UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMATICAS

Sobre la dinámica de campos vectoriales polinomiales cuasi-homogéneos y sus perturbaciones

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

RUBÉN DARÍO SANTAELLA FORERO

TUTOR(A) PRINCIPAL DE TESIS:
Dr. CARLOS OSVALDO OSUNA CASTRO
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hodalgo

Morelia, Michoacán 11 de Febrero de 2016.

DEDICATORIA

A mi querido hermano Alvaro Andrés,
que más que mi hermano es mi mejor amigo.

A mis padres Fanny Forero
y Alvaro Santaella.

A mamá Margarita, siempre te recuerdo,
gracias a Dios por ti y por tus hijos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis agradecimientos principalmente a mi familia que siempre ha creído en mí, dándome su apoyo, a mis compañeros y amigos de travesía por su constante ánimo, en especial a Liliana Esquivel y Leidy Gonzáles quienes se han convertido en mi familia.

También a mis profesores que compartieron su conocimiento de la mejor manera, especialmente a mi tutor el Dr. Osvaldo Osuna quien no solo guió mis pasos en el presente trabajo sino que también contribuyó con mi transición en este nuevo país y en mi maestría. A Morelia Alvarez coordinadora del posgrado, que siempre fue de gran apoyo desde el principio.

A la Dra. Rocío González, el Dr. Abdon Choque, el Dr. Victor Breña y el Dr. Pavel Naumkin, quienes junto el Dr. Osvaldo Osuna hicieron parte de mi mesa sinodal, y que con sus comentarios y observaciones ayudaron a mejorar paso a paso la edición de este trabajo.

Así mismo doy los agradecimientos a CONACYT, al Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas entre la Universidad Nacional Autónoma de México y la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, al Centro de Ciencias Matemáticas y al Instituto de Física y Matemáticas, a todos ellos gracias por su apoyo y por darme la oportunidad de cumplir esta meta.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Las Ecuaciones Diferenciales representan una herramienta muy útil tanto en las ciencias aplicadas como en las fundamentales. Sus orígenes se pueden fijar en la segunda mitad del siglo XVII con Newton y Leibnitz. Posteriormente a sus inicios, el interés en el área estuvo centrado principalmente en la búsqueda de métodos de integración explícitos para las ecuaciones diferenciales por medio de funciones elementales. Sin embargo, es bien conocido que es imposible integrar explícitamente ciertas ecuaciones diferenciales, lo cual motivó la necesidad de encontrar nuevos métodos de estudio.

Fueron H. Poincaré y A. Lyapunov en [**1**] y [**2**] respectivamente quienes sentaron las bases de lo que hoy se conoce como la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. La meta en este tiempo consiste en describir propiedades geométricas, topológicas, etc., de las soluciones en el conjunto de definición de la ecuación. En las matemáticas contemporáneas la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales es un área de amplio estudio; pese a esto aún quedan muchas cuestiones básicas por responder, algunas de ellas relativas a ciclos límite. Es decir, órbitas periódicas aisladas en el conjunto de trayectorias cerradas. Aún en el caso bidimensional se está lejos de tener un entendimiento aceptable sobre las órbitas periódicas o ciclos límite, a pesar de que se cuentan resultados fuertes en el caso del plano.

Por otro lado, alrededor de la mitad del siglo XIX S. Lie realizó un descubrimiento profundo. Lie descubrió que las técnicas especiales de integración existentes en ese tiempo, eran consecuencia de un procedimiento general basado sobre la invariancia de la ecuación diferencial bajo un grupo continuo de simetrías; esto unificó y extendió substancialmente las técnicas de integración. Además, sus resultados producen en forma más sistemática *Factores*

Integrantes (los cuales fuerón descubiertos y utilizados por Euler). En vista de que el interés principal de este trabajo son ecuaciones diferenciales asociadas a campos vectoriales en el plano de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_1(x,y), \\ \dot{y} &= f_2(x,y), \end{cases}$$

el puente natural a ecuaciones diferenciales escalares viene dada por la forma Pfaffiana del campo $\omega = -f_2 dx + f_1 dy = 0$. Esto permitirá considerar el concepto de *Factor Integrante Inverso*, el cual es una función $\mathcal{V} \in C^1(U)$ que satisface la ecuación lineal $F \cdot \mathrm{grad}\mathcal{V} = \mathrm{div}(F)\mathcal{V}$ siendo U el dominio del sistema diferencial anterior. El nombre factor integrante inverso para la función $\mathcal{V}$ surge del hecho de que $1/\mathcal{V}$ es un factor integrante para el campo vectorial F, es decir, $F/\mathcal{V}$ restringido a $U \backslash \mathcal{V}^{-1}(0)$ tiene divergencia cero, donde $\mathcal{V}^{-1}(0)$ es el conjunto de ceros de $\mathcal{V}$.

Una propiedad característica de los factores integrantes inversos es que su conjunto de ceros esta formado por soluciones del sistema y además captura algunas soluciones especiales para la dinámica del campo. Más aún, durante mucho tiempo se consideraron en forma heurística conexiones entre el conjunto de ceros y trayectorias distinguidas del sistema; ver por ejemplo [**3**]. En [**4**] se estableció en forma definitiva que el conjunto de ceros de un factor integrante inverso contiene los ciclos límite de un sistema.

Actualmente los factores integrantes inversos son herramientas útiles en el estudio de las propiedades cualitativas de los sistemas diferenciales. En particular, la relación de los factores integrantes inversos con ciclos límite, integrabilidad, simetrías, problemas de centro, bifurcaciones y otras propiedades se han estudiado ampliamente (ver [**3, 4, 5, 6, 7**]).

En este trabajo se estudiará una clase especial de sistemas diferenciales, los sistemas difrenciales *cuasi-homogéneos*, los cuales son invariantes bajo transformaciones de semejanza. Esta característica es importante debido a que permitirá crear de forma explícita factores integrantes inversos. Como consecuencia, se podrá obtener una herramienta en el estudio de la geometría de estos sistemas. De esta manera, con la definición y el estudio de los factores integrantes inversos junto con algunas propiedades de las curvas algebraicas se establecerá que en el caso bidimensional no podrán existir ciclos límite. Además, gracias a este desarrollo se podrá mostrar que para algunos sistemas no necesariamente cuasi-homogéneos también se garantiza la no existencia de ciclos límite.

Posteriormente, se descarta la existencia de ciclos límite para ciertas perturbaciones de los sistemas cuasi-homogéneos, esto se hará utilizando la teoría de integrabilidad de Darboux, la cual entre otras cosas importantes, dará una forma de encontrar primeras integrales; a partir de ellas y su relación con los factores integrantes inversos nos permitirá mostrar la inexistencia de ciclos límite para este tipo de sistemas, bajo ciertas condiciones propias de sus perturbaciones, como se estudiará más adelante.

Por último, gracias a la variedad de aplicaciones y ejemplos, se dedicará el capítulo 3 en específico para mostrarlos y en éste se probará la existencia de los sistemas diferenciales homogéneos, y algunos ejemplos aplicados de ellos. Además, se verá que al ser un caso específico de los sistemas cuasi-homogénos, éstos cumplen de igual forma las mismas propiedades. De esta manera también se tendrá la posibilidad de analizar el comportamiento geométrico de sus soluciones.

La distribución de esta tesis se basa en tres capítulos, cada uno de vital importancia para la comprensión de los resultados. Las bases teóricas se fundan en el primer capítulo, aqui daremos los principales teoremas y definiciones de diferentes campos teóricos, como por ejemplo la teória de grupos de Lie, la teoría de Factores Integrantes Inversos, los principios de curvas invariantes y la teoría de integrabilidad de Darboux. Posteriormente se mostrará la relación entre estas ideas y el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales, principalmente el estudio de la existencia o inexistencia de ciclos límite. Una vez definidas nuestras herramientas, en el segundo capítulo entrarán en juego los sistemas a estudiar, los sistemas cuasi-homogéneos. Se describirán varias propiedades de estos, para luego combinarlos con las teorías definidas en el capítulo anterior; con esto se mostrarán diversos resultados. Es claro que aquí se concentrará el trabajo principal. Para el final, sin dejar de ser importante, se estudiarán algunas aplicaciones en el tercer capítulo.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

La teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se ocupa de estudiar las propiedades locales y globales de las soluciones de sistemas diferenciales. El objetivo principal de esta teoría es la descripción geométrica de las soluciones de estos sistemas. En el caso plano, la existencia (o inexistencia) de ciclos límite es una propiedad importante que se utiliza para caracterizar los sistemas diferenciales.

Dado un conjunto abierto y conexo U $\subseteq \mathbb{R}^2$, se considerará un sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{x} & = f_1(x,y), \\ \dot{y} & = f_2(x,y), \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $f_i : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, son funciones C^1 para $1 \leq i \leq 2$. Denotando $f := (f_1, f_2)$, el sistema (1.1) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{z} = f(z), \qquad z := (x,y) \in U. \tag{1.2}$$

Definición 1.1. *Tomando $\varphi : \mathbb{R} \times U \longrightarrow U$ dada por $(t,z) \longmapsto \varphi(t,z)$ tal que para cada $z \in U$, $t \longmapsto \varphi(t,z)$ es solución del problema de valor inicial*

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,z) = f(\varphi(t,z)), \qquad \varphi(0,z) = z.$$

φ es el flujo de la ecuación diferencial y satisface

$$\varphi(t+s,z) = \varphi(t,\varphi(s,z)) \qquad \forall\ t,s \in \mathbb{R} \ \ y \ \ z \in U.$$

1. Ciclos Límite

Considerando el sistema en $\mathbb{R}^2$ definido por $\dot{z} = f(z)$, con $z \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ y el flujo $\varphi(t, z)$ asociado al sistema, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.2. *Sean $z, p \in U$ y $\varphi(t, z)$ la solución que pase por el punto z. Se dice que p es un punto ω-límite de z si existe una sucesión monótona creciente de tiempos $t_k \longrightarrow \infty$ tal que*

$$\varphi(t_k, z) \longmapsto p.$$

El conjunto de todos los puntos ω-límite de z se escribe como $\omega(z)$. Bajo las mismas condiciones, pero con tiempos negativos tendiendo a $-\infty$, definimos un punto α-límite y su conjunto $\alpha(z)$.

Cuando una solución periódica γ está contenida en el α-límite o el ω-límite de un punto z que no pertenece a γ, entonces se dirá que γ es un ***ciclo límite****.*

En el caso que f sea analítica, por ejemplo polinomial, se dice que γ es un ciclo límite si γ es una órbita periódica aislada en el conjunto de órbitas periódicas.

EJEMPLO 1.1. La ecuación de Van der Pol es uno de los ejemplos más importantes en la teoría de ecuaciones diferenciales no lineales. Se origina del estudio realizado por Rayleigh en 1883, donde la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + \omega x = 0,$$

representa un modelo de vibraciones para la lengüeta de un clarinete. Esta ecuación tiene aplicaciones muy diversas dentro de la física y la biología, como lo demostró Van der Pol con el estudio de la variación de voltaje en circuitos eléctricos o los latidos del corazón.
Una variación de la ecuación de Van der Pol está dada por el sistema no lineal

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} & = y - x^3 + x, \\ \dot{y} & = -x. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

El sistema (1.3) exhibe un punto de equilibrio inestable en el origen y una solución periódica asintóticamente estable que rodea el origen. Cualquier otra curva solución no trivial del sistema tiene por ω-límite dicha curva, lo que la convierte en un cíclo límite del sistema, mientras su α-límite puede ser vacío o igual al origen dependiendo de su condición inicial. Un estudio detallado de este sistema puede encontrarse en [**8**], capítulo 10.

Ahora, se darán algunas propiedades interesantes sobre las órbitas periódicas (sólo se nombrarán, ya que las demostraciones son conocidas y se pueden ver en [**8**]) con relación a los puntos críticos.

Proposición 1.1. *Sea* $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ *una orbita periódica para* $z' = f(z)$*, entonces* $Int(\gamma)$ *contiene un punto crítico.*

Entonces una pregunta que se prodría hacer es: ¿cómo podemos saber que un sistema diferencial tiene una órbita periódica?, Una respuesta a esta pregunta es uno de los teoremas más utilizados en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, el teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 1.1 (Poincaré-Bendixson). *Un conjunto límite* ($\omega(z)$ *o* $\alpha(z)$) *compacto no vacío de un flujo* C^1 *sobre el plano* $\mathbb{R}^2$*, el cual no contiene puntos críticos, es una órbita periódica.*

De forma más general, todo conjunto compacto no vacío, que representa un conjunto límite de un flujo en el plano, puede reducirse a la unión finita de puntos críticos y cíclos límite. Se omitirá la demostración del teorema anterior, refiriendo al lector a la exposición clásica que se encuentra en el libro de Hirsch y Smale, [**8**, capítulo 11].

2. Grupos de Lie (Uniparamétricos)

Ahora se expondrán unos principios básicos de la teoría de grupos de Lie que más adelante se convertirán en una herramienta esencial para el desarrollo óptimo de este trabajo.

En términos generales, un grupo de simetrías de un sistema de ecuaciones diferenciales es un grupo continuo que transforma soluciones del sistema a otras soluciones. Los ejemplos típicos son: los grupos de traslaciones, rotaciones y de multiplicación por escalares. Estos ciertamente no agotan la gama de posibilidades que se podrían tener. Una vez que se ha determinado el grupo de simetrías de un sistema de ecuaciones diferenciales, varias aplicaciones están disponibles y una de estas la veremos posteriormente.

En este caso se quiere mostrar el grupo de simetrías de Lie, y sus propiedades, para luego ver las diferentes aplicaciones de estos grupos en sistemas de ecuaciones diferenciales; veáse [**9**].

Para definir un grupo de Lie es necesario tener presente el concepto de una variedad diferenciable. La cual se define como un espacio topológico $\mathbb{X}$ dotado de una estructura diferenciable, donde una estructura diferenciable de $\mathbb{X}$ esta dada como una colección de subconjuntos de las funciones continuas (de cada abierto U en $\mathbb{X}$), la cual es una $\mathbb{R}$-álgebra, llamada colección de funciones diferenciables.

DEFINICIÓN 1.3. *Un **grupo de Lie** es una variedad diferenciable $\mathbb{G}$ con estructura de grupo tal que las operaciones de grupo*

$$(a,b) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to ab \in \mathbb{G}, \qquad a \in \mathbb{G} \to a^{-1} \in \mathbb{G},$$

son funciones diferenciables.

Habitualmente se denotará con $e \in \mathbb{G}$ el elemento neutro del grupo y con notación multiplicativa la operación del grupo.

DEFINICIÓN 1.4. *Se dirá que un grupo de Lie $\mathbb{G}$ actúa (por la izquierda), sobre una variedad diferenciable $\mathbb{X}$ si existe una aplicación diferenciable definida por:*

$$\Phi : \mathbb{G} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X},$$

la cual satisface las siguientes condiciones:

- *Para el neutro $e \in \mathbb{G}$ y cualquier $x \in \mathbb{X}$*

$$\Phi(e,x) = x.$$

- *Para cualesquier $a, b \in \mathbb{G}$ y $x \in \mathbb{X}$*

$$\Phi(a, \Phi(b,x)) = \Phi(ab, x).$$

A lo largo de este trabajo se considerará $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ actuando sobre $\mathbb{R}^2$ y en este contexto consideraremos específicamente la acción descrita por

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

y con ella definiremos los grupos uniparamétricos sobre un grupo de Lie.

DEFINICIÓN 1.5. *Un **grupo uniparamétrico** de $\mathbb{R}^2$ es precisamente un elemento φ tal que $\varphi \in Hom(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, es decir un morfismo de grupos de Lie $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, el cual es diferenciable y cumple:*

- $\varphi(e, \cdot) = I$.
- $\varphi(s_1, \varphi(s_2, \tilde{x})) = \varphi(s_1 + s_2, \tilde{x})$.

Una de las propiedades más importantes de un grupo uniparamétrico φ viene dada por

$$\varphi(s,\cdot)^{-1} = \varphi(-s,\cdot),$$

ya que se observa que:

$$\varphi(s,\cdot)^{-1}(\varphi(s,\tilde{x})) = \varphi(-s,\varphi(s,\tilde{x})) = \varphi(-s+s,\tilde{x}) = \tilde{x}.$$

Así, se tiene que φ definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo.

Por lo tanto a $\varphi(s,(x,y)) = (\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ se le puede expresar de la siguiente forma:

$$\tilde{x} = X(s,(x,y)) = X(x,y,s) \quad \tilde{y} = Y(s,(x,y)) = Y(x,y,s).$$

Ahora, se dará la definición de una función invariante por un grupo uniparamétrico. Enseguida se mostrará la relación entre esta definición y las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales.

Definición 1.6. *Se dirá que una función $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es **invariante** por el grupo uniparamétrico si*

$$U(\tilde{x},\tilde{y}) = U(x,y),$$

i.e.

$$U(X(x,y,s),Y(x,y,s)) = U(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Si se toma la expansión en series de Taylor de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{x} & = X(x,y,s), \\ \tilde{y} & = Y(x,y,s). \end{array} \right. \tag{1.4}$$

con respecto a s en s_0, se tiene que

$$\tilde{x} = x + \left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)_{s=s_0}(s-s_0) + \cdots$$

$$\tilde{y} = y + \left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)_{s=s_0}(s-s_0) + \cdots$$

denotando de la siguiente manera

$$\xi(x,y) = \frac{\partial X}{\partial s}|_{s=s_0} \qquad y \quad \eta(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial s}|_{s=s_0},$$

y considerando s suficientemente pequeño, a primer orden, se obtiene que

$$\tilde{x} = x + \xi(x,y)(s-s_0),$$

$$\tilde{y} = y + \eta(x,y)(s-s_0).$$

Esta es la transformación infinitesimal del grupo uniparamétrico. De aquí en adelante a ξ y a η se definirán como los **generadores infinitesimales** de esta transformación.

Si se deriva una función $U(X(x,y,s),Y(x,y,s)) = U(x,y)$ (la cual es invariante por la transformación anterior) con respecto a s, se tiene que

$$\frac{\partial U}{\partial x}\xi(x,y) + \frac{\partial U}{\partial y}\eta(x,y) = 0. \tag{1.5}$$

Debido a que la ecuación característica de (1.5) está dada por

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)}, \tag{1.6}$$

una solución de (1.5) es una solución arbitraria de una “integral” de la ecuación (1.6). Esta función arbitraria es la función invariante más general dada por el grupo (1.4).

Por lo tanto se define el operador

$$\mathcal{Y} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y},$$

que actúa sobre una función f de la forma

$$\mathcal{Y}(f) = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Note que $\mathcal{Y}(x) = \xi$ y $\mathcal{Y}(y) = \eta$, además se puede ver que f es invariante si $\mathcal{Y}(f) = 0$ debido a (1.4).

Ejemplo 1.2. Si se define $\xi(x,y) = -y$ y $\eta(x,y) = x$, se tiene que:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dx}{x} \iff xdx = -ydy \iff x^2 + y^2 = 0.$$

Por lo tanto $f = x^2 + y^2$ es una función invariante.

Es importante decir, que dado un conjunto uniparamétrico, es posible calcular su transformación infinitesimal, y su recíproca también es cierta.

Para el sistema diferencial de primer orden dado en (1.1) con su campo vectorial asociado

$$F := f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y},$$

y escribimos la ecuación que describe este sistema en su forma Pfaffiana de la siguiente manera:

$$\omega = f_1(x,y)dy - f_2(x,y)dx = 0.$$

Tal que las funciones f_1 y f_2 son de clase C^1 en una región abierta y conexa $U \subseteq \mathbb{R}^2$ como se hizo antes, teniendo en cuenta que si G un grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones

$$\tilde{x}(x, y; \epsilon) = x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2), \quad \tilde{y}(x, y; \epsilon) = y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2), \tag{1.7}$$

actuando en U con un generador infinitesimal

$$\mathcal{Y} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y},$$

con $\epsilon << 1$, $\xi,\ \eta \in C^1(U)$, sobre el sistema diferencial (1.1), entonces se puede definir una *simetría infinitesimal* a partir del grupo de transformaciones (1.7) tal que, bajo la acción de este grupo, una curva solución del sistema (1.1) es transformada sobre otra curva solución del mismo sistema.

3. Factores Integrantes Inversos (FII)

A continuación se definirán los factores integrantes inversos y su relación con los grupos de Lie. Posterior a esto se expondrán los resultados que se obtienen al combinar estas dos teorías con las ecuaciones diferenciales. Antes se presentará a los factores integrantes, junto con algunas de sus propiedades.

Como se sabe los factores integrantes son utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, el matemático que se encargó de introducir su definición y empezó a utilizarlos en la solución de ecuaciones diferenciales fue el matemático suizo Leonhard Euler, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, quien dedicó parte de su vida al desarrollo de diversos campos de la matemática.

Retomando la ecuación que describe al sistema (1.1) en su forma Pfaffiana

$$\omega = f_1(x, y)dy - f_2(x, y)dx = 0, \tag{1.8}$$

suponiendo que existe una solución de (1.8) que puede expresarse de la forma $H(x, y) = h$ donde H tiene derivadas parciales continuas en U, y h es una constante arbitraria, entonces no es difícil ver que H satisface la siguiente ecuación diferencial parcial lineal:

$$f_1\frac{\partial H}{\partial x} + f_2\frac{\partial H}{\partial y} = 0. \tag{1.9}$$

Además, cada función H no constante que sea solución de (1.9), también lo es de (1.8) al considerar $H(x, y) = h$. Por lo tanto, la solución de (1.8) y la solución de (1.9) son problemas equivalentes. La conexión entre las ecuaciones (1.8) y (1.9) pueden presentarse también de la siguiente forma: suponiendo que $H(x, y) = h$ es cualquier solución de (1.8), entonces (1.9) implica que

$$\frac{\partial H/\partial y}{f_1} = -\frac{\partial H/\partial x}{f_2}. \tag{1.10}$$

Denotando el valor común de estas dos relaciones como $\mu(x, y)$, se tiene que $\partial H/\partial x = -\mu f_2$ y $\partial H/\partial y = \mu f_1$. De esta manera,

$$dH(x, y) = \mu(x, y)(f_1(x, y)dy - f_2(x, y)dx).$$

La función $\mu(x, y)$ se le llamará el **factor integrante** de la ecuación diferencial (1.8) dado que esta ecuación se transforma en una ecuación diferencial exacta, al multiplicarse por $\mu(x, y)$. Inversamente, para cualquier factor integrante μ de (1.8), esto es, para cada μ tal que $\mu(x, y)(f_1(x, y)dy - f_2(x, y)dx)$ es el diferencial de alguna función H, es fácil determinar las soluciones de la forma $H(x, y) = h$ de (1.8).

En conclusión, resolver la ecuación diferencial (1.8) es equivalente a encontrar un factor integrante de esta ecuación. Cuando un factor integrante μ de (1.8) está disponible, la función H puede obtenerse a partir de la integral de línea

$$H = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \mu(x, y)(f_1(x, y)dy - f_2(x, y)dx),$$

a lo largo de cualquier curva que conecta un punto arbitrario (x_0, y_0) y el punto (x, y) en la región U. Cabe advertir que esta integral de línea podría no estar bien definida si la región U no es simplemente conexa; sin embargo si existe un factor integrante μ de (1.8), se tiene que H está bien definida en cada subcomponente simplemente conexa de la región U.

Definición 1.7. *Dada $\mathcal{V}$ una función C^1, tal que $\mathcal{V} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se dirá que $\mathcal{V}$ es un* ***factor integrante inverso*** *(FII) del sistema* (1.1) *si no es localmente nula y satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales:*

$$f_1\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + f_2\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = \operatorname{div}(F) \cdot \mathcal{V}, \tag{1.11}$$

donde

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Es importante decir que, el cálculo de un factor integrante inverso para un sistema concreto no es una tarea fácil, su dificultad es comparable a la de hallar la solución del propio sistema.

Si $\mathcal{V}$ es un factor integrante inverso de un campo vectorial F, entonces el conjunto de ceros de $\mathcal{V}$, definido como $\mathcal{V}^{-1}(0) := \{(x, y) \mid \mathcal{V}(x, y) = 0\}$, se compone de las trayectorias del campo F, ya que la ecuación (1.11) que define a $\mathcal{V}$ muestra que F es ortogonal al campo vectorial gradiente $\nabla\mathcal{V}$ a lo largo del conjunto de ceros de $\mathcal{V}$.

Como fue comentado anteriormente el nombre de "factor integrante inverso" surge de la siguiente afirmación que se enuncia como lema por su importancia.

Lema 1.1. *La función $\mathcal{V}$ resuelve la ecuación* (1.11) *si y solo si $\mu = 1/\mathcal{V}$ es un factor integrante para F siempre y cuando $\mathcal{V}$ sea diferente de cero en U.*

La importancia de los factores integrantes inversos surge del hecho de que el diferencial $w/\mathcal{V} = (f_1 dy - f_2 dx)/\mathcal{V}$ es cerrado (i.e. $d(w/\mathcal{V}) = 0$) en $U \backslash \mathcal{V}^{-1}(0)$. Luego, en el caso en el que $U \backslash \mathcal{V}^{-1}(0)$ es simplemente conexo, $w/\mathcal{V}$ es exacta (i.e. $w/\mathcal{V} = dH$), y por lo tanto se puede construir de forma inmediata una primera integral $H(x, y)$ de la ecuación diferencial de clase C^2.

Como consecuencia, el campo vectorial $F := f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y}$ es topológicamente equivalente, en U, al campo vectorial hamiltoniano

$$F/\mathcal{V} = \frac{\partial H}{\partial y}\partial x - \frac{\partial H}{\partial x}\partial y.$$

Ahora, recordando que un ciclo límite es una órbita periódica que tiene una vecindad anular libre de otras soluciones periódicas, una relación útil entre ciclos lḿite y factores integrantes inversos se establece en el siguiente teorema, que relaciona a los ciclos límite con el conjunto de ceros de un FII.

Teorema 1.2. *(*[**4**]*, Teorema 9) Sea F un campo vectorial C^1 en un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, donde $\mathcal{V} : U \to \mathbb{R}$ es un factor integrante inverso del sistema* (1.1)*. Si $\gamma \subset U$ es un ciclo límite de* (1.1)*, entonces γ está contenido en el conjunto*

$$\mathcal{V}^{-1}(0) := \{(x, y) \in U \mid \mathcal{V}(x, y) = 0\}.$$

Prueba. Como $\mathcal{V}$ es factor integrante inverso, el cual está definido en U, entonces el campo vectorial F es Hamiltoniano en $U \backslash \mathcal{V}^{-1}(0)$ y recordando que el flujo de un campo vectorial Hamiltoniano preserva áreas, si se supone que existe un ciclo límite γ que no está totalmente contenido en $\mathcal{V}^{-1}(0)$, entonces el sistema intercepta a $U \backslash \mathcal{V}^{-1}(0)$. Si esto ocurre, se tiene que cerca de γ el flujo no preservaría áreas, por definición de ciclo límite, lo cual contradice que sea Hamiltoniano. Por lo tanto $\gamma \subset \mathcal{V}^{-1}(0)$. $\square$

Además se puede ver que el campo vectorial F definido anteriormente está directamente asociado a la ecuación diferencial ordinaria de primer orden (1.1), la cual se puede expresar de la siguiente manera $dy/dx = f_2(x,y)/f_1(x,y)$. Esta forma se conecta directamente con en el método de simetrías de Lie, el cual proporciona una fórmula explícita para la solución general por cuadratura.

De hecho, se puede ver que si se conoce una simetría en U con generador infinitesimal $\mathcal{Y} = \xi(x,y)\partial x + \eta(x,y)\partial y$ (como se definió anteriormente), se puede construir un factor integrante inverso $\mathcal{V} = det\{F, \mathcal{Y}\} = f_1\eta - f_2\xi$ definido en U.

En conclusión, es claro que una de las aplicaciones más importantes de los FII, gracias a las simetrías de Lie y a sus propiedades, es la localización de ciclos límite. Se propone en este caso aprovechar esta conexión para estudiar la existencia de ciclos límite de ciertos sistemas cuyos factores integrantes inversos pueden ser obtenidos explícitamente. En particular, se hará un estudio enfocado en los sistemas cuyos FII están dados principalmente por polinomios cuasi-homogéneos. Esto se realizará en el capítulo dos.

4. Familias de Curvas Invariantes por un grupo uniparamétrico

Una familia uniparamétrica de curvas está representada por

$$\phi(x,y) = c$$

con c un parámetro dado, aunque su representación no es necesariamente única.

Definición 1.8. *Una curva C es llamada* ***curva invariante por un grupo uniparamétrico*** *φ si cualquier punto de C puede ser transformado a otro punto de la mismas curva C por medio de las transformaciones de grupo.*

Y se dirá que una ***familia de curvas es invariante por*** *φ si la imagen de cada curva de una familia dada es transformada en otra curva de la misma familia.*

Así, para $s \in \mathbb{R}$ fijo, los puntos imagen $(X(x,y,s), Y(x,y,s)) \in \phi(x,y)$ satisfacen que

$$\phi(X(x,y,s), Y(x,y,s)) = k = k(s,c).$$

Luego, diferenciando respecto a s en s_0 se tiene que

$$\xi(x,y)\phi_x + \eta(x,y)\phi_y = \left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)_{s=s_0},$$

por lo tanto el lado derecho es una función F que solo depende de c

$$\xi(x,y)\phi_x + \eta(x,y)\phi_y = F(c) = F(\phi).$$

Como la representación de esta familia de curvas no es única, lo anterior es reducido a

$$\xi\phi_x + \eta\phi_y = 1.$$

Entonces, se tiene que, dada una familia de curvas invariantes por φ, siempre es posible tomar una representación ϕ tal que $\xi\phi_x + \eta\phi_y = 1$.

Definición 1.9. *La transformación $\tilde{x} = X(x,y,s)$, $\tilde{y} = Y(x,y,s)$ y la relación $\dot{\tilde{y}} = \frac{Y_x + Y_y\dot{y}}{X_x + X_y\dot{y}}$ definen un grupo llamado el **grupo extendido** descrito como:*

$$(x,y) \to (\tilde{x},\tilde{y}),$$

$$\dot{y} \mapsto \dot{\tilde{y}}.$$

La relación $\dot{\tilde{y}} = \frac{Y_x + Y_y\dot{y}}{X_x + X_y\dot{y}}$ viene dada de ver la conexión que hay entre la derivada $\dot{\tilde{y}} = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}$ y $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$, esta conexión se ve apartir de que las curvas definidas en el espacio (x,y) son invariantes por el grupo uniparamétrico con la transformación descrita anteriormente (i.e. envía curvas del espacio (X,Y) en otras curvas del espacio (X,Y)).

Definición 1.10. *Una ecuación diferencial $f(x,y,\dot{y}) = 0$ es **invariante bajo el grupo extendido** descrito anteriormente si la familia de curvas $f(x,y,\dot{y}) = 0$ es invariante por el grupo uniparamétrico.*

Recordando que $f(x,y,\dot{y}) = 0$ es invariante por el grupo uniparamétrico si

$$f(x,y,\dot{y}) = f(\tilde{x},\tilde{y},\dot{\tilde{y}}).$$

La solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una familia uniparamétrica de curvas llamadas curvas integrales. Si la ecuación diferencial es invariante bajo un grupo uniparamétrico, entonces la familia de curvas integrales es invariante por la acción de tal grupo.

Por tanto, tal familia uniparamétrica $\psi(x,y) = c$ puede ser parametrizada como

$$\psi_x dx + \psi_y dy = 0.$$

Suponiendo que $Mdx + Ndy = 0$ admite un factor integrante, entonces existe $\psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\psi_x = \mu M$ y $\psi_x = \mu N$, teniendo en cuenta que un factor integrante μ es una función que multiplicada por una ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no exacta, la convierte en exacta.

Como $\psi(x,y)=c$ es invariante por el grupo, se puede elegir una representación de ψ tal que

$$\xi\psi_x+\eta\psi_y=1.$$

Y sustituyendo

$$\xi\mu M+\eta\mu N=1.$$

DEFINICIÓN 1.11. *La **forma de Lie para un factor integrante** de una ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ invariante por un grupo está dada por*

$$\mu=\frac{1}{\xi M+\eta N}.$$

Dada esta definición, se relaciona la forma de Lie para un factor integrante con una ecuación diferencial ordinaria; ademas de ver cómo ésta se vuelve invariante. Formalizando este resultado se tiene la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 1.2. *Suponiendo que μ es un factor integrante de*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,$$

y, además, suponiendo que existen funciones $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$ tales que

$$\mu=\frac{1}{\xi M+\eta N},$$

entonces la ecuación diferencial es invariante por el grupo cuya transformación infinitesimal tiene generadores ξ y η.

Prueba. Como μ es factor integrante entonces existe un ψ tal que

$$\psi_x=\mu M \quad y \quad \psi_y=\mu N,$$

donde

$$\mu=\frac{1}{\xi M+\eta N}.$$

De esta forma,

$$\psi_x=\frac{1}{\xi M+\eta N}M \quad y \quad \psi_y=\frac{1}{\xi M+\eta N}N,$$

$$\xi\psi_x+\eta\psi_y=\frac{1}{\xi M+\eta N}(\xi M+\eta N)=1.$$

Esto significa que $\psi(x,y)=c$ es invariante por el grupo cuyos generadores son ξ y η. □

5. Curvas Algebraicas Invariantes

En esta sección se presentarán algunos resultados básicos de la geometría algebraica. Por ejemplo los conjuntos algebraicos y las curvas algebraicas invariantes (ver [**10**]). Además se darán propiedades que serán de utilidad para mostrar la localización de ciclos límite de cierta clase de sistemas diferenciales.

Definición 1.12. *Sea* $\mathbb{R}[x, y]$ *el anillo de polinomios sobre* $\mathbb{R}$ *en dos variables. Tomando* $P \in \mathbb{R}[x, y]$*, se denota su* ***conjunto de ceros*** *por*

$$V(P) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}.$$

Si $S = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ *con* $n \in \mathbb{N}$*, tal que* $P_i \in \mathbb{R}[x, y]$ *para* $1 \leq i \leq n$*, entonces* $V(S)$ *es el conjunto de ceros comunes*

$$V(S) = \bigcap_{i=1}^{n} V(P_i).$$

El conjunto $V(P)$ es conocido como una **curva algebraica**, y el conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} V(P_i)$ como **conjunto algebraico**. Estos conjuntos serán pieza clave en el siguiente capítulo, principalmente en el estudio de las propiedades de los conjuntos de ceros de los factores integrantes inversos de polinomios cuasi-homogéneos.

El siguiente teorema es consecuencia del Teorema de Bézout (ver [**11**]), el cual es utilizado no sólo en el campo de la geometría algebraica sino también en otros casos, por ejemplo el que analizaremos a continuación. Lo que se hará es juntar esta teoría con los factores integrantes inversos y así ver la importancia de este teorema a la hora de utilizar conjuntos algebraicos.

Teorema 1.3. *Si* P *y* Q *son polinomios en* $\mathbb{R}[x, y]$ *no constantes sin factores comunes,* $V(P)$ *y* $V(Q)$ *son los correspondientes conjuntos de ceros de estos polinomios, entonces*

$$V(\{P, Q\}) = V(P) \cap V(Q)$$

es un conjunto finito, de hecho, de cardinalidad menor o igual a $(grad(P) \cdot grad(Q))$*.*

Definición 1.13. *Sea* $H : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función* C^1*, decimos que* H *es una* ***primera integral*** *si esta función no es localmente constante y es contante sobre las soluciones de* (1.1)*. Como* H *es* C^1*, esto último es equivalente a que* $FH = 0$ *donde* $F = (f_1, f_2)$*, i.e.*

$$f_1 \frac{\partial H}{\partial x} + f_2 \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

En este caso se dirá que este sistema (1.1) es un **sistema integrable**.

Para un campo diferencial en el plano, la existencia de una primera integral describe completamente su espacio fase. Además, encontrar un factor integrante inverso para el sistema (1.1) está estrechamente relacionado con la búsqueda de una primera integral para este sistema, esto se verá más adelante.

Un tipo de sistemas para los cuales es más sencillo calcular una primera integral, son los sistemas hamiltonianos. Cabe aclarar que los campos que admiten una primera integral y no son hamiltonianos, en general, son muy difíciles de encontrar.

DEFINICIÓN 1.14. *Se dirá que una función polinomial definida por $\upsilon : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una **curva algebraica invariante** por el campo asociado al sistema* (1.1) *si además de no ser localmente constante satisface*

$$f_1\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + f_2\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = R\upsilon,$$

para algún $R \in C^r(U, \mathbb{R})$.

Observando que el lado izquierdo de la última ecuación es precisamente el producto del campo F con el gradiente de υ, se puede concluir que F es tangente a la curva $V(\upsilon)$, en otras palabras, $V(\upsilon)$ es una **curva algebraica invariante** por el flujo asociado al campo vectorial F. De esta manera, se dice que la función $R(x, y)$ se dice que es un **cofactor** de la curva algebraica invariante.

Cuando el cofactor $R(x, y)$ es un polinomio, decimos que $f(x, y) = 0$ (i.e. $V(f)$) es una curva algebraica invariante con cofactor polinomial. Sólo admitimos curvas invariantes con cofactor polinomial de grado menor o igual que $d-1$, es decir $grad(R(x, y)) \leq d-1$, donde d es el grado de sistema (1.1). Recordando una curva algebraica invariante es una curva algebraica $f(x, y) = 0$, con $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, la cual es invariante por el flujo de sistema (1.1). Esta condición es igual a que $Ff = Rf$, donde el cofactor de una curva algebraica invariante es siempre un polinomio de grado $grad(R(x, y)) \leq d-1$.

Cuando H es una primera integral del sistema (1.1), se sabe que todas las órbitas del sistema están contenidas en su dominio de definición y están dadas por las curvas de nivel $H(x, y) = h$. Una estrategia natural consiste en buscar la forma de alguna de las órbitas del sistema y, a partir de ella, tratar de construir una primera integral para este sistema.

En particular, si suponemos que el sistema (1.1) es polinómico, esas órbitas son precisamente curvas algebraicas, las cuales son de especial interés en este trabajo.

Con el fin de exponer los resultados conocidos de integrabilidad usando curvas algebraicas invariantes, debemos tener en cuenta curvas algebraicas complejas $f(x, y) = 0$, esto es $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$. Como el sistema (1.1) está definido por polinomios reales, si $f(x, y) = 0$ es una curva algebraica invariante con cofactor $R(x, y)$ entonces su conjugada $\overline{f}(x, y)$ también es una curva algebraica con cofactor $\overline{R}(x, y)$. Por lo tanto, su producto $f(x, y)\overline{f}(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ da lugar a una curva algebraica invariante real con una cofactor real $R(x, y) + \overline{R}(x, y)$. Para una mayor simplicidad, consideramos curvas algebraicas invariantes definidas por polinomios en $\mathbb{C}[x, y]$, aunque siempre tendremos en cuenta la observación anterior. En $\mathbb{R}^2$, la curva dada por $f(x, y) = 0$, donde $f(x, y)$ es una función real, sólo puede contener un número finito de puntos singulares aislados o ser un conjunto vacío.

Una curva algebraica $f(x, y) = 0$ la llamaremos **irreducible** cuando $f(x, y)$ sea un polinomio irreducible en el anillo $\mathbb{C}[x, y]$. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(x, y)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{C}[x, y]$, ya que si $f(x, y)$ es reducible, entonces todos sus factores propios dan lugar a curvas algebraicas invariantes.

Dada una curva algebraica $f(x, y) = 0$, siempre es posible asumir que el polinomio $f(x, y)$ no tiene múltiples factores, así, su descomposición en el anillo $\mathbb{C}[x, y]$ es de la forma:

$$f(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y) \cdots f_l(x, y),$$

donde $f_i(x, y)$ son polinomios irreducibles diferentes entre si y además $f_i(x, y) \neq cf_j(x, y)$ si $i \neq j$ para cualquier $c \in \mathbb{C}$. La suposición de que, dada una curva algebraica $f(x, y) = 0$, el polinomio $f(x, y)$ no tiene múltiples factores, se utiliza principalmente para asegurar que no se consideren puntos singulares falsos.

6. Teoría de Integrabilidad de Darboux

Las curvas algebraicas invariantes son los principales objetos utilizados en la teoría de integrabilidad de Darboux. En [**12**], G. Darboux da un método para encontrar una primera integral explícita para un sistema (1.1) en el caso de que $d(d+1)/2+1$ diferentes curvas algebraicas invariantes irreducibles sean conocidas. El paŕametro d denota el grado del sistema. En este caso, se puede construir una primera integral de la forma

$$H = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_s^{\lambda_s},$$

donde cada $f_i(x,y)=0$ es una curva algebraica invariante para el sistema (1.1) y $\lambda_i \in \mathbb{C}$ no son todos ceros, para $i=1,2,\cdots,s$, $s \in \mathbb{N}$. Las funciones de este tipo se denominan **funciones de Darboux**.

Recordando que dada una curva algebraica invariante $f(x,y)=0$ cuya parte imaginaria no es cero se tiene que su conjugado también es una curva algebraica invariante. Por lo tanto al tener que el sistema (1.1) es real, si $f(x,y)$ aparece en la expresión de una primera integral de la forma dada por Darboux con exponente λ, entonces $\overline{f}(x,y)$ aparece en la misma expresión con exponente $\overline{\lambda}$.

La notación que se utilizará es $\mathbf{i}=\sqrt{-\mathbf{1}}$, Re$f$ la parte real de f y Imf la parte imaginaria de f. Dando la siguiente fórmula para los números complejos:

$$\arctan(z) = \log\left[\left(\frac{1-\mathbf{i}z}{1+\mathbf{i}z}\right)^{\mathbf{i}/2}\right], \quad z \in \mathbb{C},$$

se muestra que

$$\begin{aligned} f^{\lambda}\overline{f}^{\overline{\lambda}} &= (\mathrm{Re}f + \mathrm{Im}f\mathbf{i})^{\mathrm{Re}\lambda + \mathrm{Im}\lambda\mathbf{i}}(\mathrm{Re}f - \mathrm{Im}f\mathbf{i})^{\mathrm{Re}\lambda - \mathrm{Im}\lambda\mathbf{i}} \\ &= ((\mathrm{Re}f)^2 + (\mathrm{Im}f)^2)^{\mathrm{Re}\lambda} \exp\left\{-2\mathrm{Im}\lambda \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}f}{\mathrm{Re}f}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que el producto $f(x,y)^{\lambda}\overline{f}(x,y)^{\overline{\lambda}}$ es una función real, esto implica que cualquier función de Darboux $H = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_s^{\lambda_s}$ también lo es. (Teniendo en cuenta que siempre se trabaja con la rama principal de la función $\arctan(z)$). De esta manera se tiene que una función de Darboux H se puede definir en el conjunto abierto $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, donde $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_r)(x,y) = 0\}$, particularmente destacando que H es una primera integral racional para el sistema (1.1), para $\lambda i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1,2,\ldots,r$.

En este sentido J.P. Jouanoulou [**13**] mostró que si se conocen al menos $d(d+1)+2$ curvas algebraicas invariantes irreducibles diferentes, entonces existe una primera integral racional.

El hecho principal que se utiliza para probar el teorema de Darboux (y la mejora de Jouanoulou) es que el cofactor correspondiente a cada curva algebraica invariante es un polinomio de grado menor o igual a $d-1$. Las curvas invariantes con cofactor polinomial también se pueden utilizar con el fin de encontrar una primera integral para el sistema. Esta observación permite una generalización de la teoría de Darboux que se da en [**14**], donde, por ejemplo, se presentan las curvas invariantes no algebraicas con un cofactor algebraico para un sistema polinomial de grado 4.

En [**15**] se dan otros ejemplos de este tipo de curvas invariantes con cofactor polinomial para algunas familias de sistemas y la forma en que se utilizan para construir primeras integrales explícitas y factores integrantes inversos de los sistemas correspondientes.

Una de las definiciones más importantes en este sentido es la noción de factor exponencial que viene dada por C. Christopher en [**16**] cuando estudia la multiplicidad de una curva algebraica invariante. La noción de factor exponencial se puede ver como un caso particular de curva invariante para el sistema (1.1).

DEFINICIÓN 1.15. *Dados dos polinomios coprimos $h, g \in \mathbb{R}[x,y]$, la función $e^{h/g}$ se llama un **factor exponencial** para el sistema* (1.1) *si para algún polinomio R de grado a lo sumo $d-1$, donde d es el grado del sistema, la siguiente relación se cumple:*

$$f_1\left(\frac{\partial e^{h/g}}{\partial x}\right)+f_2\left(\frac{\partial e^{h/g}}{\partial y}\right)=R(x,y)e^{h/g}.$$

*Al igual que antes, se dice que $R(x,y)$ es el **cofactor del factor exponencial** de $e^{h/g}$.*

En la siguiente proposición, demostrada en [**16**], se da la relación entre la noción de curva algebraica invariante y el factor exponencial.

PROPOSICIÓN 1.3. [**16**] *Si $G=e^{h/g}$ es un factor exponencial y g no es una constante, entonces $g=0$ es una curva algebraica invariante y h satisface la ecuación*

$$f_1\frac{\partial h}{\partial x}+f_2\frac{\partial h}{\partial y}=hR_g+gR_G,$$

donde R_g y R_G son los cofactores de g y G respectivamente.

La noción de factor exponencial es muy importante en la teoría de integrabilidad de Darboux ya que no sólo permite la construcción de primeras integrales siguiendo el mismo método descrito por Darboux, sino que también explica el significado de la multiplicidad de una curva algebraica invariante en relación con el sistema diferencial (1.1). Un trabajo completo sobre este tema puede encontrarse en [**17**].

De la misma forma que con las curvas algebraicas invariantes, dado un factor exponencial $G = \exp\{h/g\}$, se puede considerar que $h(x, y),\ g(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ dado que el sistema (1.1) es un sistema real. Si $G = \exp\{h/g\}$ es un factor exponencial con parte imaginaria no nula, entonces su complejo conjugado, $\overline{G} = \exp\{\overline{h}/\overline{g}\}$ es también un factor exponencial; esto se puede ver desde la definición. Además, $G\overline{G} = \exp\{h/g + \overline{h}/\overline{g}\}$ es un factor exponencial real con un cofactor real.

Ahora, dado que la noción de factor exponencial es la generalización más actual en la teoría de integración de Darboux, cualquier función de la forma:

$$f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_r^{\lambda_r} \left(\exp\left(\frac{h_1}{{g_1}^{n_1}}\right)\right)^{\mu_1} \left(\exp\left(\frac{h_2}{{g_2}^{n_2}}\right)\right)^{\mu_2} \cdots \left(\exp\left(\frac{h_l}{{g_l}^{n_l}}\right)\right)^{\mu_l}, \tag{1.12}$$

se llama una **función de Darboux** (generalizada), donde $r, l \in \mathbb{N}$, $f_i(x, y) = 0$ con $(1 \leq i \leq r)$ y $g_j(x, y) = 0$ con $(1 \leq j \leq l)$ son curvas algebraicas invariantes del sistema (1.1), $h_j(x, y)$ con $(1 \leq j \leq l)$ son polinomios en $\mathbb{C}[x, y]$, $\lambda_i,\ (1 \leq i \leq r)$ y $\mu_j,\ (1 \leq j \leq l)$ son números complejos y n_j $(1 \leq j \leq l)$ son números enteros no negativos.

Los principales resultados sobre el método de Darboux y sus mejoras se resumen en el siguiente teorema, (véase [**18, 19**]).

TEOREMA 1.4 (Teorema de Darboux). ([**20**], Teorema 3)

Suponiendo que un sistema diferencial polinomial (1.1) *de grado d, admite r curvas algebraicas invariantes irreducibles $f_i = 0$ con cofactores R_i para $i = 1, 2, \cdots, r$; l factores exponenciales* $\exp(h_j/g_j^{n_j})$ *con cofactores L_j para $j = 1, 2, \cdots, l$; y s puntos singulares independientes (x_k, y_k) de tal manera que $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ para $i = 1, 2, ..., r$ y para $k = 1, 2, \cdots, s$. Además, si los factores irreducibles de los polinomios g_j son algunas f_i, entonces:*

1. *Existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todos cero de tal manera que*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i R_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j L_j = 0,$$

si y sólo si la función multivaluada (1.12) *es una primera integral del sistema* (1.1).

2. *Si* $r+l+s=[d(d+1)/2]+1$, *entonces existen* $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ *no todos cero tales que*
$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i R_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j L_j = 0.$$

3. *Si* $r+l+s \geq [d(d+1)/2]+2$, *entonces el sistema* (1.1) *tiene una primera integral racional, y por lo tanto todas las trayectorias del sistema están contenidas en las curvas algebraicas invariantes.*

4. *Existen* $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ *no todos cero de tal manera que*
$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i R_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j L_j = divF$$
si y sólo si la función (1.12) *es factor integrante inverso del sistema* (1.1).

5. *Si* $r+l+s=d(d+1)/2$ *y* s *puntos singulares independientes débiles, entonces la función* (1.12) *para convenientes* $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$, *no todos igual a cero, es una primera integral o un factor integrante inverso del sistema* (1.1).

Y como resultado obtenemos el siguiente teorema que será de gran ayuda en los siguientes capítulos.

TEOREMA 1.5 (Teorema de Prelle-Singer). ([**20**], Teorema 11)

Si un sistema polinomial tiene una primera integral elemental, entonces éste tiene un factor integrante de la forma $f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}$ *con* $f_i \in \mathbb{C}[x,y]$ *y cada* f_i *es una curva algebraica invariante. Por lo tanto éste tiene factor integrante inverso racional.*

CAPÍTULO 2

SISTEMAS CUASI-HOMOGÉNEOS

Ahora se definirá un caso especial de polinomios, con los cuales se construirán sistemas diferenciales bidimensionales sobre los cuales se trabajará; éstos son los polinomios cuasi-homogéneos. A partir de ellos y de estos sistemas diferenciales, con la combinación de los elementos nombrados en el capítulo anterior se analizarán sus propiedades y se mostrará una forma explícita de su factor integrante inverso para luego ver como se relaciona la existencia de este con el estudio de los ciclos límite. Además se definirán otros sistemas característicos, sobre los cuales también se podrá trabajar, estos son los sistemas diferenciales cuasi-homogéneos perturbados.

1. Sistemas $p - q$ Cuasi-Homogéneos

A continuación se presentará a los polinomios $p - q$ cuasi-homogéneos, y se demostrará la utilidad que tiene el remarcar los grados p y q en su definición.

DEFINICIÓN 2.1. *Para $p, q, k, l \in \mathbb{Z}^+$, se dirá que una función real $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una* ***función*** $p - q$ ***cuasi-homogénea*** *de grado ponderado k si*

$$f(\alpha^p x, \alpha^q y) = \alpha^k f(x, y), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Además, $F = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y}$ un campo vectorial se llamará ***campo vectorial*** $p - q$ ***cuasi-homogéneo*** *de grado ponderado l , si f_1 y f_2 son funciones $p - q$ cuasi-homogéneas de grado ponderado $p + l - 1$ y $q + l - 1$ respectivamente.*

El ***sistema diferencial*** $p-q$ ***cuasi-homogéneo*** *de grado ponderado* l*, asociado a el campo vectorial* $p-q$ *cuasi-homogéneo* $F = f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y}$*, viene dado por:*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_1(x,y), \\ \dot{y} &= f_2(x,y). \end{cases} \tag{2.1}$$

Una propiedad interesante de los sistemas diferenciales $p-q$ cuasi-homogéneos de grado ponderado l es que son invariantes bajo la transformación de semejanza descrita como:

$$(x,y,t) \to (\alpha^p x, \alpha^q y, \alpha^{-l+1}t),\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

i.e. $\qquad \tilde{x}(t) = \alpha^p x(t), \qquad \tilde{y}(t) = \alpha^q y(t), \qquad \tilde{t} = \alpha^{-l+1}t.$

Esto se verifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(\tilde{t}) = \alpha^p \dot{x}(\tilde{t})\dot{\tilde{t}} = \alpha^p f_1(x(\tilde{t}), y(\tilde{t}))\alpha^{-l+1} = \alpha^{p-l+1} f_1(x(\tilde{t}), y(\tilde{t})) &= f_1(\alpha^p x(\tilde{t}), \alpha^q y(\tilde{t})) \\ &= f_1(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}(\tilde{t}) = \alpha^q \dot{y}(\tilde{t})\dot{\tilde{t}} = \alpha^q f_2(x(\tilde{t}), y(\tilde{t}))\alpha^{-l+1} = \alpha^{q-l+1} f_2(x(\tilde{t}), y(\tilde{t})) &= f_2(\alpha^p x(\tilde{t}), \alpha^q y(\tilde{t})) \\ &= f_2(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \end{aligned}$$

donde el punto indica derivada con respecto al tiempo.
Por lo tanto el sistema (2.1) es invariante bajo el grupo uniparamétrico

$$\varphi(x,y,t) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}),$$

Donde los generadores infinitesimales para esta transformación son:

$$\xi(x,y) = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=1} = \frac{\partial(\alpha^p x)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=1} = px \quad y \quad \eta(x,y) = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=1} = \frac{\partial(\alpha^q y)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=1} = qy,$$

Y como el sistema (2.1) se puede escribir en su forma Pfaffiana de la siguiente manera:

$$f_1(x,y)dy - f_2(x,y)dx = 0, \tag{2.2}$$

tomando $M = -f_2(x,y)$, $N = f_1(x,y)$, $\xi(x,y) = px$ y $\eta(x,y) = qy$ en la definición 1.11 se tiene que la forma del factor integrante de Lie para esta ecuación diferencial (2.2) es:

$$\mu = \frac{1}{qyf_1 - pxf_2}.$$

En conclusión una propiedad característica e importante de los sistemas diferenciales $p-q$ cuasi-homogéneos es que existe una fórmula para el factor integrante lo cual implica que existe una fórmula explícita para el factor integrante inverso (FII) para éste sistema, lo cual se demuestra en la siguiente proposición con la ayuda de un lema anterior:

PROPOSICIÓN 2.1. *Dado un campo vectorial $p-q$ cuasi-homogéneo $F = f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y}$ de grado ponderado l, entonces $\mathcal{V} = qyf_1 - pxf_2$ es un FII del sistema.*

Prueba. Sea $\mathcal{V} := qyf_1 - pxf_2$, por lo anterior sabemos una fórmula del factor integrante para el sistema asociado al campo vectorial F viene dada por $\mu = \frac{1}{\mathcal{V}}$ siempre y cuando $\mathcal{V}$ no sea localmente nulo, así que usando el Lema 1.1 se tiene que $\mathcal{V}$ resuelve la ecuación (1.11), y por lo tanto cumple la definición de factor integrante inverso. □

El resultado anterior también se puede verificar utilizando el teorema generalizado de Euler para funciones cuasi-homogéneas. Este establece que para cualquier función $p-q$ cuasi-homogénea f con grado ponderado k se puede obtener la igualdad $px\frac{\partial f}{\partial x} + qy\frac{\partial f}{\partial y} = kf$, lo cual enunciado formalmente dice:

TEOREMA 2.1 (Teorema generalizado de Euler). *Sea f una función $p-q$ cuasi-homogénea de grado ponderado k, entonces*

$$px\frac{\partial f}{\partial x} + qy\frac{\partial f}{\partial y} = kf. \tag{2.3}$$

Prueba. Como f es $p-q$ cuasi-homogénea se tiene que:

$$f(\alpha^p x, \alpha^q y) = \alpha^k f(x,y), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Diferenciando la ecuación con respecto a α

$$\frac{\partial f(\alpha^p x, \alpha^q y)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\alpha^k f(x,y)\right),$$

por regla de la cadena

$$\frac{\partial f(\alpha^p x, \alpha^q y)}{\partial(\alpha^p x)}\frac{\mathrm{d}(\alpha^p x)}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{\partial f(\alpha^p x, \alpha^q y)}{\partial(\alpha^q y)}\frac{\mathrm{d}(\alpha^q y)}{\mathrm{d}\alpha} = k\alpha^{k-1}f(x,y).$$

Así que

$$\frac{\partial f(\alpha^p x, \alpha^q y)}{\partial(\alpha^p x)}\alpha^{p-1}px + \frac{\partial f(\alpha^p x, \alpha^q y)}{\partial(\alpha^q y)}\alpha^{q-1}qy = k\alpha^{k-1}f(x,y),$$

En concreto, tomando $\alpha = 1$, la anterior ecuación se obtiene (2.3).

Ahora recordando la definición de conjunto de ceros, se dijo que si $P \in \mathbb{R}[x, y]$, su conjunto de ceros esta dado por

$$V(P) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\},$$

donde $\mathbb{R}[x, y]$ el anillo de polinomios sobre $\mathbb{R}$ en dos variables.

El siguiente lema mostrará una conexión entre los conjuntos de ceros y los polinomios $p - q$ cuasi-homogéneos, esta relación será fundamental para la obtención de los siguientes resultados.

Lema 2.1. *Si P es un polinomio $p - q$ cuasi-homogéneo no cero de grado ponderado k, entonces el conjunto de ceros $V(P)$ no contiene subconjuntos homeomorfos a $\mathbb{S}^1$.*

Prueba. Dado P un polinomio $p - q$ cuasi-homogéneo no cero de grado ponderado k, se tiene que

$$P(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda^k P(x, y).$$

Si se supone que el conjunto de ceros $V(P)$ contiene un subconjunto γ que es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, entonces $P(x_0, y_0) = 0$ para todo $(x_0, y_0) \in \gamma$. Por lo tanto, para cada punto $(x_0, y_0) \in \gamma$ hay una curva dada por

$$C(\lambda, (x_0, y_0)) := \{(\lambda^p x_0, \lambda^q y_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Al evaluar P en $C(\lambda, (x_0, y_0))$ se obtiene que

$$P(\lambda^p x_0, \lambda^q y_0) = \lambda^k P(x_0, y_0) = 0,$$

para todo $(x_0, y_0) \in \gamma$.

Por lo tanto, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y cualquier punto $(x, y) \in \gamma$ se tiene que

$$C(\lambda, (x, y)) \in V(P).$$

Por último, considerando una curva algebraica lineal L no totalmente contenida en $V(P)$ tal que cruza un número infinito de curvas $C(\lambda, (x, y))$ en $V(P)$. Sin embargo, dado que los grados de P y L son finitos, utilizando el Teorema 1.3 se obtiene que L sólo puede interceptar a $V(P)$ en un número finito de puntos, lo que lleva a una contradicción. Por lo tanto, $V(P)$ no contiene subconjuntos homeomorfos a $\mathbb{S}^1$. $\square$

Como consecuencia directa del lema anterior, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.2. *Si un polinomio $p-q$ cuasi-homogéneo no cero de grado ponderado k es un FII del sistema* (1.1)*, entonces éste no tiene ciclos límite.*

Prueba. Sea $\mathcal{V}$ un polinomio $p-q$ cuasi-homogéneo, el cual es un FII del sistema (1.1). Suponiendo que (1.1) admite un ciclo límite γ, entonces por el Teorema 1.2, se obtiene que $\gamma \in V(\mathcal{V})$, lo cual contradice el Lema 2.1. Por lo tanto, el sistema (1.1) no contiene ciclos límite. □

Usando el Teorema 2.2, es posible establecer la no existencia de ciclos límite para campos vectoriales polinomiales cuasi-homogéneos, así se da la siguiente proposición:

Proposición 2.2. *Dado un campo vectorial polinomial $p-q$ cuasi-homogéneo de grado ponderado l descrito por $F = f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y}$, entonces el sistema asociado* (2.1) *no tiene ciclos límite.*

Prueba. Por la Proposición 2.1 se tiene que la función $\mathcal{V} = qyf_1 - pxf_2$ es un FII del campo vectorial F. Además, $\mathcal{V}$ es una función $p-q$ cuasi-homogénea de grado ponderado $p+q+l-1$, de esta manera el resultado se obtiene directamente de utilizar el Teorema 2.2. □

2. Sistemas Cuasi-Homogéneos Perturbados

En esta sección se extenderán los resultados obtenidos en el estudio de sistemas cuasi-homogéneos, extensión que se desarrollará precisamente utilizando perturbaciones dadas por polinomios cuasi-homogéneos. A estos nuevos sistemas se les llamará sistemas infinito cuasi-degenerados. A continuación se da su definición formal.

Definición 2.2. *Un* ***sistema infinito cuasi-degenerado*** *es un sistema polinomial plano de la forma*

$$\begin{cases} \dot{x} &= P(x,y) + pxA(x,y), \\ \dot{y} &= Q(x,y) + qyA(x,y), \end{cases} \tag{2.4}$$

donde $\mathcal{Y} = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ es un campo vectorial $p-q$ cuasi-homogéneo polinomial de grado ponderado l y A es un polinomio $p-q$ cuasi-homogéneo de grado ponderado α.

Se puede ver que en el caso particular $p = q$, el sistema (2.4) se convierte en un sistema infinito degenerado cuando $grad(A) \leq grad(P) = grad(Q)$.

Para analizar este tipo de sistemas es necesario introducir algunos lemas que serán de utilidad más adelante.

Lema 2.2. *Si se toma a $\mathcal{X}$ como el campo vectorial asociado al sistema* (2.4) *y si existe una $H(x,y)$ primera integral $p-q$ quasi-homogénea de grado ponderado d del campo vectorial $p-q$ cuasi-homogéneo $P(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, entonces*

$$\mathcal{X}\cdot H = dA(x,y)\cdot H(x,y).$$

Prueba. Calculando la derivada de $H(x,y)$ a lo largo de las órbitas del sistema (2.4)

$$\mathcal{X}\cdot H = (P+pxA)\frac{\partial H}{\partial x}+(Q+qyA)\frac{\partial H}{\partial y} = \left(P\frac{\partial H}{\partial x}+Q\frac{\partial H}{\partial y}\right)+A\left(px\frac{\partial H}{\partial x}+qy\frac{\partial H}{\partial y}\right).$$

Dado el Teorema 2.1 para funciones cuasi-homogéneas aplicado al último término de la expresión anterior, tenemos que $px\frac{\partial H}{\partial x}+qy\frac{\partial H}{\partial y}=dH$. Como H es una primera integral del campo vectorial $P(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, es decir, satisface $P\frac{\partial H}{\partial x}+Q\frac{\partial H}{\partial y}\equiv 0$, se concluye que $\mathcal{X}\cdot H = dA(x,y)\cdot H(x,y)$. $\square$

Para el siguiente lema recordamos que para $f(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$, se dice que $f=0$ es una curva algebraica invariante de un campo vectorial polinomial $\mathcal{X}=a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ si se cumple que $\mathcal{X}f=Rf$ para algún polinomio $R(x,y)$ llamado el cofactor asociado.

Lema 2.3. $V(x,y)=pxQ(x,y)-qyP(x,y)=0$ *es una curva algebraica invariante $p-q$ cuasi-homogénea de grado ponderado $p+q+l-1$ del sistema polinomial* (2.4).

Prueba. Definiendo nuevamente como $\mathcal{X}$ al campo vectorial asociado al sistema (2.4), la tasa de cambio de $V(x,y)$ a lo largo de las órbitas del sistema (2.4) es

$$\mathcal{X}\cdot V = (P+pxA)\frac{\partial V}{\partial x}+(Q+qyA)\frac{\partial V}{\partial y} = \left(P\frac{\partial V}{\partial x}+Q\frac{\partial V}{\partial y}\right)+A\left(px\frac{\partial V}{\partial x}+qy\frac{\partial V}{\partial y}\right).$$

Entonces, por la Proposición 2.1 se deduce que V es un factor integrante inverso del campo vectorial $P(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$; por lo tanto

$$P\frac{\partial V}{\partial x}+Q\frac{\partial V}{\partial y}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\cdot V$$

Y como $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son $p-q$ cuasi-homogéneos entonces $V(x,y)$ también lo es y su grado ponderado es $(p+q+l-1)$. Por lo tanto al aplicar el Teorema 2.1 se tiene que

$$px\frac{\partial V}{\partial x}+qy\frac{\partial V}{\partial y}=(p+q+l-1)V,$$

en consecuencia

$$\mathcal{X}\cdot V=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+(p+q+l-1)A\right)\cdot V,$$

y así $V=0$ es una curva algebraica invariante del sistema (2.4). □

El siguiente teorema muestra la forma de un Factor Integrante Inverso para el sistema (2.4), que es el motivo por el cual se construyeron las anteriores curvas algebraicas invariantes.

TEOREMA 2.3. *Si se supone que H es un polinomio $p-q$ cuasi-homogéneo de grado ponderado d tal que H es una primera integral del campo vectorial $p-q$ cuasi-homogéneo $P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}$, entonces, la función*

$$\mathcal{V}:=(pxQ-qyP)H^{\frac{\alpha-l+1}{d}}(x,y),$$

es un FII de (2.4).

Prueba. Sea $\mathcal{X}=(P+pxA)\frac{\partial}{\partial x}+(Q+qyA)\frac{\partial}{\partial y}$ el campo vectorial asociado al sistema (2.4) y $\mathcal{Y}=P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}$. La divergencia del campo vectorial $\mathcal{X}$ es:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathcal{X}&:=\frac{\partial}{\partial x}(p+pxA)+\frac{\partial}{\partial y}(Q+qyA)=\mathrm{div}(P+pxA,Q+qyA)\\&=\mathrm{div}(P,Q)+\mathrm{div}(pxA,qyA)=\mathrm{div}\mathcal{Y}+(p+q)A+\left(px\frac{\partial A}{\partial x}+qy\frac{\partial A}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

Así

$$\mathrm{div}\mathcal{X}=\mathrm{div}\mathcal{Y}+(\alpha+p+q)A,$$

por lo que aplicado el Teorema 2.1 a el polinomio A de grado ponderado α, se tiene que:

$$\left(px\frac{\partial A}{\partial x}+qy\frac{\partial A}{\partial y}\right)=\alpha A.$$

Por otro lado, a partir de los Lemas 2.3 y 2.2, se tiene que

$$\mathcal{X}\cdot H=dA(x,y)\cdot H$$

y

$$\mathcal{X} \cdot (pxQ(x,y) - qyP(x,y)) = (\mathrm{div}\mathcal{Y} + (p+q+l-1)A) \cdot (pxQ(x,y) - qyP(x,y)).$$

Por lo tanto $H(x,y)$ y $pxQ(x,y) - qyP(x,y)$ son soluciones particulares del sistema (2.4) con cofactores asociados $R_1(x,y) = dA$ y $R_2(x,y) = \mathrm{div}\mathcal{Y} + (p+q+l-1)A$, respectivamente.

Ahora, con el fin de aplicar el inciso 4 del Teorema de Darboux (Teorema 1.4) se necesita verificar que existen dos constantes λ_1 y λ_2 diferentes de cero, las cuales cumplan que

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i R_i(x,y) - \mathrm{div}\mathcal{X} \equiv 0.$$

Esto es:

$$\lambda_1 dA + \lambda_2(\mathrm{div}\mathcal{Y} + (p+q+l-1)A) - \mathrm{div}\mathcal{Y} - (\alpha+p+q)A \equiv 0$$

Estas constantes si existen y se puede ver que son:

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha - l + 1)}{d} \qquad y \qquad \lambda_2 = 1.$$

Entonces

$$\mathcal{V} = (pxQ - qyP)H^{\frac{\alpha-l+1}{d}}(x,y)$$

es una función de Darboux y aplicando el el inciso 4 del Teorema 1.4 se obtiene que esta función $\mathcal{V}$ es un factor integrante inverso del sistema (2.4). $\square$

Como se ha determinado un FII para estos sistemas perturbados, ya se tiene la posibilidad de usar el Teorema 2.2 y el Teorema 2.3 para extender la no existencia de ciclos límite para los sistemas infinito cuasi-degenerados, como lo expresa la siguiente proposición:

Proposición 2.3. *Suponiendo que las hipótesis del Teorema 2.3 se satisfacen y si $H^{\frac{\alpha-l+1}{d}}$ es un polinomio $p-q$ cuasi-homogéneo, entonces el sistema* (2.4) *no admite ciclos límite.*

Prueba. Como $H^{\frac{\alpha-l+1}{d}}(x,y)$ es un polinomio $p-q$ cuasi-homogéneo, se deduce que el FII dado por $\mathcal{V} := (pxQ - qyP)H^{\frac{\alpha-l+1}{d}}(x,y)$ es un polinomio $p-q$ cuasi-homogéneo. De esta manera, por el Teorema 2.2 se tiene que el sistema (2.4) no admite ciclos límite. $\square$

CAPÍTULO 3

EJEMPLOS Y APLICACIONES

En este capítulo se expondrán ejemplos y aplicaciones sobre los sistemas diferenciales estudiados en el capítulo dos. Estos son los sistemas $p-q$ cuasi-homogéneos y los sistemas infinito cuasi-degenerados. Por lo tanto, se verán en práctica los resultados anteriores, mostrando que es posible establecer la no existencia de ciclos límite en estos casos.

Como se observó anteriormente, es de gran importancia encontrar formas de generar factores integrantes inversos. A continuación, se da un método que ayuda a crearlo, para algunos sistemas diferenciales particulares. Este método viene dado por la combinación de la siguiente proposición conocida y el siguiente lema. Cabe recordar que no hay una forma universal para generar factores integrantes inversos.

Proposición 3.1. [**18**, Proposición 13] *Si $F_i = f_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g_i(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, con $i = 1, 2$, son dos campos vectoriales C^1 definidos en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tales que tienen el mismo factor integrante inverso $\mathcal{V}(x,y)$, entonces el campo vectorial $F_1 + \lambda F_2$ también tiene a la función $\mathcal{V}(x,y)$ como factor integrante inverso para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Lema 3.1. *Sea $\mathcal{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1, entonces los sistemas*

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mathcal{V}(x,y)f(y), \\ \dot{y} &= \mathcal{V}(x,y)g(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

y

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mathcal{V}(x,y)f(y) \mp \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}(x,y), \\ \dot{y} &= \mathcal{V}(x,y)g(x) \pm \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x,y), \end{cases} \tag{3.2}$$

tienen a $\mathcal{V}$ como factor integrante inverso.

Prueba. Para el sistema (3.1) se tiene que

$$(\mathcal{V}f(y))\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + (\mathcal{V}g(x))\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = \mathcal{V}\frac{\partial(\mathcal{V}f(y))}{\partial x} + \mathcal{V}\frac{\partial(\mathcal{V}g(x))}{\partial y} = \left(\frac{\partial(\mathcal{V}f(y))}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V}g(x))}{\partial y}\right)\mathcal{V},$$

y para el sistema (3.2)

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{V}f(y) \mp \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \left(\mathcal{V}g(x) \pm \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} &= \mathcal{V}f(y)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \mp \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{V}g(x)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \pm \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \\ = \mathcal{V}\left(f(y)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + g(x)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right) &= \mathcal{V}\left(\frac{\partial(\mathcal{V}f(y))}{\partial x} \mp \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial(\mathcal{V}g(x))}{\partial y} \pm \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y \partial x}\right) \\ &= \left(\frac{\partial(\mathcal{V}f(y) \mp \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V}g(x) \pm \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x})}{\partial y}\right)\mathcal{V}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{V}$ es FII de los sistemas (3.1) y (3.2). □

1. Ejemplos

En los siguientes ejemplos se tomarán diferentes sistemas a los cuales le aplicaremos la teoría descrita en esta tesis, se verá la forma de sus factores integrantes inversos y luego a partir de los teoremas del capítulo dos se demostrará la inexistencia de ciclos límite.

Ejemplo 3.1. Sea el sistema diferencial dado por

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x^3 + x^2y^2 - xy^4 + 8y^6 = P(x, y), \\ \dot{y} & = & -x^2y + 3xy^3 + 7y^5 = Q(x, y). \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Como $P(\lambda^2 x, \lambda y) = \lambda^6 P(x, y)$ y $Q(\lambda^2 x, \lambda y) = \lambda^5 Q(x, y)$, se tiene que (3.3) es un sistema polinomial $2-1$ cuasi-homogéneo de grado ponderado 5. Lo cual es claro, ya que de las ecuaciones $p + l - 1 = 6$ y $q + l - 1 = 5$ con $p = 2$, $q = 1$, implica que $l = 5$. Así que se cumplen las hipótesis de la Proposición 2.2; es decir, el sistema (3.3) no puede tener ciclos límite.

Un FII de (3.3) es $\mathcal{V}(x, y) = 4x^3y - 5x^2y^3 - 15xy^5 + 8y^7$.

Ejemplo 3.2. Para el sistema diferencial

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -x^5 + 3x^3y^5 + 7xy^{10}, \\ \dot{y} & = & x^4y + x^2y^6 + y^{11}, \end{array}\right. \tag{3.4}$$

se observa que este es un sistema polinomial $5-2$ cuasi-homogéneo ya que si se denotan $P(x, y) = -x^5 + 3x^3y^5 + 7xy^{10}$ y $Q(x, y) = x^4y + x^2y^6 + y^{11}$, se puede ver que $P(\lambda^5 x, \lambda^2 y) = \lambda^{25} P(x, y)$ y $Q(\lambda^5 x, \lambda^2 y) = \lambda^{22} Q(x, y)$ y es de grado ponderado 21, ya que $p = 5$ y $q = 2$, y reemplazándolos en $p+l-1=6$ y $q+l-1=5$ se concluye que $l=21$. Por lo tanto, usando nuevamente la Proposición 2.2, se concluye que el sistema (3.4) tampoco admite ciclos límite.

Un FII de (3.4) es $\mathcal{V}(x,y) = -7x^5y + x^3y^6 + 9xy^{11}$.

Ejemplo 3.3. Considerando ahora el sistema diferencial

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} & = x^3 + 2x^3y - 2x^2y^3 - 4xy^4 + 4y^9 + 8y^{10}, \\ \dot{y} & = x^5 - x^4 + x^3 - 2x^4y^3 + 2x^3y^3 - 2x^2y^3 + 4x^2y^9 - 4xy^9 + 4y^9, \end{array}\right. \tag{3.5}$$

si se denota

$$P(x,y) = x^3 + 2x^3y - 2x^2y^3 - 4xy^4 + 4y^9 + 8y^{10} = (x^3 - 2x^2y^3 + 4y^9)(2y+1),$$

$$Q(x,y) = x^5 - x^4 + x^3 - 2x^4y^3 + 2x^3y^3 - 2x^2y^3 + 4x^2y^9 - 4xy^9 + 4y^9 = (x^3 - 2x^2y^3 + 4y^9)(x^2 - x + 1),$$

con $\mathcal{V}(x,y) = x^3 - 2x^2y^3 + 4y^9$, se analiza que $\mathcal{V}(\lambda^3x, \lambda y) = \lambda^9\mathcal{V}(x,y)$. Usando la primera parte del Lema 3.1 se obtiene que $\mathcal{V}$ es un factor integrante inverso $3-1$ cuasi-homogéneo del sistema (3.5). Luego, por el Teorema 2.2, el sistema (3.5) no admite ciclos límite. Cabe decir que aunque este sistema no es cuasi-homogéneo, aún así se tiene la posibilidad de verificar que no tiene ciclos límite.

Ejemplo 3.4. Sea el siguiente sistema diferencial

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} & = P(x,y), \\ \dot{y} & = Q(x,y). \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Si

$$P(x,y) = y^8 - y^5 - 5y^4 + x^2y^3 - x^2 = (x^2+y^5)(y^3-1) - 5y^4,$$

$$Q(x,y) = x^4 + x^2y^5 + x^3 + xy^5 + x^2 + y^5 + 2x = (x^2+y^5)(x^2+x+1) + 2x.$$

Y denotando $\mathcal{V}(x,y) = x^2 + y^5$, se puede observar que $\mathcal{V}(\lambda^5x, \lambda^2y) = \lambda^{10}\mathcal{V}(x,y)$. Usando la segunda parte del Lema 3.1, es fácil ver que $\mathcal{V}$ es un factor integrante inverso $5-2$ cuasi-homogéneo del sistema (3.6). Por lo tanto a partir del Teorema 2.2, se llega a la conclusión de que el sistema (3.6) no admite ciclos límite.

Es importante notar que si se toma $p=q=1$ en el caso de un campo vectorial polinomial $p-q$ cuasi-homogéneo, éste se convierte en un sistema polinomial homogéneo clásico. Teniendo esto en consideración, es posible recuperar varios resultados conocidos:

Corolario 3.1. *Si f_1 y f_2 son polinomios homogéneos del mismo grado, entonces el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} & = f_1(x,y), \\ \dot{y} & = f_2(x,y), \end{array} \right. \tag{3.7}$$

no tiene ciclos límite.

Ejemplo 3.5. El sistema diferencial dado por

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{x} & = & -4x^4y^3 + 7x^3y^4 - x^2y^5 - 10y^7, \\ \dot{y} & = & 3x^7 - x^6y + 8x^4y^3 + 7xy^6, \end{array} \right. \tag{3.8}$$

es un sistema diferencial homogéneo de grado 7. Así que por el corolario anterior se obtiene que el sistema (3.8) no admite ciclos límite.

Un FII de (3.8) es $\mathcal{V}(x,y) = -3x^8 - 10y^8 - 8x^5y^3 + 7x^3y^5 - 4x^4y^4 - 8x^2y^6$.

Corolario 3.2. *La siguiente ecuación diferencial lineal con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} & = ax + by, \\ \dot{y} & = cx + dy, \end{array} \right. \tag{3.9}$$

no contiene ciclos límite. Y la función $\mathcal{V}(x,y) = by^2 + (a-d)xy - cx^2$ es FII de (3.9).

En el caso de que q sea impar; con p y l pares; el campo vectorial $p-q$ cuasi-homogéneo incluye algunos tipos de sistemas de tiempo reversible. En particular, se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 3.3. *Si un campo vectorial dado es invariante bajo la simetría*

$$(x,y,t) \to (x,-y,-t),$$

entonces el sistema no tiene ciclos límite.

Terminando esta sección de ejemplos, se tiene el siguiente ejemplo de los sistemas infinito $p-q$ cuasi-degenerados.

Ejemplo 3.6. Considerando el polinomio

$$H(x,y) = x^3y^3 + 2xy^9 - y^{12},$$

se puede ver que $H(x,y)$ es $3-1$ cuasi-homogéneo de grado ponderado $d = 12$. Así que construyendo el sistema Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right) = (3x^3y^2 + 18xy^8 - 12y^{11}, -3x^2y^3 - 2y^9),$$

es claro que viene generado por un campo vectorial $3-1$ cuasi-homogéneo con grado ponderado $l = 9$. Además definiendo a

$$A(x,y) = x^6y^2 + x^5y^5,$$

un polinomio $3-1$ cuasi-homogéneo de grado ponderado $\alpha = 20$, se tiene el siguiente sistema perturbado:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} & = 3x^3y^2 + 18xy^8 - 12y^{11} + 3x(x^6y^2 + x^5y^5), \\ \dot{y} & = -3x^2y^3 - 2y^9 + y(x^6y^2 + x^5y^5). \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Dicho sistema es infinito cuasi-degenerado, ya que $\frac{\alpha - l + 1}{d} = 1$, entonces haciendo uso de la Proposición 2.3 se obtiene que el sistema (3.10) no admite ciclos límite.

Cabe notar que aunque iniciamos con un sistema Hamiltoniano, es claro que el sistema (3.10) no lo es y, sin embargo, sigue conservando la propiedad de no contener ciclos límite.

2. Aplicaciones

Ahora, se estudiará la dinámica de sistemas epidemiológicos y biológicos, haciendo un enfoque en aquellos que se pueden expresar como sistemas $p-q$ cuasi-homogéneos bidimensionales, con la intención de mostrar que estos sistemas no contienen ciclos límite, además de ver que significado tiene esta situación en un sentido biológico.

Primero se modelará la dinámica de una enfermedad contagiosa en una población del tipo SIRS, el cual asume que una enfermedad se desarrolla a lo largo del tiempo y que existen tres clases de individuos sobre los cuales actúa (Susceptibles, Infectados y Recuperados).

A una enfermedad se le dice endémica si permanece en una población por más de 10 o 20 años, ver [**24**]. Dado el largo periodo de tiempo involucrado, un modelo para una enfermedad endémica debe considerar nacimientos como una fuente de nuevos individuos susceptibles, y también muertes naturales en cada una de las tres clases de individuos. Suponemos que los nacimientos son proporcionales a la población total, y las muertes son proporcionales a cada clase.

El flujo de un grupo a otro que se ajusta a este modelo, está dado por el siguiente esquema:

$$S \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow S$$

Partiremos de un sistema que consta de tres ecuaciones diferenciales ordinarias sobre las variables S, I y R, las cuales representan a cada uno de los grupos antes mencionados y $N = S + I + R$ la población total. Este modelo es:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{S} & = & -\beta SI + \mu N - \mu S, \\ \dot{I} & = & \beta SI - \gamma I - \mu I, \\ \dot{R} & = & \gamma I - \mu R, \end{array} \right. \tag{3.11}$$

Suponiendo que todas las constantes $\beta,\ \mu$ y γ son positivas, donde β se considera como la tasa de incidencia por individuo infectado, μ la tasa de nacimiento y muerte natural, y γ la tasa de recuperación de individuos infectados.

La primera ecuación, modela la razón de cambio en el tiempo del grupo Susceptible. El término a favor del aumento en la cantidad de individuos de este grupo (término positivo) representará a la cantidad de individuos que nacen en el tiempo de estudio y los individuos recuperados de la enfermedad; mientras que los términos a favor de una disminución en la población (términos negativos) de este grupo representarán a los individuos susceptibles a la enfermedad, que mueren por ella o por otra causa, y a los susceptibles que se enferman.

La segunda ecuación, modela la razón de cambio en el tiempo del grupo Infectados. El término a favor del incremento en la cantidad de individuos de este grupo representará a la cantidad de individuos susceptibles que se infectan, mientras que los términos que van en detrimento de esta población son los que representan la cantidad de individuos infectados que se mueren y los que se recuperan de la enfermedad.

La tercera y última ecuación, modela la razón de cambio en el tiempo del grupo Recuperados de la enfermedad, el único término positivo es el que refleja la cantidad de individuos infectados que se recuperan de la enfermedad y en forma negativa están los que representan a los recuperados que se mueren y a los recuperados que pierden inmunidad a la enfermedad.

Tomando las condiciones iniciales tales que

$$S(0) = S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \quad R(0) = 0,$$

se nota que la población total N es constante, ya que si se suman las ecuaciones en (3.11) se obtiene $\dot{N} = \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$. Con lo cual $N(t) = N = N_0 = S_0 + I_0$.

En este caso con la intención de aplicar el método desarrollado en esta tesis se darán a continuación algunos sistemas epidemiológicos particulares los cuales no admiten ciclos límite, esto implicará que posiblemente no exista una tendencia a un comportamiento periódico orbital asintóticamente-estable en específico. Esto permite dos posibilidades:

1. Que se pierda el comportamiento oscilatorio.

2. Que no se encuentre una solución periódica aislada, mostrando que las oscilaciones del sistema no aterrizan, no al menos en una órbita periódica.

EJEMPLO 3.7. [**24**, Modelo Kermack-McKendrick]

El modelo Kermack-McKendrick es un modelo SIR para un número de personas infectadas con una enfermedad contagiosa en una población cerrada un determinado tiempo. Se propuso para explicar el rápido ascenso y la caída en el número de pacientes infectados observados en epidemias como la peste (Londres 1665/66, Bombay 1906) y el cólera (Londres 1865). Se supone que en la población no hay nacimientos, ni muertes por otras enfermedades o por causas naturales, el período de incubación del agente infeccioso es instantáneo y la duración de la infectividad es igual a la duración de la enfermedad. Además la población es completamente homogénea sin edad, especie, o estructura social.

El modelo simple para la evolución de una epidemia (Kermack-McKendrick), donde S es la población de susceptibles, I infectados y R recuperados y desarrollado inmunidad a la infección, consta del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acopladas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{S} & = & -\beta S I, \\ \dot{I} & = & \beta S I - \gamma I, \\ \dot{R} & = & \gamma I, \end{array}\right. \tag{3.12}$$

recordando que β es la tasa de infección y γ es la tasa de recuperación.

Como R no aparece en las dos primeras ecuaciones de (3.12) su dinámica se puede analizar del siguiente sistema más simple

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI, \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I. \end{cases} \tag{3.13}$$

El factor integrante inverso del sistema (3.13) viene dado por $V(S, I) = SI$ el cual es homogéneo, así aplicando los resultados obtenidos en el capítulo 2, se tiene que el sistema (3.13) no admite ciclos límite. Y como la dinámica del sistema (3.13) es igual a la de (3.12), entonces el sistema (3.12) que describe el modelo Kermack-McKendrick tampoco tiene ciclos límite.

Ejemplo 3.8 (Modelo SI con muerte inducida). Un modelo epidemiológico tipo SI (con muerte inducida) está dado por

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI - \alpha_1 S, \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I - \alpha_2 I, \end{cases} \tag{3.14}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ son los coeficientes con los cuales se analiza la mortalidad inducida sobre los suceptibles e infectados, respectivamente. En este caso también el factor integrante inverso es $V(S, I) = SI$. Así que el sistema (3.14) tampoco tiene ciclos límite.

Ejemplo 3.9. (Modelos de vacunación) El siguiente modelo considera los elementos que afectan el progreso de la enfermedad introduciendo un término de vacunación, si se supone que los susceptibles son vacunados contra la enfermedad con una tasa ν proporcional a su número, se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{S} &= -r\lambda SI - \nu S, \\ \dot{I} &= r\lambda SI - \gamma I. \end{cases} \tag{3.15}$$

En este caso el factor integrante inverso sigue siendo $V(S, I) = SI$, por lo tanto éste sistema no tiene ciclos límite.

Como se quería se concluyó que en estos casos no hay ciclos límite. Pero, ¿que implica esto? para contestar esta pregunta es necesario recordar que un ciclo límite se puede ver como el modelo básico para todos los comportamientos osciladores autosostenidos o autónomos;

aquellos que vuelven, o retornan, a cierta órbita periódica fundamental cuando son perturbados de la misma. Un ejemplo de las oscilaciones estables, seria el latido del corazón humano que recupera cierto ritmo normal después de ser elevado al correr. Por lo tanto, al no haber ciclos límite en estos sistemas, no existe una órbita periódica fundamental. Esto es, no se podrá encontrar una solución periódica aislada; de esta manera, se muestra que la solución no converge en una órbita periódica.

Una posible forma de aplicar este resultado de la no existencia de ciclos límite, es aprovechar esa falta de periodicidad en la solución para un posible desarrollo de modelos de prevención para diferentes tipos de enfermedades, pero cabe aclarar que este es solo un resultado inicial, el cual se podría extender o complementar para tener mayor certeza sobre la dinámica de las enfermedades.

Además es interesante ver que existen casos donde se pueden encontrar órbitas periódicas en un sistema donde se demuestra que no hay ciclos límite, esto no contradice en nada lo anterior, ya que en estos casos se muestra que esas órbitas periódicas no son aisladas, un ejemplo biológico de esto es el siguiente:

Ejemplo 3.10. El sistema clásico de Lotka-Volterra [**23**] es usado para modelar la interacción entre dos especies en una dinámica de depredador-presa.

El sistema es de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(a - by), \\ \dot{y} &= y(cx - d), \end{cases} \tag{3.16}$$

Donde y es el número de algún depredador (por ejemplo, un león) y x es el número de sus presas (por ejemplo, cebras); $\dot{y}$ y $\dot{x}$ representa el crecimiento de las dos poblaciones en el tiempo; con a representando la razón de crecimiento de las presas, b la razón de decrecimiento de los depredadores y los parámetros c y d son las interacciones entre las dos especies.

Si se supone que las presas tienen un suministro de comida ilimitado y se reproducen exponencialmente a menos que exista algún depredador, entonces las variaciones de la población vienen definidas por $\dot{x} = ax - bxy$ y $\dot{y} = cxy - dy$, tales que:

1. El crecimiento exponencial de presas está representado por ax.
2. El encuentro de las dos especies y su interacción viene dado por bxy.

3. El crecimiento de los depredadores producto de la interacción con las presas es dado por cxy.

4. La muerte natural de los depredadores se describe con el término dy la cual es de forma exponencial.

Por lo tanto, si hay muchos depredadores es necesario que el número de presas aumente para mantener la población. Así, la variación de presas $\dot{x}$ muestra como el cambio del número de presas viene dado por su propio crecimiento menos la tasa de encuentros con predadores y la variación de los depredadores $\dot{y}$ se puede interpretar como el crecimiento de los depredadores por la caza de presas menos la muerte natural de éstos. Si x o y son cero no existe interacción.

Un factor integrante inverso del sistema (3.16) viene dado por

$$\mathcal{V}(x,y) = xy,$$

el cual es un polinomio $p-q$ cuasi-homogéneo de grado $p+q$. Por lo tanto, por el Teorema 2.2 se obtiene que el sistema no posee ciclos límite.

En este caso se puede llegar a la conclusión de que el modelo aun es algo básico para poder analizar de una forma óptima una interacción de especies predador-presa real, ya que para los intereses biológicos es de mayor interés encontrar estados de equilibrio oscilatorio estable, para lo cual se necesita la existencia de al menos un ciclo límite.

Ejemplo 3.11. Tomando el modelo diferencial que describe las oscilaciones amortiguadas

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2 x = 0,$$

con γ y w_0^2 constantes del sistema físico particular.

Si se expresa ésta ecuación diferencial en forma de sistema diferencial (haciendo $\dot{x} = y$ y $\dot{y} = \ddot{x}$) se tiene que:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} & = y, \\ \dot{y} & = -2\gamma y - w_0^2 x. \end{array}\right. \tag{3.17}$$

En este caso, se observa que se obtuvo un sistema diferencial homogéneo, así que aplicando el colorario descrito anteriormente, se puede ver que $\mathcal{V}(x,y) = y^2 + 2\gamma xy - w_0^2 x^2$ es FII de (3.17) y a la vez garantiza que este sistema no admite ciclos límite.

Esto implica que es posible que se pierda el comportamiento oscilatorio o que no se pueda encontrar una solución periódica aislada.

CONCLUSIONES

El objetivo principal en esta tesis fue mostrar la dinámica de los campos vectoriales $p-q$ cuasi-homogéneos. Además, en una perturbación de los mismos los cuales son los campos vectoriales infinito cuasi-degenerados. Como nuestro título bien lo refiere, específicamente nos enfocamos en mostrar la ausencia de ciclos límite para estos casos. Este objetivo se logró en el segundo capítulo, el método que dimos a conocer con el cual podemos asegurar cuándo un sistema diferencial plano no tiene ciclos límite.

Este método surgió a partir del estudio de los factores integrantes inversos, los cuales se demostró son fundamentales para el estudio cualitativo de los sistemas diferenciales bidimensionales, todo gracias a la combinación de varios campos de la matemática, como la geometría diferencial usada al aplicar la teoría de grupos de Lie, la geometría algebraica usando las propiedades de los conjuntos algebraicos y la teoría de integrabilidad de Darboux usada para encontrar factores integrantes inversos a partir de curvas algebraicas invariantes, todo esto enfocado en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales.

Las ventajas de combinar estos campos de la matemática también se lograron en el capítulo dos; en éste mostramos como la relación de estas diferentes teorías nos permitieron conocer cómo y dónde se encuentran los ciclos límite de un sistema diferencial. Gracias a esa información se concluyó que no podían haber ciclos límite ni en los sistemas $p-q$ cuasi-homogéneos, ni en los sistemas infinito cuasi-degenerados y en un caso más particular tampoco sobre sistemas diferenciales homogéneos.

Aún más, como un resultado mas general, vimos qué si un sistema diferencial plano tiene un factor integrante inverso $p-q$ cuasi-homogéneo, esto garantiza que este sistema no tiene ciclos límite. Aunque bajo esta idea va la tarea de encontrar una forma explícita para su factor integrante inverso, lo cual puede llegar a ser tan complicado como encontrar la solución del sistema.

Otro objetivo y a la vez motivación fue ver que resultados se obtenían al aplicar nuestro trabajo en los sistemas biológicos, sistemas tales que su modelación nos proveyera una forma cuasi-homogénea con la cual se puede describir la geometría de sus soluciones. Esto se hizo en el capítulo tres donde se abordaron casos particulares de los sistemas epidemiológicos que tenían la forma de sistemas $p-q$ cuasi-homogéneos. Además estudiamos el sistema Lotka-Volterra clásico, sobre el cual llegamos a demostrar que no tiene ciclos límite, cuando a la vez tiene órbitas periódicas; esto nos dio un ejemplo en el cual se muestra que existía la posibilidad de encontrar órbitas periódicas pero que realmente esto no es lo mismo que encontrar ciclos límite, ya que estas órbitas cerradas no son aisladas.

Es sabido que en la interacción entre ciertas especies, los fenómenos oscilatorios suceden con frecuencia, aún cuando no existan “fuerzas periódicas externas”. Por lo tanto, una tarea importante en modelos de presa-depredador es establecer condiciones para la existencia y unicidad de un ciclo límite; teniendo en cuenta que si las presas asumen algún comportamiento anti-depredatorio, o su tasa de crecimiento es afectada por algún fenómeno ecológico, pueden aparecer ciclos límite o desaparecer las oscilaciones en el sistema.

Los únicos ciclos que se dan y perduran en la naturaleza son llamados ecológicamente estables, lo cual significa que deben ser insensibles a perturbaciones del mundo real. En consecuencia, este tipo de ciclo estable debe ser aislado y en un sentido matemático debe corresponder a los ciclos límite del sistema de ecuaciones que lo representa. Así, la existencia de uno de estos ciclo límite estable da una explicación satisfactoria a las interacciones observadas en poblaciones que oscilan de una manera periódica. Por lo tanto los resultados que dimos en este trabajo se pueden interpretar como el ejemplo de poblaciones que pierden ese comportamiento oscilatorio o no se estabiliza en ningún momento.

De igual manera, llegamos a la conclusión de que quedan varias cosas interesantes por hacer, oportunidades de aplicación o extensión de este trabajo, como por ejemplo:

1. Estudiar el resultado de relacionar los sistemas diferenciales $p-q$ cuasi-homogéneos con otro tipo de sistemas diferenciales resultantes a partir de hacer algún tipo de bifurcación. En otras palabras, analizar el cambio geométrico en sus soluciones a partir de una pequeña variación en los valores de los parámetros del sistema, abriendo la posibilidad a que bajo esas consideraciones puedan existir ciclos límite o por ejemplo ver qué particularidades se puedan reflejar en el comportamiento de sus factores integrantes inversos.

2. Extender el estudio a otro tipo de sistemas diferenciales sobre los cuales se puedan aplicar el método de los factores integrantes inversos y con el analizar la dinámica de sus soluciones.

3. Encontrar casos o condiciones tales que el método desarrollado o una variación del mismo nos ayude a garantizar de alguna forma la existencia de ciclos límite y luego quizás la unicidad del mismo.

4. Analizar otros campos de aplicación de este tipo de sistemas diferenciales $p-q$ cuasi-homogéneos, como por ejemplo en la física, química, psicología, biología o donde la idea de comportamiento periódico o ciclo límite tenga alguna relevancia.

5. Ver fenómenos cuya modelación esté descrita por una ecuación diferencial parcial de segundo grado, la cual bajo alguna tranformación específica se pueda relacionar a ella un tipo de sistema diferencial bidimensional sobre el cual podamos aplicar nuestro método, para así sobre este sistema discutir el comportamiento de sus soluciones desde un punto de vista cualitativo, con el propósito final de dar algún resultado sobre la dinámica de la EDP.

Como lo vimos, el análisis de la existencia de ciclos límite en un sistema diferencial es uno de los problemas abiertos que existen en la teoría cualitativa; pero, ¿sabías que quizás es una de los más famosos? Ya que el problema de determinar el número de soluciones periódicas aisladas esta relacionado con el conocido Problema 16 de Hilbert, que hace referencia a la cantidad y posición relativa de ciclos límite en sistemas diferenciales bidimensionales, el cual fue propuesto por David Hilbert en el Congreso de Matemáticos realizado en París en 1900, y que aún permanece sin resolver [**26**].

¿A quién le gustaría intentarlo?

Problema XVI de Hilbert[**27**]. *Determinar el límite superior para el número de ciclos límite en los campos vectoriales polinomiales de grado n bidimensionales, y analizar sus posiciones relativas.*

BIBLIOGRAFÍA

[1] Poincaré H., *Mémoire sur les courbes définies par une equation diff. I, II, J. Math. pures appl. 7, (1881), 375-422; 8 (1882), 251-296.*

[2] Lyapunov A., *Probléme général de la stabilité du mouvement, Annals of Math. Princeton University Press, 17 (1947).*

[3] García I., Grau M., *A survey on the inverse integrating factor, Qual. Theory Dyn. Syst., 9, n. 1-2, (2010), 115-166.*

[4] Giacomini H., J. Llibre, M. Viano, *On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles, Nonlinearity, 9, (1996), 501-516.*

[5] Berrone L., Giacomini H., *On the vanishing set of inverse integrating factors*, *Qual. Theory Dyn. Syst., 1, (2000), 211-230.*

[6] Chavarriga, J., Giné J., *Integrable systems via inverse integrating factor*, *Extracta Math. 13, (1998), 41-60.*

[7] Chavarriga, J., Giacomini H., Giné J., Llibre J., *Darboux integrability and the inverse integrating factor. J. Diff. Equations, 194, (2003), 116-139.*

[8] Hirsch, Morris W., Smale, S. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra, Pure and Applied Mathematics, Vol. 60, Academic Press, New York-London, (1974).*

[9] Alperin J. L., Bell R.B., *Groups and representations. Springer-Verlag, New York, (1995).*

[10] Fulton W., *Algebraic curves: An introduction to algebraic geometric, Addison Wesley P., (1989).*

[11] García I.A., J. Giné., *Non-algebraic invariant curves for polynomial planar vector fields. Discrete Contin. Dyn. Syst. 10 (2004), 755-768.*

[12] Darboux G., *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges), Bull. Sci. Math. 32 (1878), 60-96; 123-144; 151-200.*

[13] Jouanolou J.P., *Equations de Pfaff algébriques. Lecture Notes in Mathematics, 708. Springer, Berlin, (1979).*

[14] García I.A., Giné J., *Generalized cofactors and nonlinear superposition principles Appl. Math. Lett. 16 (2003), 1137-1141.*

[15] Giacomini H., Giné J., and Grau M., *Integrability of planar polynomial differential systems through linear differential equations, Rocky Mountain J. Math., 36 (2006), 457-485.*

[16] Christopher C., *Invariant algebraic curves and conditions for a centre. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 124 (1994), 1209-1229.*

[17] Christopher C., Llibre J. and Pereira J.V., *Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. Pacific J. Math. 229 (2007), 63-117.*

[18] García I., Grau M., *A survey on the inverse integrating factor*, *Qual. Theory Dyn. Syst., 9, n. 1-2, (2010), 115-166.*

[19] Pantazi C., *Inverse problems of the Darboux theory of integrability for planar polynomial differential systems. Doctoral thesis, Universitat Autónoma de Barcelona, (2004).*

[20] García I., Grau M., *A survey on the inverse integrating factor*, *Qual. Theory Dyn. Syst., 9, n. 1-2, (2010), 11.*

[21] García, B., Llibre, J,. Pérez del Río J.S., *Planar quasi-homogeneous polynomial differential systems and their integrability. Journal of Differential Equations 255, (2013), 16.*

[22] Chavarriga J., García I., *Lie symmetries of quasihomogeneous polynomial planar vector fields and certain perturbations*, *Acta Math. Sinica, 21, 1, (2005), 185-192.*

[23] Murray J.D., *Mathematical Biology I: An Introduction, Springer, (2004).*

[24] Jones, D., Sleeman, B., *Ch. 14 in Differential Equations and Mathematical Biology. London: Allen and Unwin, (1983).*

[25] Kermack, W., McKendrick, A., *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics." Proc. Roy. Soc. Lond. A 115, (1927), 700-721.*

[26] Ilyashenko, Y., *Centennial History of Hilbert's 16th problem. Bulletin of the AMS 39 (3): (2002), 301-354.*

[27] Hilbert, D., *Mathematical problems, Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc.8(1902),437-479, in Bull. Amer. Math. Soc. 37(2000), 407-436. CMP 2000:17.*