



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

SECCIÓN EFICAZ PARA EL PROCESO DE BREIT-WHEELER
EN UN MODELO NO INVARIANTE DE LORENTZ

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
SALVADOR RAMÍREZ ACOSTA

TUTOR:
DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RÍOS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD
INSTITUTO DE FÍSICA

INSTITUTO DE FÍSICA, FEBRERO DEL 2016.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco especialmente al Dr. David Vergara Oliver por su apoyo, paciencia, y asesoría durante la elaboración del presente trabajo. También agradezco al Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos por sus valiosas discusiones y comentarios durante el desarrollo de la tesis, y a la Dra. Rocío Jáuregui Renaud por su constante apoyo durante el transcurso de la maestría. Quiero agradecer también a Carlos Escobar Ruiz por su colaboración en este proyecto. Agradezco al proyecto PAPIIT IN104815 por otorgarme una beca durante el período ENE-JUN 2015, y al proyecto PAPIIT IN109013 por el apoyo financiero gracias al cual pude asistir a la escuela de verano SME 2015 en la universidad de Indiana. Finalmente agradezco al proyecto PAPIIT IN103716 que me permitirá continuar desarrollando el trabajo.

Capítulo 1

Introducción

La invariancia de Lorentz es uno de los principios sobre los cuales se construye la física moderna. Uno de los grandes logros de la física del siglo XX fue implementar de manera exitosa los efectos de la mecánica cuántica y de la relatividad especial en un formalismo que devendría en las teorías cuánticas de campo.

El modelo estándar para partículas elementales es en la actualidad la mejor descripción que tenemos para la física de altas energías. Sin embargo, surge la interrogante de si existe física más allá del modelo estándar. La comprobación experimental de las masas de los neutrinos ha arrojado una respuesta afirmativa en esta dirección. Uno de los problemas pendientes en la física de altas energías es la incorporación de los efectos cuánticos a la teoría de la gravitación. En particular, no es claro si la invariancia de Lorentz se mantiene a escalas de energía de la masa Planck.

Dado el papel central que juega la invariancia de Lorentz en las teorías de campo actuales, es de suma importancia someter a pruebas experimentales rigurosas dicho principio. Para ello es necesario desarrollar modelos que nos permitan establecer hasta que escala de energía sigue siendo válida dicha invariancia.

Un modelo desarrollado inicialmente por Kostelecky y Colladay¹, y estudiado ampliamente en la actualidad por sus colaboradores, considera una versión del modelo estándar en la que permite violaciones a la invariancia de Lorentz y a la simetría CPT, e.g. A. Kostelecky, R. Lehnert². Se han realizado pruebas experimentales en diferentes sistemas físicos en busca de dichas violaciones³. Una posibilidad, aún no explorada experimentalmente, de aplicar el modelo de Kostelecky et al. en busca de violaciones a la invariancia de Lorentz es el estudio del espectro de rayos gamma que llegan a la Tierra y que tienen su origen en fuentes astrofísicas tales como núcleos de galaxias activas, destellos de rayos gamma, magnetares, etc. El presente trabajo explora dicha posibilidad. La idea consiste en calcular la sección eficaz para el proceso de creación de pares electrón-positrón usando la versión

de QED del modelo estandar extendido. Dado que la sección eficaz nos dice cual es la tasa de formación de pares e^-e^+ , nos interesa calcular cuales son los efectos de la violación a la invariancia de Lorentz en la tasa de formación de pares e^-e^+ . Dicho efecto se reflejará en el espectro de rayos gamma que se observa en la Tierra. En caso de que se inhiba la formación de pares como resultado de la violación a la simetría de Lorentz, observaríamos que el flujo de rayos gamma que arriba a la Tierra es mayor, a partir de cierto umbral en la energía, con respecto al flujo que predice la teoría invariante de Lorentz. En el caso contrario se observaría que el flujo de rayos gamma que arriba a la Tierra es menor que el predicho por la teoría invariante de Lorentz.

Una fuerte motivación para el presente trabajo es su posible aplicación dentro del proyecto HAWC. Dado que el observatorio HAWC tiene la capacidad de detectar rayos gamma de muy alta energía, en un rango de energía entre 10TeV y 100TeV; se podría utilizar la sección eficaz calculada en este trabajo para buscar posibles violaciones a la invarianza de Lorentz, que se manifestarían como modificaciones al espectro de rayos gamma observado en la Tierra que predice la teoría invariante de Lorentz.

Existen trabajos previos que abordan este problema, por ejemplo, D. Colladay y A. Kostelecky calculan la sección eficaz para el proceso de aniquilación de pares e^-e^+ en el límite ultra relativista⁴. Otro trabajo es el de Ellis et al.⁵ en el cual consideran al vacío como un medio dispersivo que modifica la relación de dispersión para fotones de alta energía, rayos gamma; dicho efecto, aunque minúsculo, resulta ser acumulativo y sería en principio detectable, a partir de cierto umbral de la energía, dado que los fotones recorren distancias astronómicas en su viaje hacia la Tierra.

El presente trabajo está organizado de la siguiente forma: En la primera parte, capítulo 2, se introducen algunos conceptos importantes para el desarrollo del trabajo; estos son la regla de oro de Fermi, la fórmula de Dyson, y la sección eficaz. En la segunda parte, capítulo 3, se desarrolla el caso invariante de Lorentz; se calcula la amplitud al cuadrado para el proceso de Breit-Wheeler, y se calcula la sección eficaz. La tercera parte, capítulo 4, corresponde al caso no invariante de Lorentz; se calcula la amplitud al cuadrado para el proceso de Breit-Wheeler usando el modelo de QED del modelo estándar extendido, y se calcula la sección eficaz a primer orden en el parámetro de violación de Lorentz. Finalmente, en el capítulo 5 se dan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Conceptos Preliminares

2.1. Regla de oro de Fermi

Consideremos un sistema físico descrito por un hamiltoniano H_0 . Supondremos que ya hemos resuelto el problema de eigenvalores

$$H_0|\phi_k\rangle = E_k|\phi_k\rangle \quad (2.1)$$

donde $|\phi_k\rangle$ representa estado propio del sistema con energía E_k . El conjunto de estados $\{|\phi_k\rangle\}$ forma una base ortonormal para el espacio de Hilbert de este sistema, por lo que tendremos que

$$\langle\phi_i|\phi_k\rangle = \delta_{ik} \quad (2.2)$$

$$\sum_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k| = \mathbf{1} \quad (2.3)$$

la primera ecuación expresa la condición de ortonormalidad, y la segunda la relación de completéz.

Dado que conocemos la solución a el problema de eigenvalores del sistema en cuestión, ahora nos gustaría saber cómo resolver el problema cuando agregamos una perturbación dependiente del tiempo $W(\vec{x}, t)$ a nuestro hamiltoniano. En particular, si el efecto de la perturbación en nuestro sistema físico es inducir transiciones de un estado inicial $|\phi_i\rangle$ a un estado final $|\phi_f\rangle$, nos interesa calcular cuál es la probabilidad de que se efectue dicha transición en el sistema como resultado de la perturbación.

Partiremos de la ecuación de Schrodinger, que en este caso no es estacionaria,

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(\vec{x}, t)\rangle = (H_0 + W)|\psi(\vec{x}, t)\rangle \quad (2.4)$$

desarrollamos el estado $|\psi\rangle$ en términos de la base de estados $\{|\phi_k\rangle\}$,

$$|\psi(\vec{x}, t)\rangle = \sum_k c_k(t) |\phi_k(\vec{x})\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \quad (2.5)$$

Sustituimos en la ecuación de Schrodinger, lo cual nos da un conjunto de ecuaciones para los coeficientes $c_k(t)$.

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_k \left[\frac{d}{dt} c_k(t) |\phi_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} - \frac{i}{\hbar} E_k c_k(t) |\phi_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \right] \\ = \sum_k e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \left[E_k c_k(t) |\phi_k\rangle + c_k(t) W |\phi_k\rangle \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Supongamos que al tiempo inicial, $t = 0$, el sistema se encontraba en el estado $|\phi_i\rangle$. Para este tiempo los coeficientes son $c_k(0) = \delta_{ik}$. Consideremos la situación en que la perturbación constante para $t > 0$. Para obtener una primera aproximación al problema, supondremos que la perturbación es tan chica que para todo t tendremos $c_i(t) \approx 1$ y $c_{k \neq i}(t) \approx 0$. Así

$$i\hbar \sum_k \frac{d}{dt} c_k(t) |\phi_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \approx W |\phi_i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t} \quad (2.7)$$

Proyectamos sobre el estado final $|\phi_f\rangle$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} c_f(t) &\approx \langle \phi_f | W | \phi_i \rangle e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} \\ &= T_{fi} e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} \end{aligned} \quad (2.8)$$

hemos hecho $T_{fi} = \langle \phi_f | W | \phi_i \rangle$ y la llamaremos matriz de transición. De esta manera, al tiempo $t = T$ el coeficiente es

$$c_f(T) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T \langle \phi_f | W | \phi_i \rangle e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} dt \quad (2.9)$$

Para obtener una mejor aproximación, sustituimos el valor de c_f en la ecuación (2.6) y proyectamos sobre el estado $|\phi_f\rangle$, luego

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} c_f(t) &\approx \langle \phi_f | W | \phi_i \rangle e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} \\ &- \frac{i}{\hbar} \sum_{k \neq i} \langle \phi_f | W | \phi_k \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} (E_k - E_f) t} \int_0^t \langle \phi_k | W | \phi_i \rangle e^{\frac{i}{\hbar} (E_k - E_i) t'} dt' \end{aligned} \quad (2.10)$$

Como estamos considerando que la perturbación es constante para $t > 0$, y que es cero para el tiempo inicial,

$$\int_0^t \langle \phi_k | W | \phi_i \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_i)t'} dt' = \langle \phi_k | W | \phi_i \rangle \frac{\hbar e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_i)t}}{i(E_k - E_i)} \quad (2.11)$$

Entonces se tiene

$$\frac{d}{dt} c_f(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\langle \phi_f | W | \phi_i \rangle + \sum_{k \neq i} \frac{\langle \phi_f | W | \phi_k \rangle \langle \phi_k | W | \phi_i \rangle}{E_i - E_k} \right] e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} \quad (2.12)$$

Al comparar con la ecuación (2.8), notamos que la matriz de transición a segundo orden corresponde a

$$T_{fi} = \langle \phi_f | W | \phi_i \rangle + \sum_{k \neq i} \frac{\langle \phi_f | W | \phi_k \rangle \langle \phi_k | W | \phi_i \rangle}{E_i - E_k} \quad (2.13)$$

Como la perturbación es muy chica, los términos de mayor orden decrecen rápidamente y tendremos una buena aproximación con los términos de menor orden.

El coeficiente $c_f(t)$ nos da la amplitud de probabilidad de que haya una transición del estado $|\phi_i\rangle$ al estado $|\phi_f\rangle$, como resultado de la perturbación. La probabilidad de transición la obtendremos al tomar la norma al cuadrado del coeficiente,

$$\mathcal{P}_{fi} = |c_f(T)|^2 = |T_{fi}|^2 \int_0^T \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t'} dt dt' \quad (2.14)$$

La tasa de transición inducida por la perturbación, de un estado inicial $|\phi_i\rangle$ a un estado final $|\phi_f\rangle$, corresponde a la probabilidad por unidad de tiempo, es decir

$$d\Gamma_{fi} = \frac{\mathcal{P}_{fi}}{T} = \frac{|T_{fi}|^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t'} dt dt' \quad (2.15)$$

Ya que los estados inicial y final están definidos asintóticamente en la teoría libre de interacción, tendremos

$$\begin{aligned} d\Gamma_{fi} &= |T_{fi}|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t'} dt dt' \\ &= 2\pi |T_{fi}|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i) dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

Si hay dn estados posibles entre las energías E_f y $E_f + dE_f$, la tasa total de transición esta dada por

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int dE_f |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i) dt \quad (2.17)$$

La delta implica que $E_i = E_f$, por lo que

$$\begin{aligned} \Gamma_{fi} &= 2\pi \int dE_f |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \quad (2.18) \\ &= 2\pi \int dE_f |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) \\ &= 2\pi |T_{fi}|^2 \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i = E_f} \end{aligned}$$

El término $\left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i = E_f}$ corresponde a la densidad de estados $\rho(E_i)$. De esta manera, la regla de oro de Fermi esta dada por⁶

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i) \quad (2.19)$$

Podemos generalizar la regla de oro de Fermi al caso relativista. Para esto tenemos que considerar la normalización de la función de onda en el caso relativista. En mecánica cuántica, normalizamos la función de onda a una partícula por unidad de volumen

$$\int_0^l \int_0^l \int_0^l \psi^*(\vec{x}) \psi(\vec{x}) d^3x = 1 \quad (2.20)$$

En el caso relativista, esta no es una buena normalización ya que al efectuar un boost a otro marco de referencia tendremos un factor $\frac{1}{\gamma}$ debido a la contracción de lorentz en la dirección del boost. Esto se puede arreglar fácilmente normalizando la función de onda a $2E$ partículas por unidad de volumen, donde E es la energía de la partícula. De esta manera, el factor $\frac{1}{\gamma}$ se compensa con un factor γ de la energía por el boost.

$$\int_0^l \int_0^l \int_0^l \psi'^*(\vec{x}) \psi'(\vec{x}) d^3x = 2E \quad (2.21)$$

donde $\psi'(\vec{x}) = \sqrt{2E} \psi$.

Dado un proceso en el cual el estado inicial corresponde a dos partículas, descritas por los estados $|\psi'_a\rangle$, $|\psi'_b\rangle$, y el estado final a n partículas, descritas por los estados $|\psi'_1\rangle, \dots, |\psi'_n\rangle$, el elemento de matriz de transición invariante

relativista se relaciona con la tasa de transición dada por la regla de oro de Fermi mediante:

$$\langle \psi'_1 \dots \psi'_n | \mathcal{M}_{fi} | \psi'_b \psi'_a \rangle = \sqrt{2E_a 2E_b 2E_1 \dots 2E_n} T_{fi} \quad (2.22)$$

Como veremos, la teoría de campo nos proporciona un formalismo para calcular perturbativamente \mathcal{M}_{fi} a través de la fórmula de Dyson.

2.2. Fórmula de Dyson

2.2.1. Esquema de interacción

En mecánica cuántica por lo general trabajamos en el esquema de Schrödinger en el cual los estdos evolucionan en el tiempo, y los operadores son independientes del tiempo. Otra posible descripción de la mecánica cuántica, consiste en dejar que los operadores evolucionen en el tiempo, y que los estados sean independientes del tiempo; este esquema se conoce como esquema de Heisenberg. Existe un tercer esquema en el cual tanto los operadores como los estados evolucionan en el tiempo; este esquema es conocido como esquema de interacción. En el esquema de interacción, los operadores evolucionan con el hamiltoniano de la teoría libre, que denotaremos como H_0 ; y los estados evolucionan con el hamiltoniano de interacción, W . El hamiltoniano del sistema es la suma del hamiltoniano de la teoría libre más el hamiltoniano de interacción, es decir $H = H_0 + W$.

Ya que estamos interesados en utilizar teoría cuántica de campos, vamos a considerar un operador de campo $\hat{\Phi}(\vec{x}, t)$. Definimos el operador $\hat{\Phi}_I(\vec{x}, t)$ en el esquema de interacción en términos del operador en el esquema de Schrödinger como

$$\hat{\Phi}_I(\vec{x}, t) = e^{iH_0 t} \hat{\Phi}(\vec{x}, t) e^{-iH_0 t} \quad (2.23)$$

La evolución en el tiempo del operador esta dada por la ecuación de Heisenberg en términos del hamiltoniano de la teoría libre,

$$i \frac{d}{dt} \hat{\Phi}_I(\vec{x}, t) = [\hat{\Phi}_I(\vec{x}, t), H_0] \quad (2.24)$$

Si el lagrangiano de interacción no contiene derivadas temporales, el momento conjugado asociado al campo $\hat{\Pi}_I(\vec{x}, t)$, en el esquema de interacción, coincide con el momento conjugado en el esquema de Heisenberg

$$\hat{\Pi}_I(\vec{x}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \mathcal{L}_{free} = \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \mathcal{L}_{int} = \hat{\Pi}_I(\vec{x}, t) \quad (2.25)$$

Ahora bien, los operadores en el esquema de interacción están relacionados con los operadores en el esquema de Heisenberg a través de una transformación unitaria,

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_I(\vec{x}, t) &= e^{iH_0t} e^{-iHt} \hat{\Phi}(\vec{x}, t) e^{iHt} e^{-iH_0t} \\ &= U \hat{\Phi}(\vec{x}, t) U^\dagger\end{aligned}\quad (2.26)$$

donde hemos definido al operador $U \equiv e^{iH_0t} e^{-iHt}$. Es fácil ver que el operador es unitario, es decir, $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$.

Esta relación entre ambos esquemas tiene la ventaja de que las relaciones de conmutación preservan su forma ante una transformación unitaria. Así, las relaciones de conmutación a tiempos iguales en el esquema de interacción se escriben como

$$[\hat{\Phi}_I(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_I(\vec{y}, t)] = (2\pi)^3 \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.27)$$

En cuanto a la evolución de los estados: definimos el estado $|\psi(t)\rangle_I$ en el esquema de interacción en términos del estado en el esquema de Schrödinger mediante

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0t} |\psi(t)\rangle_S, \quad (2.28)$$

para encontrar la ecuación de movimiento derivamos con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I &= e^{iH_0t} \left[-H_0 |\psi(t)\rangle_S + i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_S \right] \\ &= e^{iH_0t} \left[-H_0 |\psi(t)\rangle_S + H_0 |\psi(t)\rangle_S + W |\psi(t)\rangle_S \right] \\ &= e^{iH_0t} W e^{-iH_0t} |\psi(t)\rangle_I \equiv W_I |\psi(t)\rangle_I\end{aligned}\quad (2.29)$$

por lo que la evolución del estado está en términos del hamiltoniano de interacción a través de la ecuación

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = W_I |\psi(t)\rangle_I \quad (2.30)$$

2.2.2. Matriz \mathcal{S} y fórmula de Dyson

Consideremos un proceso de dispersión en el que dos haces de partículas colisionan, y como resultado de la interacción durante colisión se producen nuevas partículas. Podemos describir a nuestros haces de partículas incidentes mediante un estado inicial $|i\rangle$ definido para un tiempo $t \rightarrow -\infty$, en el cual no hay interacción y la descripción de las partículas corresponde a una

teoría de campo libre. Dejamos correr el tiempo para que la colisión tenga lugar y esperamos un largo tiempo de tal forma que en el límite $t \rightarrow \infty$ tengamos un estado final $|f\rangle$ bien definido que describa a las partículas que fueron producto de la colisión. Al igual que el estado inicial, el estado final está definido para una teoría de campo libre.

Pero ¿qué podemos decir sobre la colisión de las partículas?. Resulta ser que hay un operador que codifica toda la información sobre la dinámica de la interacción durante la colisión, este operador se conoce con el nombre de matriz de dispersión o simplemente matriz \mathcal{S} , y lo podemos definir mediante

$$|f\rangle = \mathcal{S}|i\rangle \quad (2.31)$$

De esta manera, con ayuda de la matriz \mathcal{S} podemos calcular cuál es la probabilidad de que dado un estado inicial $|i\rangle$, tengamos cierto estado final. Matemáticamente esto es

$$\mathcal{P}_{fi} \propto |\langle f|\mathcal{S}|i\rangle|^2 \quad (2.32)$$

En nuestro caso, nos interesa calcular cuál es la probabilidad de que dados 2 fotones incidentes, se produzca un par electrón-positrón como resultado de la interacción durante la colisión.

La matriz \mathcal{S} es un operador unitario, lo cual es consecuencia de la conservación de flujo de probabilidad.

Ahora integramos la ecuación (2.30) con respecto al tiempo,

$$|\psi(t)\rangle_I = |i\rangle - i \int_{-\infty}^t H_I(t') |\psi(t')\rangle dt' \quad (2.33)$$

esta es una ecuación integral la cual se puede resolver iterativamente. En el caso en que no hay interacción

$$|\psi(t)\rangle_I^{(0)} = |i\rangle \quad (2.34)$$

que corresponde al orden cero, en este caso no hay dispersión. Para obtener una corrección a primer orden, sustituimos la ecuación (2.34) en la ecuación (2.33), luego

$$|\psi(t)\rangle_I^{(1)} = |i\rangle + \int_{-\infty}^t (-iH_I(t')) dt' |i\rangle \quad (2.35)$$

para obtener una aproximación a segundo orden, sustituimos la ecuación (2.35) en la ecuación (2.33). Tomando en cuenta que el estado $|i\rangle$ no depende del tiempo, obtenemos

$$|\psi(t)\rangle_I^{(2)} = \left\{ \mathbf{1} + \int_{-\infty}^t (-iH_I(t_1))dt_1 + \int_{-\infty}^t (-iH_I(t_1))dt_1 \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-iH_I(t_1))(-iH_I(t_2)) \right\} |i\rangle \quad (2.36)$$

Al considerar las correcciones de orden superior obtendremos una serie. Dicha serie resulta ser el desarrollo en serie de la matriz de dispersión:

$$\mathcal{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)H_I(t_2)\dots H_I(t_n) \quad (2.37)$$

Ya que el hamiltoniano es un operador, es importante el orden en que aparecen los factores $H_I(t_i)$. Podemos escribir en una forma más simétrica con respecto al tiempo a las integrales de la ecuación (2.37), para esto es necesario introducir el ordenamiento temporal, el cual está definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} &= H_I(t_1)H_I(t_2) \quad t_1 > t_2 \\ &= H_I(t_2)H_I(t_1) \quad t_2 > t_1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Si además reescribimos el hamiltoniano en términos de la densidad hamiltoniana

$$H(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\vec{x}) \quad (2.39)$$

podemos reescribir la expresión para la matriz \mathcal{S} en términos de integrales en cuatro dimensiones

$$\mathcal{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \mathcal{T}\{\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\dots\mathcal{H}_I(x_n)\} \quad (2.40)$$

la cual se conoce como fórmula de Dyson⁷.

2.3. Sección Eficaz

Para introducir el concepto de sección eficaz consideremos un experimento donde un haz incidente de partículas colisiona con un blanco que puede consistir de núcleos atómicos, por ejemplo. Esta descripción de la colisión ocurre en el marco de referencia del laboratorio. En general tendremos 2 partículas que inciden formando un ángulo. Un caso especial se da cuando la colisión es frontal, este caso corresponde al marco de referencia del centro de momento.

Sea Φ la magnitud del flujo incidente de partículas, es decir, el número de partículas incidentes que atraviesan, en una unidad de tiempo, una superficie de área uno que es perpendicular a la dirección de incidencia, y que permanece en reposo con respecto al blanco.

Si P es el número de partículas por unidad de volumen en el haz incidente, y v la velocidad relativa al blanco de las partículas incidentes, entonces:

$$\Phi = Pv. \quad (2.41)$$

La densidad de partículas P tiene que ser lo suficientemente pequeña para poder despreciar el efecto de interacciones mutuas entre las partículas que inciden. Con base en esto, supondremos que cada partícula incidente colisiona de manera independiente.

Una vez que se llevó a cabo la colisión, con ayuda de aparatos de detección se mide el número de partículas \mathcal{N} que fueron dispersadas por unidad de tiempo en un ángulo sólido $d\Omega$ cuya dirección está dada por los ángulos (θ, ϕ) . Resulta ser que \mathcal{N} es directamente proporcional a la corriente incidente⁸:

$$\mathcal{N} = \Phi \Sigma(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.42)$$

donde $\Sigma(\theta, \phi)$ corresponde a la sección eficaz de partículas por un blanco en la dirección (θ, ϕ) . En la mayoría de los casos el blanco consiste de un número N muy grande de átomos cuya distancia entre sí es muy grande comparada con la longitud de onda de las partículas incidentes, por lo que en este caso podemos despreciar los efectos de interferencia entre las diferentes ondas salientes que se originaron debido a la colisión de las partículas (una excepción es el caso de la difracción de electrones en un cristal).

Si el grosor del blanco es muy pequeño, podemos considerar que cada partícula incidente sólo efectúa una colisión durante el proceso; en este caso \mathcal{N} es proporcional a N ,

$$\mathcal{N} = \Phi N \sigma_{dif}(\theta, \phi) d\Omega \quad (2.43)$$

aquí $\sigma_{dif}(\theta, \phi)$ corresponde a la sección eficaz diferencial de dispersión de una partícula por un blanco en la dirección (θ, ϕ) . Notamos que dicha cantidad tiene unidades de área.

Para obtener la sección eficaz total integramos sobre todos los ángulos,

$$\sigma_{total} = \int \sigma_{dif}(\theta, \phi) d\Omega \quad (2.44)$$

Escribiendo a $\sigma_{dif}(\theta, \phi)$ como $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ y considerando un elemento representativo del ensamble, es decir, la colisión de una partícula con un blanco, de la ecuación (2.43) vemos que:

$$d\sigma = \frac{\mathcal{N}}{\Phi} \quad (2.45)$$

El número de partículas dispersadas por unidad de tiempo, \mathcal{N} , depende completamente de la física de las interacciones entre las partículas que colisionan; en el caso de mecánica cuántica, esta información está contenida en la regla de oro de Fermi, así

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} |T_{fi}|^2 dn \quad (2.46)$$

Recordemos que dn son los estados posibles entre las energías E_f y $E_f + dE_f$. Si queremos considerar un proceso relativista, usamos el equivalente de la regla de oro de Fermi para el caso relativista, que considera una normalización de los estados que es invariante de Lorentz. Así,

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} \frac{|\langle \psi_f | \mathcal{M}_{fi} | \psi_i \rangle|^2}{\langle \psi_f | \psi_f \rangle \langle \psi_i | \psi_i \rangle} dn \quad (2.47)$$

Clásicamente, como en el experimento de Rutherford, la sección eficaz es una área efectiva; en mecánica cuántica adquiere un significado un tanto más abstracto, en este caso la sección eficaz es una medida de que tan fuerte es la interacción. Se podría pensar, si se quiere, en términos de una área para algún espacio abstracto. Nótese que en mecánica cuántica, la sección eficaz también tiene unidades de área.

Más en general, nos interesa saber cuál es el número de partículas dispersadas cuando hacemos incidir dos haces de partículas en direcciones opuestas, como es el caso de los experimentos en los aceleradores de partículas. Estos experimentos involucran procesos de muy alta energía por lo que requieren de una descripción relativista; recordemos que, en general en procesos relativistas, el número de partículas no se conserva. Si tenemos dos haces de partículas incidentes que colisionan, dependiendo de la interacción y de la energía, tendremos como producto de la colisión, partículas de diferentes especies. En los laboratorios se miden cuáles son esas partículas, producto de la colisión, y para ello es necesario tener la sección eficaz del proceso en cuestión. Esto ya que la sección eficaz contiene la información sobre la física de la interacción entre las partículas incidentes, y el número de partículas (que es lo que se mide en los laboratorios) dispersadas está complementemente determinado por dichas interacciones, es decir, no depende de los detalles técnicos de cómo se realizó el experimento.

Para poder calcular la sección eficaz de procesos de alta energía, necesitamos recurrir al formalismo de la teoría de campos. En la sección anterior vimos que toda la dinámica de la interacción en un experimento de dispersión está

contenida en la matriz \mathcal{S} , y es independiente de los estados inicial y final. La probabilidad de interacción esta dada por

$$d\mathcal{P} = \frac{|\langle f|\mathcal{S}|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} d\Pi \quad (2.48)$$

Aquí hemos denotado al estado inicial como $|i\rangle$ y al estado final $|f\rangle$, y $d\Pi$ corresponde a los estados finales posibles. Nótese la similitud entre esta expresión y la ecuación (2.47). Dicha similitud no es mera coincidencia, pues se pueden obtener los mismos resultados empleando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo de la mecánica cuántica relativista, que utilizando el desarrollo perturbativo de la fórmula de Dyson. Así la sección eficaz para procesos de alta energía esta dada por

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} \frac{|\langle f|\mathcal{S}|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} d\Pi \quad (2.49)$$

Capítulo 3

El proceso de Breit-Wheeler

El proceso de Breit-Wheeler corresponde a la creación de un par electrón-positrón a partir de dos fotones incidentes cuya energía es mayor que el umbral de energía necesario para que tenga lugar la formación de pares electrón-positrón. Si denotamos con ω_1 y ω_2 a la energía de los fotones, y m_e a la masa del electrón, se debe cumplir que

$$\omega_1\omega_2 \geq m^2. \quad (3.1)$$

3.1. Cálculo de la amplitud al cuadrado

Para calcular la amplitud del proceso de creación de pares vamos a utilizar la fórmula de Dyson. La idea de hacer todo el cálculo a pie, es que nos permitirá usarlo como base para el caso no invariante de Lorentz.

El término de orden cero corresponde al caso en que no hay dispersión, por lo que sólo nos interesa calcular $\langle i|\mathcal{S} - \mathbf{1}|f\rangle \equiv \langle i|\mathcal{M}_{fi}|f\rangle$, donde $|i\rangle$ corresponde al estado inicial y $|f\rangle$ al estado final.

El Hamiltoniano de interacción es $H_I = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$

El término que contribuye a este proceso es el de segundo orden,

$$\langle i|\mathcal{S} - \mathbf{1}|f\rangle \approx \frac{(-ie)^2}{2!} \int dx_1 dx_2 \langle f|H_I(x_2)H_I(x_1)|i\rangle \quad (3.2)$$

$$= \frac{(-ie)^2}{2!} \int dx_1 dx_2 \langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | : \bar{\psi}_a(x_2)\gamma_{ab}^\mu\psi_b(x_2)\bar{\psi}_d(x_1)\gamma_{de}^\nu\psi_e(x_1)A_\mu(x_2)A_\nu(x_1) : |k'_1, \lambda'_1\rangle |k'_2, \lambda'_2\rangle \quad (3.3)$$

+ $x_1 \leftrightarrow x_2$

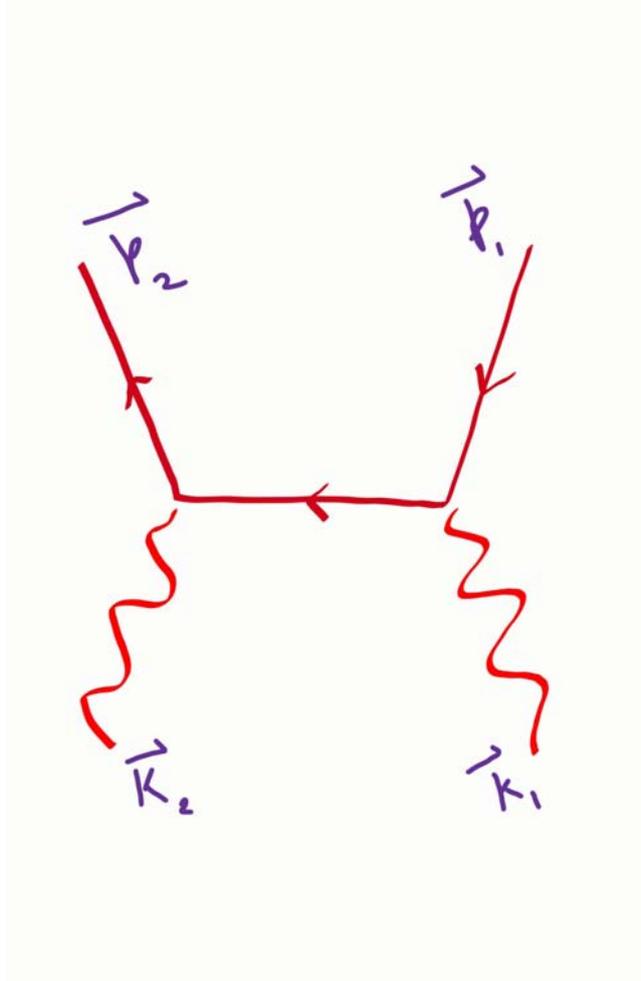


Figura 3.1: Diagrama de Feynman para el proceso de Breit-Wheeler

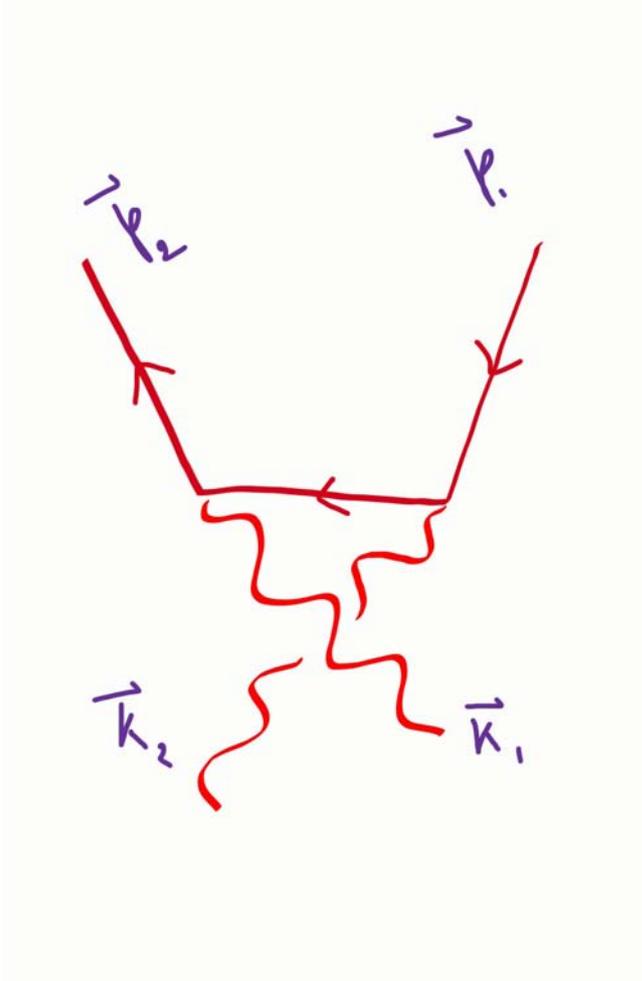


Figura 3.2: Diagrama de Feynman para el proceso de Breit-Wheeler

En esta expresión, en el estado inicial tenemos dos fotones $|i\rangle \equiv |k'_1, \lambda'_1\rangle |k'_2, \lambda'_2\rangle$; y en el estado final un positrón y un electrón $|f\rangle \equiv |p'_1, s'_1\rangle |p'_2, s'_2\rangle$. Luego,

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-ie)^2}{2!} \left\{ \int dx_1 dx_2 \langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | : \bar{\psi}_a(x_2) \gamma_{ab}^\mu S_{bd}^F \gamma_{de}^\nu \psi_e(x_1) A_\mu(x_2) A_\nu(x_1) : |k'_1, \lambda'_1\rangle |k'_2, \lambda'_2\rangle \right. \\
&\quad (3.4) \\
&+ \int dx_1 dx_2 \langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | : \gamma_{ab}^\mu \psi(x_2)_b \bar{\psi}_d(x_1) \gamma_{de}^\nu S_{ea}^F A_\mu(x_2) A_\nu(x_1) : |k'_1, \lambda'_1\rangle |k'_2, \lambda'_2\rangle \\
&\quad \left. + x_1 \leftrightarrow x_2 \right\}.
\end{aligned}$$

Primero desarrollamos el primer término. Para ello necesitaremos el desarrollo en modos de Fourier de los campos,

$$\psi_a(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s u_a^s(\vec{p}) b_p^s e^{-ip \cdot x} + v_a^s(\vec{p}) d_p^{s\dagger} e^{ip \cdot x} \quad (3.5)$$

$$A_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_\lambda \epsilon_\mu(k, \lambda) a_k^\lambda e^{-ip \cdot x} + \epsilon_\mu^*(k, \lambda) a_k^{\lambda\dagger} e^{ip \cdot x} \quad (3.6)$$

Luego, tomando en cuenta el orden normal y aquellos términos que contribuyen para el proceso

$$\int dx_1 dx_2 \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_{p_1} E_{p_2}}} \sum_{s_1, s_2} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_{k_1} \omega_{k_2}}} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \quad (3.7)$$

$$\langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | b_{\vec{p}_2}^{s_2\dagger} d_{\vec{p}_1}^{s_1\dagger} a_{\vec{k}_2}^{\lambda_2} a_{\vec{k}_1}^{\lambda_1} |k'_1, \lambda'_1\rangle |k'_2, \lambda'_2\rangle e^{ip_1 \cdot x_1} e^{ip_2 \cdot x_2} e^{-ik_1 \cdot x_1} e^{-ik_2 \cdot x_2}$$

$$\times \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_{ab}^\mu S_{bd}^F(x_2 - x_1) \gamma_{de}^\nu v_e^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1)$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
\langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | b_{\vec{p}_2}^{s_2\dagger} d_{\vec{p}_1}^{s_1\dagger} a_{\vec{k}_2}^{\lambda_2} a_{\vec{k}_1}^{\lambda_1} |k'_1, \lambda'_1\rangle |k'_2, \lambda'_2\rangle &= \sqrt{4E_{p'_1} E_{p'_2}} \sqrt{4\omega_{k'_1} \omega_{k'_2}} \quad (3.8) \\
&\times \langle 0 | \langle 0 | b_{\vec{p}_2}^{s'_2} d_{\vec{p}_1}^{s'_1} b_{\vec{p}_2}^{s_2\dagger} d_{\vec{p}_1}^{s_1\dagger} a_{\vec{k}_2}^{\lambda_2} a_{\vec{k}_1}^{\lambda_1} a_{\vec{k}'_1}^{s'_1\dagger} a_{\vec{k}'_2}^{s'_2\dagger} |0\rangle |0\rangle
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta las relaciones de anticonmutación para los operadores fermiónicos

$$\{b_{\vec{p}_1}^{s_1}, b_{\vec{p}_2}^{s_2\dagger}\} = \{d_{\vec{p}_1}^{s_1}, d_{\vec{p}_2}^{s_2\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta_{s_1 s_2} \quad (3.9)$$

y la relaciones de conmutación para los operadores bosónicos

$$[a_{\vec{k}_1}^{\lambda_1}, a_{\vec{k}_2}^{\lambda_2\dagger}] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \quad (3.10)$$

vemos que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \langle 0 | b_{\vec{p}_1}^{s'_1} d_{\vec{p}_2}^{s'_2} b_{\vec{p}_1}^{s_1\dagger} d_{\vec{p}_2}^{s_2\dagger} a_{\vec{k}_1}^{\lambda_1} a_{\vec{k}_2}^{\lambda_2} a_{\vec{k}'_1}^{\lambda'_1\dagger} a_{\vec{k}'_2}^{\lambda'_2\dagger} | 0 \rangle | 0 \rangle &= (2\pi)^6 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \delta_{s_1 s'_1} \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}'_2) \delta_{s_2 s'_2} \\ &\times (2\pi)^6 \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta(\vec{k}_2 - \vec{k}'_2) \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Integrando las deltas y considerando las deltas sobre la polarización y el espín, el primer término se reduce a

$$\int dx_1 dx_2 e^{i(p_1 - k_1) \cdot x_1} e^{i(p_2 - k_2) \cdot x_2} \sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_{ab}^\mu S_{bd}^F(x_2 - x_1) \gamma_{de}^\nu v_e^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) \quad (3.12)$$

Escribimos explícitamente al propagador

$$S_{bd}^F(x_2 - x_1) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)} \frac{\not{k}_{bd} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.13)$$

sustituyendo en la expresión para el primer término obtenemos

$$\begin{aligned} i \int dx_1 dx_2 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i(k - (k_1 - p_1)) \cdot x_1} e^{i(p_2 - k_2 - k) \cdot x_2} \times \\ \sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_{ab}^\mu \frac{\not{k}_{bd} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_{de}^\nu v_e^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Luego,

$$\begin{aligned} i \int dx_2 d^4 k \delta(k - (k_1 - p_1)) e^{i(p_2 - k_2 - k) \cdot x_2} \times \\ \sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_{ab}^\mu \frac{\not{k}_{bd} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_{de}^\nu v_e^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Integrando la delta,

$$i \int dx_2 e^{i(p_2 - k_2 - k_1 + p_1) \cdot x_2} \sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_{ab}^\mu \frac{(\not{k}_1 - \not{p}_1)_{bd} + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_{de}^\nu v_e^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) \quad (3.16)$$

volviendo a integrar obtenemos para el primer término

$$\sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \quad (3.17)$$

$$\times \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \gamma_{ab}^\mu \frac{(\not{k}_1 - \not{p}_1)_{bd} + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_{de}^\nu \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) v_e^{s_1}(\vec{p}_1)$$

Observamos que la delta que aparece corresponde a la conservación del momento. El término $x_1 \leftrightarrow x_2$ es completamente análogo y cancela el factor de 2! en el denominador.

Similarmente para el otro término tendremos

$$\int dx_1 dx_2 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_{p_1} E_{p_2}}} \sum_{s_1, s_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_{k_1} \omega_{k_2}}} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \quad (3.18)$$

$$\langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | d_{\vec{p}_1}^{s_1 \dagger} b_{\vec{p}_2}^{s_2 \dagger} a_{\vec{k}_2}^{\lambda_2} a_{\vec{k}_1}^{\lambda_1} | k'_1, \lambda'_1 \rangle | k'_2, \lambda'_2 \rangle e^{ip_2 \cdot x_1} e^{ip_1 \cdot x_2} e^{-ik_1 \cdot x_1} e^{-ik_2 \cdot x_2}$$

$$\times \bar{u}_d^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_{de}^\nu S_{ea}^F(x_1 - x_2) \gamma_{ab}^\mu v_b^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1)$$

$$= \int dx_1 dx_2 e^{i(p_2 - k_1) \cdot x_1} e^{i(p_1 - k_2) \cdot x_2} \times \quad (3.19)$$

$$\sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_d^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_{de}^\nu S_{ea}^F(x_1 - x_2) \gamma_{ab}^\mu v_b^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1)$$

$$= i \int dx_1 dx_2 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i(k - (k_2 - p_1)) \cdot x_1} e^{i(p_2 - k_1 - k) \cdot x_2} \times \quad (3.20)$$

$$\sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_d^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_{de}^\nu \frac{\not{k}_{ea} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_{ab}^\mu v_b^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1)$$

$$= i \int dx_2 d^4 k \delta(k - (k_1 - p_1)) e^{i(p_2 - k_2 - k) \cdot x_2} \times \quad (3.21)$$

$$\sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_d^{s_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) \gamma_{de}^\nu \frac{(\not{k}_2 - \not{p}_1)_{ea} + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_{ab}^\mu \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) v_b^{s_1}(\vec{p}_1)$$

$$= i \int dx_2 e^{i(p_2 - k_2 - k_1 + p_1) \cdot x_2} \times \quad (3.22)$$

$$\sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_d^{s_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) \gamma_{de}^\nu \frac{(\not{k}_2 - \not{p}_1)_{ea} + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_{ab}^\mu \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) v_b^{s_1}(\vec{p}_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \quad (3.23) \\
&\quad \bar{u}_d^{s_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\mu(k_1, \lambda_1) \gamma_{de}^\mu \frac{(\not{k}_1 - \not{p}_1)_{ea} + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_{ab}^\nu \epsilon_\nu(k_2, \lambda_2) v_b^{s_1}(\vec{p}_1)
\end{aligned}$$

El término $x_1 \leftrightarrow x_2$ es completamente análogo y cancela el factor de 2! en el denominador. De esta manera, sumando los términos, ecuaciones (2.17) y (2.23), obtenemos la amplitud de probabilidad para el proceso de Breit-Wheeler:

$$\begin{aligned}
\langle f | \mathcal{M}_{fi} | i \rangle &= -ie^2 \sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \times \quad (3.24) \\
&\quad \left\{ \bar{u}^{s_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \gamma^\mu \frac{\not{k}_1 - \not{p}_1 + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\nu \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) v^{s_1}(\vec{p}_1) \right. \\
&\quad \left. + \bar{u}^{s_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\mu(k_1, \lambda_1) \gamma^\mu \frac{\not{k}_2 - \not{p}_1 + m}{(k_2 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\nu \epsilon_\nu(k_2, \lambda_2) v^{s_1}(\vec{p}_1) \right\}.
\end{aligned}$$

En esta expresión p_1 corresponde al momento del positrón, y p_2 al momento del electrón; $\epsilon_\nu(k_1, \lambda_1)$ corresponde al vector de polarización del fotón incidente con momento k_1 , y $\epsilon_\nu(k_2, \lambda_2)$ al vector de polarización del fotón incidente con momento k_2 . La suma \sum es sobre las polarizaciones de los fotones λ_1, λ_2 y sobre el espín de los fermiones s_1, s_2 .

Ahora introducimos la notación $\mathcal{M}_{fi} \equiv (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \mathcal{A}$. Necesitamos calcular la norma al cuadrado de \mathcal{A} , es decir,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}|^2 = & e^4 \sum \bar{u}^{s_2}(\vec{p}_2) \varepsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \gamma^\mu \frac{k_1 - \not{p}_1 + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\nu \varepsilon_\nu(k_1, \lambda_1) v^{s_1}(\vec{p}_1) \quad (3.25) \\
& \times \bar{v}^{s_1}(\vec{p}_1) \varepsilon_\rho^*(k_1, \lambda_1) \gamma^\rho \frac{k_1 - \not{p}_1 + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\sigma \varepsilon_\sigma^*(k_2, \lambda_2) u^{s_2}(\vec{p}_2) \\
& + \bar{u}^{s_2}(\vec{p}_2) \varepsilon_\mu(k_1, \lambda_1) \gamma^\mu \frac{k_2 - \not{p}_1 + m}{(k_2 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\nu \varepsilon_\nu(k_2, \lambda_2) v^{s_1}(\vec{p}_1) \\
& \times \bar{v}^{s_1}(\vec{p}_1) \varepsilon_\rho^*(k_2, \lambda_2) \gamma^\rho \frac{k_2 - \not{p}_1 + m}{(k_2 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\sigma \varepsilon_\sigma^*(k_1, \lambda_1) u^{s_2}(\vec{p}_2) \\
& + [k_1 \leftrightarrow k_2].
\end{aligned}$$

El término $[k_1 \leftrightarrow k_2]$ es una forma abreviada de escribir nuevamente los dos términos anteriores sustituyendo k_1 por k_2 y viceversa.

Para sumar sobre las polarizaciones de los fotones, hacemos uso de la identidad:

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(k, \lambda) \varepsilon_\nu^*(k, \lambda) = -g_{\mu\nu}, \quad (3.26)$$

luego

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}|^2 = & e^4 \sum \bar{u}^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu \frac{k_1 - \not{p}_1 + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\nu v^{s_1}(\vec{p}_1) \bar{v}^{s_1}(\vec{p}_1) \gamma_\nu \frac{k_1 - \not{p}_1 + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \gamma_\mu u^{s_2}(\vec{p}_2) \quad (3.27) \\
& + \bar{u}^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu \frac{k_2 - \not{p}_1 + m}{(k_2 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\nu v^{s_1}(\vec{p}_1) \bar{v}^{s_1}(\vec{p}_1) \gamma_\mu \frac{k_2 - \not{p}_1 + m}{(k_2 - p_1)^2 - m^2} \gamma_\nu u^{s_2}(\vec{p}_2) \\
& + [k_1 \leftrightarrow k_2].
\end{aligned}$$

Ahora hacemos la suma sobre el espín de los fermiones, considerando que

$$\sum_s u^s(\vec{p}_2) \bar{u}^s(\vec{p}_2) = \not{p}_2 + m, \quad (3.28)$$

$$\sum_r v^r(\vec{p}_1) \bar{v}^r(\vec{p}_1) = \not{p}_1 - m. \quad (3.29)$$

Así

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}|^2 = e^4 & \left\{ Tr[\gamma^\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\mu \frac{\not{k}_1 - \not{p}_1 + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\nu(\not{p}_1 - m)\gamma_\nu \frac{\not{k}_1 - \not{p}_1 + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2}] \right. \\
& + Tr[\gamma_\nu(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu \frac{\not{k}_1 - \not{p}_1 + m}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\nu(\not{p}_1 - m)\gamma_\mu \frac{\not{k}_2 - \not{p}_1 + m}{(k_2 - p_1)^2 - m^2}] \\
& \left. + [k_1 \leftrightarrow k_2] \right\}. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

La amplitud al cuadrado es

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) e^4 & \times \tag{3.31} \\
& \left\{ \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_1 - m)\gamma_\nu(\not{k}_1 - \not{p}_1 + m)]}{4(p_1 \cdot k_1)^2} \right. \\
& + \frac{Tr[\gamma_\nu(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_1 - m)\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1 + m)]}{4(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \\
& \left. + [k_1 \leftrightarrow k_2] \right\}.
\end{aligned}$$

Procedemos a calcular cada una de las trazas por separado, para ello es conveniente tener a la mano algunas identidades que nos facilitarán el cálculo de dichas trazas.

Partiendo de $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} \tag{3.32} \\
g_{\mu\nu}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) &= 8 \\
\gamma_\mu \gamma^\mu &= 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= \gamma_\mu a_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) \tag{3.33} \\
&= 2a_\mu \gamma^\mu - 4a_\mu \gamma^\mu \\
&= -2\not{a}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= \gamma_\mu a_\tau \gamma^\tau b_\sigma \gamma^\sigma \gamma^\mu \tag{3.34} \\
&= 2g^{\tau\sigma} a_\tau b_\sigma \gamma_\mu \gamma^\mu - \gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu \\
&= 4(a \cdot b).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu &= a_r b_s c_t \gamma^\mu \gamma^r \gamma^s \gamma^t \gamma_\mu & (3.35) \\
&= a_r b_s c_t (2g^{\mu r} - \gamma^r \gamma^\mu) \gamma^s \gamma^t \gamma_\mu \\
&= a_r b_s c_t (2g^{\mu r} - \gamma^r \gamma^\mu) (2g^{st} - \gamma^t \gamma^s) \gamma^s \gamma^t \gamma_\mu \\
&= 4(b \cdot c) \not{a} - 2 \not{c} \not{b} \not{a} - 8(b \cdot c) \not{a} + 4(b \cdot c) \not{a} \\
&= -2 \not{c} \not{b} \not{a}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[\not{a} \not{b}] &= \frac{1}{2} Tr[\not{a} \not{b}] + \frac{1}{2} Tr[\not{b} \not{a}] & (3.36) \\
&= \frac{1}{2} Tr[\not{a} \not{b} + \not{b} \not{a}] \\
&= g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu Tr[I] \\
&= 4(a \cdot b).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}] &= 2a \cdot b Tr[\not{c} \not{d}] - Tr[\not{b} \not{a} \not{c} \not{d}] & (3.37) \\
&= 2(a \cdot b) 4(c \cdot d) - 2(a \cdot c) Tr[\not{b} \not{d}] + Tr[\not{b} \not{c} \not{a} \not{d}] \\
&= 8(a \cdot b)(c \cdot d) - 8(a \cdot c)(b \cdot d) + 8(b \cdot c)(a \cdot d) - Tr[\not{b} \not{c} \not{a} \not{d}] \\
&= 4[(a \cdot b)(c \cdot d) + (b \cdot c)(a \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d)].
\end{aligned}$$

Primero desarrollamos:

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 - m) \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1 + m)] &= & (3.38) \\
Tr[\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] + m^2 \{ Tr[\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu] - \\
Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] + Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu] + \\
Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] - Tr[\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\nu] - \\
Tr[\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \} - m^4 Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma_\nu].
\end{aligned}$$

Calculamos cada una de las trazas haciendo uso de las identidades,

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] &= 4Tr[\not{p}_2 (\not{k}_1 - \not{p}_1) \not{p}_1 (\not{k}_1 - \not{p}_1)] & (3.39) \\
&= 16[2p_2 \cdot (k_1 - p_1) p_1 \cdot (k_1 - p_1) - p_1 \cdot p_2 (k_1 - p_1)^2].
\end{aligned}$$

$$Tr[\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu] = 4Tr[\not{p}_1 \not{p}_2] = 16p_1 \cdot p_2 \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] &= 16Tr[(\not{k}_1 - \not{p}_1)(\not{k}_1 - \not{p}_1)] \\ &= 64(k_1 - p_1)^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu] &= -8Tr[(\not{k}_1 - \not{p}_1)p_1] \\ &= -32p_1 \cdot (k_1 - p_1) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] &= -8Tr[\not{p}_1 (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \\ &= -32p_1 \cdot (k_1 - p_1) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] &= -8Tr[\not{p}_2 (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \\ &= -32p_2 \cdot (k_1 - p_1) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\nu] &= -8Tr[\not{p}_2 (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \\ &= -32p_2 \cdot (k_1 - p_1) \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma_\nu] = 16Tr[I] = 64 \quad (3.46)$$

Colectando todos los términos obtenemos:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 - m) \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1 + m)] &= \\ 32p_1 \cdot (k_1 - p_1) p_2 \cdot (k_1 - p_1) - 16p_1 \cdot p_2 (k_1 - p_1)^2 + m^2 \{16p_1 \cdot p_2 \\ - 64(k_1 - p_1)^2 - 64p_1 \cdot (k_1 - p_1) + 64p_2 \cdot (k_1 - p_1)\} - 64m^4. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Usando la conservación de momento $p_1 + p_2 = k_1 + k_2$ podemos eliminar a la variable p_2 de tal forma que la amplitud al cuadrado solo dependa de las variables p_1, k_1, k_2 . Haciendo el algebra obtenemos:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 - m) \gamma_\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1 + m)] &= \\ 32(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) + 32m^2 p_1 \cdot k_1 - 32m^4 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Al tomar en cuenta el término $[k_1 \leftrightarrow k_2]$, tenemos:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_1 - m)\gamma_\nu(\not{k}_2 - \not{p}_1 + m)] = \\ 32(p_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_1) + 32m^2p_1 \cdot k_2 - 32m^4 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Para el otro término, al desarrollar, tenemos:

$$Tr[\gamma_\nu(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_1 - m)\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1 + m)] = \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_2 - \not{p}_1)] + m^2 \{ Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu] \\ - Tr[\gamma_\nu \gamma^\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{k}_2 - \not{p}_1)] + Tr[\gamma_\nu \gamma^\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu] \\ + Tr[\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_2 - \not{p}_1)] - Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\mu] \\ - Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{k}_2 - \not{p}_1)] \} - m^4 Tr[\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu]. \end{aligned}$$

Calculamos cada una de las trazas:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_2 - \not{p}_1)] \\ = -2Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \not{p}_1 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) (\not{k}_2 - \not{p}_1)] \\ = -8p_2 \cdot p_1 Tr[(\not{k}_1 - \not{p}_1) (\not{k}_2 - \not{p}_1)] \\ = -32p_2 \cdot p_1 (k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu] = p_{2\sigma} p_{1\rho} Tr[\gamma_\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu] \\ = 4g^{\nu\rho} p_{2\sigma} p_{1\rho} Tr[\gamma_\nu \gamma^\sigma] = 16p_2 \cdot p_1 \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_\nu \gamma^\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{k}_2 - \not{p}_1)] \\ = (k_2 - p_1)_\sigma (k_1 - p_1)_\rho Tr[\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma^\sigma] \\ = 4g^{\mu\rho} (k_2 - p_1)_\sigma (k_1 - p_1)_\rho Tr[\gamma_\mu \gamma^\sigma] \\ = 16(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_\nu \gamma^\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu] = p_{1\rho} (k_1 - p_1)_\sigma Tr[\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu] \\ = 4g^{\mu\sigma} p_{1\rho} (k_1 - p_1)_\sigma Tr[\gamma^\rho \gamma_\mu] \\ = 16p_1 \cdot (k_1 - p_1) \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1)] &= -2Tr[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1)] & (3.55) \\
&= 4Tr[(k_2 - \not{p}_1) \not{p}_1] \\
&= 16p_1 \cdot (k_2 - p_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\mu] &= -2Tr[(k_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu] & (3.56) \\
&= 4Tr[(k_1 - \not{p}_1) \not{p}_2] \\
&= 16p_2 \cdot (k_1 - p_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1)] &= p_{2\rho} (k_2 - p_1)_\sigma Tr[\gamma_\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma^\sigma] & (3.57) \\
&= 4g^{\mu\rho} p_{2\rho} (k_2 - p_1)_\sigma Tr[\gamma_\mu \gamma^\sigma] \\
&= 16p_2 \cdot (k_2 - p_1)
\end{aligned}$$

$$Tr[\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu] = -2Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu] = -32 \quad (3.58)$$

Recolectamos todos los términos y obtenemos:

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma_\nu (\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m) \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1 + m)] &= & (3.59) \\
- 32p_2 \cdot p_1 (k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) + m^2 \{-16(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) + 16p_1 \cdot p_2 + 16p_2 \cdot (k_1 - p_1) \\
+ 16p_2 \cdot (k_2 - p_1) - 16p_1 \cdot (k_1 - p_1)\} + 32m^4.
\end{aligned}$$

Usamos la conservación del momento para eliminar p_2 ,

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma_\nu (\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 - m) \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1 + m)] &= & (3.60) \\
= 16m^2 p_1 \cdot k_1 + 16m^2 p_1 \cdot k_2 - 32m^4.
\end{aligned}$$

Al tomar en cuenta el término $[k_1 \leftrightarrow k_2]$, tenemos:

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma_\nu (\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (k_2 - \not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 - m) \gamma_\mu (k_1 - \not{p}_1 + m)] &= & (3.61) \\
= 16m^2 p_1 \cdot k_2 + 16m^2 p_1 \cdot k_1 - 32m^4.
\end{aligned}$$

De esta forma, podemos escribir la amplitud al cuadrado como:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= (2\pi e)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \times & (3.62) \\
&\left\{ \frac{1}{4(p_1 \cdot k_1)^2} [32(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) + 32m^2 p_1 \cdot k_1 - 32m^4] \right. \\
&+ \frac{1}{4(p_1 \cdot k_2)^2} [32(p_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_1) + 32m^2 p_1 \cdot k_2 - 32m^4] \\
&+ \left. \frac{1}{4(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} [32m^2 p_1 \cdot k_2 + 32m^2 p_1 \cdot k_1 - 64m^4] \right\} \\
&= (2\pi e)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) 8 \left\{ \frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_2} + \frac{p_1 \cdot k_2}{p_1 \cdot k_1} + 2m^2 \left(\frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right) \right. \\
&\left. - m^4 \left(\frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

3.2. Cálculo de la sección eficaz

Consideremos primero un proceso en el que dos partículas incidentes con momentos p_1 y p_2 respectivamente, colisionan y producen N partículas en el estado final con momentos $\{p_j\}$,

$$p_1 + p_2 \rightarrow \sum_{j=1}^N p_j \quad (3.63)$$

Para calcular la sección eficaz, hacemos uso de la ecuación (2.49)

$$d\sigma = \frac{1}{T\Phi} \frac{|\langle f|\mathcal{S}|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} d\Pi \quad (3.64)$$

Nótese que hemos dividido por el tiempo T . Esto implica que estamos considerando el número de partículas dispersadas en un tiempo T . Si hacemos $T = 1$ obtenemos el resultado para el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo.

La amplitud de probabilidad en términos de la matriz \mathcal{S} se calculó perturbativamente usando la fórmula de Dyson. Recordemos que

$$\langle f|\mathcal{S}|i\rangle = (2\pi)^4 \delta\left(\sum_j p_j\right) i\mathcal{A} \quad (3.65)$$

Luego al tomar la norma al cuadrado

$$\begin{aligned}
|\langle f|\mathcal{S}|i\rangle|^2 &= (2\pi)^8 \delta(0) \delta\left(\sum_j p_j\right) |\mathcal{A}|^2 \\
&= (2\pi)^4 TV \delta\left(\sum_j p_j\right) |\mathcal{A}|^2
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Los estados finales posibles están dados por

$$d\Pi = \prod_j \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p_j \tag{3.67}$$

El factor $\frac{V}{(2\pi)^3}$, que involucra al volumen V , garantiza que

$$\int d\Pi = 1 \tag{3.68}$$

El factor de flujo esta dado por la magnitud de la diferencia de las velocidades, \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , de las partículas incidentes dividida por el volumen, es decir

$$\Phi = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{V} \tag{3.69}$$

Para obtener los factores de normalización de los estados inicial y final, recordemos que el estado de una partícula con momento p lo podemos generar a partir del estado del vacío, empleando operadores de creación

$$\hat{a}_p^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_p}} |p\rangle \tag{3.70}$$

luego

$$\langle p|p\rangle = \langle 0|\hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger |0\rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(0) \tag{3.71}$$

Ahora consideremos la representación de la delta

$$\delta(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tag{3.72}$$

por lo que si tomamos $\vec{p} = 0$, tendremos

$$\delta(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 x = \frac{V}{(2\pi)^3} \tag{3.73}$$

así

$$\langle p|p\rangle = 2E_p V \tag{3.74}$$

por lo que las normalizaciones de los estados inicial y final son

$$\langle i|i\rangle = (2E_{p_1}V)(2E_{p_2}V) \quad \langle f|f\rangle = \prod_j (2E_jV) \quad (3.75)$$

Recopilando toda la información vemos que la sección eficaz está dada por⁹

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{V}{T|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{(2\pi)^4 TV \delta(\sum_j p_j)}{(2E_{p_1}V)(2E_{p_2}V)} |\mathcal{A}|^2 \prod_j \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2E_jV)} d^3p_j \quad (3.76) \\ &= \frac{1}{2E_{p_1}2E_{p_2}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |\mathcal{A}|^2 d\Pi_{LIPS} \end{aligned}$$

donde introducimos el espacio de fase invariante de Lorentz, el cual está definido por

$$d\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta(\sum_j p_j) \prod_j \frac{1}{2E_j} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \quad (3.77)$$

denotando con F al término $2E_{p_1}2E_{p_2}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$, podemos escribir a la sección eficaz de una manera más compacta

$$d\sigma = \frac{1}{F} |\mathcal{A}|^2 d\Pi_{LIPS} \quad (3.78)$$

El factor F se conoce en la literatura como flujo de Möller y se puede expresar en forma covariante,

$$F = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_e^4} \quad (3.79)$$

Con toda esta discusión, estamos listos para calcular la sección para el proceso de Breit-Wheeler. En este proceso, los estados iniciales corresponden a dos fotones con momentos k_1 y k_2 respectivamente; y los estados finales, a un positrón con momento p_1 y a un electrón con momento p_2 . Así

$$d\sigma = \frac{1}{2k_1 \cdot k_2} |\mathcal{A}|_{LI}^2 \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_{p_1}} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_{p_2}} \quad (3.80)$$

Usando la relación de dispersión para los fermiones $p^2 - m^2 = 0$, podemos expresar a la sección eficaz como una integral en 4 dimensiones que es manifiestamente covariante:

$$\sigma = \frac{1}{F} \int |\mathcal{A}|_{LI}^2 \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \delta(p_1^2 - m^2) \delta(p_2^2 - m^2) dp_1 dp_2 \quad (3.81)$$

Para resolver esta integral hacemos el cambio de variable $v_2 = p_2 - k_2$ y $v_1 = p_1 - k_1$, luego

$$\sigma = \frac{1}{F} \int |\mathcal{A}|_{LI}^2 \delta(v_1 + v_2) \delta(v_2^2 + 2v_2 \cdot k_2 - m^2) \delta(v_1^2 + 2v_1 \cdot k_1 - m^2) dv_1 dv_2 \quad (3.82)$$

al integrar sobre la variable v_1 la delta nos impone la condición $v_1 = -v_2 = u$, luego

$$\sigma = \frac{1}{F} \int |\mathcal{A}|_{LI}^2 \delta(u^2 - 2u \cdot k_2 - m^2) \delta(u^2 + 2u \cdot k_1 - m^2) du \quad (3.83)$$

notamos que los argumentos de las deltas implican que $u^2 - m^2 = 2u \cdot k_2$ y $u^2 - m^2 = -2u \cdot k_1$, por lo que se tendrá $k_1 = -k_2$. Así podemos escribir la primera delta en la integral como

$$\sigma = \frac{1}{2F} \int |\mathcal{A}|_{LI}^2 \delta(u \cdot [k_1 + k_2]) \delta(u^2 + 2u \cdot k_1 - m^2) du \quad (3.84)$$

Introducimos coordenadas de tal forma que el fotón con momento k_1 incida sobre el eje z y el fotón con momento k_2 incida sobre el plano $y - z$ con un ángulo α con respecto al eje z . Así

$$k_1 = \omega_1(1, 0, 0, 1) \quad (3.85)$$

$$(3.86)$$

$$k_2 = \omega_2(1, 0, \sin\alpha, \cos\alpha)$$

El marco de referencia en el centro de momento corresponde a tomar el ángulo $\alpha = \pi$. Al sustituir en la integral obtenemos:

$$\sigma = \frac{1}{2F} I \quad (3.87)$$

donde

$$I = \int |\mathcal{A}|_{LI}^2 \delta((\omega_1 + \omega_2)u^0 - \omega_2 \sin\alpha u^2 - u^3(\omega_2 \cos\alpha + \omega_1)) \delta(u^2 + 2\omega_1(u^0 - u^3) - m^2) du \quad (3.88)$$

Hay que notar que la amplitud al cuadrado del proceso, $|\mathbf{M}|^2$ sólo depende de los productos $p_1 \cdot k_1$ y $p_1 \cdot k_2$. En el sistema de coordenadas que hemos introducido, tal dependencia es

$$p_1 \cdot k_1 = v_1 \cdot k_1 = \omega_1(u^0 - u^3). \quad (3.89)$$

$$p_1 \cdot k_2 = u \cdot k_2 + k_1 \cdot k_2 = -u \cdot k_1 + k_1 \cdot k_2 = -\omega_1(u^0 - u^3) + \omega_1 \omega_2(1 - \cos\alpha). \quad (3.90)$$

Vemos que $|\mathcal{A}|_{LI}^2$ sólo depende de las componentes u^0 y u^3 . Ahora integramos sobre la componente u_1 del vector u y usamos la la expresión para la delta de una función $f(x)$,

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad (3.91)$$

donde x_i son la raíces de la función $f(x)$. Con base en esto obtenemos:

$$I = \int du^0 du^2 du^3 |\mathcal{A}|_{LI}^2 \frac{1}{\sqrt{(u^0)^2 - (u^3)^2 - (u^2)^2 + 2\omega_1(u^0 - u^3) - m^2}} \times \delta((\omega_1 + \omega_2)u^0 - \omega_2 \sin \alpha u^2 - u^3(\omega_2 \cos \alpha + \omega_1)) \quad (3.92)$$

Integramos sobre la variable u^2 , utilizando nuevamente la propiedad de la delta de Dirac,

$$I = \frac{1}{|\omega_2 \sin \alpha|} \int |\mathcal{A}|_{LI}^2 \frac{1}{\sqrt{(u^0)^2 - (u^3)^2 - (u^2)^2 + 2\omega_1(u^0 - u^3) - m^2}} du^0 du^3 \quad (3.93)$$

con

$$u^2 = \frac{1}{\omega_2 \sin \alpha} [u^0(\omega_1 + \omega_2) - u^3(\omega_2 \cos \alpha + \omega_1)]. \quad (3.94)$$

Si hacemos

$$A = \frac{1}{2 \sin \alpha} [(1 + \cos \alpha) + 2 \frac{\omega_1}{\omega_2}] \quad (3.95)$$

$$B = \frac{1}{2 \sin \alpha} (1 - \cos \alpha) \quad (3.96)$$

podemos escribir

$$u_2 = A(u^0 - u^3) + B(u^0 + u^3) \quad (3.97)$$

Luego

$$I = \frac{1}{|\omega_2 \sin \alpha|} \int du^0 du^3 |\mathcal{A}|_{LI}^2 \times \frac{1}{\sqrt{(u^0 - u^3)(u^0 + u^3) - [A(u^0 - u^3) + B(u^0 + u^3)]^2 + 2\omega_1(u^0 - u^3) - m^2}}. \quad (3.98)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\xi = (u^0 - u^3) \quad (3.99)$$

$$\eta = (u^0 + u^3) \quad (3.100)$$

obtenemos

$$I = \frac{1}{|2\omega_2 \sin\alpha|} \int d\xi d\eta |\mathcal{A}|_{LI}^2 \frac{1}{\sqrt{\xi\eta - [A\xi + B\eta]^2 + 2\omega_1\xi - m^2}}. \quad (3.101)$$

Ahora vamos a integrar sobre la variable η . La región de integración esta dada por la condición

$$2R\eta - B^2\eta^2 + O > 0 \quad (3.102)$$

donde hemos hecho

$$2R = \xi(1 - 2AB) \quad (3.103)$$

$$O = 2\omega_1\xi - A^2\xi^2 - m^2 \quad (3.104)$$

Con esta notación la integral es

$$I = \frac{1}{|2\omega_2 \sin\alpha|} \int d\xi d\eta |\mathcal{A}|_{LI}^2 \frac{1}{\sqrt{2R\eta - B^2\eta^2 + O}}. \quad (3.105)$$

donde los límites de integración están dados por las raíces de η

$$\eta = \frac{1}{2B^2} [2R \pm \sqrt{4R^2 + 4B^2O}]. \quad (3.106)$$

Completando el cuadrado

$$I = \frac{1}{|2\omega_2 \sin\alpha|} \int d\xi d\eta |\mathcal{A}|_{LI}^2 \frac{1}{\sqrt{O + \frac{R^2}{B^2} - (B\eta - \frac{R}{B})^2}}. \quad (3.107)$$

Hacemos el cambio de variable $Z = B\eta - \frac{R}{B}$, luego

$$I = \frac{1}{|2B\omega_2 \sin\alpha|} \int d\xi |\mathcal{A}|_{LI}^2 \int_{-Z_0}^{Z_0} dZ \frac{1}{\sqrt{Z_0^2 - Z^2}}. \quad (3.108)$$

$$\text{con } Z_0 = \sqrt{O + \frac{R^2}{B^2}}.$$

Integrando la variable Z por sustitución trigonométrica, obtenemos finalmente que

$$I = \frac{\pi}{|2B\omega_2 \sin\alpha|} \int d\xi |\mathcal{A}|_{LI}^2. \quad (3.109)$$

Para obtener los límites de integración sobre la variable ξ pedimos que el discriminante de la ecuación para las raíces de η sea mayor que cero

$$4R^2 + 4B^2O > 0. \quad (3.110)$$

sustituyendo y haciendo un poco de algebra dicha condición se escribe como

$$-\frac{\omega_1}{2\omega_2}m^2(1 - \cos\alpha) + \xi\omega_1(1 - \cos\alpha) - \xi^2 > 0 \quad (3.111)$$

de la cual obtenemos los límites de integración

$$-\Delta + \varrho \leq \xi \leq \Delta + \varrho \quad (3.112)$$

donde

$$\Delta = \sqrt{\frac{\omega_2}{4\omega_1}(1 - \cos\alpha)(\omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha) - 2m^2)} \quad (3.113)$$

$$\varrho = \frac{1}{2}\omega_2(1 - \cos\alpha) \quad (3.114)$$

Así finalmente podemos escribir la integral como

$$I = \frac{\pi}{2\varrho} \int_{-\Delta+\varrho}^{\Delta+\varrho} d\xi |\mathcal{A}|_{LI}^2. \quad (3.115)$$

con lo cual obtenemos una expresión que nos permite calcular la sección eficaz

$$\sigma = \frac{1}{F} \frac{\pi}{4\varrho} \int_{-\Delta+\varrho}^{\Delta+\varrho} d\xi |\mathcal{A}|_{LI}^2. \quad (3.116)$$

Escribimos la amplitud al cuadrado explícitamente como función de ξ

$$|\mathcal{A}(\xi)|_{LI}^2 = 8e^4 \left\{ \frac{\omega_1\xi}{-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)} + \frac{-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)}{\omega_1\xi} \right. \quad (3.117)$$

$$\left. + 2m^2 \left[\frac{1}{\omega_1\xi} + \frac{1}{-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)} \right] - m^4 \left[\frac{1}{\omega_1\xi} + \frac{1}{-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)} \right]^2 \right\}$$

Usando esta expresión calculamos la integral,

$$I = \frac{8e^4\pi}{2\rho} \left\{ \frac{1}{\omega_1} (-4m^2 - 2\omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)) \sqrt{1 - \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)}} \right. \quad (3.118)$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_1^2\omega_2} (-2\omega_1\omega_2(2m^2 + \omega_1\omega_2) + 2\omega_1^2\omega_2^2 \cos\alpha + 2m^4 \csc^2 \frac{\alpha}{2}) \log \left[\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)}}} \right] \right\}$$

Con esto, podemos escribir la sección eficaz para el proceso de breit-Wheeler en el caso invariante de Lorentz

$$\sigma = \frac{8\pi e^4}{\omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)^2} \left\{ \frac{(-2m^2 - \omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha))}{\omega_1\omega_2} \sqrt{1 - \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)}} \right. \quad (3.119)$$

$$\left. \frac{(\omega_1^2\omega_2^2 \cos\alpha + m^4 \csc^2 \frac{\alpha}{2} - \omega_1\omega_2(2m^2 + \omega_1\omega_2))}{\omega_1^2\omega_2^2} \log \left[\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)}}} \right] \right\}$$

Observamos que la expresión para la sección eficaz es simétrica ante el intercambio de las frecuencias, $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$; y que las frecuencias aparecen elevadas a la misma potencia en los diferentes términos, es decir, no hay términos de la forma $\omega_1^p\omega_2^q$ (con $p \neq q$ enteros).

Vamos a graficar la sección eficaz en los siguientes casos:

- Una de las frecuencias w_1 corresponde a un rayo gamma , y la otra frecuencia corresponde a un fotón del fondo extragaláctico(infrarojo), $w_2 = 10^{-2}eV$. Graficamos para dos ángulos de incidencia: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, y $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Este caso se muestra en la figura 3.1.
- Una de las frecuencias w_1 corresponde a un rayo gamma, y la otra frecuencia, $w_2 = 10^{-4}eV$, corresponde a un fotón de la radiación cósmica de fondo (CMB por sus siglas en inglés). Graficamos para dos ángulos de incidencia: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ que se muestra en la figura 3.2, y $\alpha = \frac{\pi}{4}$ que se muestra en la figura 3.3.

Al comparar ambas gráficas, vemos que el umbral de la energía para la producción de pares electrón-positrón es menor en el caso del fotón del fondo extragaláctico que en el caso del fotón del CMB. Esto era de esperarse, como resultado de la conservación de energía. Sin embargo, es interesante notar,

con base en el ancho de las gráficas, que la producción de pares se ve favorecida en el caso del fotón de la radiación de fondo; es decir, es más probable la interacción de un rayo gamma con un fotón del CMB, que la interacción de un rayo gamma con un fotón del fondo extragaláctico. Al variar el ángulo, de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a $\alpha = \frac{\pi}{4}$, vemos que el efecto en ambos casos es elevar el umbral de la energía para el cual se comienzan a producir pares electrón-positrón.

Para poder comparar con el valor encontrado en la literatura, consideremos el marco de referencia del centro de momento. Hacemos $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $\alpha = \pi$. Luego

$$I = \frac{e^4 \pi}{2\omega} \left\{ -4\omega \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} - 4 \frac{m^2}{\omega^2} \omega \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} + \frac{2}{\omega^3} [2m^2 \omega^2 + 2\omega^4 - m^4] \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}} \right\} \quad (3.120)$$

$$I = e^4 \pi \left\{ \left(3 - \left(1 - \frac{m^2}{\omega^2}\right)^2\right) \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}} - 4 \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} + 2 \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} \left(1 - \frac{m^2}{\omega^2}\right) \right\} \quad (3.121)$$

tomando

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} \quad (3.122)$$

$$I = e^4 \pi \left[(3 - v^4) \log \frac{1+v}{1-v} - 2v(2 - v^2) \right] \quad (3.123)$$

de tal manera que la sección eficaz es

$$\sigma = \frac{m^2}{\omega^2} \frac{e^4}{m^2} \frac{\pi}{2} \left[(3 - v^4) \log \frac{1+v}{1-v} - 2v(2 - v^2) \right] \quad (3.124)$$

$$\sigma = \frac{e^4}{m^2} \frac{\pi}{2} (1 - v^2) \left[(3 - v^4) \log \frac{1+v}{1-v} - 2v(2 - v^2) \right] \quad (3.125)$$

Este es el resultado encontrado en la literatura para el proceso de Breit-Wheeler en el caso invariante de Lorentz tomando el marco de referencia de el centro de momento¹⁰.

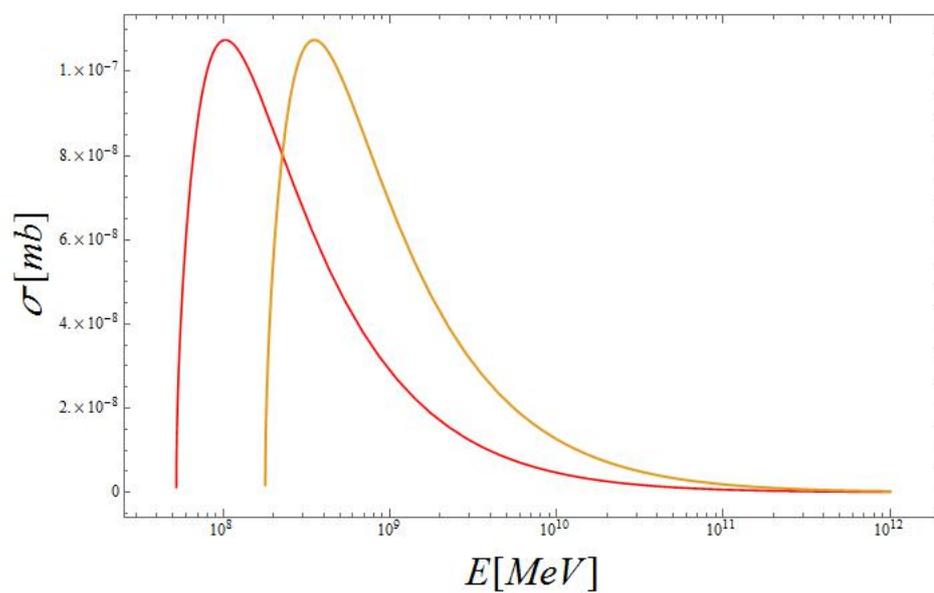


Figura 3.3: Sección eficaz para el proceso de Breit-Wheeler: caso $w_2 = 10^{-2}eV$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Rojo), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Naranja)

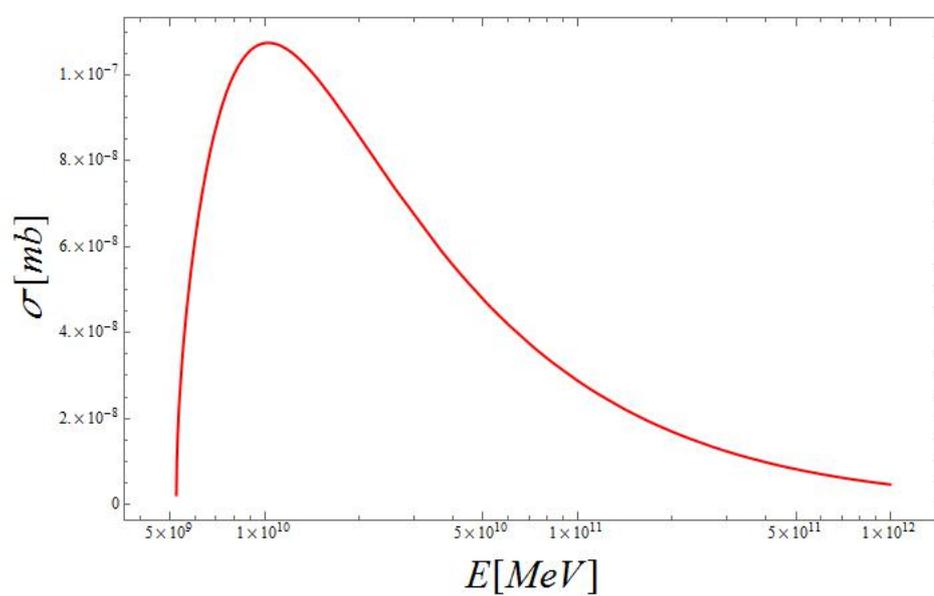


Figura 3.4: Sección eficaz para el proceso de Breit-Wheeler: caso $w_2 = 10^{-4}eV$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$

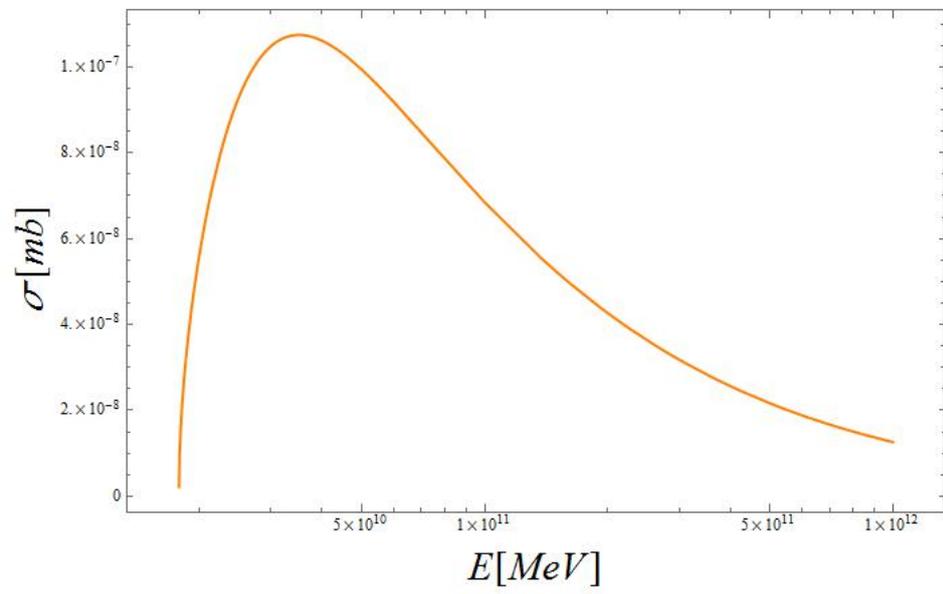


Figura 3.5: Sección eficaz para el proceso de Breit-Wheeler: caso $w_2 = 10^{-4}eV$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Capítulo 4

El proceso de Breit-Wheeler para el caso no invariante de Lorentz

4.1. Modelo no invariante de Lorentz para QED

En esta sección vamos a considerar el modelo para QED introducido por Kostelecky et al.¹ en el cual se consideran violaciones a la simetría de Lorentz y a la simetría de CPT. En este trabajo solo estudiaremos el caso de violación a la simetría de Lorentz respetando la simetría de CPT.

En el modelo estándar extendido se considera que los términos de la lagrangiana que violan explícitamente la simetría de Lorentz provienen de una teoría más fundamental cuya lagrangiana es invariante ante transformaciones de Lorentz tanto para los campos como para observadores; sin embargo las interacciones de dicha teoría son tales que dan lugar a una ruptura espontánea de simetría. Desde esta perspectiva, el modelo estándar extendido emerge en el límite de baja energía como consecuencia de una ruptura espontánea de simetría².

La densidad lagrangiana para QED en el modelo estándar extendido esta dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SME} = & \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} M \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{4} (k_F)_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} + (k_{AF})^\mu A^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde ψ denota a un espinor de Dirac, y $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de Faraday, y A^μ es el vector potencial; $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ es la derivada covariante, y $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ es el tensor dual al tensor de

Faraday. Los efectos asociados a la violación de Lorentz están contenidos en los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\rho\sigma}$, $(k_{AF})^\mu$, Γ^μ , M . Además se tiene que

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu + if^\mu\frac{1}{2}g^{\lambda\nu\mu}\sigma_{\lambda\nu} + e^\mu \quad (4.2)$$

$$M = m + a^\mu\gamma_\mu + b^\mu\gamma_5\gamma_\mu + \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Todos los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\rho\sigma}$, $(k_{AF})^\mu$, a^μ , b^μ , $c^{\mu\nu}$, $d^{\mu\nu}$, f^μ , e^μ , $H^{\mu\nu}$ son constantes y contienen información sobre el tipo de violación a la simetría de Lorentz.

Una simplificación a este lagrangiano es considerar únicamente los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\rho\sigma}$ y $c^{\mu\nu}$, y tomar el resto como cero. El coeficiente $(k_F)_{\mu\nu\rho\sigma}$ se puede escribir en términos de un tensor simétrico de traza cero como

$$(k_F)^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\tilde{k}^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}\tilde{k}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\tilde{k}^{\nu\rho} + \eta^{\nu\sigma}\tilde{k}^{\mu\rho}) \quad (4.4)$$

y

$$\tilde{k}^{\mu\nu} = (k_F)_{\alpha}^{\mu\alpha\nu} \quad (4.5)$$

Un punto importante que se tiene que tomar en cuenta es que los coeficientes $c^{\mu\nu}$ y $\tilde{k}^{\mu\nu}$ no son observables por separado, resulta ser que es su diferencia $c^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{k}^{\mu\nu}$ la que se puede medir experimentalmente. Sin embargo, es posible escoger coordenadas¹¹ de tal forma que $\tilde{k}^{\mu\nu} = 0$, de esta manera sólo se modifica el sector fermiónico.

Así, el langragiano de interacción del modelo estándar extendido se reduce a

$$\mathcal{L}_{SME} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}m\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

Es conveniente introducir un marco en el cuál los efectos de la violación de Lorentz son tan pequeños que no pueden ser detectados en el laboratorio, este caso corresponde a bajas energías. De esta manera, en el caso en que los efectos de la violación a la simetría de Lorentz son medibles corresponde a altas energías. Es en ese sentido que se hablará de la escala de alta y baja energía.

4.1.1. Cuantización del campo de Dirac para el caso no invariante de Lorentz

Partimos de una densidad lagrangiana para el campo fermiónico libre

$$L = \bar{\psi}(i\Gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (4.7)$$

donde $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + c^{\mu\nu}\gamma_\nu$.

Observamos que hemos introducido una corrección $c^{\mu\nu}$ a la matriz γ^μ , que es el responsable de introducir una violación a la invariancia de Lorentz. La Hermiticidad de la densidad lagrangiana garantiza que $c^{\mu\nu}$ es real. En general podemos tomar a $c^{\mu\nu}$ como una matriz de traza cero. Dicho coeficiente es a lo más del orden de $1 \frac{m_e}{M_P}$, donde m_e es la masa del electrón y M_P es la masa de Planck.

Notamos que la densidad lagrangiana es un escalar de Lorentz lo cual implica que la teoría resultante será invariante ante transformaciones de coordenadas para observadores. Sin embargo la teoría no será invariante cuando transformemos los campos, esto ya que el coeficiente $c^{\mu\nu}$ es una matriz constante que esta asociada a un campo de fondo que permanece fijo cuando realizamos la transformación y por ende rompe la simetría de Lorentz.

Las matrices γ^μ satisfacen el algebra usual $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

El momento canónico conjugado es

$$\pi = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} L = i\bar{\psi}\Gamma^0 \quad (4.8)$$

lo cual nos permite escribir la Hamiltoniana del campo

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d^3x [\pi\dot{\psi} - L] \\ &= \int d^3x \bar{\psi}(-i\Gamma^i\partial_i + m)\psi \\ &= \int d^3x \pi(\Gamma^0)^{-1}(-\Gamma^i\partial_i - im)\psi \end{aligned} \quad (4.9)$$

A partir de la Hamiltoniana se obtiene la ecuación de movimiento para el campo

$$\dot{\psi}(x) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi(x)} = (\Gamma^0)^{-1}(-\Gamma^i\partial_i - im)\psi(x). \quad (4.10)$$

Desarrollamos el campo $\psi(x)$ en modos de Fourier

$$\psi_a(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_p} \sum_{s=1,2} [b_s(\vec{p})u_a^s(\vec{p})e^{-ipx} + d_s^\dagger(\vec{p})v_a^s(\vec{p})e^{ipx}] \quad (4.11)$$

El índice s esta asociado con la polarización del fermión. En general denotaremos dicha polarización con los índices del alfabeto latino r, s . El índice a

denota la componente de el espinor.

La matriz $(\Gamma^0)^{-1}(\Gamma^i p_i + m)$ tiene 4 eigenvalores que corresponden a los 4 posibles valores de p^0 . Los eigenvectores $u^s(\vec{p}), v^s(\vec{p})$ asociados a dichos eigenvalores satisfacen las ecuaciones:

$$(\Gamma^\mu p_\mu - m)u^s(\vec{p}) = (\gamma^\mu \tilde{p}_\mu - m)u^s(\vec{p}) = 0. \quad (4.12)$$

$$(\Gamma^\mu p_\mu + m)v^s(\vec{p}) = (\gamma^\mu \tilde{p}_\mu + m)v^s(\vec{p}) = 0. \quad (4.13)$$

Donde introducimos la notación

$$\tilde{p}_\mu = p_\mu + c_{\mu\nu} p^\nu \quad (4.14)$$

Para cuantizar el campo promovemos a operadores los coeficientes b_s, d_s^\dagger que aparecen en el desarrollo en modos de Fourier del campo

$$\psi_a(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_p} \sum_{s=1,2} [\hat{b}_s(\vec{p})u_a^s(\vec{p})e^{-ipx} + \hat{d}_s^\dagger(\vec{p})v_a^s(\vec{p})e^{ipx}] \quad (4.15)$$

y postulamos las relaciones de conmutación entre los operadores

$$\{b_r(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{q})\} = \{d_r(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{q})\} = (2\pi)^3 \frac{\omega_p}{m} \delta(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{rs} \quad (4.16)$$

$$\{b_r(\vec{p}), b_s(\vec{q})\} = \{b_r^\dagger(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{q})\} = 0 \quad (4.17)$$

$$\{d_r(\vec{p}), d_s(\vec{q})\} = \{d_r^\dagger(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{q})\} = 0 \quad (4.18)$$

Luego

$$\begin{aligned} \{\psi_a(\vec{x}, t), \bar{\psi}_b(\vec{y}, t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_p \omega_q} \sum_{rs} \left\{ b_s(\vec{p})u_a^s(\vec{p})e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d_s^\dagger(\vec{p})v_a^s(\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \right. \\ \left. b_r^\dagger(\vec{q})\bar{u}_b^r(\vec{q})e^{i\vec{q}\cdot\vec{y}} + d_r(\vec{q})\bar{v}_b^r(\vec{q})e^{-i\vec{q}\cdot\vec{y}} \right\} \end{aligned}$$

al hacer los productos y hacer uso de las relaciones de conmutación obtenemos

$$\begin{aligned} \{\psi_a(\vec{x}, t), \bar{\psi}_b(\vec{y}, t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_p \omega_q} \sum_{rs} (2\pi)^3 \frac{\omega_p}{m} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs} \times \\ (u_a^s(\vec{p})\bar{u}_b^s(\vec{q})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{q}\cdot\vec{y})} + v_a^s(\vec{p})\bar{v}_b^s(\vec{q})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{q}\cdot\vec{y})}) \end{aligned}$$

integrando la delta

$$\{\psi_a(\vec{x}, t), \bar{\psi}_b(\vec{y}, t)\} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_q} \sum_r \left(u_a^s(\vec{q}) \bar{u}_b^s(\vec{q}) + v_a^s(-\vec{q}) \bar{v}_b^s(-\vec{q}) \right) e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \quad (4.19)$$

usando la relación de completitud¹²

$$\sum_{s=1,2} \left[u_a^s(\vec{p}) \bar{u}_c^s(\vec{p}) + v_a^s(-\vec{p}) \bar{v}_c^s(-\vec{p}) \right] (\Gamma^0)_{cb} = \frac{\omega_p}{m} \delta_{ab} \quad (4.20)$$

e integrando, obtenemos

$$\{\psi_a(\vec{x}, t), \bar{\psi}_b(\vec{y}, t)\} = (\Gamma^0)_{ab}^{-1} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.21)$$

Similarmente se muestra que

$$\{\psi_a(\vec{x}, t), \psi_b(\vec{y}, t)\} = \{\bar{\psi}_a(\vec{x}, t), \bar{\psi}_b(\vec{y}, t)\} = 0 \quad (4.22)$$

Ahora procedemos a cuantizar el Hamiltoniano usando el desarrollo en modos en términos de operadores

$$\mathcal{H} = \int d^3x : \bar{\psi}(-i\Gamma^i \partial_i + m)\psi : \quad (4.23)$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_p \omega_q} & (b_s(\vec{p}) u_a^s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d_s^\dagger(\vec{p}) v_a^s(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \\ & \times (-i\Gamma^i \partial_i + m) (b_r(\vec{q}) u_b^r(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{y}} + d_r^\dagger(\vec{q}) v_b^r(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{y}}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

usando las ecuaciones de eigenvalores para los espinores

$$(\Gamma^i p_i + m) u^s(\vec{p}) = \Gamma^0 p_0 u^s(\vec{p}) \quad (4.25)$$

$$(\Gamma^i p_i - m) v^s(\vec{p}) = \Gamma^0 p_0 v^s(\vec{p}) \quad (4.26)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_p \omega_q} q^0 \sum_{rs} & \left(b_r^\dagger b_s \bar{u}_a^r(\vec{p}) \Gamma^0 u_b^s(\vec{q}) e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right. \\
& - d_r d_s^\dagger \bar{v}_a^r(-\vec{p}) \Gamma^0 v_b^s(-\vec{q}) e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} - b_r^\dagger d_s^\dagger \bar{u}_a^r(-\vec{p}) \Gamma^0 v_b^s(-\vec{q}) e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} \\
& \left. + d_r b_s \bar{v}_a^r(\vec{p}) \Gamma^0 u_b^s(\vec{q}) e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} \right) \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Integrando obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_p \omega_q} q^0 \sum_{rs} & \left(b_r^\dagger b_s \bar{u}_a^r(\vec{q}) \Gamma^0 u_b^s(\vec{q}) - d_r d_s^\dagger \bar{v}_a^r(-\vec{q}) \Gamma^0 v_b^s(-\vec{q}) \right. \\
& \left. - b_r^\dagger d_s^\dagger \bar{u}_a^r(\vec{q}) \Gamma^0 v_b^s(-\vec{q}) + d_r b_s \bar{v}_a^r(-\vec{q}) \Gamma^0 u_b^s(\vec{q}) \right) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Introducimos un producto interno en el espacio de espinores¹², para ello usamos la ecuación de continuidad para la corriente conservada $\partial_\mu j^\mu = 0$, en analogía con el caso convencional.

$$j^\mu = \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi \quad (4.29)$$

luego aplicando el teorema de Gauss y considerando que el término a la frontera se desvanece en el infinito, tenemos que

$$\partial_t \int d^3x j^0 = 0 \quad (4.30)$$

lo cual nos dice que $\int d^3x j^0$ es constante en el tiempo. Por ello definimos un producto interno

$$\langle \bar{u} | v \rangle = \int d^3x \bar{u} \Gamma^0 v \quad (4.31)$$

Escribimos

$$u(k_1) = C(\tilde{k}_1 + m) u e^{-i\tilde{k}_1 \cdot \vec{x}} \quad (4.32)$$

$$v(k_2) = C(\tilde{k}_2 + m) v e^{-i\tilde{k}_2 \cdot \vec{x}} \quad (4.33)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\langle u|v\rangle &= \int d^3x C^2 \bar{u}(\vec{k}_1 + m) \Gamma^0(\vec{k}_2 + m) v e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}} \\
&= (2\pi)^3 C^2 \bar{u}(\vec{k}_1 + m) \Gamma^0(\vec{k}_2 + m) v \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\
&= (2\pi)^3 C^2 \bar{u}(-\vec{k}_1 - m) (-\vec{k}_2 + m) v \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Podemos reescribir el Hamiltoniano en términos del producto interno

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_p \omega_q} q^0 \sum_{r,s} \left(b_r^\dagger b_s \langle u(\vec{q})|u(\vec{q})\rangle - d_r d_s^\dagger \langle v(-\vec{q})|v(-\vec{q})\rangle \right) \tag{4.35}$$

$$- b_r^\dagger d_s^\dagger \langle u(-\vec{q})|v(\vec{q})\rangle + d_r b_s \langle v(\vec{q})|u(-\vec{q})\rangle \Big). \tag{4.36}$$

al evaluar los productos internos, tomando en cuenta que

$$\bar{u}^r(\vec{p}) \Gamma^0 u^s(\vec{p}) = \bar{v}^r(-\vec{p}) \Gamma^0 v^s(-\vec{p}) = \frac{\omega_p}{m} \delta_{rs} \tag{4.37}$$

obtenemos,

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^0 \sum_{r=1,2} b_r^\dagger b_r - d_r d_r^\dagger \tag{4.38}$$

usando la relación de anticonmutación (ecuación 4.15) obtenemos finalmente

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^0 \sum_{r=1,2} b_r^\dagger b_r + d_r^\dagger d_r + (2\pi)^3 \delta(0) \tag{4.39}$$

4.1.2. El propagador de Feynmann

El propagador de Feynmann $S(x-y)$ esta definido en términos del producto ordenado temporalmente de los operadores del campo evaluados en dos puntos, es decir, corresponde a una función de correlación de dos puntos,

$$iS_{ab}^F(x-y) \equiv \langle 0|T\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle = \theta(x^0 - y^0) \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) - \theta(y^0 - x^0) \psi_a(y)\bar{\psi}_b(x) \tag{4.40}$$

donde

$$T\psi(x)\bar{\psi}(y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle + : \psi(x)\bar{\psi}(y) : \tag{4.41}$$

y

$$S(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{\Gamma^\mu k_\mu - m + i\epsilon} \tag{4.42}$$

4.2. Cálculo de la amplitud al cuadrado

El cálculo de la amplitud al cuadrado es completamente análogo al caso invariante de Lorentz salvo que hay que tomar en cuenta algunas modificaciones. El término que hay que calcular para este proceso, al igual que en el caso invariante de Lorentz, es el de segundo orden,

$$\langle i|\mathcal{S} - \mathbf{1}|f\rangle \approx \frac{(-ie)^2}{2!} \int dx_1 dx_2 \langle f|H_I(x_2)H_I(x_1)|i\rangle \quad (4.43)$$

El Hamiltoniano de interacción es $H_I(x) = \bar{\psi}(x)\tilde{\gamma}^\mu\psi(x)A_\mu(x)$, donde hemos renombrado $\Gamma^\mu = \tilde{\gamma}^\mu$. Los espinores $\psi(x)$ satisfacen la ecuación de Dirac modificada.

$$= \frac{(-ie)^2}{2!} \int dx_1 dx_2 \langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | : \bar{\psi}_a(x_2)\tilde{\gamma}_{ab}^\mu\psi_b(x_2)\bar{\psi}_d(x_1)\tilde{\gamma}_{de}^\nu\psi_e(x_1)A_\mu(x_2)A_\nu(x_1) : |k'_1, \lambda'_1\rangle |k'_2, \lambda'_2\rangle \quad (4.44)$$

+ $x_1 \leftrightarrow x_2$

En el estado inicial tenemos dos fotones $|i\rangle \equiv |k'_1, \lambda'_1\rangle |k'_2, \lambda'_2\rangle$, y en el estado final un positrón y un electrón $|f\rangle \equiv |p'_1, s'_1\rangle |p'_2, s'_2\rangle$. Luego,

$$= \frac{(-ie)^2}{2!} \left\{ \int dx_1 dx_2 \langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | : \bar{\psi}_a(x_2)\tilde{\gamma}_{ab}^\mu S_{bd}^F \tilde{\gamma}_{de}^\nu \psi_e(x_1)A_\mu(x_2)A_\nu(x_1) : |k'_1, \lambda'_1\rangle |k'_2, \lambda'_2\rangle \quad (4.45)$$

$$+ \int dx_1 dx_2 \langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | : \tilde{\gamma}_{ab}^\mu \psi_b(x_2)\bar{\psi}_d(x_1)\tilde{\gamma}_{de}^\nu S_{ea}^F A_\mu(x_2)A_\nu(x_1) : |k'_1, \lambda'_1\rangle |k'_2, \lambda'_2\rangle \right.$$

$$\left. + x_1 \leftrightarrow x_2 \right\}.$$

El desarrollo en modos de Fourier de los campos es:

$$\psi_a(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{\omega_p}} \sum_s \left(u_a^s(\vec{p}) b_p^s e^{-ip\cdot x} + v_a^s(\vec{p}) d_p^{s\dagger} e^{ip\cdot x} \right) \quad (4.46)$$

$$A_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_\lambda \left(\epsilon_\mu(k, \lambda) a_k^\lambda e^{-ip\cdot x} + \epsilon_\mu^*(k, \lambda) a_k^{\lambda\dagger} e^{ip\cdot x} \right) \quad (4.47)$$

tomando en cuenta el orden normal y aquellos términos que contribuyen para el proceso

$$\begin{aligned}
& \int dx_1 dx_2 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_{p_1} \omega_{p_2}} \sum_{s_1, s_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_{k_1} \omega_{k_2}}} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \quad (4.48) \\
& \langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | b_{\vec{p}_2}^{s'_2 \dagger} d_{\vec{p}_1}^{s'_1 \dagger} a_{\vec{k}_2}^{\lambda_2} a_{\vec{k}_1}^{\lambda_1} | k'_1, \lambda'_1 \rangle | k'_2, \lambda'_2 \rangle e^{ip_1 \cdot x_1} e^{ip_2 \cdot x_2} e^{-ik_1 \cdot x_1} e^{-ik_2 \cdot x_2} \\
& \times \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \tilde{\gamma}_{ab}^\mu S_{bd}^F(x_2 - x_1) \tilde{\gamma}_{de}^\nu v_e^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1)
\end{aligned}$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
\langle p'_1, s'_1 | \langle p'_2, s'_2 | b_{\vec{p}_2}^{s'_2 \dagger} d_{\vec{p}_1}^{s'_1 \dagger} a_{\vec{k}_2}^{\lambda_2} a_{\vec{k}_1}^{\lambda_1} | k'_1, \lambda'_1 \rangle | k'_2, \lambda'_2 \rangle &= \sqrt{4E_{p'_1} E_{p'_2}} \sqrt{4\omega_{k'_1} \omega_{k'_2}} \quad (4.49) \\
&\times \langle 0 | \langle 0 | b_{\vec{p}'_2}^{s'_2} d_{\vec{p}'_1}^{s'_1} b_{\vec{p}'_2}^{s'_2 \dagger} d_{\vec{p}'_1}^{s'_1 \dagger} a_{\vec{k}'_2}^{\lambda_2} a_{\vec{k}'_1}^{\lambda_1} a_{\vec{k}'_1}^{s'_1 \dagger} a_{\vec{k}'_2}^{s'_2 \dagger} | 0 \rangle | 0 \rangle
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta las relaciones de anticonmutación para los operadores fermiónicos

$$\{b_{\vec{p}_1}^{s_1}, b_{\vec{p}_2}^{s_2 \dagger}\} = \{d_{\vec{p}_1}^{s_1}, d_{\vec{p}_2}^{s_2 \dagger}\} = (2\pi)^3 \frac{\omega_p}{m} \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta_{s_1 s_2} \quad (4.50)$$

y la relaciones de conmutación para los operadores bosónicos

$$[a_{\vec{k}_1}^{\lambda_1}, a_{\vec{k}_2}^{\lambda_2 \dagger}] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \quad (4.51)$$

vemos que

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \langle 0 | b_{\vec{p}'_1}^{s'_1} d_{\vec{p}'_2}^{s'_2} b_{\vec{p}'_1}^{s'_1 \dagger} d_{\vec{p}'_2}^{s'_2 \dagger} a_{\vec{k}'_1}^{\lambda_1} a_{\vec{k}'_2}^{\lambda_2} a_{\vec{k}'_1}^{\lambda_1 \dagger} a_{\vec{k}'_2}^{\lambda_2 \dagger} | 0 \rangle | 0 \rangle &= (2\pi)^6 \delta(\vec{p}'_1 - \vec{p}'_1) \delta_{s_1 s'_1} \delta(\vec{p}'_2 - \vec{p}'_2) \delta_{s_2 s'_2} \quad (4.52) \\
&\times (2\pi)^6 \delta(\vec{k}'_1 - \vec{k}'_1) \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta(\vec{k}'_2 - \vec{k}'_2) \delta_{\lambda_2 \lambda'_2}
\end{aligned}$$

Integrando las deltas y considerando las deltas sobre la polarización y el espín, el primer término se reduce a

$$\int dx_1 dx_2 e^{i(p_1 - k_1) \cdot x_1} e^{i(p_2 - k_2) \cdot x_2} \sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \tilde{\gamma}_{ab}^\mu S_{bd}^F(x_2 - x_1) \tilde{\gamma}_{de}^\nu v_e^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) \quad (4.53)$$

Escribiendo explícitamente al propagador

$$S_{bd}^F(x_2 - x_1) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)} \frac{\vec{k}_{bd} + m}{\vec{k}^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (4.54)$$

sustituyendo en la expresión para el primer término obtenemos

$$i \int dx_1 dx_2 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i(k-(k_1-p_1)) \cdot x_1} e^{i(p_2-k_2-k) \cdot x_2} \times \quad (4.55)$$

$$\sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_{ab}^\mu \frac{\vec{k}_{bd} + m}{\vec{k}^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_{de}^\nu v_e^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1)$$

Luego,

$$i \int dx_2 d^4 k \delta(k - (k_1 - p_1)) e^{i(p_2-k_2-k) \cdot x_2} \times \quad (4.56)$$

$$\sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \tilde{\gamma}_{ab}^\mu \frac{\vec{k}_{bd} + m}{\vec{k}^2 - m^2 + i\epsilon} \tilde{\gamma}_{de}^\nu v_e^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1)$$

Integrando la delta,

$$i \int dx_2 e^{i(p_2-k_2-k_1+p_1) \cdot x_2} \sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \tilde{\gamma}_{ab}^\mu \frac{(\vec{k}_1 - \vec{p}_1)_{bd} + m}{(\vec{k}_1 - \vec{p}_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \tilde{\gamma}_{de}^\nu v_e^{s_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) \quad (4.57)$$

volviendo a integrar obtenemos

$$\sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \quad (4.58)$$

$$\times \bar{u}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\mu(k_2, \lambda_2) \tilde{\gamma}_{ab}^\mu \frac{(\vec{k}_1 - \vec{p}_1)_{bd} + m}{(\vec{k}_1 - \vec{p}_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \tilde{\gamma}_{de}^\nu \epsilon_\nu(k_1, \lambda_1) v_b^{s_1}(\vec{p}_1)$$

Para el segundo término de la ec. 4,38, tomando como referencia el caso usual y considerando las modificaciones ya mencionadas, encontramos que

$$\sum_{s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2} i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \quad (4.59)$$

$$\bar{u}_d^{s_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\mu(k_1, \lambda_1) \tilde{\gamma}_{de}^\mu \frac{(\vec{k}_1 - \vec{p}_1)_{ea} + m}{(\vec{k}_1 - \vec{p}_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \tilde{\gamma}_{ab}^\nu \epsilon_\nu(k_2, \lambda_2) v_b^{s_1}(\vec{p}_1)$$

Los términos $x_1 \leftrightarrow x_2$ son completamente análogos y cancelan el factor de 2! en el denominador de la ecuación (4.44). De esta manera, sumando los términos, ecuaciones (4.57) y (4.58), obtenemos la amplitud de probabilidad para el proceso de Breit-Wheeler en el caso no invariante de Lorentz:

$$i\mathcal{A} = e^4 \sum_{(\lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2)} \bar{u}^{s_2}(\vec{p}_2) \tilde{\gamma}^\mu \varepsilon_\mu(\tilde{k}_2, \lambda_2) \frac{\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m}{(\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1)^2 - m^2} \varepsilon_\nu(\tilde{k}_1, \lambda_1) \tilde{\gamma}^\nu v^{s_1}(\vec{p}_1) + \quad (4.60)$$

$$\bar{u}^{s_2}(\vec{p}_2) \tilde{\gamma}^\mu \varepsilon_\mu(\tilde{k}_1, \lambda_1) \frac{\tilde{k}_2 - \tilde{p}_1 + m}{(\tilde{k}_2 - \tilde{p}_1)^2 - m^2} \varepsilon_\nu(\tilde{k}_2, \lambda_2) \tilde{\gamma}^\nu v^{s_1}(\vec{p}_1).$$

En esta expresión \tilde{p}_1 corresponde al momento del positrón, y \tilde{p}_2 al momento del electrón; $\varepsilon_\nu(k_1, \lambda_1)$ corresponde al vector de polarización del fotón incidente con momento \tilde{k}_1 , y $\varepsilon_\mu(k_2, \lambda_2)$ al vector de polarización del fotón incidente con momento \tilde{k}_2 . La suma es sobre las posibles polarizaciones de los fotones y sobre los espines de los fermiones.

Al tomar el cuadrado de \mathcal{A} , y promediando sobre las polarizaciones de los fotones incidentes, obtenemos:

$$|\mathcal{A}|^2 = e^4 \sum_{(s_1, s_2)} \bar{u}^{s_2}(\vec{p}_2) \tilde{\gamma}^\mu \frac{\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m}{(\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1)^2 - m^2} \tilde{\gamma}^\nu v^{s_1}(\vec{p}_1) \bar{v}^{s_1}(\vec{p}_1) \tilde{\gamma}_\nu \frac{\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m}{(\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1)^2 - m^2} \tilde{\gamma}_\mu u^{s_2}(\vec{p}_2) \quad (4.61)$$

$$+ \bar{u}^{s_2}(\vec{p}_2) \tilde{\gamma}^\mu \frac{\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m}{(\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1)^2 - m^2} \tilde{\gamma}^\nu v^{s_1}(\vec{p}_1) \bar{v}^{s_1}(\vec{p}_1) \tilde{\gamma}_\mu \frac{\tilde{k}_2 - \tilde{p}_1 + m}{(\tilde{k}_2 - \tilde{p}_1)^2 - m^2} \tilde{\gamma}_\nu u^{s_2}(\vec{p}_2)$$

$$+ [\tilde{k}_1 \leftrightarrow \tilde{k}_2].$$

Recordemos que el término $[\tilde{k}_1 \leftrightarrow \tilde{k}_2]$ es una forma abreviada de escribir nuevamente los dos términos anteriores sustituyendo \tilde{k}_1 por \tilde{k}_2 y viceversa.

Ahora sumamos sobre el espín de los fermiones. Para esto tomaremos en cuenta que los espinores de la teoría no invariante de Lorentz deben ser proporcionales a los espinores de la teoría invariante de Lorentz¹²,

$$u^s(p) = C(\vec{p}) u_{LI}^s(\tilde{p}). \quad (4.62)$$

$$v^s(p) = C(\vec{p}) v_{LI}^s(\tilde{p}). \quad (4.63)$$

La constante de normalización $C(\vec{p})$ resulta ser la misma para los espinores $u^s(p)$ que para los $v^s(p)$, como son independientes del espín la suma sobre las posibles polarizaciones del electrón y el positrón respectivamente se sigue directamente del caso invariante de Lorentz.

$$\sum_r u^r(\vec{p})\bar{u}^r(\vec{p}) = |C(\vec{p})|^2(\vec{p} + m_0), \quad (4.64)$$

$$\sum_s v^s(\vec{p})\bar{v}^s(\vec{p}) = |C(\vec{p})|^2(\vec{p} - m_0). \quad (4.65)$$

Para identificar los términos a la hora de calcular las trazas hemos introducido un subíndice a la masa, m_0 , de los términos que provienen de hacer la suma sobre el espín de los fermiones. Este artificio nos ayudará a ordenar los diferentes términos y facilitará el cálculo. Al final basta tomar $m_0 = m$ para obtener el resultado correcto. Así

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|^2 = & e^4 |C(\vec{p}_1)|^2 |C(\vec{p}_2)|^2 \left\{ Tr[\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{p}_2 + m_0)\tilde{\gamma}_\mu \frac{\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m}{(\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1)^2 - m^2} \tilde{\gamma}^\nu(\tilde{p}_1 - m_0)\tilde{\gamma}_\nu \frac{\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m}{(\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1)^2 - m^2}] \right. \\ & + Tr[\tilde{\gamma}_\nu(\tilde{p}_2 + m_0)\tilde{\gamma}^\mu \frac{\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m}{(\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1)^2 - m^2} \tilde{\gamma}^\nu(\tilde{p}_1 - m_0)\tilde{\gamma}_\mu \frac{\tilde{k}_2 - \tilde{p}_1 + m}{(\tilde{k}_2 - \tilde{p}_1)^2 - m^2}] \\ & \left. + [\tilde{k}_1 \leftrightarrow \tilde{k}_2] \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Finalmente, la amplitud al cuadrado es:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 = & (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) e^4 |C(\vec{p}_1)|^2 |C(\vec{p}_2)|^2 \times \\ & \left\{ \frac{Tr[\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{p}_2 + m_0)\tilde{\gamma}_\mu(\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m)\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{p}_1 - m_0)\tilde{\gamma}_\nu(\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m)]}{(\tilde{k}_1^2 - 2\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1)^2} \right. \\ & + \frac{Tr[\tilde{\gamma}_\nu(\tilde{p}_2 + m_0)\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m)\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{p}_1 - m_0)\tilde{\gamma}_\mu(\tilde{k}_2 - \tilde{p}_1 + m)]}{(\tilde{k}_1^2 - 2\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1)(\tilde{k}_2^2 - 2\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_2)} \\ & \left. + [\tilde{k}_1 \leftrightarrow \tilde{k}_2] \right\}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Ahora procedemos a calcular cada una de las trazas por separado. Al desarrollar el primer término tenemos que calcular:

$$Tr[\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{\not{p}}_2 + m_0)\tilde{\gamma}_\nu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{\not{p}}_1 - m_0)\gamma_\mu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)] = \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} & Tr[(\gamma_\nu + c_\nu^\rho \gamma_\rho)(\tilde{\not{p}}_2 + m_0)(\gamma^\nu + c^{\alpha\nu} \gamma_\alpha)(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m) \\ & (\gamma^\mu + c^{\mu\beta} \gamma_\beta)(\tilde{\not{p}}_1 - m_0)(\gamma_\mu + c_\mu^\sigma \gamma_\sigma)(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)] \\ & = \left[\text{Términos de orden cero} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + p_{2\tau} c^{\tau\eta} \left\{ Tr[\gamma_\nu \gamma_\eta \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] + m^2 Tr[\gamma_\nu \gamma_\eta \gamma^\nu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu] \right. \\ & \left. - mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma_\eta \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \gamma_\mu] - mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma_\eta \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + p_{1\tau} c^{\tau\eta} \left\{ Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \gamma_\eta \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] + m^2 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\eta \gamma_\mu] \right. \\ & \left. + mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \gamma_\eta \gamma_\mu] + mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\eta \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + c^{mn} (k_1 - p_1)_n \left\{ Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma_m \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] + Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_m] \right. \\ & - mm_0 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma_m \gamma^\mu \gamma_\mu] - mm_0 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_m] + mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu \gamma_m \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu] \\ & \left. + mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_m] - m_0^2 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu \gamma_m \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] - m_0^2 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_m] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + c_\nu^\rho \left\{ Tr[\gamma_\rho \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] + m^2 Tr[\gamma_\rho \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu] \right. \\ & - m_0^2 Tr[\gamma_\rho \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] - m_0^2 m^2 Tr[\gamma_\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu] \\ & - mm_0 Tr[[\gamma_\rho \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \gamma_\mu] - mm_0 Tr[\gamma_\rho \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \\ & \left. + mm_0 Tr[\gamma_\rho \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu] + mm_0 Tr[\gamma_\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c^{\alpha\nu} \left\{ Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\alpha (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] + m^2 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\alpha \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu] \right. \\
& - m_0^2 Tr[\gamma_\nu \gamma_\alpha (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] - m^2 m_0^2 Tr[\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\mu] \\
& - mm_0 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\alpha (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \gamma_\mu] - mm_0 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \\
& \left. + mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma_\alpha (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu] + mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \right\} \\
& + c^{\mu\beta} \left\{ Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] + m^2 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma_\mu] \right. \\
& - m_0^2 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma_\beta \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] - m^2 m_0^2 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu \gamma_\beta \gamma_\mu] \\
& - mm_0 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma_\beta \gamma_\mu] - mm_0 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \\
& \left. + mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma_\mu] + mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \right\} \\
& + c_\mu^\sigma \left\{ Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\sigma (\not{k}_1 - \not{p}_1)] + m^2 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\sigma] \right. \\
& - m_0^2 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \gamma_\sigma (\not{k}_1 - \not{p}_1)] - m^2 m_0^2 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\sigma] \\
& - mm_0 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \gamma_\sigma] - mm_0 Tr[\gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma_\sigma (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \\
& \left. + mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\sigma] + mm_0 Tr[\gamma_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\sigma (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \right\}
\end{aligned}$$

Dado que el cálculo es muy laborioso y en esencia es completamente análogo al caso invariante de Lorentz, salvo que ahora tenemos que calcular más términos, omitiremos el cálculo explícito de cada traza. Sin embargo, en dicho cálculo hay una traza que contiene 6 matrices de Dirac y que a continuación mostramos como se calcula.

$$\begin{aligned}
& c_\nu^\rho Tr[\gamma_\rho \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \tag{4.69} \\
& = -2c_{\rho\nu} Tr[\gamma^\rho \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \not{p}_1 (\not{k}_1 - \not{p}_1)] \\
& = -2c_{\rho\nu} p_{2\mu} p_{1\beta} (k_1 - p_1)_\alpha (k_1 - p_1)_\sigma Tr[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma]
\end{aligned}$$

La idea es reducir la traza con 6 matrices a una traza con 4 matrices. Para ello hacemos uso de la relación de anticonmutación $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Desplazamos la matriz γ^ρ hacia la izquierda consecutivamente hasta la última posición y luego hacemos uso de que la traza es cíclica. Hecho esto, obtenemos:

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma] &= \eta^{\rho\mu} Tr[\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma] - \eta^{\rho\nu} Tr[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\sigma] \\
&+ \eta^{\rho\alpha} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\sigma] - \eta^{\rho\beta} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\sigma] + \eta^{\rho\sigma} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta]
\end{aligned} \quad (4.70)$$

Así

$$\begin{aligned}
c_\nu^\rho Tr[\gamma_\rho \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] &= \\
&- 8c^{\rho\nu} [2(k_1 - p_1)_\rho p_{2\nu} p_1 \cdot (p_1 - k_1) - p_{2\rho} p_{1\nu} (k_1 - p_1)^2 + 2p_{2\rho} (k_1 - p_1)_\nu p_1 \cdot (k_1 - p_1) \\
&- \eta_{\rho\nu} (2p_2 \cdot (k_1 - p_1) p_1 \cdot (k_1 - p_1) - p_1 \cdot p_2 (k_1 - p_1)^2) - p_{2\rho} p_{1\nu} (k_1 - p_1)^2].
\end{aligned} \quad (4.71)$$

En este trabajo vamos a considerar que la matriz $[c^{\mu\nu}]$ tiene traza cero, por lo que

$$\begin{aligned}
c_\nu^\rho Tr[\gamma_\rho \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{k}_1 - \not{p}_1) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu (\not{k}_1 - \not{p}_1)] &= \\
&- 8c^{\rho\nu} [2(k_1 - p_1)_\rho p_{2\nu} p_1 \cdot (p_1 - k_1) - p_{2\rho} p_{1\nu} (k_1 - p_1)^2 \\
&+ 2p_{2\rho} (k_1 - p_1)_\nu p_1 \cdot (k_1 - p_1) - p_{2\rho} p_{1\nu} (k_1 - p_1)^2]
\end{aligned} \quad (4.72)$$

El resto del cálculo sólo involucra trazas con 4 matrices, las cuales ya sabemos calcular.

$$\begin{aligned}
Tr[\tilde{\gamma}^\nu (\tilde{p}_2 + m_0) \tilde{\gamma}_\nu (\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m) \tilde{\gamma}^\mu (\tilde{p}_1 - m_0) \gamma_\mu (\tilde{k}_1 - \tilde{p}_1 + m)] &= \\
32p_1 \cdot (k_1 - p_1) p_2 \cdot (k_1 - p_1) - 16p_1 \cdot p_2 (k_1 - p_1)^2 + m^2 \{16p_1 \cdot p_2 \\
- 64(k_1 - p_1)^2 - 64p_1 \cdot (k_1 - p_1) + 64p_2 \cdot (k_1 - p_1)\} - 64m^4 \\
+ c^{\mu\nu} \left\{ 16p_{1\mu} [2(p_1 - k_1)_\nu p_2 \cdot (p_1 - k_1) - p_{2\nu} (p_1 - k_1)^2] + 16p_{2\mu} [2(p_1 - k_1)_\nu p_1 \cdot (p_1 - k_1) \right. \\
- p_{1\nu} (p_1 - k_1)^2] + 32m^2 p_{1\mu} p_{2\nu} + 64m^2 p_{2\mu} (p_1 - k_1)_\nu - 64m^2 p_{1\mu} (p_1 - k_1)_\nu \\
+ 32p_{1\mu} (p_1 - k_1)_\nu p_2 \cdot (p_1 - k_1) + 32p_{2\mu} (p_1 - k_1)_\nu p_1 \cdot (p_1 - k_1) \\
- 32p_1 \cdot p_2 (p_1 - k_1)_\mu (p_1 - k_1)_\nu + 64m^2 p_{2\mu} (p_1 - k_1)_\nu - 64m^2 p_{1\mu} (p_1 - k_1)_\nu \\
- 128m^2 (p_1 - k_1)_\mu (p_1 - k_1)_\nu \\
+ 64p_{1\mu} p_{2\nu} (p_1 - k_1)^2 - 64p_{1\mu} (p_1 - k_1)_\nu p_2 \cdot (p_1 - k_1) - 64p_{2\mu} (p_1 - k_1)_\nu p_1 \cdot (p_1 - k_1) \\
\left. - 64m^2 p_{1\mu} p_{2\nu} - 128m^2 p_{2\mu} (p_1 - k_1)_\nu + 128m^2 p_{1\mu} (p_1 - k_1)_\nu \right\}
\end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned}
&= 32p_1 \cdot (k_1 - p_1)p_2 \cdot (k_1 - p_1) - 16p_1 \cdot p_2(k_1 - p_1)^2 + m^2\{16p_1 \cdot p_2 \quad (4.74) \\
&- 64(k_1 - p_1)^2 - 64p_1 \cdot (k_1 - p_1) + 64p_2 \cdot (k_1 - p_1)\} - 64m^4 \\
&+ c^{\mu\nu} \left\{ 32p_{1\mu}p_{2\nu}(p_1 - k_1)^2 - 32m^2p_{1\mu}p_{2\nu} - 128m^2(p_1 - k_1)_\mu(p_1 - k_1)_\nu \right. \\
&\left. - 32p_1 \cdot p_2(p_1 - k_1)_\mu(p_1 - k_1)_\nu - 32p_1 \cdot p_2(p_1 - k_1)_\mu(p_1 - k_1)_\nu \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 32p_1 \cdot (k_1 - p_1)p_2 \cdot (k_1 - p_1) - 16p_1 \cdot p_2(k_1 - p_1)^2 + m^2\{16p_1 \cdot p_2 \quad (4.75) \\
&- 64(k_1 - p_1)^2 - 64p_1 \cdot (k_1 - p_1) + 64p_2 \cdot (k_1 - p_1)\} - 64m^4 \\
&+ 32C_{p_2}^{p_1}[(p_1 - k_1)^2 - m^2] + 32[p_1 \cdot p_2 + 4m^2][2C_{k_1}^{p_1} - C_{p_1}^{p_1} - C_{k_1}^{k_1}].
\end{aligned}$$

Donde hemos introducido la notación $C_p^p = c^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$, $C_p^k = c^{\mu\nu}p_\mu k_\nu$, $C_k^k = c^{\mu\nu}k_\mu k_\nu$.

Al eliminar la variable p_2 usando la conservación del momento, tendremos correcciones a primer orden en $c^{\mu\nu}$ provenientes del orden cero debido a que la relación de dispersión es $\tilde{p}^2 = m^2$, o sin la tilde $p^2 + 2C_p^p - m^2 = 0$. Haciendo un poco de algebra obtenemos que estas correcciones son:

$$\begin{aligned}
&32p_1 \cdot (k_1 - p_1)p_2 \cdot (k_1 - p_1) - 16p_1 \cdot p_2(k_1 - p_1)^2 + m^2\{16p_1 \cdot p_2 \quad (4.76) \\
&- 64(k_1 - p_1)^2 - 64p_1 \cdot (k_1 - p_1) + 64p_2 \cdot (k_1 - p_1)\} - 64m^4 = 32(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) \\
&+ 32m^2(p_1 \cdot k_1) - 32m^4 - 32m^2C_{p_2}^{p_2} - 32(p_1 \cdot k_1)C_{p_2}^{p_2} + 32(p_1 \cdot k_2)C_{p_1}^{p_1}.
\end{aligned}$$

Ahora, las correcciones también involucran a p_2 por lo que tenemos que considerar que

$$C_{p_2}^{p_2} = C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + C_{p_1}^{p_1} + 2C_{k_2}^{k_1} - 2C_{k_1}^{p_1} - 2C_{k_2}^{p_1} \quad (4.77)$$

$$C_{p_2}^{p_1} = C_{k_1}^{p_1} + C_{k_2}^{p_1} - C_{p_1}^{p_1} \quad (4.78)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&32p_1 \cdot (k_1 - p_1)p_2 \cdot (k_1 - p_1) - 16p_1 \cdot p_2(k_1 - p_1)^2 + m^2\{16p_1 \cdot p_2 \quad (4.79) \\
&- 64(k_1 - p_1)^2 - 64p_1 \cdot (k_1 - p_1) + 64p_2 \cdot (k_1 - p_1)\} - 64m^4 = 32(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) \\
&+ 32m^2(p_1 \cdot k_1) - 32m^4 - 32[C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + C_{p_1}^{p_1} + 2C_{k_2}^{k_1} - 2C_{k_1}^{p_1} - 2C_{k_2}^{p_1}][m^2 + (p_1 \cdot k_1)] \\
&+ 32(p_1 \cdot k_2)C_{p_1}^{p_1}.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
Tr[\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{\not{p}}_2 + m_0)\tilde{\gamma}_\nu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{\not{p}}_1 - m_0)\gamma_\mu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)] = & \quad (4.80) \\
32(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) + 32m^2(p_1 \cdot k_1) - 32m^4 - 64p_1 \cdot k_1(C_{p_1}^{k_1} + C_{p_1}^{k_2} - C_{p_1}^{p_1}) \\
+ -32(C_{p_1}^{p_1} + C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + 2C_{k_2}^{k_1} - 2C_{p_1}^{k_2} - 2C_{p_1}^{k_1})(m^2 + p_1 \cdot k_1) + 32p_1 \cdot k_2 C_{p_1}^{p_1} \\
+ 32(k_1 \cdot k_2 + 3m^2)(2C_{p_1}^{k_1} - C_{p_1}^{p_1} - C_{k_1}^{k_1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{\not{p}}_2 + m_0)\tilde{\gamma}_\nu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{\not{p}}_1 - m_0)\gamma_\mu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)] = & \quad (4.81) \\
32(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) + 32m^2(p_1 \cdot k_1) - 32m^4 + 32(p_1 \cdot k_2)C_{p_1}^{p_1} + 32k_1 \cdot k_2[2C_{k_1}^{p_1} - C_{p_1}^{p_1} - C_{k_1}^{k_1}] \\
- 32m^2[4C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + 2C_{k_2}^{k_1} - 8C_{k_1}^{p_1} - 2C_{k_2}^{p_1} + 4C_{p_1}^{p_1}] - 32p_1 \cdot k_1[C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + 2C_{k_2}^{k_1} - C_{p_1}^{p_1}].
\end{aligned}$$

Al considerar el término $[k_1 \leftrightarrow k_2]$ sólo tenemos que cambiar k_1 por k_2 en el resultado anterior, así:

$$\begin{aligned}
Tr[\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{\not{p}}_2 + m_0)\tilde{\gamma}_\nu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{\not{p}}_1 - m_0)\gamma_\mu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)] = & \quad (4.82) \\
32(p_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_1) + 32m^2(p_1 \cdot k_2) - 32m^4 + 32(p_1 \cdot k_1)C_{p_1}^{p_1} + 32k_1 \cdot k_2[2C_{k_2}^{p_1} - C_{p_1}^{p_1} - C_{k_2}^{k_2}] \\
- 32m^2[4C_{k_2}^{k_2} + C_{k_1}^{k_1} + 2C_{k_2}^{k_1} - 8C_{k_2}^{p_1} - 2C_{k_1}^{p_1} + 4C_{p_1}^{p_1}] - 32p_1 \cdot k_2[C_{k_2}^{k_2} + C_{k_1}^{k_1} + 2C_{k_2}^{k_1} - C_{p_1}^{p_1}].
\end{aligned}$$

Ahora calculamos el segundo término que aparece en la amplitud al cuadrado:

$$\begin{aligned}
Tr[(\tilde{\not{p}}_2 + m_0)\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{\not{p}}_1 - m_0)\tilde{\gamma}_\mu(\tilde{\not{k}}_2 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}_\nu] = & \quad (4.83) \\
Tr[(\tilde{\not{p}}_2 + m_0)(\gamma^\mu + c^{\mu\alpha}\gamma_\alpha)(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)(\gamma^\nu + c^{\nu\beta}\gamma_\beta)(\tilde{\not{p}}_1 - m_0) \\
(\gamma_\mu + c_\mu^\rho\gamma_\rho)(\tilde{\not{k}}_2 - \tilde{\not{p}}_1 + m)(\gamma_\nu + c_\nu^\sigma\gamma_\sigma)] \\
= Tr[\not{p}_2\gamma^\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1)\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1)\gamma_\nu] + m^2Tr[\not{p}_2\gamma^\mu\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\mu\gamma_\nu] \\
- m_0^2Tr[\gamma^\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1)\gamma^\nu\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1)\gamma_\nu] - m^2m_0^2Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu] \\
- m_0mTr[\not{p}_2\gamma^\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1)\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu] + m_0mTr[\gamma^\mu\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1)\gamma_\nu] \\
- m_0mTr[\not{p}_2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1)\gamma_\nu] + m_0mTr[\gamma^\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1)\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\mu\gamma_\nu] \\
+ p_{2\tau}c^{\tau\eta}\left\{Tr[\gamma_\eta\gamma^\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1)\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1)\gamma_\nu] + m^2Tr[\gamma_\eta\gamma^\mu\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\mu\gamma_\nu] \right. \\
- m_0mTr[\gamma_\eta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1)\gamma_\nu]\left. \right\} + p_{1\tau}c^{\tau\eta}\left\{Tr[\not{p}_2\gamma^\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1)\gamma^\nu\gamma_\eta\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1)\gamma_\nu] \right. \\
\left. + m^2Tr[\not{p}_2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\eta\gamma_\mu\gamma_\nu] + m_0mTr[\gamma^\mu(\not{k}_1 - \not{p}_1)\gamma^\nu\gamma_\eta\gamma_\mu\gamma_\nu] - m_0mTr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\eta\gamma_\mu(\not{k}_2 - \not{p}_1)\gamma_\nu]\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c^{mn}(k_1 - p_1)_n \left\{ Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu \gamma_m \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] - m_0^2 Tr[\gamma^\mu \gamma_m \gamma^\nu \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] \right. \\
& - m_0 m Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu \gamma_m \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu] + m_0 m Tr[\gamma^\mu \gamma_m \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu] \left. \right\} \\
& + c^{rs}(k_2 - p_1)_s \left\{ Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_r \gamma_\nu] - m_0^2 Tr[\gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_r \gamma_\nu] \right. \\
& - m_0 m Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_r \gamma_\nu] + m_0 m Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_r \gamma_\nu] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c^{\mu\alpha} \left\{ Tr[\not{p}_2 \gamma_\alpha (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] + m^2 Tr[\not{p}_2 \gamma_\alpha \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu] \right. \\
& - m_0^2 Tr[\gamma_\alpha (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] - m^2 m_0^2 Tr[\gamma_\alpha \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu] \\
& - m_0 m Tr[\not{p}_2 \gamma_\alpha (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu] + m_0 m Tr[\gamma_\alpha \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] \\
& \left. - m_0 m Tr[\not{p}_2 \gamma_\alpha \gamma^\nu \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] + m_0 m Tr[\gamma_\alpha (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c^{\nu\beta} \left\{ Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] + m^2 Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu] \right. \\
& - m_0^2 Tr[\gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma_\beta \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] - m^2 m_0^2 Tr[\gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu] \\
& - m_0 m Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu] + m_0 m Tr[\gamma^\mu \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] \\
& \left. - m_0 m Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] + m_0 m Tr[\gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_\mu^\rho \left\{ Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\rho (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] + m^2 Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\rho \gamma_\nu] \right. \\
& - m_0^2 Tr[\gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\rho (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] - m^2 m_0^2 Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\rho \gamma_\nu] \\
& - m_0 m Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\rho \gamma_\nu] + m_0 m Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\rho (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] \\
& \left. - m_0 m Tr[\not{p}_2 \gamma_\alpha \gamma^\nu \gamma_\rho (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu] + m_0 m Tr[\gamma_\alpha (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\rho \gamma_\nu] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c^{\sigma\nu} \left\{ Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\sigma] + m^2 Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\sigma] \right. \\
& - m_0^2 Tr[\gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\sigma] - m^2 m_0^2 Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\sigma] \\
& - m_0 m Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\sigma] + m_0 m Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\sigma] \\
& \left. - m_0 m Tr[\not{p}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu (k_2 - \not{p}_1) \gamma_\sigma] + m_0 m Tr[\gamma^\mu (k_1 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\sigma] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -32p_2 \cdot p_1(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) + m^2\{-16(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) \quad (4.84) \\
&+ 16p_1 \cdot p_2 + 16p_2 \cdot (k_1 - p_1) + 16p_2 \cdot (k_2 - p_1) - 16p_1 \cdot (k_1 - p_1)\} + 32m^4 \\
&+ c^{\mu\nu} \left\{ -32p_{2\mu}(k_1 - p_1)_\nu p_1 \cdot (k_2 - p_1) - 32p_{1\mu}(k_2 - p_1)_\nu p_2 \cdot (k_1 - p_1) + 32m^2 p_{1\mu} p_{2\nu} \right. \\
&- 16m^2 p_{2\mu} [(k_1 - p_1)_\nu + (k_2 - p_1)_\nu] + 16m^2 p_{1\mu} [(k_1 - p_1)_\nu + (k_2 - p_1)_\nu] \\
&- 32p_{1\mu}(k_1 - p_1)_\nu p_2 \cdot (k_2 - p_1) - 32p_{2\mu}(k_2 - p_1)_\nu p_1 \cdot (k_1 - p_1) - 32m^2 (k_1 - p_1)_\mu (k_2 - p_1)_\nu \\
&- 16m^2 p_{2\mu} [(k_1 - p_1)_\nu + (k_2 - p_1)_\nu] + 16m^2 p_{1\mu} [(k_1 - p_1)_\nu + (k_2 - p_1)_\nu] \\
&+ 64m^2 p_{1\mu} p_{2\nu} - 64m^2 (k_1 - p_1)_\mu (k_2 - p_1)_\nu - 32m^2 p_{2\mu} (k_2 - p_1)_\nu + 32m^2 p_{1\mu} (k_1 - p_1)_\nu \\
&- 32m^2 p_{2\mu} (k_1 - p_1)_\nu + 32m^2 p_{1\mu} (k_2 - p_1)_\nu + 32m^2 p_{2\mu} (k_2 - p_1)_\nu + 32m^2 p_{2\mu} (k_1 - p_1)_\nu \\
&- 32m^2 p_{1\mu} (k_2 - p_1)_\nu - 32m^2 p_{1\mu} (k_1 - p_1)_\nu \\
&- 16p_{2\mu} [(k_2 - p_1)_\mu p_1 \cdot (k_1 - p_1) + p_{1\mu} (k_1 - p_1) \cdot (k_2 - p_1) - (k_1 - p_1)_\mu p_1 \cdot (k_2 - p_1)] \\
&- 32p_1 \cdot p_2 (k_1 - p_1)_\mu (k_2 - p_1)_\nu + 32p_2 \cdot (k_1 - p_1) p_{1\mu} (k_2 - p_1)_\nu \\
&+ 16p_{2\mu} [(k_1 - p_1)_\mu p_1 \cdot (k_2 - p_1) - p_{1\mu} (k_1 - p_1) \cdot (k_2 - p_1) + (k_2 - p_1)_\mu p_1 \cdot (k_1 - p_1)] \\
&+ 32p_2 \cdot (k_1 - p_1) p_{1\mu} (k_2 - p_1)_\nu - 32p_1 \cdot p_2 (k_1 - p_1)_\mu (k_2 - p_1)_\nu \\
&+ 16p_{2\mu} [(k_2 - p_1)_\mu p_1 \cdot (k_1 - p_1) - p_{1\mu} (k_1 - p_1) \cdot (k_2 - p_1) + (k_1 - p_1)_\mu p_1 \cdot (k_2 - p_1)] \\
&+ 32p_2 \cdot (k_1 - p_1) p_{1\mu} (k_2 - p_1)_\nu - 32p_1 \cdot p_2 (k_1 - p_1)_\mu (k_2 - p_1)_\nu \\
&- 16p_{2\mu} [(k_1 - p_1)_\mu p_1 \cdot (k_2 - p_1) + p_{1\mu} (k_1 - p_1) \cdot (k_2 - p_1) - (k_2 - p_1)_\mu p_1 \cdot (k_1 - p_1)] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -32p_2 \cdot p_1(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) + m^2\{-16(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) \quad (4.85) \\
&+ 16p_1 \cdot p_2 + 16p_2 \cdot (k_1 - p_1) + 16p_2 \cdot (k_2 - p_1) - 16p_1 \cdot (k_1 - p_1)\} + 32m^4 \\
&+ c^{\mu\nu} \left\{ -32p_{2\mu}(k_1 - p_1)_\nu p_1 \cdot (k_2 - p_1) - 32p_{1\mu}(k_2 - p_1)_\nu p_2 \cdot (k_1 - p_1) + 32m^2 p_{1\mu} p_{2\nu} \right. \\
&- 32p_{1\mu}(k_1 - p_1)_\nu p_2 \cdot (k_2 - p_1) - 32p_{2\mu}(k_2 - p_1)_\nu p_1 \cdot (k_1 - p_1) - 32m^2 (k_1 - p_1)_\mu (k_2 - p_1)_\nu \\
&+ 64m^2 p_{1\mu} p_{2\nu} - 64m^2 (k_1 - p_1)_\mu (k_2 - p_1)_\nu - 32m^2 p_{2\mu} [(k_1 - p_1)_\nu + (k_2 - p_1)_\nu] \\
&+ 32m^2 p_{1\mu} [(k_1 - p_1)_\nu + (k_2 - p_1)_\nu] - 64p_{1\mu} p_{2\nu} (k_1 - p_1) \cdot (k_2 - p_1) - 64p_1 \cdot p_2 (k_1 - p_1)_\mu (k_2 - p_1)_\nu \\
&+ 32p_{1\mu} (k_2 - p_1)_\nu p_2 \cdot (k_1 - p_1) + 32p_{1\mu} (k_1 - p_1)_\nu p_2 \cdot (k_2 - p_1) + 32p_{2\mu} (k_1 - p_1)_\nu p_1 \cdot (k_2 - p_1) \\
&+ 32p_{2\mu} (k_2 - p_1)_\nu p_1 \cdot (k_1 - p_1) \left. \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -32p_2 \cdot p_1(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) + m^2\{-16(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) \quad (4.86) \\
&+ 16p_1 \cdot p_2 + 16p_2 \cdot (k_1 - p_1) + 16p_2 \cdot (k_2 - p_1) - 16p_1 \cdot (k_1 - p_1)\} + 32m^4 \\
&+ c^{\mu\nu} \left\{ -32m^2[3k_{1\mu}k_{2\nu} - 4p_{1\mu}k_{1\nu} - 4p_{1\mu}k_{2\nu} + 5p_{1\mu}p_{1\nu} + p_{2\mu}k_{1\nu} + p_{2\mu}k_{2\nu} \right. \\
&- 5p_{1\mu}p_{2\nu}] - 64p_{1\mu}p_{2\nu}[k_1 \cdot k_2 - p_1 \cdot k_1 - p_1 \cdot k_2 + m^2] - 64p_1 \cdot p_2[k_{1\mu}k_{2\nu} - p_{1\mu}k_{1\nu} \\
&\left. - p_{1\mu}k_{2\nu} + p_{1\mu}p_{1\nu}] \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -32p_2 \cdot p_1(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) + m^2\{-16(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) \quad (4.87) \\
&+ 16p_2 \cdot (k_1 - p_1) + 16p_2 \cdot (k_2 - p_1) - 16p_1 \cdot (k_1 - p_1)\} + 32m^4 \\
&+ 32m^2[3C_{p_2}^{p_1} - 3C_{k_2}^{k_1} + 4C_{k_1}^{p_1} + 4C_{k_2}^{p_1} - C_{k_1}^{p_2} - C_{k_2}^{p_2} - 5C_{p_1}^{p_1}] \\
&- 64p_1 \cdot p_2[C_{k_2}^{k_1} - C_{k_1}^{p_1} - C_{k_2}^{p_1} + C_{p_1}^{p_1}].
\end{aligned}$$

Eliminamos la variable p_2 usando la conservación del momento para encontrar las correcciones a primer orden en $c^{\mu\nu}$ provenientes del orden cero debido a que la relación de dispersión modificada $p^2 + 2C_p^p - m^2 = 0$. Luego, haciendo un poco de algebra obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&- 32p_2 \cdot p_1(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) + m^2\{-16(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) \quad (4.88) \\
&+ 16p_1 \cdot p_2 + 16p_2 \cdot (k_1 - p_1) + 16p_2 \cdot (k_2 - p_1) - 16p_1 \cdot (k_1 - p_1)\} + 32m^4 = \\
&16m^2(p_1 \cdot k_1) + 16m^2(p_1 \cdot k_2) - 32m^4 + 32[(p_1 \cdot k_1) + 32(p_1 \cdot k_2)][C_{p_1}^{p_1} + C_{p_2}^{p_2}] \\
&+ 48m^2C_{p_1}^{p_1} + 16m^2C_{p_2}^{p_2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- 32p_2 \cdot p_1(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) + m^2\{-16(k_2 - p_1) \cdot (k_1 - p_1) \quad (4.89) \\
&+ 16p_1 \cdot p_2 + 16p_2 \cdot (k_1 - p_1) + 16p_2 \cdot (k_2 - p_1) - 16p_1 \cdot (k_1 - p_1)\} + 32m^4 = \\
&16m^2(p_1 \cdot k_1) + 16m^2(p_1 \cdot k_2) - 32m^4 + 48m^2C_{p_1}^{p_1} + 16m^2[C_{p_1}^{p_1} + C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} \\
&+ 2C_{k_2}^{k_1} - 2C_{k_1}^{p_1} - 2C_{k_2}^{p_1}] + 32[(p_1 \cdot k_1) + (p_1 \cdot k_2)][2C_{p_1}^{p_1} + C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + 2C_{k_2}^{k_1} - 2C_{k_1}^{p_1} - 2C_{k_2}^{p_1}]
\end{aligned}$$

Para los terminos que tienen ya una corrección a primer orden en $c^{\mu\nu}$, al eliminar la variable p_2 obtenemos correcciones a segundo orden las cuales no estamos considerando en este trabajo. Así

$$\begin{aligned}
Tr[(\tilde{\not{p}}_2 + m_0)\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{\not{p}}_1 - m_0)\tilde{\gamma}_\mu(\tilde{\not{k}}_2 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}_\nu] = & \quad (4.90) \\
16m^2(p_1 \cdot k_1) + 16m^2(p_1 \cdot k_2) - 32m^4 + 32(p_1 \cdot k_2)[C_{p_1}^{p_1} + C_{p_2}^{p_2}] \\
+ 32(p_1 \cdot k_1)[C_{p_1}^{p_1} + C_{p_2}^{p_2}] - 64(k_1 \cdot k_2 - m^2)[C_{k_2}^{k_1} - C_{k_1}^{p_1} - C_{k_2}^{p_1} + C_{p_1}^{p_1}] \\
+ 48m^2C_{p_1}^{p_1} + 16m^2C_{p_2}^{p_2} + 32m^2[3C_{p_2}^{p_1} - 3C_{k_2}^{k_1} + 4C_{k_1}^{p_1} + 4C_{k_2}^{p_1} - C_{k_1}^{p_2} - C_{k_2}^{p_2} - 5C_{p_1}^{p_1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[(\tilde{\not{p}}_2 + m_0)\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{\not{p}}_1 - m_0)\tilde{\gamma}_\mu(\tilde{\not{k}}_2 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}_\nu] = & \quad (4.91) \\
16m^2(p_1 \cdot k_1) + 16m^2(p_1 \cdot k_2) - 32m^4 + 32k_1 \cdot k_2(2C_{p_1}^{p_1} + C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + 2C_{k_2}^{k_1} - 2C_{p_1}^{k_2} - 2C_{p_1}^{k_1}) \\
+ 48m^2C_{p_1}^{p_1} + 16m^2(C_{p_1}^{p_1} + C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + 2C_{k_2}^{k_1} - 2C_{p_1}^{k_2} - 2C_{p_1}^{k_1}) \\
+ 32m^2(3C_{p_1}^{k_1} + 3C_{p_1}^{k_2} - 3C_{p_1}^{p_1} - 3C_{k_2}^{k_1} + 4C_{p_1}^{k_1} + 4C_{p_1}^{k_2} - C_{k_1}^{k_1} - C_{k_2}^{k_2} - 2C_{k_2}^{k_1} + C_{p_1}^{k_1} + C_{p_1}^{k_2} - 5C_{p_1}^{p_1}) \\
- 64(k_1 \cdot k_2 - m^2)(C_{k_2}^{k_1} - C_{p_1}^{k_1} - C_{p_1}^{k_2} + C_{p_1}^{p_1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[(\tilde{\not{p}}_2 + m_0)\tilde{\gamma}^\mu(\tilde{\not{k}}_1 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{\not{p}}_1 - m_0)\tilde{\gamma}_\mu(\tilde{\not{k}}_2 - \tilde{\not{p}}_1 + m)\tilde{\gamma}_\nu] = & \quad (4.92) \\
16m^2(p_1 \cdot k_1) + 16m^2(p_1 \cdot k_2) - 32m^4 + 32k_1 \cdot k_2[C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2}] \\
+ 16m^2[-4C_{k_2}^{k_1} + 10C_{k_1}^{p_1} + 10C_{k_2}^{p_1} - 8C_{p_1}^{p_1} - C_{k_1}^{k_1} - C_{k_2}^{k_2}]
\end{aligned}$$

Notamos que el resultado es simétrico ante el intercambio de k_1 por k_2 y viceversa, por lo que el cálculo de el término $[k_1 \leftrightarrow k_2]$ es completamente idéntico.

Además, tenemos que considerar los terminos que provienen del propagador ya que también tienen tildes y contribuyen a primer orden en $c^{\mu\nu}$.

$$\frac{1}{(\tilde{k}_1^2 - 2\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1)^2} = \frac{1}{4(p_1 \cdot k_1)^2} \left[1 + \frac{2C_{k_1}^{k_1} - 4C_{k_1}^{p_1}}{p_1 \cdot k_1} \right] \quad (4.93)$$

$$\frac{1}{(\tilde{k}_2^2 - 2\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_2)(\tilde{k}_1^2 - 2\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1)} = \frac{1}{4(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left[1 + \frac{(C_{k_2}^{k_2} - 2C_{k_2}^{p_1})}{(p_1 \cdot k_2)} + \frac{(C_{k_1}^{k_1} - 2C_{k_1}^{p_1})}{(p_1 \cdot k_1)} \right] \quad (4.94)$$

Ahora conviene discutir las constantes de normalización. De acuerdo a la referencia [12] a nivel árbol en el diagrama se tiene

$$|C(\vec{p})|^2 = \frac{p^0}{\tilde{p}^0} (1 - c^{00}) \quad (4.95)$$

donde $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, y $\tilde{p}^0 = \sqrt{\vec{\tilde{p}}^2 + m^2}$.

Recolectando toda la información que tenemos, podemos escribir la amplitud al cuadrado para el proceso de Breit-Wheeler con correcciones a primer orden en $c^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= (2\pi e)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \frac{p_1^0 p_2^0}{\bar{p}_1^0 \bar{p}_2^0} (1 - 2c^{00}) \times & (4.96) \\
&\left\{ \frac{1}{4(p_1 \cdot k_1)^2} \left[32(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) + 32m^2(p_1 \cdot k_1) - 32m^4 + 32(p_1 \cdot k_2)C_{p_1}^{p_1} \right. \right. \\
&+ 32k_1 \cdot k_2 [2C_{k_1}^{p_1} - C_{p_1}^{p_1} - C_{k_1}^{k_1}] - 32m^2 [4C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + 2C_{k_2}^{k_1} - 8C_{k_1}^{p_1} - 2C_{k_2}^{p_1} + 4C_{p_1}^{p_1}] \\
&- 32p_1 \cdot k_1 [C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + 2C_{k_2}^{k_1} - C_{p_1}^{p_1}] \\
&+ \left. \left. \left[\frac{2C_{k_1}^{k_1} - 4C_{k_1}^{p_1}}{(p_1 \cdot k_1)} \right] [32(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) + 32m^2(p_1 \cdot k_1) - 32m^4] \right] \right. \\
&+ \frac{1}{4(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left[16m^2(p_1 \cdot k_1) + 16m^2(p_1 \cdot k_2) - 32m^4 + 32k_1 \cdot k_2 [C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2}] \right. \\
&+ 16m^2 [-4C_{k_2}^{k_1} + 10C_{k_1}^{p_1} + 10C_{k_2}^{p_1} - 8C_{p_1}^{p_1} - C_{k_1}^{k_1} - C_{k_2}^{k_2}] \\
&+ \left. \left. \left[\frac{C_{k_2}^{k_2} - 2C_{k_2}^{p_1}}{(p_1 \cdot k_2)} + \frac{C_{k_1}^{k_1} - 2C_{k_1}^{p_1}}{(p_1 \cdot k_1)} \right] [16m^2(p_1 \cdot k_1) + 16m^2(p_1 \cdot k_2) - 32m^4] \right] \right. \\
&+ \left. \left. \left[k_1 \leftrightarrow k_2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

4.3. Cálculo en el centro de momento para el límite ultrarelativista

El límite ultrarelativista corresponde a $m \approx 0$, por lo que la amplitud al cuadrado se reduce a:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) e^4 |C(\vec{p}_1)|^2 |C(\vec{p}_2)|^2 \times & (4.97) \\
&\left\{ \frac{1}{4(p_1 \cdot k_1)^2} \left[32(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) + 32(p_1 \cdot k_2)C_{p_1}^{p_1} + 32k_1 \cdot k_2 [2C_{k_1}^{p_1} - C_{p_1}^{p_1} - C_{k_1}^{k_1}] \right. \right. \\
&- 32p_1 \cdot k_1 [C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + 2C_{k_2}^{k_1} - C_{p_1}^{p_1}] \left. \right] + \frac{1}{4(p_1 \cdot k_2)^2} \left[32(p_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_1) \right. \\
&+ 32(p_1 \cdot k_1)C_{p_1}^{p_1} + 32k_1 \cdot k_2 [2C_{k_2}^{p_1} - C_{p_1}^{p_1} - C_{k_2}^{k_2}] - 32p_1 \cdot k_2 [C_{k_2}^{k_2} + C_{k_1}^{k_1} + 2C_{k_2}^{k_1} - C_{p_1}^{p_1}] \left. \right] \\
&+ \left. \left[\frac{C_{k_1}^{k_1} - 2C_{k_1}^{p_1}}{2(p_1 \cdot k_1)^3} + \frac{C_{k_2}^{k_2} - 2C_{k_2}^{p_1}}{2(p_1 \cdot k_2)^3} \right] [32(p_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_1)] + \frac{64k_1 \cdot k_2 [C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2}]}{4(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \right\}.
\end{aligned}$$

En el marco de referencia del centro de momento tendremos que:

$$\begin{aligned}
k_1 &= k(1, \hat{k}) & k_2 &= k(1, -\hat{k}) \\
p_1 &= (k, p\hat{p}) & p_2 &= (k, -p\hat{p})
\end{aligned}$$

Donde $\sqrt{|\vec{p}|^2} = p$ y $\sqrt{|\vec{k}|^2} = k$. Con esta elección de coordenadas podemos escribir la forma explícita de las diferentes cantidades que aparecen la amplitud al cuadrado.

De la relación de dispersión vemos que

$$\begin{aligned}
|\vec{p}|^2 &= k^2 + 2C_p^p & (4.98) \\
&= k^2 + 2k^2 [c_{00}p^0p^0 + 2c_{0i}p^0p^i + c_{ij}p^ip^j] \\
&= k^2 [1 + 2c_{00} + 4c_{0i}\hat{p}^i + 2\hat{p}c\hat{p}].
\end{aligned}$$

Donde hemos introducido el vector unitario \hat{p} en la dirección del vector \vec{p} . Así,

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot k_1 &= k^2 [1 - \cos\theta (1 + 2c_{00} + 4c_{0i}\hat{p}^i + 2\hat{p}c\hat{p})] \\
p_1 \cdot k_2 &= k^2 [1 + \cos\theta (1 + 2c_{00} + 4c_{0i}\hat{p}^i + 2\hat{p}c\hat{p})] \\
k_1 \cdot k_2 &= 2k^2 & \hat{p}_1 \cdot \hat{k}_1 &= \cos\theta
\end{aligned}$$

Para las correcciones a primer orden:

$$\begin{aligned}
C_{k_2}^{k_2} &= k^2[c_{00} - 2c_{0i}\hat{k}^i + \hat{k}c\hat{k}] & C_{k_1}^{k_1} &= k^2[c_{00} + 2c_{0i}\hat{k}^i + \hat{k}c\hat{k}] \\
C_{p_2}^{p_2} &= k^2[c_{00} - 2c_{0i}\hat{p}^i + \hat{p}c\hat{p}] & C_{k_2}^{p_1} &= k^2[c_{00} + c_{0i}\hat{p}^i - c_{0i}\hat{k}^i - \hat{p}c\hat{k}] \\
C_{k_1}^{p_1} &= k^2[c_{00} + c_{0i}\hat{p}^i + c_{0i}\hat{k}^i + \hat{p}c\hat{k}] & C_{p_1}^{p_1} &= k^2[c_{00} + 2c_{0i}\hat{p}^i + \hat{p}c\hat{p}] \\
C_{k_2}^{k_1} &= k^2[c_{00} - \hat{k}c\hat{k}] & &
\end{aligned}$$

Hemos usado el vector unitario \hat{k} en la dirección del vector \vec{k} . Sustituyendo estas cantidades en la amplitud al cuadrado, y haciendo el algebra necesaria llegamos a que, en el marco de referencia del centro de momento, la amplitud al cuadrado con correcciones a primer orden en $c^{\mu\nu}$ es:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) e^4 |C(\vec{p}_1)|^2 |C(\vec{p}_2)|^2 \left\{ \frac{64}{\sin^4\theta} [c_{00} + 2c_{0i}\hat{p}^i + \hat{p}c\hat{p}] \right. \\
&\quad (4.99) \\
&+ \frac{8}{(1 - \cos\theta)^2} [-2c_{00}(1 - 2\cos\theta) + 4c_{0i}\hat{p}^i + 4\hat{p}c\hat{k} - 2\hat{k}c\hat{k}] + \frac{8}{(1 + \cos\theta)^2} [-2c_{00}(1 + 2\cos\theta) \\
&+ 4c_{0i}\hat{p}^i - 4\hat{p}c\hat{k} - 2\hat{k}c\hat{k}] + \frac{64}{\sin^2\theta} [c_{00} + \hat{k}c\hat{k}] - \frac{32}{\sin^4\theta} [2\hat{p}c\hat{k}(3 + \cos^2\theta) \\
&+ (1 + 3\cos\theta^2)(c_{00} + 2c_{0i}\hat{p}^i - \hat{k}c\hat{k})] + \left. \left[\frac{1 + \cos\theta^2}{\sin^2\theta} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) e^4 |C(\vec{p}_1)|^2 |C(\vec{p}_2)|^2 \left\{ \left[\frac{1 + \cos\theta^2}{\sin^2\theta} \right] \right. \\
&\quad (4.100) \\
&+ \left. \frac{64}{\sin^4\theta} [\hat{k}c\hat{k} + 2\hat{p}c\hat{p}\cos\theta^2 - 2\hat{p}c\hat{k}(1 + \cos\theta^2)] \right\}.
\end{aligned}$$

En este caso podemos comparar la amplitud al cuadrado con el resultado que encontraron A. Kostelecky y D. Colladay⁴ para el proceso de aniquilación de un par electrón-positrón, ya que la amplitud al cuadrado para ambos procesos es la misma. Salvo un factor de reescalamiento del término usual (caso invariante de Lorentz), las correcciones que contienen explícitamente al término C , asociado a la violación de Lorentz, coinciden con el resultado encontrado por A. Kostelecky y D. Colladay.

4.4. Sección eficaz para el modelo no invariante de Lorentz

En el caso invariante de Lorentz vimos que la sección eficaz correspondía a la integral (ecuación (3.81))

$$\sigma = \frac{1}{F} \int |\mathcal{A}|_{LI}^2 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \delta(p_1^2 - m^2) \delta(p_2^2 - m^2) dp_1 dp_2 \quad (4.101)$$

donde p_1 es el momento del positrón, k_1 el momento de un fotón, y k_2 el momento del otro fotón; m corresponde a la masa del electrón y del positrón. F es el flujo de Moeller (ecuación (3.79)), y la delta $\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$ expresa la conservación del momento; las otras deltas corresponden a la relación de dispersión para cada partícula.

Para calcular la sección eficaz en el caso no invariante de Lorentz debemos tomar en cuenta la modificación a la relación de dispersión que introduce la violación a la invariancia de Lorentz

$$p^2 + 2C_p^p - m^2 = 0 \quad (4.102)$$

Además debemos usar la amplitud al cuadrado que contiene las correcciones a primer orden en la violación de Lorentz (ecuación (4.95)). Así la sección eficaz en el caso no invariante de Lorentz esta dada por

$$\sigma = \frac{1}{F} \int |\mathcal{A}|^2 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \delta(p_1^2 + 2C_{p_1}^{p_1} - m^2) \delta(p_2^2 + 2C_{p_2}^{p_2} - m^2) dp_1 dp_2 \quad (4.103)$$

donde

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|_{LI} + |\mathcal{A}|_{LV} \quad (4.104)$$

$|\mathcal{A}|_{LI}$ es el término invariante de Lorentz, y $|\mathcal{A}|_{LV}$ corresponde a las correcciones explícitas a primer orden en la violación de Lorentz. Esto nos permite separar a la integral en dos partes. Para las correcciones explícitas contenidas en el término $|\mathcal{A}|_{LV}$ no es necesario considerar la modificación a la relación de dispersión, ya que esto nos daría correcciones a segundo orden. Así, para estos términos debemos calcular la integral

$$\Delta\sigma_D = \frac{1}{F} \int |\mathcal{A}|_{LV}^2 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \delta(p_1^2 - m^2) \delta(p_2^2 - m^2) dp_1 dp_2 \quad (4.105)$$

Denotaremos a $\Delta\sigma_D$ como la *corrección dinámica*.

Para el término invariante de Lorentz $|\mathcal{A}|_{LI}$, las correcciones a primer orden se obtienen al considerar la modificación a la relación de dispersión. En este caso debemos resolver la integral

$$\Delta\sigma_K = \frac{1}{F} \int |\mathcal{A}|_{LI}^2 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \delta(p_1^2 + 2C_{p_1}^{p_1} - m^2) \delta(p_2^2 + 2C_{p_2}^{p_2} - m^2) dp_1 dp_2 \quad (4.106)$$

Denotaremos a $\Delta\sigma_K$ como la *corrección cinemática*.

4.4.1. Corrección dinámica

Para resolver la integral dada en la ecuación (4.104), tomaremos como referencia el cálculo que hicimos en el caso invariante de Lorentz. Cuando calculamos la sección eficaz en el caso invariante de Lorentz vimos que la amplitud al cuadrado se podía escribir en términos de una variable ξ . Sin embargo, al considerar las correcciones a primer orden en la violación de Lorentz contenidas en el término $|\mathcal{A}|_{LV}$, resulta que estas dependen tanto de ξ como de η .

Recordemos que los términos que aparecían en las correcciones a primer orden en la violación de Lorentz eran $C_{k_1}^{p_1}, C_{k_2}^{p_1}, C_{p_1}^{k_1}, C_{k_1}^{k_2}, C_{k_2}^{k_1}$. El procedimiento a seguir es calcular dichos términos como funciones de ξ y η , e integrarlos separadamente con respecto a η para que queden únicamente en función de la variable ξ , y así calcular las correcciones a primer orden como funciones de ξ . En el caso invariante de Lorentz, introdujimos coordenadas de tal forma que el fotón con momento k_1 incida sobre el eje z y el fotón con momento k_2 incida sobre el plano $y - z$ con un ángulo α con respecto al eje z . Así

$$k_1 = \omega_1(1, 0, 0, 1) \quad (4.107)$$

$$k_2 = \omega_2(1, 0, \sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

Recordemos también que las cantidades $p_1 \cdot k_1$ y $p_1 \cdot k_2$ se escribían como funciones de ξ :

$$p_1 \cdot k_1 = v_1 \cdot k_1 = \omega_1(u^0 - u^3) = \omega_1\xi. \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} p_1 \cdot k_2 &= u \cdot k_2 + k_1 \cdot k_2 = -u \cdot k_1 + k_1 \cdot k_2 \\ &= -\omega_1(u^0 - u^3) + \omega_1\omega_2(1 - \cos(\alpha)) = -\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1 - \cos(\alpha)). \end{aligned} \quad (4.109)$$

También conviene recordar que necesitábamos calcular la integral sobre la variable u

$$I = \int |\mathcal{A}|^2 \delta((\omega_1 + \omega_2)u^0 - \omega_2 \sin(\alpha)u^2 - u^3(\omega_2 \cos(\alpha) + \omega_1)) \delta(u^2 + 2\omega_1(u^0 - u^3) - m^2) d^4u \quad (4.110)$$

Dicho esto procedemos con nuestro cálculo. Vamos a considerar el caso en que la matriz $c^{\mu\nu}$ es diagonal y $c_{00} = 3C$, $c_{ij} = \delta_{ij}C$. Luego

$$\begin{aligned} C_{k_1}^{p_1} &= c_{00} p_1^0 k_1^0 + c_{ij} p_1^i k_1^j \\ &= 3C p_1^0 k_1^0 + C \delta_{ij} p_1^i k_1^j. \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$p_1 \cdot k_1 = p_1^0 k_1^0 - \sum_i p_1^i k_1^i = \omega_1 (u^0 - u^3) \quad (4.112)$$

de donde podemos obtener

$$\sum_i p_1^i k_1^i = \omega_1 (u^0 + \omega_1) - \omega_1 (u^0 - u^3) = \omega_1^2 + \omega_1 u^3 \quad (4.113)$$

En cierto punto del cálculo de la integral para la sección eficaz introducimos el cambio de variable $\xi = (u^0 - u^3)$ y $\eta = (u^0 + u^3)$, de donde obtenemos que $u^0 = \frac{1}{2}(\eta + \xi)$ y $u^3 = \frac{1}{2}(\eta - \xi)$. Así

$$\begin{aligned} C_{k_1}^{p_1} &= 3C p_1^0 k_1^0 + C \delta_{ij} p_1^i k_1^j \\ &= C[4\omega_1^2 + \omega_1(3u^0 + u^3)] \\ &= C[4\omega_1^2 + \omega_1\xi + 2\omega_1\eta]. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} C_{k_2}^{p_1} &= 3C p_1^0 k_1^0 + C \delta_{ij} C p_1^i k_1^j \\ &= C[4\omega_2 u^0 + \omega_1 \omega_2 (3 + \cos\alpha) + \omega_1 (u^0 - u^3)] \\ &= C[\xi(2\omega_2 + \omega_1) + 2\omega_2 \eta + \omega_1 \omega_2 (3 + \cos(\alpha))]. \end{aligned} \quad (4.115)$$

el término $C_{p_1}^{p_1}$ recordamos que habíamos hecho el cambio de variable $p_1 = u + k_1$, luego

$$p_1^2 = u^2 + 2\omega_1 (u^0 - u^3) \quad (4.116)$$

$$\sum_i p_1^i p_1^i = (u^0 + \omega_1)^2 - u^2 - 2\omega_1 (u^0 - u^3) \quad (4.117)$$

$$C_{p_1}^{p_1} = C[3(u^0 + \omega_1)^2 + (u^3 + \omega_1)^2 + ((u^1)^2 + (u^2)^2)] \quad (4.118)$$

Cuando se integra sobre la variable u_1 en la integral I , la función delta nos impone la condición

$$u_1^2 = (u^0)^2 - (u^3)^2 - (u^2)^2 + 2\omega_1 \xi - m^2 \quad (4.119)$$

lo cual nos permite escribir $(u^1)^2 + (u^2)^2 = (u^0)^2 - (u^3)^2 + 2\omega_1\xi - m^2$ y así el término $C_{p_1}^{p_1}$ se puede escribir como función de η y ξ .

$$\begin{aligned} C_{p_1}^{p_1} &= C[3(u^0 + \omega_1)^2 + (u^3 + \omega_1)^2 + ((u^0 + u^3)(u^0 - u^3) + 2\omega_1(u^0 - u^3) - m^2)] \\ &= C[\eta^2 + \xi^2 + 2\eta\xi + 4\omega_1(\eta + \xi) + 4\omega_1^2 - m^2] \end{aligned} \quad (4.120)$$

$$C_{k_1}^{k_1} = c_{00}k_1^0k_1^0 + c_{ij}k_1^ik_1^j = 4Ck_1^0k_1^0 = 4C\omega_1^2 \quad (4.121)$$

donde usamos que $k_1^0k_1^0 = \sum_i k_1^ik_1^i = \omega_1^2$. Análogamente

$$C_{k_2}^{k_2} = 4C\omega_2^2 \quad (4.122)$$

usando que $k_1 \cdot k_2 = \omega_1\omega_2(1 - \cos(\alpha))$ obtenemos que

$$C_{k_2}^{k_1} = C[3\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_2\cos(\alpha)] \quad (4.123)$$

En el cálculo para la parte invariante de Lorentz habíamos llegado a expresar la integral I como

$$I = \frac{1}{|2\omega_2 \sin(\alpha)|} \int d\xi d\eta |\mathcal{A}|^2 \frac{1}{\sqrt{O + \frac{R^2}{B^2} - (B\eta - \frac{R}{B})^2}}. \quad (4.124)$$

haciendo el cambio de variable $Z = B\eta - \frac{R}{B}$ obteníamos

$$I = \frac{1}{|2\omega_2 \sin \alpha|} \int d\xi \int_{-Z_0}^{Z_0} dZ \frac{|\mathcal{A}(\xi, \eta)|^2}{\sqrt{Z_0^2 - Z^2}}. \quad (4.125)$$

con $Z_0 = \sqrt{O + \frac{R^2}{B^2}}$.

Notamos que los términos $C_{k_1}^{p_1}, C_{k_2}^{p_1}, C_{p_1}^{p_1}, C_{k_1}^{k_1}, C_{k_2}^{k_2}, C_{k_2}^{k_1}$ dependen a lo más cuadráticamente en la variable η . Por ello sólo tenemos que considerar las siguientes integrales

$$\int d\eta \frac{1}{\sqrt{O + \frac{R^2}{B^2} - (B\eta - \frac{R}{B})^2}} = \int_{-Z_0}^{Z_0} dZ \frac{1}{\sqrt{Z_0^2 - Z^2}} = 2\pi \cot \frac{\alpha}{2}. \quad (4.126)$$

$$\int d\eta \frac{\eta}{\sqrt{O + \frac{R^2}{B^2} - (B\eta - \frac{R}{B})^2}} = \int_{-Z_0}^{Z_0} dZ \frac{1}{B^2} \frac{Z + \frac{R}{B}}{\sqrt{Z_0^2 - Z^2}} \quad (4.127)$$

$$= \frac{\pi}{\omega_2} \xi \cot \frac{\alpha}{2} \csc^2 \frac{\alpha}{2} (-2\omega_1 + \omega_2(1 + \cos \alpha))$$

$$\int d\eta \frac{\eta^2}{\sqrt{O + \frac{R^2}{B^2} - (B\eta - \frac{R}{B})^2}} = \int_{-Z_0}^{Z_0} dZ \frac{1}{B^3} \frac{(Z + \frac{R}{B})^2}{\sqrt{Z_0^2 - Z^2}} \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi \sin^3 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^5} \left[(-1 + \cos \alpha)^2 \left(-4m^2 + 8\omega_1 \xi - \xi^2 \csc^2 \alpha \left(1 + 2\frac{\omega_1}{\omega_2} + \cos \alpha\right)^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\xi^2 \csc^2 \alpha}{\omega_1^2} (-2\omega_2 + \omega_1(1 + \cos \alpha))^2 \right) + \frac{2\xi^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\omega_1^2} (-2\omega_2 + \omega_1(1 + \cos \alpha)) \right] \end{aligned}$$

Ahora ya podemos calcular las correcciones a la sección eficaz pues dichas correcciones sólo dependen de la variable ξ .

$$C_{k_1}^{p_1} = \pi \frac{\omega_1}{\omega_2} \cot \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} (4\omega_1(\omega_2 - \xi) + 3\omega_2 \xi + \omega_2 \cos \alpha (\xi - 4\omega_1)) \quad (4.129)$$

$$C_{k_2}^{p_1} = 2\pi \cot \frac{\alpha}{2} (\omega_1(3\omega_2 + \omega_2 \cos \alpha + \xi) + 2\xi \csc^2 \frac{\alpha}{2} (\omega_2 - \omega_1)) \quad (4.130)$$

$$C_{k_1}^{k_1} = 8\pi\omega_1^2 \cot \frac{\alpha}{2} \quad (4.131)$$

$$C_{k_2}^{k_2} = 8\pi\omega_2^2 \cot \frac{\alpha}{2} \quad (4.132)$$

$$C_{k_2}^{k_1} = 2\pi\omega_1\omega_2(3 + \cos \alpha) \cot \frac{\alpha}{2} \quad (4.133)$$

$$\begin{aligned} C_{p_1}^{p_1} &= \frac{\pi}{4} \cot \frac{\alpha}{2} \left[8(-m^2 + (2\omega_1 + \xi)^2) + 8\frac{\xi \csc^2 \frac{\alpha}{2}}{\omega_2} (2\omega_1 + \xi)(\omega_2(1 + \cos \alpha) - 2\omega_1) \right. \\ &\left. + \frac{\csc^4 \frac{\alpha}{2}}{\omega_2^2} \left(-2m^2\omega_2^2 + 4\omega_1\omega_2^2\xi + 8\omega_1^2\xi^2 - 16\omega_1\omega_2\xi^2 + 3\omega_2^2\xi^2 - 4\omega_2\xi^2 \cos \alpha(4\omega_1 - \omega_2) \right. \right. \\ &\left. \left. + \omega_2^2 \cos 2\alpha(2m^2 - 4\omega_1\xi + \xi^2) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.134)$$

Así la integral como función de ξ es

$$I = \frac{1}{|2\omega_2 \sin \alpha|} \int_{\frac{\omega_2}{2}(1-\cos \alpha)(1-\sqrt{1-s})}^{\frac{\omega_2}{2}(1-\cos \alpha)(1+\sqrt{1-s})} d\xi |\mathcal{A}(\xi)|_{LV}^2. \quad (4.135)$$

donde hemos introducido la notación $s \equiv \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2(1-\cos\alpha)}$, y la amplitud al cuadrado como función de ξ es

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(\xi)|_{LV}^2 = & \frac{2\pi \cot \frac{\alpha}{2}}{\omega_1^3} \left\{ -\frac{2\omega_1 \csc^4 \frac{\alpha}{2}}{\omega_2^2 \xi^2} \left(-10m^4 \omega_2^2 - 10\omega_1^3 \omega_2^3 \right. \right. & (4.136) \\
& + 6m^2 \omega_2^4 + 25m^2 \omega_1 \omega_2^2 \xi + 18\omega_1^3 \omega_2^2 \xi - 8m^2 \omega_2^3 \xi + 6\omega_1 \omega_2^4 \xi \\
& + 16m^2 \omega_1^2 \xi^2 - 48m^2 \omega_1 \omega_2 \xi^2 + 16m^2 \omega_2^2 \xi^2 - \omega_2 \cos \alpha (-8m^4 \omega_2 + \omega_1 \omega_2 (-3\omega_1^2 (5\omega_2 - 8\xi) \\
& + 8\omega_2^2 \xi) + 4m^2 (2\omega_2^3 + 5\omega_1 \omega_2 \xi - 2\omega_2^2 \xi + 4\omega_1 \xi^2)) + \omega_2^2 \cos 2\alpha (2m^4 - 6\omega_1^3 (\omega_2 - \xi) \\
& + 2\omega_1 \omega_2^2 \xi + m^2 (2\omega_2^2 - 5\omega_1 \xi)) + \omega_1^3 \omega_2^3 \left. \right) + \frac{\omega_1 \csc^4 \frac{\alpha}{2}}{\omega_2^2 (\xi - \omega_2 (1 - \cos \alpha))} \left(20m^4 \omega_2^2 - 36m^2 \omega_1^2 \omega_2^2 \right. \\
& + 42m^2 \omega_1 \omega_2^3 - 20\omega_1^3 \omega_2^3 - 48m^2 \omega_2^4 - 40\omega_1 \omega_2^5 + 48m^2 \omega_1^2 \omega_2 \xi - 110m^2 \omega_1 \omega_2^2 \xi + 12\omega_1^3 \omega_2^2 \xi \\
& + 64m^2 \omega_1^3 \xi + 36\omega_1 \omega_2^4 \xi - 32m^2 \omega_1^2 \xi^2 + 96m^2 \omega_1 \omega_2 \xi^2 - 32m^2 \omega_2^2 \xi^2 + \omega_2 \cos \alpha (-16m^4 \omega_2 \\
& + 2\omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 (15\omega_2 - 8\xi) + 6\omega_2^2 (5\omega_2 - 4\xi)) + m^2 (48\omega_1^2 (\omega_2 - \xi) + 64\omega_2^2 (\omega_2 - \xi) \\
& + \omega_1 (-51\omega_2^2 + 88\omega_2 \xi + 32\xi^2))) - 2\omega_2^2 \cos 2\alpha (2m^4 + m^2 (6\omega_1^2 - 3\omega_1 \omega_2 + 8\omega_2^2 - 11\omega_1 \xi) \\
& + 2\omega_1 (3\omega_1^2 \omega_2 + 6\omega_2^3 - \omega_1^2 \xi - 3\omega_2^2 \xi)) + \cos 3\alpha (3m^2 \omega_1 \omega_2^3 + 2\omega_1^3 \omega_2^3 + 4\omega_1 \omega_2^5) \left. \right) \\
& + \frac{\omega_1}{\omega_2^2 \xi (\xi - \omega_2 (1 - \cos \alpha))} \left(-64\omega_1 \omega_2^3 (\omega_1^2 + \omega_2^2) (1 - \cos \alpha) - m^2 \csc^4 \frac{\alpha}{2} (40m^2 \omega_2 \right. \\
& + 12\omega_1^2 \omega_2^2 + 42\omega_1 \omega_2^3 - 12\omega_2^4 + 48\omega_1^2 \omega_2 \xi - 160\omega_1 \omega_2^2 \xi + 80\omega_2^3 \xi - 64\omega_1^2 \xi^2 + 192\omega_1 \omega_2 \xi^2 \\
& - 64\omega_2^2 \xi^2 + \omega_2 \cos \alpha (-32m^2 \omega_2 + 16\omega_2^2 (\omega_2 - 5\xi) - 16\omega_1^2 (\omega_2 + 3\xi) + \omega_1 (-51\omega_2^2 + 128\omega_2 \xi \\
& + 64\xi^2)) - 2\omega_2^2 \cos 2\alpha (4m^2 - 2\omega_1^2 - 3\omega_1 \omega_2 + 2\omega_2^2 - 16\omega_1 \xi) + 3\omega_1 \omega_2^3 \cos 3\alpha \\
& - \frac{16\omega_1 \csc^2 \frac{\alpha}{2}}{\omega_2 \xi^3} \left((-2\omega_1 \omega_2 + 4\omega_1 \xi - 3\omega_2 \xi + \omega_2 \cos \alpha (2\omega_1 - \xi)) (m^4 - m^2 \omega_1 \xi + \omega_1^2 \xi (\xi - \omega_2) \right. \\
& + \omega_1^2 \omega_2 \xi \cos \alpha) \left. \right) + \frac{8m^2 \csc^2 \frac{\alpha}{2} (2m^2 - \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha))}{\omega_2 \xi^2 (\xi - \omega_2 (1 - \cos \alpha))^2} \left(\omega_1 \omega_2 (5\omega_2 - 6\xi) \xi - 2\omega_2^2 (\omega_2 - 2\xi) \xi \right. \\
& + \omega_1^2 (3\omega_2^2 - 6\omega_2 \xi + 4\xi^2) + 2\omega_2 \cos \alpha (\omega_2^2 \xi - \omega_1 \xi (2\omega_2 + \xi) + \omega_1^2 (-2\omega_2 + 3\xi)) \\
& + \omega_1 \omega_2^2 (\omega_1 - \xi) \cos 2\alpha \left. \right) + \frac{32}{(\xi - \omega_2 (1 - \cos \alpha))^3} \left((m^4 + m^2 \omega_1 (\xi - \omega_2) + \omega_1^2 \xi (\xi - \omega_2) \right. \\
& + \omega_1 \omega_2 (m^2 + \omega_1 \xi) \cos \alpha) (3\omega_1 \omega_2 - 2\omega_2^2 + \omega_1 \xi \omega_1 \omega_2 \cos \alpha + 2(\omega_2 - \omega_1) \xi \csc^2 \frac{\alpha}{2}) \left. \right) \left. \right\}
\end{aligned}$$

Al integrar, evaluar en los límites de integración, y simplificar la expresión, encontramos que la corrección dinámica a la sección eficaz está dada por

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_D = C \frac{2\pi e^4}{4\omega_1^4\omega_2^4(1-\cos\alpha)^3} & \left\{ -\frac{8\omega_1\omega_2}{m^2}\sqrt{1-s} \right. & (4.137) \\
& \times \left[4m^4\omega_1^2 - 24m^4\omega_1\omega_2 + 8m^2\omega_1^3\omega_2 + 4m^4\omega_2^2 - 5m^2\omega_1^2\omega_2^2 + 3\omega_1^4\omega_2^2 + 8m^2\omega_1\omega_2^3 + \right. \\
& 3\omega_1^2\omega_2^4 - 4\omega_1\omega_2 \cos\alpha \left(2m^4 + \omega_1\omega_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + m^2(2\omega_1^2 - \omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2) \right) \\
& \left. + \omega_1^2\omega_2^2(m^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) \cos 2\alpha \right] \\
& + 2 \csc^2 \frac{\alpha}{2} \log \left[\frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} \right] \left[8m^4\omega_1^2 - 48m^4\omega_1\omega_2 - 16m^2\omega_1^3\omega_2 + 8m^4\omega_2^2 \right. \\
& + 30m^2\omega_1^2\omega_2^2 - 18\omega_1^4\omega_2^2 - 16m^2\omega_1\omega_2^3 + 14\omega_1^3\omega_2^3 - 18\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1\omega_2 \cos\alpha \left(-16m^4 \right. \\
& \left. + 8m^2(2\omega_1^2 - 3\omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2) + \omega_1\omega_2(24\omega_1^2 - 17\omega_1\omega_2 + 24\omega_2^2) \right) \\
& \left. \left. - 2\omega_1^2\omega_2^2(3m^2 + 3\omega_1^2 - \omega_1\omega_2 + 3\omega_2^2) \cos 2\alpha + \omega_1^3\omega_2^3 \cos 3\alpha \right] \right\}
\end{aligned}$$

Vamos a hacer un chequeo de nuestro cálculo para comprobar que efectivamente es correcto el resultado que obtuvimos. Para esto vamos a tomar el caso en que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $\alpha = \pi$. En el caso usual este límite correspondería al marco de referencia del centro de momento, sin embargo en el caso no invariante de Lorentz las componentes de $c^{\mu\nu}$ son distintas en cada marco de referencia; recordemos que en este trabajo consideramos que $c^{\mu\nu}$ era diagonal en el marco en el que los fotones inciden con un ángulo α . Teniendo en cuenta esto, podemos hacer una revisión del cálculo en un sentido estrictamente matemático sin dar interpretación física alguna.

El término $|\mathcal{A}|_{LV}^2$ en el límite en que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ es:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}|^2 = \frac{32\pi}{(2\omega-x)^3x^3} & \left[4m^4(2\omega^2 - 2\omega\xi + \xi^2) + m^2\xi(-16\omega^3 + 28\omega^2\xi - 20\omega\xi^2 + 5\xi^3) \right. \\
& \left. + \xi(-8\omega^5 + 28\omega^4\xi - 32\omega^3\xi^2 + 18\omega^2\xi^3 - 6\omega\xi^4 + \xi^5) \right] & (4.138)
\end{aligned}$$

Integrando sobre la variable ξ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\omega(1-\sqrt{1-\frac{m^2}{\omega^2}})}^{\omega(1+\sqrt{1-\frac{m^2}{\omega^2}})} |\mathcal{A}|^2 d\xi &= 16\pi \left[-\frac{m^4}{\omega x^2} + \frac{2\omega^4 + 4m^2\omega^2 - m^4}{\omega^2 x} - 2x + \frac{m^4}{\omega(x-2\omega)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\omega^4 + 4m^2\omega^2 - m^4}{\omega^2(x-2\omega)} + \frac{m^4 + m^2\omega^2 + 4\omega^4}{\omega^3} \log[\xi] - \frac{m^4 + m^2\omega^2 + 4\omega^4}{\omega^3} \log[x-2\omega] \right]_{\omega(1-\sqrt{1-\frac{m^2}{\omega^2}}}^{\omega(1+\sqrt{1-\frac{m^2}{\omega^2}})}
\end{aligned} \tag{4.139}$$

Evaluando los límites de integración y simplificando la expresión resultante obtenemos:

$$\Delta\sigma_D = C4\pi \left\{ \frac{2m^4 - 6m^2\omega^2 - 4\omega^4}{m^2\omega^4} \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} - \frac{m^4 + m^2\omega^2 + 4\omega^4}{\omega^6} \log \left[\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}} \right] \right\} \tag{4.140}$$

que corresponde a la expresión que se obtiene al tomar el límite $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $\alpha = \pi$ en la ecuación (4.137). Por lo que nuestro cálculo es consistente al tomar este límite.

4.4.2. Corrección cinemática

La corrección cinemática a la sección eficaz σ_k es

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_K &= \frac{e^4}{F} \int |\mathcal{A}(p_1, k_1, k_2)|_{LI}^2 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\
&\quad \times \delta(\tilde{p}_1^2 - m^2) \delta(\tilde{p}_2^2 - m^2) dp_1 dp_2
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Para calcular la integral haremos uso del procedimiento que utilizamos para calcular la sección eficaz en el caso invariante de Lorentz.

Para hacer dicha integración es más conveniente integrar sobre el espacio fase de los momentos tildados $\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2\}$. Recordemos que $\tilde{p}^\mu = p^\mu + c_\nu^\mu p^\nu$. Luego,

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_K &= \frac{e^4}{F} \int |\mathcal{A}(\tilde{p}_1, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2)|_{LI}^2 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\
&\quad \times \delta(\tilde{p}_1^2 - m^2) \delta(\tilde{p}_2^2 - m^2) J d\tilde{p}_1 d\tilde{p}_2
\end{aligned} \tag{4.142}$$

Al tildar los momentos la amplitud al cuadrado es:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2)|_{LI}^2 &= \frac{1}{4(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1)^2} [32(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1)(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_2) + 32m^2\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1 - 32m^4] \\
&\quad (4.143) \\
&+ \frac{1}{4(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1)(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_2)} [16m^2\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 16m^2\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1 - 32m^4] + [\tilde{k}_1 \leftrightarrow \tilde{k}_2] \\
&+ 16C_{k_1}^{p_1} \left[\frac{p_1 \cdot k_2}{(p_1 \cdot k_1)^2} - \frac{1}{p_1 \cdot k_2} + 2m^2 \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)^2} - 2m^4 \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)^3} \right. \\
&\quad \left. - 2m^4 \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)^2(p_1 \cdot k_2)} \right] \\
&+ 16C_{k_2}^{p_1} \left[\frac{p_1 \cdot k_1}{(p_1 \cdot k_2)^2} - \frac{1}{p_1 \cdot k_1} + 2m^2 \frac{1}{(p_1 \cdot k_2)^2} - 2m^4 \frac{1}{(p_1 \cdot k_2)^3} \right. \\
&\quad \left. - 2m^4 \frac{1}{(p_1 \cdot k_2)^2(p_1 \cdot k_1)} \right]
\end{aligned}$$

Veamos como hacer el cambio de coordenadas para la delta asociada a la conservación de momento

$$\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) = \int d^4x e^{i(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \cdot x} = \int d^4x e^{i(p_1 - \rho) \cdot x} \quad (4.144)$$

donde $\rho = k_1 + k_2 - p_1$. Notamos que

$$\begin{aligned}
\int d^4x e^{i(p_1 - \rho) \cdot x} &= \int d^4x e^{i(\tilde{p}_1^\mu - \tilde{\rho}^\mu - c^{\mu\nu}(p_{1\nu} - \rho_\nu))x_\mu} \\
&= \int d^4x e^{i(\tilde{p}_1^\mu - \tilde{\rho}^\mu)x_\mu} e^{-ic^{\mu\nu}(p_{1\nu} - \rho_\nu)x_\mu} \\
&\approx \int d^4x e^{i(\tilde{p}_1^\mu - \tilde{\rho}^\mu)x_\mu} (1 - ic^{\mu\nu}(p_{1\nu} - \rho_\nu)x_\mu) \\
&= \int d^4x e^{i(\tilde{p}_1^\mu - \tilde{\rho}^\mu)x_\mu} - ic^{\mu\nu}(\tilde{p}_{1\nu} - \tilde{\rho}_\nu) \int d^4x e^{i(\tilde{p}_1^\alpha - \tilde{\rho}^\alpha)x_\alpha} x_\mu \\
&= \delta(\tilde{p}_1 - \tilde{\rho}) - c^{\mu\nu}(\tilde{p}_{1\nu} - \tilde{\rho}_\nu) \frac{\partial}{\partial(\tilde{p}_1^\mu - \tilde{\rho}^\mu)} \delta(\tilde{p}_1 - \tilde{\rho})
\end{aligned} \quad (4.145)$$

Notamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\tilde{p}_1^0 - \tilde{\rho}^0)} \delta(\tilde{p}_1 - \tilde{\rho}) &= \delta^3(\tilde{p}_1^i - \tilde{\rho}^i) \frac{\partial}{\partial(\tilde{p}_1^0 - \tilde{\rho}^0)} \delta(\tilde{p}_1^0 - \tilde{\rho}^0) \\ &= -\delta^3(\tilde{p}_1^i - \tilde{\rho}^i) \frac{\delta(\tilde{p}_1^0 - \tilde{\rho}^0)}{(\tilde{p}_1^0 - \tilde{\rho}^0)} \end{aligned} \quad (4.146)$$

donde usamos la propiedad de la delta

$$\frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{\delta(x)}{x} \quad (4.147)$$

Analogamente para las otras derivadas de la delta. Así

$$\delta(p_1 - \rho) \approx \delta(\tilde{p}_1 - \tilde{\rho}) \left[1 + c^{0\nu} \frac{(\tilde{p}_{1\nu} - \tilde{\rho}_\nu)}{(\tilde{p}_1^0 - \tilde{\rho}^0)} + \sum_i c^{i\nu} \frac{(\tilde{p}_{1\nu} - \tilde{\rho}_\nu)}{(\tilde{p}_1^i - \tilde{\rho}^i)} \right] \quad (4.148)$$

En el caso de invariancia rotacional, que es el que usaremos en este trabajo, la matriz $c^{\mu\nu}$ es diagonal. Dado que dicha matriz tiene traza cero tendremos que $c^{00} = 3C$ y $c^{ij} = \delta_{ij}C$, lo cual simplifica los cálculos. Es importante mencionar que al cambiar de marco de referencia la matriz c_ν^μ ya no será diagonal. Por ejemplo, si se quisiera calcular la sección en el centro de momento habría que transformar adecuadamente dicha matriz. En otras palabras la matriz c_ν^μ , que esta asociada al campo de fondo que introduce la violación de Lorentz, es diferente para cada marco de referencia.

Así a primer orden en $c^{\mu\nu}$

$$\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \approx \delta(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 - \tilde{k}_1 - \tilde{k}_2) \quad (4.149)$$

Por esta razón la corrección cinemática en el espacio tildado $\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2\}$ corresponde a la integral:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_K &= \frac{e^4}{F} \int \left| \mathcal{A}(\tilde{p}_1, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \right|_{LI}^2 \delta(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 - \tilde{k}_1 - \tilde{k}_2) \\ &\quad \times \delta(\tilde{p}_1^2 - m^2) \delta(\tilde{p}_2^2 - m^2) J d\tilde{p}_1 d\tilde{p}_2 \end{aligned} \quad (4.150)$$

donde J corresponde al Jacobiano de la transformación $p \rightarrow \tilde{p}$.

Hacemos el cambio de variable $q_1 = \tilde{p}_1 - \tilde{k}_1$ y $q_2 = \tilde{p}_2 - \tilde{k}_2$,

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_K &= \frac{e^4 J}{F} \int \left| \mathcal{A}(q_1, q_2, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \right|_{LI}^2 \delta(q_1 + q_2) \delta(q_1^2 + 2q_1 \cdot \tilde{k}_1 + 2C_{k_1}^{k_1} - m^2) \\ &\quad \times \delta(q_2^2 + 2q_2 \cdot \tilde{k}_2 + 2C_{k_2}^{k_2} - m^2) dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (4.151)$$

Integramos la delta $\delta(q_1 + q_2)$ sobre la variable q_2 ,

$$\Delta\sigma_K = \frac{e^4 J}{F} \int \left| \mathcal{A}(q, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \right|_{LI}^2 \delta(q^2 + 2q \cdot \tilde{k}_1 - m^2) \delta(q^2 - 2q \cdot \tilde{k}_2 - m^2) dq \quad (4.152)$$

donde hemos introducido la variable $q = q_1 = -q_2$. Notamos que los argumentos de las deltas implican que $q^2 - m^2 = -2q \cdot \tilde{k}_1 - 2C_{k_1}^{k_1}$ y $q^2 - m^2 = 2q \cdot \tilde{k}_2 - 2C_{k_2}^{k_2}$, de donde se sigue que $\tilde{k}_1 = -\tilde{k}_2$; luego:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_K &= \frac{e^4 J}{2F} \int \left| \mathcal{A}(q, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \right|_{LI}^2 \delta\left(q \cdot (\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) + C_{k_1}^{k_1} - C_{k_2}^{k_2}\right) \\ &\quad \times \delta\left(q^2 + 2q \cdot \tilde{k}_1 + 2C_{k_1}^{k_1} - m^2\right) dq \end{aligned} \quad (4.153)$$

Introducimos coordenadas de tal forma que el fotón con momento \vec{k}_1 incide por el eje \hat{z} y el fotón con momento \vec{k}_2 incide en el plano $y-z$ formando un ángulo α con el eje \hat{z} . En este marco de referencia escogeremos a la matriz c_V^μ en su forma diagonal. Este caso corresponde a invariancia rotacional. En estas coordenadas,

$$\tilde{k}^1 = \omega_1(1 + 3C, 0, 0, 1 - C). \quad (4.154)$$

$$\tilde{k}^2 = \omega_2(1 + 3C, 0, (1 - C) \sin \alpha, (1 - C) \cos \alpha). \quad (4.155)$$

Calculamos el jacobiano, J , de la transformación $p \rightarrow \tilde{p}$. En esta elección de coordenadas, $\tilde{p}^0 = (1 + 3C)p^0$ y $\tilde{p}^i = (1 - C)p^i$, de donde es claro que el determinante que hay que calcular para el jacobiano, solo tiene términos distintos de cero en la diagonal, por lo que:

$$J = \frac{1}{1 + 3C} \frac{1}{(1 - C)^3} \approx \frac{1}{(1 + 3C)(1 - C)} \approx \frac{1}{(1 + 2C)} \approx (1 - 2C) \quad (4.156)$$

También tendremos que $C_{k_1}^{k_1} = 4C\omega_1^2$, y $C_{k_2}^{k_2} = 4C\omega_2^2$. Así,

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_K &= (2\pi e)^4 \frac{(1 - 2C)}{2F} \int dq \left| \mathcal{A}(q, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \right|_{LI}^2 \\ &\quad \times \delta(q^2 + 2\omega_1 q^0(1 + 3C) - 2\omega_1 q^3(1 - C) + 8C\omega_1^2 - m^2) \\ &\quad \times \delta(q^0(\omega_1 + \omega_2)(1 + 3C) - q^2(1 - C)\omega_2 \sin \alpha - q^3(1 - C)(\omega_1 + \omega_2 \cos \alpha) + 4C(\omega_1^2 - \omega_2^2)) \end{aligned} \quad (4.157)$$

Integramos sobre la variable q^1 ,

$$\Delta\sigma_K = (2\pi e)^4 \frac{(1-2C)}{2F} \int dq^0 dq^2 dq^3 \left| \mathcal{A}(q, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \right|_{LI}^2 \quad (4.158)$$

$$\frac{\delta(q^0(\omega_1 + \omega_2)(1+3C) - q^2(1-C)\omega_2 \sin \alpha - q^3(1-C)(\omega_1 + \omega_2 \cos \alpha) + 4C(\omega_1^2 - \omega_2^2))}{\sqrt{(q^0)^2 - (q^2)^2 - (q^3)^2 + 2\omega_1 q^0(1+3C) - 2\omega_1 q^3(1-C) + 8C\omega_1^2 - m^2}}$$

Recordemos que la amplitud al cuadrado depende de los productos $\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1$ y $\tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_2$. Resulta que podemos reescribir a la amplitud al cuadrado en términos de una variable, lo cual nos permitirá poder hacer la integral.

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_1 &= q \cdot \tilde{k}_1 + \tilde{k}_1^2 \\ &= q^0(1+3C)\omega_1 - q^3(1-C)\omega_1 + 2C_{k_1}^{k_1} = \omega_1 \xi + 8C\omega_1^2. \end{aligned} \quad (4.159)$$

donde hemos definido la variable ξ como:

$$\xi = q^0(1+3C) - q^3(1-C). \quad (4.160)$$

Similarmente tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{k}_2 &= q \cdot \tilde{k}_2 + \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 \\ &= -q \cdot \tilde{k}_2 - C_{k_1}^{k_1} + C_{k_2}^{k_2} + \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 \\ &= -\xi\omega_1 + 4C(\omega_2^2 - \omega_1^2) + \omega_1\omega_2(1 - \cos \alpha + 2C(3 + \cos \alpha)). \end{aligned} \quad (4.161)$$

Dado que la variable ξ involucra únicamente a las variables q^0, q^3 , podemos integrar sobre la variable q^2 . Al integrar la delta obtenemos la condición

$$q^2 = \frac{q^0(\omega_1 + \omega_2)(1+3C) - q^3(1-C)(\omega_1 + \omega_2 \cos \alpha) + 4C(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{|\omega_2 \sin \alpha(1-C)|} \quad (4.162)$$

conviene introducir a la variable η , definida como:

$$\eta = q^0(1+3C) + q^3(1-C). \quad (4.163)$$

De esta forma podemos escribir a q^0, q^3 en términos de ξ, η .

$$q^0 = \frac{\eta + \xi}{2(1+3C)} \quad (4.164)$$

$$q^3 = \frac{\eta - \xi}{2(1-C)} \quad (4.165)$$

Dicho cambio de variable se realizó ya que la amplitud al cuadrado se puede escribir en términos de una de ellas, y por esta razón la integral se puede hacer. Necesitamos calcular el Jacobiano, j , de la transformación para poder escribir la integral en términos de las variables η, ξ . Nótese que si hacemos $C = 0$ recuperamos el caso usual.

$$j = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q^0}{\partial \xi} & \frac{\partial q^0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial q^3}{\partial \xi} & \frac{\partial q^3}{\partial \eta} \end{array} \right|.$$

Luego

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2(1+3C)} & \frac{1}{2(1+3C)} \\ -\frac{1}{2(1-C)} & \frac{1}{2(1-C)} \end{array} \right| = \frac{1}{2(1+3C)(1-C)} \approx \frac{1}{2(1+2C)}.$$

Reescribimos la condición para la variable q^2 en términos de las variables η, ξ , para ello notamos que

$$\begin{aligned} & A(q^0(1+3C) - q^3(1-C)) + B(q^0(1+3C) + q^3(1-C)) \quad (4.166) \\ &= \frac{q^0(\omega_1 + \omega_2)(1+3C) - q^3(1-C)(\omega_1 + \omega_2 \cos \alpha)}{|\omega_2 \sin \alpha|} \end{aligned}$$

donde

$$A = \frac{[1 + \cos \alpha + 2\frac{\omega_1}{\omega_2}]}{2 \sin \alpha} \quad (4.167)$$

$$B = \frac{[1 - \cos \alpha]}{2 \sin \alpha} \quad (4.168)$$

luego

$$q^2 = \frac{A(q^0(1+3C) - q^3(1-C)) + B(q^0(1+3C) + q^3(1-C))}{(1-C)} + \frac{4C(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\omega_2 \sin \alpha (1-C)} \quad (4.169)$$

Ahora podemos reescribir el denominador de la ecuación como

$$\begin{aligned} & (q^0)^2 - (q^2)^2 - (q^3)^2 + 2\omega_1 q^0(1+3C) - 2\omega_1 q^3(1-C) + 8C\omega_1^2 - m^2 \quad (4.170) \\ &= -a\eta^2 - b\eta + c \\ &= \frac{b^2}{4a} + c - \left(\sqrt{a}\eta + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

donde

$$a = B^2(1 + 2C) + 2C \quad (4.171)$$

$$b = 2AB\xi(1 + 2C) - \xi(1 - 2C) + 8BC \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_2 \sin \alpha} \quad (4.172)$$

$$c = -\xi^2(A^2(1 + 2C) + 2C) + 2\omega_1\xi + 8C\omega_1^2 - m^2 - 8AC\xi \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_2 \sin \alpha} \quad (4.173)$$

De esta manera tendremos que la corrección cinemática se puede escribir como

$$\Delta\sigma_K = \frac{e^4}{2F} \frac{(1 - 2C)}{|\omega_2 \sin \alpha(1 - C)|} \frac{1}{2(1 + 2C)} \int d\xi |\mathcal{A}(\xi)|_{LI}^2 \int d\eta \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{4a} + c - (\sqrt{a}\eta + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2}} \quad (4.174)$$

haciendo el cambio de variable $\zeta = \sqrt{a}\eta + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ y definiendo $\zeta_0^2 = \frac{b^2}{4a} + c$, se tiene que

$$\Delta\sigma_K = \frac{e^4}{2F} \frac{(1 - 2C)}{|\omega_2 \sin \alpha(1 - C)|} \frac{1}{2(1 + 2C)} \frac{1}{\sqrt{a}} \int d\xi |\mathcal{A}(\xi)|_{LI}^2 \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta_0^2 - \zeta^2}} \quad (4.175)$$

$$= \frac{e^4}{2F} \frac{(1 - 2C)}{|\omega_2 \sin \alpha(1 - C)|} \frac{1}{2(1 + 2C)} \frac{\pi}{\sqrt{a}} \int d\xi |\mathcal{A}(\xi)|_{LI}^2$$

$$= e^4 \frac{(1 - 2C)}{4F} \frac{(1 - C)}{|\omega_2 \sin \alpha|} \frac{\pi}{\sqrt{a}} \int d\xi |\mathcal{A}(\xi)|_{LI}^2$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} &\approx \frac{1}{B} \left[1 - C \left(1 + \frac{1}{B^2} \right) \right] \\ &= \frac{2 \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)} \left[1 - C \left(1 + \frac{4 \sin^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.176)$$

luego

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_K &= \frac{e^4}{4F} \frac{(1-3C)}{|\omega_2 \sin \alpha|} \frac{2\pi \sin \alpha}{(1-\cos \alpha)} \left[1 - C \left(1 + \frac{4 \sin^2 \alpha}{(1-\cos \alpha)^2} \right) \right] \int d\xi |\mathcal{A}(\xi)|_{LI}^2 \\ &= \frac{e^4}{4F} \frac{1}{|\omega_2 \sin \alpha|} \frac{2\pi \sin \alpha}{(1-\cos \alpha)} \left[1 - 4C \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{(1-\cos \alpha)^2} \right) \right] \int d\xi |\mathcal{A}(\xi)|_{LI}^2\end{aligned}\quad (4.177)$$

La amplitud al cuadrado en función de ξ está dada por la expresión:

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}(\xi)|_{LI}^2 &= \frac{\omega_1 \xi}{-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha)} + \frac{-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha)}{\omega_1 \xi} \quad (4.178) \\ &+ 2m^2 \left[\frac{1}{\omega_1 \xi} + \frac{1}{-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha)} \right] - m^4 \left[\frac{1}{\omega_1 \xi} + \frac{1}{-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha)} \right]^2 \\ &+ C \left[\frac{8\omega_1^2}{-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha)} + \frac{4(\omega_2^2 - \omega_1^2) + 2\omega_1 \omega_2}{\omega_1 \xi} - 2\omega_1 \xi \frac{2(\omega_2^2 - \omega_1^2) + \omega_1 \omega_2 (3 + \cos \alpha)}{(-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha))^2} \right. \\ &- 8 \left(\frac{-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha)}{\xi^2} \right) - 2m^2 \left(\frac{8}{\xi^2} + \frac{4(\omega_2^2 - \omega_1^2) + 2\omega_1 \omega_2 (3 + \cos \alpha)}{(-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha))^2} \right) \\ &+ m^4 \left(\frac{16}{\xi^3 \omega_1} + \frac{4}{\omega_1 \xi} \frac{2(\omega_2^2 - \omega_1^2) + \omega_1 \omega_2 (3 + \cos \alpha)}{(-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha))^2} + \frac{16}{\xi^2 (-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha))} \right. \\ &\left. + 4 \frac{2(\omega_2^2 - \omega_1^2) + \omega_1 \omega_2 (3 + \cos \alpha)}{(-\omega_1 \xi + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \alpha))^3} + f(\xi) \right)\end{aligned}$$

donde $f(\xi)$ es la expresión que resulta al evaluar los términos de la ecuación (4.143) que dependen explícitamente de C .

Al integrar los terminos que van multiplicados por C en la amplitud al cuadrado para la corrección cinemática obtenemos

$$C \int_{\frac{\omega_2}{2}(1-\cos\alpha)(1-\sqrt{s})}^{\frac{\omega_2}{2}(1-\cos\alpha)(1+\sqrt{s})} d\xi \left\{ \frac{8\omega_1^2}{-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1-\cos\alpha)} + \frac{4(\omega_2^2 - \omega_1^2) + 2\omega_1\omega_2}{\omega_1\xi} \right. \quad (4.179)$$

$$\begin{aligned} & - 8 \left(\frac{-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1-\cos\alpha)}{\xi^2} \right) - 2m^2 \left(\frac{8}{\xi^2} + \frac{4(\omega_2^2 - \omega_1^2) + 2\omega_1\omega_2(3+\cos\alpha)}{(-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1-\cos\alpha))^2} \right) \\ & + m^4 \left(\frac{16}{\xi^3\omega_1} + \frac{4}{\omega_1\xi} \frac{2(\omega_2^2 - \omega_1^2) + \omega_1\omega_2(3+\cos\alpha)}{(-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1-\cos\alpha))^2} + \frac{16}{\xi^2(-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1-\cos\alpha))} \right. \\ & \left. - 2\omega_1\xi \frac{2(\omega_2^2 - \omega_1^2) + \omega_1\omega_2(3+\cos\alpha)}{(-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1-\cos\alpha))^2} + 4 \frac{2(\omega_2^2 - \omega_1^2) + \omega_1\omega_2(3+\cos\alpha)}{(-\omega_1\xi + \omega_1\omega_2(1-\cos\alpha))^3} + f(\xi) \right\} \end{aligned}$$

$$= C \frac{\pi \cot \frac{\alpha}{2} \csc^2 \frac{\alpha}{2}}{\omega_1^3 \omega_2^2} \left[\frac{4\omega_1\omega_2}{m^2} \sqrt{1 - \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2(1-\cos\alpha)}} \right. \quad (4.180)$$

$$\begin{aligned} & \left(16m^4\omega_1^2 - 360m^4\omega_1\omega_2 + 16m^4\omega_2^2 + 180\omega_1^4\omega_2^2 - 14\omega_1^3\omega_2^3 + 180\omega_1^2\omega_2^4 - \omega_1\omega_2 \cos\alpha(120m^4 \right. \\ & \left. + \omega_1\omega_2(240\omega_1^2 - 17\omega_1\omega_2 + 240\omega_2^2)) + 2\omega_1^2\omega_2^2(30\omega_1^2 - \omega_1\omega_2 + 30\omega_2^2) \cos 2\alpha - \omega_1^3\omega_2^3 \cos 3\alpha \right) \\ & - 2 \csc^2 \frac{\alpha}{2} \log \left[\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2(1-\cos\alpha)}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2m^2}{\omega_1\omega_2(1-\cos\alpha)}}} \right] \left(16m^4\omega_1^2 - 360m^4\omega_1\omega_2 - 128m^2\omega_1^3\omega_2 \right. \\ & + 16m^4\omega_2^2 + 160m^2\omega_1^2\omega_2^2 - 180\omega_1^4\omega_2 - 128m^2\omega_1\omega_2^3 + 14\omega_1^3\omega_2^3 - 180\omega_1^2\omega_2^4 \\ & + \omega_1\omega_2(-120m^4 + 128m^2(\omega_1^2 - \omega_1\omega_2 + \omega_2^2) + \omega_1\omega_2(240\omega_1^2 - 17\omega_1\omega_2 + 240\omega_2^2)) \cos\alpha \\ & \left. - 2\omega_1^2\omega_2^2(16m^2 + 30\omega_1^2 - \omega_1\omega_2 + 30\omega_2^2) \cos 2\alpha + \omega_1^3\omega_2^3 \cos 3\alpha \right) \end{aligned}$$

Así la corrección cinemática a la sección eficaz es la suma de la parte invariante de Lorentz más las correcciones a primer orden en el parámetro de la violación de Lorentz:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_K &= \frac{8\pi e^4}{\omega_1\omega_2(1-\cos\alpha)^2} \left[1 - 4C \left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2} \right) \right] \times \quad (4.181) \\ & \left\{ \left[\frac{1}{\omega_1\omega_2} (-2m^2 - \omega_1\omega_2(1-\cos\alpha)) \sqrt{1-s} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\omega_1^2\omega_2^2} (-\omega_1\omega_2(2m^2 + \omega_1\omega_2) + \omega_1^2\omega_2^2 \cos\alpha + m^4 \csc^2 \frac{\alpha}{2}) \log \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C \frac{2\pi e^4}{4\omega_1^4 \omega_2^4 (1 - \cos \alpha)^3} \left\{ \frac{4\omega_1 \omega_2}{m^2} \sqrt{1-s} \right. \\
& \left[16m^4 \omega_1^2 - 360m^4 \omega_1 \omega_2 + 16m^4 \omega_2^2 + 180\omega_1^4 \omega_2^2 - 14\omega_1^3 \omega_2^3 + 180\omega_1^2 \omega_2^4 - \omega_1 \omega_2 \cos \alpha \left(120m^4 \right. \right. \\
& \left. \left. + \omega_1 \omega_2 (240\omega_1^2 - 17\omega_1 \omega_2 + 240\omega_2^2) \right) + 2\omega_1^2 \omega_2^2 (30\omega_1^2 - \omega_1 \omega_2 + 30\omega_2^2) \cos 2\alpha - \omega_1^3 \omega_2^3 \cos 3\alpha \right] \\
& - 2 \csc^2 \frac{\alpha}{2} \log \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \left[16m^4 \omega_1^2 - 360m^4 \omega_1 \omega_2 - 128m^2 \omega_1^3 \omega_2 \right. \\
& + 16m^4 \omega_2^2 + 160m^2 \omega_1^2 \omega_2^2 - 180\omega_1^4 \omega_2 - 128m^2 \omega_1 \omega_2^3 + 14\omega_1^3 \omega_2^3 - 180\omega_1^2 \omega_2^4 \\
& \left. + \omega_1 \omega_2 \cos \alpha \left(-120m^4 + 128m^2 (\omega_1^2 - \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2) + \omega_1 \omega_2 (240\omega_1^2 - 17\omega_1 \omega_2 + 240\omega_2^2) \right) \right. \\
& \left. \left. - 2\omega_1^2 \omega_2^2 (16m^2 + 30\omega_1^2 - \omega_1 \omega_2 + 30\omega_2^2) \cos 2\alpha + \omega_1^3 \omega_2^3 \cos 3\alpha \right] \right\}
\end{aligned}$$

Para comprobar que es correcto el resultado que obtuvimos, haremos un chequeo al igual que en el caso de la corrección dinámica. Consideramos el caso $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $\alpha = \pi$. Recordemos que en este caso el término $|\mathcal{A}|_{LI}$ se expresó en términos de momentos tildados y eso generó correcciones explícitas en la violación de Lorentz (ecuación (4.143)). Al expresar a dicho término como función de la variable ξ obtuvimos la parte usual invariante de Lorentz más correcciones a primer orden. A estas correcciones las separamos en dos partes, ecuación (4.178).

Al tomar el límite $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $\alpha = \pi$ para las correcciones de la ecuación (4.178) que denotamos con $f(\xi)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{-16\pi C}{\omega \xi^3 (2\omega - \xi)^3} \left(-8\omega^2 (\omega - \xi)^2 (2\omega - \xi) \xi + 2m^4 (8\omega^2 - 10\omega \xi + 5\xi^2) \right. \\
& \left. + m^2 \xi (-16\omega^3 + 28\omega^2 \xi - 20\omega \xi^2 + 5\xi^3) \right) \quad (4.182)
\end{aligned}$$

Al integrar, evaluar en los límites de integración $w(1 \pm \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}})$ y simplificando, obtenemos

$$\pi C \left[\frac{32}{m^2 \omega^4} \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} (-m^4 + 4\omega^4) + \frac{16}{\omega^6} (m^4 + m^2 \omega^2 + 4\omega^4) \log \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}} \right] \quad (4.183)$$

Para las otras correcciones a primer orden de la ecuación (4.178), al tomar el límite $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $\alpha = \pi$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{8C}{(2\omega - \xi)^3 \xi^3} \left(2m^4(8\omega^2 - 8\omega\xi + 3\xi^2) + m^2\xi(-16\omega^3 + 24\omega^2\xi - 14\omega\xi^2 + 3\xi^3) \right. \\ & \left. + 2\omega^2\xi(-8\omega^3 + 18\omega^2\xi - 13\omega\xi^2 + 3\xi^3) \right) \end{aligned} \quad (4.184)$$

Al integrar, evaluar en los límites de integración $w(1 \pm \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}})$ y simplificando,

$$\pi C \left[\frac{6}{m^2\omega^4} \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} (m^4 - 2\omega^4) - \frac{3}{\omega^6} (m^4 + 2\omega^4) \log \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}} \right] \quad (4.185)$$

Sumando las expresiones que obtuvimos en las ecuaciones (4.183) y (4.185) obtenemos

$$C\pi \left[\frac{2}{m^2\omega^4} \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} (-13m^4 + 58\omega^4) + \frac{1}{\omega^6} (13m^4 + 16m^2\omega^2 + 58\omega^4) \log \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}} \right] \quad (4.186)$$

Esta expresión es la misma que se obtiene para las correcciones a primer orden al tomar el límite $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $\alpha = \pi$ en la ecuación (4.181).

4.4.3. Sección eficaz total

La sección eficaz total está dada por la suma de las correcciones dinámica y cinemática:

$$\sigma_T = \Delta\sigma_D + \Delta\sigma_K \quad (4.187)$$

Así

$$\begin{aligned} \sigma_T = & \frac{8\pi e^4}{\omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)^2} \left\{ \left[1 - 4C \left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{(1 - \cos\alpha)^2} \right) \right] \times \right. \\ & \left[\frac{1}{\omega_1\omega_2} (-2m^2 - \omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha)) \sqrt{1 - s} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\omega_1^2\omega_2^2} (-\omega_1\omega_2(2m^2 + \omega_1\omega_2) + \omega_1^2\omega_2^2 \cos\alpha + m^4 \csc^2 \frac{\alpha}{2}) \log \frac{1 - \sqrt{1 - s}}{1 + \sqrt{1 - s}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.188)$$

$$\begin{aligned}
& + C \frac{2\pi e^4}{\omega_1^4 \omega_2^4 (1 - \cos \alpha)^3} \left\{ - \frac{4\omega_1 \omega_2}{m^2} \sqrt{1-s} \right. \\
& \times \left[-8m^4(w_1^2 + w_2^2) + 312m^4\omega_1\omega_2 + 16m^2(\omega_1^3\omega_2 + \omega_1\omega_2^3) - 10m^2\omega_1^2\omega_2^2 + 14\omega_1^3\omega_2^3 \right. \\
& - 174(\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1^4\omega_2^2) + \omega_1\omega_2 \cos \alpha \left(104m^4 - 8m^2(2\omega_1^2 - \omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2) + \omega_1\omega_2(232\omega_1^2 \right. \\
& \left. \left. - 17\omega_1\omega_2 + 232\omega_2^2) \right) + 2\omega_1^2\omega_2^2 \cos 2\alpha(m^2 - 29\omega_1^2 + \omega_1\omega_2 - 29\omega_2^2) + \omega_1^3\omega_2^3 \cos 3\alpha \left. \right] \\
& + 4 \csc^2 \frac{\alpha}{2} \log \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \left[-4m^4(w_1^2 + w_2^2) + 156m^4\omega_1\omega_2 \right. \\
& + 56m^2(\omega_1^3\omega_2 + \omega_1\omega_2^3) - 65m^2\omega_1^2\omega_2^2 + 81(\omega_1^4\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_2^4) - 4\omega_1\omega_2 \cos \alpha \left(-13m^4 \right. \\
& \left. \left. + 27\omega_1\omega_2(w_1^2 + w_2^2) + m^2(14\omega_1^2 - 13\omega_1\omega_2 + 14\omega_2^2) \right) + \omega_1^2\omega_2^2 \cos 2\alpha(13m^2 + 27(\omega_1^2 + \omega_2^2)) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

El primer párrafo de la expresión para σ_T corresponde al caso invariante de Lorentz más un reescalamiento por C . Los siguientes dos párrafos son resultado de sumar y simplificar las correcciones dinámica y cinemática.

Notamos que la corrección a la sección eficaz es parecida en la parte funcional a la sección eficaz del caso invariante de Lorentz, en el sentido de que aparecen los términos

$$\sqrt{1-s} \quad \text{y} \quad \log \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}$$

multiplicados por una función racional $f(\omega_1, \omega_2)$. Además la corrección es simétrica ante el intercambio $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$, al igual que en el caso invariante de Lorentz. La diferencial crucial radica en que en el caso usual las frecuencias aparecen elevadas a la misma potencia en cada término mientras que en el caso de la violación de Lorentz hay términos en los que las frecuencias aparecen elevadas a potencias distintas. Podríamos decir que esta es una indicación de la presencia de una violación a la invariancia de Lorentz, pues son estos términos los que dominan el comportamiento de la corrección a la sección eficaz. Resulta que mientras más difieran entre sí ω_1 y w_2 la corrección se hace más grande.

Para ver el comportamiento de la sección eficaz total en el caso no invariante de Lorentz, vamos a mostrar algunas gráficas.

En la figura 4.1 se muestra la sección eficaz total en el caso no invariante de Lorentz para un fotón con energía 10^2eV , y ángulos de incidencia entre los fotones de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Rojo), y de $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Naranja). En este caso la corrección a la sección eficaz $\Delta\sigma$ es del orden de 10^{-14}mb (ver figura 4.2), 6 ordenes

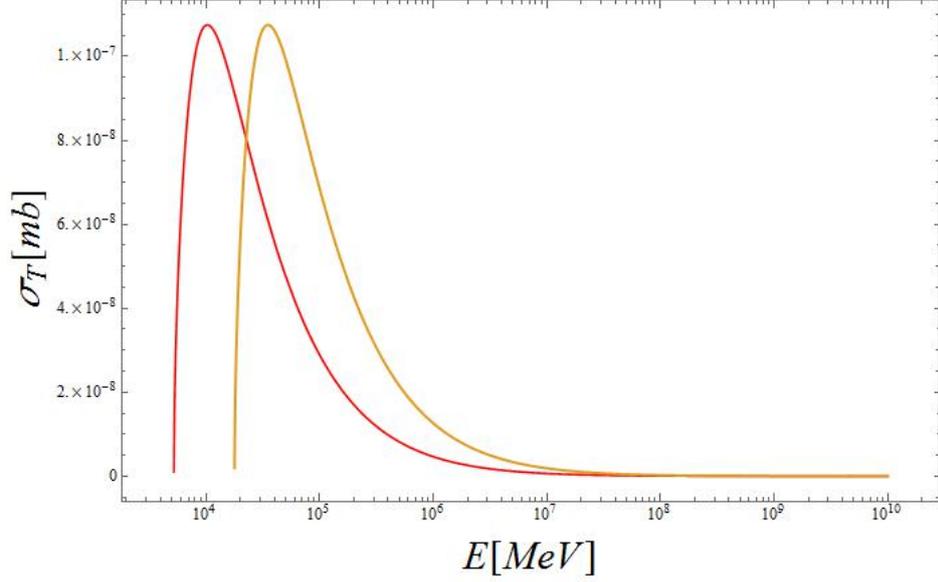


Figura 4.1: Sección eficaz para el proceso de Breit-Wheeler en el caso no invariante de Lorentz. $w_2 = 10^2 eV$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Rojo), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Naranja), $C = 10^{-22}$

de magnitud por debajo de la sección eficaz en el caso invariante de Lorentz (ver figura 3.2). En la figura 4.3 se muestra el cociente entre la corrección a primer orden en la violación de Lorentz y la sección eficaz total para este caso: $\omega_2 = 10^2 eV$, $\alpha = \pi$ (Azul), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Naranja), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Verde), y $C = 10^{-22}$. Vemos que dicho cociente es mucho menor que 1 para valores de la energía menores a 1000 TeV, por lo que la aproximación que hicimos es válida dentro de dicho rango de energías.

En la figura 4.4 se muestra la sección eficaz total en el caso no invariante de Lorentz para un fotón con energía $10^{-2} eV$ (fondo extragaláctico), y ángulos de incidencia entre los fotones de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Rojo), y de $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Naranja). Notamos que para energías en el rango de $10^9 MeV$ y $10^{10} MeV$, la sección eficaz total tiene un comportamiento similar al caso invariante de Lorentz (ver figura 3.2). Para este rango de energías la corrección a la sección eficaz es del orden de $10^{-10} mb$ (ver figura 4.5), dos ordenes de magnitud más chica que la sección eficaz del caso invariante de Lorentz. Notamos que el efecto de hacer más pequeño el ángulo, de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a $\alpha = \frac{\pi}{4}$, es elevar el umbral para el cual se producen pares electrón-positrón. Además, notamos que la corrección crece más rápido como función de la energía (ω_1) para el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ que para el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Para energías arriba de $10^{10} MeV$ la corrección se vuelve del orden de la sección eficaz en el caso invariante. Esto lo podemos comprobar

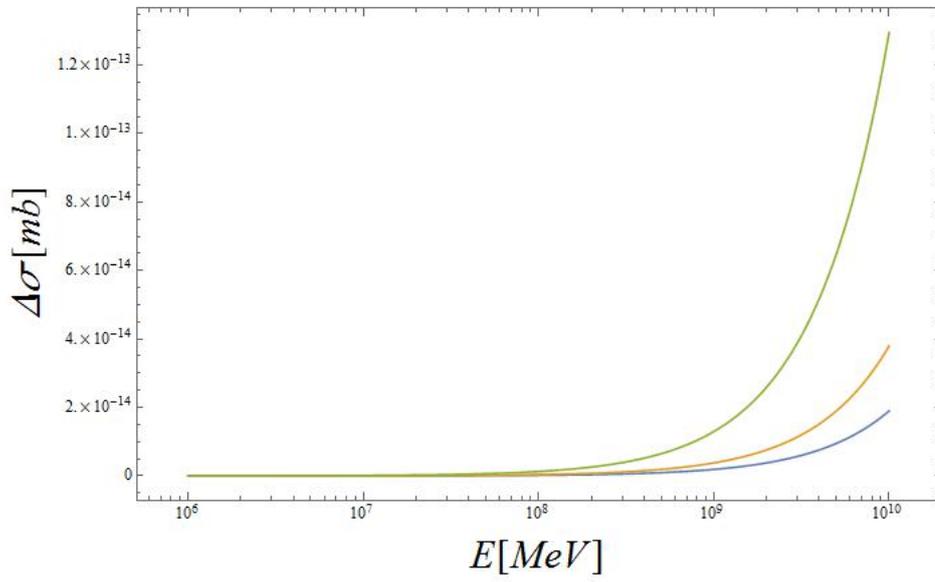


Figura 4.2: Gráfica de las correcciones a primer orden en el parámetro de violación de Lorentz. $w_2 = 10^2 eV$, $\alpha = \pi$ (Azul), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Naranja), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Verde), $C = 10^{-22}$

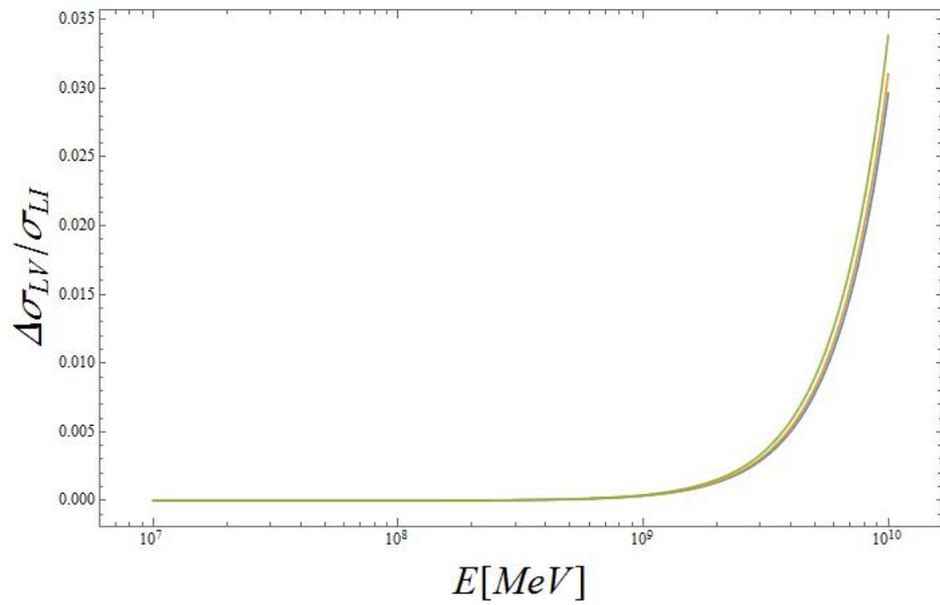


Figura 4.3: Gráfica de la razón entre la correcciones a primer orden en el parámetro de violación de Lorentz y la sección eficaz con invariancia de Lorentz. $w_2 = 10^2 eV$, $\alpha = \pi$ (Azul), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Naranja), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Verde), $C = 10^{-22}$

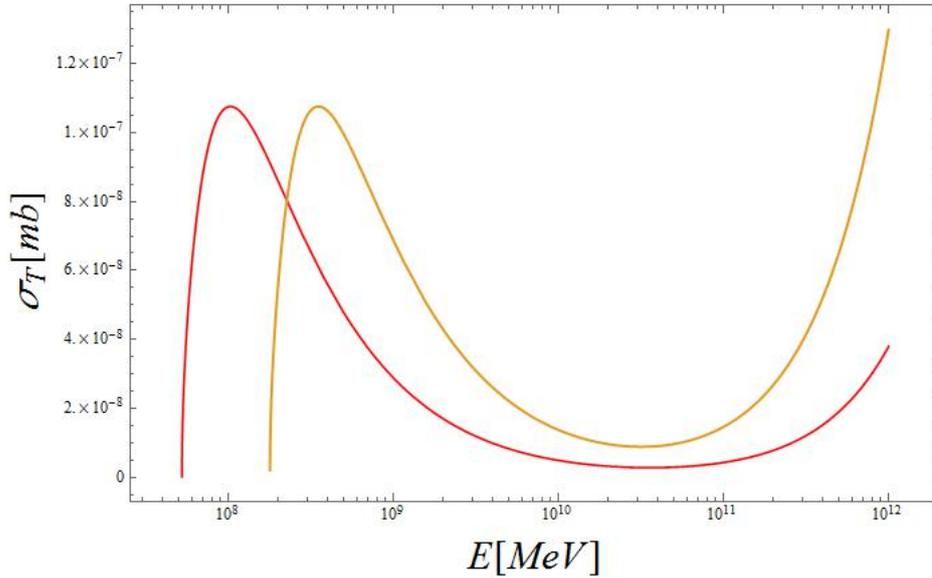


Figura 4.4: Sección eficaz para el proceso de Breit-Wheeler en el caso no invariante de Lorentz. $w_2 = 10^{-2}eV$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Rojo), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Naranja), $C = 10^{-22}$

en la figura 4.6 que muestra el cociente entre la sección eficaz con violación de Lorentz y la sección eficaz invariante de Lorentz para este caso. En esta figura también se observa que dicho cociente crece más rápido, como función de la energía (ω_1), al disminuir el ángulo: $\alpha = \pi$ (Azul), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Naranja) ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Verde). Observamos también en este caso que dicho cociente es mucho menor que 1 para valores de la energía menores a 1000 TeV, por lo que la aproximación que hicimos es válida dentro de dicho rango de energías.

En las figuras 4.7 y 4.8 se muestra la sección eficaz total en el caso no invariante de Lorentz para un fotón con energía $10^{-4}eV$ (radiación de fondo CMB), y ángulos de incidencia entre los fotones de $\alpha = \frac{\pi}{2}$, y $\alpha = \frac{\pi}{4}$ respectivamente. Observamos que en ambos casos las correcciones a primer orden en la violación de Lorentz se vuelven del mismo orden que la sección eficaz en el caso invariante de Lorentz. Observamos que los efectos de la violación de Lorentz en este caso se presentan para energías del orden de 10000 TeV. En la actualidad no se conoce ninguna fuente de rayos gamma que genere fotones de tan alta energía, por lo que dichos efectos no podrían ser comprobados experimentalmente.

Es interesante notar que la presencia de los términos $\omega^p \omega^q$ ($p \neq q$ enteros)

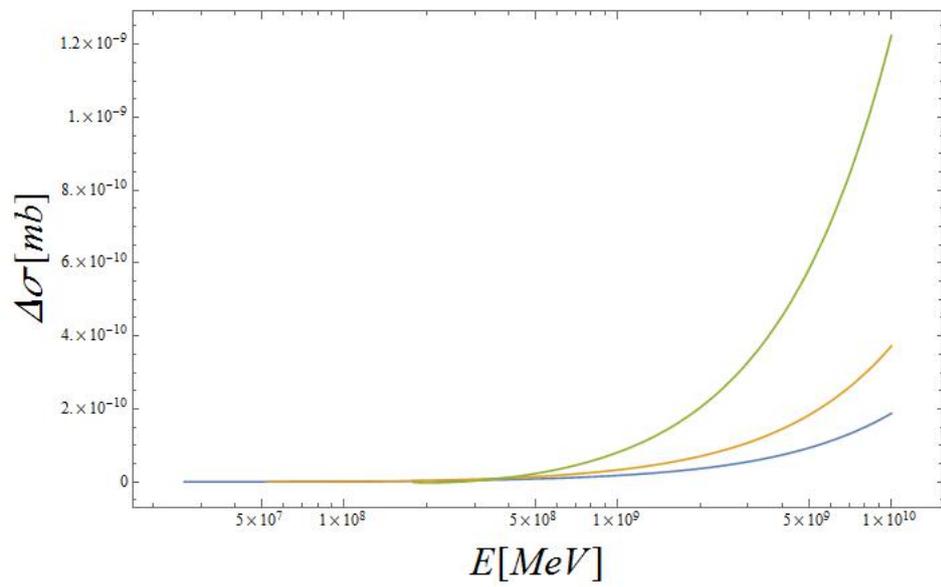


Figura 4.5: Gráfica de las correcciones a primer orden en el parámetro de violación de Lorentz. $w_2 = 10^{-2}eV$, $\alpha = \pi$ (Azul), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Naranja), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Verde), $C = 10^{-22}$

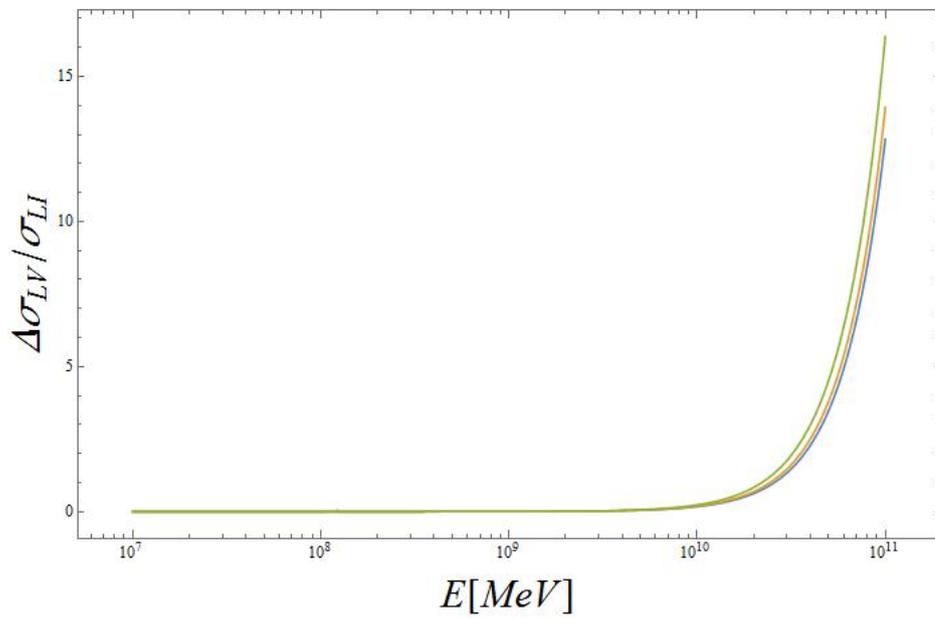


Figura 4.6: Gráfica de la razón entre las correcciones a primer orden en el parámetro de violación de Lorentz y la sección eficaz con invariancia de Lorentz. $w_2 = 10^{-2}eV$, $\alpha = \pi$ (Azul), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Naranja), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Verde), $C = 10^{-22}$

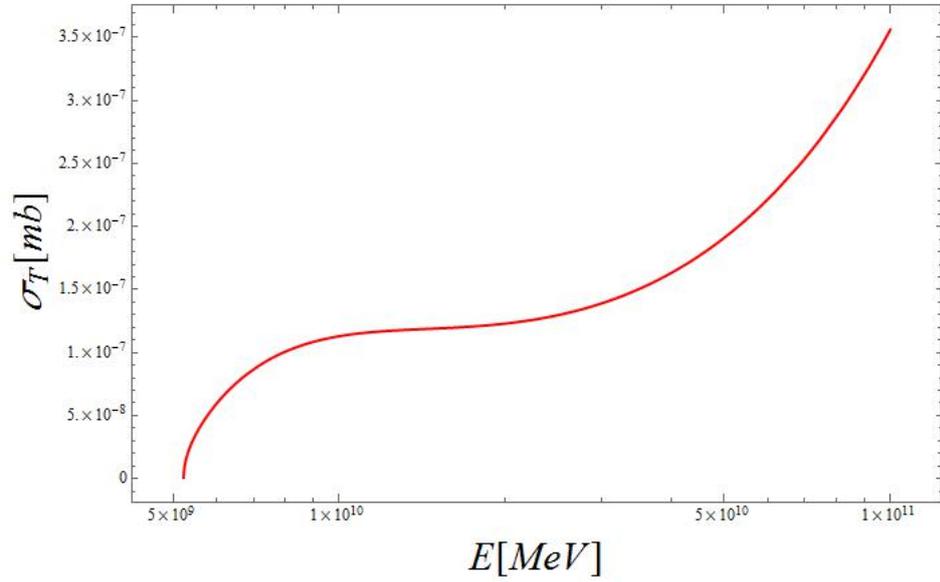


Figura 4.7: Sección eficaz para el proceso de Breit-Wheeler en el caso no invariante de Lorentz. $w_2 = 10^{-4}eV$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $C = 10^{-22}$

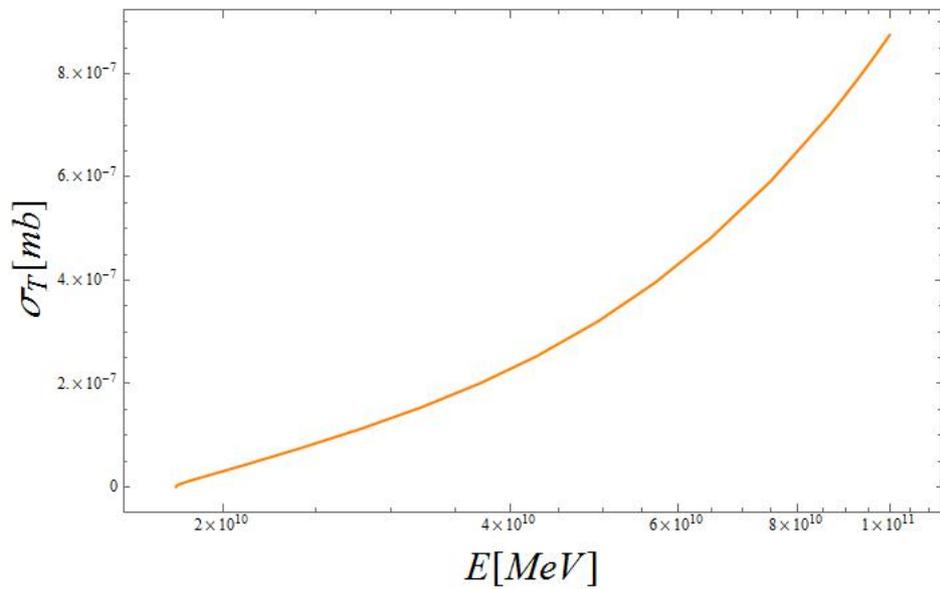


Figura 4.8: Sección eficaz para el proceso de Breit-Wheeler en el caso no invariante de Lorentz. $w_2 = 10^{-4}eV$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $C = 10^{-22}$

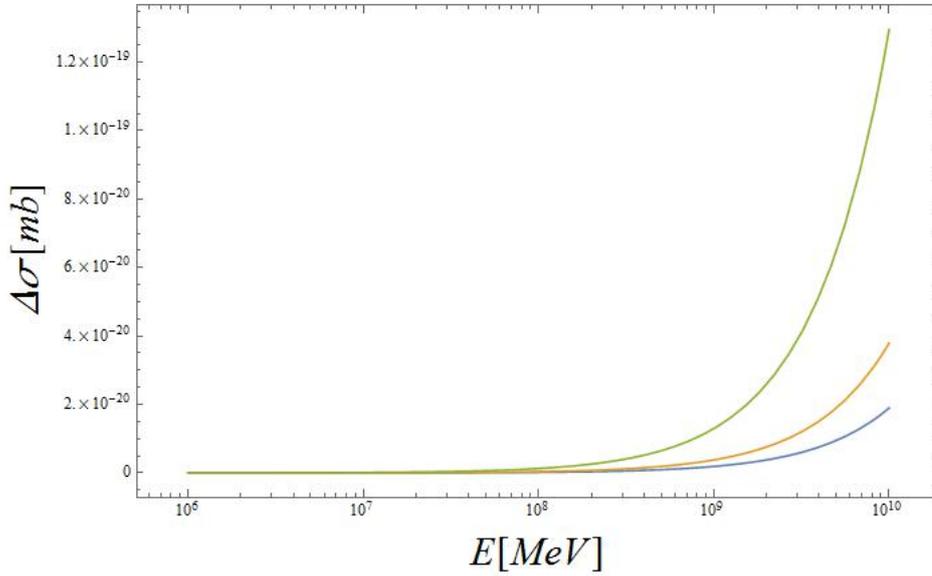


Figura 4.9: Gráfica de las correcciones a primer orden en el parámetro de violación de Lorentz. $w_2 = 10^8 eV$, $\alpha = \pi$ (Azul), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Naranja), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Verde), $C = 10^{-22}$

es responsable de que el efecto de la violación de Lorentz sea tan grande cuando ω_1 es un fotón de alta energía (rayo gamma), y ω_2 es un fotón de baja energía (microondas o infrarrojo). Si hacemos que la diferencia en energía de ambas frecuencias sea menor, el efecto de la violación de Lorentz sea va haciendo más pequeño. Por ejemplo, en la figura 4.9 muestra la gráfica de las correcciones a primer orden en el parámetro de violación de Lorentz, para $w_2 = 10^8 eV$ y ángulos de incidencia: $\alpha = \pi$ (Azul), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Naranja), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Verde). En este caso las correcciones son del orden de 10^{-20} , que son 12 ordenes de magnitud por debajo del caso invariante de Lorentz.

Capítulo 5

Conclusiones

Se calculó la sección eficaz total para el proceso de Breit-Wheeler utilizando un modelo de QED que viola explícitamente la invariancia de Lorentz, dicho modelo fue desarrollado por Kostelecky et al. y se conoce comunmente con el nombre de modelo estándar extendido (SME por sus siglas en inglés). El cálculo se hizo a primer orden en el parámetro de violación de Lorentz($c^{\mu\nu}$), el cual en general corresponde a una matriz real de 4×4 con traza cero; dicho parámetro, es a lo más del orden de $\frac{m_e}{M_P}$.

Para poder llevar a cabo dicho cálculo utilizamos como referencia el cálculo para el mismo proceso en el modelo invariante de Lorentz. Usualmente, el cálculo en el caso invariante de Lorentz se hace en el marco de referencia del centro de momento y mediante una transformación de Lorentz se obtiene el resultado deseado en otro marco de referencia. Sin embargo, en el caso de una violación de Lorentz, el parámetro asociado a la violación de Lorentz es distinto en cada marco de referencia, es decir, dos observadores en dos marcos de referencia distintos experimentarían de manera diferente la violación a la invariancia de Lorentz. Por esta razón, el cálculo de la sección eficaz se realizó en una marco de referencia que fuese lo más general posible. Para dicho marco de referencia, los fotones inciden formando un ángulo α con momentos k_1 y k_2 respectivamente. Para facilitar el cálculo, se escogió que el parámetro de la violación de Lorentz fuese diagonal en el marco de referencia en cuestión.

Para obtener la amplitud al cuadrado que corresponde al proceso de Breit-Wheeler en el modelo estándar extendido usamos el desarrollo perturbativo de Dyson a segundo orden tomando como referencia el caso invariante de Lorentz, tomando en cuenta las respectivas normalizaciones y relaciones canónicas de conmutación de los campos. Utilizamos el propagador que corresponde al inverso de la ecuación de Dirac modificada para el modelo estándar extendido.

Una vez que se calculó la amplitud al cuadrado a primer orden en la violación de Lorentz, procedimos a calcular las respectivas trazas y obtuvimos una ex-

presión en función de los momentos del positrón, el electrón y los momentos de los fotones incidentes, que contiene las correcciones a primer orden en la violación de Lorentz además de la parte invariante de Lorentz. Hay que señalar que en este punto del cálculo aún no se escoge un marco de referencia. Dicho esto, para poder comparar con un resultado previo calculado por Kostelecky y Colladay, se obtuvo la expresión de la amplitud al cuadrado a primer orden en la violación de Lorentz en el marco de referencia del centro de momento. Encontramos que nuestro cálculo para la amplitud al cuadrado era consistente con el resultado encontrado por Kostelecky y Colladay salvo un reescalamiento de la parte invariante de Lorentz. Cabe mencionar que las correcciones explícitas en el parámetro de violación de Lorentz son las dominantes y los reescalamientos no contienen dinámica alguna.

Para calcular la sección eficaz se escogió el marco de referencia ya mencionado en el que los fotones inciden con un ángulo α , tomando en cuenta la elección particular en que el parámetro de violación de Lorentz es diagonal. La motivación física detrás de dicha elección fue la siguiente: nos interesa conocer cuál es la probabilidad de que un fotón de alta energía (rayo gamma) interactúe con un fotón de baja energía (e.g. fotón de la radiación de fondo) en el modelo de QED del modelo estándar extendido, con la idea de encontrar rastros de una posible violación de Lorentz en el espectro de rayos gamma para energía muy altas (mayores a 100 TeV).

El cálculo de la sección eficaz se dividió en dos partes: una corrección dinámica que contenía todas las correcciones explícitas a primer orden en la violación de Lorentz, y una corrección cinemática que consideraba el efecto la relación de dispersión modificada sobre la amplitud al cuadrado del caso invariante de Lorentz.

Una vez obtenidas dichas correcciones, se sumaron para obtener la sección eficaz total. Encontramos que las correcciones a la sección eficaz para el proceso de Breit-Wheeler en el SME son muy similares al caso invariante en la forma funcional, ya que aparecen los términos $\sqrt{1-s}$ y $\log \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}$ multiplicados por una función racional $f(\omega_1, \omega_2)$. Además, la corrección es simétrica ante el intercambio $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$ al igual que en el caso invariante de Lorentz. La diferencial crucial radica en que en el caso usual las frecuencias aparecen elevadas a la misma potencia en cada término ($\omega^p \omega^q$ con $p = q$ enteros), mientras que en el caso de la violación de Lorentz hay términos en los que las frecuencias aparecen elevadas a potencias distintas ($\omega^p \omega^q$ con $p \neq q$ enteros). Se piensa que esta asimetría en las frecuencias es la señal de una violación de Lorentz. Sería interesante calcular la sección eficaz para otros procesos de QED usando el SME, y comprobar si aparecen dichos términos.

Se graficó la sección eficaz total para un fotón con energía 10^2 eV, y ángulos de incidencia entre los fotones de $\alpha = \frac{\pi}{2}$, y de $\alpha = \frac{\pi}{4}$. En este caso la corrección a la sección eficaz $\Delta\sigma$ es del orden de 10^{-14} mb, 6 ordenes de magnitud

por debajo de la sección eficaz en el caso invariante de Lorentz. El efecto de hacer más pequeño el ángulo, de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a $\alpha = \frac{\pi}{4}$ es elevar el umbral para el cual se producen pares electrón-positrón, al igual que en el caso invariante de Lorentz.

Posteriormente, se graficó la sección eficaz total para un fotón del fondo extragaláctico (10^{-2} eV), con un ángulos de incidencia $\alpha = \frac{\pi}{2}$, y $\alpha = \frac{\pi}{4}$ respectivamente. Encontramos que las correcciones a primer orden en la violación de Lorentz eran válidas para un rango de energías entre 10^9 MeV y 10^{10} MeV. En este rango de energías, la corrección es del orden de 10^{-10} , dos ordenes de magnitud por debajo del caso invariante de Lorentz. Para energías mayores, la corrección se vuelve del orden de la sección eficaz del caso invariante de Lorentz y la aproximación ya no es válida. Observamos también que el efecto de hacer más pequeño el ángulo, de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a $\alpha = \frac{\pi}{4}$, es elevar el umbral para el cual se producen pares electrón-positrón. Además, notamos que la corrección $\Delta\sigma$ crece más rápido como función de la energía (ω_1) para el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ que para el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Para estos casos se graficó el cociente entre las correcciones a primer orden en la violación de Lorentz y la sección eficaz invariante de Lorentz. Observamos que en ambos casos el cociente es mucho menor que 1 para energías menores a 1000 TeV, por lo que la aproximación es buena en este rango de energías.

También se graficó la sección eficaz total para un fotón del fondo de radiación CMB (10^{-4} eV), con ángulos de incidencia $\alpha = \frac{\pi}{2}$, y $\alpha = \frac{\pi}{4}$ respectivamente. En este caso, la corrección resulta ser del orden de la sección eficaz del caso invariante de Lorentz en el rango de energías entre 10^9 MeV y 10^{10} MeV, y también para energías mayores. En este caso la aproximación no es buena. Sin embargo, los efectos de la violación de Lorentz en este caso se presentan para energías arriba del orden de 10000 TeV. En la actualidad no se conoce ninguna fuente de rayos gamma que genere fotones de tan alta energía, por lo que dichos efectos no podrían ser comprobados experimentalmente, y podrían no existir en la naturaleza.

Se observó que los términos $\omega^p\omega^q$ ($p \neq q$ enteros) son responsables de que el efecto de la violación de Lorentz sea tan grande cuando ω_1 es un fotón de alta energía (rayo gamma), y ω_2 es un fotón de baja energía (microondas o infrarrojo). Si hacemos que la diferencia en energía de ambas frecuencias sea menor, el efecto de la violación de Lorentz sea va haciendo más pequeño. Para comprobar esto se graficó la sección eficaz para un fotón con frecuencia $\omega_2 = 10^8$ eV, y ángulos de incidencia: $\alpha = \pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. En este caso las correcciones a primer orden en la violación de Lorentz son del orden de 10^{-20} , que corresponde a 12 ordenes de magnitud por debajo del caso invariante de Lorentz.

Bibliografía

- ¹ V. A. Kostelecky and D. Colladay, *Phys. Rev. D*55, (1997) 6760-6774.
- ² V. A. Kostelecky and R. Lehnert, *Phys. Rev. D*63, (2001) 065008.
- ³ V. A. Kostelecky and N. Russell, *Rev. Mod. Phys.* 83, (2001) 11-31.
- ³ W. Atwood, et al., *Astrophys. Journal* 697, (2009) 1071.
- ⁴ V. A. Kostelecky and D. Colladay, *Phys. Lett. B*511, (2001) 209-217.
- ⁵ M. Fairbairn, A. Nilson, R. White, *JCAP* 1406, (2014), 005.
- ⁶ M. Thompson, *Modern Particle Physics*, Cambridge University Press (2013).
- ⁷ I.J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, *Gauge Theories in particle physics* Vol. 1, IoP (2003).
- ⁸ A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Dover .
- ⁹ M. D. Schwartz, *Quantum field Theory and the standar model*, Cambridge University Press (2014).
- ¹⁰ Landau and Lifshitz, *Quantum Electrodynamics*, 2da. Edición Pergamon Press (1984)
- ¹¹ V. A. Kostelecky and J. D. Tasson, *Phys. Rev. D*83, (2011) 016013.
- ¹² M. Cambiaso, R. Lehnert, R. Potting, *Phys. Rev. D*90, (2014) 065003

Índice general

1. Introducción	3
2. Conceptos Preliminares	5
2.1. Regla de oro de Fermi	5
2.2. Fórmula de Dyson	9
2.2.1. Esquema de interacción	9
2.2.2. Matriz \mathcal{S} y fórmula de Dyson	10
2.3. Sección Eficaz	12
3. El proceso de Breit-Wheeler	17
3.1. Cálculo de la amplitud al cuadrado	17
3.2. Cálculo de la sección eficaz	30
4. El proceso de Breit-Wheeler para el caso no invariante de Lorentz	41
4.1. Modelo no invariante de Lorentz para QED	41
4.1.1. Cuantización del campo de Dirac para el caso no invariante de Lorentz	42
4.1.2. El propagador de Feynmann	47
4.2. Cálculo de la amplitud al cuadrado	48
4.3. Cálculo en el centro de momento para el límite ultrarelativista	62
4.4. Sección eficaz para el modelo no invariante de Lorentz	64
4.4.1. Corrección dinámica	66
4.4.2. Corrección cinemática	72
4.4.3. Sección eficaz total	82
5. Conclusiones	93
Bibliografía	97