\Omega_{[a,b]}$.

El mínimo de esta función debe existir, pues la longitud psicométrica de cualquier arco $C(a,b)$, es no negativa. Observamos que la métrica fechneriana también está determinada de forma equivalente por su indicatriz fechneriana asociada.

Como mencionamos anteriormente, las funciones F y G cumplen la propiedad D) y debido a esta propiedad podemos escribir la expresión (2.22) de la siguiente manera (Busemann & Mayer [3]):

$$G(a,b) = \operatorname*{mín}_{x \in \Omega_{[a,b]}} \int_\alpha^\beta F(x(t), \dot{x}(t))dt, \tag{2.23}$$

Es decir, para todo $a, b \in M$, existe un arco denotado $C^*(a,b)$ tal que $C^*(a,b) \leq C(a,b)$ para todo $C(a,b) \subseteq M$ que conecta a con b y cuya longitud psicométrica es igual al ínfimo en (2.22), es decir, $G(a,b) = L[C^*(a,b)]$. Dicho arco $C^*(a,b)$ se conoce como *arco geodésico fechneriano* de a a b.

El siguiente teorema justifica por qué la función $G(a,b)$ es una métrica.

Teorema 2.5. *$G(a,b)$ es una distancia continua y orientada en M. Esto es, para todo $a, b, c \in M$, se cumplen las siguientes propiedades:*

a) Si $a \neq b$ entonces $G(a,b) > 0$.

b) $G(a,a) = 0$.

c) $G(a,c) \leq G(a,b) + G(b,c)$.

d) $G(a,b)$ es una función continua en (a,b) (con respecto a la topología convencional en M).

e) Bajo la tercera condición, $G(a,b) = G(b,a)$.

f) $G(a,b)$ es invariante bajo transformaciones difeomórficas del espacio M.

Demostración. Se encuentra Dzhafarov y Colonius [9] □

La métrica de Fechner definida en un espacio de estímulos es, por lo tanto, una métrica interna, es decir, la distancia entre dos puntos es la mínima longitud que los conecta.

Por lo tanto, citando a Dzhafarov y Colonius ([9], p.695), es importante investigar el problema de los *arcos geodésicos en el límite*, es decir, la existencia y propiedades de un camino orientado $a + C(a,b)s$ que conecta a a con $b = a + us$, cuya longitud psicométrica tiende a la distancia fechneriana $G(a, a + us)$, cuando $s \to 0^+$. Dichos arcos geodésicos tienen un práctico significado a la hora de calcular la distancia fechneriana, especialmente cuando ocupamos técnicas de "fuerza bruta" para discretizar el espacio de estímulos. Mas aún, bajo la lógica de este contexto, esta cuestión sirve como un puente entre el análisis subsecuente sobre el contorno de las indicatrices fechnerianas y su relación con la distancia fechneriana.

Finalizamos con un teorema importante para el desarrollo del siguiente capítulo que es la parte central de este trabajo.

Teorema 2.6. ***(Arcos geodésicos de Fechner en el límite bajo indicatrices convexas).*** *Si todas las indicatrices $S_x(F)$ son convexas en cualquier dirección, entonces para todo (x,u) el segmento $s(t)_0^s = x + tu$ es un arco geodésico fechneriano en el límite de x a $x + us$, cuando $s \to 0^+$.*

Podemos resumir el presente capítulo de la siguiente manera: el escalamiento fechneriano es un método para calcular distancias entre estímulos físicos a partir de cierta información de diferenciación. En un espacio M escogido convenientemente, la distancia fechneriana entre dos estímulos se define como el ínfimo de la longitud psicométrica sobre todos los arcos que conectan a dichos estímulos. Sin embargo, la longitud psicométrica se determina por medio de una indicatriz asociada al estímulo. Estas indicatrices son gráficamente similares a las curvas de nivel de las funciones psicométricas en una vecindad alrededor del mínimo.

Las condiciones que deben cumplir las funciones psicométricas son: 1) continuidad y existencia de un mínimo global, 2) toda diferencia entre dos estímulos a partir del mínimo y que corresponda a cambios iguales en la probabilidad de diferenciación es asintóticamente proporcional con un coeficiente continuo de proporcionalidad, 3) las diferencias entre dos estímulos opuestamente dirigidos, a partir del mínimo y que corresponden a incrementos iguales en la probabilidad de diferenciación son iguales en el límite.

Sea M un dominio en $\mathbb{R}^n$. Una función psicométrica en M es una función $\Psi : M \times M \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

a) Para todo $x \in M$, la función $\Psi(x, \bullet)$ alcanza su mínimo global $\Psi(x, x)$ en x.

b) Existe una función continuamente creciente $\Phi : [0, \epsilon] \to [0, \infty)$ tal que $\Phi(0) = 0$ y el siguiente límite existe para todo $x \in M$ y $y \in T_xM$:

$$F(x, y) = \lim_{s \to 0^+} \frac{\Phi(\Psi(x, x + sy) - \Psi(x, x))}{s}.$$

Así, $F(x, y)$ es una función no negativa en $TM = M \times \mathbb{R}^n$ y se conoce como función fechneriana, claramente F es homogénea positiva en y y Φ es la transformación psicométrica asociada a Ψ. Decimos que una función psicométrica es Finsleriana si su función fechneriana asociada es una métrica de Finsler.

Capítulo 3

Caracterización de arcos geodésicos en el límite.

En este capítulo se desarrolla la principal aportación de este trabajo, que es caracterizar los arcos geodésicos fechnerianos en el límite.

3.1. Convexidad de la función F.

La convexidad de F juega un rol central en la geometría de Fechner-Finsler. Una función $F : TM \to \mathbb{R}$ es *convexa en un punto* $x \in M$ si para todo $v, w \in T_xM$ y $\alpha \in [0,1]$, se cumple:

$$F(x, \alpha v + (1-\alpha)w) \leq \alpha F(x,v) + (1-\alpha)F(x,w).$$

Esta definición toma una forma más simple si consideramos que la función $F(x,v)$ satisface la propiedad C, si $F(x,u)$ es homogénea positiva de orden uno en u, entonces F es convexa en x si y solo si $F(x, v+w) \leq F(x,v) + F(x,w)$, para todo $v, w \in T_xM \backslash \{0\}$. La propiedad C nos permite definir la convexidad de F en la dirección de algún vector $v \in T_xM \backslash \{0\}$. Así, introducimos la siguiente definición de convexidad de F en una dirección v.

Definición 3.1. Sea $F(x,u)$ una función homogénea positiva de orden uno en u. Decimos que F es *convexa en* $x \in M$*, en la dirección de* $v \in T_xM \backslash \{0\}$ (o también podemos decir que la dirección de

v es una *dirección convexa de* F) si

$$v = \sum_{u' \in H'} u' \text{ implica } F(x,v) \leq \sum_{u' \in H'} F(x,u'), \text{ para todo } H' \subseteq T_xM \backslash \{0\}.$$

Así, decir que la dirección de v en x es una dirección convexa de F equivale a decir que el segmento de línea recta de x a $x+vs$ es un arco geodésico fechneriano de x a $x+vs$, para $s>0$ suficientemente pequeña.

Si F es convexa en la dirección de v entonces, por la propiedad C, F es convexa en la dirección αv con $\alpha > 0$. Decimos que la convexidad de F en x en la dirección de v es *estricta*, si $u+w=v$ implica que $F(x,v) < F(x,u)+F(x,w)$, para todo $u,w \in T_xM\backslash\{0\}$ tales que $u \neq \alpha w, \alpha > 0, u \neq 0$ y $w \neq 0$. Cuando la convexidad de F en la dirección de v no es estricta decimos que se trata de *convexidad débil*. Así, si F es *(estrictamente) convexa* significa que F es (estrictamente) convexa en todo punto $x \in M$ y para todo $v \in T_xM\backslash\{0\}$.

En la geometría de Finsler, generalmente se supone que F es *regular* (estrictamente convexa) en cualquier dirección y para todo punto $x \in M$, a fin de garantizar la diferenciabilidad de la solución de la expresión (2.23) (ver, e.g., Busemann & Mayer [3]).

Por lo que sabemos, la definición 3.1 referente a la convexidad de una función métrica F en una dirección dada no ha sido tratada en la literatura. Busemann & Mayer ([3], p.181) y Dzhafarov & Colonius ([9], p.700) definen convexidad (quasi-regular) de $F(x,v)$ en x en la dirección de v en términos de la indicatriz de F pero no en términos de F.

A diferencia de la geometría de Finsler, en la teoría del escalamiento multidimensional de Fechner de Dzhafarov y Colonius, la convexidad de F no es requerida. En este caso, si la dirección de v en x no es una dirección convexa de F, entonces para $s>0$ suficientemente pequeña, los arcos geodésicos de Fechner de x a $x+vs$ tienen longitud psicométrica estrictamente menor que la longitud del segmento lineal que une x con $x+vs$.

3.2. Conjuntos F-minimizantes.

Como mencionamos anteriormente, un *espacio de estímulos* es una variedad diferenciable M en $\mathbb{R}^n$, es decir, para todo punto $x \in M$ existe una vecindad U alrededor de x y un entero m, con $0 \leq m \leq n$ tal que U es un difeomorfismo a algún subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Así, el espacio tangente en $x \in M$ es $\mathbb{R}^m$ y análogamente $\mathbb{R}^m$ es el espacio tangente en M para todo punto $y \in U$ (Spivak [16], p.64).

Esto último nos permitirá definir ciertas *curvas (o arcos) poligonales* de x a $x+vs$ inscritas en el arco $C(a,b)$, donde $v \in T_xM\backslash\{0\}$ y $s>0$ suficientemente pequeña en el sentido de que dichos arcos, de x a $x+vs$, están contenidos en U. Estas curvas poligonales se pueden construir por medio de un proceso de *partición-concatenación* aplicado sobre un subconjunto H del espacio tangente $T_xM\backslash\{0\}$, cuya suma de los elementos que pertenecen a H es igual a v (refiriéndonos a la suma usual de vectores, entrada por entrada).

Este proceso de partición-concatenación consiste de dos fases: Primera, para cada vector tangente $u \in H$ y $s > 0$ suficientemente pequeña, particionamos el vector su en $n_u \geq 1$ partes, no necesariamente de la misma longitud. Segunda, comenzando con x debemos concatenar en cierto orden estas n_u partes para todo $u \in H$. Este proceso genera arcos poligonales en x en la dirección de v siempre que la suma de los elementos que pertenecen a H sea igual a v. Por motivos de simplicidad diremos "H con suma v" al referirnos al hecho de que "la suma de los vectores que pertenecen a H es igual al vector v".

Denotamos por $A(H)$ al conjunto de arcos poligonales en el límite en x y en la dirección de v obtenidos al haber aplicando todos los posibles procesos de partición-concatenación al conjunto $H \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ con suma v.

Por la expresión (2.19) y la propiedad C definida en la introducción, todos los arcos que pertenecen a $A(H)$ tienen la misma longitud psicométrica.

Definición 3.2. Sea $H \in T_xM\backslash\{0\}$ un conjunto de vectores con suma v. Decimos que H es un *conjunto elemental* si no contiene dos vectores codireccionales distintos (es decir, u, v tales que $v = \lambda u$).

Por lo tanto, toda curva poligonal en el límite dentro de un espacio de estímulos M pertenece a un único conjunto $A(H)$, donde H es un conjunto elemental. Como se ha mencionado con anterioridad, principalmente nos interesan los arcos poligonales en el límite con mínima longitud psicométrica conocidos como arcos geodésicos.

Definición 3.3. *Un arco geodésico (de Fechner) en el límite* para $v \in T_xM\backslash\{0\}$ en $x \in M$ es un arco poligonal en el límite que va de x a $x + vs$ en M con mínima longitud psicométrica.

Debido a que la función F es homogénea positiva y por la ecuación (2.19), la longitud psicométrica de los arcos que pertenecen al conjunto $A(H)$ está dada por

$$L[A(H)] = \sum_{u \in H} sF(x, u), \text{ con } H \subseteq T_xM\backslash\{0\}. \tag{3.1}$$

Los arcos que pertenecen al conjunto $A(H)$ son arcos geodésicos de Fechner en el punto x y en la dirección de v si y solo si la longitud psicométrica dada por la ecuación (3.1) es menor o igual que cualquier otro arco poligonal en x en la dirección de v, es decir,

$$L[A(H)] \leq L[A(H')] \text{ para todo } H' \subseteq T_xM\backslash\{0\} \text{ con suma } v \in T_xM\backslash\{0\}.$$

Dzhafarov y Colonius [9] definen una *cadena mínima* en $x \in M$ en la dirección de $v \in T_xM\backslash\{0\}$ como un conjunto de vectores tangentes $H \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ en x con suma v tal que

$$\sum_{u\in H} F(x,u) \leq \sum_{u'\in H'} F(x,u'), \text{ para todo } H' \subseteq T_xM\backslash\{0\} \text{ con suma } v.$$

El conjunto $H := \{u_1,\ldots,u_m\} \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ determina la correspondiente suma de sus elementos, es decir, $u_1 + \ldots + u_m = v$. Así, podemos expresar la idea principal de la definición anterior de Dzhafarov y Colonius como sigue:

Definición 3.4. Un conjunto *F-minimizante* de vectores tangentes en x es un conjunto $H \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ con suma diferente de cero tal que, si

$$\sum_{u\in H} u = \sum_{u'\in H'} u', \text{ entonces } \sum_{u\in H} F(x,u) \leq \sum_{u'\in H'} F(x,u'), \text{ para todo } H' \subseteq T_xM\backslash\{0\}.$$

Es decir, un conjunto $H \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ de vectores tangentes en x con suma v es un conjunto *F-minimizante*, si los arcos que pertenecen al correspondiente conjunto $A(H)$ son arcos geodésicos en el límite.

Por lo tanto, los arcos del conjunto $A(H)$ son arcos geodésicos de Fechner en x en la dirección de v si y solo si $H \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ es un conjunto F-minimizante de vectores tangentes en x con suma v.

Así, caracterizar los arcos geodésicos de Fechner en el límite es equivalente a caracterizar estos conjuntos F-minimizantes de vectores tangentes.

3.2.1. Propiedades de los conjuntos F-minimizantes de vectores tangentes.

En el proceso de partición-concatencación aplicado sobre un conjunto de vectores tangentes $H := \{u_1,\ldots,u_m\} \subseteq T_xM\backslash\{0\}$, la igualdad $u_1 + \ldots + u_m = v$ se debe satisfacer, y el conjunto H podría no ser un conjunto elemental. Así que, es conveniente acordar que un conjunto pueda contener elementos repetidos como ocurre en la teoría de multiconjuntos (ver, e.g., Red, Bui & Gishko [13]); por lo tanto, cualquier subconjunto de vectores tangentes $H \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ puede contener vectores repetidos. Por ejemplo, los conjuntos $\{u\}$ y $\{u\}\cup\{u\}$ son distintos, pues $\{u\}\cup\{u\} := \{u,u\} \neq \{u\}$.

Sea $H := \{u_1,\ldots,u_m\} \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ un conjunto de vectores tangentes en x con suma v. El *producto* de $\lambda \in \mathbb{R}$ y H se define por

$$\lambda H = \lambda\{u_1,u_2,\ldots,u_m\} := \{\lambda u_1,\ldots,\lambda u_m\},$$

donde λu_i es la multiplicación usual de un escalar por un vector. Claramente, $\lambda\{u_1,u_2,\ldots,u_m\} \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ también es un conjunto de vectores tangentes en x con suma λv.

Dada una colección de conjuntos $X = \{H_1, \ldots, H_m\}$, donde cada $H_i \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ es un conjunto de vectores tangentes en x, decimos que una *combinación convexa* de la colección X es un conjunto de vectores tangentes en x dado por $\lambda_1 H_1 \cup \ldots \cup \lambda_m H_m \subseteq T_xM\backslash\{0\}$, donde $0 \leq \lambda_i \leq 1$ y $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ para $i = 1, \ldots, m$.

Podemos notar que cualquier combinación convexa de conjuntos de vectores tangentes en x con suma v es también un conjunto de vectores tangentes en x con suma v. En otras palabras, la colección de todos los conjuntos de vectores tangentes en x con suma $v \neq 0$, denotado por $X(v)$, cumple la propiedad de ser cerrado bajo combinaciones convexas, es decir, para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ y $H, H' \in X(v)$ se cumple $\lambda H \cup (1 - \lambda)H' \in X(v)$.

Definición 3.5. Un conjunto $H \in X(v)$ es un *conjunto extremo de vectores tangentes* en x con suma $v \in T_xM\backslash\{0\}$ si H no se puede expresar como combinación convexa de elementos de $X(v)\backslash H$.

Un conjunto extremo de vectores tangentes en x es necesariamente un conjunto elemental y, por el teorema de Carathéodory (ver, e.g., Rockafellar [14], p.155), contiene al menos n elementos, donde n es la dimensión del espacio M. Todos los conjuntos de vectores tangentes en x con suma v son combinaciones convexas de conjuntos extremos de vectores tangentes en x con suma v.

Como veremos más adelante (teorema 3.6), para cualquier vector tangente $v \in T_xM\backslash\{0\}$ existe al menos un conjunto F-minimizante de vectores tangentes con suma v. Si $H \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ es un conjunto F-minimizante de vectores tangentes con suma v, entonces, en términos de la definición 3.4, la función F en la dirección de v es:

a) Convexa si y solo si $\{v\}$ es un conjunto F-minimizante de vectores tangentes.

b) Estrictamente convexa si y solo si $H = \{v\}$ es el único conjunto F-minimizante de vectores tangentes.

c) Débilmente convexa si y solo si ambos conjuntos $H \neq \{v\}$ y $\{v\}$ son conjuntos F-minimizantes de vectores tangentes.

Usando los resultados obtenidos hasta este punto, se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.1. ***(Propiedades de los conjuntos F-minimizantes de vectores tangentes).***

a) Todo subconjunto de algún conjunto F-minimizante de vectores tangentes $H \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ es también un conjunto F-minimizante de vectores tangentes en x, en particular, si $u \in H$, entonces $\{u\}$ es un un conjunto F-minimizante de vectores tangentes en x.

b) El conjunto de todos los conjuntos F-minimizantes de vectores tangentes en x con suma v es cerrado bajo combinaciones convexas.

c) Todo conjunto F-minimizante de vectores tangentes con suma v es una combinación convexa de conjuntos extremos F-minimizantes de vectores tangentes en x con suma v.

Por el inciso c) del teorema 3.1, la caracterización de los arcos geodésicos fechnerianos en el límite de x en la dirección de v se reduce a la caracterización de conjuntos extremos F-minimizantes de vectores tangentes en x con suma v.

3.3. Conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.6. Un *conjunto convexo* es un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $u, v \in S$ y $0 < \lambda \leq 1$, se cumple $\lambda u + (1 - \lambda)v \in S$. La intersección de todos los conjuntos convexos que contienen un subconjunto dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se conoce como *cerradura convexa* de S y se denota por $conv(S)$.

La cerradura convexa de S también es un conjunto convexo, pues la intersección de cualquier colección de conjuntos convexos es convexa (Rockafellar [14], p.10). Equivalentemente, la cerradura convexa $conv(S)$ de cualquier subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se compone de todas las combinaciones convexas de elementos de S (Rockafellar [14], p.12), es decir,

$$conv(S) = \left\{ \lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_m x_m \mid x_k \in S, \lambda_k \geq 0, k = 1, \ldots, m, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \text{ y } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definición 3.7. El *interior relativo* de un conjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^n$, denotado por $ri(S)$, se define como el interior que resulta cuando S es considerado un subconjunto de su cubierta afin (Rockafellar [14], p.44).

En particular, para un conjunto finito $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ tenemos que

$$conv(S) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m \mid \lambda_k \geq 0, k = 1, \ldots, m, \text{ y } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, m \in \mathbb{N}\}$$

y

$$ri(conv(S)) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m \mid \lambda_k > 0, k = 1, \ldots, m, \text{ y } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, m \in \mathbb{N}\}$$

Definición 3.8. Un *semiespacio soporte* asociado a un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un semiespacio cerrado que contiene a S y algún punto $x \in S$ en su frontera. Un *hiperplano soporte* asociado a S es aquel hiperplano formado por la frontera del semiespacio soporte de S.

En otras palabras, un hiperplano soporte asociado a S es un hiperplano que puede representarse en la forma $\{x \mid \langle x, b \rangle = \beta, b \neq 0\}$, donde el producto punto $\langle x, b \rangle \leq \beta$ para todo $x \in conv(S)$ y $\langle x, b \rangle = \beta$ para al menos un punto $x \in conv(S)$.

Todo hiperplano soporte que pasa por un punto dado $a \in conv(S)$ corresponde a un vector b tal que $\langle x - a, b \rangle \leq 0$ para todo $x \in conv(S)$, es decir, un vector b que no forma un ángulo agudo con ningún segmento de línea en S con a como punto final. Dicho vector b se conoce como *normal* $a \in conv(S)$ en S. Así, un hiperplano soporte asociado a S se relaciona con una función lineal que alcanza su valor máximo en $conv(S)$, es decir, $\langle x, b\rangle \leq \langle a, b\rangle$ para todo $x \in conv(S)$. Se puede demostrar que todo hiperplano soporte asociado a S es también un hiperplano soporte para $conv(S)$ y viceversa.

Llamamos *segmento lineal cerrado* al conjunto

$$\{x \ \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \text{ donde } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \text{ y } \lambda \in [0,1]\}.$$

Decimos que es cerrado pues incluye a los puntos extremos x_1 y x_2. Gráficamente, corresponde al segmento de recta que une los puntos x_1 y x_2. En caso de no incluir los dos puntos extremos, x_1 y x_2, se trata de un *segmento lineal abierto.*

La caracterización de los arcos geodésicos en el límite que proponemos en este trabajo está basada en el concepto de *cara* de un conjunto convexo (Rockafellar [14], p. 162), que a continuación definimos.

Definición 3.9. Una *cara* de un conjunto convexo $\mathfrak{C}$ es un subconjunto convexo $K \subseteq \mathfrak{C}$ tal que todo segmento lineal cerrado contenido en $\mathfrak{C}$ con un punto en el interior relativo de K, tiene ambos puntos finales en K.

La intersección del conjunto $\mathfrak{C}$ con cualquiera de sus hiperplanos soporte es una cara de $\mathfrak{C}$. Un punto $v \in \mathfrak{C}$ es un *punto extremo* de $\mathfrak{C}$ si v no puede representarse con una combinación estrictamente convexa de dos puntos distintos de $\mathfrak{C}$. En otras palabras, si $v = \lambda y + (1-\lambda)z$ con $\lambda \in (0,1)$ y $y, z \in \mathfrak{C}$, entonces $v = y = z$. Los puntos extremos de $\mathfrak{C}$ son caras de dimensión cero que forman un conjunto denotado por $E(\mathfrak{C})$.

El siguiente ejemplo sirve para ilustrar el concepto de cara y para señalar que no cualquier segmento lineal cerrado contenido en un conjunto convexo es una cara del conjunto. Sea $\mathfrak{C}$ un conjunto convexo cuya frontera está formada por los siguientes segmentos lineales cerrados: de $(1,0)$ a $(0,1)$, de $(0,1)$ a $(-1,0)$, de $(-1,0)$ a $(0,-1)$ y de $(0,-1)$ a $(1,0)$, respectivamente (ver figura 3.1). Estos cuatro segmentos lineales cerrados forman las caras de $\mathfrak{C}$ y cualquier otro segmento lineal en $\mathfrak{C}$ no es una cara de $\mathfrak{C}$. Por ejemplo, consideremos el segmento lineal cerrado K que une los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ en $\mathfrak{C}$ y sea L el segmento lineal cerrado que une los puntos $(0,-1/2)$ y $(0,1/2)$. El punto (0,0) es un punto interior de L en K, pero los puntos finales $(0,-1/2)$ y $(0,1/2)$ no están en K. Por lo tanto, el segmento lineal cerrado K no es una cara de $\mathfrak{C}$.

Lema 3.1. *Si K y J son caras de un conjunto convexo $\mathfrak{C}$ tales que $ri(K) \cap ri(J) \neq \emptyset$, entonces $K = J$.*

Demostración. (Rockafellar [14], p. 164). Sea $z \in ri(K) \cap ri(J)$. Si $x \neq z \in J$, entonces existe un $y \in J$ tal que z esta en el interior relativo del segmento de línea que une a x con y. Como K es una cara, x y $y \in K$. Por lo tanto, $J \subseteq K$. Similarmente, $K \subseteq J$, por lo que, $K = J$. □

Lema 3.2. *Cualquier conjunto convexo cerrado y acotado $\mathfrak{C}$ es la cerradura convexa de sus puntos extremos, es decir $\mathfrak{C} = conv(E(\mathfrak{C}))$.*

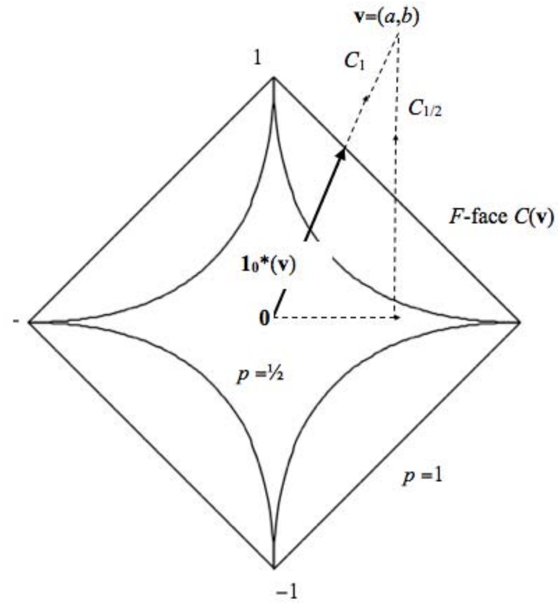

Figura 3.1: $C_{1/2}$ es un arco $F_{1/2}$-geodésico en el límite para $v = (a, b)$ en el punto x.

Demostración. La podemos encontrar en Rockafellar ([14], p. 166). □

3.4. Propiedades de la indicatriz fechneriana.

Con los resultados mostrados anteriormente, estamos en condiciones de desarrollar ciertas propiedades que cumple la indicatriz fechneriana definida en el apartado §2.5.1.

Recordemos que la función indicatriz esta dada por $\mathbf{1}_x(v) = \dfrac{v}{F(x,v)}$ para todo $v \in T_xM$. Entonces,

$$v = F(x, v)\mathbf{1}_x(v). \tag{3.2}$$

Lema 3.3. ***(Propiedades de la indicatriz de*** F***).*** *Para todo* $v \in T_xM\backslash\{0\}$ *y todo* $\{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ *se cumplen las siguientes condiciones:*

a) $v = \sum_{i=1}^{m} u_i \neq 0$ si y solo si $\dfrac{F(x,v)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)}\mathbf{1}_x(v) = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)\mathbf{1}_x(u_i)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)}.$

b) $v = \sum_{i=1}^{m} u_i \neq 0$ entonces $\dfrac{F(x,v)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)} \mathbf{1}_x(v) \in conv(S_x(F))$.

Demostración. a) Sea $v = \sum_{i=1}^{m} u_i$. La ecuación (3.2) es equivalente a

$$F(x,v)\mathbf{1}_x(v) = \sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)\mathbf{1}_x(u_i),$$

y como F es positiva definida, tenemos que $\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i) > 0$. Así, obtenemos la equivalencia del inciso a).

b) Evidentemente, $\dfrac{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)\mathbf{1}_x(u_i)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)} \in conv\left(\{\mathbf{1}_x(u_1),\ldots,\mathbf{1}_x(u_m)\}\right) \subseteq conv(S_x(F))$, obtenemos así la propiedad del inciso b).

□

La frontera de $conv(S_x(F))$ se denota por $S_x^*(F)$ y es la *cerradura convexa* de $S_x(F)$ que se ilustra en la figura 3.2. Podemos ver que $S_x^*(F)$ y $S_x(F)$ tienen los mismos hiperplanos soporte y así, $conv(S_x(F)) = conv(S_x^*(F))$. Por otro lado, el punto donde $S_x^*(F)$ coincide con $r(v)$ se denota por $\mathbf{1}_x^*(v)$, es decir,

$$S_x^*(F) = \{\ \mathbf{1}_x^*(v) \mid v \in T_xM\backslash\{0\}\}.$$

Por definición de la función $\mathbf{1}_x$, el vector tangente $\mathbf{1}_x(v)$ es codireccional a v, es decir, $\mathbf{1}_x(v) = kv$ para algún $k > 0$, de esta manera se cumple que $\mathbf{1}_x(v) = \mathbf{1}_x(kv)$ para todo $k > 0$ y además,

$$v = F(x,v)\cdot \mathbf{1}_x(v), \text{ para todo } v \in T_xM\backslash\{0\}. \tag{3.3}$$

Análógamente, $\mathbf{1}_x^*(kv) = \mathbf{1}_x^*(v)$ para todo $k > 0$ y $\mathbf{1}_x^*(v) \neq 0$ para todo $v \neq 0$, entonces la igualdad

$$v = F^*(x,v)\cdot \mathbf{1}_x^*(v) \tag{3.4}$$

define una función $F^* : TM \to \mathbb{R}$ continua y positiva definida para todo $v \in T_xM\backslash\{0\}$ y todo $x \in M$. Mas aún, $kv = F^*(x,kv)\mathbf{1}_x^*(v)$, entonces $F(x,u)$ es homogénea positiva (i.e. $F^*(x,ku) = kF^*(x,u), k > 0$). Por lo tanto F^* es una función métrica llamada *función minimétrica* correspondiente a F (Dzhafarov & Colonius [9]). $S_x(F)$ es un conjunto cerrado y acotado, así como también lo es $S_x^*(F)$.

La intersección de $conv(S_x(F))$ con cualquiera de sus hiperplanos soporte es una cara de $conv(S_x(F))$ y la denotamos por *F-cara*.

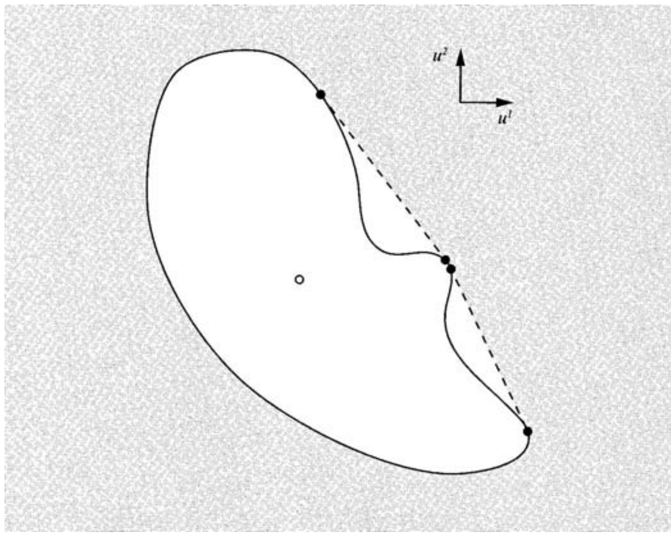

Figura 3.2: Cerradura convexa de una indicatriz ($n = 2$).

Teorema 3.2. ***(Equivalencia de las indicatrices).*** *Diferentes indicatrices fechnerianas inducen la misma métrica Fehcneriana $G(a, b)$ si y solo si tienen la misma cerradura convexa.*

Teorema 3.3. ***(Simétria).*** *Una métrica fechneriana es simétrica, es decir $G(a, b) = G(b, a)$, si y solo si la función minimétrica inducida por esta métrica es simétrica, es decir, $F^*(x, u) = F^*(x, -u)$.*

Bajo la tercera condición, la propiedad de simetría está garantizada, sin embargo, como se muestra en la figura 3.3, es posible que $G(a, b) = G(b, a)$ mientras que la simetría no se satisface (la cual es una de las razones por las cuales la tercera condición es de importancia secundaria).

Teorema 3.4. ***(F-cara asociada a un vector tangente).***

1. *Para todo $v \in T_xM \backslash \{0\}$ existe una y solo una F-cara, denotada por $C_x(v)$, tal que $\mathbf{1}^*_x(v) \in ri(C_x(v))$. Mas aún, dicha F-cara satisface las siguientes condiciones:*
   - a) *El conjunto $C_x(v)$ es cerrado y acotado.*
   - b) *$\mathbf{1}_x(u) \in C_x(v)$ si y solo si $\mathbf{1}^*_x(u) = \mathbf{1}_x(u)$ y $\mathbf{1}^*_x(u) \in C_x(v)$ para todo $u \in T_xM \backslash \{0\}$.*
   - c) *Si $\mathbf{1}^*_x(v) \in ri(conv(\{\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)\}))$ entonces $\{\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)\} \subseteq C_x(v)$.*
   - d) *$\{\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)\} \subseteq C_x(v)$ si y solo si $ri(conv(\{\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)\})) \subseteq C_x(v)$.*
   - e) *$C_x(v) = C_x(kv)$, para todo $k > 0$.*

Demostración. 1. Para todo vector $v \in T_xM \backslash \{0\}$, el conjunto $S^*_x(F)$ interseca al rayo $r(v)$ que contiene a v en un único punto $\mathbf{1}^*_x(v) \in S^*_x(F)$. Este punto pertenece a la intersección de

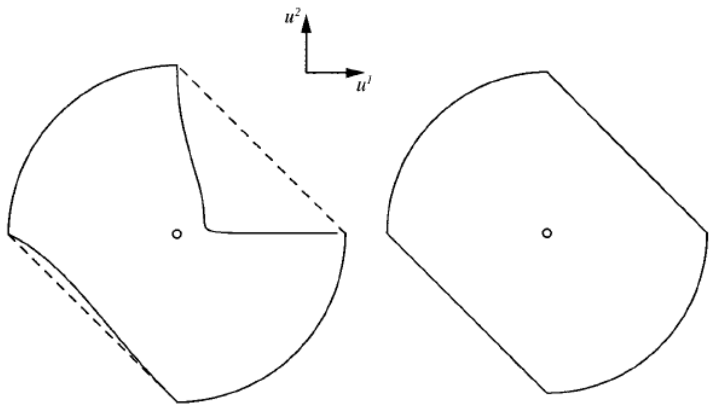

Figura 3.3: La indicatriz de la izquierda no es simétrica pero tiene cerradura convexa simétrica (a la derecha) localmente inducida y por lo tanto, es una métrica fechneriana simétrica.

$S_x^*(F)$ con uno de sus hiperplanos soporte. Tal intersección es una F-cara y la denotamos por $C_x(v)$.

Tenemos que probar que $\mathbf{1}_x^*(v)$ es un punto interior de $C_x(v)$: si $\mathbf{1}_x*(v)$ no es un punto extremo de $conv(S_x(F))$, entonces, por el lema 3.1, $C_x(v)$ es la única F-cara tal que $\mathbf{1}_x^*(v) \in ri(C_x(v))$. Si $\mathbf{1}_x^*(v)$ es un punto extremo de $conv(S_x(F))$, entonces $C_x(v) = \{\mathbf{1}_x^*(v)\}$ y $C_x(v)$ es una F-cara de dimensión cero, por lo que $\mathbf{1}_x^*(v) \in ri(C_x(v))$.

a) Como el conjunto $conv(S_x(F))$ es cerrado y acotado, la intersección de $conv(S_x(F))$ con cualquiera de sus hiperplanos soporte es también cerrado y acotado.

b) Ambos lados de la equivalencia expresan que $C_x(v)$ interseca al rayo $r(u)$ en $\mathbf{1}_x(u)$.

c) Si $\mathbf{1}_x^*(v) \in ri(conv(\{\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)\}))$ significa que existen $0 < \lambda_i < 1$, con $i = 1, \ldots, m$, donde $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$, tales que

$$\mathbf{1}_x^*(v) = \lambda_1 \mathbf{1}_x(u_1) + \ldots + \lambda_m \mathbf{1}_x(u_m) \neq 0.$$

Pero por el inciso a), $\mathbf{1}_x^*(v)$ es un punto en el hiperplano soporte correspondiente a $C_x(v)$, por lo tanto, existe un vector b tal que $\langle x, b\rangle \leq \langle \mathbf{1}_x^*(v), b\rangle$, para todo $x \in conv(S_x(F))$. Entonces

$$\langle \mathbf{1}_x(u_i), b\rangle \leq \langle \mathbf{1}_x^*(v), b\rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{1}_x(u_1), b\rangle + \ldots + \lambda_m \langle \mathbf{1}_x(u_m), b\rangle$$

y $\lambda_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto, $\langle \mathbf{1}_x(u_i), b\rangle = 0$ para $i = 1, \ldots, m$, es decir, $\{\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)\} \subseteq C_x(v)$.

d) Si $\{\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)\} \subseteq C_x(v)$, la implicación deriva del hecho de que $C_x(v)$ es un conjunto convexo. Por otro lado, si

$$ri(conv(\{\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)\})) \subseteq C_x(v),$$

entones toda vecindad de cualquier $\mathbf{1}_x(u_i)$ contiene puntos de $C_x(v)$, pero por el inciso b), $C_x(v)$ es cerrado, entonces $\mathbf{1}_x(u_i) \in C_x(v)$ con $i = 1, \ldots, m$.

e) Por el inciso a), $\mathbf{1}_x^*(v) \in ri(C_x(v)), \mathbf{1}_x^*(kv) \in ri(C_x(v))$, entonces por el lema 3.1, si $\mathbf{1}_x^*(kv) = \mathbf{1}_x^*(v)$, implica que $C_x(v) = C_x(kv)$.

□

3.5. Caracterización de los conjuntos F-minimizantes de vectores tangentes.

Teorema 3.5. ***(Caracterización de los conjuntos F-minimizantes de vectores tangentes)***.

1. *Un conjunto $\{u_1, \dots, u_m\} \subseteq T_xM\backslash\{0\}, m \geq 1$, con suma $v \in T_xM\backslash\{0\}$ es un conjunto F-minimizante de vectores tangentes si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

   a) $\{\mathbf{1}_x(u_1), \dots, \mathbf{1}_x(u_m)\} \subseteq C_x(v)$, donde $C_x(v)$ es la F-cara que satisface el inciso a) del teorema 3.4.

   b) $\mathbf{1}_x^*(v) \in ri(conv(\{\mathbf{1}_x(u_1), \dots, \mathbf{1}_x(u_m)\}))$.

2. *Más aún, $\{u_1, \dots, u_m\}$ es un conjunto extremo F-minimizante de vectores tangentes si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

   c) $\{\mathbf{1}_x(u_1), \dots, \mathbf{1}_x(u_m)\} \subseteq E(C_x(v))$.

   d) $\mathbf{1}_x^*(v)$ se expresa de forma única como combinación convexa de $\mathbf{1}_x(u_1), \dots, \mathbf{1}_x(u_m)$, (por lo que $\{\mathbf{1}_x(u_1), \dots, \mathbf{1}_x(u_m)\}$ es un conjunto elemental de vectores tangentes).

Demostración. 1. $\Rightarrow$ Por el inciso d) del teorema 3.4, b) implica a), y la demostración del inciso a) puede omitirse.

Ahora, sea $H = \{u_1, \dots, u_m\} \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ un conjunto de vectores tangentes F-minimizante con suma $v \neq 0$. Necesitamos probar que

$$\mathbf{1}_x^*(v) \in ri(conv(\{\mathbf{1}_x(u_1), \dots, \mathbf{1}_x(u_m)\})) \subseteq C_x(v).$$

Por hipótesis, para todo $H' \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ ocurre que

$$\sum_{u' \in H'} u' = v \text{ implica } \frac{F(x,v)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)} \geq \frac{F(x,v)}{\sum_{u' \in H'} F(x,u')},$$

por lo tanto

$$\frac{F(x,v)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)}$$

alcanza su máximo valor, es decir,

$$\frac{F(x,v)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)}\ \mathbf{1}_x(v) = \mathbf{1}_x^*(v),$$

sin embargo, de acuerdo al inciso a) del lema 3.3

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)\mathbf{1}_x(u_i)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)} = \mathbf{1}_x^*(v)$$

y por lo tanto $\mathbf{1}_x^*(v) \in ri(conv(\{\mathbf{1}_x(u_1),\ldots,\mathbf{1}_x(u_m)\}))$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $\{u_1,\ldots,u_m\} \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ es un conjunto de vectores tangentes con suma $v \neq 0$. Tenemos que probar que, si $\mathbf{1}_x^*(v) \in ri(conv(\{\mathbf{1}_x(u_1),\ldots,\mathbf{1}_x(u_m)\}))$, entonces $\{u_1,\ldots,u_m\}$ es un conjunto de vectores tangentes F-minimizante. Por los incisos c), d) y e) del teorema 3.4, tenemos $\mathbf{1}_x^*(v) \in ri(conv(\{\mathbf{1}_x(u_1),\ldots,\mathbf{1}_x(u_m)\}))$, entonces $\{\mathbf{1}_x(u_1),\ldots,\mathbf{1}_x(u_m)\} \subseteq C_x(v)$, por lo tanto, $ri(conv(\{\mathbf{1}_x(u_1),\ldots,\mathbf{1}_x(u_m)\})) \subseteq C_x(v)$. Así, $\mathbf{1}_x(u_i) = \mathbf{1}_x^*(u_i), i = 1,\ldots,m$, respectivamente. Por el inciso a) del lema 3.3, el conjunto $\{u_1\ldots,u_m\}$ con suma v, implica que

$$a := \frac{F(x,v)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)}\mathbf{1}_x(v) = \frac{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)\mathbf{1}_x(u_i)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)\mathbf{1}_x^*(u_i)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)} \in C(v).$$

Pero por el inciso c) del teorema 3.4, si $a \in C_x(v)$, entonces $a = \mathbf{1}_x^*(v)$. Así, $\mathbf{1}_x^*(v)$ es un punto en el hiperplano soporte que contiene a $C_x(v)$. Por lo tanto, existe un vector b tal que $\langle x,b\rangle \leq \langle \mathbf{1}_x^*(v),b\rangle$ para todo $x \in conv(S_x(F))$. Si $H' = \{u_1',\ldots,u_k'\}$ es un conjunto de vectores tangentes con suma v, entonces por el inciso b) del lema 3.3,

$$\frac{F(x,v)}{\sum_{i=1}^{k} F(x,u_i')}\mathbf{1}_x(v) \in conv\ (S_x(F)),$$

y por lo tanto,

$$\left\langle \frac{F(x,v)}{\sum_{i=1}^{k} F(x,u_i')}\mathbf{1}_x(v), b\right\rangle \leq \langle 1_x^*(v),b\rangle = \left\langle \frac{F(x,v)}{\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i)}\mathbf{1}_x(v), b\right\rangle,$$

lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^{m} F(x,u_i) \leq \sum_{i=1}^{k} F(x,u_i').$$

Por lo tanto, $H = \{\ u_1,\ldots,u_m\}, m > 1$ es un conjunto F-minimizante de vectores tangentes con suma v.

2. $\Leftrightarrow$ c), d): La condición c) significa que $\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)$ son puntos extremos asociados a la cara $C_x(v)$. Bajo la hipótesis es evidente que $\{\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)\}$ es un conjunto extremo de vectores tangentes.

   Así, la condición a) es equivalente a la condición c), y similarmente la condición b) es equivalente a la condición d).

$\square$

Teorema 3.6. ***(Existencia y caracterización de los conjuntos F-minimizantes de vectores tangentes por medio de la indicatriz).*** *Para todo vector tangente $v \in T_xM\backslash\{0\}$ existe al menos un conjunto de puntos extremos $\{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq E(C_x(v)) \cap S_x(F)$ $(1 \leq m \leq n)$ tal que, el punto $\mathbf{1}^*_x(v)$ se expresa de forma única como combinación convexa de los puntos $w_1, \ldots, w_m$; este conjunto de puntos determina un único conjunto extremo F-minimizante de vectores tangentes $H = \{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ con suma v y está dado por $\mathbf{1}^*_x(u_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, m$.*

Demostración. Por el teorema 3.4, para todo vector tangente $v \in T_xM\backslash\{0\}$ existe una y solo una F-cara $C_x(v)$ de $conv(S_x(F))$ tal que $\mathbf{1}^*_x(v) \in ri(C_x(v))$. Entonces, por el lema 3.2, existe un conjunto finito de puntos extremos $\{w_1, \ldots, w_m\} \in E(C_x(v)) \cap S_x(F)$ tal que $\mathbf{1}^*_x(v) \in ri(conv(\{w_1, \ldots, w_m\}))$. Por lo tanto, existe $\beta > 0$ y $\lambda_k > 0, k = 1, \ldots, m$ tal que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ y

$$\beta \mathbf{1}_x(v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \mathbf{1}_x(w_i).$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los valores de λ_k son únicos. Usando la identidad $F(x, \lambda_i \mathbf{1}_x(w_i)) = \lambda_i$, tenemos

$$\beta \frac{F(x,v)}{F(x,v)} \mathbf{1}_x(v) = \sum_{i=1}^{m} F(x, \lambda_i \mathbf{1}_x(w_i)) \mathbf{1}_x(w_i),$$

y como F es homogénea positiva, la expresión anterior es equivalente a

$$F(x,v)\mathbf{1}_x(v) = \sum_{i=1}^{m} F\left(x, \frac{F(x,v)}{\beta} \lambda_i \mathbf{1}_x(w_i)\right) \mathbf{1}_x(w_i)$$

y equivalentemente a

$$F(x,v)\mathbf{1}_x(v) = \sum_{i=1}^{m} F(x, u_i) \mathbf{1}_x(u_i), \tag{3.5}$$

donde

$$u_i := \frac{F(x,v)}{\beta} \lambda_i \mathbf{1}_x(w_i).$$

La última ecuación implica que $u_i \neq 0$ y $\mathbf{1}_x(u_i) = w_i, i = 1, \ldots, m$. Por el inciso a) del lema 3.3, la ecuación (3.5) es equivalente a decir que v es la suma de los elementos del conjunto $\{u_1, \ldots, u_m\}$.

Entonces el conjunto $\{u_1, \ldots, u_m\}$ satisface las condiciones de los incisos c) y d) del teorema 3.5 y por lo tanto, es un conjunto F-minimizante extremo de vectores tangentes con suma v. $\square$

3.6. Cerradura convexa de F.

En el siguiente teorema presentamos algunos resultados bien conocidos (Busemann & Mayer [3] y Dzhafaroy & Colonius [9]).

Teorema 3.7. ***(Propiedades de la cerradura convexa de F).*** *La función métrica $F^* : TM \to \mathbb{R}$ definida en la expresión (3.4) se puede expresar como*

$$F^*(x,v) := \text{mín}\left\{ \sum_{u\in H} F(x,u) \mid v = \sum_{u\in H} u, H \subseteq T_xM\backslash\{0\}, x \in M, v \in T_xM\backslash\{0\} \right\}, \tag{3.6}$$

y satisface las siguientes condiciones:

a) $F^*(x,v) \le F(x,v)$ para todo $(x,v) \in TM$, donde la igualdad se cumple si y solo si F es convexa en x en la dirección de v.

b) $F^*(x,v)$ es una función convexa para todo $v \in T_xM\backslash\{0\}$ y para todo $x \in M$.

c) $L^*[C(a,b)] := \int_\alpha^\beta F^*[x(t),\dot{x}(t)]dt \le \int_\alpha^\beta F[x(t),\dot{x}(t)]dt := L[C(a,b)]$, donde $x : [\alpha,\beta] \to M$ es una representación paramétrica de clase C^1 por pedazos del arco $C(a,b) \subseteq M$.

d) Para todo $a,b \in M$, $G(a,b) = \min_{x\in\Omega_{[a,b]}} \int_\alpha^\beta F^*[x(t),\dot{x}(t)]dt$.

Teorema 3.8. ***(Arcos geodésicos en el límite bajo la cerradura convexa).*** *Para cualquier métrica fechneriana $G(a,b)$, si la indicatriz $S_x(F)$ que la induce es remplazada por su cerradura convexa $S_x^*(F)$, entonces para todo (x,u), el segmento $s(t)_0^s = x+tu$ es un arco geodésico fechneriano en el límite que une a x con $x+us$, cuando $s \to 0^+$.*

Notamos que la solución a la ecuación (3.6) se compone de conjuntos F-minimizantes de vectores tangentes. Por como se definió la función F^* en (3.4), la imagen de la función $\mathbf{1}_x^* : T_xM\backslash\{0\} \to T_xM\backslash\{0\}$, que se define como la frontera de $conv(S_x(F))$, es la *función indicatriz* de F^* en x, es decir, el conjunto de vectores tangentes $u \in T_xM\backslash\{0\}$ que satisfacen $F^*(x,u) = 1$. Por lo tanto, la indicatriz correspondiente a F^*, denotada por $S_x(F^*)$, es la frontera de la cerradura convexa de la indicatriz correspondiente a F, es decir, $S_x(F^*) = S_x^*(F)$. Podemos probar directamente las siguientes propiedades:

1. $F(x,v)$ es estrictamente convexa en la dirección de v si y solo si $F^*(x,v)$ es estrictamente convexa en la dirección de v.

2. Si $F(x,v)$ es débilmente convexa en la dirección de v, entonces $F^*(x,v)$ es débilmente convexa en la dirección de v.
3. Si $F(x,v)$ no es convexa en la dirección de v, entonces $F^*(x,v)$ es débilmente convexa en la dirección de v.
4. $F^{**}(x,v) = F^*(x,v)$ para todo $x \in M$ y todo $v \in T_xM\backslash\{0\}$.

Si definimos $\delta(x,v) := \dfrac{F(x,v)}{F^*(x,v)}$, entonces por el inciso a) del teorema 3.7, $\delta(x,v) \geq 1$ y la función F es convexa en x en la dirección de v si y solo si $\delta(x,v) = 1$. Por lo tanto, F no es convexa en x en la dirección de v si y solo si $\delta(x,v) > 1$. Estas equivalencias coinciden con las definiciones de convexidad y concavidad dadas por Dzhafarov & Colonius [9].

De acuerdo a la definición 2.8, el inciso d) del teorema 3.7 se puede expresar como:

$$G(a,b) = \min_{x\in\Omega_{[a,b]}} \int_\alpha^\beta F[x(t),\dot{x}(t)]dt = \min_{x\in\Omega_{[a,b]}} \int_\alpha^\beta F^*[x(t),\dot{x}(t)]dt \tag{3.7}$$

Por lo tanto la distancia fechneriana $G(a,b)$ no cambia si y solo si la cerradura convexa de la indicatriz de una nueva función, digamos $F_1(x,u)$, coincide con la cerradura convexa de la indicatriz de $F(x,u)$ en todos los puntos. Esto ocurre porque todas las direcciones $\dot{x}(t)$ de un arco F-geodésico $C(a,b)$ son convexas (Busemann & Mayer [3], teorema 2, p.184). En otras palabras, por los incisos a) y b) del teorema 3.7, se cumple que $F[x(t),\dot{x}(t)] = F^*[x(t),\dot{x}(t)]$ a lo largo de dicho arco F-geodésico. Por lo tanto, todo arco F-geodésico fechneriano de a a b, es un arco F^*-geodésico fechneriano de a a b, como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 3.9. ***(Arcos geodésicos** F **y** F^***).*** *Todo arco F-geodésico fechneriano de a a b es un arco F^*-geodésico fechneriano de a a b.*

Demostración. Busemann y Mayer ([3], teorema 2, p. 184) probaron que todas las direcciones $\dot{x}(t)$ de un arco F-geodésico son convexas. Pero, por el inciso a) y b) del teorema 3.7, lo anterior significa que si $x(t)$ con $t \in [0,1]$ es un arco F-geodésico de a a b, entonces $F(x(t),\dot{x}(t)) = F^*(x(t),\dot{x}(t))$ para todo $t \in [0,1]$ y por la ecuación (3.7), $x(t)$ es un arco F^*-geodésico de a a b. □

En la siguiente mostraremos con un ejemplo, que si F no es convexa, es decir, $F \neq F^*$, entonces un arco F^*-geodésico de Fechner no necesariamente es un arco F-geodésico de Fechner.

Sánchez-Larios & Guillén-Burguete [15] probaron que la longitud del arco dada en la expresión (2.19) está asociada a una función distancia $d : M \times M \to \mathbb{R}$ cuya derivada direccional por la derecha es igual a la función métrica $F : TM \to \mathbb{R}$, es decir,

$$F(x,v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{d(x,\sigma(t)) - d(x,x)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{d(x,\sigma(t))}{t} \tag{3.8}$$

para todo $x \in M, v \in T_xM$ y $\sigma : [0,1] \to M$ define un camino en M tal que $\sigma(0) = x$ y $(d\sigma/ds)(0) = v$.

Podemos encontrar la ecuación (3.8) en Tamássy [17] y Bao, Chern & Shen ([1], p.161). En esta ecuación $d(x, \sigma(t)) \to 0$ cuando $t \to 0^+$, es decir, la ecuación (3.8) se restringe a pares ordenados de puntos x y $y = \sigma(t)$ tales que $y \to x$ a lo largo de un camino dado σ, donde $\sigma(0) = x$. Así, podemos considerar a d como una *medida de distancia en el límite*. Por la ecuación (3.7) es aceptable decir que la función distancia fechneriana G es una *medida de distancia en "lo grande"* para F y F^*.

A partir de las ecuaciones (2.7) y (3.8), observamos que la función psicométrica Ψ_x está relacionada con la medida de distancia en el límite $d : M \times M \;\to \mathbb{R}$ a través de la expresión

$$\Phi(\Psi_x(x+us) - \Psi_x(x)) = d(x, x+us), \text{ cuando } s \to 0^+.$$

es decir, la *diferencial psicométrica* en el punto $x \in M$ en la dirección de $u \in T_xM \backslash \{0\}$ definida por Dzhafarov y Colonius [9] como $h(x,u) := \Psi_x(x+us) - \Psi_x(x)$, cuando $s \to 0^+$, es igual a la distancia en el límite de x a $x+us$, es decir, $h(x,u) = d(x, x+us)$ (ver Sánchez Larios & Guillén Burguete [15]).

Se puede probar (Busemann y Mayer [3], Dzhafarov & Colonius [9] y Tamássy [17]) que

$$F^*(x,v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{G(x, \sigma(t))}{t}, \text{ para todo } x \in M, v \in T_xM \backslash \{0\}, \tag{3.9}$$

donde $\sigma(0) = x$ y $\dfrac{d\sigma}{ds}(0) = v$. Es decir, la longitud del arco dado por

$$L^*[C(a,b)] := \int_\alpha^\beta F^*(x(t), \dot{x}(t))dt$$

tiene como medida de distancia en el límite a la función distancia fechneriana G dada por la expresión (2.23).

Ahora consideramos el caso particular donde $M = \mathbb{R}^n$ y $F(x,v)$ no depende de x, estos espacios se conocen como *espacios de Minkowski*. En este caso, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in T_xM \backslash \{0\} = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $x + tv \in M$. Por la propiedad C), la ecuación (3.8) se puede escribir de la siguiente manera,

$$F(x,v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{d(x, x+tv)}{t} \;\; = \lim_{t \to 0^+} t\frac{d(x, x+v)}{t},$$

es decir,

$$F(x,v) = d(x, x+v), \text{ para todo } x \in M, v \in T_xM \backslash \{0\}. \tag{3.10}$$

Por lo tanto, la indicatriz de F en x no depende de x y se puede expresar como *la bola unitaria centrada en 0* definida por el conjunto $S_x(F) = \{x' \in M \mid d(0, x') = 1\ \}$.

A continuación ilustraremos mediante un ejemplo cómo encontrar los conjuntos minimizantes de vectores tangentes de una función métrica L_p con $p = 1/2$.

3.7. Ejemplo.

Consideremos un espacio psicológico sobre una variedad $M = \mathbb{R}^2$, cuya función métrica está dada por $F_{1/2}(x, v) = (\mid a \mid^{1/2} + \mid b \mid^{1/2})^2 = d_{1/2}(0, (a, b))$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ y $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. En este caso utilizamos la ecuación (3.10), pues $F_{1/2}$ no depende de la posición de x y sin perdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$. Esta función métrica $F_{1/2}$ (llamada métrica $L_{1/2}$) es considerada por Tversky & Gati [18], y Jäkel, Schölkopf, & Wichmann [11].

En la figura 3.1 ilustramos el contorno de la bola unitaria de $F_{1/2}$ así como también el contorno de la bola unitaria de la correspondiente cerradura convexa, la cual es la indicatriz de la función métrica F_1, dada por $F_1(x, v) = (\mid a \mid + \mid b \mid) = d_1(0, (a, b))$ para todo $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ y $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. De esta manera, $F^*_{1/2} = F_1$.

Las funciones métricas $F_{1/2}$ y F_1 tienen los mismos hiperplanos soporte y por lo tanto, tienen las mismas F-caras formadas por los siguientes cuatro segmentos lineales cerrados: de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, de $(0, 1)$ a $(-1, 0)$, de $(-1, 0)$ a $(0, -1)$ y de $(0, -1)$ a $(1, 0)$, respectivamente.

Ahora identificaremos a los conjuntos extremos $F_{1/2}$-minimizantes de vectores tangentes con suma $v = (a, b)$, donde $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$. A partir del contorno de la bola unitaria de $F_{1/2}$, observamos que v no es una dirección convexa de la función $F_{1/2}$. La F-cara correspondiente $C_x(v)$ es el segmento lineal cerrado que une los puntos $(0, 1)$ con $(1, 0)$.

El punto $\mathbf{1}^*_0(v)$ se expresa de forma única como combinación convexa de los puntos extremos de $C_x(v)$ que son $(0, 1)$ y $(1, 0)$ y por el teorema 3.5, el conjunto $H := \{(a, 0), (0, b)\}$ es un conjunto extremo $F_{1/2}$-minimizante de vectores tangentes con suma $v = (a, b)$.

Para este conjunto H, los correspondientes arcos geodésicos de Fechner en el límite y en la dirección (a, b) en el punto 0, $A(H)$, se obtienen a partir de un proceso de partición-concatenación aplicado a H. Notamos que no existe otro conjunto de puntos extremos de $C_x(v)$ que satisfagan los incisos c) y d) del teorema 3.5. Así, $H = \{(a, 0), (0, b)\}$ es el único conjunto $F_{1/2}$-minimizante de vectores tangentes con suma $v = (a, b)$. Por lo tanto, el arco poligonal $C_{1/2}$ que va del punto $(0, 0)$ al punto (a, b) mostrado en la figura 3.1 y formado por los segmentos lineales cerrados de $(0, 0)$ a $(a, 0)$ y de $(a, 0)$ a (a, b) es un arco geodésico $F_{1/2}$-fechneriano en el límite para $v = (a, b)$ en 0.

Como uno esperaría, debido a que la función $F_{1/2}$ no es convexa en la dirección v, la $F_{1/2}$-longitud del arco C_1, formada por el segmento lineal cerrado que une al $(0, 0)$ con (a, b), es mayor que la $F_{1/2}$-longitud del arco $C_{1/2}$, es decir, $L_{1/2}[C_1] = (\mid a \mid^{1/2} + \mid b \mid^{1/2})^2 > a + b = L_{1/2}[C_{1/2}]$.

Por otro lado, la F_1-longitud del arco C_1 es *igual* a la F_1-longitud del arco $C_{1/2}$, es decir, $L_1[C_1] = a + b = L_1[C_{1/2}]$; en efecto, la igualdad se cumple, pues F_1 es débilmente convexa en la dirección de v. Por lo tanto, $H = \{(a, 0), (0, b)\}$ y $\{v\}$ son dos conjuntos de vectores tangentes F_1-minimizantes con suma v, lo que significa que $C_{1/2}$ y C_1 son arcos F_1-geodésicos de $(0, 0)$ a (a, b). Esto confirma que los arcos F-geodésicos son F^*-geodésicos pero no necesariamente al revés.

También podemos notar que la *aditividad de segmentos* (es decir, $G_{1/2}(a,c) = G_{1/2}(a,b) + G_{1/2}(b,c)$ si a, b y c se encuentran sobre la misma línea recta) no se satisface en el espacio psicológico $L_{1/2}$. La aditividad de segmentos se estudió por Tversky y Gati [18] y Jäkel et al. [11].

3.8. Discusión.

En esta sección discutiremos brevemente los conceptos básicos referentes a la caracterización propuesta en el presente trabajo acerca de los arcos geodésicos fechnerianos en el límite,. Posteriormente, explicaremos cómo esta caracterización se puede emplear para encontrar el contorno de las indicatrices fechnerianas.

Usando las siguientes condiciones, la caracterización de los arcos geodésicos fechnerianos en el límite para x en la dirección de v se puede obtener caracterizando los conjuntos extremos F-minimizantes de vectores tangentes con suma v en x:

a) El rayo $r(v)$ derivado del vector $v \in T_xM\backslash\{0\}$ intersecta el interior relativo de una única cara $C_x(v)$ de la cerradura convexa $conv(S_x(F))$ de la indicatriz $S_x(F)$ de F en $x \in M$ (teorema 3.4).

b) Dicha cara $C_x(v)$ es la intersección de $conv(S_x(F))$ con uno de sus hiperplanos soporte.

Bajo estas condiciones, un conjunto extremo F-minimizante de vectores tangentes con suma $v \in T_xM\backslash\{0\}$ está dado por el subconjunto $\{\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)\} \subseteq E(C_x(v))$ de puntos extremos de $C_x(v)$ tal que, el punto donde el rayo $r(v)$ intersecta a $C_x(v)$, $\mathbf{1}_x^*(v) \in ri(C_x(v)) \subseteq S_x^*(F)$, se expresa de forma única como combinación convexa de los puntos $\mathbf{1}_x(u_1), \ldots, \mathbf{1}_x(u_m)$ (teoremas 3.5 y 3.6).

En otras palabras, por los teoremas 3.5 y 3.6, la caracterización de los arcos geodésicos fechnerianos en el límite en x, mediante los conjuntos minimizantes de vectores tangentes es equivalente a caracterizar la indicatriz en el punto x.

Si $H \subseteq T_xM\backslash\{0\}$ es un conjunto minimizante de vectores tangentes en x con suma v tenemos, por la ecuación (3.6),

$$F^*(x,v) = \sum_{u \in H} F(x,u),$$

y por la ecuación (3.1) la longitud de los arcos geodésicos en el límite $A(H)$ de x a $x + vs$ es igual a la F^*-longitud del segmento de línea recta de x a $x + vs$, es decir,

$$L^*[A(\{v\})] = sF^*(x,v) = \sum_{u \in H} sF(x,u) = L[A(H)].$$

En otras palabras y citando a Dzhafarov y Colonius ([9], p.695): el segmento lineal de x a $x+vs$ es un camino orientado que conecta a x con $y = x + vs$ cuya F^*-longitud psicométrica $sF^*(x,v)$ tiende a la distancia fechneriana $G(x, x+vs)$, cuando $s \to 0^+$. Este hecho tiene una importancia práctica a la hora de calcular la distancia fechneriana $G(a,b)$, dada por

$$G(a,b) = \min_{x \in \Omega_{[a,b]}} \int_\alpha^\beta F^*(x(t), \dot{x}(t))dt,$$

especialmente cuando empleamos técnicas de "fuerza bruta" para discretizar el espacio de estímulos. Debemos tomar en cuenta que los arcos geodésicos obtenidos con este método son arcos F^*-geodésicos que no necesariamente son arcos F-geodésicos.

Para finalizar, queremos enfatizar que las siguientes declaraciones son equivalentes:

a) F es convexa.

b) Para todo vector tangente u, $\{u\}$ es un conjunto F-minimizante.

c) $F = F^*$.

d) La medida de distancia en el límite d satisface la desigualdad del triángulo.

e) La distancia fechneriana G es igual a la medida de distancia en el límite d (Sánchez-Larios & Guillén-Burguete [15]).

Bibliografía

[1] Bao, D., Chern, S., & Shen, Z. (2000). *An introduction to Riemann-Finsler geometry*. New York: Springer-Verlag.

[2] Boothby, W. M. (1975). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. New York: Academic Press.

[3] Busemann, H., & Mayer, W. (1941). *On the foundations of calculus of variations*. Trans. AMS, 49, 173-198.

[4] Chern, S. & Shen, Z. (2005). *Riemann-Finsler geometry*. World Scientific Publishing, Singapore.

[5] Dzhafarov, E. N. (2002). Multidimensional Fechnerian scaling: Pairwise comparisons, regular minimality, and nonconstant self-similarity. *Journal of Mathematical Psychology*, 46, 583-608.

[6] Dzhafarov, E. N. (2008a). Dissimilarity cumulation theory in arc-connected spaces. *Journal of Mathematical Psychology*, 52, 73-92.

[7] Dzhafarov, E. N. (2008b). Dissimilarity cumulation theory in smoothly-connected spaces. *Journal of Mathematical Psychology*, 52, 93-115.

[8] Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (1999). Fechnerian metrics in unidimensional and multidimensional stimulus spaces. *Psychonomic Bulletin and Review*, 6(2), 239-268.

[9] Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (2001). Multidimensional Fechnerian scaling: Basics. *Journal of Mathematical Psychology*, 45, 670-719.

[10] Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (2007). Dissimilarity cumulation theory and subjective metrics. *Journal of Mathematical Psychology*, 51, 290-304.

[11] Jäkel, F., Schölkopf, B., & Wichmann, F. A. (2008). Similarity, kernels, and the triangle inequality. *Journal of Mathematical Psychology*, 52, 297-303. 683

[12] Kozma, L., & Tamàssy, L. (2003). Finsler geometry without line elements faced to applications. *Reports on Mathematical Phisics*, 51, 233-250.

[13] Red, V. N., Bui, D. B., & Grishko, Y. A. (2015). Current state of multisets theory from the essential viewpoint. *Cybernetics and Systems Analysis*, 51(1), 150-156. doi:10.1007/s10559-015-9707-z.

[14] Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis.* Princeton: University Press.

[15] Sánchez-Larios, H., & Guillén-Burguete, S. (2010). Arc length associated with generalized distance functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 370, 49-56.

[16] Spivak, M. (1999). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (3rd ed., Vol. 1). Houston, Texas: Publish or Perish.

[17] Tamássy, L. (2008). Relation between metric spaces and Finsler spaces. *Differential Geometry and its Applications*, 26, 483-494.

[18] Tversky, A., & Gati, I. (1982). Similarity, separability, and the triangle inequality. *Psychological Review*, 89(2), 123–154.

[19] Dzhafarov, E. N., (2002). Multidimensional Fechnerian scaling: Probability - Distance hypothesis. *Journal of Mathematical Psychology*, 46, 352-374.

[20] Dzhafarov, E. N. (2002). Multidimensional Fechnerian Scaling: Perceptual Separability. *Journal of Mathematical Psychology*, 46,564-582.

[21] Jun Zhang (2004). Dual scaling of comparison and reference stimuli in multi-dimensional psychological space. *Journal of Mathematical Psychology*, 48, 409-424.

[22] Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (2004). Psychophysics without physics: a purely psychological theory of Fechnerian scaling in continuous stimulus spaces. *Journal of Mathematical Psychology*, 49, 1-50.

[23] Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (2004). Psychophysics without physics: extension of Fechnerian scaling from continuous to discrete and discrete-continuous stimulus spaces. *Journal of Mathematical Psychology*, 49, 125-141.

[24] Ünlü, A., Thomas, K. & Dzhafarov, E. N., (2009). Fechnerian Scaling in $\mathbb{R}$: The Package fechner. *Journal of Statistical Software*, 31, 1-24.

[25] Sánchez Larios, H., (2014). *Longitud de arco asociada a funciones distancia generalizadas.* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México.

[26] Asanov, G. S. (1985). *Finsler geometry, relativity and gauge theories.* Dordrecht: Reidel.

[27] Rund, H. (1959). *The differential geometry of Finsler spaces.* Berlin: Springer-Verlag.

[28] Fechner, G. T. (1851). *Zend-Avesta oder über die Dinge des Himmels une des Jenseits.* Leipzig: Voss.

[29] Fechner, G. T. (1860). *Elemente der Psychophysik.* Leipzig: Breitkopf & Härtel.

[30] Fechner, G. T. (1877). *In Sachen der Psychophysik.* Leipzig: Breitkopf & Härtel.

[31] Fechner, G. T. (1887). Über die psychischen Massprincipien und das Webersche Gesetz. *Philosophische Studien*, 4, 161-230.

[32] Busemann, H. (1950). The geometry of Finsler spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 56, 515.

[33] Dzhafarov, E. D., & Colonius, H. (1999a). Fechnerian metrics in unidimensional and multidimensional stimulus spaces. *Psychological Bulletin and Review*, 6,239-268.

[34] Dzhafarov, E. N., & Colonius, H. (1999b). Fechnerian metrics. In P. R. Kileen & W. R. Uttal (Eds.), *Looking back: The end of the 20th century psychophysics* (p. 111-116). Tempe, AZ: Arizona University Press.

[35] Aleksandrov, A. D., & Berestovskii, V. N. (1995). Finsler space, generalized. In M. Hazewinkel (Managing Ed.). *Encyplopaedia of mathematics* (Vol. 4, p. 26-27). Dordrecht: Kluwer.

[36] Busemann, H. (1942). *Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of geometry*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[37] Busemann, H. (1955). *The geometry of geodesics*. New York: Academic Press.