UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

CLASES CORRECTAS DE MÓDULOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ POZO MARTÍNEZ

DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

MÉXICO, D. F.
12 de marzo del 2016

Índice general

Introducción

En este trabajo estudiamos las condiciones bajo las cuales ciertas clases de módulos tienen la propiedad de ser monocorrectos o epicorrectos. Diremos que, dado un anillo R, una clase C de R-módulos es monocorrecta si para cualesquiera $M, N \in$ C la existencia de monomorfismos $M \longrightarrow N$ y $N \longrightarrow M$ implica que $M \cong N$. Asimismo, diremos que la clase C de R-módulos es epicorrecta si para cualesquiera $A, B \in$ C la existencia de epimorfismos $A \longrightarrow B$ y $B \longrightarrow A$ implica que $A \cong B$.

Esta tesis está basada en el artículo *Correct classes of Modules* del matemático Robert Wisbauer, cuyos resultados son una extensión a módulos de aquellos de Rososhek para anillos.

En la medida de lo posible, intentamos que este trabajo sea autocontenido por lo que todos los resultados importantes demostrados aquí son precedidos por aquellos resultados esenciales para la comprensión de éstos últimos. Asimismo, definimos todos aquellos conceptos que consideramos particulares de esta área, y algunos otros a manera de recordatorio por lo que, en general, el lector no tendrá que referirse a algún otro texto para la comprensión de los mismos.

Capítulo 1

Módulos correctos en R-Mod.

1.1. Preliminares.

Teorema 1 *Sean M un R-módulo y $f \in End_R(M)$.*

1. *Si M es artiniano o M es finitamente generado con condición de cadena descendente en submódulos cíclicos, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Im\ f^n + Nuc\ f^n = M$. Si f es monomorfismo, entonces f es isomorfismo.*

2. *Si M es neteriano, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Im\ f^n \cap Nuc\ f^n = 0$. Si f es epimorfismo, entonces f es isomorfismo.*

3. *Si M es artiniano y neteriano, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = Im\ f^n \oplus Nuc\ f^n$ y las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   a) *f es monomorfismo.*

   b) *f es epimorfismo.*

   c) *f es isomorfismo.*

Demostración:

(1) Si M es artiniano, la cadena descendente $Im\ f \supset Im\ f^2 \supset \cdots$ se estaciona después de un número finito de pasos y podemos encontrar una $n \in \mathbb{N}$ con $Im\ f^n = Im\ f^{2n}$. Para $x \in M$, se tiene que $f^n(x) \in Im\ f^{2n}$, es decir, $f^n(x) = f^{2n}(y)$, para alguna $y \in M$ y $x = f^n(y) + (x - f^n(y)) \in Im\ f^n + Nuc\ f^n$. Si $Nuc\ f^n = 0$, claramente f^n, y por lo tanto f, es un epimorfismo.

Si M es finitamente generado con condición de cadena descendente en submódulos cíclicos, entonces M también tiene condición de cadena descendente en submódulos finitamente generados (Wisbauer, 31.8). Luego, la cadena descendente $M \supset f(M) \supset f^2(M) \supset \cdots$ se estaciona después de un número finito de pasos y el argumento es como el anterior.

(2) La cadena $Nuc\ f \subset Nuc\ f^2 \subset \cdots$ se estaciona después de un número finito de pasos, es decir, $Nuc\ f^n = Nuc\ f^{2n}$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Para $x \in Im\ f^n \cap Nuc\ f^n$ existe $y \in M$ tal que $f^n(y) = x$. Como $0 = f^n(x) = f^{2n}(y)$ se tiene que $x = f^n(y) = 0$. Si f es epimorfismo, entonces $M = f(M) = f^n(M)$ y entonces $Nuc\ f = 0$.

(3) Es consecuencia inmediata de **(1)** y **(2)**. ■

1.2. Módulos monocorrectos.

Definición 1.2.1 *Sean M y N dos R-módulos. Diremos que M y N son* ***monoequivalentes*** *si existen monomorfismos $M \rightarrowtail N$ y $N \rightarrowtail M$. Cuando M y N sean monoequivalentes, lo denotaremos como $M \cong^m N$.*

Definición 1.2.2 *Sea M un R-módulo. Diremos que M es* ***monocorrecto*** *si para cualquier R-módulo N, $M \cong^m N$ implica $M \cong N$.*

Teorema 2 *Sea M un R-módulo. Si M es artiniano, entonces M es monocorrecto.*

Demostración:

Sean $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow M$ monomorfismos. Entonces, $g \circ f$ es un endomorfismo inyectivo de M. Como M es artiniano, por el teorema 1 se tiene que $g \circ f$ es un automorfismo de M. Luego, g es suprayectivo. Por lo tanto, $M \cong N$.■

Definición 1.2.3 *Decimos que un R-módulo M es* ***uniserial*** *si el conjunto de sus submódulos está linealmente ordenado por la inclusión.*

Definición 1.2.4 *Decimos que un R-módulo M es* ***hueco*** *si cada submódulo propio es superfluo en M.*

Teorema 3 *Sea M un R-módulo. Si los endomorfismos inyectivos de M son epimorfismos, entonces M es monocorrecto.*

Demostración:

Sean f y g como en el Teorema 2 y ${}_RM \neq 0$. Nótese que $N \neq 0$. Entonces, por hipótesis $g \circ f$ es un isomorfismo de donde f es un isomorfismo. Por lo tanto, $M \cong N$.$\blacksquare$

1.3. Módulos epicorrectos.

Definición 1.3.1 *Sean My N dos R-módulos. Diremos que M y N son* ***epiequivalentes*** *si existen epimorfismos $M \twoheadrightarrow N$ y $N \twoheadrightarrow M$. Cuando M y N sean epiequivalentes, denotaremos esto como $M \cong^e N$.*

Definición 1.3.2 *Sea M un R-módulo. Diremos que M es* ***epicorrecto*** *si para cualquier R-módulo N, $M \cong^e N$ implica $M \cong N$.*

Teorema 4 *Si un R-módulo M es neteriano, entonces es epicorrecto.*

Demostración:

Se demuestra dualmente al Teorema 2, pues los endomorfismos suprayectivos de módulos neterianos son automorfismos, por el Teorema 1.$\blacksquare$

Teorema 5 *Si los endomorfismos suprayectivos de un R-módulo M son monomorfismos, entonces M es epicorrecto.*

Demostración:

Se demuestra dualmente al teorema 3.$\blacksquare$

1.4. Módulos monocorrectos y epicorrectos.

Teorema 6 *Si un R-módulo M es neteriano y autoinyectivo, entonces M es monocorrecto y epicorrecto.*

Demostración:

Sea M neteriano y autoinyectivo. M neteriano $\Rightarrow M$ epicorrecto, como se vio en el Teorema 4. Sea $f \in End_R(M)$ inyectivo. Entonces, $f(M) \cong M$ es
M-inyectivo, pues M es autoinyectivo, por lo que existe $C \leq M$ tal que $M = f(M) \oplus C$. Ahora, $f(M) \cong M \;\Rightarrow\; f(M) \trianglelefteq M \;\Rightarrow\; C = 0 \;\Rightarrow\; M =$

$f(M) \Rightarrow f$ es suprayectivo . Por lo tanto, todo endomorfismo inyectivo de M es un automorfismo. Por lo tanto, M es monocorrecto (mismo argumento que en el teorema 2). ■

Teorema 7 *Si un R-módulo M es artiniano y autoproyectivo, entonces M es monocorrecto y epicorrecto.*

Demostración:

Sea M artiniano y autoproyectivo. M artiniano $\Rightarrow$ M monocorrecto , como se vio en el Teorema 2. Como M es autoproyectivo, si $g \in End_R(M)$ suprayectivo, entonces existe $h : M \longrightarrow M$ isomorfismo tal que $(id \circ h) = g$. Como id y h son isomorfismos, se tiene que g es un isomorfismo. Por lo tanto, cada endomorfismo suprayectivo de M es un automorfismo. Por lo tanto, se tiene que M es epicorrecto (mismo argumento que en el teorema 4). ■

Teorema 8 *Si un R-módulo M tiene longitud finita, entonces M es monocorrecto y epicorrecto.*

Demostración:

M de longitud finita $\Rightarrow$ M artiniano y neteriano $\Rightarrow$ M monocorrecto y epicorrecto (teoremas 2 y 4). ■

Hacemos la observación de que un R-módulo M semisimple también es monocorrecto y epicorrecto, pero esta afirmación será consecuencia directa de teoremas posteriores por lo que preferimos posponer esta demostración.

Capítulo 2

Clases correctas de módulos en R-Mod.

Definición 2.0.1 *Diremos que una clase* $\mathcal{C}$ *de* R*-módulos es* ***monocorrecta*** *si para cualesquiera* $M, N \in \mathcal{C}$, $M \cong^m N$ *implica* $M \cong N$.

Definición 2.0.2 *Diremos que una clase* $\mathcal{C}$ *de* R*-módulos es* ***epicorrecta*** *si para cualesquiera* $M, N \in \mathcal{C}$, $M \cong^e N$ *implica* $M \cong N$.

2.1. Clases monocorrectas de módulos.

2.1.1. La clase de los módulos artinianos.

Que esta clase de módulos es monocorrecta es claro, del teorema 2.

2.1.2. La clase de los módulos continuos.

Lema 1 *Un módulo* N *es* A*-inyectivo si y sólo si* $\psi(A) \leq N$*, para todo* $\psi \in Hom(E(A), E(N))$.

Demostración:

Como $E(N)$ es inyectivo, basta considerar $\psi \in Hom(A, E(N))$.

$\Rightarrow\rfloor$ Sea $X = \{a \in A \mid \psi(a) \in N\}$. Como N es A-inyectivo, $\psi\mid_X$ se puede extender a $\nu : A \longrightarrow N$. Afrimamos que $N \cap (\nu - \psi)(A) = 0$. Sean $n \in N$ y $a \in A$ tales que $n = (\nu - \psi)(a)$. Entonces, $\psi(a) = (\nu(a) - n) \in N$ lo que implica que $a \in X$. Entonces, $n = \nu(a) - \psi(a) = \psi(a) - \psi(a) = 0$. Así, $N \cap (\nu - \psi)(A) = 0$, luego $(\nu - \psi)(A) = 0$ pues $N \trianglelefteq E(N)$. Por lo tanto,

$\psi(A) = \nu(A) \leq N$.

$\Leftarrow\rfloor$ Sean $X \leq A$ y $\phi : X \longrightarrow N$ un morfismo. Como $E(N)$ es inyectivo, ϕ se puede extender a $\psi : A \longrightarrow E(N)$. Por hipótesis, $\psi(A) \leq N$ por lo que $\psi : A \longrightarrow N$ extiende a ϕ. Por lo tanto, N es A-inyectivo. ■

Corolario 1 *Un módulo Q es autoinyectivo si y sólo si $f(Q) \leq Q$ para cada $f \in End(E(Q))$*

Corolario 2 *Sean A y B inyectivos relativos. Si $E(A) \cong E(B)$, entonces $A \cong B$. De hecho, cualquier isomorfismo $E(A) \longrightarrow E(B)$ se restringe a un isomorfismo $A \longrightarrow B$. Además, A y B son autoinyectivos.*

Demostración:

Sea $g : E(A) \longrightarrow E(B)$ un isomorfismo. Como B es A-inyectivo, se tiene que $g(A) \leq B$. Análogamente, $g^{-1}(B) \leq A$. Así, $B = (gg^{-1})(B) = g(g^{-1}(B)) \leq g(A) \leq B$. Luego, $g(A) = B$ y por lo tanto $g\mid_A : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo.

Como A es B-inyectivo y $B \cong A$, A es autoinyectivo. ■

Definición 2.1.1 *Decimos que un módulo M tiene la* ***propiedad de intercambio (finito)*** *si para cualquier conjunto de índices (finito) I, siempre que*

$$M \oplus N = \bigoplus_{i \in I} A_i$$

para módulos N y A_i, entonces

$$M \oplus N = M \oplus (\bigoplus_{i \in I} B_i)$$

con $B_i \leq A_i$.

Es fácil ver que la propiedad de intercambio (finito) es heredada a sumandos y sumas directas finitas.

Dado que recurrentemente serán utilizadas, es conveniente recordar las propiedades de cerradura de la clase de inyectividad de un módulo.

Teorema 9 *Sean M un R-módulo y $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de R-módulos. Entonces, el producto $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es M-inyectivo si y sólo si cada U_λ es M-inyectivo.*

Demostración:

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M$ una sucesión exacta. Si todos los U_λ son M-inyectivos, entonces, para cada $\mu \in \Lambda$, un diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \\
& \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \arrow[r, "\pi_\mu"] & U_\mu
\end{tikzcd}$$

puede ser extendido conmutativamente por $h_\mu : M \longrightarrow U_\mu$. Así, por la propiedad universal del producto, obtenemos un $h : M \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ con $\pi_\mu h = h_\mu$ y $\pi_\mu h f = h_\mu f = \pi_\mu g$, lo que implica que $hf = g$.

$\Rightarrow\rfloor$ Si $\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es M-inyectivo, entonces un diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & M \\
& U_\mu \arrow[r, "\varepsilon_\mu"] & \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda
\end{tikzcd}$$

puede ser extendido conmutativamente por $\delta : M \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ y $\varepsilon_\mu \gamma = \delta f$ implica que $\gamma = \pi_\mu \varepsilon_\mu \gamma = \pi_\mu \delta f$.■

Teorema 10 *Sea U un R-módulo. Entonces:*

1. *Si $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de R-módulos y U es M-inyectivo, entonces U es también M'-inyectivo y M''-inyectivo.*
2. *Si U es M_λ-inyectivo para una familia $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de R-módulos, entonces U es también $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$-inyectivo.*

Demostración:

(1) Sea U M-inyectivo y veamos que U también es M'-inyectivo. Cada diagrama con renglón exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[d, "f"] \\
& U & M
\end{tikzcd}$$

puede extenderse conmutativamente por algún homomorfismo $M \longrightarrow U$.

Veamos ahora que U es también M''-inyectivo. Si $0 \longrightarrow L \xrightarrow{h} M''$ es exacta, haciendo un pullback obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como U es M-inyectivo, $Hom(\_, U)$ nos da el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom(M'', U) \arrow[r] \arrow[d, "Hom(h,U)"'] & Hom(M, U) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(M', U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom(L, U) \arrow[r] & Hom(P, U) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(M', U) & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Por (Wisbauer, 7.15) tenemos que $Hom(h, U)$ es epimorfismo, es decir, U es M''-inyectivo.

(2) Sean U M_λ-inyectivo, para todo $\lambda \in \Lambda$, $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ y $K \subset M$. Para un morfismo $g : K \longrightarrow U$, consideremos el conjunto

$$\Im = \{h : L \longrightarrow U | K \subset L \subset M \text{ y } h|_K = g\}.$$

Este conjunto está ordenado por

$$[h_1 : L_1 \longrightarrow U] < [h_2 : L_2 \longrightarrow U] \Leftrightarrow L_1 \subset L_2 \text{ y } h_2|_{L_1} = h_1.$$

Claramente, $\Im$ es inductivo y entonces, por el lema de Zorn, tiene un elemento máximo $h_0 : L_0 \longrightarrow U$. Para probar que $M = L_0$ es suficiente probar que $M_\lambda \subset L_0$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Cada diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_0 \cap M_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & M_\lambda \\
 & L_0 \arrow[r, "h_0"] & U
\end{tikzcd}$$

puede, por hipótesis, extenderse conmutativamente por algún morifsmo $h_\lambda : M_\lambda \longrightarrow U$. La asignación

$$h^* : (L_0 + M_\lambda) \longrightarrow U, \; l + m_\lambda \mapsto h_0(l) + h_\lambda(m_\lambda),$$

es independiente de la presentación $l + m_\lambda$ pues, para $l + m_\lambda = 0$, se tiene $l = -m_\lambda \in L_0 \cap M_\lambda$ y por lo tanto $h^*(l + m_\lambda) = h_0(l) - h_\lambda(l) = 0$.

Por lo tanto, $h^* : (L_0 + M_\lambda) \longrightarrow U$ es un morfismo que pertenece a $\Im$ y obviamente es mayor que $h_0 : L_0 \longrightarrow U$.

Puesto que h_0 es máximo, los morfismos h^* y h_0 deben de ser iguales y, en particular, $L_0 + M_\lambda = L_0$ y $M_\lambda \subset L_0$ para todo $\lambda \in \Lambda$.$\blacksquare$

Teorema 11 *Cada módulo autoinyectivo M tiene la propiedad del intercambio.*

Demostración:

Sea
$$A = M \oplus N = \bigoplus_{i \in I} A_i.$$
y sean $X_i = A_i \cap N$ y $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$. Por el lema de Zorn, podemos encontrar $B \leq A$ máximo respecto a

1. $B = \bigoplus_{i \in I} B_i$, con $X_i \leq B_i \leq A_i$.

2. $M \cap B = 0$.

Afirmamos que $A = M \oplus B$. Para demostrarlo, basta probar que $\overline{M} \trianglelefteq \overline{A}$ y que $\overline{M}$ es sumando directo de $\overline{A}$ (donde $\overline{Y}$ denota la imagen de $Y \leq A$ bajo el homomorfismo natural $A \longrightarrow A/B$).

Comenzaremos mostrando que $\overline{M} \cap \overline{A_j} \trianglelefteq \overline{A_j}$ para todo $j \in I$. Sea $D \leq A_j$ arbitrario tal que $B_j < D$. Entonces, $B < D + B = D \oplus (\bigoplus_{i \neq j} B_i)$. B máximo implica $M \cap (D + B) \neq 0$. Como $M \cap B = 0$, entonces $M \cap (D + B) \nleq B$ por lo que $(\overline{M} \cap \overline{A_j}) \cap \overline{D} = \overline{M} \cap \overline{D} \neq 0$ y se tiene que $\overline{M} \cap \overline{A_j} \trianglelefteq \overline{A_j}$ para todo $j \in I$. Por lo tanto, $\bigoplus_{j \in I} (\overline{M} \cap \overline{A_j}) \trianglelefteq \bigoplus_{j \in I} \overline{A_j} = \overline{A}$. Por lo tanto, $\overline{M} \trianglelefteq \overline{A}$.

Si M es autoinyectivo, sea $\pi : M \oplus N \longrightarrow M$ la proyección de A en M. La restricción de π a A_i tiene como núcleo a X_i, por lo que A_i/X_i es isomorfo a algún submódulo de M. Como M es autoinyectivo, entonces es A_i/X_i-inyectivo. Como $A/X \cong \bigoplus A_i/X_i$ se tiene que M es A/X-inyectivo y, por lo tanto, A/B-inyectivo. Como $\overline{M} \cong M$, $\overline{M}$ es $\overline{A}$-inyectivo y, por lo tanto, $\overline{M}$ es sumando directo de $\overline{A}$.$\blacksquare$

Definición 2.1.2 *Decimos que un módulo M tiene la **propiedad de la cancelación** si siempre que $M \oplus X \cong M \oplus Y$, entonces $X \cong Y$.*

Definición 2.1.3 *Decimos que un módulo M tiene la **propiedad de la cancelación interna** si siempre que $M = A_1 \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2$ con $A_1 \cong A_2$, entonces $B_1 \cong B_2$.*

Proposición 2.1.1 *Sea M un módulo con la propiedad del intercambio finito. Entonces, M tiene la propiedad de cancelación si y sólo si M tiene la propiedad de la cancelación interna.*

Demostración:

$\Rightarrow\rfloor$ Sea $M = A_1 \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2$, con $A_1 \cong A_2$. Entonces,
$M \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2 \oplus B_1 \cong A_1 \oplus B_2 \oplus B_1 = M \oplus B_2$ lo que implica que $B_1 \cong B_2$.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $M \oplus X = N \oplus Y$, con $M \cong N$. La propiedad finita del intercambio de M implica que $M \oplus X = M \oplus N_1 \oplus Y_1$, con $N_1 \leq N$ y $Y_1 \leq Y$. Entonces, $X \cong N_1 \oplus Y_1$ y entonces N_1 es un sumando directo de N y Y_1 es un sumando directo de Y. Sean $N = N_1 \oplus N_2$ y $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Así,
$M \oplus N_1 \oplus Y_1 = M \oplus X = N \oplus Y = N_1 \oplus N_2 \oplus Y_1 \oplus Y_2$ lo que implica que $M \cong N_2 \oplus Y_2$ por lo que $N_2 \oplus Y_2 \cong M \cong N = N_2 \oplus N_1$. Como M tiene la propiedad de la cancelación interna, $N_1 \cong Y_2$ y, por lo tanto,
$X \cong N_1 \oplus Y_1 \cong Y_2 \oplus Y_1 = Y$.■

Definición 2.1.4 *Un módulo D es llamado **directamente finito** si D no es isomorfo a un sumando propio de sí mismo.*

Es claro que un sumando de un módulo directamente finito es también directamente finito. Veámoslo:

Sea $D = M \oplus N$, con D directamente finito y $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $M \cong M_1$ y $M_2 \neq 0$. Entonces, $D = M \oplus N = (M_1 \oplus M_2) \oplus N \cong (M \oplus M_2) \oplus N = (M \oplus N) \oplus M_2 = D \oplus M_2$, es decir, $D \cong D \oplus M_2$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, M y N son directamente finitos.

Lema 2 *Si un módulo M no es directamente finito, entonces $X^{(\mathbb{N})}$ se sumerge en M, para algún módulo X no cero.*

Demostración:

Que M no es directamente finito implica que $M = A \oplus X$, con $A \cong M$ y $X \neq 0$. Sea $f : M \longrightarrow A$ un isomorfismo y consideremos el conjunto $\{X, f(X), f^2(X), \ldots, f^n(X), \ldots\}$. Luego, $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} f^i(X) = X^{(\mathbb{N})}$ se sumerge en $A \cong M$.■

Proposición 2.1.2 *Un módulo inyectivo M no es directamente finito si y sólo si $X^{(\mathbb{N})}$ se sumerge en M, para algún módulo X no cero.*

Demostración:

$\Rightarrow\rfloor$ Es el lema anterior.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que $\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i = K \leq M$, con $X_i \cong X$ y $X \neq 0$. Sean $K_1 = X_1$ y $K_2 = \bigoplus_{i=2}^{\infty} X_i$. Entonces, $K = K_1 \oplus K_2$ y $K_2 \cong K$. Así, $E(K) = E(K_1 \oplus K_2) = E(K_1) \oplus E(K_2)$, con $E(K_2) \cong E(K)$, por lo que $E(K)$ no es directamente finito. Luego, $E(K)$ es un sumando directo de M lo que implica que M no es directamente finito. ■

Proposición 2.1.3 *Un módulo inyectivo y directamente finito M tiene la propiedad de la cancelación interna.*

Demostración:

Sea $M = A \oplus C = B \oplus D$, con $A \cong B$. Usando el lema de Zorn, podemos encontrar un monomorfismo $C \geq C' \xrightarrow{f} D$ que ya no pueda ser extendido. La inyectividad de C implica que C' es un sumando directo de C (es decir, $C' = E(C')$ pues si no se contradiría la elección de f) y $D' = f(C')$ es un sumando directo de D. Escribamos $C = C' \oplus C_0$, $D = D' \oplus D_0$, $A_0 = A \oplus C'$ y $B_0 = B \oplus D'$. Nótese que $A_0 \cong B_0$. Entonces,

$M = A_0 \oplus C_0 = B_0 \oplus D_0$, con $A_0 \cong B_0$.

Si $C_0 = 0$, entonces $M = B_0 \oplus D_0 \cong A_0 \oplus D_0 \cong M \oplus D_0$. Como M es directamente finito, $D_0 = 0$ y, por lo tanto, $C \cong D$. Así, la prueba quedaría conlcuida si probamos que $C_0 = 0$.

Supongamos que $C_0 \neq 0$. Como f no puede ser extendido, C_0 y D_0 no tienen submódulos isomorfos distintos de cero por lo que $C_0 \cap D_0 = 0$ y por lo tanto $C_0 \oplus D_0$ es un sumando de M. Escribamos $M = K_0 \oplus C_0 \oplus D_0$. Entonces,

$K_0 \oplus D_0 \cong A_0 \cong B_0 \cong K_0 \oplus C_0$. Así,$A_0 = A_1 \oplus C_1 = B_1 \oplus D_1$,

con $A_1 \cong K_0 \cong B_1$, $C_1 \cong C_0$ y $D_1 \cong D_0$. Entonces, $C_1 \cap D_1 = 0$ pues C_0 y D_0 no tienen submódulos isomorfos no cero. Este mismo argumento aplicado a A_1 nos da

$A_1 = A_2 \oplus C_2 = B_2 \oplus D_2$,

con $A_2 \cong B_2$, $C_2 \cong C_1$, $D_2 \cong D_1$ y $C_2 \cap D_2 = 0$. Iterando este proceso, obtenemos para cada $n \in \mathbb{N}$

$A_{n-1} = A_n \oplus C_n = B_n \oplus D_n$

con $A_n \cong B_n$, $C_n \cong C$, $D_n \cong D$ y $C_n \cap D_n = 0$. Es claro que $A_n \neq 0$, de otra forma $B_n = 0$ y $C_n = D_n$, contradiciendo que $C_n \cap D_n = 0$. Ahora,

$M = A_0 \oplus C_0 = A_1 \oplus C_1 \oplus C_0 = \cdots = A_n \oplus (C_n \oplus \cdots \oplus C_1 \oplus C_0)$. Esto demuestra que M contiene a la suma directa $\bigoplus_{i=1}^{\infty} C_i$, con $C_i \cong C_0$, lo cual es una contradicción a la proposición anterior. Por lo tanto, $C_0 = 0$.■

Teorema 12 *Un módulo inyectivo M tiene la propiedad de cancelación interna si y sólo si M es directamente finito.*

Demostración:

$\Rightarrow\rfloor$ Cualquier módulo M con la propiedad de la cancelación interna es directamente finito, pues si $M = A \oplus B$, con $A \cong M$, entonces $M \oplus B \cong A \oplus B = M = M \oplus \{0\}$ lo que implica que $B = 0$.

$\Leftarrow\rfloor$ Se sigue del teorema 10 y de las proposiciones 2.1.1 y 2.1.3. ■

Proposición 2.1.4 *Cualquier módulo (auto)inyectivo M satisface las siguientes dos condiciones:*

1. *Cada submódulo de M es esencial en un sumando directo de M.* ***(C1)***
2. *Si un submódulo A de M es isomorfo a un sumando directo de M, entonces A es un sumando directo de M.* ***(C2)***

Demostración:

Sea $N \leq M$ y escribamos $E(M) = E_1 \oplus E_2$, donde $E_1 = E(N)$. De la autoinyectividad de M y el corolario 1 se sigue que $M = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2)$. Es claro que $N \trianglelefteq M \cap E_1$. Por lo tanto, se tiene **(C1)**.

Sea $f : M' \longrightarrow M$ un monomorfismo tal que M' es sumando directo de M. Como M es M-inyectivo, M' es M-inyectivo. Por lo tanto, f se escinde y se tiene **(C2)**.■

Proposición 2.1.5 *Si un módulo M satisface* ***(C2)****, entonces satisface la siguiente condición:*

Si M_1 y M_2 son sumandos de M tales que $M_1 \cap M_2 = 0$, entonces $M_1 \oplus M_2$ es un sumando de M. ***(C3)***

Demostración:

Sean $M = M_1 \oplus M_1^*$ y π la proyección $M_1 \oplus M_1^* \longrightarrow M_1^*$. Como $\pi\mid_{M_2}$ es un monomorfismo, se tiene que $\pi(M_2)$ es un sumando de M, por **(C2)**. Como $\pi(M_2) \leq M_1^*$, entonces $\pi(M_2)$ es un sumando directo de M_1^* y por lo tanto $M_1 \oplus \pi(M_2)$ es un sumando de M.■

Definición 2.1.5 *Un módulo M es llamado* ***continuo*** *si tiene* ***(C1)*** *y* ***(C2)****.*

Definición 2.1.6 *Un módulo M es llamado* ***casicontinuo*** *si tiene* ***(C1)*** *y* ***(C3)****.*

Obsérvese que se ha probado la siguiente cadena de implicaciones: Inyectivo $\Rightarrow$ Autoinyectivo $\Rightarrow$ Continuo $\Rightarrow$ Casicontinuo $\Rightarrow$ **(C1)**.

En lo sucesivo, haremos la convención de que un módulo **cerrado** M es **esencialmente cerrado**.

Es claro que las condiciones ($\mathbf{C_i}$) se heredan a sumandos, observando que si un submódulo N de un módulo M es cerrado en algún sumando de M, entonces N es cerrado en M.

Teorema 13 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un módulo M:*

1. *M es casicontinuo.*

2. *$M = X \oplus Y$, para cualesquiera dos submódulos X y Y que sean pseudocomplementos uno del otro.*

3. *$f(M) \leq M$ para cada morfismo idempotente $f \in End(E(M))$.*

4. *$E(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i \;\Rightarrow\; M = \bigoplus_{i \in I}(M \cap E_i)$.*

Demostración:

(1)$\Rightarrow$(2) M casicontinuo implica que cada submódulo cerrado de M es un sumando directo lo que implica que X y Y son sumandos directos de M (pues los pseudocomplementos y los cerrados son los mismos) lo que implica que $X \oplus Y$ es un sumando directo de M. Como $X \oplus Y \trianglelefteq M$, se tiene que $M = X \oplus Y$.

(2)$\Rightarrow$(3) Sean $A_1 = M \cap f(E(M))$ y $A_2 = M \cap (1-f)(E(M))$. Sean B_1 un pseudocomplemento de A_2 que contiene a A_1 y B_2 un pseudocomplemento de B_1 que contiene a A_2. Entonces, $M = B_1 \oplus B_2$. Sea π la proyección $B_1 \oplus B_2 \longrightarrow B_1$. Afirmamos que $M \cap (f - \pi)(M) = 0$.

Sean $x, y \in M$ tales que $(f-\pi)(x) = y$. Entonces, $f(x) = y + \pi(x) \in M$ y por lo tanto $f(x) \in A_1$. Así, $(1-f)(x) \in M$ y entonces $(1-f)(x) \in A_2$. Por lo tanto, $\pi(x) = f(x)$ y, entonces, $y = 0$. Por lo tanto, $M \cap (f-\pi)(M) \leq M$.

(3)$\Rightarrow$(4) Claramente, $\bigoplus_{i \in I}(M \cap E_i) \leq M$. Sea $m \in M$ arbitrario. Entonces, $m \in \bigoplus_{i \in F} E_i$, para algún $F \subseteq I$ finito. Sea $E(M) = \bigoplus_{i \in F} E_i \oplus E^*$.

Entonces, existen idempotentes ortogonales $f_i \in End(E(M))$ $(i \in F)$ tales que $E_i = f_i(E(M))$. Como, por hipótesis, $f_i(M) \leq M$, $m = (\sum_{i\in F} f_i)(m) = \sum_{i\in F} f_i(m) \in \bigoplus_{i\in F}(M \cap E_i)$, por lo que $M \leq \bigoplus_{i\in I}(M \cap E_i)$ y, por lo tanto, $M = \bigoplus_{i\in I}(M \cap E_i)$.

(4)$\Rightarrow$(1) Sean $A \leq M$ y $E(M) = E(A) \oplus E^*$. Así, $M = M \cap E(A) \oplus M \cap E^*$, donde $A \trianglelefteq M \cap E(A)$. Por lo tanto, M tiene **(C1)**.

Ahora, sean M_1 y M_2 sumandos de M tales que $M_1 \cap M_2 = 0$. Escribamos $E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus E'$, donde $E_i = E(M_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Entonces, $M = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2) \oplus (M \cap E')$. Como M_i es un sumando de M y $M_i \trianglelefteq M \cap E_i$, $M_i = M \cap E_i$, $i \in \{1, 2\}$. Así, M también tiene **(C3)**. Por lo tanto, M es casicontinuo.$\blacksquare$

Proposición 2.1.6 *Si $M_1 \oplus M_2$ es casicontinuo, entonces M_1 y M_2 son inyectivos relativos.*

Demostración:

Veamos que M_2 es M_1-inyectivo. Sea $M = M_1 \oplus M_2$. Sean $X \leq M_1$ y $\phi : X \longrightarrow M_2$ un morfismo. Sea $B = \{x - \phi(x) \mid x \in X\}$. Si $y \in B \cap M_2$, entonces $y = x - \phi(x), x \in X$ y $y = m_2 \in M_2$ de donde $m_2 = x - \phi(x)$ y $M_2 \ni (m_2 + \phi(x)) = x \in X \leq M_1$ de donde se tiene que $B \cap M_2 = 0$. Sea K un pseudocomplemento de M_2 que contenga a B. Entonces, $M = K \oplus M_2$, por el teorema anterior. Sea $\pi : K \oplus M_2 \longrightarrow M_2$ la proyección canónica. Ahora, para todo $x \in X$ se tiene que $0 = \pi(x - \phi(x)) = \pi(x) - \pi(\phi(x)) = \pi(x) - \phi(x)$. Por lo tanto, $\pi \mid_{M_1}$ extiende a ϕ. Por lo tanto, M_1 es M_2-inyectivo.

Análogamente, M_2 es M_1-inyectivo.$\blacksquare$

Definición 2.1.7 *Diremos que un módulo P es **puramente infinito** si $P \cong P \oplus P$.*

Corolario 3 *Un módulo puramente infinito M es autoinyectivo si y sólo si M es casicontinuo.*$\blacksquare$

Lema 3 *Sean N y $\bigoplus_{i\in I} X_i$ submódulos de un módulo M. Si pasa que $N \cap (\bigoplus_{i\in I} X_i) \neq 0$, entonces existe $j \in I$ tal que X_j y N tienen submódulos isomorfos no cero.*

Demostración:

$N \cap (\bigoplus_{i \in I} X_i) \neq 0$ implica que $N \cap (\bigoplus_{i \in F} X_i) \neq 0$ para algún $F \subseteq I$ finito. Sea $K \subseteq F$ máximo tal que $N \cap (\bigoplus_{i \in K} X_i) = 0$. Consideremos $j \in (F - K)$ y sea π la proyección $X_j \oplus (\bigoplus_{j \in K} X_i) \longrightarrow X_j$. Entonces, $N' = \bigcap_{j \in (F-K)} (X_j \oplus (\bigoplus_{i \in K} X_i)) \neq 0$ y $N \geq N' \cong \pi(N') \leq X_j$.■

Lema 4 *Sea P un módulo puramente infinito. Si $B \rightarrowtail P$, entonces $B^{(\mathbb{N})} \rightarrowtail P$.*

Demostración:

$P \cong P \oplus P \cong P \oplus P \oplus P \oplus P \cong \cdots \cong P^{(\mathbb{N})}$. Además, $B \rightarrowtail P$ implica que $B^{(\mathbb{N})} \rightarrowtail P^{(\mathbb{N})}$ lo que implica que $B^{(\mathbb{N})} \rightarrowtail P$.■

Lema 5 *Sea $E = B \oplus P$, donde E es inyectivo y P es puramente infinito. Si $B \rightarrowtail P$, entones $E \cong P$.*

Demostración:

Por el lema anterior, $B^{(\mathbb{N})} \rightarrowtail P$. Así, $P \geq \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$, con $B_i \cong B$. Como B y P son inyectivos, $P = E(\bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i) \oplus C = E(B_1) \oplus E(\bigoplus_{i=2}^{\infty} B_i) \oplus C \cong B \oplus E(\bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i) \oplus C = B \oplus P = E$.■

Como herramienta para la demostración del siguiente teorema, describiremos un método general para construir descomposiciones directas.

Definición 2.1.8 *Diremos que dos módulos son **ortogonales** si no tienen submódulos isomorfos distintos de cero.*

Para cualquier clase $\mathcal{F}$ de módulos, $\mathcal{F}^{\perp}$ denotará a la clase de módulos ortogonales a todos los miembros de $\mathcal{F}$. Claramente, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{\perp\perp}$ y $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp\perp\perp}$.

$\mathcal{F}^{\perp}$ y $\mathcal{F}^{\perp\perp}$ forman lo que llamaremos un par ortogonal, es decir, un par de clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tales que $\mathcal{A}^{\perp} = \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^{\perp} = \mathcal{A}$.

Veamos que dado un par ortogonal de clases y un módulo arbitrario M en $\mathcal{F}$, entonces existen $A, B \leq M$ máximos con respecto a la propiedad $A \in \mathcal{F}^{\perp}$ y $B \in \mathcal{F}^{\perp\perp}$ y tales que su suma $A + B$ es directa y esencial en M.

Sea $\mathcal{F}'$ la familia de familias independientes de submódulos cíclicos de M. Como la propiedad de ser independiente es de carácter finito, es claro que cada familia independiente está contenida en una familia máxima. Así, sea $\mathcal{C}$ una familia máxima independiente de submódulos cíclicos de M en $\mathcal{F}^{\perp}$. Probaremos que $\bigoplus \mathcal{C} \in \mathcal{F}^{\perp}$.

Sea $Rx \leq \bigoplus \mathcal{C}$ un cíclico no cero tal que $Rx \in \mathcal{F}$. Rx finitamente generado implica que $Rx = \bigoplus_{i=1}^{n} C_i$, con $C_i \in \mathcal{C}$. Además, podemos tomar x con n

mínima con esta propiedad. Así, $x = c_1 + \cdots + c_n$, con $c_k \neq 0$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ pues n es mínima. Obsérvese además que $Ann(x) = Ann(c_i)$ para toda i, de donde $Rc_i \cong R/Ann(c_i) = R/Ann(x) \cong Rx$, lo cual es una contradicción ($Rx \in \mathcal{F}$ y $Rc_i \in \mathcal{F}^{\perp}$). Por lo tanto, $\bigoplus C \in \mathcal{F}^{\perp}$.

Veamos ahora que $\mathcal{F}^{\perp}$ es cerrada bajo extensiones esenciales. Sean $A \in \mathcal{F}^{\perp}$ y $K \leq M$ tal que $A \trianglelefteq K$. Si existe $L \leq K$ distinto de cero tal que $L \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap L \neq 0$, lo cual es una contradicción ($A \cap L \leq A \in \mathcal{F}^{\perp}$ y $A \cap L \leq L \in \mathcal{F}$). Por lo tanto, $K \in \mathcal{F}^{\perp}$.

Sea $\overline{\bigoplus C}$ una extensión esencial máxima de $\bigoplus C$. Entonces, por lo anterior, $\overline{\bigoplus C} \in \mathcal{F}^{\perp}$ y es un máximo con esta propiedad, pues si exisitiera $X \in \mathcal{F}^{\perp}$ tal que $\overline{\bigoplus C} \subsetneq X$, entonces $\overline{\bigoplus C}$ no es esencial en X lo que implica que existe $Ry \leq X$ tal que $Ry \cap \overline{\bigoplus C} = 0$, lo cual sería una contradicción debido a la elección de $\bigoplus C$. Por lo tanto, $\overline{\bigoplus C}$ es un máximo en $\mathcal{F}^{\perp}$.

De manera análoga, podemos encontrar un submódulo B de M máximo en $\mathcal{F}^{\perp\perp}$. Así, sean $A \in \mathcal{F}^{\perp}$ y $B \in \mathcal{F}^{\perp\perp}$ máximos. De la definición de $\mathcal{F}^{\perp}$ y $\mathcal{F}^{\perp\perp}$ se sigue que $A + B$ es directa. Veamos ahora que $A \oplus B \trianglelefteq M$.

Supongamos que $A \oplus B$ no es esencial en M. Entonces, existe $N \leq M$ distinto de cero tal que $(A \oplus B) \cap N = 0$. En particular, $A \cap N = 0$. $A \in \mathcal{F}^{\perp}$ máximo implica que $N \notin \mathcal{F}^{\perp}$ lo que implica que para todo $N' \leq N$ distinto de cero, $N' \notin \mathcal{F}^{\perp}$ lo que implica que para todo $N' \leq N$ no cero existe $N_1 \leq N'$ distinto de cero tal que $N_1 \in \mathcal{F}$ y entonces $N \in \mathcal{F}^{\perp\perp}$, lo cual es una contradicción debido a la maximidad de B en $\mathcal{F}^{\perp\perp}$. Por lo tanto, $A \oplus B \trianglelefteq M$.

Si uno comienza con una clase hereditaria, es decir, una clase $\mathcal{F}$ cerrada bajo isomorfismos y submódulos, entonces

$$\mathcal{F}^{\perp} = \{V \mid V \text{ no tiene submódulos no cero en } \mathcal{F}\}$$

$$\mathcal{F}^{\perp\perp} = \{L \mid \text{ cada submódulo no cero de } L \text{ tiene un submódulo no cero en } \mathcal{F}\}$$

En esta situación, llamaremos a $\mathcal{F}^{\perp}$ y a $\mathcal{F}^{\perp\perp}$ la clase $\mathcal{F}$-vacía y la clase $\mathcal{F}$-completa, respectivamente.

Definición 2.1.9 *Sean A y B sumandos de un módulo M. Se dice que A es **perspectivo** a B si existe $X \leq M$ tal que $M = A \oplus X = B \oplus X$.*

Definición 2.1.10 *Sean A y B sumandos de un módulo M. Decimos que A es **superspectivo** a B si para cualquier submódulo $X \leq M$, $M = A \oplus X$ si y sólo si $M = B \oplus X$.*

La perspectividad es reflexiva y simétrica pero, en general, no es transitiva mientras que la superspectividad es una relación de equivalencia.

Una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ con ciertas propiedades se dice que es única (única salvo superspectividad, única salvo isomorfismo) si para cualquier otra descomposición $M = N_1 \oplus N_2$ con las mismas propiedades, $M_i = N_i$ (M_i es superspectivo a N_i, $M_i \cong N_i$), $(i = 1, 2)$.

Obviamente, uno tiene la siguiente cadena de implicaciones:
Unicidad $\Rightarrow$ unicidad salvo superspectividad $\Rightarrow$ unicidad salvo isomorfismo.

Teorema 14 *Cada módulo inyectivo E tiene una descomposición, única salvo superspectividad, $E = D \oplus P$, donde D es directamente finito, P es puramente infinito y además D y P son ortogonales.*

Demostración:

Probaremos primero la existencia de dicha descomposición. Consideremos la clase hereditaria

$$\mathcal{F} = \{X \mid \ X^{(\mathbb{N})} \rightarrowtail E\}$$

Entonces, de la construcción anterior obtenemos que $E = V \oplus L$, donde V es $\mathcal{F}$-vacío y L es $\mathcal{F}$- completo. Por construcción, V y L son ortogonales. Además, por la proposición 2.1.2 V es directamente finito. Veamos ahora que L es puramente infinito.

Por el lema de Zorn, existe una suma directa máxima $K = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ en L, donde cada Y_λ es isomorfo a una copotencia infinita $X_\lambda^{(\mathbb{N})}$. Así, $K \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^{(\mathbb{N})} \cong (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i$, donde $Z_i \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Sean $K_1 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z_{2n-1}$ y $K_2 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z_{2n}$. Entonces, $K = K_1 \oplus K_2$ y $K_1 \cong K \cong K_2$. Como L es inyectivo, $L = F \oplus N$, donde $N = E(K)$. La maximidad de K implica que F es directamente finito. Además,

$N = E(K) = E(K_1) \oplus E(K_2) \cong N \oplus N$.

Por lo tanto, N es puramente infinito.

Usando el lema de Zorn, podemos encontrar un monomorfismo $f : F \geq H \rightarrowtail N$ que no se puede extender más. Como L es inyectivo, H es un sumando de F (por la elección de f) y $f(H)$ es un sumando de N. Así, sean $F = H \oplus H'$ y $N = f(H) \oplus N'$. Entonces, $f(H) \oplus N' = N \cong N \oplus N = f(H) \oplus N' \oplus N$.

$H \cong f(H)$ implica que $f(H)$ es inyectivo y directamente finito lo que implica que $N' \cong N' \oplus N$, por el teorema 10. Como $N' \leq N$ y N es puramente infinito, $N' \cong N$, por el lema 5.

Afirmamos que $H' = 0$. Supongamos que no. Como H' es $\mathcal{F}$-completo, entonces contiene un submódulo no cero W tal que $W^{(\mathbb{N})} \rightarrowtail E$. Entonces, $E \geq \bigoplus_{j=1}^{\infty} W_j$, con $W_j \cong W$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como V es $\mathcal{F}$-vacío, $V \cap (\bigoplus_{j=1}^{\infty} W_j) = 0$, por el lema 3. Así, $\bigoplus_{j=1}^{\infty} \rightarrowtail L$. Como F es directamente finito, $N \cap (\bigoplus_{j=1}^{\infty} W_j) \neq 0$ pues de otra manera, $\bigoplus_{j=1}^{\infty} W_j \rightarrowtail F$, lo cual sería una contradicción. Por el lema 3, existen $t \in \mathbb{N}$ y $T \leq N$ tales que $T \cong W_t$. Luego, $T \leq N \cong N'$ nos da un monomorfismo no cero $H' \geq H'' \rightarrowtail N'$, pero entonces $f \oplus g : H \oplus H'' \longrightarrow f(H) \oplus N' = N$ extiende a f, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $H' = 0$ y entonces, $F = H$. Luego, $F \rightarrowtail N$ y, por el lema 5, $L = F \oplus N \cong N$, de donde se tiene que L es puramente infinito.

Ahora, veamos que esta descomposición es única salvo superspectividad. Para ello, veamos que para cualquier otra descomposición $E = D \oplus P$ con las propiedades anteriores, D es $\{$-vacío y P es $\mathcal{F}$-completo. Como
$P^{(\mathbb{N})} \rightarrowtail P \leq E$ se tiene que $P \in \mathcal{F}$ y, consecuentemente, P es $\mathcal{F}$-completo.

Ahora, sea $0 \neq X \in \mathcal{F}$ tal que $X \leq D$. Entonces, $E \geq \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, con $X_i \cong X$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Si $P \cap (\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i) = 0$, entonces $\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i \rightarrowtail D$, una contradicción pues D es directamente finito. Por otro lado, $P \cap (\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i) \neq 0$ implica que existen $0 \neq P' \leq P$ y $t \in \mathbb{N}$ tal que $P' \rightarrowtail X_t$, por el lema 3. Entonces, $P \geq P' \rightarrowtail X_t \cong X \leq D$, lo cual nuevamente es una contradicción pues P y D no tienen submódulos isomorfos distintos de cero. Por lo tanto, $X = 0$ y entonces D es $\mathcal{F}$-vacío.

Así, la descomposición $E = L \oplus V$ es única salvo superspectividad.$\blacksquare$

Lema 6 *Sea M un módulo casicontinuo. Entonces*

1. *M es puramente infinito si y sólo si $E(M)$ lo es.*

2. *M es directamente finito si y sólo si $E(M)$ lo es.*

Demostración:
(1)
$\Rightarrow\rfloor$ M puramente infinito implica que $M \cong M \oplus M$ lo que implica que $E(M) \cong E(M) \oplus E(M)$ por lo que $E(M)$ es puramente infinito.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos $E(M)$ puramente infinito. Entonces, $E(M) \cong E_1 \oplus E_2$, donde $E(M) \cong E_1 \cong E_2$. Como M es casicontinuo, $M = M_1 \oplus M_2$, con $M_i = M \cap E_i$, por el teorema 11. Además, M_1 y M_2 son inyectivos relativos, por la proposición 2.1.6 y $E(M_1) \cong E(M_2)$, por lo que $M_1 \cong M_2$, por el corolario 2, y entonces M_1 es autoinyectivo. Entonces, M y M_1 son inyectivos relativos. Por el corolario 2, $M_1 \cong M$. Por lo tanto, M es puramente infinito.

(2)
$\Leftarrow\rfloor$ Si M no es directamente finito, $M \cong M \oplus X$, con $X \neq 0$. Por lo tanto, $E(M) \cong E(M) \oplus E(X)$, con $E(X) \neq 0$ y por lo tanto $E(M)$ no es directamente finito.

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que $E(M)$ no es directamente finito. Por el teorema 10, $E(M) = D \oplus P$, donde D es directamente finito y P es puramente infinito. M casicontinuo implica que $M = N_1 \oplus N_2$, con $N_1 = M \cap D$ y $N_2 = M \cap P \neq 0$, pues $P \neq 0$. Como N_2 es un casicontinuo con cápsula inyectiva puramente infinita, por **(1)** N_2 es puramente infinito. Entonces, $M = N_1 \oplus N_2 \cong N_1 \oplus N_2 \oplus N_2 = M \oplus N_2$, con $N_2 \neq 0$. Por lo tanto, M no es directamente finito. ∎

Teorema 15 *Cualquier módulo casicontinuo M tiene una descomposición, única salvo superspectividad, $M = D \oplus P$, donde D es directamente finito, P es puramente infinito y P y D son ortogonales.*

Demostración:

Es consecuencia inmediata del Teorema 11, el Teorema 10 y el Lema 6.∎

Lema 7 *Sean M un módulo casicontinuo y $A \leq M$. Cualesquiera dos cerraduras de A son superspectivas.*

Demostración:

Sean M_1 y M_2 dos cerraduras de A. M casicontinuo implica que M_1 y M_2 son sumandos de M. Sea $M = M_1 \oplus X$. Como $A \cap X = 0$, $M_2 \cap X = 0$ y entonces $(M_2 \oplus X)$ es sumando de M. Además, $(M_2 \oplus X) \trianglelefteq M$ pues contiene a $A \oplus X$. Por lo tanto, $M = M_2 \oplus X$.∎

Teorema 16 *Sean M_1 y M_2 sumandos de un módulo casicontinuo M. Si $E(M_1) \cong E(M_2)$, entonces $M_1 \cong M_2$.*

Demostración:

Sea $U = M_1 \cap M_2$ y sea X_i un pseudocomplemento de U en M_i. M casicontinuo implica que M_i es casicontinuo por lo que X_i es sumando de M_i y entonces X_i es sumando de M. Claramente, $X_1 + U + X_2$ es una suma directa. Así, M casicontinuo implica que $M = X_1 \oplus B \oplus X_2 \oplus M^*$, donde $U \trianglelefteq B$. Sea B_i una cerradura de U en M_i. X_i pseudocomplemento de U en M_i implica que $U \oplus X_i \trianglelefteq M_i$ por lo que $M_i = B_i \oplus X_i$. Sea $V_i = B \oplus X_i$. Por el Lema 7, $B_i \cong B$ y entonces $V_i \cong M_i$.

Por el Teorema 13, $B = D \oplus P$, donde D es directamente finito y P es puramente infinito. Por la Proposición 2.1.6 X_1, X_2 y P son inyectivos relativos por pares y por el Corolario 3 P es autoinyectivo. Entonces, $X_1 \oplus P$ y $X_2 \oplus P$ son inyectivos relativos. Ahora,

$E(D) \oplus E(P \oplus X_1) = E(V_1) \cong E(M_1) \cong E(V_2) = E(D) \oplus E(P \oplus X_2)$. Como $E(D)$ es directamente finito por el Lema 6, del Teorema 10 se sigue que $E(P \oplus X_1) \cong E(P \oplus X_2)$ de donde, por el Corolario 2, $P \oplus X_1 \cong P \oplus X_2$. Por lo tanto, $V_1 = D \oplus P \oplus X_1 \cong D \oplus P \oplus X_2 = V_2$. Por lo tanto, $M_1 \cong V_1 \cong V_2 \cong M_2$.■

Corolario 4 *En un módulo autoinyectivo M, submódulos isomorfos tienen cerraduras isomorfas.*

Demostración:

Sean $A_1, A_2 \leq M$ y C_1 y C_2 cerraduras respectivas. Si $A_1 \cong A_2$, entonces $E(C_1) \cong E(C_2)$. Como C_1 y C_2 son sumandos de M, por el teorema anterior se tiene que $C_1 \cong C_2$.■

Teorema 17 *Sean M un módulo continuo y N un módulo casicontinuo. Si $M \rightarrowtail N$ y $N \rightarrowtail M$, entonces $M \cong N$.*

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $N \leq M$. Sea $\varphi : M \rightarrowtail N$ un monomorfismo. M continuo, $\varphi(M) \cong M$ y M sumando de M implica que $\varphi(M)$ es sumando de M y, por lo tanto, $\varphi(M)$ es sumando de N. Así, sea $N = A \oplus \varphi(M)$ y sea $B = A + \varphi(A) + \varphi^2(A) + \cdots$. Veamos que esta suma es directa.

$A \cap \varphi(A) \leq A \cap \varphi(M) = 0$, por lo que $\{A,\varphi(A)\}$ es independiente. Ahora, supongamos que $\{A,\varphi(A), \ldots, \varphi^n(A)\}$ es independiente para alguna $n > 0$. Como φ es monomorfismo, $\{\varphi(A), \varphi^2(A), \ldots, \varphi^{n+1}(A)\}$ es independiente. Además, $A \cap (\varphi(A) \oplus \varphi^2(A) \oplus \cdots \oplus \varphi^{n+1}(A)) \leq A \cap \varphi(M) = 0$ y, por lo tanto, $\{A,\varphi(A), \ldots, \varphi^{n+1}(A)\}$ es independiente. Así, por inducción se tiene que $\{A,\varphi(A), \ldots\}$ es independiente y, por lo tanto, $B = A \oplus \varphi(A) \oplus \cdots$.

Así, $B = A \oplus \varphi(B)$. Como $\varphi(M)$ es (casi)continuo, $\varphi(M) = P \oplus Q$, con $\varphi(B) \trianglelefteq P$. Entonces, $B = A \oplus \varphi(B) \trianglelefteq A \oplus P$ y como $B \cong \varphi(B)$, $P \cong A \oplus P$, por el Corolario 4. Por lo tanto, $N = A \oplus \varphi(M) = A \oplus P \oplus Q \cong P \oplus Q = \varphi(M) \cong M$.■

Definición 2.1.11 *Sean A y B dos módulos. Decimos que A y B son **subisomorfos** si existen $A_1 \leq A$ y $B_1 \leq B$ tales que $A \cong B_1$ y $B \cong A_1$.*

Y he aquí, ¡por fin!, el tan esperado resultado.

Corolario 5 *Módulos continuos mutuamente subisomorfos son isomorfos.*

Es decir, la clase de los módulos continuos en R-Mod es una clase monocorrecta.

2.1.3. La clase de los módulos (auto)inyectivos.

Ya se demostró que todo módulo (auto)inyectivo es continuo, por lo que el hecho de que la clase de los módulos (auto)inyectivos es monocorrecta se sigue del Corolario 5.

2.1.4. La clase de los módulos semisimples.

Que esta clase es monocorrecta también es claro, notando que todo módulo semisimple es autoinyectivo.

Nótese que con esto hemos probado que los módulos semisimples son monocorrectos, como se afirmó al final del Capítulo 1.

2.2. Clases epicorrectas de módulos.

2.2.1. La clase de los módulos neterianos.

Que esta clase de módulos es epicorrecta es claro, del Teorema 4.

2.2.2. La clase de los módulos Σ-autoproyectivos suplementados.

Definición 2.2.1 *Decimos que un módulo M es **Σ-autoproyectivo** si M es $M^{(\Lambda)}$-proyectivo, para cualquier índice Λ.*

Definición 2.2.2 *Sea U un submódulo del R-módulo M. Decimos que un submódulo $V \leq M$ es un **suplemento de** U **en** M si V es un elemento mínimo en el conjunto de submódulos $L \leq M$ con $U + L = M$.*

Proposición 2.2.1 *V es un suplemento de U si y sólo si $U + V = M$ y $U \cap V \ll V$.*

Demostración:

$\Rightarrow\rfloor$ Si V es un suplemento de U y $X \subset V$ con $(U \cap V) + X = V$, entonces se tiene que $M = U + V = U + (U \cap V) + X = U + X$, de donde $X = V$ pues V es mínimo con esta propiedad. Así, $U \cap V \ll V$.

$\Leftarrow\rfloor$ Sean $U + V = M$ y $U \cap V \ll V$. Para $Y \subset V$ con $U + Y = M$ se tiene que, por modularidad, $V = M \cap V = (U \cap V) + Y$ y entonces $V = Y$. Por lo tanto, V es mínimo con la propiedad deseada. ∎

Definición 2.2.3 *Un R-módulo M es llamado* ***suplementado*** *si cada submódulo de M tiene un suplemento en M.*

Proposición 2.2.2 *Sea M un módulo Σ-autoproyectivo suplementado. Entonces, $M/Rad(M)$ es semisimple.*

Demostración:

Sea $K \leq M/Rad(M)$. M suplementado implica que existe $L \leq M/Rad(M)$ mínimo tal que $K + L = M/Rad(M)$. Además, $K \cap L \ll L$ y entonces $K \cap L \ll M/Rad(M)$, pero $M/Rad(M)$ no tiene submódulos superfluos distintos de cero, de donde $K \cap L = 0$. Así, K es un sumando directo de $M/Rad(M)$ y, por lo tanto, $M/Rad(M)$ es semisimple. ∎

Así, dados M y N módulos Σ-autoproyectivos suplementados y epiequivalentes, $M/Rad(M)$ y $N/Rad(N)$ son semisimples y epiquivalentes, y como los epimorfismos de módulos semisimples se escinden se tiene que también son monoequivalentes, de donde $M/Rad(M) \cong N/Rad(N)$, pues ya vimos que la clase de módulos semisimples es monocorrecta.

Lema 8 *Sean M un R-módulo autoproyectivo y $S = End_R(M)$. Entonces, $J(S) = \{f \in S \mid Im\ f \ll M\}$.*

Demostración:

$\supseteq\rfloor$ Sea $f \in S$ tal que $Im\ f \ll M$. Probaremos que $fS \ll S$. Si para un ideal izquierdo A de S la suma $A + f(S) = S$, entonces $1 = fs + g$, para alguna $s \in S$ y alguna $g \in A$ y $M = (f \circ s)(M) + g(M) \subset Im\ f + g(M)$, es decir, $g(M) = M$. Como M es autoproyectivo, existe $h \in S$ con $1 = gh \in A$ por lo que $A = S$.

$\subseteq\rfloor$ Sean $f \in J(S)$ y $K \subset M$ con $K + Im\ f = M$. Entonces, la composición $M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\rho} M/K$ es un epimorfismo y existe $g \in S$ que extiende conmutativamente el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "\rho"] & \\ M \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "\rho"] & M/K \end{tikzcd}$$

Así, $0 = \rho - \rho \circ f \circ g = \rho \circ (1 - f \circ g)$. Como $(1 - f \circ g)$ es invertible, $\rho = 0$, es decir, $K = M$ y por lo tanto $Im\ f \ll M$. ∎

Proposición 2.2.3 *En un anillo R con unidad, $J(R)$ puede ser descrito como el conjunto $\{r \in R \mid 1 - ar$ es invertible para todo $a \in R\}$.*

Demostración:

Queremos ver que $\mathfrak{M} = \bigcap\{M \leq R \mid M$ es máximo$\}$ es igual a $\mathfrak{I} = \{r \in R \mid 1 - ar$ es invertible para toda $a \in R\}$.

$\subseteq\rfloor$ Sea $x \in \mathfrak{M}$ y supongamos que $1 - ax$ no es invertible para alguna $a \in R$. Entonces, $s(1 - ax) \neq 1$ para toda $s \in R$, es decir, $s - sax \neq 1$ para toda $s \in R$. En particular, para $s = 1$ se tiene que $1 - ax \neq 1$, de donde $ax \neq 0$ por lo que $Rx \neq 0$ y, siendo finitamente generado, contiene un ideal máximo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{I}$.

$\supseteq\rfloor$ Sea $x \in \mathfrak{I}$ y supongamos que existe $M \leq R$ máximo tal que $x \notin M$. M máximo implica que $R = M + Rx$, de donde $1 = m + rx$, con $m \in M$ y $r \in R$. Luego, $1 - rx = m$ lo que implica que existe $y \in R$ tal que $ym = 1 \in M$, lo cual es una contradicción. Así, $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{M}$. ■

Teorema 18 *Sean M un R-módulo y P un módulo proyectivo no cero en $\sigma[M]$. Entonces:*

1. *Existen submódulos máximos en P, es decir, $Rad(P) \neq P$.*
2. *Si $P = P_1 \oplus P_2$ con $P_2 \subset Rad(P)$, entonces $P_2 = 0$.*

Demostración:

(1) Supongamos que $P = Rad(P)$. Veamos que cada submódulo $N \leq P$ finitamente generado es cero.

Sean $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de módulos finitamente generados (cíclicos) en $\sigma[M]$ y $h : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \longrightarrow P$ un epimorfismo. P proyectivo implica que existe $g : P \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ con $h \circ g = id_P$. Como N, así como $g(N)$, es finitamente generado, existe $E \subset \Lambda$ finito con $g(N) \subset \bigoplus_{\lambda\in E} K_\lambda$. Con la proyección canónica $\pi : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in E} K_\lambda$ obtenemos un endomorfismo $f := h \circ \pi \circ g$ de P, con $f(n) = (h \circ \pi \circ g)(n) = (h \circ g)(n) = n$, para toda $n \in N$. Luego, $Im\ f$ está contenida en el submódulo finitamente generado $h\left(\bigoplus_{\lambda\in E} K_\lambda\right) \subset P$ que es superfluo en P, pues $P = Rad(P)$.

Por el lema 8, $f \in J(End_R(P))$, es decir, $1 - f$ es un isomorfismo y $N \subset Nuc\ (1 - f) = 0$.

(2) Sea $\pi_2 : P \longrightarrow P_2$ la proyección en P_2. Entonces, $P_2 = \pi_2(P_2) \subset \pi_2(Rad(P)) \subset Rad(P_2)$, es decir, $P_2 = Rad(P_2)$ y, por **(1)**, $P_2 = 0$. ■

Definición 2.2.4 *Decimos que un módulo M es un* ***buen módulo*** *si $f(Rad(M)) = Rad(f(M))$ para cualquier morfismo f con dominio M.*

Proposición 2.2.4 *Para un R-módulo M son equivalentes:*

1. *M es un buen módulo.*
2. *$Rad(L) = 0$ para cada módulo cociente L de $M/Rad(M)$.*

Demostración:

(1)⇒ (2) Sean $\rho : M \longrightarrow M/Rad(M)$ la proyección canónica y $g : M/Rad(M) \longrightarrow L$ un epimorfismo. Para $f = g \circ \rho$ se tiene que $Rad(M) \subset Nuc\ f$ y $Rad(L) = Rad(f(M)) = f(Rad(M)) = 0$.

(2)⇒ (1) Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo. La composición $M \longrightarrow f(M) \longrightarrow f(M)/f(Rad(M))$ se factoriza sobre $M/Rad(M)$, es decir, $f(M)/f(Rad(M))$ es un cociente de $M/Rad(M)$ y entonces $Rad\left(f(M)/f(Rad(M))\right) = 0$, de donde $f(Rad(M)) = Rad(f(M))$. ∎

Definición 2.2.5 *Decimos que un submódulo U del R-módulo M tiene* ***suficientes suplementos en*** *M si para cada $V \subset M$ con $U + V = M$ existe un suplemento V' de U con $V' \subset V$.*

Definición 2.2.6 *Decimos que un módulo M es* ***suficientemente suplementado*** *si cada submódulo de M tiene suficientes suplementos.*

Proposición 2.2.5 *Sea M un R-módulo suficientemente suplementado. Entonces, cada suplemento de un submódulo de M es un módulo suficientemente suplementado.*

Demostración:

Sean V un suplemento de $U \leq M$ y $V = X+Y$. Entonces, $M = U+X+Y$. Luego, existe un suplemento Y' de $U + X$ en M con $Y' \subset Y$. Se tiene que $X \cap Y' \subset (U + X) \cap Y' \ll Y'$ y $M = U + X + Y'$ implica que $X + Y' = V$. Por lo tanto, Y' es un suplemento de X en V. ∎

Caracterización de módulos suficientemente suplementados.

Proposición 2.2.6 *Para un R-módulo M las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *M es suficientemente suplementado.*

2. *Cada submódulo $U \leq M$ es de la forma $U = X + Y$, con X suplementado y $Y \ll M$.*

3. *Para cada submódulo $U \leq M$ existe un submódulo suplementado $X \leq U$ con $U/X \ll M/X$.*

Demostración:

(1)⇒(2) Sean V un suplemento de U en M y X un suplemento de V en M, con $X \subset U$. Entonces, $U \cap V \ll M$ y $U = (X + V) \cap U = X + (U \cap V)$, donde X es suplementado, por la proposición anterior.

(2)⇒(3) Si $U = X + Y$ con X suplementado y $Y \ll M$, entonces $Y/(X \cap Y) \cong U/X \ll M/X$.

(3)⇒(1) Si $U + V = M$ y si X es un submódulo suplementado de V con $V/X \ll M/X$, entonces $U + X = M$ se verifica. Para un suplemento V' de $U \cap X$ en X se tiene que $M = U + (U \cap X) + V' = U + V'$ y $U \cap V' = (U \cap X) \cap V' \ll V'$, es decir, $V' \leq V$ es un suplemento de U en M. ∎

Proposición 2.2.7 *Sean M un R-módulo y $U \leq M$. Lo siguiente es equivalente:*

1. *Existe una descomposición $M = X \oplus X'$, con $X \subset U$ y $X' \cap U \ll X'$.*

2. *U tiene un suplemento V en M tal que $U \cap V$ es un sumando directo de U. En este caso, diremos que U **está por encima de un sumando directo de** M.*

3. *Existe un sumando directo X de M con $X \subset U$, $U = X + Y$ y $Y \ll M$.*

Demostración:

(1)⇒(2) Con la notación de **(1)**, $U = X \oplus (U \cap X')$ y X' es un suplemento de U.

(2)⇒(1) Sea V un suplemento de U, con $U = X \oplus (U \cap V)$, para algún submódulo X de U. Entonces, $M = U + V = X + (U \cap V) + V = X + V$ y $X \cap V = 0$. Por lo tanto, X es un sumando directo de M.

(1)⇒(3) Por las hipótesis de **(1)** y por modularidad se tiene que
$U = X + (U \cap X')$ y $U \cap X' \ll M$.

(3)⇒(1) Si $M = X \oplus X'$, donde $X \subset U$, $U = X + Y$ y $Y \ll M$, entonces X' es un suplemento de X y consecuentemente un suplemento de $U = X + Y$, es decir, $U \cap X' = (X + Y) \cap X' \ll X'$. ■

Obsérvese que si $K \ll M$ y V es un suplemento de U en M, entonces V es un suplemento de $U + K$. En efecto, para $X \leq V$ con $U + K + X = M$, entonces $U + X = M$ y por lo tanto $X = V$.

Teorema 19 *Para un R-módulo M las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es suficientemente suplementado y cada submódulo suplemento es un sumando directo.*

2. *Cada submódulo de M está por encima de un sumando directo.*

3. a) *Cada submódulo no superfluo de M contiene un sumando directo no cero de M y*

   b) *Cada submódulo de M contiene un sumando directo máximo de M.*

Demostración:

(1)⇒(2) Para $U \leq M$ sean V un suplemento en M y X un suplemento de V en M, con $X \leq U$. Entonces, $M = X \oplus X'$, para algún $X' \leq M$. Como $U \cap V \ll M$, X' es un suplemento de $X + (U \cap V) = U$ (observación anterior) y entonces $U \cap X' \ll X'$. Por lo tanto, de la proposición 2.2.7 se tiene **(2)**.

(2)⇒(1) Claramente, M es suplementado y, por la proposición 2.2.7 cada submódulo U de M es de la forma $U = X + Y$, donde X es un sumando directo de M y $Y \ll M$. Como X es suplementado, por la proposición 2.2.6 se sigue que M es suficientemente suplementado y de la demostración (2)⇒(1) de 2.2.7 se tiene que los suplementos son sumandos directos.

(2)⇒(3) Sean $U \leq M$ y $M = X \oplus X'$, con $X \subset U$ y $U \cap X' \ll X'$. Si U no es superfluo en M entonces $X' \neq M$ y luego $X \neq 0$. Para un sumando directo X_1 de M con $X \subset X_1 \subset U$ se tiene que $X_1 = X \oplus (X_1 \cap X')$. Como $X_1 \cap X' \subset U \cap X' \ll X'$ obtenemos $X_1 \cap X' = 0$ y $X = X_1$.

(3)⇒(2) Sea $U \leq M$ y supongamos que X es un sumando directo máximo de M con $X \subset U$ y $M = X \oplus X'$. Si $U \cap X'$ no es superfluo en X', entonces existe un sumando directo no cero N de$M$ con $N \subset U \cap X'$. Entonces, la suma $(X \oplus N)$ es sumando directo de M, contradiciendo la elección de X. Por lo tanto, $U \cap X' \ll X'$. ■

Teorema 20 *Si un R-módulo N es proyectivo en $\sigma[M]$, entonces, para un submódulo $U \leq N$, son equivalentes:*

1. *Existe $V \leq N$ sumando directo con $U + V = N$ y $U \cap V \ll V$.*
2. *N/U tiene una cubierta proyectiva en $\sigma[M]$.*

Demostración:

(1)⇒(2) V es proyectivo en $\sigma[M]$ y para el epimorfismo ρ
$V \longrightarrow N \longrightarrow N/U$ se tiene que $Nuc\,\rho = U \cap V \ll V$. Por lo tanto, (V,ρ) es una cubierta proyectiva para N/U.

(2)⇒(1) Si $\pi : P \longrightarrow N/U$ es una cubierta proyectiva, entonces podemos completar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "\rho"] & \\ P \arrow[r, "\pi"] & N/U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con un morfismo $f : N \longrightarrow P$. Como π es epimorfismo superfluo, se tiene que f es suprayectivo y, por lo tanto, se escinde. Así, existe $g : P \longrightarrow N$ con $(f \circ g) = id_P$ y entonces $\pi = (\pi \circ f \circ g) = \rho \circ g$ de donde $U + g(P) = N$, $g(P)$ es una cubierta proyectiva de N/U y entonces $U \cap g(P) \ll g(P)$. ■

Lema 9 *Sea M un R-módulo proyectivo. Entonces, si U y V son suplementos mutuos en M se tiene que $U \cap V = 0$ y $M = U \oplus V$.*

Demostración:

U y V suplementos mutuos implica que $U \cap V \ll V$ y $U \cap V \ll U$ por lo que $\{(u, -u) \mid u \in U \cap V\} \subset (U \cap V, 0) + (0, U \cap V) \ll U \oplus V$. Este conjunto es el núcleo del morfismo $U \oplus V \longrightarrow M$, donde $(u, v) \mapsto u + v$ el cual, por hipótesis, se escinde. Por lo tanto, $U \cap V = 0$. ■

Definición 2.2.7 *Sea M un R-módulo. Decimos que un módulo N en $\sigma[M]$ es* ***semiperfecto en*** *$\sigma[M]$ si cada módulo cociente de N tiene una cubierta proyectiva en $\sigma[M]$.*

Teorema 21 *Sea M un R-módulo.*

1. *Un módulo proyectivo en $\sigma[M]$ es semiperfecto en $\sigma[M]$ si y sólo si es (suficientemente) suplementado.*
2. *Si N es un módulo semiperfecto en $\sigma[M]$, entonces:*
   a) *Cada cociente de N es semiperfecto.*
   b) *Si $\pi : P \longrightarrow N$ es un epimorfismo en $\sigma[M]$ con $Nuc\pi \ll P$, entonces P también es semiperfecto.*
   c) *$Rad(N) \ll N$ y N es suficientemente suplementado. Por lo tanto, el módulo cociente $N/Rad(N)$ es semisimple.*
3. *Un módulo en $\sigma[M]$ es semiperfecto si y sólo si tiene una cubierta proyectiva semiperfecta (suplementada) en $\sigma[M]$.*

Demostración:

(1) Se sigue del Teorema 20, pues del lema anterior se tiene que en un módulo proyectivo cada suplemento es un sumando directo.

(2)(a) Se sigue directamente de la definición.

(2)(b) Para $U \leq P$ se tiene el siguiente diagrama con morfismos canónicos

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ P/U \arrow[r, "g"] & N/\pi(U) \end{tikzcd}$$

donde g es epimorfismo con núcleo superfluo. Si $\pi' : Q \longrightarrow N/\pi(U)$ es una cubierta proyectiva, entonces existe $h : Q \longrightarrow P/U$ con $g \circ h = \pi'$ y $Nuc\ h \ll Q$. Por lo tanto, h es una cubierta proyectiva para P/U.

(2)(c) Sea $\pi : P \longrightarrow N$ una cubierta proyectiva de N. Entonces, por (1) y (2)(b) P es suficientemente suplementado y cada suplemento es un sumando directo, por el lema 9. Por el teorema 19, cada submódulo no superfluo contiene un sumando directo no cero. Del teorema 18, el radical de un módulo proyectivo en $\sigma[M]$ no contiene sumandos directos no triviales. Así, $Rad(P) \ll P$.
Como $P/Rad(P)$ es semisimple (P es suplementado) se tiene que $Rad(N) = \pi(Rad(P))$, por la Proposición 2.2.4, y entonces $Rad(N) \ll N$. Siendo la imagen de P, que es suficientemente suplementado, N es también suficientemente suplementado.

(3) Es consecuencia de (1) y (2). ■

Al inicio de esta sección, habíamos observado que dados M y N módulos Σ-autoproyectivos suplementados y epiequivalentes se tiene que $M/Rad(M) \cong N/Rad(N)$. Luego, por el teorema 19 (2)(c) $Rad(M) \ll M$ y $Rad(N) \ll N$ y el isomorfismo $\varphi : M/Rad(M) \longrightarrow N/Rad(N)$ se puede levantar a un isomorfismmo $\psi : M \longrightarrow N$. Por lo tanto, $M \cong N$.

Así, hemos probado que la clase de módulos Σ-autoproyectivos suplementados es epicorrecta.

2.2.3. La clase de los módulos semisimples.

Todo módulo semisimple es Σ-autoproyectivo, y en la sección anterior demostramos que esta clase es epicorrecta.

Capítulo 3

La clase $\sigma[M]$.

Teorema 22 *Sean M un R-módulo y $P \in \sigma[M]$. Si P es M-proyectivo, entonces son equivalentes:*

1. *P es un generador en $\sigma[M]$.*
2. *$Hom_R(P, E) \neq 0$ para cada módulo simple $E \in \sigma[M]$.*
3. *P genera a cada módulo simple en $\sigma[M]$.*
4. *P genera a cada submódulo de M.*

Demostración:

1)⇒2)⇒3) y **1)⇒4)** son obvias.

3)⇒1) Veamos que P genera a cada submódulo finitamente generado $N \leq M^{(\mathbb{N})}$. Claramente, P es N-proyectivo. Supongamos que $Tr(P, N) \neq N$. Entonces, existe $K \leq N$ máximo tal que $Tr(P, N) \subset K$. Por hipótesis, existe $f : P \longrightarrow N/K$ no nulo y, como P es N-proyectivo, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
N \arrow[r, "\rho"] & N/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

de donde $h(P) \subset Tr(P, N) \subset K$, es decir, $f = \rho \circ h = 0$, contradiciendo la elección de f. Así, $Tr(P, N) = N$ y por lo tanto P es un generador en $\sigma[M]$.

4)⇒3) Veamos que cada módulo simple $E \in \sigma[M]$ es la imagen homomorfa de algún submódulo de M. Como la cápsula M-inyectiva $\overline{E}$ de E en $\sigma[M]$ es M-generada, existe un $f \in Hom(M, \overline{E})$ no cero. Para este morfismo f, $E \subset f(M)$ y E es una imagen homomorfa de $f^{-1}(E) \subset M$. ■

A continuación, daremos una caracterización de un módulo semisimple por medio de $\sigma[M]$.

Teorema 23 *Para un R-módulo M es equivalente:*

1. *M es semisimple.*
2. *$\sigma[M]$ tiene un generador semisimple.*
3. *En $\sigma[M]$ cada módulo simple es proyectivo.*

Demostración:

1)⇔2) Cada submódulo (finitamente generado) de $M^{(\mathbb{N})}$ es un sumando directo, por lo tanto M-generado y M es un generador en $\sigma[M]$.

1)⇒3) Es claro.

3)⇒2) La suma directa de todos los módulos simples mutuamente no isomorfos en $\sigma[M]$ es proyectivo en $\sigma[M]$ y genera a todos sus sumandos simples. Por el teorema anterior, es un generador en $\sigma[M]$. ■

Ahora, daremos una caracterización de módulos autoinyectivos indescomponibles.

Teorema 24 *Para un R-módulo autoinyectivo M lo siguiente es equivalente:*

1. *M es indescomponible.*
2. *M es uniforme.*
3. *M es una cápsula M-inyectiva para cada submódulo cíclico no cero de M.*
4. *$End_R(M)$ es un anillo local.*

Demostración:

1)⇒2) Para cada submódulo $U \leq M$, su cápsula M-inyectiva $\overline{U}$ es un sumando directo de M, pues M es autoinyectivo. Como M es indescomponible, $\overline{U} = M$ y $U \trianglelefteq M$.

2)⇒1), 2)⇔3) y **4)⇒1)** son claras.

2)⇒4) Para cualquier $f \in End_R(M)$, se tiene que $Nuc\ f \cap Nuc\ (1-f) = 0$. Si $Nuc\ f = 0$, entonces $f(M)$ es M-inyectivo y $f(M)$ es un sumando directo de M, es decir, $f(M) = M$ y f es un isomorfismo. Si $Nuc\ f \neq 0$, entonces 2) implica que $Nuc\ (1-f) = 0$ y $1-f$ es un isomorfismo. ■

Corolario 6 *Un R-módulo E es simple si y sólo si $End_R(E)$ es un anillo local.*

Proposición 3.0.8 *Sean $A_1, \ldots, A_n$ una colección finita de objetos en una categoría aditiva $\mathfrak{C}$. Una familia $\{u_i : A_i \longrightarrow A \mid i = 1, \ldots, n\}$ de morfismos es un coproducto para la familia $\{A_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ si y sólo si existen morfismos $\{\rho_i : A \longrightarrow A_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ tales que $\rho_i u_i = \delta_{ij}$ y $\sum_{k=1}^{n} u_k \rho_k = 1_A$.*

Demostración:

⇒⌋ Si $\{u_i : A_i \longrightarrow A \mid i = 1, \ldots, n\}$ es un coproducto, entonces existen morfismos $\{\rho_i : A \longrightarrow A_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ que satisfacen $\rho_i u_j = \delta_{ij};\ i, j = 1, \ldots, n$. Así, para cada i,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} u_k \rho_k\right) u_i = \sum_{k=1}^{n} u_k \rho_k u_i = \sum_{k=1}^{n} u_k \delta_{ki} = u_i = 1_A u_i$$

Así, por definición de coproducto, $\sum_{k=1}^{n} u_k \rho_k = 1_A$.

⇐⌋ Sea $\{f_i : A_i \longrightarrow Y \mid i = 1, \ldots, n\}$ una familia de morfismos. Definimos $\phi : A \longrightarrow Y$ como $\phi(a) = (f_i \rho_i)(a)$. Así,

$$\phi u_i = \phi(1_A u_i) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n} u_k \rho_k\right) u_i = (f_i \rho_i)\left(\sum_{k=1}^{n} u_k \rho_k\right) u_i = (f_i \rho_i) u_i = f_i 1_A = f_i.$$

Por lo tanto, $\{u_i : A_i \longrightarrow A \mid i = 1, \ldots, n\}$ es el coproducto de la familia $\{A_i \mid i = 1, \ldots, n\}$.■

Proposición 3.0.9 *En una categoría aditiva $\mathfrak{C}$:*

1. *Si $\{u_i : A_i \longrightarrow A \mid i = 1, 2\}$ y $\{\rho_i : A \longrightarrow A_i \mid i = 1, 2\}$ son morfismos tales que*
$$u_1\rho_1 + u_2\rho_2 = 1_A \text{ y } \rho_i u_i = 1_{A_i},\ i = 1, 2$$
entonces A es el coproducto de u_1 y u_2.

2. *Si $u_1 : A_1 \longrightarrow A$ es una corretracción y $\rho_1 u_1 = 1_A$ para $\rho_1 : A \longrightarrow A_1$, entonces $e_1 = u_1\rho_1$ es idempotente y u_1 es un núcleo de $1_A - e_1$.*

3. *Si $e_1 \in End_{\mathfrak{C}}(A)$ es idempotente, $u_1 : A_1 \longrightarrow A$ es un núcleo de e_1 y $u_2 : A_2 \longrightarrow A$ es un núcleo de $1_A - e_1$, entonces A es el coproducto de u_1 y u_2, $A = Nuc\ e_1 \oplus Nuc\ (1 - e_1)$.*

Demostración:

1) Las relaciones dadas implican que $u_2\rho_1 = u_1\rho_2 = 0$. Por ejemplo, $u_1\rho_1 + u_2\rho_2 = 1_A \Rightarrow u_2\rho_1u_1\rho_1 + u_2\rho_1u_2\rho_2 = u_2\rho_1 \Rightarrow u_2\rho_1 + u_2\rho_1u_2\rho_1 = u_2\rho_1 \Rightarrow u_2\rho_1u_2\rho_1 = 0 \Rightarrow u_2\rho_1 = 0$. Luego, esta demostración se sigue de la proposición anterior.

2) Obviamente, e_1 es idempotente. Además, $(1_A - e_1)u_1 = 0$, de donde $u_1 \leq Nuc\ (1_A - e_1)$. Si $(1_A - e_1)f = 0$, entonces $u_1(\rho_1 f = (u_1\rho_1)f) = e_1 f = f$, y $\rho_1 f$ es único con esta propiedad pues u_1 es monomorfismo. Por lo tanto, u_1 es un núcleo de $(1_A - e_1)$.

3) Como u_2 es un núcleo de $(1_A - e_1)$ y como $(1_A - e_1)e_1 = 0$, existe un morfismo $\rho_2 : A \longrightarrow A_2$ morfismo tal que $u_2\rho_2 = e_1$. Así, $u_2\rho_2u_2 = e_1u_2 = u_2$, esto es, $u_2(\rho_2u_2 - 1_{A_2}) = 0$, de donde $\rho_2u_2 = 1_{A_2}$ pues u_2 es monomorfismo. Análogamente, existe un morfismo $\rho_1 : A \longrightarrow A_1$ morfismo tal que

$$u_1\rho_1 = 1_A - e_1 \text{ y } \rho_1u_1 = 1_{A_1}$$

Así, $u_1\rho_1 + u_2\rho_2 = (1_A - e_1) + e_1 = 1_A$. Luego, esta demostración se sigue de 1).■

Definición 3.0.8 *Una **categoría idemsplit** es una categoría aditiva $\mathfrak{C}$ en la cual, para cada objeto $A \in \mathfrak{C}$ y cada idempotente $e \in End_{\mathfrak{C}}(A)$ existen morfismos*
$$B \xrightarrow{p} A \xrightarrow{q} B$$
tales que $qp = 1$ y $e = pq$

Proposición 3.0.10 *Si*

$$A \xrightarrow{q} B \xrightarrow{p'} A$$

son morfismos en una categoría idemsplit tales que $u = p'q$ es un automorfismo de A, entonces existe un monomorfismo $q_1 : A_1 \longrightarrow B$ tal que 1_B es el coproducto de q y q_1, esto es, $B \cong A \oplus A_1$.

Demostración:

Claramente, $p = (p'q)^{-1}p'$ y se tiene que $pq = 1_A$ y $e = qp$ es idempotente, de donde $1-e$ es idempotente. Luego, por hipótesis, para el idempotente $1-e$ existe un diagrama

$$A_1 \xrightarrow{q_1} B \xrightarrow{p_1} A_1$$

tal que $p_1q_1 = 1$ y $q_1p_1 = 1 - e$. Por 2) de la proposición anterior, q es el núcleo de $1_A - e$ y q_1 es el núcleo de e. Entonces, por 3) de la proposición anterior, $B = Nuc\ e \oplus Nuc\ (1 - e) \cong A \oplus A_1$.■

Obsérvese que este mismo resultado implica que cualquier categoría abeliana es idemsplit.

Lema 10 ***(del intercambio)*** *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría idemsplit. Si*

$$A \oplus B = \coprod_{i=1}^{n} C_i$$

y si $R = End_{\mathfrak{C}}A$ es un anillo local, entonces existe $i \leq n$ tal que $C_i \cong A \oplus C_i'$ y $B \cong C_i' \oplus \coprod_{j\neq i}^{n} C_j$. En particular, si cada C_i es indescomponible entonces $C_i \cong A$ y $B \cong \coprod_{j\neq i} C_j$.

Demostración:

Sean q_A y q_B (p_A y p_B) las respectivas inclusiones (proyecciones) en el primer coproducto $A \oplus B$ y $\{q_i : C_i \longrightarrow X\}_{i=1}^{n}$ ($\{p_i : X \longrightarrow C_i\}_{i=1}^{n}$) las respectivas inclusiones (proyecciones) en el segundo coproducto. Entonces,

$$1_A = p_Aq_A = p_A \left(\sum_{i=1}^{n} q_ip_i \right) q_A = \sum_{i=1}^{n} p_Aq_ip_iq_A.$$

Como R es local, uno de los morfismos $p_Aq_ip_iq_A$ debe de ser una unidad. Reetiquetando, si fuera necesario, podemos suponer que $(p_Aq_1)(p_1q_A)$ es un automorfismo de A. De acuerdo a la proposición anterior, existe $q_1' : C_1' \longrightarrow$

C_1 tal que C_1 es el coproducto de $p_1 q_A$ y q_1', $C_1 = A \oplus C_1'$. Usando esto para refinar la descomposición $C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$ a $A \oplus C_1' \oplus \cdots \oplus C_n$ obtenemos un isomorfismo del refinamiento en $A \oplus B$ tal que la composición

$$A \longrightarrow A \oplus B = A \oplus C_1' \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n \longrightarrow A$$

es un automorfismo. Así, de la proposición anterior se sigue que
$B \cong C_1' \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$.■

Teorema 25 *Para un módulo M, son equivalentes:*

1. *La clase de todos los módulos en $\sigma[M]$ es monocorrecta (epicorrecta).*
2. *Cada módulo (inyectivo) en $\sigma[M]$ es monocorrecto.*
3. *Cada módulo en $\sigma[M]$ es epicorrecto.*
4. *M es semisimple.*

Demostración:

1)⇒2) y **1)⇒3)** son claras.

2)⇒4) Supongamos que M no es semisimple. Entonces, existe algún módulo $N \in \sigma[M]$ que no es M-inyectivo. Sea $\overline{N}$ la cápsula M-inyectiva de N y sea $L = Tr(\sigma[M], \overline{N}^{\mathbb{N}})$, el producto numerable de $\overline{N}$ en $\sigma[M]$. Entonces, L es M-inyectivo y es monoequivalente a $N \oplus L$, que no es M-inyectivo. Entonces, L y $N \oplus L$ no son isomorfos, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, M es semisimple. ■

4)⇒1) y **4)⇒3)** Si M es semisimple, entonces todos los módulos en $\sigma[M]$ son semisimples y las implicaciones se siguen de 2.1.4 y 2.2.3 ■

3)⇒4) Supongamos que M no es semisimple. Entonces, por el teorema 21 existe un módulo simple $E \in \sigma[M]$ que no es M-proyectivo, es decir, existe un epimorfismo $\rho : N \longrightarrow E$ en $\sigma[M]$ que no se escinde. Supongamos que N tiene un sumando directo semisimple K. Si $\rho(K) = E$, entonces la restricción $\rho : K \longrightarrow E$ se escinde, contradiciendo la elección de ρ. Entonces, podemos suponer que N no tiene sumandos directos simples. Sea $L = N^{(\mathbb{N})}$. Entonces, L y $E \oplus L$ son epiequivalentes. Luego, por el lema 10 se tiene que E es isomorfo a un sumando directo de N, contradiciendo la elección de N. Así, cada módulo simple en $\sigma[M]$ es M-proyectivo, es decir, M es semisimple. ■

Como un caso especial, se tiene el siguiente corolario cuya demostración se sigue del teorema anterior haciendo $M = R$.

Corolario 7 *Para el anillo R, son equivalentes:*

1. *La clase de todos los R-módulos izquierdos es monocorrecta (epicorrecta).*

2. *Cada R-módulo (inyectivo) izquierdo es monocorrecto.*

3. *Cada R-módulo (proyectivo) izquierdo es epicorrecto.*

4. *R es semisimple izquierdo (= semisimple derecho).*

Capítulo 4

La clase de los módulos débilmente M-inyectivos.

Definición 4.0.9 *Sean M y U R-módulos. U es llamado **débilmente M-inyectivo** si cada diagrama en $R-MOD$*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M^{(\mathbb{N})} \\ & U & \end{tikzcd}$$

con renglón exacto y K finitamente generado puede ser extendido conmutativamente por un morfismo $M^{(\mathbb{N})} \longrightarrow U$, es decir, $Hom(-, U)$ es exacto con respecto al renglón dado.

Definición 4.0.10 *Un R-módulo M es llamado **localmente neteriano** si cada submódulo finitamente generado de M es neteriano.*

Proposición 4.0.11 *Sea M un R-módulo. Si M es localmente neteriano entonces cada módulo débilmente M-inyectivo es M-inyectivo.*

Demostración:

Sean N un submódulo finitamente generado de M y U un R-módulo débilmente M-inyectivo. Entonces, cada submódulo $K \subset N$ es finitamente generado y cada diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & N \subset M \\ & U & \end{tikzcd}$$

puede ser extendido conmutativamente por un morfismo $M \longrightarrow U$. Por lo tanto, U es N-inyectivo para cada submódulo finitamente generado $N \subset M$ y entonces U es M-inyectivo. ■

Teorema 26 *Para un módulo M son equivalentes:*

1. *La clase de los módulos débilmente M-inyectivos en $\sigma[M]$ es monocorrecta.*

2. *M es localmente neteriano.*

Demostración:

2)⇒1) Si M es localmente neteriano, entonces cada módulo débilmente M-inyectivo es M-inyectivo y la clase de estos módulos es monocorrecta (sección 2.1.3).

1)⇒2) Esta demostración será análoga a 2)⇒4) del teorema anterior. Supongamos que M no es localmente neteriano. Entonces, existe algún módulo débilmente M-inyectivo $N \in \sigma[M]$ que no es M-inyectivo. Sea $\overline{N}$ la cápsula M-inyectiva de N y sea $L = Tr(\sigma[M], \overline{N}^{(\mathbb{N})})$. Entonces, L es M-inyectivo y es monoequivalente a $N \oplus L$, que no es M-inyectivo. Entonces, N y $N \oplus L$ no son isomorfos, lo cual es una contradicción.■

Recordemos ahora que cuando $M = R$, los módulos débilmente R-inyectivos son los módulos FP-inyectivos.

Así, del teorema anterior se tiene el siguiente

Corolario 8 *Para un anillo R, son equivalentes:*

1. *La clase de los R-módulos izquierdos FP-inyectivos es monocorrecta.*

2. *R es neteriano izquierdo.*

Capítulo 5

La clase de los módulos planos.

Lema 11 *Sea $f : M \longrightarrow N$ un epimorfismo superfluoy sea $\rho : P \longrightarrow M$ un R-homomorfismo. Entonces, ρ es una cubierta proyectiva si y sólo si $f\rho : P \longrightarrow N$ es una cubierta proyectiva.*

Demostración:

Claramente, es suficiente probar que ρ es un epimorfismo superfluo si y sólo si $f\rho$ lo es. Supongamos que ρ, así como f, es un epimorfismo superfluo. Entonces, $f\rho$ es un epimorfismo. Veamos ahora que $f\rho$ es superfluo: si h es un homomorfismo tal que $f\rho h$ es epimorfismo, entonces ρh es epimorfismo, de donde h es epimorfismo. Por lo tanto, $f\rho$ es superfluo. Recíprocamente, si $f\rho$ es un epimorfismo superfluo, entonces ρ es epimorfismo y es superfluo pues $Nuc\rho \leq Nuc\ f\rho \ll P$.$\blacksquare$

Lema 12 *Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión en el anillo R. Sea F el R-módulo con base $x_1, x_2, \ldots$, sea*

$$y_n = x_n - a_n x_{n+1} \ (n \in \mathbb{N})$$

y, finalmente, sea G el submódulo de F generado por $y_1, y_2, \ldots$ Entonces,

1. *G es libre, con base $y_1, y_2, \ldots$*
2. *$G = F$ si y sólo si para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n \geq k$ tal que $a_k \cdots a_n = 0$.*

Demostración:

Sea $n \geq k$ y sea $r_k, \ldots, r_n \in R$. Entonces, mediante un cálculo sencillo podemos notar que

$$r_k y_k + \cdots + r_n y_n = r_k y_k + (r_{k+1} - r_k a_k) x_{k+1} + \cdots + (r_n - r_{n-1} a_{n-1}) x_n - r_n a_n x_{n+1}.$$

Entonces, si $r_k y_k + \cdots + r_n y_n = 0$ la independecia de las x's claramente implica que $r_k = r_{k+1} = \cdots = r_n = 0$ y, por lo tanto, las y's son independietes, con lo que (1) queda demostrado.

Supongamos ahora $x_k \in G$, digamos $x_k = r_1 y_1 + \cdots + r_n y_n$. Entonces, claramente $r_1 = \cdots = r_{k-1} = 0$. Comparando los coeficientes de $x_k, \ldots, x_n$ en esta ecuación, vemos que $r_k = 1, r_{k+1} = r_k a_k, r_{k+2} = r_{k+1} a_{k+1}, \ldots, r_n = r_{n-1} a_{n-1}$ y $r_n a_n = 0$. Entonces, $a_k a_{k+1} \cdots a_n = 0$ lo que nos da la necesidad en (2). Para el regreso, sea $k \leq n$. Entonces,

$$x_k = y_k + a_k y_{k+1} + \cdots + (a_k \cdots a_{n-1}) y_n + (a_k \cdots a_n) x_{n+1}.$$

Así, si $a_k \cdots a_n = 0$, entonces $x_k \in G$.$\blacksquare$

Lema 13 *Con las hipótesis del lema anterior, si G es un sumando directo de F entonces la cadena $a_1 R \geq a_1 a_2 R \geq \cdots$ de ideales principales derechos termina.*

Demostración:

Por el lema anterior, parte (1), existe un isomorfismo $F \longrightarrow G$ dado por $x_n \longmapsto y_n$. Supongamos que la inclusión $G \hookrightarrow F$ se escinde. Entonces, existe un endomorfismo $s \in End({}_R F)$ tal que $y_n s = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ escribamos

$$x_m s = \sum_k c_{mk} x_k$$

como una combinación lineal de $x_1, x_2, \ldots$ Entonces,

$$x_n = y_n s = (x_n - a_n x_{n+1}) s = \sum_k (c_{nk} - a_n c_{n+1k}) x_k,$$

y entonces

$$c_{nk} - a_n c_{n+1k} = \delta_{nk}.$$

Ahora, para alguna k, $c_{1n} = 0$ para toda $n \geq k$. Luego, para cada $n \geq k$

$$\begin{aligned}
-a_1 \cdots a_n c_{n+1n} &= a_1 \cdots a_{n-1}(1 - c_{nn}) \\
&= a_1 \cdots a_{n-1} - a_1 \cdots a_{n-1} c_{nn} \\
&= a_1 \cdots a_{n-1} a_1 \cdots a_{n-2} c_{n-1n} \\
&\vdots \\
&= a_1 \cdots a_{n-1} - a_1 c_{1n} \\
&= a_1 \cdots a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Esto es, para cada $n \geq k$, $a_1 \cdots a_{n-1} \in a_1 \cdots a_n R$.$\blacksquare$

Definición 5.0.11 *Decimos que un subconjunto I de un anillo R es* ***T-nilpotente izquierdo*** *en caso de que para cada sucesión $a_1, a_2, \dots$ en I exista una n tal que $a_1 \cdots a_n = 0$*

El subconjunto I es ***T-nilpotente derecho*** *en caso de que para cada sucesión $a_1, a_2, \dots$ en I, $a_n \cdots a_1 = 0$ para alguna n.*

Lema 14 *Sea J un ideal izquierdo en un anillo R. Entonces, son equivalentes:*

1. *J es T-nilpotente izquierdo.*
2. *$JM \neq M$ para cada R-módulo izquierdo M no cero.*
3. *$JM \ll M$ para cada R-módulo izquierdo M no cero.*
4. *$JF \ll F$ para el módulo libre numerablemente generado $F = R^{(\mathbb{N})}$.*

Demostración:

(1)⇒(2) Supongamos que $JM = M \neq 0$. Sea $\Im$ el conjunto de sucesiones finitas $a_1, \dots, a_n$ en J tales que

$$a_1 \cdots a_n \in J \setminus l_R(M).$$

Entonces, como $JM = M \neq 0$, $J \nsubseteq l_R(M)$ y entonces $\Im$ contiene sucesiones de longitud uno. Pero también, si $a_1, \dots, a_n$ pertenece a $\Im$, entonces

$$0 \neq a_1 \cdots a_n M = a_1 \cdots a_n JM$$

y, entonces, existe una sucesión $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ en $\Im$. Como $0 \notin J \setminus l_R(M)$, la inducción garantiza una sucesión $a_1, a_2, \dots$ tal que $a_1 \cdots a_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

(2)⇒(3) Supongamos que M es un R-módulo izquierdo y $K < M$ un submódulo propio. Entonces, por (2), $J(M/K) \neq M/K$. Pero $(JM + K)/K = J(M/K)$ cuando $JM + K \neq M$, es decir, $JM \ll M$.

(3)⇒(4) Es claro.

(4)⇒(1) Sea $F \cong R^{(\mathbb{N})}$ con base $x_1, x_2, \dots$, sea $a_1, a_2, \dots$ una sucesión en J y sea $G = \sum_{i=1}^{\infty} R(x_i - a_i x_{i+1})$, como en el lema 12. Entonces, claramente $G + JF = F$ pero, por la hipótesis, esto implicaría que $G = F$. Entonces, por el lema 12 inciso 2, $a_1 \cdots a_n = 0$ para alguna n. ■

Proposición 5.0.12 *Sea R un anillo con radical $J(R) = J$. Si P es un R-módulo izquierdo proyectivo, entonces $Rad(P) = JP$.*

Demostración:

P proyectivo implica que P es sumando directo de algún módulo libre $R^{(A)} = P \oplus P'$. Entonces,

$$Rad(P) \oplus Rad(P') = Rad(R^{(A)}) = (Rad(R))^{(A)} = J^{(A)} = JR^{(A)} = JP \oplus JP'.$$

Entonces, como $JP \leq Rad(P)$ y $JP' \leq Rad(P')$, se tiene que $Rad(P) = JP$.$\blacksquare$

Proposición 5.0.13 *Sea P un R-módulo proyectivo izquierdo con anillo de endomorfismos $S = End({}_RP)$. Sea $a \in S$. Entonces, $a \in J(S)$ si y sólo si $Im(a) \ll P$.*

Demostración:

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que $Im(a) \ll {}_RP$. Entonces, basta con demostrar que $Sa \ll {}_SS$. Así, supongamos que $I \leq {}_SS$ y que $Sa + I = S$. Entonces, $1_P = sa + b$ para alguna $s \in S$ y $b \in I$. Luego, $P = P1_P \leq Psa + Pb \leq Im(a) + Pb$ y entonces $Pb = P$. Pero entonces b es un epimorfismo $b : P \longrightarrow P$ y como P es proyectivo b se escinde y existe $c \in S$ con $1_P = cb \in I$. Por lo tanto, $I = S$ y $Sa \ll S$.

$\Rightarrow\rfloor$ Sea $a \in J(S)$ y supongamos que $K \leq P$ con $Im(a) + K = P$. Entonces, $\eta_K : P \longrightarrow P/K$ es el epimorfismo natural y $a\eta_K : P \longrightarrow P/K$ es epi. Así, tomando $s \in S$ tal que

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "\eta_K"] & \\ P \arrow[r, "a\eta_K"'] & P/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta, tenemos que $(1 - sa)\eta_K = 0$. Pero, como $a \in J(S)$, $1 - sa$ es invertible y $\eta_K = 0$. Por lo tanto, $K = P$. $\blacksquare$

Corolario 9 *Sea $J = J(R)$. Si P es un R-módulo izquierdo proyectivo tal que $JP \ll P$, entonces*

$$J(End({}_RP)) = Hom_R(P, JP) \text{ y } End({}_RP)/J(End({}_RJP)) \cong End({}_RP/JP).$$

Demostración:

Como $Rad(P) = JP$ (proposición 5.0.12), la hipótesis $JP \ll P$ nos asegura que algún submódulo de P es superfluo si y sólo si está contenido en JP. En particular, por la proposición anterior, un endomorfismo a de P pertenece a $J(End(_RP))$ si y sólo si $Im(a) \leq JP$. Entonces, $J(End(_RP)) = Hom_R(P, JP)$.
Ahora, como JP es estable bajo endomorfismos de P,

$$\varphi(s) : (p + JP) \longmapsto ps + JP$$

define un homomorfismo de anillos $\varphi : End(_RP) \longrightarrow End(_RP/JP)$; y como P es proyectivo φ es suprayectivo.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta_{JP}"] \arrow[d, "s"'] & P/JP \arrow[d, "\varphi(s)"] \\ P \arrow[r, "\eta_{JP}"'] & P/JP \end{tikzcd}$$

Pero, claramente, se tiene que $Nuc\varphi = Hom_R(P, JP)$ y entonces

$$End(_RP)/J(End(_RP)) \cong End(_RP/JP).\blacksquare$$

Corolario 10 *Sea R un anillo con radical J, sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $e \in R$ un idempotente no cero. Entonces,*

$$J(M_{n\times n}(R)) = M_{n\times n}(J) \text{ y } J(eRe) = eJe.$$

Demostración:

Existe un isomorfismo natural

$$\rho : M_{n\times n}(R) \longrightarrow End(_RR^{(n)}).$$

Ahora, $JR^{(n)} = J^{(n)}$ y claramente $\rho([r_{ij}]) \in Hom_R(R^{(n)}, J^{(n)})$ si y sólo si $[r_{ij}] \in M_{n\times n}(J)$. Entonces, el resultado es consecuencia del corolario anterior.
Por otro lado, existe un isomorfismo natural

$$\rho : eRe \longrightarrow End(_RRe)$$

y claramente $\rho(ere) \in Hom_R(Re, Je)$ si y sólo si $ere \in J$. Y de nuevo, el resultado se obtiene por el corolario anterior. $\blacksquare$

Proposición 5.0.14 *Cada módulo proyectivo no cero contiene un submódulo máximo.*

dem Sea ${}_RP$ proyectivo. Entonces, podemos suponer que existe un R-módulo izquierdo libre F tal que $F = P \oplus P'$. Si P no contiene submódulos máximos, entonces por la Proposición 5.0.12 se tiene que

$$P = JP \subseteq JF.$$

Veamos que esto obliga $P = 0$. Sea $x \in P$, sea e un endomorfismo idempotente de F tal que $Fe = P$ y sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una base libre para F. Entonces, para algún subconjunto finito $H \subseteq A$ y algún $r_\alpha \in R$ $(\alpha \in H)$,

$$x = \sum_{\alpha \in H} r_\alpha x_\alpha.$$

Además, para cada $\alpha \in H$, existen subconjuntos finitos $H_\alpha \subseteq A$ y $a_{\alpha\beta} \in J$ $(\beta \in H_\alpha)$ tales que

$$x_\alpha e = \sum_{\beta \in H_\alpha} a_{\alpha\beta} x_\beta.$$

Luego, poniendo ceros donde sea necesario, podemos suponer que todas estas sumas se toman sobre un subconjunto finito común $K \subseteq A$ para así obtener

$$0 = x - xe = \left(\sum_{\alpha \in K} r_\alpha x_\alpha\right) - \left(\sum_{\alpha \in K} r_\alpha x_\alpha e\right) =$$

$$\left(\sum_{\alpha \in K} r_\alpha \left(\sum_{\beta \in K} \delta_{\alpha\beta} x_\beta\right)\right) - \left(\sum_{\alpha \in K} r_\alpha \left(\sum_{\beta \in K} a_{\alpha\beta} x_\beta\right)\right) =$$

$$\sum_{\beta \in K} \left(\sum_{\alpha \in K} r_\alpha \left(\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}\right)\right) x_\beta.$$

Como las x_β son independientes, esta ecuación nos da la ecuación de matrices

$$[r_\alpha](I_n - [a_{\alpha\beta}]) = [0] \in M_{1\times n}(R),$$

donde $n = |K|$ e I_n es la matriz identidad en $M_{n\times n}(R)$. Pero, por (poner qué resultado), $[a_{\alpha\beta}] \in J(M_{n\times n}(R))$ y por lo tanto es casiregular. Entonces, $I_n - [a_{\alpha\beta}]$ tiene un inverso en $M_{n\times n}(R)$ y $[r_{\alpha\beta}] = [0] \in M_{1\times n}(R)$. Es decir,

$$x = \sum_{\alpha \in K} r_\alpha x_\alpha = 0. \blacksquare$$

Definición 5.0.12 *Sean I un ideal en un anillo R y $(g+I)$ un elemento idempotente de R/I. Decimos que este idempotente se puede* ***levantar*** *(a e)* ***módulo*** *I si existe un idempotente $e \in R$ tal que $g+I = e+I$. Decimos que los idempotentes se* ***levantan módulo*** *I si cada idempotente en R/I puede ser levantado a un idempotente en R/I.*

Proposición 5.0.15 *Si I es un nilideal en un anillo R, los idempotentes se levantan módulo I.*

Demostración:

Supongamos que I es un nilideal en R y que $g \in R$ satisface $g+I = g^2+I$. Entonces, siendo n el índice de nilpotencia de $g-g^2$, podemos usar la fórmula del binomio como sigue:

$$0 = (g-g^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} g^{n-k}(-g^2)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} g^{n+k} =$$

$$g^n - g^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} g^{k-1} \right)$$

para obtener $t = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} g^{k-1} \in R$ tal que

$$g^n = g^{n+1}t \text{ y } gt = tg.$$

Ahora,

$$e = g^n t^n = (g^{n+1}t)t^n = g^{n+1}t^{n+1} =$$

$$g^{n+2}t^{n+2} = \cdots = g^{2n}t^{2n} = e^2,$$

y entonces $e = g^n t^n$ es idempotente y además

$$g + I = g^n + I = g^{n+1}t + I =$$

$$(g^{n+1}+I)(t+I) = (g+I)(t+I) = gt + I$$

por lo que $g + I = (g+I)^n = (gt+I)^n = e + I$.$\blacksquare$

Definición 5.0.13 *Un anillo R es* ***perfecto izquierdo (derecho)*** *si cada uno de sus módulos izquierdos (derechos) tiene una cubierta proyectiva.*

Teorema 27 ***(Bass)*** *Sea R anillo con radical $J = J(R)$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *R es perfecto izquierdo.*

2. *R/J es semisimple y J es T-nilpotente izquierdo.*

3. *R/J es semisimple y cada R-módulo izquierdo no cero contiene un submódulo máximo.*

4. *Cada R-módulo izquierdo plano es proyectivo.*

5. *R satisface la condición mínima para ideales principales derechos.*

6. *R no contiene conjuntos infinitos de idempotentes ortogonales y cada R-módulo derecho no cero contiene un submódulo mínimo.*

Demostración:

(1)⇒(3) Supongamos que R es perfecto izquierdo. Entonces, R/J es semisimple. Más aún, si ${}_RM \neq 0$ entonces existe un módulo proyectivo P con submódulo superfluo $K \ll P$ tal que $M \cong P/K$. Como P es proyectivo, P contiene un submódulo máximo L (Proposición 5.0.14). Como $K \ll P$, $K \subseteq L$. Luego, L/K es un submódulo máximo en $P/K \cong M$.

(3)⇒(2) Como J anula a cada módulo simple entonces $JM \neq M$ siempre que ${}_RM \neq 0$. Luego, esta implicación se sigue del Lema 14.

(2)⇒(1) R es semiperfecto, por la Proposición 5.0.15. Sea M un R-módulo no cero. Entonces, M/JM es semisimple por lo que ([Anderson-Fuller], 27.10c) existe un conjunto indicado $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ de idempotentes primitivos en R tales que

$$\bigoplus_A Re_\alpha/Je_\alpha \cong M/JM.$$

Sea $P = \oplus_A Re_\alpha$. Como J es T-nilpotente izquierdo, por el Lema 13 $JP \ll P$ y $JM \ll M$. Por lo tanto, M tiene una cubierta proyectiva (Lema 11).

(1)⇒(4) Sea ${}_RU$ plano y sea $f : P \longrightarrow U$ una cubierta proyectiva. Entonces, $K = Nuc\ f \ll P$ y entonces, por cómo está caracterizado el radical y la Proposición 5.0.12, $K \leq JP$. Como ${}_RP$ y ${}_RU$ son planos, los morfismos

$$\mu_1 : J \otimes_R P \longrightarrow JP \text{ y } \mu_2 : J \otimes_R U \longrightarrow JU$$

con $\mu_1(j \otimes p) = jp$ y $\mu_2(j \otimes u) = ju$ son isomorfismos. Es fácil ver que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & JP \arrow[r, "(f|JP)"] & JU \\
J \otimes K \arrow[r, "J\otimes i_K"] & J \otimes_R P \arrow[u, "\mu_1"] \arrow[r, "J\otimes f"] & J \otimes_R U \arrow[u, "\mu_2"']
\end{tikzcd}$$

conmuta (donde $i_K : K \longrightarrow P$ es el morfismo inclusión). Por lo tanto, como el renglón de abajo es exacto y μ_1 y μ_2 son isomorfismos, tenemos que

$$K = Nuc\ f = Nuc(f|JP) = \mu_1(Nuc(J \otimes f)) =$$

$$\mu_1(Im(J \otimes i_K)) = JK.$$

Entones, $JK = K$, pero entonces, como (1)$\Leftrightarrow$(2), $K = 0$ (Lema 14) y $U \cong P$ es proyectivo.

(5)$\Rightarrow$(6) R no contiene conjuntos infinitos de idempotentes ortogonales pues si $e_1, e_2, \ldots$ son idempotentes ortogonales no cero, entonces $(1-e_1)R > (1-e_1-e_2)R > \cdots$. Supongamos $0 \neq x \in M$ y que xR no contiene submódulos simples. Entonces, como el mismo xR no es simple, existe $a_1 \in R$ con $xR > xa_1R > 0$ tal que xa_1R no contiene submódulos simples. Luego, procediendo inductivamente podemos obtener una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ en R tal que

$$xa_1R > xa_1a_2 > \cdots$$

Por lo tanto, $a_1R > a_1a_2R \cdots$ contradiciendo (5).

(6)$\Rightarrow$(2) Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión en J y supongamos que $a_1 \cdots a_n \neq 0$ para toda n. Entonces, por el Principio del Máximo, existe un ideal derecho máximo $I \leq R_R$ con respecto a $a_1 \cdots a_n \notin I$ $(n = 1, 2, \ldots)$.
Ahora, R/I es un R-módulo no cero, entonces, por (5), existe un ideal derecho K con $I < K < R_R$ y K/I simple. Por maximidad, como K/I es simple, existe $r \in R$ con

$$(a_1 \cdots a_n)(1 - a_{n+1}r) \in I.$$

Pero $a_{n+1} \in J$, por lo que $1 - a_{n+1}r$ es invertible. Esto claramente contradice que $a_1 \cdots a_n \notin I$. Por lo tanto, J es T-nilpotente izquierdo. En particular, J es nilpotente así es que los idempotentes se levantan módulo J (Proposición 5.0.15).
Ahora, usando la hipótesis de que R no contiene conjuntos infinitos de idempotentes ortogonales, se tiene que R contiene un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos $e_1, \ldots e_n$. Como los idempotentes se levantan módulo J, éstos también deben de ser primitivos módulo J. Pero por (6), cada $(e_iR + J)/J$ contiene un ideal derecho mínimo de R/J. Entonces, como los ideales derechos mínimos de un anillo con radical cero son sumandos directos, $(e_iR + J)/J$ debe de ser simple. Por lo tanto, R/J es semisimple.$\blacksquare$

Teorema 28 *Para un anillo T con suficientes idempotentes, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La clase de los T-módulos planos izquierdos es epicorrecta.*

2. *T es perfecto izquierdo.*

Demostración:

(1)⇒(2) Modificaremos ligeramente la demostración de (3)⇒(4) del Teorema 25 del Capítulo 3, haciendo $M = R$, y usaremos que T es perfecto izquierdo si y sólo si cada T-módulo izquierdo plano es proyectivo (Teorema 27). Supongamos que existe un T-módulo plano que no es proyectivo y sea $P \longrightarrow F$ un epimorfismo, donde P es un T-módulo proyectivo. Sea $L = P^{(\mathbb{N})}$. Entonces, L y $F \oplus L$ son epiequivalentes. Como uno de ellos es proyectivo y el otro no, entonces no pueden ser isomorfos, contradiciendo (1). Entonces, todos los módulos planos son proyectivos y por lo tanto T es perfecto izquierdo.

(2)⇒(1) Si T es perfecto izquierdo, entonces cada módulo proyectivo es suplementado y por lo tanto la clase de los proyectivos es epicorrecta (Subsección 2.2.2).

Bibliografía

[1] ANDERSON, W.F. y FULLER, K.R., *Rings and Categories of Modules*, segunda edición, Springer-Verlag, New York, E.U.A., 1992.

[2] BUMBY, R.T., *Modules wich are isomorphic to submodules of each other*, Arch. Math. 16, 1965.

[3] FAITH, C., *Algebra: Rings, Modules and Categories I*, Springer-Verlag, Berlín, Alemania, 1973.

[4] FAITH, C., *Algebra II: Ring Theory*, Springer-Verlag, Berlín, Alemania, 1976.

[5] GOODEARL, K.R., *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*, Marcel Dekker Inc., New York, E.U.A., 1976.

[6] MOHAMED, S.H. y MÜLLER, B.R., *Continuous and Discrete Modules*, Cambridge University Press, New York, E.U.A., 1990.

[7] STENSTRÖM, BO, *Rings and modules of quotients*, Springer-Verlag, New York, E.U.A., 1971.

[8] WISBAUER, R., *Correct Classes of Modules*, Algebra and Discrete Mathematics.

[9] WISBAUER, R., *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach , Reading, 1991.